车祸课程在范畴论中
Crash Course in Category Theory

Trebor

- 不必看明白一切例子
- 右侧是二周目思考题
- A Gentle Introduction to Category Theory

- 思考：标题是什么意思？
- 思考：范畴论到底有什么用？

范畴?

- 为什么要学范畴论?
  - 为什么要学群论? /为什么要学面向对象编程?
  - 价值在于解决原有的问题 → 自身产生有研究价值的问题
- 能不能不要反问我问题?
  - 数学系本科课程：为什么乘积拓扑空间的定义那么怪？向量空间的直和与直积呢?
  - 计算机科学：高阶函数怎么自动求导？算法验证中的分离逻辑如何推广到高阶情况?
- 基础的定义我都听说过了，有没有什么“大定理”？别的领域用范畴论表述的定理不算.
  - 米田引理，伴随函子定理，Beck 单子性定理，Isbell 对偶定理

- 可不可以写一个程序，输入两个函数 $f, g : (\texttt{int} \to \texttt{bool}) \to \texttt{bool}$，判断它们是否相等（假设 `int` 是大整数不会溢出，输入的函数不会死循环）？

范畴！

- 集合 $A, B, C, \ldots$ 之间有函数 $f : A \to B, g : B \to C$，函数可以复合：$g \circ f : A \to C$，即 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- 向量空间 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 之间有 $(m \times n)$ 矩阵，矩阵相乘.
- 复杂度研究中，两个判定问题 P, Q 之间可以有程序 f 多项式时间归约，归约可以串联.
- 如果命题 p 可以推出 q，q 可以推出 r，把两者的证明连起来就得到了 p 推出 r 的证明.
- 数据库：集合之间的关系 $P \subseteq A \times B$ 与 $Q \subseteq B \times C$ 可以连接得到 $P \bowtie Q \subseteq A \times C$，即 B 字段互相匹配的记录.

- 在矩阵的例子中，如果改成张量（即 $(m \times n \times r \times \cdots \times k)$ 的多层数组）该怎么办?

- 如何抽象出一个统一定义?
  - 群的定义是怎么抽象出来的？编程模式是怎么抽象出来的?

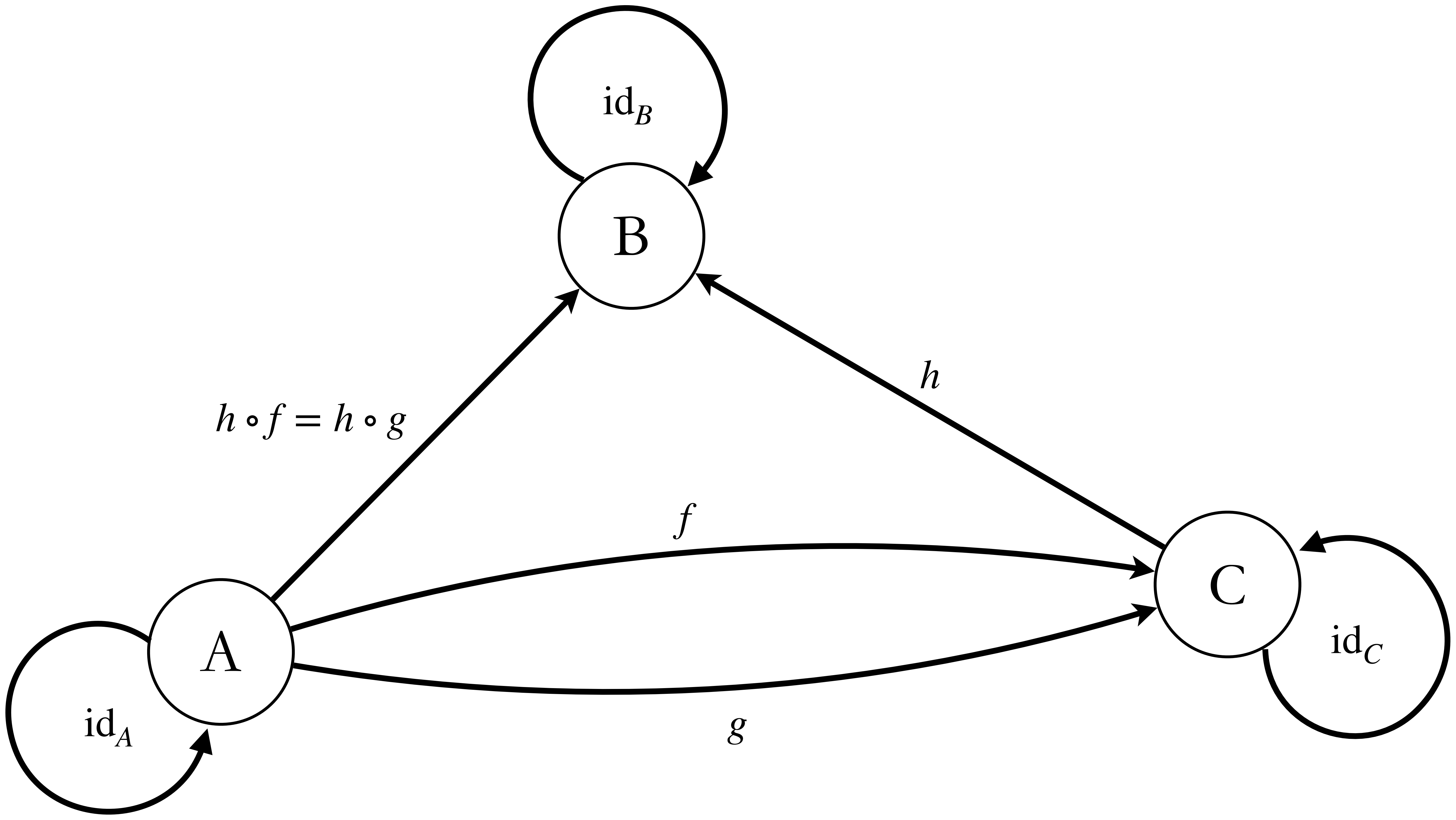
范畴！

- 假如有
  - 一些东西 $A, B, C, \ldots$，叫做“对象”；
  - 任意两个对象之间有一些东西 $f, g, \ldots \in \hom(A, B)$，叫做“箭头”或者“态射”；
  - 箭头之间可以复合：如果 $f : A \to B, g : B \to C$，那么 $g \circ f : A \to C$；
  - 每个对象上有一个箭头 $\mathrm{id}_A : A \to A$，复合它保持不变，即 $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$；
  - $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$；
- 就称这些东西构成**范畴**.
- 如何想象范畴：找好一个例子.

- 思考：是否可以脱离集合语言表述范畴？语言里面至少需要什么东西才能表述范畴？

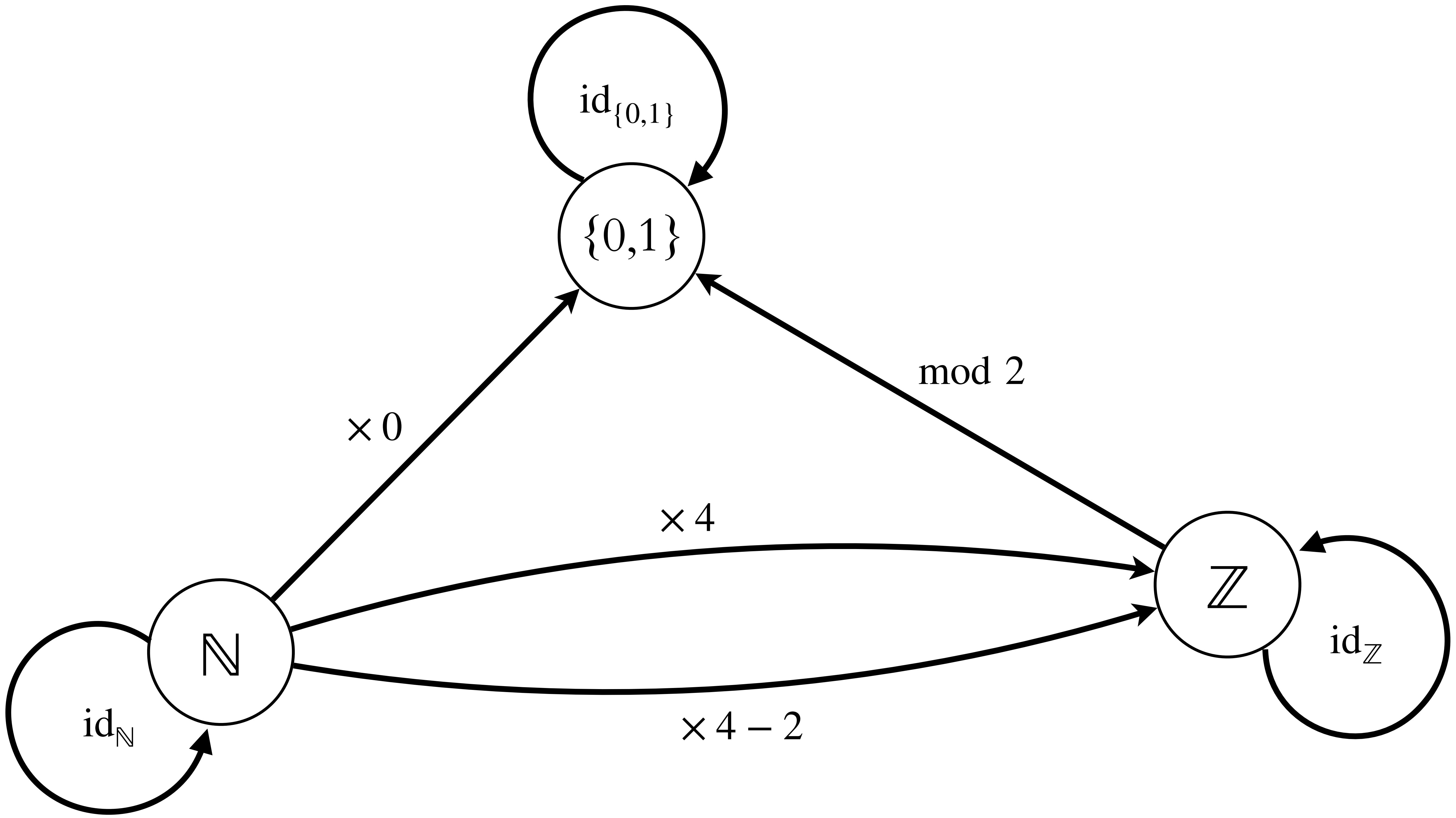
范畴！

- 假如有
  - 一些东西 $A, B, C, \ldots$，叫做“对象”；
  - 任意两个对象之间有一些东西 $f, g, \ldots \in \hom(A, B)$，叫做“箭头”或者“态射”；
  - 箭头之间可以复合：如果 $f : A \to B, g : B \to C$，那么 $g \circ f : A \to C$；
  - 每个对象上有一个箭头 $\mathrm{id}_A : A \to A$，复合它保持不变，即 $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$;
  - $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;
- 就称这些东西构成范畴.



- 假如有
  - 一些东西 $A, B, C, \ldots$，叫做“对象”；
  - 任意两个对象之间有一些东西 $f, g, \ldots \in \hom(A, B)$，叫做“箭头”或者“态射”；
  - 箭头之间可以复合：如果 $f : A \to B, g : B \to C$，那么 $g \circ f : A \to C$；
  - 每个对象上有一个箭头 $\mathrm{id}_A : A \to A$，复合它保持不变，即 $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$；
  - $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$；
- 就称这些东西构成范畴.

范畴!



一些范畴的例子

- 所有的集合与集合之间的函数构成范畴 Set.
- 所有的集合与集合之间的关系构成范畴 Rel.
- 所有的群与群之间的同态构成范畴 Grp.
- 向量空间与线性映射构成范畴 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$.
- 拓扑空间与连续映射构成范畴 Top.
- 有限状态自动机与自动机之间的模拟关系构成范畴 FSM.
- 图与图同态构成范畴 Graph.
- 很多数学对象与它们之间的映射关系都可以组成范畴
  - 范畴也是数学对象

函子

- 如果有两个范畴 $\mathscr{C},\mathscr{D}$，考虑
  - 从 $\mathscr{C}$ 的对象到 $\mathscr{D}$ 的对象的映射 F;
  - 对于 $\mathscr{C}$ 中的任何两个对象 A,B，有 $\hom(A,B) \to \hom(F(A),F(B))$ 的映射;
    - （编程语言中称作 `map` 或 `fmap`）
  - 此映射把 id_A 映射到 $\mathrm{id}_{F(A)}$，把 $f\circ g$ 映射到 $\texttt{map}_F(f)\circ\texttt{map}_F(g)$.
- 我们称这构成一个函子.
- 数学家的记号：FA, FB, Ff.

- 如果有两个范畴 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$，考虑
  - 从 $\mathscr{C}$ 的对象到 $\mathscr{D}$ 的对象的映射 F；
  - 对于 $\mathscr{C}$ 中的任何两个对象 A, B，有 $\hom(A,B) \to \hom(F(A), F(B))$ 的映射；
  - 此映射把 id_A 映射到 $\mathrm{id}_{F(A)}$，把 $f \circ g$ 映射到 $\mathtt{map}_F(f) \circ \mathtt{map}_F(g)$.
- 我们称这构成一个函子.

函子

- 思考：如何在网的比喻中加入图表交换性的信息？结合律呢？

- 如何想象函子？
  - 从图表的角度：范畴是一张网，函子把一张网不撕裂（但允许把节点和绳子捏到一起）地嵌到另一张网里
  - 从数学结构的角度：从一类数学对象自然地构造另一类数学对象
    - 注意：不需要构造 $A \to F(A)$ 的箭头！区分 $A \mapsto F(A)$.
- 例子：恒同函子 $\mathrm{Id} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.
  - 给定拓扑空间，抛弃它的拓扑信息得到纯集合 $\Gamma : \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$.
  - 给定集合，生成以它为基底的自由向量空间 $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$.
  - 给定集合，构造这些元素构成的列表 $\mathrm{List} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$，或者子集 $\mathscr{P} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$.

- 如果有两个范畴 $\mathscr{C},\mathscr{D}$，考虑
  - 从 $\mathscr{C}$ 的对象到 $\mathscr{D}$ 的对象的映射 F；
  - 对于 $\mathscr{C}$ 中的任何两个对象 A,B，有 $\hom(A,B) \to \hom(F(A),F(B))$ 的映射；
  - 此映射把 id_A 映射到 $\mathrm{id}_{F(A)}$，把 $f \circ g$ 映射到 $\mathtt{map}_F(f) \circ \mathtt{map}_F(g)$.
- 我们称这构成一个函子.

关于相等

- 态射（箭头）的相等没有问题：$f = g$.
- 对象的相等：
  - $\{\mathtt{true},\mathtt{false}\} \overset{?}{=} \mathtt{Bool} \overset{?}{=} \{0,1\}$
  - $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1,-1\}$
- 对象的同构：态射 $f : A \to B$，使得存在 $g : B \to A$ 满足 $f \circ g = \mathrm{id}_B$，$g \circ f = \mathrm{id}_A$.
  - 对象之间可以有多个同构
- 对象不应该谈相等 $\Longrightarrow$ 函子也不应该谈相等.

自然变换

- 如果有两个函子 $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$,
    - 对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$，都有箭头 $\eta_A : F(A) \to G(A)$,
    - 对于每个箭头 $f : A \to B$，右侧图表交换,
- 就称这一组箭头为自然变换 η.

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
G(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

自然变换

- 如果有两个函子 $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，
  - 对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$，都有箭头 $\eta_A : F(A) \to G(A)$，
  - 对于每个箭头 $f : A \to B$，右侧图表交换，
- 就称这一组箭头为自然变换 η.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

- 如何想象自然变换？
  - 图表的角度：将一个函子沿着范畴 $\mathscr{D}$ 中的箭头网络拖动到另一个函子
  - 数学结构的角度：顾名思义
- 例子：
  - 恒同自然变换 $F \to F$.
  - 任给一个列表 $\ell \in \mathrm{List}(X)$，可以去重得到子集 $\mathrm{unique}(\ell) \subseteq X$（$\mathrm{unique}(\ell) \in \mathscr{P}(X)$）
    - $\mathrm{unique} : \mathrm{List} \to \mathscr{P}$.
  - 向量空间的双重对偶是函子 $\square^{**} : \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$. 而 $V \to V^{**}$ 是恒同函子到双重对偶函子的自然变换 $\epsilon : \mathrm{Id} \to \square^{**}$.

自然变换

- 如果有两个函子 $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，
  - 对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$，都有箭头 $\eta_A : F(A) \to G(A)$，
  - 对于每个箭头 $f : A \to B$，右侧图表交换，
- 就称这一组箭头为自然变换 η.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

- 自然变换 $\eta : F \to G, \delta : G \to H$ 可以复合得到 $\delta \circ \eta : F \to H$.
  - 固定两个范畴 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$，可以构造一个新范畴：对象是函子，态射是自然变换.
  - 如果自然变换 $\eta : F \to G, \epsilon : G \to F$ 满足 $\eta \circ \epsilon, \epsilon \circ \eta$ 都是恒同自然变换，这两个函子就自然同构.
  - 对象之间不该谈相等，应该谈同构；函子之间不该谈相等，应该谈自然同构.
- 范畴之间有函子，函子之间有自然变换. 范畴之间的相等关系应该换成什么？
  - 有两个函子 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}, D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$，使得 $F \circ G$ 与 $G \circ F$ 都自然同构于恒同函子. 此时称两个范畴等价.

- 思考：范畴/函子/自然变换三层关系，能不能推广到更高层？
- 思考：这两个自然同构之间还要不要满足其他等式？

间奏

- 如果有两个函子 $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，
  - 对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$，都有箭头 $\eta_A : F(A) \to G(A)$，
  - 对于每个箭头 $f : A \to B$，右侧图表交换，
- 就称这一组箭头为自然变换 η.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "\mathtt{map}_G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

- 思考：如何去除 hom 对范畴 Set 的依赖？即如何推广范畴的定义，使得这里的 Set 可以换成其他的范畴？可以换成哪些？

- 对偶范畴：把范畴 $\mathscr{C}$ 所有箭头反过来得到另一个范畴 $\mathscr{C}^{\mathsf{op}}$.
- 乘积范畴：$\mathscr{C} \times \mathscr{D}$，对象是 (A, B)，态射是 (f, g).
- 二元函子：$\mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$. Haskell 中有 `Bifunctor`.
- $\hom : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \times \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ 也是函子.
  - （范畴论中最重要的函子）

范畴语言

- 单元素集合 $\{\star\}$，单元素群 $\mathbf{1}$，单元素类型 `Unit` （Python：`NoneType`，C：`void`）
- 特点：只有唯一的映射 $X \to 1$.
- 如果某个对象 T 满足 $\hom(X, T)$ 对于所有对象 X 都恰好有一个元素，就称为终对象.
- 如果某个对象 T 满足 $\hom(T, X)$ 对于所有对象 X 都恰好有一个元素，就称为始对象.
- 图表思维：始对象有一堆箭头指出去；终对象有一堆箭头指进来.
- 所有的终对象之间都有唯一的同构.

范畴语言

- 集合的 Descartes 积：$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
- 向量空间的直积：$V \times W$，加法满足 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- 拓扑空间的乘积，上面配备乘积拓扑.
- “且”命题：$p \wedge q$.

- 集合可以通过元素描述. 其他事物有没有“元素”?
  - $\hom(1,X)$： 集合范畴中 $\hom(1,X) \cong X$，拓扑空间的点集.
  - 除了点之外还有其他信息，如何捕捉?
- $\hom(\square, X)$. 这是函子 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$.

范畴语言

- 终对象： $\hom(\square, 1) \cong \{\star\}$.
- 乘积： $\hom(\square, A\times B) \cong \hom(\square, A)\times \hom(\square, B)$.
- 双线性映射： $\mathrm{Bilinear}(A, B; \square) \cong \hom(A\otimes B, \square)$.
- 子集： $\mathscr{P}(X) \cong \hom(X, \texttt{bool})$.

- 思考：对于拓扑空间 X，假如 $\mathscr{O}(X)$ 是所有开集的集合，那么有 $\mathscr{O}(X) \cong \hom(X, S)$. S 是什么空间？
- 思考：函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$ 也可以写成 $\hom(R, \square)$. R 是什么？此事是否可以推广？

- 用 $F(\square) \cong \hom(A, \square)$ 或者 $G(\square) \cong \hom(\square, A)$ 来定义对象 A，称作泛性质.
  - $F : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$, $G : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$.
- 定义出来唯一吗？

范畴语言

- 用 $F(\square) \cong \hom(A, \square)$ 或者 $G(\square) \cong \hom(\square, A)$ 来定义对象 A.
    - $F : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}, G : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$.
- 定义出来唯一吗?

范畴语言

- 用 $F(\square) \cong \hom(A,\square)$ 或者 $G(\square) \cong \hom(\square,A)$ 来定义对象 A.
  - $F : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}, G : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$.
- 定义出来唯一吗?

- 如果 $\hom(A,\square) \cong \hom(B,\square)$，那么 $\mathrm{id}_A \in \hom(A,A)$ 对应到 $f : \hom(B,A)$，反过来也有 id_B 对应到 $g : \hom(A,B)$. 如何保证 $f \circ g = \mathrm{id}_A$ 成立？ 自然同构. $g \circ f$ 是对称的.
- 若 $\hom(A,\square) \cong \hom(B,\square)$ 则 $A \cong B$.
- 每一个自然同构 $\hom(A,\square) \cong \hom(B,\square)$ 都对应一个同构 $A \cong B$.
- 每一个自然变换 $\hom(A,\square) \to \hom(B,\square)$ 都对应一个箭头 $A \to B$.

范畴语言

- 对于态射 $f: A \to B$，有复合操作 $\mathrm{hom}(\square, A) \to \mathrm{hom}(\square, B)$
  - 如果它是集合上的单射，则称这是单态射（monomorphism）
- 对于态射 $f: A \to B$，有复合操作 $\mathrm{hom}(B, \square) \to \mathrm{hom}(A, \square)$
  - 如果它是集合上的单射，则称这是满态射（epimorphism）
- 在集合范畴中满态射就是满射，单态射就是单射. 又单又满的态射是同构.
- 环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 是满态射，也是单态射. 环范畴中满射都是满态射，反之不然.
- 又单又分裂满的态射是同构；又满又分裂单的态射也是同构. （前一页证明了）

- 思考：预层范畴上的满射与单射，和每个集合分量上的满射与单射一样么？
- 如果把单射改成满射，得到的就是分裂满态射与分裂单态射. 请证明此定义与通常的定义等价.

范畴语言

- 函数：$A \to B$，或者写成 B^A.
- $\phi \in \hom(1, A \to B)$，应该对应一个箭头 $f \in \hom(A, B)$.
- $\hom(\square, A \to B)$ 对应 $\hom(\square \times A, B)$. 配有此自然同构的对象称作指数对象或函数对象.
- 例子：
  - 集合范畴：函数集合
  - 拓扑空间范畴：如果存在，则是紧开拓扑
  - 向量空间范畴：不存在
  - 命题逻辑范畴："若 p 则 q"，写作 $p \implies q$.

自由–遗忘

- 幺半群是一个集合 M 上面有二元运算 $\cdot$ 满足
  - 幺：有元素 e 使得 $e \cdot x = x = x \cdot e$.
  - 半群：$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- 列表：列表拼接满足结合律，空列表是幺元.
- 遗忘函子 $U : \mathsf{Mon} \to \mathsf{Set}$. 输入幺半群，输出它对应的集合（遗忘了二元运算）.
- 对于集合 G，$\hom(G, U(M)) \cong \hom(\mathrm{List}(G), M)$.
  - 先看 $G = \{x\}$ 只有一个元素的情况.
  - 再看 $G = \{x, y\}$ 只有两个元素的情况.
- 称 $\mathrm{List} \dashv U$，二者呈伴随关系.（如何记住左右：看在 hom 的哪边）

伴随函子

- 伴随函子是唯一的.
  - 如果有 $F \dashv U, G \dashv U$，那么 F, G 之间有唯一的自然同构.
  - 右伴随同理.
- 伴随函子的例子（盲人摸象！）：
  - 自由 – 遗忘伴随：自由群/环/向量空间/域、从半群构造群、从群构造交换群.
    - Stone – Čech 完备化 $\dashv$ 从紧 Hausdorff 空间范畴到拓扑空间范畴的遗忘.
  - 离散 – 遗忘 – 混沌三重伴随：拓扑空间范畴与集合范畴，有向图范畴.
    - 右边有时还有一重：取连通分支函子.
  - 遗忘 – 余自由伴随：$\mathsf{Mon} \to \mathsf{Grp}$ 取出可逆元素，如 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的可逆元 $\{1,5,7,11\}$.

- 这句话是错的，为什么？

伴随函子

- 伴随函子的复合：如果 $L_1 \dashv R_1$，$L_2 \dashv R_2$，那么计算
  - $\hom(L_1 L_2 A, B) \cong \hom(L_2 A, R_1 B) \cong \hom(A, R_2 R_1 B)$.
- 因此 $L_1 \circ L_2 \dashv R_2 \circ R_1$.
- 如果到这里我还没有讲够时间，请未来的我临场发挥一下.