类型论的范畴语义

语法的几何学

Trebor

代数结构

- 如果有集合 G，上面配备了二元运算 $(\cdot)$，一元运算 $\square^{-1}$ 与元素 e 满足
  - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  - $a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$
  - $e \cdot a = a = a \cdot e$
- 就称这构成一个**群**.
- 一般的情况：一个集合上面有一些运算，满足一些等式.
  - 固定的元素是零元运算
  - 等式里的变量必须能够取遍所有元素，如域不是代数结构.

- 此定义是**有偏定义**（*biased definition*）.
  请查询资料并给出无偏定义.

代数结构的语法

- 群理论的语法：
  - 对于变量名称的集合 $\Gamma = \{x, y, z, \ldots\}$，定义关于 Γ 的表达式集合 $\mathrm{Tm}(\Gamma)$.
    - BNF 语法 $E = e \mid E^{-1} \mid (E \cdot E) \mid x,\ \ x \in \Gamma$ 是变量.
    - 数学记号：e 是一个表达式；如果 E 是表达式，那么 E^{-1} 也是表达式……
  - 等价的表达式：
    - $(e \cdot E) \sim E$，等等
    - 如果 $E_1 \sim E_2$ 那么 $(E_1 \cdot E) \sim (E_2 \cdot E)$，等等
  - 商去等价关系（即把等价的表达式看成相等）
- 数学家：这就叫做**自由群** $\mathrm{Free}(\Gamma)$.

- 给出环理论与模理论的语法.

代数结构的语义

- 群理论的**语义**就是一个个具体的群.
- 语法的相等 $\Longrightarrow$ 语义的相等
  - 语法：$(x \cdot y)^{-1} \sim (y^{-1} \cdot x^{-1})$.
  - 语义：对于任何群 G 与 $x, y \in G$，$(x \cdot y)^{-1} = (y^{-1} \cdot x^{-1})$ 成立.
- 语义的不相等 $\Longrightarrow$ 语法的不相等
  - 语义：在可逆矩阵的乘法群中，有两个具体的元素 A, B 满足 $A \cdot B \neq B \cdot A$.
  - 语法：在群的语法中 $x \cdot y \nsim y \cdot x \in \mathrm{Tm}\{x, y\}$.
    - 这是不显然的定理！
- 语法和语义之间的相互作用

- *Towards a geometry for syntax*.

代数结构的特殊性

- 代数结构：群、交换群、环、幺半群、向量空间……
- 非代数结构：**域**
  - 对于任何**非零**元素 x，有乘法逆元 x^{-1}.
- 代数结构可以有多个集合：**模**
  - 两个集合 R, M，其中 R 满足环的公理，M 满足交换群的公理；额外添加运算 $(\cdot): R \times M \to M$，满足 $(a +_R b) \cdot c = a \cdot c +_M b \cdot c$，$(a \cdot_R b) \cdot c = a \cdot (b \cdot_R c)$，等等.
- 范畴也是代数结构?
  - 广义代数结构（GAT）或者本质代数结构（EAT）
- 紧 Hausdorff 拓扑空间（紧致统，compactum）也是代数结构？？
  - **单子（monad）**！数学上单子的重要用途：表述代数结构的理论.

类型论

- 考虑如下的类型论. 只有一个类型，写作 G. 以下是类型规则：

$$\frac{\Gamma \vdash M : G \quad \Gamma \vdash N : G}{\Gamma \vdash (M \cdot N) : G} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : G}{\Gamma \vdash M^{-1} : G} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash e : G}$$

- 以下是判值相等规则：

$$\frac{\Gamma \vdash M : G \quad \Gamma \vdash N : G \quad \Gamma \vdash P : G}{\Gamma \vdash ((M \cdot N) \cdot P) \equiv (M \cdot (N \cdot P)) : G}$$

- 其他略. 请读者自行补全.
- 群的理论也可以写作一种简单的类型论.
  - 反过来，类型论也可以看作高级的代数理论.

范畴论充能

- **米田引理**：依靠 $\hom(\square, C)$ 可以完全确定 C.
  - $\hom(\square, \lozenge) : \mathscr{C} \to \mathsf{Psh}(\mathscr{C})$，其中 $\mathsf{Psh}(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set})$.
  - 从普通的对象到“广义对象”的**满忠实**嵌入，记作 よ.（对象不够，广义对象来凑）
  - $\hom(\text{よ}A, X) \cong X(A)$，“探测器”. 此事用于做计算.
- 预层的范畴 $\mathsf{Psh}(\mathscr{C})$
  - 极限与余极限都是逐点计算：$(\lim X_i)(A) \cong \lim X_i(A)$.
  - 指数对象 $X \to Y$.
    - $(X \to Y)(A) \cong \hom(\text{よ}(A), X \to Y) \cong \hom(\text{よ}(A) \times X, Y)$.
    - 直接以 $\hom(\text{よ}(\square) \times X, Y)$ 作为指数对象的构造.

范畴论充能

- 丛：E 为全空间，B 的每个“元素”上有纤维.

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

- 两丛之间保持纤维的映射：

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

- **俯范畴**：$\mathscr{C}_{/B}$ 描述“逐纤维”操作. 俯范畴中的乘积、指数对象都是逐纤维进行的.
  - 总是有终对象 $B \to B$.
- 拓扑空间的丛：描述了一束依照 $b \in B$ 连续变化的拓扑空间 $E(b)$.
- 这是**相对于 B 的视角**.

范畴论充能

- B 的子对象就是某个单态射 $A \rightarrowtail B$. 两个子对象之间至多有一个映射.
  - 所有子对象（在同构意义下）的集合记作 $\mathrm{Sub}(B)$.
  - 如果有 $B' \to B$，可以计算原象 $f^{-1}(A) = \{x \in B' \mid f(x) \in A\}$.
    - 范畴表述：俯范畴中的乘积，称作**拉回**. （图表意识）
- 对于集合来说，子集 $A \subseteq B$ 可以描述为 $B \to \{\text{yes}, \text{no}\}$ 的函数.
  - 如果有 $\mathrm{hom}(\square, \Omega) \cong \mathrm{Sub}(\square)$，就说 Ω 是**子对象分类子**.
  - 如何区分哪个是 yes?
    - 选定同构的重要性
- 一切子对象都可以从 $\text{yes} : 1 \to \Omega$ 拉回.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, tail] \\ B \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

宇宙

- 如果有一类态射，记作 $A \rightsquigarrow B$.（例如前面的单射/子对象）
- 对于某个 B，考虑所有进入 B 的这类态射在同构意义下构成的集合 $\mathfrak{M}(B)$
  - 需要能沿着任何 $B' \to B$ 拉回，使 $\mathfrak{M}$ 构成函子
    - 即需要此类态射拉回稳定
- 如果有 $\hom(\square, \mathbf{B}) \cong \mathfrak{M}(\square)$，就说 $\mathbf{B}$ 是 $\mathfrak{M}$–分类子
  - 考虑 $\mathrm{id}_{\mathbf{B}}$ 被对应到的元素 $\pi : \mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{B}$
    - 所有别的 $A \rightsquigarrow B$ 都有唯一的方式写成它的拉回
    - 几何中称作**万有 $\mathfrak{M}$–丛**
- 这是一种宇宙.

- “同构意义”将对象群胚截断变成了集合.

类型论语法与范畴论

- 用范畴组织语言
  - 想法：类型与类型之间的函数构成范畴
    - 问题：应当先定义类型论的语义，再谈论函数类型在这个框架下的语义，函数类型不应该是天生在其中的；况且有些类型论没有函数类型.
  - 想法：$\Gamma \vdash a : A$ 是从 Γ 到 A 的态射，其中商去判值相等关系
    - 问题：左右两边东西类别不一样，没法构成范畴
  - 想法：**代换** $\Gamma \vdash \sigma : \Delta$.

$$x{:}\mathbb{N}, y{:}\mathbb{N} \overset{\sigma}{\vdash} (x+y){:}\mathbb{N}, (x/y){:}\mathbb{R}$$

    - 若 Δ 是 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$，σ 就是一列 $\Gamma \vdash a_k : A_k$. （变量名不重要）
    - 如果有 $\Delta \vdash b : B$，那么可以把 Δ 里的变量用 a_k 代换掉，变成 $\Gamma \vdash b[\sigma] : B[\sigma]$.

$$u{:}\mathbb{N}, v{:}\mathbb{R} \vdash \mathrm{pow}(v, u) : \mathbb{R}$$
$$\sigma$$
$$x{:}\mathbb{N}, y{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{pow}(x/y, x+y) : \mathbb{R}$$

类型论语法与范畴论

- $\Gamma \vdash \sigma : \Delta$ 写作态射 $\sigma : \Gamma \to \Delta$，这样构成一个范畴
- 重点关注形如 $(\Gamma, A) \to \Gamma$ 的态射，即抛弃单个变量的态射
- 这些信息就足够还原类型论中的所有东西
- 这类态射在拉回下稳定（习题）：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma, A[\sigma] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \Delta, A \arrow[d] \\
\Gamma \arrow[r, "\sigma"] & \Delta
\end{tikzcd}$$

- 对于某个 Γ，所有进入 Γ 的此类态射的集合 $\mathrm{Tp}(\Gamma)$ 就是语境 Γ 里类型的集合.
- 是否有 Tp–分类子?

Type theory is
the **relative** point of view

类型论的语义

- 有很多方式具体写成代数语义（报菜名环节）
- **自然模型**是一个范畴 $\mathscr{C}$ 配备上两个函子 $\mathrm{Tm}, \mathrm{Tp} : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ 与自然变换 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 使得其**相对可表**，即对于任何 $\Gamma \in \mathscr{C}$ 与自然变换 $よ\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 都有如图的拉回可表.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d] \\ よ\Gamma \arrow[r] & \mathrm{Tp} \end{tikzcd}$$

- 自然变换 $\theta : P \to Q$ 相对可表当且仅当其诱导的函子

$$\int_{\mathscr{C}} \theta : \int_{\mathscr{C}} P \to \int_{\mathscr{C}} Q$$

有右伴随.

- ……?

自然模型

这是语义 这是语法 这是语义 这是语法

- 顾名思义，$\mathscr{C}$ 中的对象将是语境的对应物，态射则对应代换.
- $\mathrm{Tp}(\Gamma)$ 对应 Γ 下的类型，而 $\mathrm{Tm}(\Gamma)$ 则是元素.
  - π 把元素映射到它所属的类型.
- 自然变换 $よ\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 与 $A \in \mathrm{Tp}(\Gamma)$ 一一对应（米田引理）.
- 拉回用于对应新语境 Γ, A，即拉回应当是 $よ(\Gamma, A)$.
- $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 是一种（范畴论）**宇宙**，或称**分类空间**.
  - 它分类形如 $(\Gamma, A) \to \Gamma$ 的态射.
- 给定类型 $A \in \mathrm{Tp}(\Gamma)$，其元素集为 $\pi_\Gamma^{-1}(A)$.
  - 给定态射 $A : X \to \mathrm{Tp}$ 代表一族类型，其元素构成预层 $\mathrm{El}(A)$，是拉回.

- **自然模型**是一个范畴 $\mathscr{C}$ 配备上两个函子 $\mathrm{Tm}, \mathrm{Tp} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 与自然变换 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 使得其**相对可表**，即对于任何 $\Gamma \in \mathscr{C}$ 与自然变换 $よ\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 都有如图的拉回可表.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d] \\
よ\Gamma \arrow[r] & \mathrm{Tp}
\end{tikzcd}$$

自然模型

- **自然模型**是一个范畴 $\mathscr{C}$ 配备上两个函子 $\mathrm{Tm}, \mathrm{Tp} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 与自然变换 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 使得其**相对可表**，即对于任何 $\Gamma \in \mathscr{C}$ 与自然变换 $よ\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 都有如图的拉回可表.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d] \\ よ\Gamma \arrow[r] & \mathrm{Tp} \end{tikzcd}$$

- 类型论的语法本身构成一个自然模型.
  - 对象是语境，态射是代换
  - $\mathrm{Tp}(\Gamma)$ 是 Γ 中的类型构成的集合（判值相等的视作相等）
  - $\mathrm{Tm}(\Gamma)$ 是所有元素构成的集合，π 将元素映射到对应的类型
- 计算如图的拉回预层 F，满足

$$F(\Delta) \cong \left\{ (\sigma, a) \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma \in \hom(\Delta, \Gamma) \\ a \in \mathrm{Tm}(\Delta) \\ A[\sigma] = \pi(a) \end{array} \right\} \cong \hom(\Delta, (\Gamma, A))$$

- 因此这的确是自然模型.

实例：函数类型

这是语法　　　　这是语法

- 对于任何两个类型 A, B 可以构造函数类型 $A \to B$.

这是语义

  - 需要有态射 $\mathsf{Fun} : \mathrm{Tp} \times \mathrm{Tp} \to \mathrm{Tp}$.

这是语义

- 对于 $A, B \in \mathrm{Tp}(\Gamma)$，$\mathsf{Fun}_\Gamma(A, B) \in \mathrm{Tp}(\Gamma)$ 的元素是什么?
  - （指数对象）
- 定义预层

$$F = \sum_{A,B \in \mathrm{Tp}} \mathrm{El}(A) \to \mathrm{El}(B)$$

- 我们要求如图的拉回.
- 这是对宇宙的**封闭性**要求.

- **自然模型**是一个范畴 $\mathscr{C}$ 配备上两个函子 $\mathrm{Tm}, \mathrm{Tp} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 与自然变换 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 使得其**相对可表**，即对于任何 $\Gamma \in \mathscr{C}$ 与自然变换 $よ\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 都有如图的拉回可表.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d] \\ よ\Gamma \arrow[r] & \mathrm{Tp} \end{tikzcd}$$

- 思考：考虑类型 Ans，有两个元素 yes, no，没有其它结构，那么它在自然模型中应当如何表述？这种表述是否是代数性的?

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d, "\pi"'] \\ \mathrm{Tp} \times \mathrm{Tp} \arrow[r, "\mathsf{Fun}"] & \mathrm{Tp} \end{tikzcd}$$

逻辑框架

- **问题**：描述范畴语义非常复杂
- 我们现在处于某个预层范畴中
  - 可以发明一种 DSL（领域特化语言），收集常用的操作
  - 这种语言本身类似一种依值类型语言！

表示"Tp 是个预层"

- **逻辑框架**（Logical Framework）中含有类型 $\mathrm{Tp} : \square$ 与类型族 $\mathrm{El} : \mathrm{Tp} \to \square$
- 函数类型的叙述如下：
  - 要求有 $\mathsf{Fun} : \mathrm{Tp} \times \mathrm{Tp} \to \mathrm{Tp}$
  - 满足 $\mathrm{El}[\mathsf{Fun}(A, B)] \cong [\mathrm{El}(A) \to \mathrm{El}(B)]$.
    - 展开来说就是存在向左向右的映射 lam, app，满足互为逆运算.

这很"简单"！

- **自然模型**是一个范畴 $\mathscr{C}$ 配备上两个函子 $\mathrm{Tm}, \mathrm{Tp} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 与自然变换 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 使得其**相对可表**，即对于任何 $\Gamma \in \mathscr{C}$ 与自然变换 $よ\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 都有如图的拉回可表.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d] \\ よ\Gamma \arrow[r] & \mathrm{Tp} \end{tikzcd}$$

- 也可以等价写作两个类型 $\mathrm{Tp}, \mathrm{Tm} : \square$，函数 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$，这样可以定义 $\mathrm{El}(A) = \Sigma(a : \mathrm{Tm})\,.\,\pi(a) = A$.

模型的态射

- 代数结构之间的同态
- 我们需要函子 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$.
  - $\mathrm{Tm}_{\mathscr{D}} : \mathscr{D}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ 可以与函子复合得到 $F^*\mathrm{Tm}_{\mathscr{D}} : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$.
  - 还需要两个态射使得如下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Tm}_{\mathscr{C}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\pi_{\mathscr{C}}"'] & F^*\mathbf{Tm}_{\mathscr{D}} \arrow[d, "F^*\pi_{\mathscr{D}}"] \\
\mathbf{Tp}_{\mathscr{C}} \arrow[r, dashed] & F^*\mathbf{Tp}_{\mathscr{D}}
\end{tikzcd}$$

  - 它还需要保持相对可表（语境延展）结构，以及额外添加的任何类型结构.

- **自然模型**是一个范畴 $\mathscr{C}$ 配备上两个函子 $\mathrm{Tm}, \mathrm{Tp} : \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ 与自然变换 $\pi : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tp}$ 使得其**相对可表**，即对于任何 $\Gamma \in \mathscr{C}$ 与自然变换 よ$\Gamma \to \mathrm{Tp}$ 都有如图的拉回可表.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Tm} \arrow[d] \\
よ\Gamma \arrow[r] & \mathrm{Tp}
\end{tikzcd}$$

Algebraic models of dependent type theory

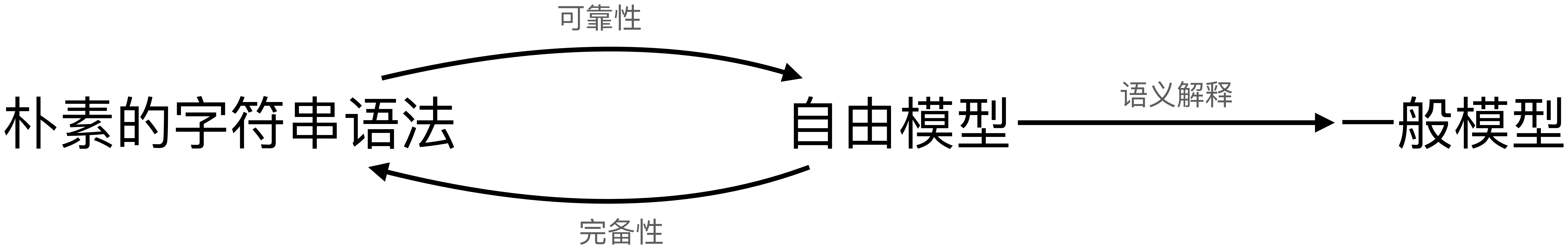
自由模型与语法

- 怎么说明模型的定义是对的?
  - 语法本身能构成一个模型 $\mathscr{S}$
- 模型是代数结构
  - 由代数结构的一般性质，存在**自由**生成的模型
- 语法应当能够（无歧义地）解释到模型
  - 对于任何模型 $\mathscr{C}$，都存在同构意义下唯一的态射 $\mathscr{S} \to \mathscr{C}$.
  - 语法是始对象，即自由模型.

$$
\begin{tikzcd}
\text{朴素的字符串语法} \arrow[r, bend left, "\text{可靠性}"] & \text{自由模型} \arrow[l, bend left, "\text{完备性}"] \arrow[r, "\text{语义解释}"] & \text{一般模型}
\end{tikzcd}
$$

自由模型与语法

- 应用：说明类型论中空类型真的没有元素
  - 构造**集合模型**，其中空类型对应空集
  - 假如空类型有元素，那么根据自由性可以解释到集合模型中
  - 空类型的元素被解释到空集中的元素，矛盾
- 具体构造等我写（🐦）



标准型

- 矩阵的标准型：秩标准型，Smith 标准型，Jordan 标准型
- 标准型有啥用?
  - 要研究矩阵在某种等价关系下的性质：相似 $A \sim XAX^{-1}$，合同 $A \sim XAX^{\top}$
  - 在每个等价类中选定一个标准的形式（有理数的既约形式也是一种标准型）
  - 如果标准型不同，二者不等价；如果标准型相同，二者等价
- 群理论的正规形式
  - $((x \cdot ((y \cdot x)^{-1} \cdot z)) \cdot w) \sim (y^{-1} \cdot (z \cdot w))$
  - 即，把逆元能算的都算，结合律让括号全部叠到右边，能抵消的抵消
  - “最简形式”很多时候可以作为标准型，但不是所有时候！

类型论的正规形式

- 有啥用?
  - 类型检查需要用!
    - 拒绝 $3 : \mathsf{Bool}$ 的前提是已经证明了 $\mathsf{Nat} \neq \mathsf{Bool}$，万一呢?
    - 检查 $(\lambda x.??) : A \to B$ 时，需要假设 $x : A$，然后检查 $?? : B$.
      - 这需要证明如果 $(A \to B) \equiv (C \to D)$ 那么 $A \equiv C$.
      - 在集合论中这不成立！$(A \to \emptyset) = \emptyset$ 是集合的严格相等
      - 这是语法中涌现的性质
- 怎么定义正规形式?
  - 泛性质一分为二!

类型论的正规形式

- 递归定义**正规形式**包括
  - 任何中性形式
  - $(\lambda x \,.\, \overline{M})$
  - $(\overline{M}, \overline{N})$
  - inl($\overline{M}$)，inr($\overline{M}$)
  - tt
  - 没有
  - ……
- 构造子层叠套着中性形式

- 递归定义**中性形式**包括
  - 变量*
  - $\underline{M}\overline{N}$
  - fst($\underline{M}$)，snd($\underline{M}$)
  - case($\underline{M}, \overline{L}, \overline{R}$)
  - 没有
  - absurd($\underline{M}$)
  - ……
- 消去子套在主变量上，其余分支正规

- 我们不希望 f 与 $\lambda x \,.\, fx$ 都是正规形式，为此我们需要禁止函数类型的变量归为中性形式；对部分其他类型也需要这么处理.

类型论的正规形式

- **定理**：任何一个表达式都等价于唯一一个正规形式（并且此过程可以计算）
- 想法：证明正规形式的语法构成模型，就得到了从表达式到正规形式的映射
- **问题**：$\lambda x . x$ 是正规形式，true 也是正规形式，但是 $(\lambda x . x)$true 不是正规形式，可以化简成 true.
  - 因此模型中难以定义函数类型的解释
- **问题**：正规形式在代换下不稳定！
- Tait 可计算性