T.D. 1 : Arithmétique

Division euclidienne

Exercice 1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $1\,111\,111\,111$ par $123\,456\,789$.

Exercice 2. On donne les deux égalités suivantes.

$$3379026 = 198765 \times 17 + 21 \quad \text{et} \quad 609806770 = 35870986 \times 17 + 8.$$

Quel est le reste de la division euclidienne de $N = 3379026 \times 609806770$ par 17 ?

Divisibilité, Nombres premiers

Exercice 3. Déterminer les diviseurs positifs de 25. Puis déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.

Exercice 4. Un entier naturel $n \leqslant 150$ n'est divisible par aucun des 6 premiers nombres premiers. Est-ce que n un nombre premier ?

Exercice 5. Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? Justifier la réponse. 127, 587, 1567, 2021.

Exercice 6. Écrire la liste des diviseurs positifs des nombres suivants en utilisant leurs décompositions en produit de facteurs premiers :

$$48, \quad 128, \quad 1150, \quad 1360..$$

Exercice 7. Que pouvez-vous dire d'un nombre entier positif a qui a exactement :
(a) un seul diviseur positif ?
(b) deux diviseurs positifs ?
(c) trois diviseurs positifs ?
(d) quatre diviseurs positifs ?

PGCD, Algorithme d'Euclide

Exercice 8. Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers et déterminer leur PGCD dans les cas suivants :
(1) $a = 112$ et $b = 168$;
(2) $a = 195$ et $b = 595$.

Exercice 9. En utilisant l'algorithme d'Euclide, chercher $\mathrm{pgcd}(a, b)$ dans les cas suivants :
(1) $a = 198$ et $b = 144$;
(2) $a = 1309$ et $b = 416$.

Théorème de Bézout

Exercice 10. Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 18480 et 9828. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 11. Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.
(1) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
(2) Calculer $p = \mathrm{pgcd}(a, b)$.
(3) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Lemme de Gauss

Exercice 12. Les nombres a et b étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

(1) Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
(2) Si 6 divise ab, alors 6 divise a ou 6 divise b.
(3) Si 5 divise b^2 , alors 25 divise b^2 .
(4) Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
(5) Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
(6) Si a divise b et si b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 13. L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

Congruence

Exercice 14.

(1) Faire les divisions euclidiennes de 187 et de 1017 par 13 et traduire les résultats en congruences.
(2) En utilisant les propriétés des congruences, compléter les résultats suivants en mettant l'entier naturel le plus petit possible :

$$187 + 1017 \equiv \ldots [13], \quad 187 \times 1017 \equiv \ldots [13]$$
$$187^2 \equiv \ldots [13], \quad 1017^3 \equiv \ldots [13].$$

(3) Quel est le reste de la division euclidienne de $187^4 + 1017^6$ par 13.

Exercice 15. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 16.

(1) Expliquer pourquoi tout entier naturel est congru à 0, à 1, à 2, à 3, à 4 ou à 5 modulo 6.
(2) Remplir le tableau suivant avec des entiers naturels les plus petits possibles :

$n \equiv \ldots [6]$	0	1	2	3	4	5
$n+1 \equiv \ldots [6]$						
$n+2 \equiv \ldots [6]$						
$n(n+1)(n+2) \equiv \ldots [6]$						

(3) Que peut-on conclure au sujet du produit de trois entiers naturels consécutifs ?

Exercice 17. Résoudre l'équation : $6x = 0$

(a) dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;
(b) dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;
(c) dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations en x :

(a) $3x \equiv 7[16]$;
(b) $5x + 7 \equiv 6[23]$;
(c) $4x + 3 \equiv 7x + 12[11]$;
(d) $x^2 \equiv 1[48]$;
(e) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[48]$;

Exercice 19. Calculer le reste de :

(a) 2773^{159} divisé par 10 ;
(b) 91234^{4125} divisé par 7 ;
(c) 2737^{1391} divisé par 5.

Exercice 20. Montrez que $p^2 \equiv 1[6]$ pour tout nombre premier $p \geq 4$.