

Exercise Sheet

03/20

1. 【判断题】下面霍尔三元组是否成立？如果成立，能否使用 $x \leq 10$ 作为循环不变量证明该结论？

```
{ x == 0 }  
while ( ! (10 < x) ) do {  
    x = x + 2  
}  
{ x == 10 }
```

2. 【判断题】下面霍尔三元组是否成立？如果成立，能否使用 `False` 作为循环不变量证明该结论？能否使用 `True` 作为循环不变量证明该结论？

```
{ True }  
while (True) do { skip }  
{ True }
```

3. 请写出一个循环不变量用于证明下面霍尔三元组。

```
{ y == 1 && x > 0 }  
while ( ! (x < y) ) do {  
    y = y * 2  
}  
{ x < y <= x * 2 }
```

4. 假设 m 是非负整数，请写出一个循环不变量用于证明下面霍尔三元组。

```
{ s == 0 && n == 0 }  
while ( ! (m < s) ) do {  
    n = n + 1;  
    s = s + n  
}  
{ 1 + 2 + ... + (n - 1) <= m < 1 + 2 + ... + n }
```

5. 假设 n 是非负整数，请写出一个循环不变量用于证明下面霍尔三元组。

```
{ x == n && i == 0 }  
while ( ! (x < (i + 1) * (i + 1)) ) do {  
    i = i + 1  
}  
{ i * i <= n < (i + 1) * (i + 1) }
```

6. 假设 n 是非负整数，请写出一个循环不变量用于证明下面霍尔三元组。

```

{ x == n && l == 0 && r == n + 1 }
while (l + 1 < r) do {
  mid = (l + r) / 2;
  if (x < mid * mid)
    then { r = mid }
    else { l = mid }
}
{ l * l <= n < (l + 1) * (l + 1) }

```

7. 请根据赋值语句霍尔逻辑规则（正向）写出：前条件 $100 \leq x + y + z \ \&\& \ x \leq 0$ 以及赋值语句 $x = 0$ 的后条件。
8. 请根据赋值语句霍尔逻辑规则（正向）写出：前条件 $0 \leq x + y \leq 100 \ \&\& \ x * y \leq 100$ 以及赋值语句 $x = x + y$ 的后条件。
9. 请根据赋值语句霍尔逻辑规则（正向）写出：前条件 $\text{exists } x'. \ x' == m \ \&\& \ y == n \ \&\& \ x == x' + n$ 以及赋值语句 $y = x - y$ 的后条件。
10. (1) 请根据赋值语句霍尔逻辑规则（反向）写出：后条件 $s == 1000 \ \&\& \ t == 10$ 以及赋值语句 $s = s * t$ 的前条件。
 (2) 请再根据你写出的前条件与赋值语句 $s = s * t$ 写出赋值语句霍尔逻辑规则（正向）规定的后条件。
 (3) 【选择题】上述后条件与原先的后条件 $s == 1000 \ \&\& \ t == 10$ 之间是什么关系？
 A. $s == 1000 \ \&\& \ t == 10$ 是严格更强的断言；
 B. $s == 1000 \ \&\& \ t == 10$ 是严格更弱的断言；
 C. 两者是逻辑等价的断言；
 D. 以上说法都不对。
11. (1) 请根据赋值语句霍尔逻辑规则（反向）写出：后条件 $x == n + m \ \&\& \ y == n$ 以及赋值语句 $y = x - y$ 的前条件。
 (2) 请再根据你写出的前条件与赋值语句 $y = x - y$ 写出赋值语句霍尔逻辑规则（正向）规定的后条件。
 (3) 【选择题】上述后条件与原先的后条件 $x == n + m \ \&\& \ y == n$ 之间是什么关系？
 A. $x == n + m \ \&\& \ y == n$ 是严格更强的断言；
 B. $x == n + m \ \&\& \ y == n$ 是严格更弱的断言；
 C. 两者是逻辑等价的断言；
 D. 以上说法都不对。
 (4) 【选择题】一般的，如果 P 是断言， $x = e$ 是 SimpleWhile 语言中的赋值语句， Q 是这两者的最弱前条件，而 R 是 Q 与 $x = e$ 的最强后条件，那么以下哪些情况是可能发生的？
 A. P 严格地强于比 R ；
 B. P 严格地弱于比 R ；
 C. P 与 R 逻辑等价；
 D. 以上三种情况都不成立。