Cálculo de Equilibrio de Mercado en Economías con Incertidumbre vía Métodos de Primer Orden

Memoria de Título - MAT308

Estudiante: Alan Grez Jimenez
Profesores Guía: Julio Deride - Luis Briceño
Presidente Comisión: Nicolás Hernández

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

27 Junio 2024

Introducción I

El siguiente trabajo de memoria estudia los problemas económicos de equilibrio estocástico, con aplicación en mercados eléctricos [5] [7] [8]. En particular el diseño de algoritmos para su solución.

Objetivo

- Resolver problemas de equilibrio estocástico en economías de múltiples agentes a través de una formulación centralizada, mediante tres métodos numéricos de primer orden y la aplicación de *no-anticipatividad* como método de relajación al problema centralizado.

Problema de Equilibrio de Walras Estocástico

Problema de Equilibrio

Cómo introducción al tipo de problema que buscamos resolver, tenemos,

Problema de Equilibrio Inversor-Consumidor

Hallar el precio por unidad generada $\rho_\xi \in \mathbb{R}$ por cada escenario $\xi \in \Xi$ tal que,

$$\begin{aligned} \min_{c,g\geq 0} \quad & \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \iota_{\mathbb{R}^+}(c - g_\xi)\right\} + \mathbb{E}_\xi\{\langle \rho_\xi, 1^T g_\xi \rangle\}, \\ \min_{q\geq 0} \quad & \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_3(\xi, q_\xi)\right\} - \mathbb{E}_\xi\{\langle \rho_\xi, q_\xi\rangle\}, \\ & 1_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi. \end{aligned} \tag{1}$$

Problema de Equilibrio

Problema de Equilibrio I

Consideremos una economía con $M \in \mathbb{N}$ agentes que comercian un N bienes diferentes a un precio de mercado $\rho \in \mathbb{R}^N$.

Problema de Equilibrio

Sean un vector de precio $\rho \in \mathbb{R}^N$ y funciones $\{\varphi^i\}_{i=1}^M$ tal que $\varphi^i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son propias, convexas y semi-continuas inferiores para todo $i = 1, \ldots, M$. El problema de equilibrio es hallar ρ tal que

$$x^i \in \textit{argmin}_{x^i \in \mathbb{R}^N} \left\{\varphi^i(x^i) + \left\langle \rho, x^i \right\rangle\right\}, \quad \forall i \in \{1, ..., M\}, \tag{2}$$

y donde

$$\sum_{i=1}^{M} x^i = 0. \tag{3}$$

Problema de Equilibrio II

La solución al Problema de Equilibrio (2)-(3) viene dada por

Solución Problema de Equilibrio

Son solución $\rho^* \in \mathbb{R}^N$ y una colección $\{x^{i*}\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^N$ de (2)-(3) si,

$$\forall i = 1, \ldots, M, \quad x^{i*} \in \textit{argmin}_{x^i \in \mathbb{R}^N} \left\{ \varphi^i(x^i) + \langle \rho^*, x^i \rangle \right\} \tag{4}$$

y

$$\sum_{i=1}^{M} x^{i*} = 0. \tag{5}$$

Esta solución está bien definida debido a las hipótesis que se establecen en el Problema de Equilibrio (2)-(3).

Problema Centralizado I

Se propone una formulación centralizada [9] del problema de equilibrio que asegure la restricción de equilibrio (3) por:

Problema Centralizado

Sean $\{\varphi^i\}_{i=1}^M$ funciones tal que $\varphi^i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son propias, convexas y semi-continuas inferiores y $x := (x^i)_{i=1}^M \in \mathbb{R}^{MN}$. El problema centralizado es:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{NM}} \quad & \sum_{i=1}^{M} \varphi^i(x^i), \text{ con } x = (x^i)_{i=1}^M \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{M} x^i = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Problema Centralizado II

La solución al Problema de Centralizado (6) es:

Solución Problema Centralizado

Son solución $(x^{i*})_{i=1}^{i=M} =: x^* \in \mathbb{R}^{MN}$ de (6) si

$$x^* \in \textit{argmin}_{x\in\mathbb{R}^{MN}} \left\{ \sum_{i=1}^{M} \varphi^i(x^i) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{M} x^i = 0 \right\}. \tag{7}$$

Esta solución está bien definida debido a las hipótesis que se establecen en el Problema Centralizado (6).

Teorema

Caracterización de la solución del Problema de Equilibrio (2)-(3) a partir del Problema Centralizado (6).

Theorem (Caracterización Soluciones)

Sea el Problema de Equilibrio (2)-(3)*,* $(\rho^*, \{x^{i*}\}_{i=1}^M) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{MN}$ *una solución y* $x^* \in \mathbb{R}^{MN}$ *una solución al Problema Centralizado* (6)*. Si*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{M} \textit{ri dom}\, \varphi^i\right) \cap \textit{ri dom} \left(\iota_{\{0\}} \circ \sum_{i=1}^{M} \pi_i\right) \neq \varnothing$$

y ri dom φ^i *convexo para todo* $i = 1, \ldots, M$*, entonces* x^* *resuelve el problema de equilibrio y* $\{x^{i*}\}_{i=1}^M$ *resuelve el problema centralizado.*

con *ri*$(\cdot)$ el interior relativo del conjunto, *dom*$(\cdot)$ es el dominio de la función, $\iota_{\{0\}}$ es la función indicatriz sobre el singleton $\{0\}$ y π_i ,a proyección sobre la variable de decisión del i-ésimo término y satisface $\pi_i x^* = x^{i*}$ para $i = 1, \ldots, M$.

No-Anticipatividad

No-Anticipatividad I

- Introduciremos *No-anticipativdad* como técnica de relajamiento al Problema Centralizado (6). Formulación basada en los trabajos [13], [11], [12] y [10].
- Sea un horizonte de eventos de 2 etapas.
- El conjunto de escenarios por $\Xi := \Xi_1 \times \Xi_2$, así los elementos $\xi \in \Xi$ tienen probabilidad conocida, $p(\xi) = p_\xi > 0$ y $\sum_{\xi\in\Xi} p_\xi = 1$.
- Definimos una respuesta a un escenario por

$$x(\cdot) : \xi \to x(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} =: \mathbb{R}^N.$$

- Estas variables pertenecen al espacio vectorial Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$, donde $\mathcal{H} = \{x(\cdot) : \Xi \to \mathbb{R}^N \mid x \textit{ función}\}$ y

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}\left\{\langle x_1(\xi), y_1(\xi)\rangle_{\mathbb{R}^{n_1}}\right\} + \mathbb{E}\left\{\langle x_2(\xi), y_2(\xi)\rangle_{\mathbb{R}^{n_2}}\right\}.$$

No-Anticipatividad II

La decisión $x_t(\xi)$ depende sólo de la información revelada hasta la etapa $t = 1, 2$.

No-Anticipatividad

Denominamos *No-Anticipatividad* a la propiedad

$$x_1(\xi) = x_1, \quad x_2(\xi) = x_2(\xi_1), \quad \text{con } \xi_1 \in \Xi_1, \tag{8}$$

con x_1 independiente de los escenarios.

Espacio de *No-Anticipatividad*

El conjunto de todas las variables *no-anticipativas* es

$$\mathcal{N} := \{x(\cdot) \in \mathcal{H} \mid x_1(\xi) = x_1(\xi'), \quad \forall \xi, \xi' \in \Xi\}, \tag{9}$$

y conforman un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$, ie, $\mathcal{N} \leq \mathcal{H}$.

No-Anticipatividad III

Por último, el esquema de minimización es

Problema de Minimización Estocástico de 2 Etapa

Sea $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{N} \leq \mathcal{H}$ como en (9),

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{H}} \quad & \mathbb{E}\{f_1(x_1(\xi), \xi) + f_2(x_2(\xi), \xi)\} \\ s.t. \quad & x \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

donde $f(x(\cdot), \cdot) : \Xi \to \mathbb{R}$ y $f(\cdot, \xi) : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones propias, convexas y semi-continua inferiores.

No-Anticipatividad IV

- Gracias a la formulación mediante *no-anticipativdad*, los siguientes problemas son equivalentes.

Minimización Estocástica

Sea $\mathcal{H}$ Hilbert,

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \quad f_1(x_1) + \mathbb{E}\{f_2(x_2(\xi), \xi)\}$$

Minimización Estocástica 2 Etapas

Sea $\mathcal{H}$ Hilbert y $\mathcal{N} \leq \mathcal{H}$ como (9),

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{H}} \quad & \mathbb{E}\{f_1(x_1(\xi)) + f_2(x_2(\xi), \xi)\} \\ s.t. \quad & x \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

- Suponemos hipótesis de convexidad y semi-continuidad inferior para ambos problemas de tal forma que ambos estén bien definidos.
- El problema de minimización estocástica de dos etapas es separable por escenarios.

Algoritmos

Algoritmos

En esta sección estudiamos algoritmos aplicados a distintos problemas de minimización y revisamos las hipótesis necesarias para su convergencia.

Introduzcamos el operador proximal

Operador Proximal

Sea $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ una función propia, convexa y semi-continua inferior, el *operador proximal de* f viene dado por

$$prox_f(x) = \textit{argmin}_{y \in \mathcal{H}} \left(f(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 \right),$$

el cual está bien definido [1, Definición 12.23].

Notar que si $f = \iota_X$ con $X \neq \varnothing$ cerrado y convexo, entonces $prox_{\iota_X} = P_X$, es decir, la proyección al conjunto X [1, Teorema 3.16].

Three-Operator Splitting Scheme (TOPS) I

El siguiente método está basado en [4, Sección 3.1].

Three-Operator Splitting Scheme.

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert,

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(x) + h(x) \tag{10}$$

donde $f, g : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones semi-continuas inferiores, propias y convexas, $h : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es convexa, diferenciable y ∇h es $L-$Lipschitz continua.

- La idea es explotar 3 operadores por separado.
- Ventajoso por sobre la activación de $(f + g + h)(\cdot)$ cuando su proximal es difícil de calcular.
- Activa f y g separadamente vía proximal.

Three-Operator Splitting Scheme (TOPS) II

De esta forma, introducimos el siguiente algoritmo que resuelve el problema (10),

Three-Operator Splitting Scheme (TOPS) [4, Sección 3.1]

Algoritmo 1: TOPS

Let: Sea $z_0 \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$

for $k = 0, \ldots, N$ **do**

$x_g^k = \textit{prox}_{\gamma g}\left(z_k\right)$

$x_f^k = \textit{prox}_{\gamma f}\left(2x_g^k - z_k - \gamma \nabla h(x_g^k)\right)$

$z_{k+1} = z_k + x_f^k - x_g^k$

Three-Operator Splitting Scheme (TOPS) III

La convergencia del algoritmo 1, está asegurada por el siguiente teorema,

Theorem (Convergencia TOPS [4])

Sean $\mathcal{H}$, f, g, h *y* L *como en* (10) *y* $x^* \in \mathcal{H}$ *óptimo que resuelve* (10), *entonces* x_g^k *converge a* x^*.

La demostración se deduce de [4, Teorema 2.1]. $\square$

Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS) I

El siguiente método explota el siguiente esquema [3, Problema 6.6]

Forward-Partial-Inverse Splitting

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert,

$$\min_{x \in \mathcal{V}} f(x) + g(x) \tag{11}$$

donde $\mathcal{V} \leq \mathcal{H}$, $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, convexa y semi-continua inferior, $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable y ∇g es $L-$Lipschitz continua.

- El siguiente método explota la separación de 2 operadores y la estructura de espacio vectorial.
- Ventajoso por sobre la activación de $(f + g)(\cdot)$ vía proximal.

Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS) II

De esta forma, introducimos el siguiente algoritmo que resuelve el problema (11),

Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS) [3, Seccion 6.1]

Algoritmo 2: FPIS

Let: Sea $z_0 \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$

for $k = 0, \ldots, N$ **do**

$x^k = P_V z^k$

$y^k = (x^k - z^k)/\gamma$

$s^k = x^k - \gamma P_V(\nabla g(x^k)) + \gamma y^n$

$p^k = \textit{prox}_{\gamma f}(s^k)$

$z^{k+1} = z^k + \lambda^k (p^k - x^k)$

Forward-Partial-Inverse Splitting (FPIS) III

La convergencia del algoritmo viene garantizada por el siguiente teorema,

Theorem (Convergencia FPIS [3])

Sean $\mathcal{H}$, V, f, g *como en* (11)*, sea* $\gamma \in]0, 2/L[$*, sea* $\alpha = \max\{2/3, 2/(\gamma + 2/L)\}$ *y sea* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, 1/\alpha[$*. Si*

$$0 \in (\partial f + \nabla g + N_V)$$

Entonces el algoritmo 2 converge a un $\overline{x}$ *de manera factible respecto al espacio vectorial, esto es, la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$*,* $\overline{x}$ *es solución del problema* (11) *y* $x_n \to \overline{x}$*.*

La demostración está en [3, Proposición 6.7]. □

Alternating Direction Method Multipliers (ADMM) I

El siguiente método explota el siguiente esquema [2, Subsección 3].

Alternating Direction Method Multipliers

Sea $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$

$$\begin{aligned} \min_{(x,z)\in\mathcal{H}} \quad & f(x) + g(z), \\ s.t. \quad & Ax + Bz = c, \end{aligned} \tag{12}$$

donde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones propias, convexas y semi-continuas inferiores, $A \in \mathbb{M}^{p\times N}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}^{p\times M}(\mathbb{R})$ son matrices y $c \in \mathbb{R}^p$.

- El siguiente método explota la separación de la función objetivo.
- Ventajoso por la copia de la variable x con z.

Alternating Direction Method Multipliers (ADMM) II

Definimos el *Lagrangeano Aumentado* para $r \geq 0$ por:

$$L_r(x, z, y) := f(x) + g(z) + y^T(Ax + Bz - c) + \frac{r}{2}||Ax + Bz - c||_2^2 \quad (13)$$

El siguiente algoritmo resuelve el problema (12),

Alternating Direction Method Multipliers (ADMM) [2, Sección 3.2]

Algoritmo 3: ADMM

Let: $r > 0$

for $k = 1, \ldots, N$ **do**

$\quad x^{k+1} = \mathit{argmin}_x L_r(x, z^k, y^k)$

$\quad z^{k+1} = \mathit{argmin}_z L_r(x^{k+1}, z, y^k)$

$\quad y^{k+1} = y^k + r(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c)$

Alternating Direction Method Multipliers (ADMM) III

La convergencia del algoritmo está garantizado por el siguiente teorema,

Theorem (Convergencia ADMM [2])

Sean f *y* g *definidas como en* (12) *y* L_0 *definido en* (13). *Si* L_0 *tiene un punto silla, i.e., que existe* $(x^*, z^*, y^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^p$ *tal que* $\forall (x, z, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^p$*,*

$$L_0(x^*, z^*, y) \leq L_0(x^*, z^*, y^*) \leq L_0(x, z, y^*),$$

entonces,

- *(i)* (x^*, z^*) *es solución de primal de* (12)
- *(ii)* y^* *es el óptimo dual de* (12)
- *(iii) Si* $r^k = Ax^k + Bz^k - c$*, entonces* $r^k \to 0$*.*
- *(iv)* $f(x^k) + g(z^k) \to f(x^*) + g(z^*)$*.*

La demostración está en [2, Subsección 3.2]. □

Simulación y Resultados Numéricos

Problemas Inversor-Consumidor

Problemas Inversor-Consumidor I

Dado un horizonte de eventos de 2 etapas. Una determinista y, una segunda etapa, estocástica, tal que el conjunto de escenarios de esta segunda es

$$\xi \in \Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_M\} \text{ tal que } p_\xi \text{ es conocido y } \sum_{\xi \in \Xi} p_\xi = 1. \tag{14}$$

Sea una economía de dos agentes compuesta por un inversor y un consumidor que interactúan entre sí. La asignación de recursos viene por:

	Etapa	
Agente	Etapa 1	Etapa 2
Inversor	c	g
Consumidor	$--$	q

Problemas Inversor-Consumidor II

Los costos asociados a cada decisión de agente vienen por:

	Etapa	
Agente	Etapa 1	Etapa 2
Inversor	$\varphi_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$	$\varphi_2 : \Xi \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
Consumidor	$--$	$\varphi_3 : \Xi \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

De esta forma,

Problema de Equilibrio Inversor-Consumidor

Hallar el precio por unidad generada $\rho_\xi \in \mathbb{R}$ por cada escenario $\xi \in \Xi$ tal que,

$$\begin{aligned} &\min_{c,g\geq 0} \quad \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \iota_{\mathbb{R}^+}(c - g_\xi)\right\} + \mathbb{E}_\xi\{\langle \rho_\xi, 1^T g_\xi \rangle\}, \\ &\min_{q\geq 0} \quad \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_3(\xi, q_\xi)\right\} - \mathbb{E}_\xi\{\langle \rho_\xi, q_\xi\rangle\}, \\ &\qquad\quad 1_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi. \end{aligned} \tag{15}$$

Problemas Inversor-Consumidor III

- Notar que $1^T g_\xi > 0$, esto es, aportar bienes a la economía representando lo que se oferta, o simplemente la oferta.
- Notar que $0 > -q_\xi$ sustrae bienes a la economía, actuando como lo que se consume, o simplemente demanda.

Problemas Inversor-Consumidor IV

De esta forma, al asignar cada variable y función, como en (2)

$$x^1 = (c, g),$$
$$x^2 = q,$$

$$\varphi^1(x^1) = \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \left\{ \varphi_2(\xi, g_\xi) + \iota_{\mathbb{R}+}(c - g_\xi) \right\},$$
$$\varphi^2(x^2) = \mathbb{E}_\xi \left\{ \varphi_3(\xi, q_\xi) \right\},$$

recuperamos el problema de equilibrio aplicado al problema de inversor-consumidor con la restricción de equilibrio

$$1_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi.$$

Problemas Inversor-Consumidor V

Así, el Problema Centralizado (6) es,

Problema Centralizado

$$\min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\right\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 1_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi, \\ & c - g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi, \\ & c, g_\xi, q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi, \end{aligned} \tag{17}$$

- Por Teorema 1, la solución de (16)-(17) resuelve el problema de equilibrio (15).

Problemas Inversor-Consumidor VI

Con $(c, g, q) \in (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$, donde $\mathcal{H} := \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^M$,

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} := \langle x^1, y^1\rangle_{\mathbb{R}^N} + \mathbb{E}\{\langle x^2_\xi, y^2_\xi\rangle_{\mathbb{R}^N}\} + \mathbb{E}\{x^3_\xi y^3_\xi\},$$

con $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^N}$ producto interno usual en $\mathbb{R}^N$ y norma inducida por

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}} := \|x^1\|^2_{\mathbb{R}^N} + \mathbb{E}\{\|x^2_\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}\} + \mathbb{E}\{|x^3_\xi|^2\}. \tag{18}$$

Incorporación No-Anticipatividad I

Ahora, copiamos la etapa estocástica (14) en la etapa determinista. Así, el espacio se convierte en $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ con $\mathcal{H} := \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^{NM} \times \mathbb{R}^{M}$ y

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} := \mathbb{E}\{\langle x_\xi^1, y_\xi^1\rangle_{\mathbb{R}^N}\} + \mathbb{E}\{\langle x_\xi^2, y_\xi^2\rangle_{\mathbb{R}^N}\} + \mathbb{E}\{x_\xi^3 y_\xi^3\},$$

con $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^N}$ producto interno usual en $\mathbb{R}^N$, norma inducida por

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 := \mathbb{E}\{\|x_\xi^1\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \mathbb{E}\{\|x_\xi^2\|_{\mathbb{R}^N}^2\} + \mathbb{E}\{|x_\xi^3|^2\}, \tag{19}$$

con $x = (x_1, x_2, x_3) = (c, g, q)$ de ahora en adelante.

Incorporación No-Anticipatividad II

Visualizando las variables como respuestas a los escenarios:

	Etapa	
Agente	Etapa 1	Etapa 2
Inversor	$c(\cdot) : \Xi \to \mathbb{R}^N$	$g(\cdot) : \Xi \to \mathbb{R}^N$
Consumidor	$--$	$q(\cdot) : \Xi \to \mathbb{R}$

Aplicamos la propiedad de *No-Anticipatividad* (8) con,

$$x_1(\xi) = c_\xi \in \mathbb{R}^N, \quad x_2(\xi) = \begin{pmatrix} g_\xi \\ q_\xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \Xi,$$

Así, el Espacio de *No-Anticipatividad* es:

$$\mathcal{N} = \{(c, g, q) \in \mathcal{H} \mid c_\xi = c_{\xi'}, \quad \forall \xi, \xi^{'} \in \Xi\}.$$

Incorporación No-Anticipatividad III

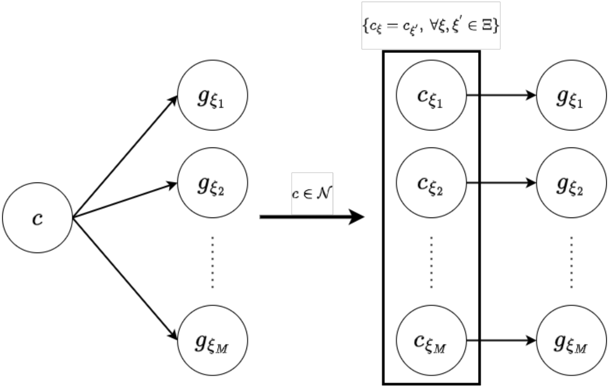


Figura: *No-Anticipatividad* aplicada a la variable $c \in \mathbb{R}^N$. Las flechas representan la dependencia de g_ξ sobre c o c_ξ para cada $\xi \in \Xi$.

Incorporación No-Anticipatividad IV

De esta forma, se tiene

Problema Centralizado No-Anticipativo

Resolver el problema equivalente a (16)

$$\min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\right\} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \textit{s.t.} \quad & 1_N^T g_\xi - q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi \\ & c_\xi - g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi \\ & c \in \mathcal{N}, \\ & c_\xi, g_\xi, q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi \end{aligned} \tag{21}$$

- La restricción de no-anticipatividad implica que la función objetivo del problema (20) es separable respecto a $\xi \in \Xi$.

Aplicación Algoritmos

Parámetros I

Consideremos los siguientes parámetros por:

- Costos de inversión $I \in \mathbb{R}^N$.
- Costos marginales: $MC_\xi \in \mathbb{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$, con MC_ξ matriz definida positiva, $\forall \xi \in \Xi$.
- Costos por carga perdida: $VOLL_\xi \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \Xi$.
- Demanda: $D_\xi \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \Xi$.

Asignemos las funciones de costo por:

	Etapa	
Agente	Etapa 1	Etapa 2
Inversor	$\varphi_1(c) = I^T c$	$\varphi_2(\xi, g_\xi) = \frac{1}{2} g_\xi^T MC_\xi g_\xi$
Consumidor	$--$	$\varphi_3(\xi, q_\xi) = -VOLL_\xi \cdot (D_\xi - q_\xi)$

- Si $c \in \mathcal{N} \implies \varphi_1(c_\xi) = I^T c_\xi = \mathbb{E}\{I^T c_\xi\},\ \forall \xi \in \Xi$.

Parámetros II

Definimos los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
D &:= \{(c,g,q) \in \mathcal{H} \mid c \geq g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi\}, \\
D_{\mathcal{N}} &:= \{(c,g,q) \in \mathcal{H} \mid c_\xi \geq g_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi\}, \\
C &:= \{(c,g,q) \in \mathcal{H} \mid 1^T g_\xi \geq D_\xi - q_\xi \geq 0,\ q_\xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi\},
\end{aligned}
$$

los cuales son convexos, cerrados y no vacíos. Así, reescribimos el problema centralizado (16) por

$$
\min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad \varphi_1(c) + \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\right\} + \iota_D(c,g,q) + \iota_C(c,g,q),
$$

y para el problema centralizado no-anticipativo (20) por

$$
\begin{aligned}
\min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad & \mathbb{E}_\xi \left\{\varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\right\} + \iota_{D_{\mathcal{N}}}(c,g,q) \\
& + \iota_C(c,g,q) + \iota_{\mathcal{N}}(c,g,q).
\end{aligned}
$$

Parámetros III

La constante Lipschitz L del gradiente de $\varphi_1 + \mathbb{E}\{\varphi_2 + \varphi_3\}$ de (16) y $\mathbb{E}\{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3\}$ de (20) es la misma, debido a la linealidad de φ_1 y así, L está dado por

$$L = \mathbb{E}\{\|MC_\xi\|_F\}, \tag{22}$$

donde $\|\cdot\|_F$ es la norma Frobenius, aunque es independiente de la norma matricial.

TOPS aplicado I

Para la aplicación del Algoritmo (1) *TOPS*, asignamos las de (10) como sigue

$$\begin{aligned} h(x) &\quad\longleftrightarrow\quad \varphi_1(c) + \mathbb{E}\{\varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\}. \\ g(x) &\quad\longleftrightarrow\quad \iota_D(c, g, q). \\ f(x) &\quad\longleftrightarrow\quad \iota_C(c, g, q). \end{aligned}$$

Al realizar esta asignación se tiene que $prox_{\gamma g} \equiv P_D$ y $prox_{\gamma f} \equiv P_C$.

TOPS aplicado II

Si $(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q}) \in \mathcal{H}$ es el punto que proyectamos, entonces

Proyección $P_C(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$

$P_C(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$ resuelve,

$$\begin{aligned} \min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2}\|c-\overline{c}\|^2_{\mathbb{R}^N} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\|g_\xi - \overline{g_\xi}\|^2_{\mathbb{R}^N}\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{(g_\xi - \overline{q_\xi})^2\}, \\ s.t. \quad & (c,g,q) \in C, \end{aligned} \tag{23}$$

Proyección $P_D(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$

$P_D(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$ resuelve,

$$\begin{aligned} \min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2}\|c-\overline{c}\|^2_{\mathbb{R}^N} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\|g_\xi - \overline{g_\xi}\|^2_{\mathbb{R}^N}\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{(g_\xi - \overline{q_\xi})^2\}, \\ s.t. \quad & (c,g,q) \in D. \end{aligned}$$

TOPS aplicado III

- La función objetivo asignada a h satisface ser convexa y diferenciable con su diferencial ∇h $L-$Lipschitz continuo definida en (22).
- Las funciones asignadas a g y f son propias, convexas y semi-continuas inferiores.

Así las hipótesis del teorema de convergencia (2) se satisfacen, por ende, el siguiente algoritmo converge al óptimo.

TOPS aplicado IV

TOPS Aplicado

Algoritmo 4: *TOPS* Aplicado

Let: Sea $(z_1^0, z_2^0, z_3^0) \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$, $\lambda_k \equiv 1$

for $k = 1, \dots, N$ **do**

$$\begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} = P_D \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_f^k \\ g_f^k \\ q_f^k \end{pmatrix} = P_C \left(2 \begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} - \gamma \nabla h \begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} z_1^{k+1} \\ z_2^{k+1} \\ z_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} + \lambda_k \left(\begin{pmatrix} c_f^k \\ g_f^k \\ q_f^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_g^k \\ g_g^k \\ q_g^k \end{pmatrix} \right)$$

FPIS aplicado I

Para la aplicación del Algoritmo (2) *FPIS*, asignamos a las componentes de (11) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g(x) &\quad\longleftrightarrow\quad \mathbb{E}\{\varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi)\}. \\ f(x) &\quad\longleftrightarrow\quad \iota_{D\cap C_{\mathcal{N}}}(c, g, q). \\ V &\quad\longleftrightarrow\quad \mathcal{N} = \{(c, g, q) \in \mathcal{H} \mid c_\xi = c_{\xi'}, \quad \forall \xi, \xi^{'} \in \Xi\}. \end{aligned}$$

Al realizar esta asignación se tiene que $P_V \equiv P_{\mathcal{N}}$ y $prox_{\gamma f} \equiv P_{D_{\mathcal{N}}\cap C}$.

FPIS aplicado II

Si $(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q}) \in \mathcal{H}$ es el punto que deseamos proyectar, entonces

Proyección $P_{\mathcal{N}}(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$

$$P_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \overline{c} \\ \overline{g} \\ \overline{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\overline{c}\} \\ \overline{g} \\ \overline{q} \end{pmatrix}, \text{ con } \mathbb{E}\{\overline{c}\} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{\overline{c_\xi}\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{\overline{c_\xi}\} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{NM}, \tag{24}$$

Calculo viene a partir de [1, Example 3.8].

Proyección $P_{D_{\mathcal{N}} \cap C}(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$

$P_{D_{\mathcal{N}} \cap C}(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$ resuelve,

$$\begin{aligned} \min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\|c - \overline{c}\|^2_{\mathbb{R}^N}\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\|g_\xi - \overline{g_\xi}\|^2_{\mathbb{R}^N}\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{(g_\xi - \overline{q_\xi})^2\}, \\ s.t. \quad & (c, g, q) \in D_{\mathcal{N}} \cap C. \end{aligned} \tag{25}$$

Algoritmo 5: ***FPIS*** **Aplicado**

Let: $(z_1^k, z_2^k, z_3^k) \in \mathcal{H}$, $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$

for $k = 1, \dots, N$ **do**

$$\begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} = P_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ y_3^k \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \left(\begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} s_1^k \\ s_2^k \\ s_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} - \gamma P_{\mathcal{N}} \nabla g \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ y_3^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1^k \\ p_2^k \\ p_3^k \end{pmatrix} = P_{D \cap C_{\mathcal{N}}} \begin{pmatrix} s_1^k \\ s_2^k \\ s_3^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1^{k+1} \\ z_2^{k+1} \\ z_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ z_3^k \end{pmatrix} + \lambda^k \left(\begin{pmatrix} p_1^k \\ p_2^k \\ p_3^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c^k \\ g^k \\ q^k \end{pmatrix} \right)$$

ADMM aplicado I

Para la aplicación del Algoritmo (3) *ADMM*, asignamos la función objetivo a las componentes que constituyen (12), esto es

$$
\begin{aligned}
f(x) &\longleftrightarrow \ \mathbb{E}_\xi \left\{ \varphi_1(c_\xi) + \varphi_2(\xi, g_\xi) + \varphi_3(\xi, q_\xi) + \iota_{D_\mathcal{N}}(c_\xi, g_\xi, q_\xi) \right\}, \\
g(z) &\longleftrightarrow \ \iota_C(z_1, z_2, z_3) + \iota_\mathcal{N}(z_1, z_2, z_3), \\
A &= -B = I_{NM+NM+M}, \quad c = 0,
\end{aligned}
$$

donde $I_{NM+NM+M}$ es una matriz identidad. Destacamos para $D_\mathcal{N}$, C y $\mathcal{N}$, algunas propiedades sobre las funciones indicatrices

$$
\begin{aligned}
\iota_{D_\mathcal{N}}(c, g, q) &= \iota_{D_\mathcal{N}}(c, g), \\
\iota_C(z_1, z_2, z_3) &= \iota_C(z_2, z_3), \\
\iota_\mathcal{N}(z_1, z_2, z_3) &= \iota_\mathcal{N}(z_1).
\end{aligned}
$$

ADMM aplicado II

Para $P_{\mathcal{N}}(\overline{c}, \overline{g}, \overline{q})$ ya fue calculada explícitamente en (24).

Proyección $P_C(\overline{g}, \overline{q})$

$P_C(\overline{g}, \overline{q})$ resuelve,

$$\begin{aligned} \min_{(c,g,q)\in\mathcal{H}} \quad & \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\|g_\xi - \overline{g_\xi}\|^2\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{(q_\xi - \overline{q_\xi})^2\} \\ s.t. \quad & (g, q) \in C \end{aligned}$$

- Dado que f y g, ι_C y $\iota_{\mathcal{N}}$ son propias convexas y semi-continuas inferiores.
- El Problema Centralizado No-anticipativo (20) satisface la condición de Slater.
- L_0, definido en (13), posee un punto silla [6, Teorema 3.9].

ADMM aplicado III

El siguiente algoritmo converge a un óptimo (4).
Utilizamos las siguientes variables auxiliares:

Variables Auxiliares por iteración

Let: $r > 0$

$s_{i\xi}^{1k} = z_{i\xi}^{1k} - y_{i\xi}^{1k} - (1/r)I_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

$s_{i\xi}^{2k} = r(MC_{ii\xi} + r)^{-1}(z_{i\xi}^{2k} - y_{i\xi}^{2k}), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

$s_{\xi}^{3k} = z_{\xi}^{3k} - y_{\xi}^{3k} - (1/r)VOLL_{\xi}, \quad \forall \xi \in \Xi$

$t_{i\xi}^{k} = (r^{-1} + (MC_{ii\xi} + r)^{-1})^{-1}(s_{i\xi}^{2k} - s_{i\xi}^{1k} + (s_{i\xi}^{1k} - s_{i\xi}^{2k})_+), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \xi \in \Xi$

donde $(\cdot)_+ = \max\{0, \cdot\}$. Luego, el algoritmo es:

ADMM aplicado IV

ADMM Aplicado

Algoritmo 6: *ADMM* Aplicado

Let: $r > 0$

for $k = 1, \ldots, N$ **do**

$$\begin{pmatrix} c_{i\xi}^{k+1} \\ g_{i\xi}^{k+1} \\ q_{\xi}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{i\xi}^{1k} \\ s_{i\xi}^{2k} \\ s_{\xi}^{3k} \end{pmatrix} + (1/r) \begin{pmatrix} t_{i\xi}^{k} \\ -t_{i\xi}^{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, \ldots, N \quad \forall \xi \in \Xi$$

$$z^{1k+1} = P_{\mathcal{N}}(y^{1k} + c^{1k+1})$$

$$\begin{pmatrix} z^{2k+1} \\ z^{3k+1} \end{pmatrix} = P_C \left(\begin{pmatrix} y^{2k} \\ y^{3k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^{2k+1} \\ q^{3k+1} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} y^{1k+1} \\ y^{2k+1} \\ y^{3k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{1k} \\ y^{2k} \\ y^{3k} \end{pmatrix} + r \left(\begin{pmatrix} c^{k+1} \\ g^{k+1} \\ q^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z^{1k+1} \\ z^{2k+1} \\ z^{3k+1} \end{pmatrix} \right)$$

Deducción del precio de equilibrio

Deducción del precio de equilibrio

Sea $\rho \in \mathbb{R}^M$ el precio de equilibrio.

- Ninguno de los 3 algoritmos está enfocado ni diseñado para determinar ρ.
- ρ es la variable dual del sub-problema P_C, es decir, es la variable dual asociada a la restricción de equilibrio (23) y (25).
- Calculamos ρ numéricamente al configurar explícitamente el solver y reescalándolo de forma multiplicativa:

$$\rho_\xi \longleftrightarrow \frac{\rho_\xi}{p_\xi}, \quad \forall \xi \in \Xi.$$

Resultados Numéricos

Métricas I

Las métricas utilizadas son:

Nombre	Métrica
Distancia al Óptimo	$\frac{\|x^k - x^*\|}{\|x^*\|}$
Diferencia Función Objetivo	$\|f(x^k) - f(x^*)\|$
Restricción No-Anticipatividad	$\mathbb{E}\{\|c_\xi^k - P_{\mathcal{N}}(c_\xi^k)\|_{\mathbb{R}^N}\}$
Restricción Equilibrio	$\mathbb{E}\{\|1^T g_\xi^k - (D_\xi - q_\xi^k)\|\}$
Restricción Capacidad	$\mathbb{E}\{\|c_\xi^k - g_\xi^k\|_{\mathbb{R}^N}\}$
Restricción Demanda	$\mathbb{E}\{\|D_\xi - q_\xi^k\|\}$
Distancia al Precio Óptimo	$\frac{\mathbb{E}\{\|\rho_\xi^k - \rho_\xi^*\|\}}{\mathbb{E}\{\|\rho_\xi^*\|\}}$

El criterio de parada es alcanzar un máximo de 10000 iteraciones.

Parámetros I

Consideremos los siguientes valores para los costos de inversión $I \in \mathbb{R}^N$ y costos por carga perdida $VOLL \in \mathbb{R}^M$ de forma transversal para todos los casos.

$$I = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 95 \end{pmatrix}, \quad VOLL_\xi = 10000, \quad \forall \xi \in \Xi.$$

Asignamos los escenarios Ξ, el vector de probabilidad $p = (p_{\xi_1}, \ldots, p_{\xi_5})$, los costos marginales MC y la demanda D, como sigue por caso.

Parámetros II

- **Caso 1: Escenarios Equiprobables.**

	Caso 1				
Ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
p	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
	10	9	12	7	14
MC	21	205	220	195	230
	410	420	390	440	370
D	200	750	1000	1250	1500

Cuadro: Parámetros para **Caso 1: Escenarios Equiprobables**.

La constante de Lipschitz (22) de la función objetivo es

$$L = 458{,}7.$$

Parámetros III

- **Caso 2: Probabilidades Heterogéneas.**

	Caso 2				
Ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
p	$0{,}20$	$0{,}03$	$0{,}40$	$0{,}14$	$0{,}23$
	10	9	12	7	14
MC	21	205	220	195	230
	410	420	390	440	370
D	200	750	1000	1250	1500

Cuadro: Parámetros para caso 2.

La constante de Lipschitz (22) de la función objetivo es

$$L = 453{,}2.$$

Parámetros IV

- **Caso 3: Escenario de costos elevados.**
  Incorporamos un sexto escenario.

	Caso 3					
Ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
p	$0{,}18$	$0{,}02$	$0{,}34$	$0,13$	$0{,}20$	$0,13$
	10	9	12	7	14	880
MC	21	205	220	195	230	880
	410	420	390	440	370	880
D	200	750	1000	1250	1500	4000

Cuadro: Parámetros para caso 3.

La constante de Lipschitz (22) de la función objetivo es

$$L = 595{,}1.$$

Resultados I

Caso 1: Escenarios Equiprobables.

	Caso 1			**Baseline**
	TOPS	FPIS	ADMM	IPOPT
Distancia al Óptimo	$3,097e-3$	$2,439e-9$	$3,845e-11$	$-$
Diferencia Función Objetivo	$1,385e-4$	$1,144e-11$	$1,613e-12$	$-$
Restricción No-Anticipatividad	$-$	$0,0$	$4,547e-14$	$0,0$
Restricción Equilibrio	$9,391e-6$	$9,391e-6$	$9,394e-6$	$9,394e-6$
Restricción Capacidad	$464,3$	$464,6$	$464,6$	$464,6$
Restricción Demanda	$775,7$	$777,4$	$777,4$	$777,4$
Distancia al Precio Óptimo	$2,810e-3$	$2,596e-11$	$1,836e-13$	$-$
Times [s]	1190	629	602	$8,634e-2$

Cuadro: Resultados comparativa **Caso 1: Escenarios Equiprobables.**

Resultados II

Caso 2: Probabilidades Heterogéneas.

	Caso 2			Baseline
	TOPS	FPIS	ADMM	IPOPT
Distancia al Óptimo	$1,871e-3$	$3,424e-4$	$2,294e-7$	–
Diferencia Función Objetivo	$3,839e-5$	$1,443e-6$	$7,705e-7$	–
Restricción No-Anticipatividad	–	0,0	$1,053e-13$	$0,0$
Restricción Equilibrio	$9,763e-6$	$9,755e-6$	$5,252e-4$	$9,780e-6$
Restricción Capacidad	$466,4$	$467,8$	$467,9$	$467,9$
Restricción Satisfacción Demanda	$777,2$	$777,9$	$778,1$	$778,1$
Distancia al Precio Óptimo	$3,523e-3$	$2,142e-4$	$5,448e-7$	–
Times [s]	1225	637	608	$7,982e-2$

Cuadro: Resultados comparativa **Caso 2: Probabilidades Heterogéneas**.

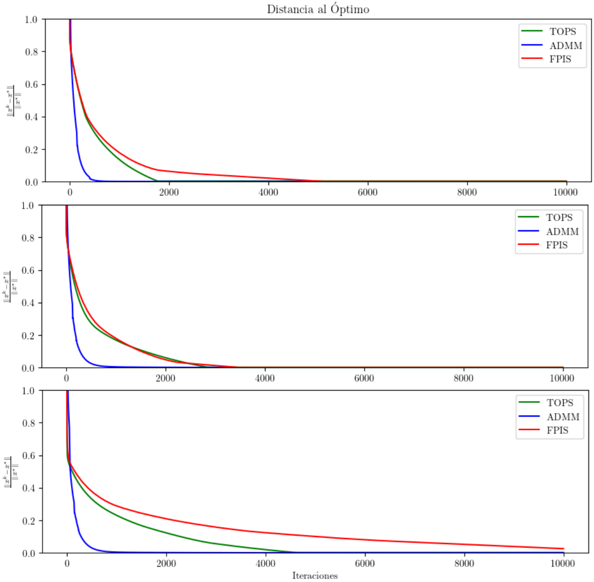
Resultados III

Caso 3: Escenario de costos elevados.

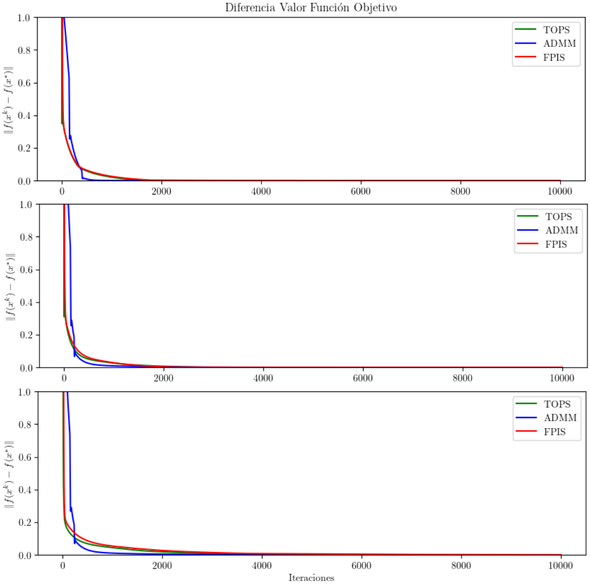
	Caso 3			Baseline
	TOPS	FPIS	ADMM	IPOPT
Distancia al Óptimo	$1,746e-3$	$2,530e-2$	$6,778e-7$	$-$
Diferencia Función Objetivo	$6,464e-5$	$8,506e-4$	$3,111e-6$	$-$
Restricción No-Anticipatividad	$-$	0,0	$1,529e-13$	$0,0$
Restricción Equilibrio	$1,374e-5$	$1,374e-5$	$1,830e-3$	$1,379e-5$
Restricción Capacidad	$560,4$	$573,2$	$561,9$	$561,9$
Restricción Satisfacción Demanda	$678,3$	$679,6$	$679,4$	$679,4$
Distancia al Precio Óptimo	$4,082e-3$	$1,920e-4$	$1,858e-6$	$-$
Times [s]	1229	642	613	$6,917e-2$

Cuadro: Resultados comparativa **Caso 3: Escenario de costos elevados.**

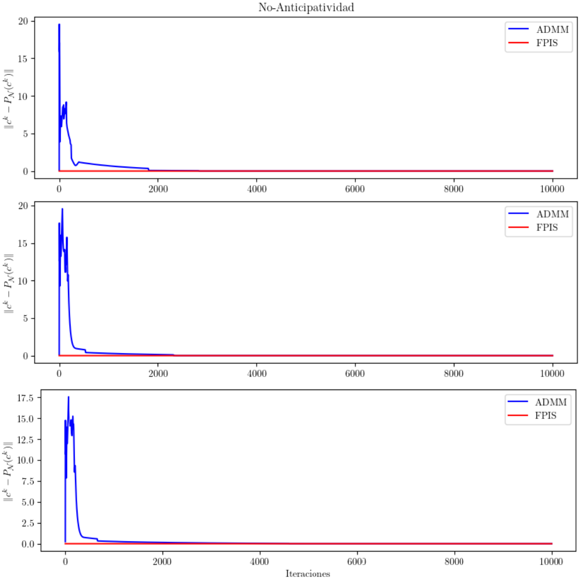
Distancia al Óptimo



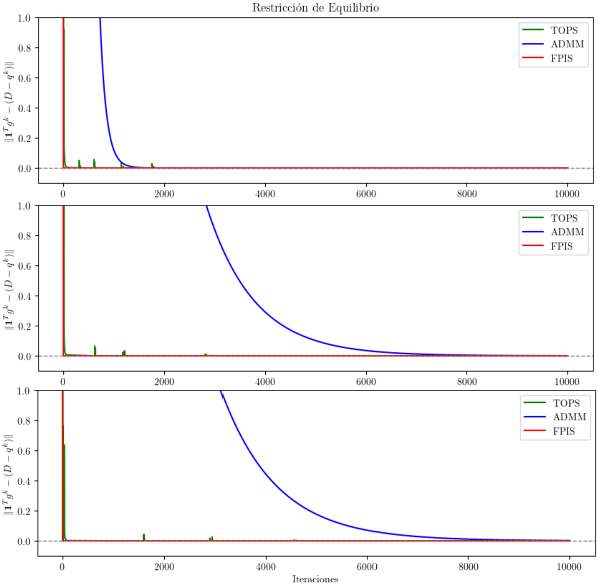
Diferencia Función Objetivo



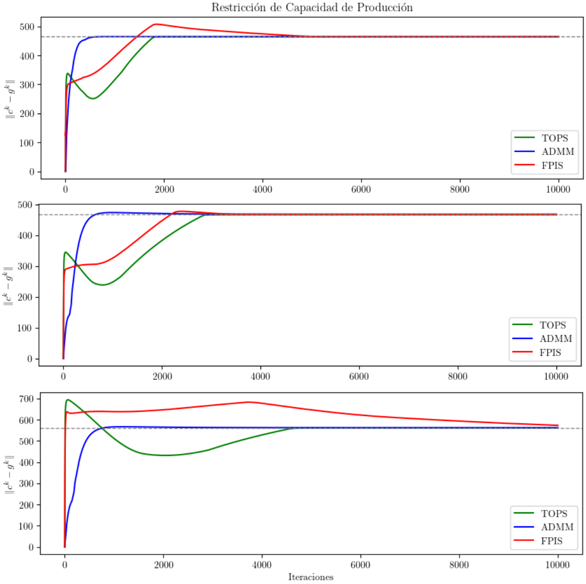
Restricción No-Anticipatividad



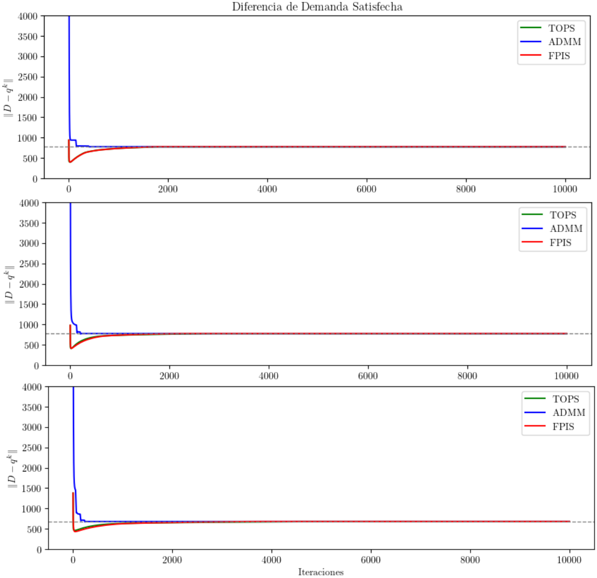
Restricción de Equilibrio



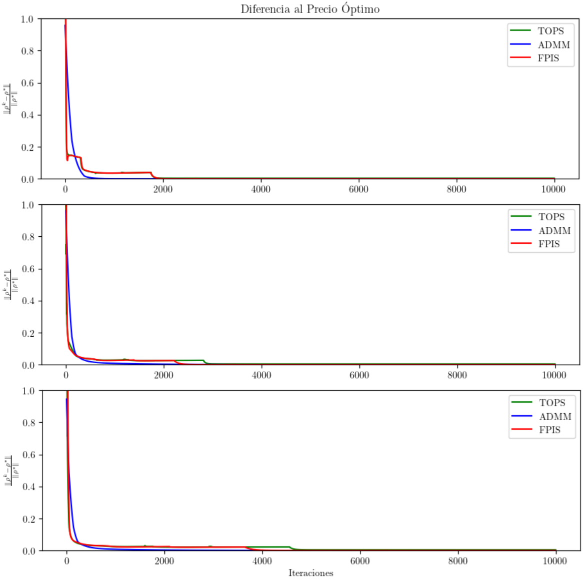
Restricción de Capacidad de Producción



Restricción Diferencia Demanda Satisfecha



Diferencia al Precio Óptimo



Soluciones Teóricas Caso 1 I

Caso 1: Escenarios Equiprobables.

Solución variables primales:
Inversor:

$$c = \begin{pmatrix} 1188,3 \\ 44,3 \\ 25,7 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 186,6 & 704,4 & 833,3 & 1188,3 & 714,3 \\ 8,9 & 30,9 & 44,3 & 42,8 & 43,5 \\ 4,6 & 15,1 & 25,6 & 19,0 & 25,7 \end{pmatrix},$$

Consumidor:

$$q = \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 96,7 \\ 0,0 \\ 716,5 \end{pmatrix},$$

Soluciones Teóricas Caso 1 II

Paralelamente, las variables duales:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1865,7 \\ 6336,1 \\ 10000,0 \\ 8342,8 \\ 10000,0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 717 \end{pmatrix},$$

con $\rho \in \mathbb{R}^5$ el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio y μ el multiplicador asociado a la restricción de capacidad de producción (17).

Notar que $\rho_3 = \rho_5 = VOLL$.

Soluciones Teóricas Caso 2 I

Caso 2: Probabilidades Heterógeneas.

Solución variables primales:
Inversor:

$$c = \begin{pmatrix} 1188,2 \\ 44,9 \\ 25,9 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 186,6 & 704,0 & 833,3 & 1188,2 & 714,3 \\ 8,9 & 30,9 & 44,8 & 42,8 & 43,5 \\ 4,6 & 15,1 & 25,6 & 19,0 & 25,9 \end{pmatrix},$$

Consumidor:

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 97 \\ 0 \\ 717 \end{pmatrix},$$

Soluciones Teóricas Caso 2 II

Paralelamente, las variables duales:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1865,6 \\ 6336,1 \\ 10000,0 \\ 8351,9 \\ 10000,0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 420 \end{pmatrix},$$

con $\rho \in \mathbb{R}^5$ el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio y μ el multiplicador asociado a la restricción de capacidad de producción (17).

Notar que $\rho_3 = \rho_5 = VOLL$.

Soluciones Teóricas Caso 3 I

Caso 3: Escenario de costos elevados.

Solución variables primales:
Inversor:

$$c = \begin{pmatrix} 1188,2 \\ 44,8 \\ 25,7 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 186,6 & 704,0 & 833,3 & 1188,2 & 714,3 & 71,4 \\ 8,9 & 30,9 & 44,8 & 42,9 & 43,5 & 11,4 \\ 4,6 & 15,1 & 25,6 & 19,0 & 25,7 & 11,4 \end{pmatrix},$$

Consumidor:

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 97 \\ 0 \\ 717 \\ 3966 \end{pmatrix},$$

Soluciones Teóricas Caso 3 II

Paralelamente, las variables duales:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1865,7 \\ 6336,1 \\ 10000,0 \\ 8357,0 \\ 10000,0 \\ 10000,0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 145 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 484 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\rho \in \mathbb{R}^6$ el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio y μ el multiplicador asociado a la restricción de capacidad de producción (17).

Notar que $\rho_3 = \rho_5 = \rho_6 = VOLL$.

Conclusiones y Perspectivas

Conclusiones - Conclusiones Generales

- Los tres métodos (*TOPS*, *FPIS*, *ADMM*) calculan satisfactoriamente el óptimo del problema.
- *TOPS* se usa para el problema centralizado, mientras que *FPIS* y *ADMM* se aplican añadiendo la condición de no-anticipatividad.
- En términos de precisión respecto a la distancia al óptimo.
  - **Más preciso**: *ADMM*.
  - **Intermedio**: *FPIS*.
  - **Menos preciso**: *TOPS*.
- En términos de tiempo de cómputo.
  - **Más rápido**: *ADMM*.
  - **Intermedio**: *FPIS*.
  - **Más lento**: *TOPS*.
- Cada método tiene sus propias ventajas debido a la naturaleza y construcción de cada algoritmo.

Conclusiones - Ventajas y Desventajas I

- ***TOPS***.
  - **Ventajas**:
    - Presenta factibilidad temprana sobre las restricciones y distancias al óptimo primal y dual.
    - Menor uso de memoria computacional debido a la menor dimensionalidad de la variable c.
  - **Desventajas**:
    - Baja precisión en términos de distancia al óptimo, diferencia en la función objetivo y distancia al precio óptimo.
    - Mayor tiempo de cómputo debido al uso de dos métodos numéricos para hallar proyecciones.

Conclusiones - Ventajas y Desventajas II

- ***FPIS***.
  - **Ventajas**:
    - Rendimiento promedio entre los algoritmos.
    - Precisión media en términos de órdenes de magnitud.
    - Factibilidad temprana en restricciones de equilibrio y no-anticipatividad.
    - Costo en memoria computacional promedio.
  - **Desventajas**:
    - Requiere un mayor número de iteraciones para alcanzar la distancia al óptimo primal y dual.

Conclusiones - Ventajas y Desventajas III

- ***ADMM***.
  - **Ventajas**:
    - Mayor precisión en el cálculo de las variables primales y duales.
    - Superior en rapidez de cómputo debido al uso de métodos exactos para proyecciones.
  - ***Desventajas***:
    - Imprecisiones en las restricciones del problema, especialmente en la restricción de equilibrio y no-anticipatividad.
    - Mayor dependencia de memoria computacional debido a la duplicación del número de variables.

Conclusiones - Otros Hallazgos

- Relación entre multiplicadores ρ y μ con parámetros del problema.
  - ρ_ξ y $D_\xi - q_\xi$ tienen una relación inversamente proporcional de constante $VOLL_\xi$, para todo $\xi \in \Xi$.
  - μ está relacionado directamente con costos marginales y costos de inversión.
- *ADMM* es flexible y permite descomponer variables del problema, ideal para alta precisión numérica en variables primales y duales.
- *TOPS* es ventajoso para problemas de alta dimensionalidad y proyecciones complejas con escasos recursos computacionales.
- *FPIS* es balanceado entre tiempos de cómputo y precisión numérica, pero más rígido en la estructura del problema.

Conclusiones - Recomendaciones de Uso

- ***ADMM***: Ideal para alta precisión numérica en variables primales y duales, cuando el costo en memoria no es un impedimento.
- ***TOPS***: Adecuado para alta dimensionalidad, proyecciones complejas y limitados recursos computacionales.
- ***FPIS***: Balanceado entre tiempo de cómputo y precisión, aunque exige una estructura más compacta del problema.

Perspectivas

- La relación entre el número de iteraciones que necesita para alcanzar una tolerancia determinada y el valor de las constantes γ en (2), γ y λ_k en (3) y r en (13).
- Pasar de métodos numéricos utilizados para calcular las proyecciones a métodos directos. El apoyo de subrutinas entre iteraciones reduce la rapidez de los algoritmos.
- Relajar restricciones de los conjuntos D, $D_{\mathcal{N}}$ y C e incorporarlas en la función objetivo mediante métodos de penalización.
- Correlación entre las puntas en la restricción de equilibrio en (90) y los cambios de concavidad y dirección en la trayectoria evaluada en la restricción de capacidad de producción en (90).
- Analizar otros criterios de parada para los algoritmos.
- Incorporar métodos de aceleración, como en [4, Sección 3.2], especial para para soluciones más dispersas (*sparse*).

Referencias I

[1] HH Bauschke y PL Combettes. «Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, 2011». En: *CMS books in mathematics). DOI* 10 (2011), págs. 978-1.

[2] Stephen Boyd et al. «Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers». En: *Foundations and Trends® in Machine learning* 3.1 (2011), págs. 1-122.

[3] Luis M Briceno-Arias. «Forward-Douglas–Rachford splitting and forward-partial inverse method for solving monotone inclusions». En: *Optimization* 64.5 (2015), págs. 1239-1261.

[4] Damek Davis y Wotao Yin. «A three-operator splitting scheme and its optimization applications». En: *Set-valued and variational analysis* 25 (2017), págs. 829-858.

[5] Steven A Gabriel et al. *Complementarity modeling in energy markets*. Vol. 180. Springer Science & Business Media, 2012.

Referencias II

[6] Mikulas Luptacik et al. *Mathematical optimization and economic analysis*. Vol. 287. Springer, 2010.

[7] Juan C Muñoz et al. «Analysis of generation investments under price controls in cross-border trade of electricity». En: *Energy Economics* 123 (2023), pág. 106722.

[8] Francisco Muñoz Espinoza. «Electricity market design for low-carbon and flexible systems: Room for improvement in Chile». En: . (2023).

[9] Takashi Negishi. «From Samuelson's stability analysis to non-walrasian economics». En: *Samuelson and Neoclassical Economics*. Springer, 1982, págs. 119-125.

[10] Welington de Oliveira. «Risk-averse stochastic programming and distributionally robust optimization via operator splitting». En: *Set-Valued and Variational Analysis* 29.4 (2021), págs. 861-891.

Referencias III

[11] R Tyrrell Rockafellar y Jie Sun. «Solving monotone stochastic variational inequalities and complementarity problems by progressive hedging». En: *Mathematical Programming* 174.1 (2019), págs. 453-471.

[12] R Tyrrell Rockafellar y Roger JB Wets. «Stochastic variational inequalities: single-stage to multistage». En: *Mathematical Programming* 165.1 (2017), págs. 331-360.

[13] Jie Sun, Honglei Xu y Min Zhang. «A new interpretation of the progressive hedging algorithm for multistage stochastic minimization problems». En: *Journal of Industrial & Management Optimization* 16.4 (2020), pág. 1655.

Cálculo de Equilibrio de Mercado en Economías con Incertidumbre vía Métodos de Primer Orden

Memoria de Título - MAT308

Estudiante: Alan Grez Jimenez
Profesores Guía: Julio Deride - Luis Briceño
Presidente Comisión: Nicolás Hernández

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

27 Junio 2024

Distancia al Óptimo.

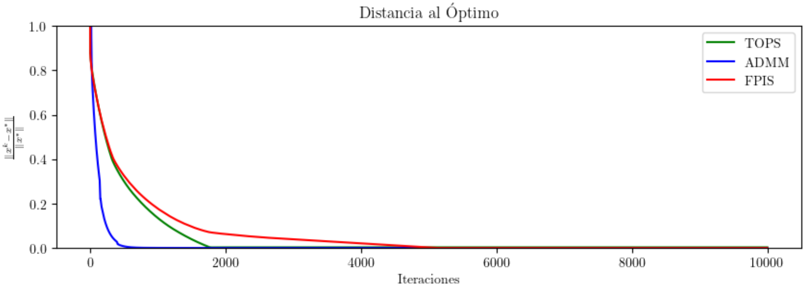


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

Apéndice Imágenes II

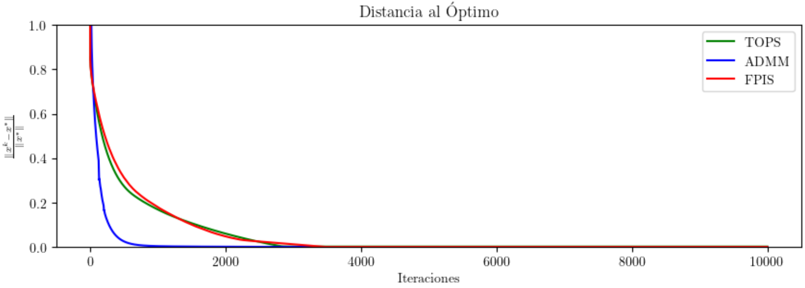


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes III

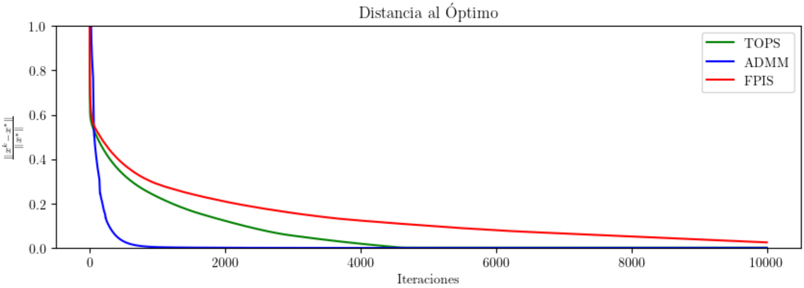


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.

Diferencia Función Objetivo.

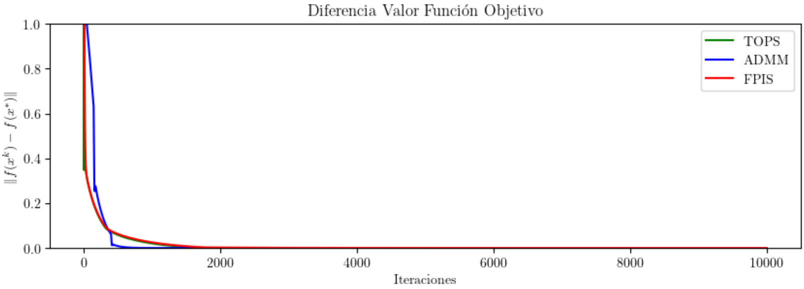


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

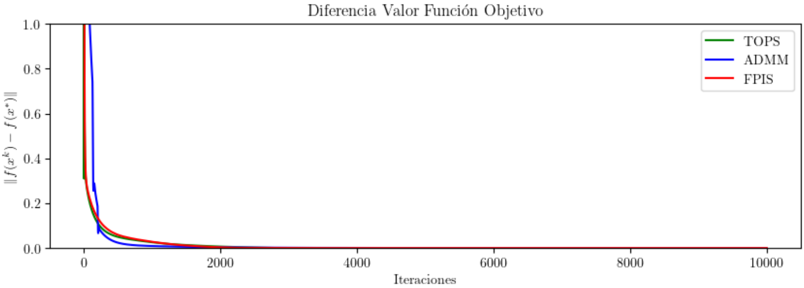


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes VI

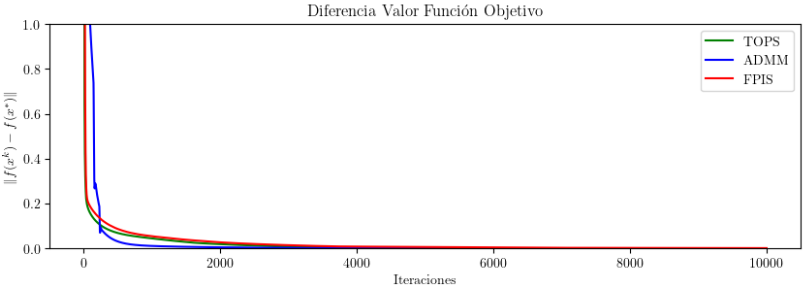


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.

Restricción No-Anticipatividad.

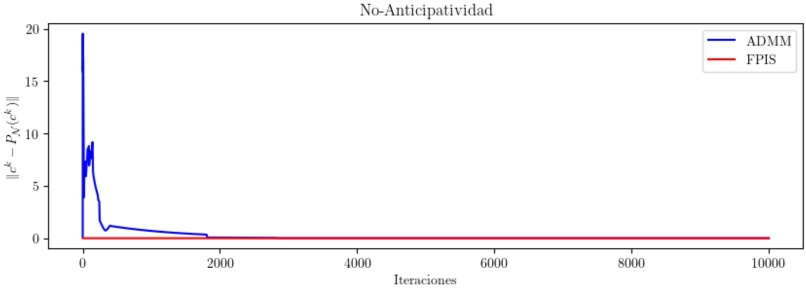


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

Apéndice Imágenes VIII

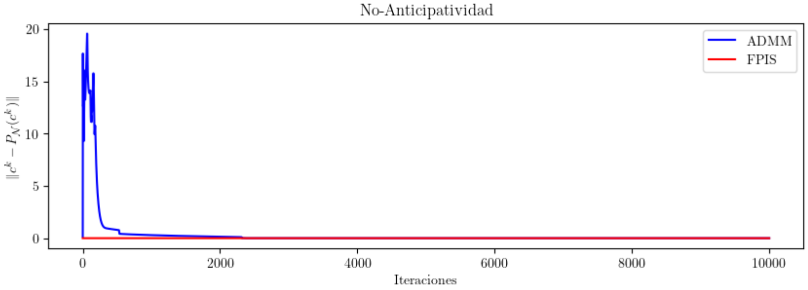


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes IX

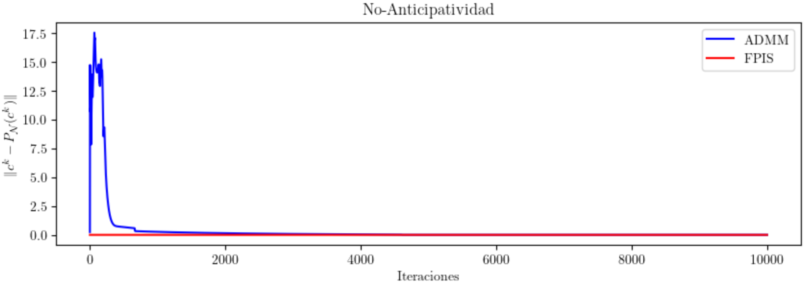


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.

Restricción de Equilibrio.

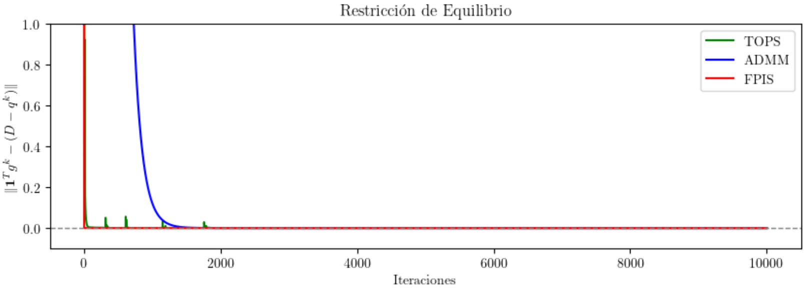


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

Apéndice Imágenes XI

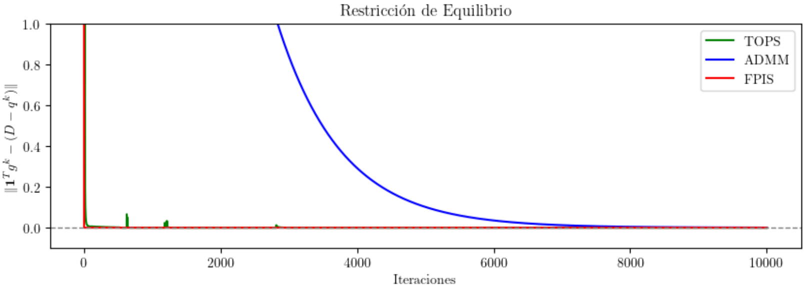


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes XII

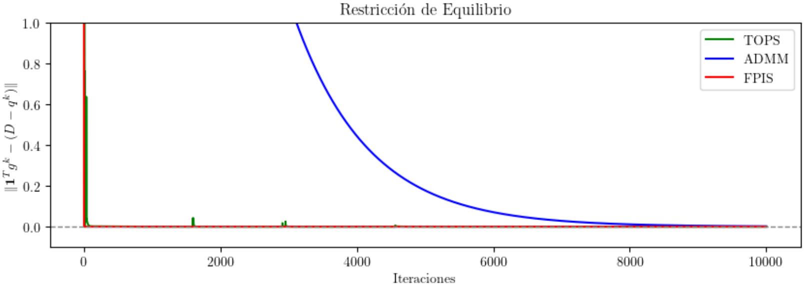


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.

Restricción de Capacidad de Producción

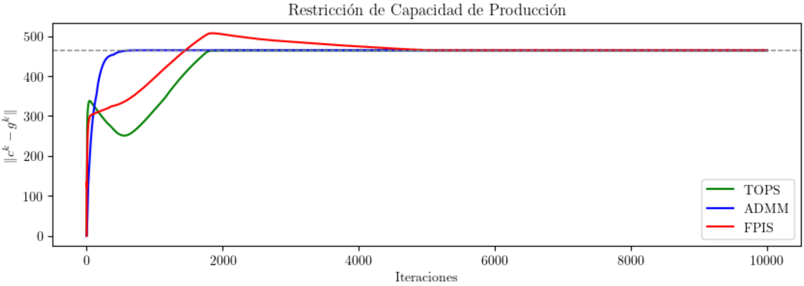


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

Apéndice Imágenes XIV

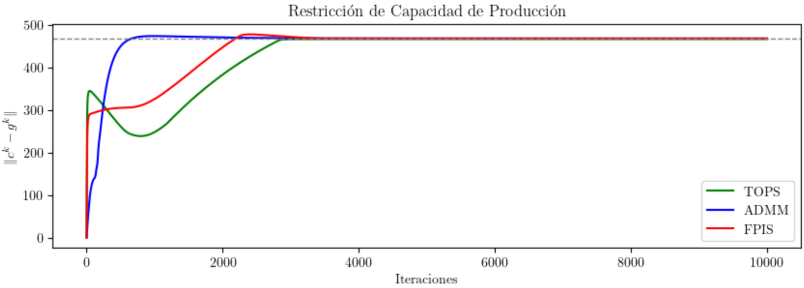


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes XV

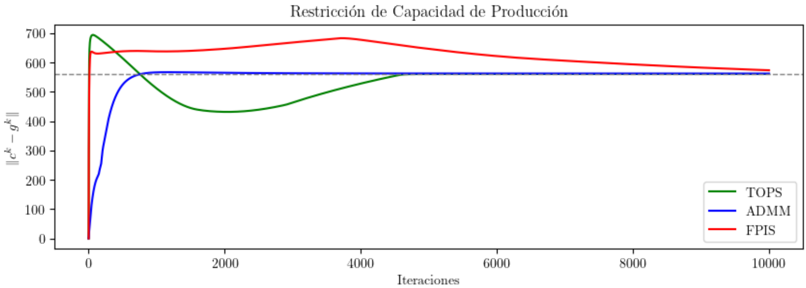


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.

Restricción Diferencia Demanda Satisfecha

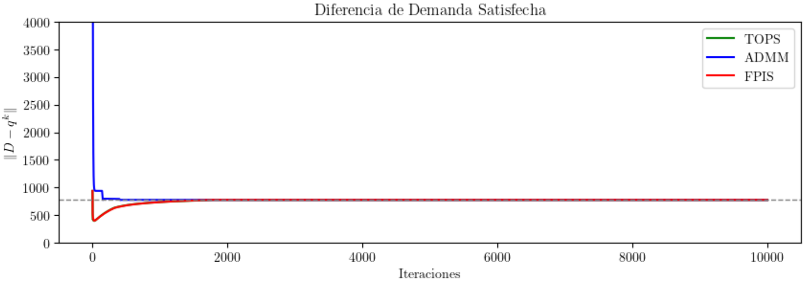


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

Apéndice Imágenes XVII

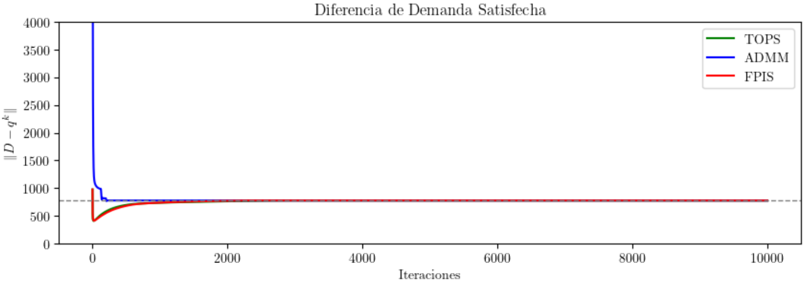


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes XVIII

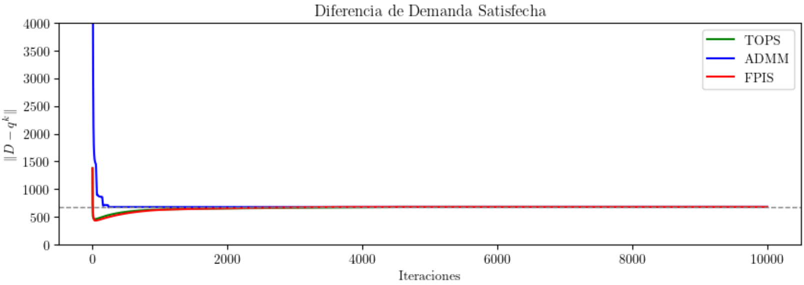


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.

Diferencia al Precio Óptimo

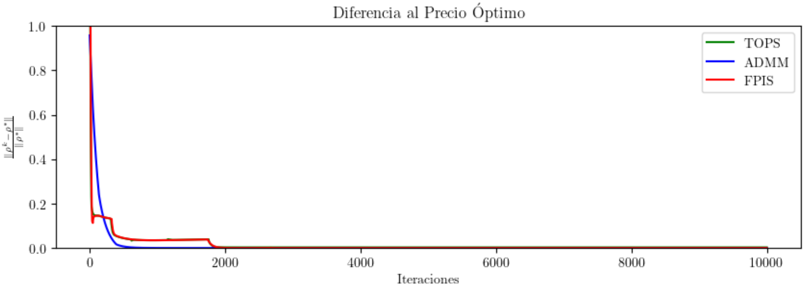


Figura: Caso 1. Escenarios Equiprobables.

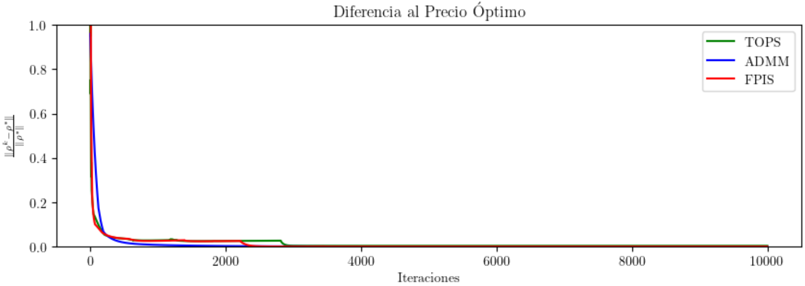


Figura: Caso 2. Escenarios Heterogéneos.

Apéndice Imágenes XXI

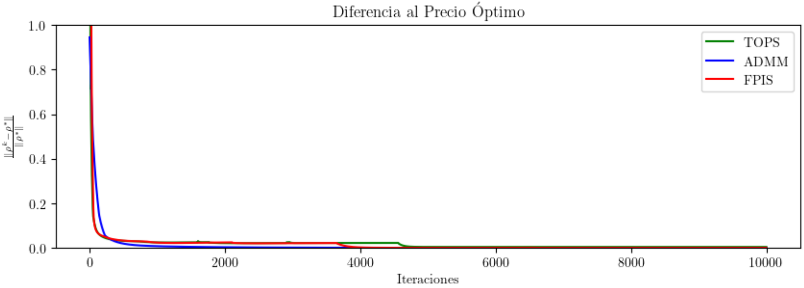


Figura: Caso 3. Escenarios de Costos Elevados.