

Logiques mathématiques
ENSIBS – troisième année CyberLog/CyberData
2023-2024

TD N₀2 : Logique propositionnelle - suite

Exercice 1 :

1. Construire les tableaux sémantiques de ϕ et $\neg \phi$ pour $\phi = \neg (\neg p \vee \neg (\neg q \Rightarrow r))$. Que peut-on conclure?
2. Quels sont les modèles de ϕ et $\neg \phi$?
3. Quelles sont les formes normales conjonctives et disjonctives équivalentes aux formules ϕ et $\neg \phi$?

Exercice 2 :

En utilisant la méthode de tableau sémantique (ou de Beth),

1. chercher les modèles de $\phi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$.
2. chercher les contre-modèles de $\Psi = \neg ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q))$.

Exercice 3 :

Utiliser la méthode de tableau sémantique pour savoir si $\{H1, H2\} \models C$ dans le cas où

H1 est définie par $(d \Rightarrow f) \wedge (c \vee (d \wedge \neg f))$

H2 est définie par $d \wedge a$

et où la formule susceptible d'être une conséquence sémantique est C définie par $\{a \wedge (b \Rightarrow c)\}$

Exercice 4 :

En utilisant la résolution propositionnelle étudiez la validité des formules suivantes :

1. $F = ((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (\neg (b \Rightarrow c) \Rightarrow \neg a))$
2. $F = ((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)))$

Exercice 5 : Résolution de séquent

Montrer par résolution que les séquents suivants sont valides :

1. $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge ((q \wedge r) \Rightarrow s) \models s$
2. $p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow s \models r \vee s$

Exercice 6 :

Lors d'une enquête de l'inspecteur Maigret, les personnes A, B, C et D sont suspectées. Il a établi que :

- Si A et B sont coupables, il en est de même de C.

- Si A est coupable, l'un au moins de B et C est aussi coupable.
- Si C est coupable, D l'est aussi.
- Si A est innocent, D est coupable

Peut-on déduire à partir des énoncés ci-dessus que c'est D qui est coupable ?

Formaliser les énoncés précédents puis résoudre le problème en exploitant le principe de résolution.

Exercice 7 :

Montrer les séquents suivants en utilisant la déduction naturelle :

1. $p \wedge q, p \Rightarrow r, (q \wedge r) \Rightarrow s \models s$
2. $p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow s \models r \vee s$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s), \neg s \vee \neg q, p \Rightarrow q \models \neg r \vee \neg p$
4. $p \Rightarrow (r \vee q), \neg q, \neg r \models \neg p$
5. $p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow r, \neg q \Rightarrow \neg r \models q$
6. $\models (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta))$