

同伦类型论(HoTT)

无懈可击99

目录

- MLTT补充
- “类型看作空间”
- 截断层级初探
- coe的计算
- 路径空间刻画

MLTT补充

基本概念回忆——函数

- $a:A \quad a \equiv b:A$
- $f:A \rightarrow B \quad f(x) := \Phi \text{ or } f := \lambda x. \Phi \text{ or } f := x \mapsto \Phi$
- $f(t) \equiv \Phi[t/x]$
- $f \equiv x \mapsto f(x)$

基本概念回忆——宇宙和类型族

- $A: \mathcal{U}$
- $\mathcal{U}_i: \mathcal{U}_{i+1}$
- $P: A \rightarrow \mathcal{U}$

基本概念回忆—— Π 类型

- $A: \mathcal{U} \quad P: A \rightarrow \mathcal{U}$
- $\Pi_{x:A} P(x)$ or $(x:A) \rightarrow P(x)$
- $f: \Pi_{x:A} P(x) \quad f(x) := \Phi$ or $f := \lambda x. \Phi$ or $f := x \mapsto \Phi$
- $f(t) \equiv \Phi[t/x]$
- $f \equiv x \mapsto f(x)$

基本概念回忆——乘积类型

- $A, B: \mathcal{U} \Rightarrow A \times B: \mathcal{U}$
- $a: A, b: B \Rightarrow (a, b): A \times B$
- $f: (t: A \times B) \rightarrow C(t)$
- $f(a, b) := \Phi$ (模式匹配)

基本概念回忆—— Σ 类型

- $A:\mathcal{U}, P:A \rightarrow \mathcal{U} \Rightarrow \Sigma_{x:A} P(x):\mathcal{U}$ or $(x:A) \times P(x):\mathcal{U}$
- $a:A, p:P(a) \Rightarrow (a, p):(x:A) \times P(x)$
- $f:(t:(x:A) \times P(x)) \rightarrow C(t)$
- $f(a, p) := \Phi$

基本概念回忆——**1**类型

- $\mathbf{1} : \mathcal{U}$

- $\star : \mathbf{1}$

- $f : (t : \mathbf{1}) \rightarrow \mathcal{C}(t)$

- $f(\star) := \Phi$

基本概念回忆——和类型

- $A, B: \mathcal{U} \Rightarrow A + B: \mathcal{U}$
- $a: A \Rightarrow \text{inl}(a): A + B$
- $b: A \Rightarrow \text{inr}(b): A + B$

- $f: (t: A + B) \rightarrow C(t)$
- $f(\text{inl}(a)) := \Phi_1$
- $f(\text{inr}(b)) := \Phi_2$

基本概念回忆——**0**类型

- **0**: \mathcal{U}
- 没有引入规则
- $f: (t: \mathbf{0}) \rightarrow \mathcal{C}(t)$
- 无需任何信息就能构建一个**0**出发的函数

基本概念回忆——**2**类型

- $\mathbf{2} : \mathcal{U}$
- $0_2, 1_2 : \mathbf{2}$
- $f : (t : \mathbf{2}) \rightarrow \mathcal{C}(t)$
- $f(0_2) = \Phi_1$
- $f(1_2) = \Phi_2$

基本概念回忆—— \mathbb{N} 类型

- $\mathbb{N} : \mathcal{U}$
- $0 : \mathbb{N}$
- $n : \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) : \mathbb{N} \text{ or } n' : \mathbb{N}$
- $f : (t : \mathbb{N}) \rightarrow C(t)$
- $f(0) := \Phi_1$
- $f(n') := \Phi_2$
- Φ_2 可以包含 $f(n)$ (归纳假设)

基本概念回忆—— \mathbb{N} 上的加法和乘法

- $(\square + \square): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- $0 + n := n$
- $m' + n := (m + n)'$

- $(\square \times \square): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- $0 \times n := 0$
- $m' \times n := n + m \times n$

归纳类型的例子——列表类型

- $A: \mathcal{U} \Rightarrow [A]: \mathcal{U}$ ($[A]$ 表示由 A 中的元素形成的列表类型) 由以下两个构造器生成:
- $\text{nil}: [A]$
- $v: A; h: [A] \Rightarrow \text{cons}(v, h): [A]$

- 设 $p, q: [A]$, 定义 $p + q: [A]$
- $\text{nil} + q := q$
- $\text{cons}(v, h) + q := \text{cons}(v, h + q)$

归纳类型族的例子——定长列表类型

- 固定类型 A , 定义类型族 $\text{Vec}: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$ ($\text{Vec}(n)$ 表示由 n 个 A 中元素组成的列表的类型) 由以下两个构造器生成:
- $\text{nil}: \text{Vec}(0)$
- $n: \mathbb{N}; v: A; h: \text{Vec}(n) \Rightarrow \text{cons}(v, h): \text{Vec}(n')$
- 设 $m, n: \mathbb{N}; p: \text{Vec}(m), q: \text{Vec}(n)$, 定义 $p + q: \text{Vec}(m + n)$
- $\text{nil} + q := q$
- $\text{cons}(v, h) + q := \text{cons}(v, h + q)$

归纳类型族的例子——偶数

- $\text{isEven}: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$ ($\text{isEven}(n)$ 的元素表示 n 是偶数的证据) 由以下的两个构造器生成:
- $e_0: \text{isEven}(0)$
- $n: \mathbb{N}; p: \text{isEven}(n) \Rightarrow e_{ss}(p): \text{isEven}(n'')$
- 另外定义类型族 $C: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$ 如下:
- $C(0) := \mathbf{1}$
- $C(1) := \mathbf{0}$
- $C(n'') := C(n)$

归纳类型族的例子——偶数

- 可以定义 $\text{to}: (n: \mathbb{N}) \rightarrow \text{isEven}(n) \rightarrow C(n)$
 - $\text{to}(0, e_0) := \star$
 - $\text{to}(n'', e_{ss}(p)) := \text{to}(n, p)$
-
- 可以定义 $\text{from}: (n: \mathbb{N}) \rightarrow C(n) \rightarrow \text{isEven}(n)$
 - $\text{from}(0, c) := e_0$
 - $\text{from}(n'', c) := e_{ss}(\text{from}(n, c))$

归纳类型族的例子——是零

- 我们对isEven再做一次简化，变成isZero: $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$ ，由一个构造器生成：
- $z_0: \text{isZero}(0)$
- 设 $C: (n: \mathbb{N}) \rightarrow (p: \text{isZero}(n)) \rightarrow \mathcal{U}$ 为了构建 $f: (n: \mathbb{N}) \rightarrow (p: \text{isZero}(n)) \rightarrow C(n, p)$ 的一个元素，对 p 归纳，只要讨论 p 是 z_0 ， n 是 0 的情形，也即只要给出 $c: C(0, z_0)$ 便足够。
- $f(0, z_0) := c$

相等类型

- 我们对isZero做推广，取定类型 A 和元素 $a:A$ ，我们定义类型族 $a =_A \square: A \rightarrow \mathcal{U}$ ($a =_A x$ 的一个元素表示 x 是 a 的一个证据)，由一个构造器生成：
- $\text{refl}_a: a =_A a$
- 设 $C: (x:A) \rightarrow (p: a =_A x) \rightarrow \mathcal{U}$ 为了构建 $f: (x:A) \rightarrow (p: a =_A x) \rightarrow C(x, p)$ 的一个元素，对 p 归纳，只要讨论 p 是 refl_a ， x 是 a 的情形，也即只要给出 $c: C(a, \text{refl}_a)$ 便足够。
- $f(a, p) := c$
- 这条规则叫做J规则，或者路径归纳

相等类型的基本性质

- 定义 $\square^{-1}: x = y \rightarrow y = x$
- $\text{refl}_x^{-1} := \text{refl}_x$
- 定义 $\square \cdot \square: x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z$
- $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x := \text{refl}_x$
- 定义 $\text{ap}_f: x = y \rightarrow f(x) = f(y)$
- $\text{ap}_f(\text{refl}_x) = \text{refl}_x$
- ap_f 也记作 $f(p)$

相等类型的基本性质

- 设 $B: A \rightarrow \mathcal{U}$, $p: x = y$, 定义 $\text{coe}_p^B: B(x) \rightarrow B(y)$
- $\text{coe}_{\text{refl}_x}^B := \text{id}_{B(x)}$
- $\text{coe}: A = B \rightarrow A \rightarrow B$
- $\text{coe}(\text{refl}_A) := \text{id}_A$

相等类型的基本性质

- $\text{li}: (p: x = y) \rightarrow p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y$
- $\text{li}(\text{refl}_x) := \text{refl}_{\text{refl}_x}$
- $K: (p: x = x) \rightarrow p = \text{refl}_x$
- $K(\text{refl}_x) := \text{refl}_{\text{refl}_x}$
- 这是不合法的定义!

例子——自然数加法结合律

- $\text{assoc}_{+\mathbb{N}} : (n, m, k : \mathbb{N}) \rightarrow (n + m) + k = n + (m + k)$
- $\text{assoc}_{+\mathbb{N}}(0, m, k) := \text{refl}_{m+k}$
- $\text{assoc}_{+\mathbb{N}}(n', m, k) := \text{ap}_{\text{suc}} \left(\text{assoc}_{+\mathbb{N}}(n, m, k) \right)$

“类型看作空间”

类型看作集合

类型论的语句/项	集合解释
A 是类型	A 是集合
$a:A$	a 是 A 的元素
$f:A \rightarrow B$	f 是 A 到 B 的函数
$A \rightarrow B$	A 到 B 的函数组成的集合
\mathcal{U}	集合宇宙
$P:A \rightarrow \mathcal{U}$	P 是以 A 为下标的类型族
$(x:A) \rightarrow P(x)$	族 P 的笛卡尔积
$f:(x:A) \rightarrow P(x)$	f 是 A 出发的函数, 满足 $f(x) \in P(x)$
$(x:A) \times P(x)$	族 P 的无交并
$t:(x:A) \times P(x)$	t 是二元对 (x,p) , 满足 $p \in P(x)$

类型看作集合

类型论的语句/项	集合解释
$p: x =_A y$	p 是 x 和 y 相等的证据
$x =_A y$?
$\text{refl}_x: x =_A x$	相等的自反性
$\square^{-1}: x = y \rightarrow y = x$	相等的对称性
$\square \cdot \square: x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z$	相等的传递性
$\text{li}(p): p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y$?
$\alpha: p =_{x=_A y} q$?

类型看作空间

类型论的语句/项	集合解释
A 是类型	A 是空间
$a:A$	a 是 A 中的点
$f:A \rightarrow B$	f 是 A 到 B 的连续函数
$A \rightarrow B$	A 到 B 的连续函数组成的空间
\mathcal{U}	空间宇宙
$P:A \rightarrow \mathcal{U}$	P 是以 A 为底空间的纤维丛（纤维是 $P(x)$ ）
$(x:A) \rightarrow P(x)$	纤维丛 P 的截面空间
$f:(x:A) \rightarrow P(x)$	f 是 A 出发的连续函数，满足 $f(x) \in P(x)$
$(x:A) \times P(x)$	纤维丛 P 的全空间
$t:(x:A) \times P(x)$	t 是某纤维 $P(x)$ 中的一个点

类型看作空间

类型论的语句/项	空间解释
$p: x =_A y$	p 是 x 到 y 的一条道路
$x =_A y$	x 到 y 的道路空间
$\text{refl}_x: x =_A x$	常路径
$\square^{-1}: x = y \rightarrow y = x$	路径取反
$\square \cdot \square: x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z$	路径连接
$\text{li}(p): p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y$	$p^{-1} \cdot p$ 和 refl_y 定端同伦
$\alpha: p =_{x=_A y} q$	α 是 p 到 q 的定端同伦

群胚法则

引理 1.1

设 $A : \mathcal{U}$, $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$, $r : z = w$, 于是:

$$(i) \quad p \cdot \text{refl}_y = p, \text{refl}_x \cdot p = p$$

$$(ii) \quad p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y, p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x$$

$$(iii) \quad (p^{-1})^{-1} = p$$

$$(iv) \quad p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$$

函子性

引理 1.2

设 $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $p : x =_A y$, $q : y =_A z$. 求证:

(i) $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$

(ii) $f(p^{-1}) = f(p)^{-1}$

(iii) $g(f(p)) = (g \circ f)(p)$

(iv) $\text{id}_A(p) = p$

依值相等

- 设 $P: A \rightarrow \mathcal{U}$, $p: x =_A y$, $s: P(x)$, $t: P(y)$, 定义依值相等类型:
- $s =_p^B t := \text{coe}_p^B(s) =_{B(y)} t$
- 设 $f: (x: A) \rightarrow P(x)$, $p: x =_A y$, 定义 $\text{apd}_f(p): f(x) =_p^B f(y)$
- $\text{apd}_f(\text{refl}_x) := \text{refl}_{f(x)}$

例子——定长列表连接的结合律

- $\text{assoc}_{+\text{Vec}} : \{n, m, k : \mathbb{N}\} \rightarrow (p : \text{Vec}(n)) \rightarrow (q : \text{Vec}(m)) \rightarrow (r : \text{Vec}(k)) \rightarrow (p + q) + r =_{\text{assoc}_{+\mathbb{N}}(n,m,k)}^{\text{Vec}} p + (q + r)$
- $\text{assoc}_{+\text{Vec}}(\text{nil}, q, r) := \text{refl}_{q+r}$
- $\text{assoc}_{+\text{Vec}}(\text{cons}(v, p), q, r) := ?$
- 已知 $(p + q) + r =_{\text{assoc}_{+\mathbb{N}}(n,m,k)}^{\text{Vec}} p + (q + r)$
- 求证 $\text{cons}(v, (p + q) + r) =_{\text{suc}(\text{assoc}_{+\mathbb{N}}(n,m,k))}^{\text{Vec}} \text{cons}(v, p + (q + r))$

例子——定长列表连接的结合律

- $l_1: \text{Vec}(n_1); l_2: \text{Vec}(n_2); p: n_1 = n_2$
- $h: l_1 =_p^{\text{Vec}} l_2$
- 要证: $\text{cons}(v, l_1) =_{\text{suc}(p)}^{\text{Vec}} \text{cons}(v, l_2)$

- 对 p 做路径归纳, 不妨设 p 就是 refl_{n_1} , n_2 就是 n_1 , 此时
- $h: l_1 = l_2$
- 要证: $\text{cons}(v, l_1) = \text{cons}(v, l_2)$

同伦

- 设 $f, g: (x: A) \rightarrow P(x)$
 - $H: (x: A) \rightarrow f(x) = g(x)$ 称为 f 到 g 的一个同伦
 - 集合观点：逐点相等；空间观点：逐点连续地连线
 - 记 $f \sim g := (x: A) \rightarrow f(x) = g(x)$
 - 同伦是“等价关系”
-
- 同伦的自然性：设 $p: x =_A y$ ，则 $H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$
 - 证明：对 p 路径归纳

(同伦) 等价

- 设 $f: A \rightarrow B$, 三元对 (g, α, β) 称为 f 的一个拟逆, 其中 $g: B \rightarrow A$, $\alpha: f \circ g \sim \text{id}_B$, $\beta: g \circ f \sim \text{id}_A$
- 集合观点: g 是 f 的逆映射, 从而 f 是双射, 逆映射存在则唯一
- 空间观点: g 是 f 的同伦逆映射, 从而 f 是同伦等价映射, 同伦逆映射存在则同伦意义下唯一
- 记 $\text{qinv}(f) := (g: B \rightarrow A) \rightarrow ((f \circ g \sim \text{id}_B) \times (g \circ f \sim \text{id}_A))$
- 但 $\text{qinv}(f)$ 性质不好, 可能存在 $e_1, e_2: \text{qinv}(f)$, 使得 $e_1 \neq e_2$
- 我们需要找一个 $\text{isequiv}(f)$ 与 $\text{qinv}(f)$ 逻辑等价, 且对一切 $e_1, e_2: \text{isequiv}(f)$, 有 $e_1 = e_2$

(同伦) 等价

- 一种合法的定义是：
- $\text{isequiv}(f) := ((g: B \rightarrow A) \times (f \circ g \sim \text{id}_B)) \times ((h: B \rightarrow A) \times (h \circ f \sim \text{id}_A))$
- 要证明一个 f 是等价，只要给出 f 的一个拟逆
- $A \simeq B := (f: A \rightarrow B) \times \text{isequiv}(f)$
- 类型等价是一种“等价关系”
- 记号上不太区分等价和函数

函数外延性公理

- 设 $f, g: (x: A) \rightarrow P(x)$
- 有 $\text{happly}: (f = g) \rightarrow (f \sim g)$
- 公理: happly 是一个等价
- happly 的拟逆记作 $\text{funext}: (f \sim g) \rightarrow (f = g)$

泛等公理

- 设 $A, B: \mathcal{U}$, 有 $\text{idtoeqv}: (A = B) \rightarrow (A \simeq B)$
 - $\text{idtoeqv}(p) := (\text{coe}(p), \dots)$
 - 公理: idtoeqv 是一个等价
 - idtoeqv 的拟逆记作 $\text{ua}: (A \simeq B) \rightarrow (A = B)$
-
- 注: 泛等公理可以推出函数外延性公理

截断层级初探

离散的空间

类型论的语句/项	集合解释
0	\emptyset
1	$\{\emptyset\}$
2	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
\mathbb{N}	\mathbb{N}

类型论的语句/项	空间解释
0	空空间
1	由一个点构成的离散空间
2	由两个点组成的离散空间
\mathbb{N}	由可数个点组成的离散空间

离散的空间

- $\text{isSet}(A) := (x, y : A) \rightarrow (p, q : x =_A y) \rightarrow p =_{x=_A y} q$
- $\neg \text{isSet}(\mathcal{U})$
- $\text{refl}_2, \text{flip}_2 : \mathbf{2} = \mathbf{2}$
- $\text{coe}(\text{refl}_2)(0_2) = 0_2$
- $\text{coe}(\text{flip}_2)(0_2) = 1_2$

$$0_2 \neq 1_2$$

- 定义 $C: \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{U}$
- $C(0_2) := \mathbf{0}$
- $C(1_2) := \mathbf{1}$
- 设 $p: 0_2 = 1_2$
- $\text{coe}_{p^{-1}}^C(\star): \mathbf{0}$

圆

- $S^1: \mathcal{U}$
- $\text{base}: S^1$
- $\text{loop}: \text{base} = \text{base}$

- $f: S^1 \rightarrow \mathcal{C}$
- $f(\text{base}) := c$
- $\text{ap}_f(\text{base}) := l$ (不是依定义相等)

圆

- $f: (t: S^1) \rightarrow C(t)$
- $f(\text{base}) := c$
- $\text{apd}_f(\text{loop}) := l$ (不是依定义相等)

- 例子: $C: S^1 \rightarrow \mathcal{U}$
- $C(\text{base}) := \mathbf{2}$
- $C(\text{loop}) := \text{flip}_2$

$\text{refl}_{\text{base}} \neq \text{loop}$

- 设 $p: \text{refl}_{\text{base}} = \text{loop}$
- 则 $C(\text{refl}_{\text{base}}) = C(\text{loop})$
- 则 $\text{refl}_2 = \text{flip}_2$

命题

- $\text{isProp}(A) := (x, y: A) \rightarrow x =_A y$
- 则 $\text{isProp}(\text{isequiv}(A))$, $\text{isProp}(\text{isSet}(A))$, $\text{isProp}(\text{isProp}(A))$
- $\text{isSet}(A) \equiv (x, y: A) \rightarrow \text{isProp}(x =_A y)$

n -类型

- $\text{is1type}(A) := (x, y: A) \rightarrow \text{isSet}(x =_A y)$
- $\text{is2type}(A) := (x, y: A) \rightarrow \text{is1type}(x =_A y)$
- 0-类型是指集合, -1-类型是指命题
- $\text{isContr}(A) := (a: A) \times ((x: A) \rightarrow a =_A x)$
- $\text{isProp}(A) \simeq (x, y: A) \rightarrow \text{isContr}(x =_A y)$
- -2-类型是指可缩的类型

可缩的类型

- **1**可缩, 可缩的类型都等价于**1**
- $(x:A) \times a =_A x$ 可缩, 因为 $(a, \text{refl}_a) = (x, p)$

coe的计算

coe的性质

引理 1.4

设 $P : A \rightarrow \mathcal{U}$, $p : x =_A y$, $q : y =_A z$, $u : P(x)$ 则: $\text{coe}_q^P(\text{coe}_p^P(u)) = \text{coe}_{p \cdot q}^P(u)$

引理 1.5

设 $f : A \rightarrow B$, $P : B \rightarrow \mathcal{U}$, $p : x =_A y$, $u : P(f(x))$, 则 $\text{coe}_p^{P \circ f}(u) = \text{coe}_{f(p)}^P(u)$.

引理 1.6

设 $P, Q : A \rightarrow \mathcal{U}$, $f : (x : A) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$, $p : x =_A y$, $u : P(x)$, 则 $\text{coe}_p^Q(f_x(u)) = f_y(\text{coe}_p^P(u))$

常类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := A$, 设 $p: x =_X y$, $a: A$, 有:
- $\text{coe}_p^P(a) = a$

乘积类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := A(w) \times B(w)$, 设 $p: x =_X y$, $(a, b): A(x) \times B(x)$, 有:
- $\text{coe}_p^P((a, b)) = (\text{coe}_p^A(a), \text{coe}_p^B(b))$

Σ 类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := (a: A(w)) \times B(w, a)$, 设 $p: x =_X y$, $a: A(x)$, $b: B(x, a)$, 有:
- $\text{coe}_p^P((a, b)) = (\text{coe}_p^A(a), \text{coe}_q^B(b))$
- 其中 $q: (x, a) = (y, \text{coe}_p^A(a))$ 由路径归纳显然地定义

和类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := A(w) + B(w)$, 设 $p: x =_X y$, $a: A(x)$, $b: B(x)$, 有:
- $\text{coe}_p^P(\text{inl}(a)) = \text{inl}(\text{coe}_p^A(a))$
- $\text{coe}_p^P(\text{inr}(b)) = \text{inr}(\text{coe}_p^B(b))$

函数类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := A(w) \rightarrow B(w)$, 设 $p: x =_X y$,
 $f: A(x) \rightarrow B(x)$, 有:
- $\text{coe}_p^P(f) = \text{coe}_p^B \circ f \circ \text{coe}_{p^{-1}}^A$
- 或者说 $\text{coe}_p^P(f)(a) = \text{coe}_p^B \left(f \left(\text{coe}_{p^{-1}}^A(a) \right) \right)$, 若 $a: A(y)$

依值函数类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := (a: A(w)) \rightarrow B(w, a)$, 设 $p: x =_X y$,
 $f: (a: A(x)) \rightarrow B(x, a)$, $a: A(y)$, 有:
- $\text{coe}_p^P(f)(a) = \text{coe}_q^B \left(f \left(\text{coe}_{p^{-1}}^A(a) \right) \right)$
- 其中 $q: (x, \text{coe}_{p^{-1}}^A(a)) = (y, a)$ 由路径归纳显然地定义

相等类型

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := f(w) =_c g(w)$, 设 $p: x =_X y$,
 $q: f(x) =_c g(x)$, 有:
- $\text{coe}_p^P(q) = f(p)^{-1} \cdot q \cdot g(p)$
- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$ 定义为 $P(w) := f(w) =_{c(w)} g(w)$, 设 $p: x =_X y$,
 $q: f(x) =_{c(x)} g(x)$, 有:
- $\text{coe}_p^P(q) = \text{apd}_f(p)^{-1} \cdot \text{ap}_{\text{coe}_p^c}(q) \cdot \text{apd}_g(p)$

泛等公理

- 设 $P: X \rightarrow \mathcal{U}$, $p: x =_X y$, 使得 $\text{ap}_P(p) = \text{ua}(f)$, $f: P(x) \rightarrow P(y)$ 为一个等价, 设 $u: P(x)$ 有:
- $\text{coe}_p^P(u) = f(u)$

应用：命题都是集合

- 设 $h: (x, y: A) \rightarrow x = y$, 证明 $(x, y: A) \rightarrow (p, q: x = y) \rightarrow p = q$
- 设 $p: x = y$, 则 $\text{apd}_{h(x, \square)}(p): \text{coe}_p^{y \mapsto x=y}(h(x, x)) = h(x, y)$, 由 coe 在相等类型的计算法则知 $h(x, x) \cdot p = h(x, y)$, 设 $q: x = y$, 也有 $h(x, x) \cdot q = h(x, y)$, 可以推断 $p = q$ 。
- 立刻得到集合都是1类型, 1类型都是2类型……

应用：类型排中律不成立

- 设 $h: (A: \mathcal{U}) \rightarrow A + (A \rightarrow \mathbf{0})$, 证明 $\mathbf{0}$
- 考虑 $\text{flip}_2 := \text{ua}(\text{not}): \mathbf{2} = \mathbf{2}$, 考虑
 $\text{apd}_h(\text{flip}_2): \text{coe}_{\text{flip}_2}^{A \mapsto A + (A \rightarrow \mathbf{0})}(h(\mathbf{2})) =_2 h(\mathbf{2})$
- $h(\mathbf{2}): \mathbf{2} + (\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{0})$ 有两种情况 (不可能是 inr)
- $h(\mathbf{2}) = \text{inl}(0_2)$ 时 $\text{coe}_{\text{flip}_2}^{A \mapsto A + (A \rightarrow \mathbf{0})}(h(\mathbf{2})) = \text{coe}_{\text{flip}_2}^{A \mapsto A + (A \rightarrow \mathbf{0})}(\text{inl}(0_2)) = \text{inl}(\text{coe}_{\text{flip}_2}^{A \mapsto A}(0_2)) = \text{inl}(1_2)$, 容易证明 $\text{inl}(1_2) \neq \text{inl}(0_2)$ 。
- $h(\mathbf{2}) = \text{inl}(1_2)$ 时同理。

路径空间刻画

乘积类型

- $x_1, x_2: A \times B$
- $(x_1 = x_2) \simeq (\text{pr}_1(x_1) = \text{pr}_1(x_2)) \times (\text{pr}_2(x_1) = \text{pr}_2(x_2))$
- $((a_1, b_1) = (a_2, b_2)) \simeq (a_1 = a_2) \times (b_1 = b_2)$
- 构建来回的映射并证明互逆
- encode-decode法

乘积类型

- $C: (A \times B) \rightarrow (A \times B) \rightarrow \mathcal{U}$
- $C(x_1 = x_2) := (\text{pr}_1(x_1) = \text{pr}_1(x_2)) \times (\text{pr}_2(x_1) = \text{pr}_2(x_2))$
- $E: (x_1 = x_2) \rightarrow C(x_1, x_2)$
- $E_{x_2 := x_1; x_1 := (a_1, b_1)}(\text{refl}_{(a_1, b_1)}) := (\text{refl}_{a_1}, \text{refl}_{b_1})$
- $D: C(x_1, x_2) \rightarrow (x_1 = x_2)$
- $D_{x_1 := (a_1, b_1); x_2 := (a_2, b_2)}: (a_1 = a_2) \times (b_1 = b_2) \rightarrow ((a_1, b_1) = (a_2, b_2))$
- $D_{x_1 := (a_1, b_1); x_2 := (a_1, b_1)}(\text{refl}_{a_1}, \text{refl}_{b_1}) := \text{refl}_{(a_1, b_1)}$

乘积类型

- $DE: (p: x_1 = x_2) \rightarrow D(E(p)) = p$
- $DE(\text{refl}_{(a_1, b_1)}) := \text{refl}_{\text{refl}_{(a_1, b_1)}}$
- $ED: (c: C(x_1, x_2)) \rightarrow E(D(c)) = c$
- $ED(\text{refl}_{a_1}, \text{refl}_{b_1}) := \text{refl}_{(\text{refl}_{a_1}, \text{refl}_{b_1})}$

Σ 类型

- $x_1, x_2: (a: A) \times B(a)$
- $(x_1 = x_2) \simeq (p: \text{pr}_1(x_1) = \text{pr}_1(x_2)) \times (\text{coe}_p^B(\text{pr}_2(x_1)) = \text{pr}_2(x_2))$
- $(a_2, b_2) \simeq (p: a_1 = a_2) \times (\text{coe}_p^B(b_1) = b_2)$
- 证明留作练习

1 类型

- $x, y: \mathbf{1}$
- $(x = y) \simeq \mathbf{1}$
- $C: \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{U}$
- $C(x, y) := \mathbf{1}$
- $E: (x = y) \rightarrow C(x, y)$
- $E(p) := \star$
- $D: C(x, y) \rightarrow (x = y)$
- $D_{x:=\star, y:=\star} := \text{refl}_\star$

1 类型

- $DE: (p: x = y) \rightarrow D(E(p)) = p$
- $DE(\text{refl}_\star) := \text{refl}_{\text{refl}_\star}$
- $ED: (c: C(x, y)) \rightarrow E(D(c)) = c$
- $ED(\star) := \text{refl}_\star$

和类型

- $x, y: A + B$
 - $(\text{inl}(a_1) = \text{inl}(a_2)) \simeq (a_1 = a_2)$
 - $(\text{inr}(b_1) = \text{inr}(b_2)) \simeq (b_1 = b_2)$
 - $(\text{inl}(a) = \text{inr}(b)) \simeq \mathbf{0}$
-
- 不妨固定左端点为 $\text{inl}(a_0)$, 下面用族 $C(x)$ 刻画 $\text{inl}(a_0) = x$

和类型

- $C: A + B \rightarrow \mathcal{U}$
- $C(\text{inl}(a)) := a_0 = a$
- $C(\text{inr}(b)) := \mathbf{0}$
- $E: (\text{inl}(a_0) = x) \rightarrow C(x)$
- $E(\text{refl}_{\text{inl}(a_0)}) := \text{refl}_{a_0}$
- $D: C(x) \rightarrow (\text{inl}(a_0) = x)$
- $D_{x:=\text{inl}(a)}(p) := \text{inl}(p)$

和类型

- $\text{DE}: (p: \text{inl}(a_0) = x) \rightarrow \text{D}(\text{E}(p)) = p$
- $\text{DE}(\text{refl}_{\text{inl}(a_0)}) := \text{refl}_{\text{refl}_{\text{inl}(a_0)}}$
- $\text{ED}: (c: \text{C}(x)) \rightarrow \text{E}(\text{D}(c)) = c$
- $\text{ED}_{x:=\text{inl}(a_0)}(\text{refl}_{a_0}) := \text{refl}_{\text{refl}_{a_0}}$

自然数类型

- $C: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$
 - $C(0,0) := \mathbf{1}$
 - $C(0, m') := \mathbf{0}$
 - $C(n', 0) := \mathbf{0}$
 - $C(n', m') := C(n, m)$
-
- $(n = m) \simeq C(n, m)$

自然数类型

- $e: (n: \mathbb{N}) \rightarrow C(n, n)$
- $e(0) := \star$
- $e(n') := e(n)$
- $E: (n = m) \rightarrow C(n, m)$
- $E_{m:=n}(\text{refl}_n) := e(n)$
- $D: C(n, m) \rightarrow (n = m)$
- $D_{n:=0; m:=0}(c) := \text{refl}_0$
- $D_{n:=n'; m:=n'}(c) := \text{suc} \left(D_{n:=n; m:=n}(c) \right)$

自然数类型

- $\text{de}: (n: \mathbb{N}) \rightarrow D(\text{E}(\text{refl}_n)) = \text{refl}_n$
 - $\text{de}(0) := \text{refl}_{\text{refl}_0}$
 - $\text{de}(n') := \text{refl}_{\text{refl}_{n'}}$
-
- $\text{DE}: (p: n = m) \rightarrow D(\text{E}(p)) = p$
 - $\text{DE}(\text{refl}_n) := \text{de}(n)$

自然数类型

- $\text{propC}: (n, m: \mathbb{N}) \rightarrow \text{isProp}(C(n, m))$
 - $\text{propC}(0, 0)(\star, \star) := \text{refl}_\star$
 - $\text{propC}(n', m') := \text{propC}(n, m)$
-
- $\text{ED}: (c: C(n, m)) \rightarrow E(D(c)) = c$
 - $\text{ED}(c) := \text{propC}(E(D(c)), c)$

依值函数类型和宇宙类型

- 设 $f, g: (x: A) \rightarrow P(x)$
- $\text{happly}: (f = g) \rightarrow (f \sim g)$ 是等价, 逆记作 funext
- 设 $A, B: \mathcal{U}$
- $\text{idtoeqv}: (A = B) \rightarrow (A \simeq B)$ 是等价, 逆记作 ua

截断层级的封闭性

- **1**可缩, **0**是命题, **2**, \mathbb{N} 是集合
- 与一个 n 类型等价的类型还是 n 类型
- 两个 n 类型的积还是 n 类型
- 两个 n 类型的和还是 n 类型($n \geq 0$)
- 设 $A: \mathcal{U}; B: A \rightarrow \mathcal{U}$, 若 A 和每个 $B(a)$ 都是 n 类型, 那么 $(a: A) \times B(a)$ 和 $(a: A) \rightarrow B(a)$ 也是 n 类型。

圆类型

- 回顾圆的定义:
- $S^1: \mathcal{U}$
- $\text{base}: S^1$
- $\text{loop}: \text{base} = \text{base}$

- $f: (t: S^1) \rightarrow \mathcal{C}(t)$
- $f(\text{base}) := c$
- $\text{apd}_f(\text{loop}) := l$ (不是依定义相等)

整数

- $\mathbb{Z} := \mathbb{N} + \mathbb{N}$, 是集合
- $\text{inl}(n)$ 看作 n , $\text{inr}(n)$ 看作 $-1 - n$
- 改记号 pos 和 negsuc
- 可以定义 $\text{loop}^\square: \mathbb{Z} \rightarrow \text{base} = \text{base}$
- $\text{loop}^{\text{pos}(0)} := \text{refl}_{\text{base}}$
- $\text{loop}^{\text{pos}(n')} := \text{loop}^{\text{pos}(n)} \cdot \text{loop}$
- $\text{loop}^{\text{negsuc}(0)} := \text{loop}^{-1}$
- $\text{loop}^{\text{negsuc}(n')} := \text{loop}^{\text{negsuc}(n)} \cdot \text{loop}^{-1}$

圆类型

- 希望定义 $\text{windNum}: \text{base} = \text{base} \rightarrow \mathbb{Z}$ 表示卷绕数
- 想到定义 C: