

Logiques mathématiques
ENSIBS – troisième année CyberLog/CyberData
2023-2024

TD N₀1 : Logique propositionnelle

Exercice 1 :

Restaurer les parenthèses pour les formules suivantes, puis tracer les arbres syntaxiques correspondant aux formules.

1. $p_1 \vee \neg p_2 \wedge p_3$
2. $p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \vee p_3$
3. $p_3 \Rightarrow \neg(p_1 \wedge p_2 \Rightarrow p_3) \wedge p_1 \Leftrightarrow p_2$

Exercice 2 :

Soit la formule P définie comme $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.

1. Donner la table de vérité de la formule P.
2. Dire si la formule est valide, satisfaisable ?
3. La formule P a-t-elle un modèle ? si oui lequel ?
4. Donner la forme normale conjonctive et la forme normale disjonctive de la formule P.

Exercice 3 : Conséquence logique

Parmi les formules suivantes, quelles sont celles qui sont des conséquences logiques de $p_1 \wedge p_2$?

1. p_1
2. $p_1 \vee p_2$
3. $p_2 \vee p_3$
4. $p_1 \wedge \neg p_2$
5. $p_1 \wedge p_3$
6. $p_1 \Leftrightarrow p_2$
7. $p_1 \Rightarrow p_2$
8. $\neg p_2 \Rightarrow \neg p_1$

Exercice 4 : Conséquence logique

Montrer que :

1. Si Φ est conséquence logique de Ψ et si $\neg\Phi$ est conséquence logique de Ψ , alors $\neg\Psi$ est valide (Réduction à l'absurde).
2. Si Φ_3 est conséquence logique de Φ_1 et si Φ_3 est conséquence logique de Φ_2 , alors Φ_3 est conséquence logique de $\Phi_1 \vee \Phi_2$.

Exercice 5 : Utilisation des règles d'équivalences (De Morgan, distributivité)

Trouver des formules équivalentes avec \neg figurant uniquement devant les atomes :

1. $\neg((p \wedge \neg q) \vee r \vee (s \wedge \neg p))$
2. $\neg(p \vee \neg q \Rightarrow (r \wedge \neg\neg s) \vee q)$
3. $\neg(\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p)$

Exercice 6 : Formes normales conjonctives et disjonctives

Mettre sous forme normale conjonctive puis disjonctive les formules suivantes :

1. $(p \wedge \neg(q \Rightarrow r)) \vee s$
2. $p \Rightarrow (q \vee r \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p))$
3. $(\neg p \vee q) \wedge (r \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

Exercice 7 : validité - satisfaisabilité

Construire les tableaux sémantiques correspondants aux formules suivantes et décider de leur validité ou de leur satisfaisabilité

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee p) \wedge \neg(r \wedge p)$
2. $(p \vee s \Leftrightarrow \neg q) \wedge (r \vee q) \wedge \neg s \Rightarrow \neg((s \Rightarrow r \vee q) \vee p)$
3. $\neg\{(p \Rightarrow q) \wedge s \Leftrightarrow \neg r \vee \neg(r \Rightarrow q)\} \wedge (q \Rightarrow \neg p) \wedge r$