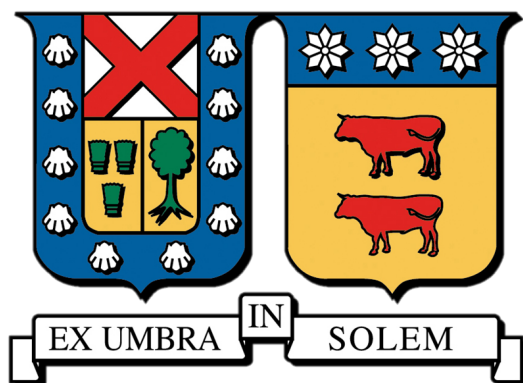


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**CÁLCULO DE EQUILIBRIO DE MERCADO EN ECONOMÍAS
CON INCERTIDUMBRE VÍA MÉTODOS DE PRIMER ORDEN**

ALAN ALBERTO GREZ JIMENEZ

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PROFESORES GUÍA: JULIO DERIDE SILVA - LUIS BRICEÑO ARIAS

JUNIO-2024

Resumen

En este trabajo se estudia la solución de problemas económicos de equilibrio mediante la formulación de problemas centralizados equivalentes resueltos con algoritmos de primer orden. Se aborda primero la formulación matemática de los problemas de optimización asociados y los principios teóricos subyacentes. Se detallan los algoritmos empleados y se comparan sus rendimientos en términos de eficiencia y precisión, haciendo especial énfasis en la importancia de la no-anticipatividad y descomposición para algunos de ellos.

Los resultados experimentales muestran cómo estos algoritmos se desempeñan en diferentes escenarios y destacan las ventajas y desventajas de cada enfoque. Finalmente, se discuten las implicaciones prácticas de estos resultados y se sugieren posibles extensiones y aplicaciones futuras para la mejora.

Este estudio contribuye a una comprensión más profunda de los métodos de optimización para el cálculo de equilibrio con aplicaciones en mercados eléctricos, más aún, el enfoque es suficientemente general para ser aplicable a otros contextos. Con ello, se busca proporcionar herramientas y conocimientos que puedan ser aprovechados en diversos ámbitos donde la optimización y la gestión eficiente de recursos sean cruciales.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que me han apoyado a lo largo de este viaje académico. En primer lugar, agradezco a mi familia, cuyos valores y enseñanzas han sido fundamentales para mi formación. Gracias por su amor, paciencia y por creer en mí incluso en los momentos más difíciles.

A mis amigos de la universidad, Cristobal, Maximiliano, Hugo, Mario, Felipe y Damian, con quienes compartí risas, desafíos y noches de estudio interminables, gracias por su compañía y apoyo incondicional. Su amistad ha sido un pilar fundamental durante estos años y ha hecho que este camino sea mucho más llevadero y gratificante.

También deseo agradecer a mis profesores guías, Julio Deride y Luis Briceño, por su orientación y apoyo constante en el desarrollo de esta memoria. Su conocimiento y experiencia han sido invaluable para mi crecimiento académico y profesional.

Finalmente, gracias a todos aquellos que, de una manera u otra, contribuyeron a la culminación de este proyecto. Su apoyo y motivación han sido esenciales para alcanzar esta meta.

Índice general

1. Introducción	2
2. Problema de Equilibrio de Walras Estocástico	4
2.1. Problema de Equilibrio	4
2.2. No-anticipatividad	8
3. Algoritmos	10
3.1. Three-Operator Splitting Scheme (TOPS)	10
3.2. Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS)	11
3.3. Alternating Direction Method Multipliers (ADMM)	12
4. Simulación y Resultados Numéricos	14
4.1. Problema Inversor-Consumidor	14
4.1.1. Incorporación No-Anticipatividad	16
4.2. Aplicacion Algoritmos	18
4.2.1. Three-Operator Splitting Scheme Aplicado	20
4.2.2. Forward-partial-inverse Splitting Aplicado	21
4.2.3. Alternating Direction Method Multipliers Aplicado	22
4.2.4. Deducción del precio.	23
4.3. Resultados Numéricos	24
4.3.1. Métricas.	24
4.3.2. Parámetros por Caso.	26
4.3.3. Resultados por Caso.	28
5. Conclusiones y Perspectiva	43
5.1. Conclusiones	43
5.2. Perspectivas	45

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los mercados es fundamental para comprender el comportamiento y las dinámicas de economías complejas, donde los agentes económicos interactúan bajo condiciones de incertidumbre. Estos problemas, aunque inspirados en mercados específicos como el eléctrico [6] [10] [9], tienen una formulación general que permite su aplicación en diversos otros contextos económicos. El análisis de estos sistemas contribuye a una mejor comprensión, búsqueda y análisis de estrategias óptimas de los agentes y cómo estos interactúan bajo tales estrategias.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar, analizar y comparar 3 métodos numéricos de primer orden para resolver problemas de equilibrio estocástico en economías de múltiples agentes. A través de una formulación centralizada, se estudian algoritmos avanzados presentes en la literatura actual, evaluando su desempeño y aplicabilidad.

Para lograr esto, se proponen dos formulaciones centralizadas equivalentes del problema de equilibrio, una de ellas que aplica características *no-anticipativas* [13] [16] [7], es decir, las decisiones tomadas en un momento dado no dependen de información futura que no se ha revelado. De esta forma aseguramos que las decisiones sean realistas y prácticas, considerando únicamente la información disponible en el presente y no posibles eventos futuros que aún no han ocurrido.

Estas formulaciones son complementadas y resueltas con una serie de algoritmos avanzados presentes en la literatura. Los algoritmos estudiados son Three-Operator Splitting Scheme (TOPS) [4], Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS) [3]; métodos modernos basados en proyecciones, y Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) [2], método basado en descomposición y que explota técnicas de optimización que llevan más tiempo en la academia.

Adicionalmente, se realiza una simulación numérica aplicada a un problema inversor-consumidor,

lo que permite comparar el desempeño de los diferentes algoritmos en condiciones realistas. Los resultados obtenidos se analizan detalladamente para identificar fortalezas y debilidades de cada método, proporcionando así una visión clara sobre su aplicabilidad en la resolución de problemas de equilibrio estocástico.

Finalmente, se presentan conclusiones y perspectivas futuras, destacando posibles mejoras y áreas de investigación adicional para optimizar aún más estos métodos y su implementación en mercados.

La organización del manuscrito es la siguiente. En el capítulo 2, se analiza el problema de equilibrio de Walras estocástico y se presenta una formulación centralizada junto con una solución correspondiente. En el capítulo 3, se detallan tres algoritmos principales: (TOPS), (FPIS) y (ADMM). El capítulo 4 se dedica a la simulación y resultados numéricos, incluyendo la aplicación de estos algoritmos a un problema inversor-consumidor dentro del mercado eléctrico, evaluando su rendimiento y precisión. Finalmente, en el capítulo 5, se presentan las conclusiones y se exploran posibles perspectivas para futuras investigaciones en el campo.

Capítulo 2

Problema de Equilibrio de Walras Estocástico

En el siguiente capítulo abordamos el problema general de equilibrio estocástico de Walras con su respectiva solución. Proponemos una formulación centralizada del problema de equilibrio con su respectiva solución. Finalmente, demostramos un teorema que caracteriza ambos problemas a partir de sus soluciones.

2.1. Problema de Equilibrio

Consideremos una economía puramente de intercambio, esto es, existen $M \in \mathbb{N}$ agentes, indexados por $i = 1, \dots, M$, que comercializan entre ellos un bien generado a partir de $N \in \mathbb{N}$ tecnologías diferentes. Un agente $i = 1, \dots, M$ tiene a su disposición una cantidad $x_i \in \mathbb{R}^N$ de un bien para comercializar, donde cada componente de este vector representa una de las N tecnologías con la que este fue fabricado o generado, y posee una función de costo o pérdida $\varphi^i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que refleja sus preferencias.

El signo que posee la variable x^i determina si es oferta o demanda, esto pues, términos, $x^i > 0$ aportan bienes a la economía representando lo que se oferta, o simplemente la oferta, Mientras que términos $0 > x^i$ sustraen bienes a la economía, actuando como lo que se requiere, o simplemente demanda.

La transacción se realiza a un precio de mercado $\rho \in \mathbb{R}^N$ sobre el bien en cada tecnología. Este precio ρ es desconocido y hallarlo uno de es nuestros objetivos.

Por consiguiente, considerando que cada uno de los agentes posee el interés individual de minimizar

sus costes, es que presentamos un marco teórico formal para explicar este concepto.

Definición 2.1 [*Problema de Equilibrio*] Sean un vector de precio $\rho \in \mathbb{R}^N$ y funciones $\{\varphi^i\}_{i=1}^M$ tal que $\varphi^i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son propias, convexas y semi-continuas inferiores para todo $i = 1, \dots, M$. El problema de equilibrio es hallar ρ tal que

$$x^i \in \operatorname{argmin}_{x^i \in \mathbb{R}^N} \{\varphi^i(x^i) + \langle \rho, x^i \rangle\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}, \quad (2.1)$$

y donde

$$\sum_{i=1}^M x^i = 0.$$

es no vacío [1, Teorema 9.20], para todo $i = 1, \dots, M$.

La solución al problema de equilibrio se define como sigue

Definición 2.2 [*Solución al Problema de Equilibrio*] La solución al Problema de Equilibrio 2.1 viene dada por $\rho^* \in \mathbb{R}^N$ y una colección $\{x^{i*}\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^N$ tal que para cada $i = 1, \dots, M$,

$$x^{i*}(\rho^*) := x^{i*} \in \operatorname{argmin}_{x^i \in \mathbb{R}^N} \{\varphi^i(x^i) + \langle \rho^*, x^i \rangle\} \quad (2.2)$$

y

$$\sum_{i=1}^M x^{i*}(\rho^*) = 0. \quad (2.3)$$

La restricción (2.3) representa el intercambio total de bienes en el mercado, es decir, es la ecuación de equilibrio.

Proponemos una formulación equivalente a la Definición 2.1, que llamamos formulación centralizada del problema de equilibrio, o sólo, problema centralizado. Esta formulación considera de forma aditiva a todos los agentes de la economía, otorgándole a todos la misma relevancia. [11].

El precio ρ corresponde a la variable dual del problema centralizado (2.4), la cual se ve maximizada una vez se halla la solución al problema centralizado, encontrando una estrategia individual de comercialización óptima para los agentes de manera, es decir, un precio máximo a costo mínimo para cada agente individualmente.

Considerando los mismos agentes y tecnologías, definimos:

Definición 2.3 [*Problema Centralizado*] Sean $\{\varphi^i\}_{i=1}^M$ funciones tal que $\varphi^i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son

propias, convexas y semi-continuas inferiores y $x := (x^i)_{i=1}^M \in \mathbb{R}^{MN}$. El problema centralizado es:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{NM}} \quad & \sum_{i=1}^M \varphi^i(x^i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^M x^i = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

La solución al problema centralizado se define como sigue

Definición 2.4 [Solución al problema centralizado] La solución al problema centralizado (2.4) es $(x^{i*})_{i=1}^M =: x^* \in \mathbb{R}^{MN}$ tal que

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^{MN}} \left\{ \sum_{i=1}^M \varphi^i(x^i) \mid \sum_{i=1}^M x^i = 0 \right\}. \tag{2.5}$$

Ahora introduzcamos notación necesaria. El dominio de una función φ viene dado por $\operatorname{dom} \varphi = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x) < +\infty\}$. Además, denotamos por $\mathbb{M}_{N \times MN}(\mathbb{R})$ a las matrices reales de tamaño $N \times MN$, de esta forma, sea $\pi_i \in \mathbb{M}_{N \times MN}(\mathbb{R})$ por

$$\pi_i := (0_{N \times (i-1)N} \mid I_{N \times N} \mid 0_{N \times (M-i)N})_{N \times MN}, \tag{2.6}$$

con $I_{N \times N}$ es la matriz identidad, $0_{N \times (i-1)N}$ y $0_{N \times (M-i)N}$ son matrices de ceros, tal que si $x \in \mathbb{R}^{MN}$, entonces $\pi_i x = x^i \in \mathbb{R}^N$ y $\operatorname{dom} \pi_i = \mathbb{R}^{MN}$. Denotamos la función indicatriz sobre un conjunto X por

$$\iota_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in X, \\ +\infty, & x \notin X, \end{cases}$$

con $\operatorname{dom} \iota_X = X$. Definimos el subdiferencial de φ en $x \in \operatorname{dom} \varphi \subset \mathbb{R}^N$ por

$$\partial\varphi(x) := \{z \in \mathbb{R}^N \mid \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \langle y - x, z \rangle + \varphi(x) \leq \varphi(y)\},$$

el interior relativo de X por

$$\operatorname{ri} X = \{x \in X \mid \operatorname{cone}(X - x) = \operatorname{span}(X - x)\},$$

con $\operatorname{cone}(X) = \{\lambda x \mid x \in X, \lambda > 0\}$ y $\operatorname{span}(X)$ es el espacio vectorial más pequeño que contiene a X .

El siguiente teorema caracteriza la solución del problema de equilibrio en Def 2.1 a partir del

problema centralizado en Def 2.3. En particular, si somos capaces de hallar una solución para un problema, entonces dicha solución será la misma para el otro problema.

Teorema 2.5 *Sea el problema de equilibrio en Def 2.1, $(\rho^*, \{x^{i*}\}_{i=1}^M) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{MN}$ una solución y $x^* \in \mathbb{R}^{MN}$ una solución al problema centralizado en Def 2.3. Si*

$$\left(\bigcap_{i=1}^M \text{ri dom } \varphi^i \right) \cap \text{ri dom } \left(\iota_{\{0\}} \circ \sum_{i=1}^M \pi_i \right) \neq \emptyset$$

y $\text{ri dom } \varphi^i$ convexo para todo $i = 1, \dots, M$, entonces x^ resuelve el problema de equilibrio y $\{x^{i*}\}_{i=1}^M$ resuelve el problema centralizado.*

Proof *Por Teorema de Fermat [1, Teorema 16.3], $x^* \in \mathbb{R}^{MN}$ es solución al problema centralizado, si y sólo si,*

$$0_{NM} \in \partial \left(\sum_{i=1}^M \varphi^i \circ \pi_i + \iota_{\{0\}} \circ \sum_{i=1}^M \pi_i \right) (x^*), \quad (2.7)$$

y como $\left(\bigcap_{i=1}^M \text{ri dom } \varphi^i \right) \cap \text{ri dom } \left(\iota_{\{0\}} \circ \sum_{i=1}^M \pi_i \right) \neq \emptyset$, por [1, Proposición 6.20] y [1, Corolario 16.50], entonces (2.7)

$$= \sum_{i=1}^M \partial (\varphi^i \circ \pi_i) (x^*) + \partial \left(\iota_{\{0\}} \circ \sum_{i=1}^M \pi_i \right) (x^*),$$

y por regla de la cadena del subdiferencial [1, Corolario 16.53], entonces

$$= \sum_{i=1}^M \pi_i^T \partial \varphi^i (\pi_i x^*) + \left(\sum_{i=1}^M \pi_i \right)^T N_{\{0\}} \left(\sum_{i=1}^M \pi_i x^* \right), \quad (2.8)$$

con $N_{\{0\}}(\cdot) = \partial \iota_{\{0\}}(\cdot)$. Luego, $\rho \in N_{\{0\}} \left(\sum_{i=1}^M \pi_i x^ \right)$, si y sólo si, $\rho \in \mathbb{R}^N$, pues $\sum_{i=1}^M \pi_i x^* = 0$. Así, sustituyendo en (2.8), tenemos*

$$0_{NM} \in \sum_{i=1}^M \pi_i^T \partial \varphi^i (\pi_i x^*) + \left(\sum_{i=1}^M \pi_i \right)^T \rho. \quad (2.9)$$

Separando (2.9) por componentes, entonces $0_N \in \partial\varphi^i(\pi_i x^*) + \rho$, para todo $i = 1, \dots, M$, y obtenemos que $(\rho, \{x^{i*}\}_{i=1}^M)$ es solución del problema de equilibrio (2.1). Demostrar la dirección inversa es seguir las igualdades en sentido inverso. \square

2.2. No-anticipatividad

En la presente sección, modelamos un problema de optimización estocástico general que abarca una cantidad finita de escenarios. El objetivo de este modelamiento es aplicarlo como técnica de relajamiento al problema centralizado Def 2.3, para explotar su descomposición. Esta formulación está basada en los trabajos [15], [12], [14] y [5].

Consideremos un horizonte de eventos de largo $T \geq 2$, tal que cada etapa está indexada por $t = 1, \dots, T$. Denotamos por Ξ_t al conjunto de escenarios $\xi_t \in \mathbb{R}^{m_t}$ en la etapa t , cada uno de ellos conocido. Definimos el conjunto de escenarios por $\Xi := \Xi_1 \times \dots \times \Xi_T$, así los elementos $\xi \in \Xi$ tienen probabilidad conocida $p(\xi) = p_\xi > 0$ y

$$\sum_{\xi \in \Xi} p_\xi = 1.$$

Las variables de decisión x_t del problema son definidas por etapa t , siendo cada variable una respuesta a todos los escenarios $\xi \in \Xi$, esto es, $x_t(\cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^{n_t}$. De esta manera, definimos una respuesta a un escenario por

$$x(\cdot) : \xi \rightarrow x(\xi) = (x_1(\xi), \dots, x_T(\xi)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_T} =: \mathbb{R}^N.$$

Estas variables pertenecen al espacio vectorial Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$, donde

$$\mathcal{H} = \{x(\cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^N \mid x \text{ función}\}, \quad \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}_{\xi} \left\{ \sum_{t=1}^T \langle x_t(\xi), y_t(\xi) \rangle_{\mathbb{R}^{n_t}} \right\},$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n_t}}$ producto interno usual de \mathbb{R}^{n_t} con $t = 1, \dots, T$ y \mathbb{E} la esperanza sobre Ξ . Así, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ es un espacio de dimensión finita.

Notemos que $x(\xi)$ es la respuesta de una variable a un escenario ξ , el cual está constituido por una serie de etapas que asumimos que se revelan secuencialmente. Luego, cada decisión $x_t(\xi)$ depende sólo de la información revelada hasta la etapa t , esto es, $x_t(\xi)$ sólo depende de $\xi_{[t]} := (\xi_1, \dots, \xi_{t-1})$.

Llamaremos *no-anticipatividad* a la propiedad de independencia sobre escenarios, es decir,

$$x_1(\xi) = x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x_t(\xi) = x_t(\xi_{[t]}) = x_t(\xi_1, \dots, \xi_{t-1}) \in \mathbb{R}^{n_t}, \quad t = 2, \dots, T, \quad (2.10)$$

con x_1 independiente de los escenarios y denominamos por variables *no-anticipativas* a los

$$x(\xi) = (x_1, x_2(\xi_{[2]}), \dots, x_T(\xi_{[T]})), \quad \forall \xi \in \Xi.$$

El conjunto de todas las variables *no-anticipativas* es

$$\mathcal{N} := \{x(\cdot) \in \mathcal{H} \mid x(\xi) = (x_1, x_2(\xi_{[2]}), \dots, x_T(\xi_{[T]}))\}, \quad (2.11)$$

y conforman un subespacio vectorial de \mathcal{H} .

Por último, el esquema de minimización que modela un problema de optimización estocástico de multiple etapas es

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{H}} \quad & \mathbb{E}\{f(x(\xi), \xi)\} \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

donde $f(x(\cdot), \cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ y $f(\cdot, \xi) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones propias, convexas y semi-continuas inferiores, que representan los costos asociados a cada decisión $x \in \mathcal{H}$.

Capítulo 3

Algoritmos

En este capítulo estudiamos problemas de minimización en distintos esquemas, abordamos los algoritmos con los cuales resolvemos los distintos esquemas, la simulación a el problema centralizado (2.4) y revisamos las hipótesis necesarias para su convergencia.

Introduzcamos el operador proximal, sea $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una función propia, convexa y semi-continua inferior, el *operador proximal de f* viene dado por $prox_f(x) = argmin_{y \in \mathcal{H}} (f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|_{\mathcal{H}}^2)$, el cual es función [1, Definición 12.23]. Notar que si $f = \iota_X$ con $X \neq \emptyset$ cerrado y convexo, entonces $prox_{\iota_X} = P_X$, es decir, la proyección al conjunto X [1, Teorema 3.16].

3.1. Three-Operator Splitting Scheme (TOPS)

El siguiente método está basado en [4, Sección 3.1]. Explota la separación de 3 operadores como sigue,

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(x) + h(x) \tag{3.1}$$

donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, $f, g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones semi-continuas inferiores, propias y convexas, $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, diferenciable y ∇h es L -Lipschitz continua.

En teoría, es posible resolver el problema (3.1) de forma directa al activar directamente la función $(f + g + h)(\cdot)$ via su operador proximal, no obstante, no siempre es posible determinar fórmulas explícitas de este operador. Es por esto, que resulta ventajoso considerar la activación de funciones f y g separadamente a través de sus operadores proximales que poseen menor complejidad en su cálculo.

De esta forma, introducimos el siguiente algoritmo que resuelve el problema (3.1),

Algoritmo 1: Three-Operator Splitting Scheme (TOPS)

Let: Sea $z_0 \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$
1 for $k = 1, \dots, N$ **do**
2 $x_g^k = \mathbf{prox}_{\gamma g}(z_k)$
3 $x_f^k = \mathbf{prox}_{\gamma f}(2x_g^k - z_k - \gamma \nabla h(x_g^k))$
4 $z_{k+1} = z_k + x_f^k - x_g^k$

La convergencia del algoritmo, esta asegurada por el siguiente teorema,

Teorema 3.1 Sean \mathcal{H} , f , g , h y L como en (3.1) y $x^* \in \mathcal{H}$ óptimo que resuelve (3.1), entonces x_g^k converge a x^* .

La demostración se deduce de [4, Teorema 2.1]. \square

3.2. Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS)

El siguiente método está basado en proyecciones y explota el siguiente esquema [3, Problema 6.6] mediante la separación de 2 operadores y la estructura de espacio vectorial,

$$\min_{x \in \mathcal{V}} f(x) + g(x) \tag{3.2}$$

donde \mathcal{V} es un subespacio vectorial de \mathcal{H} , diremos, $\mathcal{V} \leq \mathcal{H}$ y con \mathcal{H} Hilbert, $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, convexa y semi-continua inferior, $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable y ∇g es L -Lipschitz continua.

Análogo al método anterior, es posible resolver el problema (3.2) de forma directa al activar directamente la función $(f + g)(\cdot)$ via su operador proximal, no obstante, no siempre es posible determinar fórmulas explícitas de este operador. Es por esto, que resulta ventajoso considerar la activación f separadamente a través de su operador proximal que posee menor complejidad en su cálculo.

De esta forma, introducimos el siguiente algoritmo que resuelve el problema (3.2),

Algoritmo 2: Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS)

Let: Sea $z_0 \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$
1 for $k = 1, \dots, N$ **do**
2 $x^k = P_V z^k$
3 $y^k = (x^k - z^k)/\gamma$
4 $s^k = x^k - \gamma P_V(\nabla g(x^k)) + \gamma y^n$
5 $p^k = \text{prox}_{\gamma f}(s^k)$
6 $z^{k+1} = z^k + \lambda^k(p^k - x^k)$

La convergencia del algoritmo viene garantizada por el siguiente teorema,

Teorema 3.2 Sean \mathcal{H} , V , f , g como en (3.2), sea $\gamma \in]0, 2/L[$, sea $\alpha = \max\{2/3, 2/(\gamma + 2/L)\}$ y sea $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, 1/\alpha[$. Si

$$0 \in (\partial f + \nabla g + N_V)$$

Entonces el algoritmo 2 converge a un \bar{x} de manera factible respecto al espacio vectorial, esto es, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$, \bar{x} es solución del problema (3.2) y $x_n \rightarrow \bar{x}$.

La demostración está en [3, Proposición 6.7]. \square

3.3. Alternating Direction Method Multipliers (ADMM)

Este método en [2, Capítulo 3] que combina las propiedades de descomposición de ascenso dual [2, Subsección 2.1] con las propiedades de convergencia del método de multiplicadores [2, Subsección 2.2]. El algoritmo resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}^M} \quad & f(x) + g(z), \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Bz = c, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones semi-continuas inferiores, propias y convexas, $A \in \mathbb{M}^{p \times N}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}^{p \times M}(\mathbb{R})$ son matrices y $c \in \mathbb{R}^p$.

Para este método, definimos el *Lagrangiano Aumentado* por:

$$L_r(x, z, y) := f(x) + g(z) + y^T(Ax + Bz - c) + \frac{r}{2} \|Ax + Bz - c\|_2^2 \tag{3.4}$$

con $r \geq 0$.

Análogo a los métodos anteriores, resolver el problema (3.3) directamente puede no ser fácil, por este motivo, *ADMM* desagrega el problema descomponiendo la función objetivo, minimizando las variables primales y maximizando la variable dual, esta maximización a través de un ascenso del gradiente sobre y , para L_0 .

De esta forma, introducimos el siguiente algoritmo que resuelve el problema (3.3),

Algoritmo 3: Alternating Direction Method Multipliers (ADMM)

Let: $r > 0$

```

1 for  $k = 1, \dots, N$  do
2    $x^{k+1} = \operatorname{argmin}_x L_r(x, z^k, y^k)$ 
3    $z^{k+1} = \operatorname{argmin}_z L_r(x^{k+1}, z, y^k)$ 
4    $y^{k+1} = y^k + r(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c)$ 

```

La convergencia del algoritmo está garantizado por el siguiente teorema,

Teorema 3.3 Sean f y g definidas como en (3.3) y L_0 definido en (3.4). Si L_0 tiene un punto silla, i.e., que existe $(x^*, z^*, y^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^p$ tal que

$$L_0(x^*, z^*, y) \leq L_0(x^*, z^*, y^*) \leq L_0(x, z, y^*), \quad \forall (x, z, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^p,$$

entonces,

- (i) (x^*, z^*) es solución de primal de (3.3)
- (ii) y^* es el óptimo dual de (3.3)
- (iii) Si $r^k = Ax^k + Bz^k - c$, entonces $r^k \rightarrow 0$.
- (iv) $f(x^k) + g(z^k) \rightarrow f(x^*) + g(z^*)$.

Demostración en [2, Subsección 3.2]. \square

Capítulo 4

Simulación y Resultados Numéricos

En el presente capítulo, presentamos un problema de equilibrio con aplicación a un problema relativo al mercado eléctrico, presentando dos agentes que interactúan entre ellos comercializando electricidad generada a través de distintas tecnologías. Seguido de cómo se desempeñan los algoritmos del capítulo anterior para este problema.

4.1. Problema Inversor-Consumidor

Consideremos un horizonte de eventos de 2 etapas, una determinista y, una segunda etapa, estocástica, tal que cada escenario posible de esta segunda etapa estará indexado por

$$\xi \in \Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_M\}, \quad (4.1)$$

y cuya función de probabilidad p_ξ es conocida, con

$$\sum_{\xi \in \Xi} p_\xi = 1.$$

Este horizonte pertenece a una economía compuesta por dos agentes, un inversor y un consumidor que comercializan entre ellos bienes.

Ambos agentes deciden sobre la asignación de recursos de inversión, producción y consumo de N tecnologías en un espacio $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$, donde

$$\mathcal{H} := \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^M, \quad \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} := \langle x^1, y^1 \rangle_{\mathbb{R}^N} + \mathbb{E}\{\langle x_\xi^2, y_\xi^2 \rangle_{\mathbb{R}^N}\} + \mathbb{E}\{x_\xi^3 y_\xi^3\},$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ producto interno usual en \mathbb{R}^N , de y norma inducida por

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 := \|x^1\|_{\mathbb{R}^N}^2 + \mathbb{E}\{\|x_\xi^2\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \mathbb{E}\{|x_\xi^3|^2\}. \quad (4.2)$$

Esta asignación $x = (x_1, x_2, x_3)$, que denotaremos por (c, g, q) de ahora en adelante, tiene la información de ambas etapas consolidadas en una sola.

Primero, la variable $c \in \mathbb{R}^N$ es la variable perteneciente a la primera etapa y la cual es independiente de la información de la segunda etapa, esta variable es la asignación de recursos de inversión y que pertenece al agente inversor.

Segundo, la variable $g \in \mathbb{R}^{NM}$, es la variable perteneciente a la segunda etapa, esta depende intrínsecamente de cada escenario y es la representación de la asignación de recursos de generación a través de una tecnología. La generación por escenario la denotaremos por $g_\xi \in \mathbb{R}^N$ y posee la característica de generar bienes fungibles para satisfacer la demanda, esto es, que no es esencial conocer cual de las N tecnología genera el bien, sólo analizaremos conocer la cantidad total de bienes generados, es decir, la suma de los componentes del vector g_ξ , dado por, $\langle \mathbf{1}, g_\xi \rangle = \mathbf{1}^T g_\xi$. Esta variable pertenece al agente inversor.

Tercero, la variable $q \in \mathbb{R}^M$ pertenece a la segunda etapa, esta depende sólo de los escenarios. Por cada escenario, denotaremos por $q_\xi \in \mathbb{R}$ la cantidad de bienes que se consumen. Esta variable pertenece al agente consumidor.

Luego de esta asignación de variables $(c, g, q) \in \mathcal{H}$, vienen los costos asociados a cada decisión del agente al asignar recursos. El agente inversor, posee los costos asociados a la inversión de recursos $\varphi_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y que pertenecen únicamente a la primera etapa, esto explica la independencia de escenario. Los costos asociados a la generación de $g \in \mathbb{R}^{NM}$ recursos está dado por $\varphi_2 : \Xi \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Como esta variable pertenece a la segunda etapa, incorporamos a la función φ_2 dependencia sobre los escenarios $\xi \in \Xi$ además de depender de los costos de generación por cada escenario $g_\xi \in \mathbb{R}^N$.

El agente consumidor, posee costos por $q \in \mathbb{R}^M$ consumo, esto sujeto a cada escenario, define por $\varphi_3 : \Xi \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ a la función de pérdida del consumidor.

Dado que ambos agentes se intercambian bienes, entonces el problema de equilibrio es hallar el precio por unidad generada $\rho_\xi \in \mathbb{R}$ por cada escenario $\xi \in \Xi$ sujeto a la condición de equilibrio, esto es

$$\min_{c, g \geq 0} \mathbb{E}_\xi \{ \varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \iota_{\mathbb{R}^+}(c - g_\xi) \} + \mathbb{E}_\xi \{ \langle \rho_\xi, \mathbf{1}^T g_\xi \rangle \},$$

$$\begin{aligned} \min_{q \geq 0} \quad & \mathbb{E}_\xi \{ \varphi_3(\xi, q_\xi) \} - \mathbb{E}_\xi \{ \langle \rho_\xi, q_\xi \rangle \}, \\ & \mathbb{1}_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para asegurar factibilidad, las funciones $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\xi, \cdot)$ y $\varphi_3(\xi, \cdot)$ son propias, convexas y diferenciables para todo $\xi \in \Xi$, como se definió en (2.1).

De esta forma, al asignar cada variable y función, como en (2.1)

$$\begin{aligned} x^1 &= (c, g), \quad x^2 = q, \\ \varphi^1(x^1) &= \mathbb{E}_\xi \{ \varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \iota_{\mathbb{R}^+}(c - g_\xi) \}, \quad \varphi^2(x^2) = \mathbb{E}_\xi \{ \varphi_3(\xi, q_\xi) \}, \end{aligned}$$

recuperamos el problema de equilibrio aplicado al problema de inversor-consumidor con la restricción de equilibrio

$$\mathbb{1}_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi.$$

Esto permite establecer la correspondencia con el problema centralizado (2.4) con nuestro problema centralizado aplicado a el problema inversor-consumidor

$$\min_{(c, g, q) \in \mathcal{H}} \quad \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \{ \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi) \} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \mathbb{1}_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi, \\ & c - g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi, \\ & c, g_\xi, q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

el cual, por Teorema 2.5, la solución de (4.4)-(4.5) resuelve el problema de equilibrio (4.3).

4.1.1. Incorporación No-Anticipatividad

En esta subsección, generamos una versión equivalente al problema centralizado (4.4) a partir de la introducción de un sub-espacio vectorial como restricción, en particular, al inyectar la variable $c \in \mathbb{R}^N$ a un espacio de mayor dimensión.

Primeramente, mantenemos un horizonte de dos etapas, pero la etapa determinista pasa a ser una etapa estocástica al recibir una copia de los Ξ escenarios de la segunda etapa que vimos en (4.1), de esta forma, mantenemos M escenarios y p_ξ continua siendo conocido para cada $\xi \in \Xi$.

Así, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ se redefine para este problema por

$$\mathcal{H} := \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^M, \quad \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} := \mathbb{E} \{ \langle x_\xi^1, y_\xi^1 \rangle_{\mathbb{R}^N} \} + \mathbb{E} \{ \langle x_\xi^2, y_\xi^2 \rangle_{\mathbb{R}^N} \} + \mathbb{E} \{ x_\xi^3 y_\xi^3 \},$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ producto interno usual en \mathbb{R}^N , de y norma inducida por

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 := \mathbb{E}\{\|x_{\xi}^1\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \mathbb{E}\{\|x_{\xi}^2\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \mathbb{E}\{|x_{\xi}^3|^2\}, \quad (4.6)$$

con $x = (x_1, x_2, x_3) = (c, g, q)$.

Ahora, inyectamos la variable c al espacio de no-anticipatividad así como se definió en (2.10), es decir,

$$x_1(\xi) = c_{\xi} \in \mathbb{R}^N, \quad x_2(\xi) = \begin{pmatrix} g_{\xi} \\ q_{\xi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \Xi,$$

de esta forma, capturamos la propiedad no-anticipativa para c al construirla como una función de respuesta ante los escenarios, es decir, $c(\cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^N$, de igual forma para $g(\cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $q(\cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ que responden al escenario $\xi \in \Xi$ pero no son no-anticipativos.

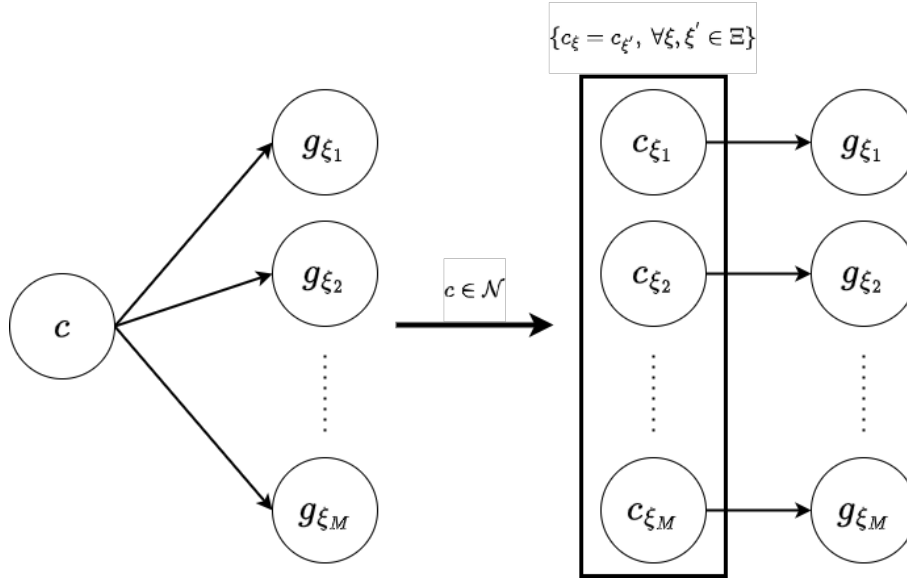


Figura 4.1: No-Anticipatividad aplicada a la variable $c \in \mathbb{R}^N$. Notar que incrementa la dimensión de la variable c por el número de escenarios totales de nuestro problema y forzando a que sea igual en todos ellos. Existen otras formas de aplicar la no-anticipatividad que no abordamos en este trabajo. Las flechas representan la dependencia de g_{ξ} sobre c o c_{ξ} para cada $\xi \in \Xi$.

Como el vector $c(\xi)$ es no-anticipativo, entonces la información no puede reaccionar a información que no ha sido revelada, este efecto capturado por $x_1(\xi) = c_{\xi}$ es traducido en que c_{ξ} es independiente del escenario, es decir,

$$\mathcal{N} = \{(c, g, q) \in \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^M \mid c_{\xi} = c_{\xi'}, \quad \forall \xi, \xi' \in \Xi\},$$

siendo así igual para todos los escenarios, logrando así la independencia sobre los escenarios, que es el planteamiento original al problema centralizado (2.4).

El problema centralizado equivalente que considera la no-anticipatividad es:

$$\min_{(c,g,q) \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_\xi \{ \varphi_1(c) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi) \} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \mathbf{1}_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi \\ & c - g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi \\ & c \in \mathcal{N}, \\ & c, g_\xi, q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notar que al introducir la restricción de no-anticipatividad la función objetivo del problema (4.7) es separable respecto a $\xi \in \Xi$.

4.2. Aplicacion Algoritmos

En esta sección estudiamos cómo resolver el problema centralizado (4.4) y el problema centralizado con no-anticipatividad (4.7) a través de la aplicación de los Algoritmos 3.1, 3.2 y 3.3.

Aplicamos los 3 algoritmos explotando de distintas formas las propiedades del problema, considerando los siguientes parámetros:

- Costos de inversión: $I \in \mathbb{R}^N$.
- Costos marginales: $MC_\xi \in \mathbb{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$, con MC_ξ matriz definida positiva, $\forall \xi \in \Xi$.
- Costos por carga perdida: $VOLL_\xi \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \Xi$.
- Demanda: $D_\xi \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \Xi$.

Asignemos las funciones de costo por $\varphi_1(c) = I^T c$ y $\varphi_2(\xi, g_\xi) = \frac{1}{2} g_\xi^T MC_\xi g_\xi$, para el inversor.

Notar que si $(c, g, q) \in \mathcal{N}$, entonces φ_1 se extiende naturalmente por $\varphi_1(c_\xi) = I^T c_\xi$, $\forall \xi \in \Xi$.

Dado que $VOLL_\xi$ es un costo por carga perdida, entonces estamos interesados en activar el total de la demanda por ese costo en cada escenario, es decir, $-VOLL_\xi D_\xi$ con $\xi \in \Xi$. Por otro lado, es indeseable no activar el total de la demanda, ya que, la acumulación de demanda no satisfecha genera pérdida, esta acumulación está dada por $VOLL_\xi q_\xi$, donde q_ξ es la decisión de no satisfacer la demanda D_ξ generando una pérdida. De esta forma, el costo asociado al agente consumidor es $\varphi_3(\xi, q_\xi) = -VOLL_\xi \cdot (D_\xi - q_\xi)$. Además, incorporamos las siguientes restricciones al problema, esto es $D_\xi - q_\xi \geq 0$ y $q_\xi \geq 0$.

Ahora, definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} D &:= \{(c, g, q) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{NN} \times \mathbb{R}^M \mid c \geq g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi\}, \\ D_{\mathcal{N}} &:= \{(c, g, q) \in \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^{NN} \times \mathbb{R}^M \mid c_\xi \geq g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi\}, \\ C &:= \{(c, g, q) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{NN} \times \mathbb{R}^M \mid \mathbb{1}^T g_\xi \geq D_\xi - q_\xi \geq 0, \quad q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi\}, \end{aligned}$$

los cuales son convexos, cerrados y no vacíos. Así, reescribimos el problema centralizado (4.4) por

$$\min_{(c, g, q) \in \mathcal{H}} \quad \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\} + \iota_D(c, g, q) + \iota_C(c, g, q),$$

y para el problema centralizado no-anticipativo (4.7) por

$$\min_{(c, g, q) \in \mathcal{H}} \quad \mathbb{E}_\xi \{\varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\} + \iota_{D_{\mathcal{N}}}(c, g, q) + \iota_C(c, g, q) + \iota_{\mathcal{N}}(c, g, q).$$

Ambos problemas están bien definidos, pues φ_1 y φ_3 son funciones lineal y φ_2 es definido por una matriz definida positiva, así la suma de estas funciones es convexa y diferenciable, los conjuntos D , $D_{\mathcal{N}}$, C y \mathcal{N} inducen, por sus propiedades, que ι_D , $\iota_{D_{\mathcal{N}}}$, ι_C y $\iota_{\mathcal{N}}$ son propias, convexas y semi-continuas inferiores. [1, Sección 11.4], además suponemos que el problema centralizado no-anticipativo (4.7) satisface la condición de Slater, es decir, $\text{int}(C \cap D_{\mathcal{N}} \cap \mathcal{N}) \neq \emptyset$.

Por último, la constante Lipschitz del gradiente de $\varphi_1 + \mathbb{E}\{\varphi_2 + \varphi_3\}$ de (4.4) y $\mathbb{E}\{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3\}$ de (4.7) es la misma, debido a la linealidad de φ_1 y, así, L está dado por

$$L = \mathbb{E}\{\|MC_\xi\|_F\}, \tag{4.9}$$

donde $\|\cdot\|_F$ es la norma Frobenius, aunque es independiente de la norma matricial.

4.2.1. Three-Operator Splitting Scheme Aplicado

Para la aplicación del Algoritmo 3.1 *TOPS*, asignamos la función objetivo a las componentes que constituyen (3.1) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} h(x) &\longleftrightarrow \varphi_1(c) + \mathbb{E}\{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\}. \\ g(x) &\longleftrightarrow \iota_D(c, g, q). \\ f(x) &\longleftrightarrow \iota_C(c, g, q). \end{aligned}$$

Al realizar esta asignación se tiene que $prox_{\gamma g} \equiv P_D$ y $prox_{\gamma f} \equiv P_C$. De tal forma, si $(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q}) \in \mathcal{H}$ es el punto que proyectamos, entonces, la proyección $P_C(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q})$ resuelve

$$\begin{aligned} \min_{(c, g, q) \in \mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2} \|c - \bar{c}\|_{\mathbb{R}^N}^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\|g_\xi - \bar{g}_\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{(g_\xi - \bar{q}_\xi)^2\}, \\ \text{s.t.} \quad & (c, g, q) \in C, \end{aligned} \tag{4.10}$$

y $P_D(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q})$ resuelve

$$\begin{aligned} \min_{(c, g, q) \in \mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2} \|c - \bar{c}\|_{\mathbb{R}^N}^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\|g_\xi - \bar{g}_\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{(g_\xi - \bar{q}_\xi)^2\}, \\ \text{s.t.} \quad & (c, g, q) \in D. \end{aligned}$$

Las proyecciones $P_C(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q})$ y $P_D(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q})$ se resuelven numéricamente utilizando la librería *Pyomo*, empleando el solver *IPOPT*.

Por último, la función objetivo asignada a h satisface ser convexa y diferenciable con su diferencial ∇h L -Lipschitz continuo definida en (4.9), las funciones asignadas a g y f son propias, convexas y semi-continuas inferiores, satisfaciendo así las hipótesis del teorema de convergencia (3.1), por ende, el siguiente algoritmo converge al óptimo.

Algoritmo 4: TOPS Aplicado

Let: Sea $(z_1^0, z_2^0, z_3^0) \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$
1 for $k = 1, \dots, N$ **do**
2 $\begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} = \mathbf{P}_D \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix}$
3 $\begin{pmatrix} c_f^k \\ g_f^k \\ q_f^k \end{pmatrix} = \mathbf{P}_C \left(2 \begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} - \gamma \nabla h \begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} \right)$
4 $\begin{pmatrix} z_1^{k+1} \\ z_2^{k+1} \\ z_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} + \lambda_k \left(\begin{pmatrix} c_f^k \\ g_f^k \\ q_f^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} \right)$

4.2.2. Forward-partial-inverse Splitting Aplicado

Para la aplicación del Algoritmo 3.2 *FPIS*, asignamos la función objetivo a las componentes que consituyen (3.2) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 g(x) &\longleftrightarrow \mathbb{E}\{\varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\}. \\
 f(x) &\longleftrightarrow \iota_{D \cap C_{\mathcal{N}}}(c, g, q). \\
 V &\longleftrightarrow \mathcal{N} = \{(c, g, q) \in \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^M \mid c_\xi = c_{\xi'}, \quad \forall \xi, \xi' \in \Xi\}.
 \end{aligned}$$

Al realizar esta asignación se tiene que $P_V \equiv P_{\mathcal{N}}$ y $prox_{\gamma f} \equiv P_{D_{\mathcal{N}} \cap C}$. De tal forma, si $(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q}) \in \mathcal{H}$ es el punto que deseamos proyectar, la proyección $P_{\mathcal{N}}$ es explícitamente,

$$P_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{g} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\bar{c}\} \\ \bar{g} \\ \bar{q} \end{pmatrix}, \text{ con } \mathbb{E}\{\bar{c}\} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\bar{c}_\xi\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{\bar{c}_\xi\} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{NM}, \quad (4.11)$$

Este calculo viene a partir de [1, Example 3.8]. Mientras que la proyección $P_{D_{\mathcal{N}} \cap C}(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q})$ viene dada por resolver numéricamente

$$\begin{aligned}
 \min_{(c, g, q) \in \mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\|c - \bar{c}\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\|g_\xi - \bar{g}_\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{(g_\xi - \bar{q}_\xi)^2\}, \\
 \text{s.t.} \quad & (c, g, q) \in D_{\mathcal{N}} \cap C.
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Esta proyección se resuelve numéricamente utilizando la librería Pyomo, empleando el solver IPOPT.

Por último, la función objetivo asignada a g satisface ser convexa y diferenciable con su diferencial ∇g L -Lipschitz continuo definida en (4.9), la función asignada a f es propia, convexa y semi-continua inferior y \mathcal{N} es un sub-espacio vectorial satisfaciendo así las hipótesis del teorema de convergencia (3.2), por ende, el siguiente algoritmo converge al óptimo.

Algoritmo 5: *FPIS* Aplicado

Let: $(z_1^k, z_2^k, z_3^k) \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$

1 **for** $k = 1, \dots, N$ **do**

$$\begin{array}{ll}
 2 & \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} = P_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} \\
 3 & \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ y_3^k \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \left(\begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} \right) \\
 4 & \begin{pmatrix} s_1^k \\ s_2^k \\ s_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} - \gamma P_{\mathcal{N}} \nabla g \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ y_3^k \end{pmatrix} \\
 5 & \begin{pmatrix} p_1^k \\ p_2^k \\ p_3^k \end{pmatrix} = P_{D \cap C_{\mathcal{N}}} \begin{pmatrix} s_1^k \\ s_2^k \\ s_3^k \end{pmatrix} \\
 6 & \begin{pmatrix} z_1^{k+1} \\ z_2^{k+1} \\ z_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} + \lambda^k \left(\begin{pmatrix} p_1^k \\ p_2^k \\ p_3^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} \right)
 \end{array}$$

4.2.3. Alternating Direction Method Multipliers Aplicado

Para la aplicación del Algoritmo 3.3 *ADMM*, asignamos la función objetivo a las componentes que constituyen (3.3), esto es

$$\begin{aligned}
 f(x) &\longleftrightarrow \mathbb{E}_{\xi} \{ \varphi_1(c_{\xi}) + \varphi_2(\xi, g_{\xi}) + \varphi_3(\xi, q_{\xi}) + \iota_{D_{\mathcal{N}}}(c_{\xi}, g_{\xi}, q_{\xi}) \}, \quad x = (c, g, q), \\
 g(z) &\longleftrightarrow \iota_C(z_1, z_2, z_3) + \iota_{\mathcal{N}}(z_1, z_2, z_3), \quad z = (z_1, z_2, z_3), \\
 A &= -B = I_{NM+NM+M}, \quad c = 0,
 \end{aligned}$$

donde $I_{NM+NM+M}$ es una matriz identidad que permite hacer la copia de las variables (c, g, q) .

Al realizar esta asignación, es importante recalcar que los conjuntos $D_{\mathcal{N}}$, C y \mathcal{N} , al presentar restricciones sobre algunas variables, permite tener la siguiente propiedad sobre las funciones indicatrices

$$\iota_{D_{\mathcal{N}}}(c, g, q) = \iota_{D_{\mathcal{N}}}(c, g), \quad \iota_C(z_1, z_2, z_3) = \iota_C(z_2, z_3), \quad \iota_{\mathcal{N}}(z_1, z_2, z_3) = \iota_{\mathcal{N}}(z_1).$$

Esta propiedad, permite desagregar las variables y reducir las proyecciones de la siguiente forma, para $P_N(\bar{c}, \bar{g}, \bar{q})$ ya fue calculada explícitamente en (4.11), mientras que $P_C(\bar{g}, \bar{q})$ resuelve,

$$\begin{aligned} \min_{(c,g,q) \in \mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\|g_\xi - \bar{g}_\xi\|^2\} + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{(q_\xi - \bar{q}_\xi)^2\} \\ \text{s.t.} \quad & (g, q) \in C \end{aligned}$$

El algoritmo converge a un óptimo, pues f y g , ι_C y ι_N son propias convexas y semi-continuas inferiores, el problema centralizado no-anticipativo (4.7) satisface la condición de Slater y así, L_0 definido en (3.4), posee un punto silla, por [8, Teorema 3.9], de esta forma, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3 y se garantiza la convergencia del siguiente algoritmo:

Algoritmo 6: *ADMM* Aplicado

Let: $r > 0$

1 **for** $k = 1, \dots, N$ **do**

2

3 $s_{i\xi}^{1k} = z_{i\xi}^{1k} - y_{i\xi}^{1k} - (1/r)I_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

4 $s_{i\xi}^{2k} = r(MC_{ii\xi} + r)^{-1}(z_{i\xi}^{2k} - y_{i\xi}^{2k}), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

5 $s_\xi^{3k} = z_\xi^{3k} - y_\xi^{3k} - (1/r)VOLL_\xi, \quad \forall \xi \in \Xi$

6

7 $t_{i\xi}^k = (r^{-1} + (MC_{ii\xi} + r)^{-1})^{-1}(s_{i\xi}^{2k} - s_{i\xi}^{1k} + (s_{i\xi}^{1k} - s_{i\xi}^{2k})_+), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

8

9 $\begin{pmatrix} c_{i\xi}^{k+1} \\ g_{i\xi}^{k+1} \\ q_\xi^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{i\xi}^{1k} \\ s_{i\xi}^{2k} \\ s_\xi^{3k} \end{pmatrix} + (1/r) \begin{pmatrix} t_{i\xi}^k \\ -t_{i\xi}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

10

11 $z^{1k+1} = P_N(y^{1k} + c^{1k+1})$

12 $\begin{pmatrix} z^{2k+1} \\ z^{3k+1} \end{pmatrix} = P_C \left(\begin{pmatrix} y^{2k} \\ y^{3k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^{2k+1} \\ q^{3k+1} \end{pmatrix} \right)$

13

14 $\begin{pmatrix} y^{1k+1} \\ y^{2k+1} \\ y^{3k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{1k} \\ y^{2k} \\ y^{3k} \end{pmatrix} + r \left(\begin{pmatrix} c^{k+1} \\ g^{k+1} \\ q^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z^{1k+1} \\ z^{2k+1} \\ z^{3k+1} \end{pmatrix} \right)$

4.2.4. Deducción del precio.

Sea ρ el precio de equilibrio. Ninguno de los 3 algoritmos está enfocado ni diseñado para determinar el valor de la variable de forma directa. Es más, ρ es la variable dual del subproblema P_C , es decir, es la variable dual asociada a la restricción de equilibrio que se observa en (4.10) y (4.12). Calculamos este precio numéricamente al configurar explícitamente el solver. Es importante notar que el solver

que se usó (*IPOPT*) no distingue el espacio Hilbert en el que trabajamos, por ende, escalamos manualmente la variable dual retornada ρ aplicando $\rho_\xi = \rho_\xi / p_\xi$ para todo $\xi \in \Xi$, donde p_ξ es la probabilidad del escenario definido por (4.1).

4.3. Resultados Numéricos

4.3.1. Métricas.

A continuación, presentamos las métricas que utilizamos para medir el desempeño de los algoritmos.

En particular, estas son:

- La distancia al óptimo es medida de forma relativa, esto es, si $x = (c, g, q)$ y denotamos al punto óptimo por x^* , entonces:

$$\text{Distancia al Óptimo : } \frac{\|x^k - x^*\|}{\|x^*\|}.$$

Notar que si consideramos $(c, g, q) \in \mathcal{H}$ de (4.4), con c sin pertenecer al espacio de no anticipatividad, entonces al evaluar sobre la norma (4.6), es equivalente al evaluar bajo la norma (4.2), pues $\mathbb{E}\{c\} = c$. Por ende, las norma que se utiliza está definida en (4.6).

- La diferencia de la función objetivo, es la diferencia en valor absoluto de las evaluaciones parciales de cada x^k con respecto a x^* , esto es:

$$\text{Diferencia Función Objetivo : } |f(x^k) - f(x^*)|.$$

- La restricción de no-anticipatividad, es medida mediante la norma de la diferencia entre la variable c y su respectiva proyección $P_{\mathcal{N}}(c)$, esto es:

$$\text{Restricción No-Anticipatividad : } \mathbb{E}\{\|c_\xi^k - P_{\mathcal{N}}(c_\xi^k)\|_{\mathbb{R}^N}\},$$

esta restricción cuantifica que tan lejos se encuentra la variable c de ser factible. Esta restricción sólo aplica para los métodos *FPIS* y *ADMM*, pues dependen de la inyección de c al espacio de no-anticipatividad \mathcal{N} .

- La restricción de equilibrio, es medida mediante la norma de la diferencia entre la demanda por satisfacer $D - q$ y la suma de bienes generados $\mathbb{1}^T g$ hasta dicha iteración, esto es:

$$\text{Restricción Equilibrio : } \mathbb{E}\{|\mathbb{1}^T g_\xi^k - (D_\xi - q_\xi^k)|\},$$

esta restricción es de interés para nuestro problema, pues la variable dual asociada a esta restricción de los problemas (4.4) y (4.7), entrega el precio óptimo, en el cual se inspira nuestro problema de equilibrio.

- La restricción de capacidad, es la diferencia entre todo lo que se ha invertido c y todo lo que se ha generado g , esto es

$$\textbf{Restricción Capacidad : } \mathbb{E}\{\|c_{\xi}^k - g_{\xi}^k\|_{\mathbb{R}^N}\},$$

esta restricción cuantifica, a parte de la factibilidad, lo que el inversor ha estado dispuesto a no generar g a pesar de haber invertido c .

- La restricción de demanda es la diferencia entre la demanda D y la variable q y es de la forma:

$$\textbf{Restricción Demanda : } \mathbb{E}\{|D_{\xi} - q_{\xi}^k|\},$$

el consumidor siempre consume toda la demanda, salvo una cantidad q , de esta forma, esta restricción cuantifica cuanta demanda no se está consumiendo, si esta restricción llegase a 0, significa que el consumidor no está consumiendo nada.

- La distancia al precio óptimo esta medida por el error relativo de las variables duales de las restricciones (4.10) y (4.12), esta viene dada por:

$$\textbf{Distancia al Precio Óptimo : } \frac{\mathbb{E}\{|\rho_{\xi}^k - \rho_{\xi}^*|\}}{\mathbb{E}\{|\rho_{\xi}^*|\}},$$

y establece la diferencia de precio calculado por el valor teórico y el precio dado por las proyecciones de cada algoritmo.

El criterio de parada utilizado del algoritmo fue alcanzar las 10000 iteraciones para todos los casos.

4.3.2. Parámetros por Caso.

Consideramos una aplicación sobre 3 casos diferentes, reemplazando para los problemas centralizado (4.4) y centralizado no-anticipativo (4.7). Consideramos $N = 3$ tecnologías y $M = 5$ escenarios.

Consideremos los siguientes valores para los costos de inversión y costos por carga perdida de forma transversal para todos los casos.

$$I = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 95 \end{pmatrix}, \quad VOLL_{\xi} = 10000 = VOLL, \quad \forall \xi \in \Xi.$$

En adelante, consideramos MC_{ξ} por una matriz diagonal de entradas positivas para cada $\xi \in \Xi$, por ende, solo definimos los elementos de la diagonal principal ya que el resto de entradas es 0, aplicable para los 3 casos.

Caso 1: Escenarios Equiprobables. Asignamos el vector de probabilidad $p = (p_{\xi_1}, \dots, p_{\xi_5})$, los costos marginales MC y la demanda D por:

	Caso 1				
Ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
p	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
MC	10	9	12	7	14
	21	205	220	195	230
	410	420	390	440	370
D	200	750	1000	1250	1500

Cuadro 4.1: Parámetros para caso 1.

En donde la constante de Lipschitz de la función objetivo es $L = 458,7$, calculada por (4.9).

Para los caso 2 y 3, recalamos que los vectores de probabilidades p están definidos a partir de la función `numpy.random.random` de la librería *Numpy v1.26.4*. Para efectos de reproducibilidad de los experimentos, informamos que la semilla utilizada es `numpy.random.seed(40)`. Este vector, posterior a su creación, es normalizado por la suma de los elementos.

Caso 2: Probabilidades Heterogéneas.

	Caso 2				
Ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
p	0,20	0,03	0,40	0,14	0,23
MC	10	9	12	7	14
	21	205	220	195	230
	410	420	390	440	370
D	200	750	1000	1250	1500

Cuadro 4.2: Parámetros para caso 2.

En donde la constante de Lipschitz de la función objetivo es $L = 453,2$, calculada por (4.9).

Caso 3: Escenario de costos elevados. Incorporamos un sexto escenario tal que incrementa los costos marginales MC drásticamente para todas las tecnologías con respecto a los casos anteriores, también aumentamos la demanda D para este escenario. Analizando un caso desfavorable para el agente inversor.

Siendo así, el caso 3 por:

	Caso 3					
Ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
p	0,18	0,02	0,34	0,13	0,20	0,13
MC	10	9	12	7	14	880
	21	205	220	195	230	880
	410	420	390	440	370	880
D	200	750	1000	1250	1500	4000

Cuadro 4.3: Parámetros para caso 3.

En donde la constante de Lipschitz de la función objetivo es $L = 595,1$, calculada por (4.9).

Por último, a las 3 tecnologías le otorgamos un patrón, tal que la primera es de menor costo y la última de mayor costo, este comportamiento aplica tanto para los costos de inversión I como costos marginales MC , exceptuando el sexto escenario que se incorporó para el caso 3 (4.3). De igual forma, establecemos la demanda de forma incremental por escenario.

4.3.3. Resultados por Caso.

Caso 1: Escenarios Equiprobables.

Para el caso 1, tenemos los siguientes resultados:

	Caso 1			Baseline
	TOPS	FPIS	ADMM	IPOPT
Distancia al Óptimo	$3,097e-3$	$2,439e-9$	$3,845e-11$	—
Diferencia Función Objetivo	$1,385e-4$	$1,144e-11$	$1,613e-12$	—
Restricción No-Anticipatividad	—	0,0	$4,547e-14$	0,0
Restricción Equilibrio	$9,391e-6$	$9,391e-6$	$9,394e-6$	$9,394e-6$
Restricción Capacidad	464,3	464,6	464,6	464,6
Restricción Demanda	775,7	777,4	777,4	777,4
Distancia al Precio Óptimo	$2,810e-3$	$2,596e-11$	$1,836e-13$	—
Times [s]	1190	629	602	$8,634e-2$

Cuadro 4.4: Resultados comparativa Caso 1

De la presente tabla, se ve que tenemos un resultado más preciso con *ADMM*, seguido de *FPIS* y al final con **TOPS**, con respecto a las 7 métricas consideradas excepto por la restricción de no-anticipatividad *FPIS* posee una aproximación numéricamente tan cercana a 0 que se considera como tal, mientras que *ADMM* se aproxima con un $4,547e-14$ por encima del 0.

Los tiempos de ejecución vienen dados por el mayor *TOPS*, mientras que *ADMM* y *FPIS* son sustancialmente idénticos.

Los gráficos asociados a cada métrica vista, vienen dada por:

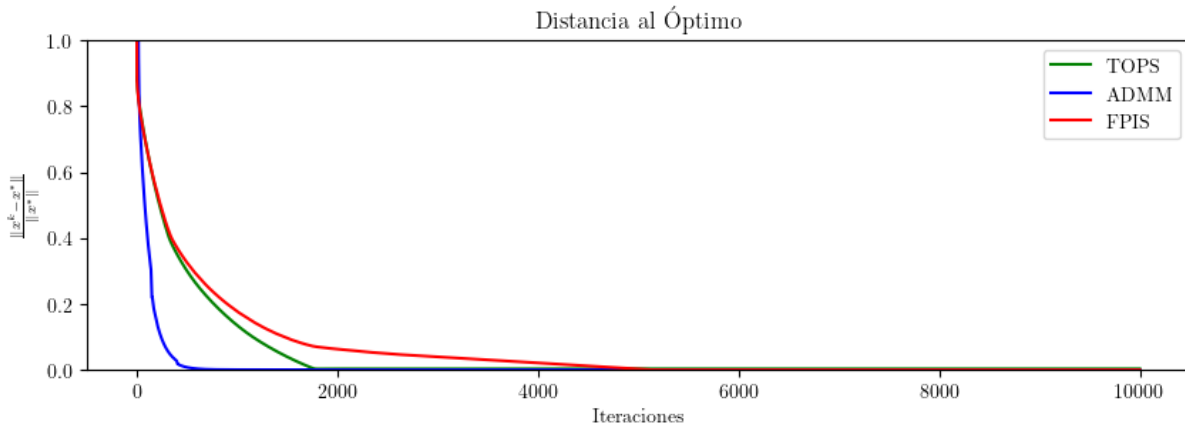


Figura 4.2: Distancia al Óptimo - Caso 1

Nótese que *ADMM* converge al óptimo primal más rápido que *TOPS*, seguido de *FPIS*, los 3 algoritmos lo hace suavemente.

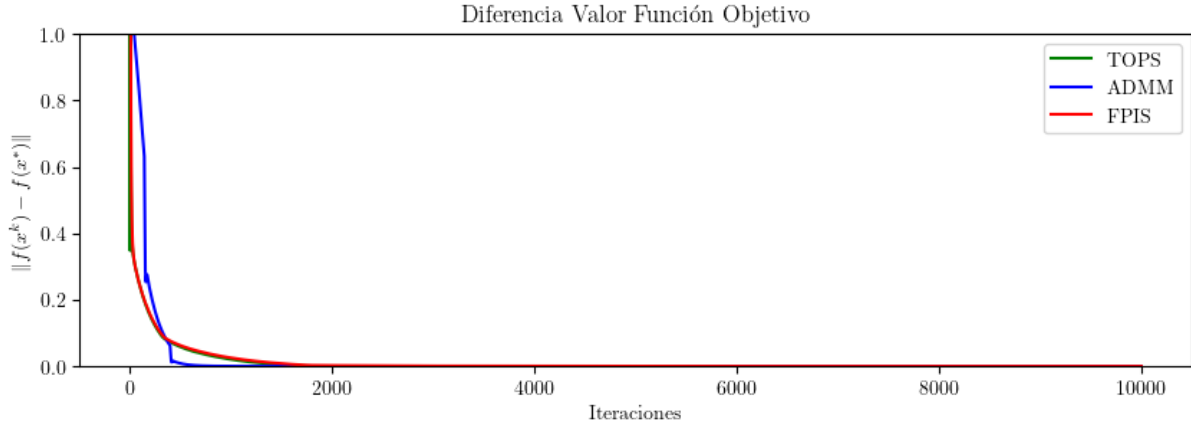


Figura 4.3: Diferencia Valor Función Objetivo - Caso 1

La convergencia de las variables primales evaluadas en la función objetivo es similar entre *TOPS* y *FPIS* y ligeramente diferente para *ADMM*, que presenta ciertas puntas y cambios abruptos.

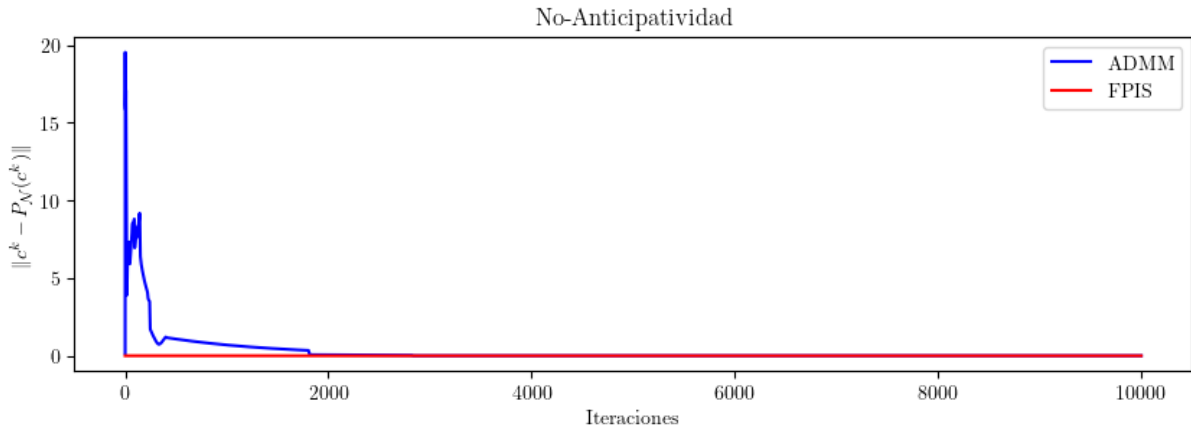


Figura 4.4: No-Anticipatividad - Caso 1

La factibilidad está asegurada en todo momento para *FPIS*, mientras *ADMM* tarda una cantidad sustancialmente mayor por sobre *FPIS* de iteraciones en hallar la factibilidad para esta restricción. *TOPS* está fuera de discusión porque, por definición, su variable c no está inyectada en el espacio de no-anticipatividad. Notar que las puntas y cambios abruptos en la convergencia de *ADMM* están relacionados cualitativamente con los cambios en la figura (4.3).

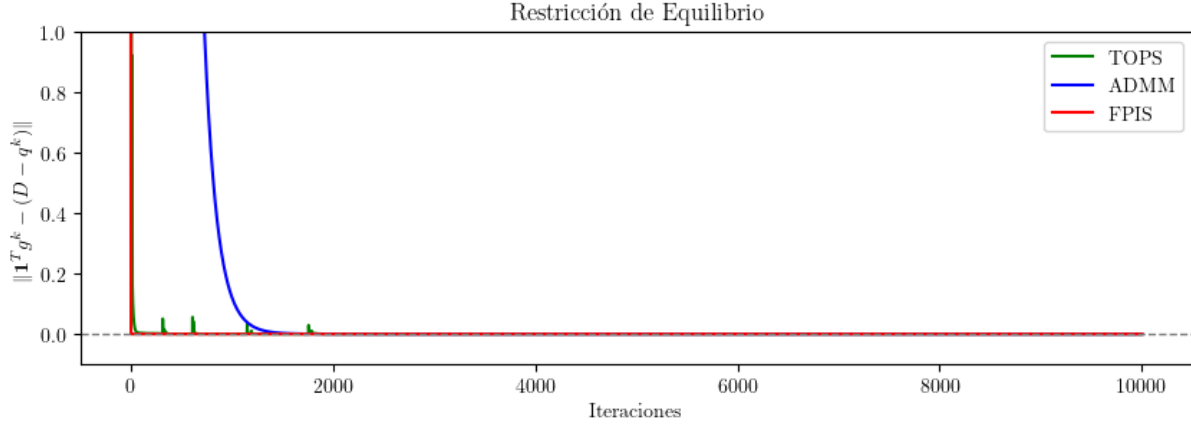


Figura 4.5: Restricción de Equilibrio - Caso 1

Sobre la restricción de equilibrio, así como vimos antes, tenemos la factibilidad asegurada desde las primeras iteraciones para *TOPS* y *FPIS*, mientras que *ADMM* tarda poco menos de 2000 iteraciones en hallar el equilibrio. *TOPS* presenta ciertos picos a lo largo de su convergencia que disminuyen de altura y se desaparecen a medida que aumentan las iteraciones.

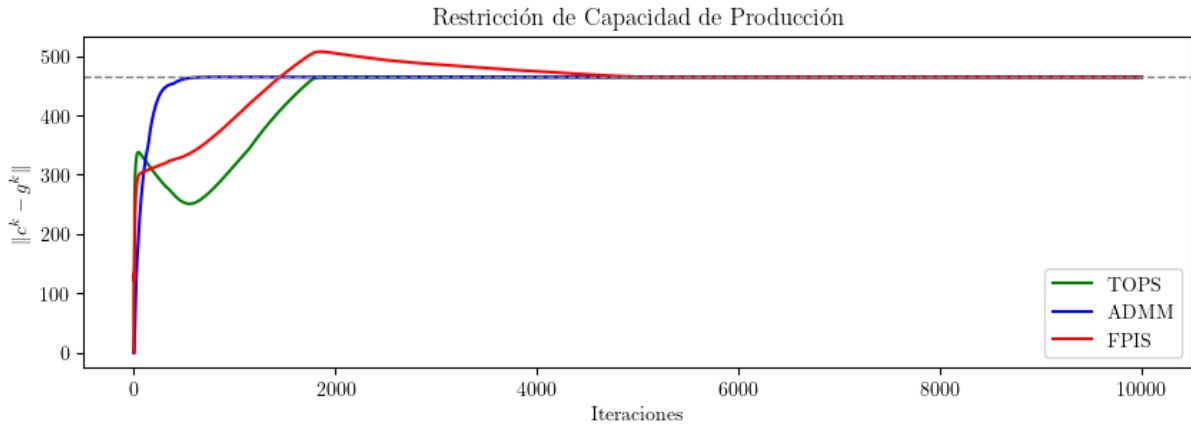


Figura 4.6: Restricción de Capacidad de Producción - Caso 1

Los 3 algoritmos alcanzan el valor provisto por la solución teórica. El primero que lo hace es *ADMM*, luego *TOPS* y finalmente, *FPIS*. Notar que *TOPS* al cambiar de dirección y concavidad en su convergencia, estos cambios coinciden cualitativamente con las puntas en la figura (4.5). También hay cambios de dirección y concavidad en la convergencia de *FPIS*.

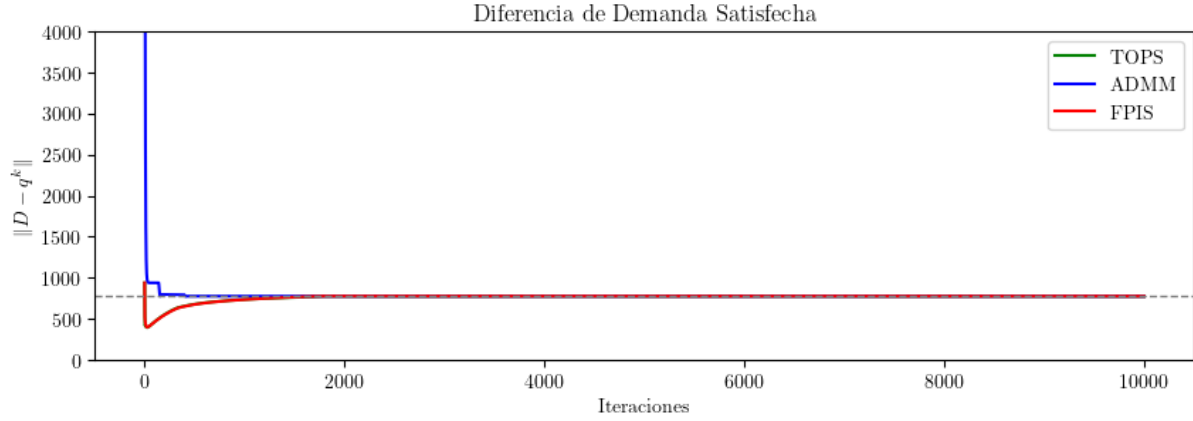


Figura 4.7: Diferencia de Demanda Satisfecha - Caso 1

De forma similar, al gráfico anterior, los 3 algoritmos alcanzan el valor provisto por la solución teórica, el primero que lo hace es *ADMM*, luego *TOPS* y *FPIS* simultáneamente. Los cambios de direcciones abruptos están relacionados con las gráficas anteriores (4.5) y (4.4).

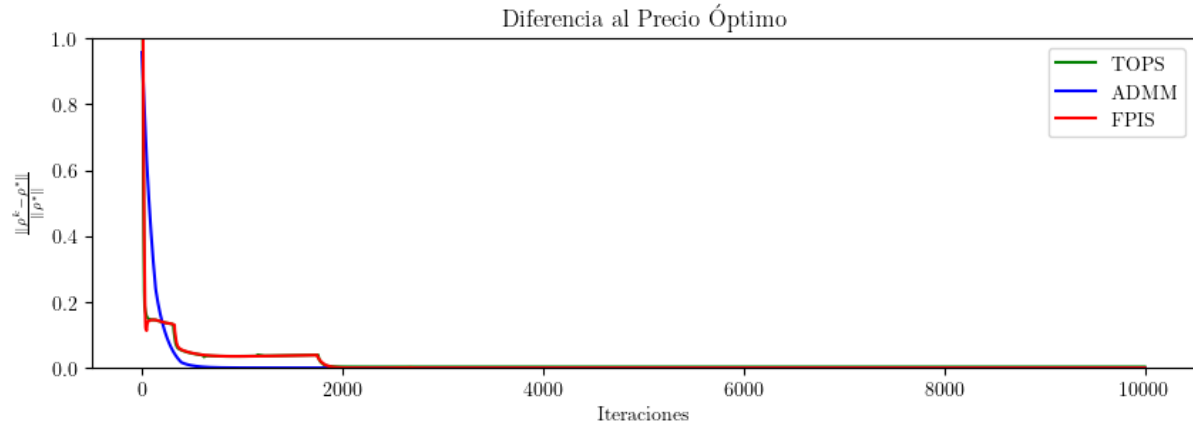


Figura 4.8: Diferencia al Precio Óptimo - Caso 1

Los métodos basados en proyecciones presentan picos y puntas en la convergencia de la variable dual para luego converger al óptimo dual, estos cambios están relacionados cualitativamente con los cambios mencionados en las gráficas (4.2), (4.4), (4.6) y (4.7) para *TOPS* y *FPIS*. Mientras *ADMM* converge suavemente desde un inicio.

La solución teórica del problema es, para variables primales:

$$c = \begin{pmatrix} 1188, 3 \\ 44, 3 \\ 25, 7 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 186, 6 & 704, 4 & 833, 3 & 1188, 3 & 714, 3 \\ 8, 9 & 30, 9 & 44, 3 & 42, 8 & 43, 5 \\ 4, 6 & 15, 1 & 25, 6 & 19, 0 & 25, 7 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \\ 96, 7 \\ 0, 0 \\ 716, 5 \end{pmatrix},$$

donde, por simplicidad, compactamos la notación de g resumiendo los 5 escenarios por columna. Paralelamente, las variables duales:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1865, 7 \\ 6336, 1 \\ 10000, 0 \\ 8342, 8 \\ 10000, 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 717 \end{pmatrix},$$

con $\rho \in \mathbb{R}^5$ el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio y μ el multiplicador asociado a la restricción de capacidad de producción (4.5).

Notar que el vector de precio ρ iguala el valor de $VOLL$ en los casos que son más costosos, decir, $\rho_{\xi_3} = \rho_{\xi_5} = VOLL$. Por otro lado, el multiplicador μ se activa en aquellos casos donde lo generado iguala a lo invertido, esto es

$$\begin{aligned} (\mu_{\xi_4})_1 &> 0 \rightarrow c_1 = (g_{\xi_4})_1, \\ (\mu_{\xi_3})_2 &> 0 \rightarrow c_2 = (g_{\xi_3})_2, \\ (\mu_{\xi_5})_3 &> 0 \rightarrow c_3 = (g_{\xi_5})_3, \end{aligned}$$

donde $(\cdot)_i \in \mathbb{R}$ es la componente i -ésima del vector, con $i = 1, \dots, 3$. Se evidencia que la magnitud del vector ρ , es inversamente proporcional a la demanda consumida con constante $VOLL$.

Caso 2: Probabilidades Heterogéneas.

Para el caso 2, tenemos los siguientes resultados:

	Caso 2			Baseline
	TOPS	FPIS	ADMM	IPOPT
Distancia al Óptimo	$1,871e-3$	$3,424e-4$	$2,294e-7$	—
Diferencia Función Objetivo	$3,839e-5$	$1,443e-6$	$7,705e-7$	—
No-Anticipatividad	—	0,0	$1,053e-13$	0,0
Equilibrio	$9,763e-6$	$9,755e-6$	$5,252e-4$	$9,780e-6$
Capacidad	466,4	467,8	467,9	467,9
Satisfacción Demanda	777,2	777,9	778,1	778,1
Distancia al Precio Óptimo	$3,523e-3$	$2,142e-4$	$5,448e-7$	—
Times [s]	1225	637	608	$7,982e-2$

Cuadro 4.5: Resultados comparativa Caso 2

De la presente tabla, se ve un resultado más preciso con *ADMM*, seguido de *FPIS* y al final con **TOPS**, con respecto a las 7 métricas consideradas excepto por la restricción de no-anticipatividad, *FPIS* posee una aproximación numéricamente tan cercana a 0 que se considera como tal, mientras que *ADMM* se aproxima con un $1,053e-13$ por encima del 0.

Los tiempos de ejecución vienen dados por el mayor *TOPS*, mientras que *ADMM* y *FPIS* son sustancialmente idénticos.

Los gráficos asociados a cada métrica vista, vienen dados por:

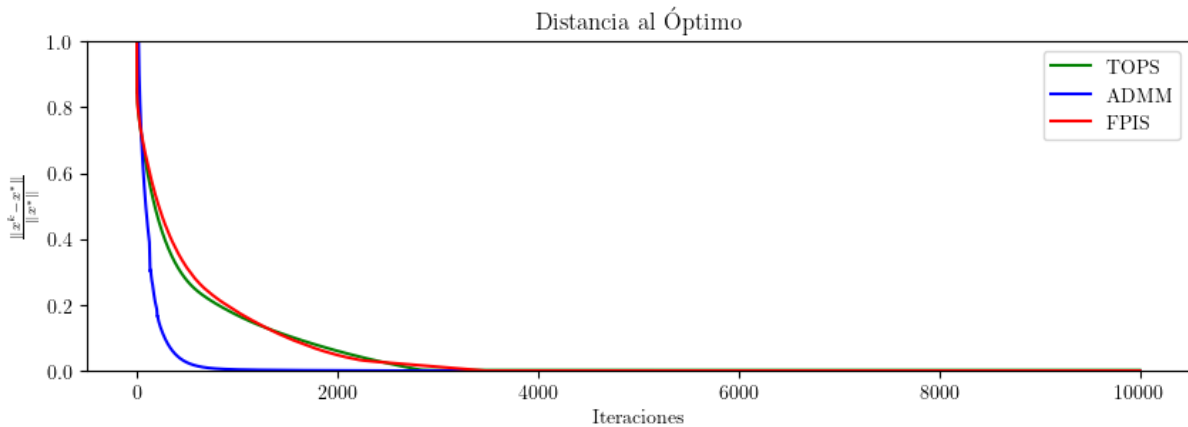


Figura 4.9: Distancia al Óptimo - Caso 2

Nótese que *ADMM* converge al óptimo primal más rápido que *TOPS*, seguido de *FPIS*, los 3

algoritmos lo hacen suavemente.

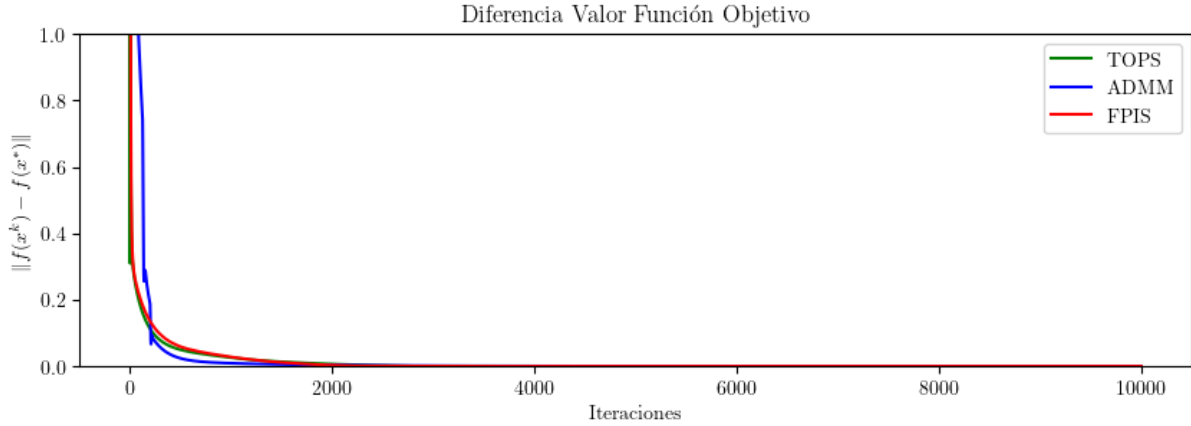


Figura 4.10: Diferencia Valor Función Objetivo - Caso 2

La convergencia de las variables primales evaluadas en la función objetivo es similar entre *TOPS* y *FPIS* y ligeramente diferente para *ADMM*, que presenta ciertas puntas y cambios abruptos.

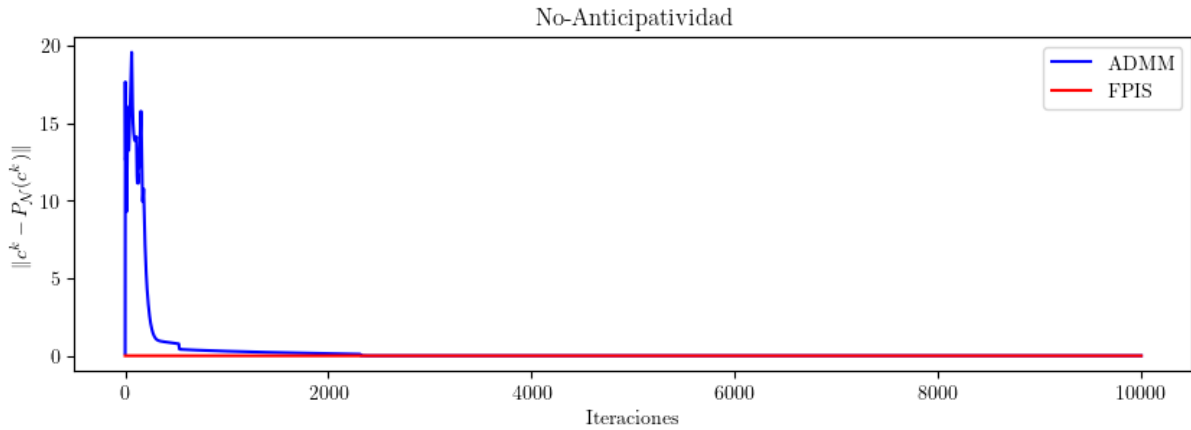


Figura 4.11: No-Anticipatividad - Caso 2

La factibilidad está asegurada en todo momento para *FPIS*, mientras *ADMM* tarda una cantidad sustancialmente mayor, por sobre *FPIS*, de iteraciones en hallar la factibilidad para esta restricción. *TOPS* está fuera de discusión porque, por definición, su variable c no está inyectada en el espacio de no-anticipatividad. Notar que las puntas y cambios abruptos en la convergencia de *ADMM* están relacionados cualitativamente con los cambios en la figura (4.10).

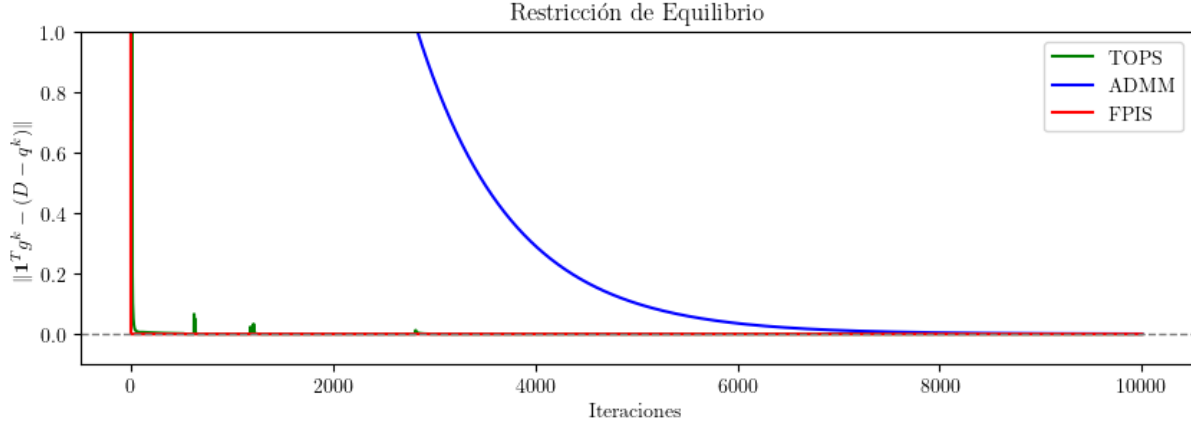


Figura 4.12: Restricción de Equilibrio - Caso 2

Sobre la restricción de equilibrio, así como vimos antes, tenemos la factibilidad asegurada desde las primeras iteraciones para *TOPS* y *FPIS*, mientras que *ADMM* tarda poco más de 8000 iteraciones en hallar el equilibrio. *TOPS* presenta ciertos picos a lo largo de su convergencia que disminuyen de altura y se desaparecen a medida que aumentan las iteraciones.

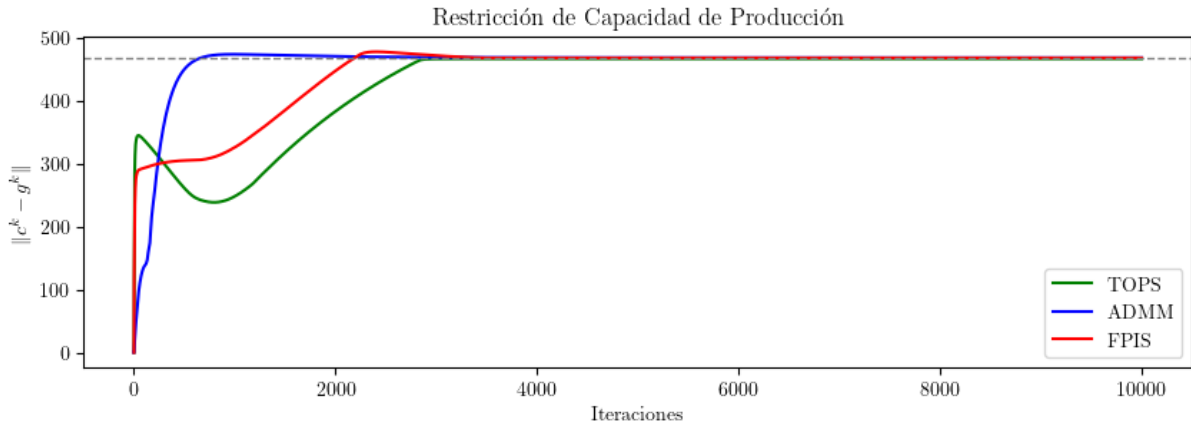


Figura 4.13: Restricción de Capacidad de Producción - Caso 2

Los 3 algoritmos alcanzan el valor provisto por la solución teórica. El primero que lo hace es *ADMM*, luego *FPIS* y finalmente, *TOPS*. Notar que *TOPS* cambia de dirección y concavidad en su convergencia, estos cambios coinciden cualitativamente con las puntas en la figura (4.12). También hay cambios de dirección y concavidad en la convergencia de *FPIS*.

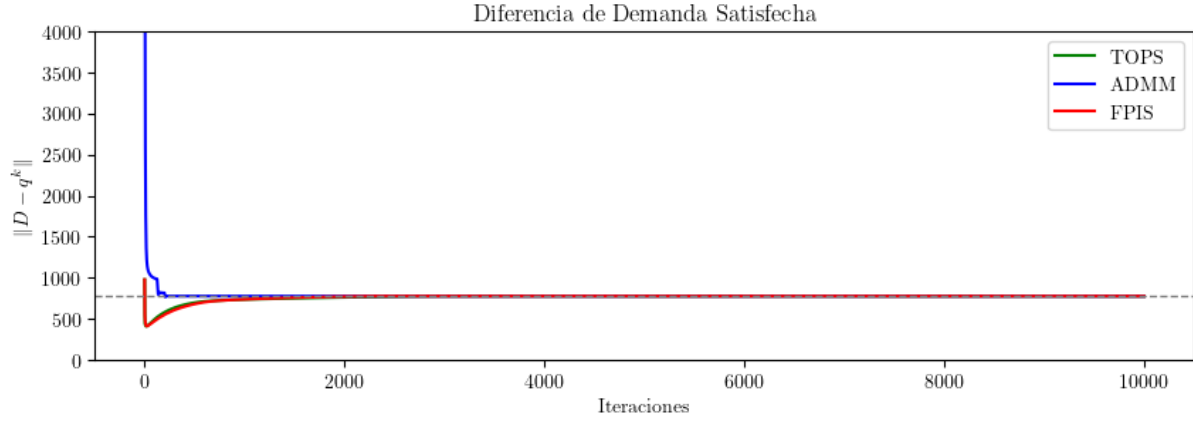


Figura 4.14: Diferencia de Demanda Satisfecha - Caso 2

De forma similar, al gráfico anterior, los 3 algoritmos alcanzan el valor provisto por la solución teórica, el primero que lo hace es *ADMM*, luego *TOPS* y *FPIS* simultáneamente. Los cambios de direcciones abruptos están relacionados con las gráficas anteriores (4.12) y (4.11).

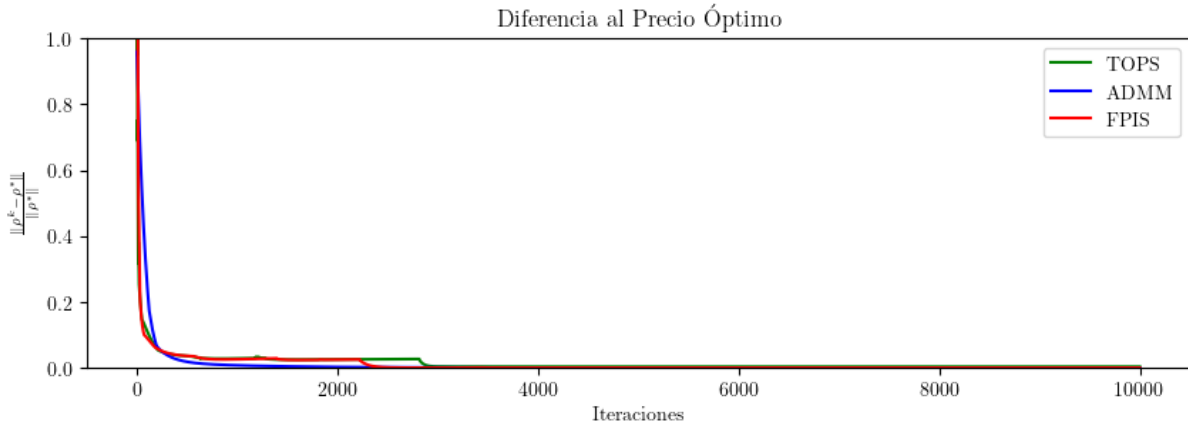


Figura 4.15: Diferencia al Precio Óptimo - Caso 2

Los métodos basados en proyecciones presentan picos y puntas en la convergencia de la variable dual para luego converger al óptimo dual, estos cambios están relacionados cualitativamente con los cambios mencionados en las gráficas (4.9), (4.11), (4.13) y (4.14) para *TOPS* y *FPIS*. Mientras *ADMM* converge suavemente desde un inicio.

La solución teórica del problema es, para variables primales:

$$c = \begin{pmatrix} 1188, 2 \\ 44, 9 \\ 25, 9 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 186, 6 & 704, 0 & 833, 3 & 1188, 2 & 714, 3 \\ 8, 9 & 30, 9 & 44, 8 & 42, 8 & 43, 5 \\ 4, 6 & 15, 1 & 25, 6 & 19, 0 & 25, 9 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 97 \\ 0 \\ 717 \end{pmatrix},$$

donde, por simplicidad, compactamos la notación de g resumiendo los 5 escenarios por columna. Paralelamente, las variables duales:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1865, 6 \\ 6336, 1 \\ 10000, 0 \\ 8351, 9 \\ 10000, 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 420 \end{pmatrix},$$

con $\rho \in \mathbb{R}^5$ el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio y μ el multiplicador asociado a la restricción de capacidad de producción (4.5).

Notar que el vector de precio ρ iguala el valor de $VOLL$ en los casos que son más costosos, decir, $\rho_{\xi_3} = \rho_{\xi_5} = VOLL$. Por otro lado, el multiplicador μ se activa en aquellos casos donde lo generado iguala a lo invertido, esto es

$$\begin{aligned} (\mu_{\xi_4})_1 &> 0 \rightarrow c_1 = (g_{\xi_4})_1, \\ (\mu_{\xi_3})_2 &> 0 \rightarrow c_2 = (g_{\xi_3})_2, \\ (\mu_{\xi_5})_3 &> 0 \rightarrow c_3 = (g_{\xi_5})_3, \end{aligned}$$

donde $(\cdot)_i \in \mathbb{R}$ es la componente i -ésima del vector, con $i = 1, \dots, 3$. Se evidencia que la magnitud del vector ρ , es inversamente proporcional a la demanda consumida con constante $VOLL$.

Caso 3: Escenario de costos elevados.

Para el caso 3, tenemos los siguientes resultados:

	Caso 3			Baseline
	TOPS	FPIS	ADMM	IPOPT
Distancia al Óptimo	$1,746e-3$	$2,530e-2$	$6,778-7$	—
Diferencia Función Objetivo	$6,464e-5$	$8,506e-4$	$3,111e-6$	—
No-Anticipatividad	—	0,0	$1,529e-13$	0,0
Equilibrio	$1,374e-5$	$1,374e-5$	$1,830-3$	$1,379e-5$
Capacidad	560,4	573,2	561,9	561,9
Satisfacción Demanda	678,3	679,6	679,4	679,4
Distancia al Precio Óptimo	$4,082e-3$	$1,920e-4$	$1,858e-6$	—
Times [s]	1229	642	613	$6,917e-2$

Cuadro 4.6: Resultados comparativa Caso 3

De la presente tabla, se puede ver que tenemos un resultado más preciso con *ADMM*, seguido de *FPIS* y al final con **TOPS**, con respecto a las 7 métricas consideradas excepto por la restricción de no-anticipatividad, en la que, por definición *TOPS* es un 0 absoluto, *FPIS* posee una aproximación numéricamente tan cercana a 0 que se considera como tal, mientras que *ADMM* se aproxima con un $1,529e-13$ por encima del 0.

Los tiempos de ejecución vienen dados por el mayor *TOPS*, mientras que *ADMM* y *FPIS* son sustancialmente idénticos.

Los gráficos asociados a cada métrica vista, vienen dada por:

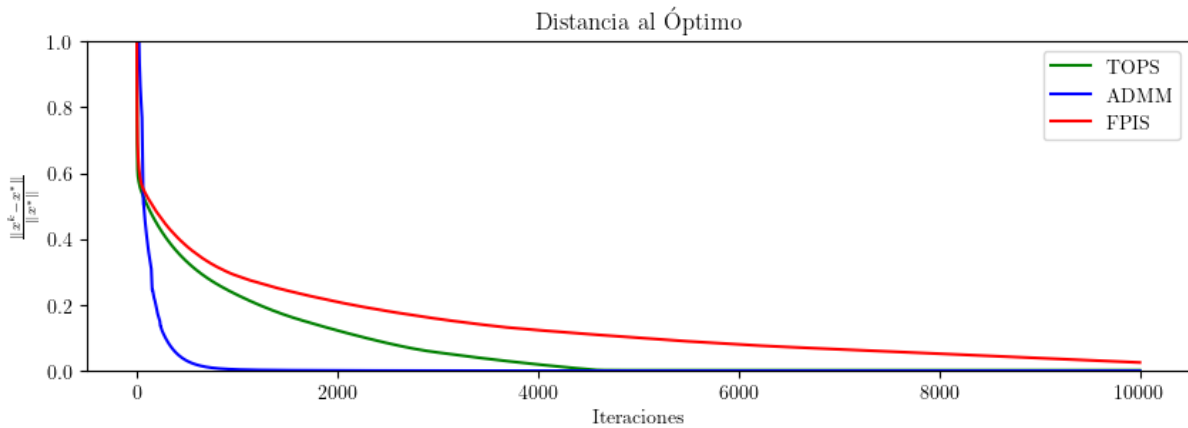


Figura 4.16: Distancia al Óptimo - Caso 3

Nótese que *ADMM* converge al óptimo primal más rápido que *TOPS*, seguido de *FPIS*, los 3 algoritmos lo hacen suavemente. Bajo el criterio de detención de las 10000 iteraciones, *FPIS* la precisión y exactitud queda rezagado de ser más preciso que *TOPS* como lo fue en (4.4) y en (4.5).

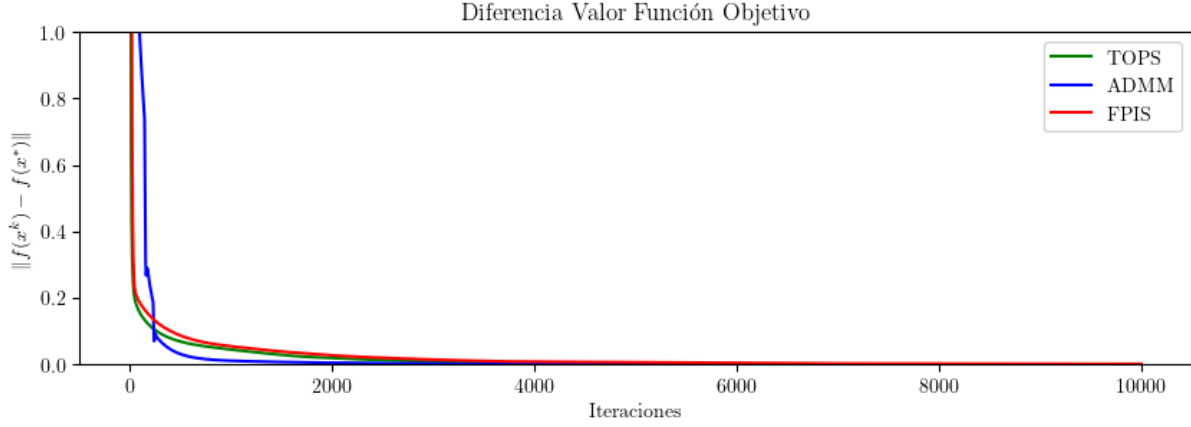


Figura 4.17: Diferencia Valor Función Objetivo - Caso 3

La convergencia de las variables primales evaluadas en la función objetivo es similar entre *TOPS* y *FPIS* y ligeramente diferente para *ADMM*, que presenta ciertas puntas y cambios abruptos.

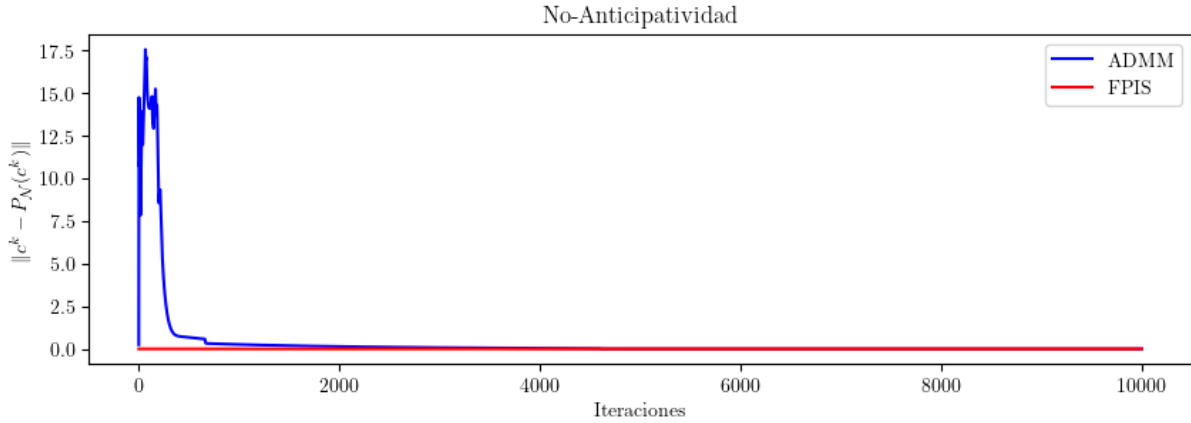


Figura 4.18: No-Anticipatividad - Caso 3

La factibilidad está asegurada en todo momento para *FPIS*, mientras *ADMM* tarda una cantidad sustancialmente mayor por sobre *FPIS* de iteraciones en hallar la factibilidad para esta restricción. Notar que las puntas y cambios abruptos en la convergencia de *ADMM* están relacionados cualitativamente con los cambios en la figura (4.17).

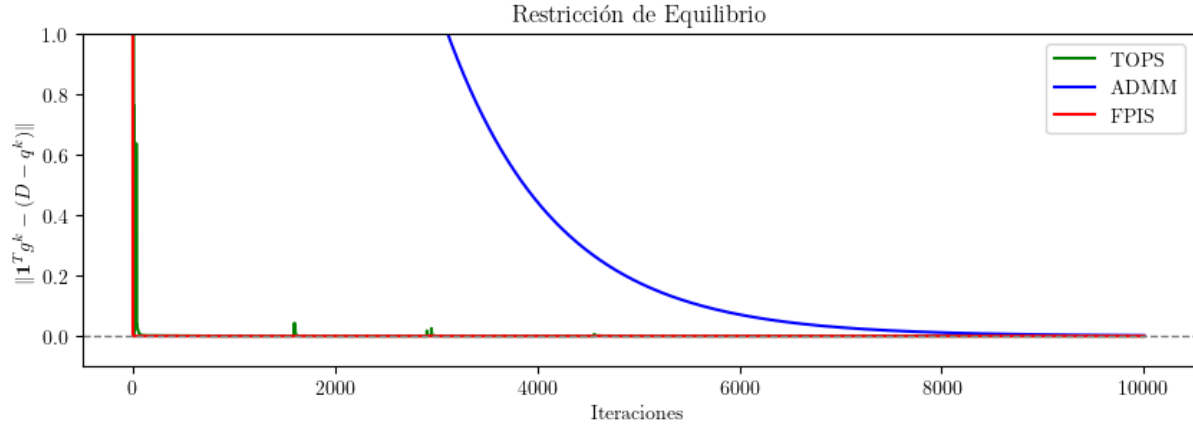


Figura 4.19: Restricción de Equilibrio - Caso 3

Sobre la restricción de equilibrio, así como vimos antes, tenemos la factibilidad asegurada desde las primeras iteraciones para *TOPS* y *FPIS*, mientras que *ADMM* presenta tarda poco más de 8000 iteraciones en hallar el equilibrio. *TOPS* presenta ciertos picos a lo largo de su convergencia que disminuyen de altura y se desaparecen a medida que aumentan las iteraciones.

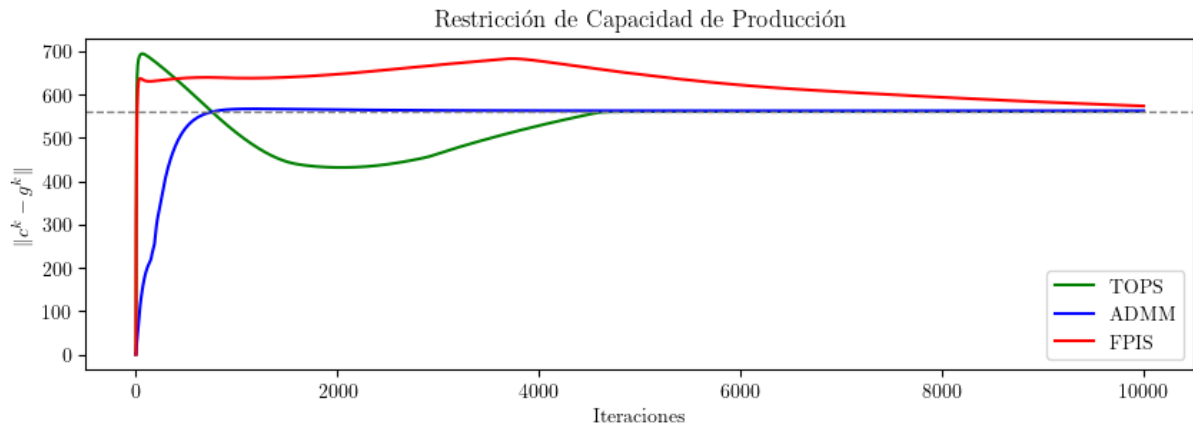


Figura 4.20: Restricción de Capacidad de Producción - Caso 3

Los 3 algoritmos alcanzan el valor provisto por la solución teórica. El primero que lo hace es *ADMM*, luego *FPIS* y finalmente, *TOPS*. Notar que *TOPS* cambia de dirección y concavidad en su convergencia, estos cambios coinciden cualitativamente con las puntas en la figura (4.19). También hay cambios de dirección y concavidad en la convergencia de *FPIS*.

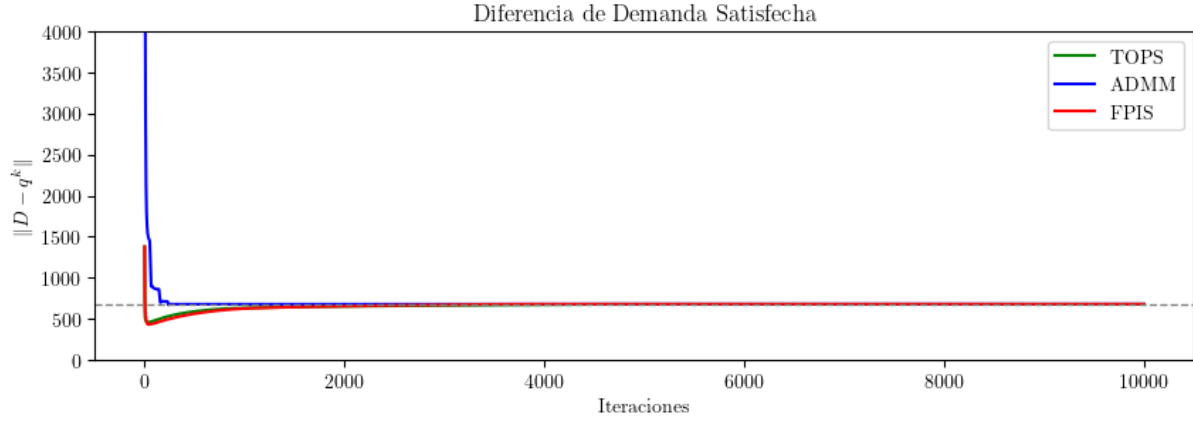


Figura 4.21: Diferencia de Demanda Satisfecha - Caso 3

De forma similar, al gráfico anterior, los 3 algoritmos alcanzan el valor provisto por la solución teórica, el primero que lo hace es *ADMM*, luego *TOPS* y *FPIS* simultáneamente. Los cambios de direcciones abruptos están relacionados con las gráficas anteriores (4.19) y (4.18).

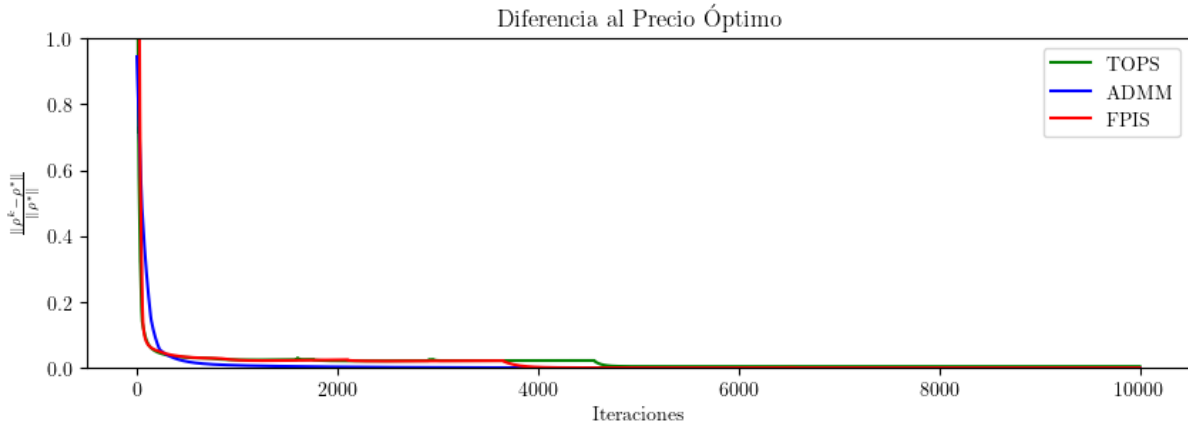


Figura 4.22: Diferencia al Precio Óptimo - Caso 3

Los métodos basados en proyecciones presentan picos y puntas en la convergencia de la variable dual para luego converger al óptimo dual, estos cambios están relacionados cualitativamente con los cambios mencionados en las gráficas (4.16), (4.18), (4.20) y (4.21) para *TOPS* y *FPIS*. Mientras *ADMM* converge suavemente desde un inicio.

La solución teórica del problema es, para variables primales:

$$c = \begin{pmatrix} 1188, 2 \\ 44, 8 \\ 25, 7 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 186, 6 & 704, 0 & 833, 3 & 1188, 2 & 714, 3 & 71, 4 \\ 8, 9 & 30, 9 & 44, 8 & 42, 9 & 43, 5 & 11, 4 \\ 4, 6 & 15, 1 & 25, 6 & 19, 0 & 25, 7 & 11, 4 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 97 \\ 0 \\ 717 \\ 3966 \end{pmatrix},$$

donde, por simplicidad, compactamos la notación de g resumiendo los 6 escenarios por columna. Paralelamente, las variables duales:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1865, 7 \\ 6336, 1 \\ 10000, 0 \\ 8357, 0 \\ 10000, 0 \\ 10000, 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 145 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 484 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\rho \in \mathbb{R}^6$ el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio y μ el multiplicador asociado a la restricción de capacidad de producción (4.5).

Notar que el vector de precio ρ iguala el valor de $VOLL$ en los casos que son más costosos, decir, $\rho_{\xi_3} = \rho_{\xi_5} = \rho_{\xi_6} = VOLL$. Por otro lado, el multiplicador μ se activa en aquellos casos donde lo generado iguala a lo invertido, esto es

$$\begin{aligned} (\mu_{\xi_4})_1 &> 0 \rightarrow c_1 = (g_{\xi_4})_1, \\ (\mu_{\xi_3})_2 &> 0 \rightarrow c_2 = (g_{\xi_3})_2, \\ (\mu_{\xi_5})_3 &> 0 \rightarrow c_3 = (g_{\xi_5})_3, \end{aligned}$$

donde $(\cdot)_i \in \mathbb{R}$ es la componente i -ésima del vector, con $i = 1, \dots, 3$. Se evidencia que la magnitud del vector ρ , es inversamente proporcional a la demanda consumida con constante $VOLL$.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectiva

5.1. Conclusiones

Concluimos que los 3 métodos calculan satisfactoriamente el óptimo primal del problema. Aplicando el Algoritmo 3.1 *TOPS* para el problema centralizado (4.4) y el Algoritmo 3.2 *FPIS* y el Algoritmo 3.3 *ADMM* para el problema centralizado agregando la condición de no-anticipatividad (4.7). Según las tablas (4.4), (4.5) y (4.6), el método de mayor precisión, respecto a la distancia al óptimo, es *ADMM*, seguido de *FPIS* y finalmente *ADMM*. De igual forma, el método más lento respecto al tiempo, medido en segundos, es *TOPS*, seguido de *FPIS* y, al final, *ADMM*. Así, la velocidad medida en iteración por segundo es menor en este último.

Cada método posee ventajas por sobre los otros, esto debido a la naturaleza de cada algoritmo y sus distintas construcciones.

Primeramente, *TOPS* se aventaja por sobre *FPIS*, no generalizadamente, y *ADMM*, debido a que presenta una factibilidad sobre las restricciones y distancias al óptimo primal y dual en iteraciones tempranas sobre ambos métodos, esto analizando cualitativamente las gráficas expuestas y bajo tolerancias relativamente pequeñas en relación a los órdenes de magnitud que alcanzan las restricciones. Otra ventaja, *TOPS* posee el menor uso de memoria computacional, puesto que la variable c no está inyectada en el espacio de no-anticipatividad \mathcal{N} (4.1), disminuyendo sustancialmente la dimensionalidad de c .

Los elementos que merman el rendimiento son la baja precisión del algoritmo cómo se aprecia en los apartados de *Distancia al Óptimo*, *Diferencia Función Objetivo* y *Distancia al Precio Óptimo* de las tablas de resultados comparativo (4.4), (4.5) y (4.6). El otro elemento a considerar, es que *TOPS* posee el mayor tiempo de cómputo en los 3 casos estudiados, esto por el uso de dos métodos

numéricos, para hallar las proyecciones P_D y P_C que poseen en su interior.

En segundo lugar, *FPIS* es el algoritmo que presenta un rendimiento promedio entre los otros algoritmos estudiados, presenta la precisión media entre ambos en términos de órdenes de magnitud, alcanza el baseline con exactitud promedio para los 3 casos, presenta factibilidad de las restricciones en iteraciones tempranas y posee un costo en memoria computacional promedio entre ambos algoritmos.

Las características que perjudican este algoritmo, es que a pesar de tener iteraciones factibles tempranas para restricciones de interés como lo son la restricción de equilibrio y la restricción de no-anticipatividad, el efecto es opuesto con la distancia al óptimo primal y dual, requiriendo así de un mayor número de iteraciones por sobre los otros métodos.

En tercer lugar, *ADMM* es ventajoso por sobre los otros métodos destacando ser más preciso para el cálculo de las variables primales y duales. Además, destaca al ser un método superior en velocidad de cómputo por sobre *TOPS* y *FPIS*, esto debido a que, según se muestra en el *Algoritmo 6*, el cálculo de la proyección P_N es por un método exacto dado por (4.11) y una única proyección numérica P_{D_N} .

Los elementos que perjudican el desempeño de *ADMM* son las imprecisiones frente a las restricciones del problema, en especial, en la restricción de equilibrio que cobra mayor relevancia en este trabajo y la restricción de no-anticipatividad que es crucial para una toma de decisiones en etapas sin conocimiento de sucesos a futuro. Por último, es el método que depende de una mayor cantidad en memoria computacional, pues la misma arquitectura del algoritmo duplica el número de variables.

Otra hallazgo que se evidencia, es la relación entre los multiplicadores ρ y μ con respecto a los parámetros del problema. En particular, evidenciamos una relación inversamente proporcional entre ρ_ξ y $D_\xi - q_\xi$ de constante $VOLL_\xi$ para cada escenario $\xi \in \Xi$. Mientras que, para μ , dado un escenario $\xi \in \Xi$, la magnitud de las componentes están directamente relacionadas con los costos marginales MC_ξ y costos de inversión I , esto advierte que los costos sobre los cuales se activó son desfavorables para el inversor.

En definitiva, *ADMM* (3.3) presenta el método más flexible y que permite descomponer de diversas formas las variables del problema y permitiendo crear copias de las variables del problema. *ADMM* es ventajoso cuando se necesita gran precisión numérica en las variables primales y duales y el costo en memoria o altas dimensiones no son un impedimento. *TOPS* es el método que por su estructura (3.1), permite descomponer conjuntos de restricciones en más partes y así explotar estructuras más simples, esto aplicado al problema inversor-consumidor (2.4), es más sencillo determinar P_D y P_C

por separador, que considerar la intersección, es decir, que calcular $P_{D_{\mathcal{N}} \cap C}$. *TOPS* es ventajoso en escenarios de alta dimensionalidad, proyecciones que conjuntas resulten complejas y escasos recursos computacionales. Por último, *FPIS* es el método más balanceado entre tiempos de cómputo y precisión numérica en las soluciones y restricciones, pero más rígido ya que la estructura del problema (3.2) es más compacta que *TOPS* y *ADMM* exigiendo agrupar restricciones.

5.2. Perspectivas

El desarrollo y la evaluación de los algoritmos estudiados para la resolución del problema centralizado presenta varias perspectivas que son desafíos a futuro.

Uno de los principales hallazgos es la relación directamente proporcional entre el número de iteraciones que un algoritmo necesita para alcanzar una tolerancia determinada y el valor de las constantes γ y r en (3.1), γ en (3.2) y r en (3.4). Esta observación sugiere que un ajuste de estos parámetros puede conducir a mejoras significativas en la eficiencia de los algoritmos, debido a que en este trabajo, estos parámetros fueron establecidos aleatoriamente.

El hallazgo acerca de la proporcionalidad entre parámetros, los óptimos de las variables primales y variables duales, es interesante de investigar debido a ciertamente son esenciales para realizar análisis económicos, en especial a gran escala.

Además, se ha identificado que los métodos numéricos utilizados para calcular las proyecciones afectan negativamente el desempeño de los algoritmos debido a la creación de subrutinas adicionales entre iteraciones. Una arista a estudiar sería desarrollar formulaciones exactas para estas proyecciones, lo cual podría mejorar sustancialmente los tiempos de cálculo, especialmente en el caso del *TOPS* que depende de dos métodos numéricos, por sobre un método numérico que utilizan *FPIS* y *ADMM*.

Otra área de mejora potencial es la utilización de fórmulas directas para el cálculo de proyecciones simplificadas, esto es, relajar restricciones de los conjuntos D , $D_{\mathcal{N}}$ y C e incorporarlas en la función objetivo mediante métodos de penalización en la función objetivo. Esta aproximación, junto con un ajuste adecuado de parámetros, propios de la penalización, podría mejorar los resultados sin comprometer el objetivo de la optimización.

Se ha observado una correlación entre las puntas en la restricción de equilibrio en (4.5), (4.12) y (4.19) y los cambios de concavidad y dirección en la trayectoria evaluada en la restricción de capacidad de producción en (4.6), (4.13) y (4.20). Este hallazgo sugiere explorar las propiedades intrínsecas de la función objetivos que no fueron estudiadas en este trabajo.

Es factible analizar otros criterios de parada para los algoritmos, como la convergencia al valor teórico en distintos órdenes de magnitud, factibilidad, diferencias entre iteraciones, entre otros.

Finalmente, incorporar métodos de aceleración, como los desarrollados en [4, Sección 3.2] podría mejorar el desempeño de *TOPS*, permitiendo una convergencia más rápida y eficiente, notar que el autor sugiere estos métodos para soluciones más dispersas (sparse).

Agradecimientos Finales: Esta memoria ha sido parcialmente financiada por el proyecto FONDECYT Iniciación 11190549.

Bibliografía

- [1] HH Bauschke and PL Combettes. Convex analysis and monotone operator theory in hilbert spaces, 2011. CMS books in mathematics). DOI, 10:978–1, 2011.
- [2] Stephen Boyd, Neal Parikh, Eric Chu, Borja Peleato, Jonathan Eckstein, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. Foundations and Trends® in Machine learning, 3(1):1–122, 2011.
- [3] Luis M Briceno-Arias. Forward-douglas–rachford splitting and forward-partial inverse method for solving monotone inclusions. Optimization, 64(5):1239–1261, 2015.
- [4] Damek Davis and Wotao Yin. A three-operator splitting scheme and its optimization applications. Set-valued and variational analysis, 25:829–858, 2017.
- [5] Welington de Oliveira. Risk-averse stochastic programming and distributionally robust optimization via operator splitting. Set-Valued and Variational Analysis, 29(4):861–891, 2021.
- [6] Steven A Gabriel, Antonio J Conejo, J David Fuller, Benjamin F Hobbs, and Carlos Ruiz. Complementarity modeling in energy markets, volume 180. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Jeremy J Hargreaves and Benjamin F Hobbs. Commitment and dispatch with uncertain wind generation by dynamic programming. IEEE Transactions on sustainable energy, 3(4):724–734, 2012.
- [8] Mikulas Luptacik et al. Mathematical optimization and economic analysis, volume 287. Springer, 2010.
- [9] Juan C Muñoz, Enzo Sauma, Francisco D Muñoz, and Rodrigo Moreno. Analysis of generation investments under price controls in cross-border trade of electricity. Energy Economics, 123:106722, 2023.

- [10] Francisco Muñoz Espinoza. Electricity market design for low-carbon and flexible systems: Room for improvement in chile. , 2023.
- [11] Takashi Negishi. From samuelson’s stability analysis to non-walrasian economics. In Samuelson and Neoclassical Economics, pages 119–125. Springer, 1982.
- [12] R Tyrrell Rockafellar and Jie Sun. Solving monotone stochastic variational inequalities and complementarity problems by progressive hedging. Mathematical Programming, 174(1):453–471, 2019.
- [13] R Tyrrell Rockafellar and Roger J-B Wets. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. Mathematics of operations research, 16(1):119–147, 1991.
- [14] R Tyrrell Rockafellar and Roger JB Wets. Stochastic variational inequalities: single-stage to multistage. Mathematical Programming, 165(1):331–360, 2017.
- [15] Jie Sun, Honglei Xu, and Min Zhang. A new interpretation of the progressive hedging algorithm for multistage stochastic minimization problems. Journal of Industrial & Management Optimization, 16(4):1655, 2020.
- [16] Roger JB Wets. The aggregation principle in scenario analysis and stochastic optimization. In Algorithms and model formulations in mathematical programming, pages 91–113. Springer, 1989.