同伦类型论(HoTT)

无懈可击99

目录

- MLTT补充
- “类型看作空间”
- 截断层级初探
- transport的计算
- 路径空间刻画

MLTT补充

基本概念回忆——函数

- $a : A \qquad a \equiv b : A$

- $f : A \to B \quad f(x) :\equiv \Phi$ or $f :\equiv \lambda x. \Phi$ or $f :\equiv x \mapsto \Phi$
- $f(t) \equiv \Phi[t/x]$

- $f \equiv x \mapsto f(x)$

基本概念回忆——宇宙和类型族

- $A : \mathcal{U}$
- $\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}$

- $P : A \to \mathcal{U}$

基本概念回忆——$\mathbf{\Pi}$类型

- $A : \mathcal{U}$ $P : A \to \mathcal{U}$
- $\Pi_{x:A} P(x)$ or $(x : A) \to P(x)$

- $f : \Pi_{x:A} P(x)$ $f(x) :\equiv \Phi$ or $f :\equiv \lambda x. \Phi$ or $f :\equiv x \mapsto \Phi$
- $f(t) \equiv \Phi[t/x]$

- $f \equiv x \mapsto f(x)$

基本概念回忆——乘积类型

- $A, B: \mathcal{U} \Rightarrow A \times B: \mathcal{U}$
- $a: A, b: B \Rightarrow (a, b): A \times B$

- $f: (t: A \times B) \to C(t)$
- $f(a, b) \coloneqq \Phi$（模式匹配）

基本概念回忆——$\boldsymbol{\Sigma}$类型

- $A: \mathcal{U}, P: A \to U \Rightarrow \Sigma_{x:A} P(x): \mathcal{U}$ or $(x: A) \times P(x): \mathcal{U}$
- $a: A, p: P(a) \Rightarrow (a, p): (x: A) \times P(x)$

- $f: (t: (x: A) \times P(x)) \to C(t)$
- $f(a, p) \coloneqq \Phi$

基本概念回忆——$\mathbf{1}$类型

- $\mathbf{1}: \mathcal{U}$
- $\star: \mathbf{1}$

- $f: (t: \mathbf{1}) \to C(t)$
- $f(\star) :\equiv \Phi$

基本概念回忆——和类型

- $A, B: \mathcal{U} \Rightarrow A + B: \mathcal{U}$
- $a: A \Rightarrow \mathrm{inl}(a): A + B$
- $b: A \Rightarrow \mathrm{inr}(b): A + B$

- $f: (t: A + B) \to C(t)$
- $f\big(\mathrm{inl}(a)\big) \coloneqq \Phi_1$
- $f\big(\mathrm{inr}(b)\big) \coloneqq \Phi_2$

基本概念回忆——$\mathbf{0}$类型

- $\mathbf{0}: \mathcal{U}$
- 没有引入规则

- $f: (t: \mathbf{0}) \to C(t)$
- 无需任何信息就能构建一个$\mathbf{0}$出发的函数

基本概念回忆——$\mathbf{2}$类型

- $\mathbf{2} : \mathcal{U}$
- $0_{\mathbf{2}}, 1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$

- $f : (t : \mathbf{2}) \to C(t)$
- $f(0_{\mathbf{2}}) = \Phi_1$
- $f(1_{\mathbf{2}}) = \Phi_2$

基本概念回忆——$\mathbb{N}$类型

- $\mathbb{N}: \mathcal{U}$
- $0: \mathbb{N}$
- $n: \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{suc}(n): \mathbb{N}$ or $n': \mathbb{N}$

- $f: (t: \mathbb{N}) \to C(t)$
- $f(0) \coloneqq \Phi_1$
- $f(n') \coloneqq \Phi_2$
- Φ_2可以包含$f(n)$（归纳假设）

基本概念回忆——ℕ上的加法和乘法

- $(\square + \square): \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $0 + n \coloneqq n$
- $m' + n \coloneqq (m + n)'$

- $(\square \times \square): \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $0 \times n \coloneqq 0$
- $m' \times n \coloneqq n + m \times n$

归纳类型的例子——列表类型

- $A{:}\,\mathcal{U} \Rightarrow [A]{:}\,\mathcal{U}$（$[A]$表示由$A$中的元素形成的列表类型）由以下两个构造器生成：
- $\mathrm{nil}{:}\,[A]$
- $v{:}\,A; h{:}\,[A] \Rightarrow \mathrm{cons}(v,h){:}\,[A]$

- 设$p,q{:}\,[A]$，定义$p+q{:}\,[A]$
- $\mathrm{nil}+q \coloneqq q$
- $\mathrm{cons}(v,h)+q \coloneqq \mathrm{cons}(v,h+q)$

归纳类型族的例子——定长列表类型

- 固定类型A，定义类型族$\mathrm{Vec}: \mathbb{N} \to \mathcal{U}$（$\mathrm{Vec}(n)$表示由$n$个$A$中元素组成的列表的类型）由以下两个构造器生成：
- $\mathrm{nil}: \mathrm{Vec}(0)$
- $n: \mathbb{N}; v: A; h: \mathrm{Vec}(n) \Rightarrow \mathrm{cons}(v, h): \mathrm{Vec}(n')$

- 设$m, n: \mathbb{N}; p: \mathrm{Vec}(m), q: \mathrm{Vec}(n)$，定义$p + q: Vec(m + n)$
- $\mathrm{nil} + q \coloneqq q$
- $\mathrm{cons}(v, h) + q \coloneqq \mathrm{cons}(v, h + q)$

归纳类型族的例子——偶数

- $\mathrm{isEven}: \mathbb{N} \to \mathcal{U}$（$\mathrm{isEven}(n)$的元素表示$n$是偶数的证据）由以下的两个构造器生成：
- $e_0: \mathrm{isEven}(0)$
- $n: \mathbb{N}; p: \mathrm{isEven}(n) \Rightarrow e_{ss}(p): \mathrm{isEven}(n'')$

- 另外定义类型族$C: \mathbb{N} \to \mathcal{U}$如下：
- $C(0) :\equiv \mathbf{1}$
- $C(1) :\equiv \mathbf{0}$
- $C(n'') :\equiv C(n)$

归纳类型族的例子——偶数

- 可以定义to: $(n:\mathbb{N}) \to \mathrm{isEven}(n) \to C(n)$
- $\mathrm{to}(0, e_0) \coloneqq \star$
- $\mathrm{to}\big(n'', e_{ss}(p)\big) \coloneqq \mathrm{to}(n, p)$

- 可以定义from: $(n:\mathbb{N}) \to C(n) \to \mathrm{isEven}(n)$
- $\mathrm{from}(0, c) \coloneqq e_0$
- $\mathrm{from}(n'', c) \coloneqq e_{ss}(\mathrm{from}(n, c))$

归纳类型族的例子——是零

- 我们对isEven再做一次简化，变成$\mathrm{isZero}: \mathbb{N} \to \mathcal{U}$，由一个构造器生成：
- $z_0: \mathrm{isZero}(0)$

- 设$C: (n: \mathbb{N}) \to \big(p: \mathrm{isZero}(n)\big) \to \mathcal{U}$为了构建$f: (n: \mathbb{N}) \to \big(p: \mathrm{isZero}(n)\big) \to C(n, p)$的一个元素，对$p$归纳，只要讨论$p$是$z_0$，$n$是0的情形，也即只要给出$c: C(0, z_0)$便足够。
- $f(0, z_0) :\equiv c$

相等类型

- 我们对isZero做推广，取定类型A和元素$a:A$，我们定义类型族$a =_A \square: A \to \mathcal{U}$（$a =_A x$的一个元素表示$x$是$a$的一个证据），由一个构造器生成：
- $\mathrm{refl}_a: a =_A a$

- 设$C: (x:A) \to (p: a =_A x) \to \mathcal{U}$为了构建$f: (x:A) \to (p: a =_A x) \to C(x,p)$的一个元素，对$p$归纳，只要讨论$p$是$\mathrm{refl}_a$，$x$是$a$的情形，也即只要给出$c: C(a, \mathrm{refl}_a)$便足够。
- $f(a,p) :\equiv c$
- 这条规则叫做J规则，或者路径归纳

相等类型的基本性质

- 定义$\square^{-1}: x = y \to y = x$
- $\mathrm{refl}_x^{-1} \coloneqq \mathrm{refl}_x$

- 定义$\square \cdot \square: x = y \to y = z \to x = z$
- $\mathrm{refl}_x \cdot \mathrm{refl}_x \coloneqq \mathrm{refl}_x$

- 定义$\mathrm{ap}_f: x = y \to f(x) = f(y)$
- $\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) = \mathrm{refl}_x$
- ap_f也记作$f(p)$

相等类型的基本性质

- 设$B: A \to \mathcal{U}$，$p: x = y$，定义$\mathrm{coe}_p^B: B(x) \to B(y)$
- $\mathrm{coe}_{\mathrm{refl}_x}^B \coloneqq \mathrm{id}_{B(x)}$

- $\mathrm{coe}: A = B \to A \to B$
- $\mathrm{coe}(\mathrm{refl}_A) \coloneqq \mathrm{id}_\mathrm{A}$

相等类型的基本性质

- $\mathrm{li}: (p: x = y) \to p^{-1} \cdot p = \mathrm{refl}_y$
- $\mathrm{li}(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}$

- $K: (p: x = x) \to p = \mathrm{refl}_x$
- $K(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{\mathrm{refl}_x}$
- 这是不合法的定义！

例子——自然数加法结合律

- $\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}} : (n, m, k : \mathbb{N}) \to (n + m) + k = n + (m + k)$
- $\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}}(0, m, k) \coloneqq \mathrm{refl}_{m+k}$
- $\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}}(n', m, k) \coloneqq \mathrm{ap}_{\mathrm{suc}}\left(\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}}(n, m, k)\right)$

“类型看作空间”

类型看作集合

类型论的语句/项	集合解释
A是类型	A是集合
$a: A$	a是A的元素
$f: A \to B$	f是A到B的函数
$A \to B$	A到B的函数组成的集合
$\mathcal{U}$	集合宇宙
$P: A \to \mathcal{U}$	P是以A为下标的类型族
$(x: A) \to P(x)$	族P的笛卡尔积
$f: (x: A) \to P(x)$	f是A出发的函数，满足$f(x) \in P(x)$
$(x: A) \times P(x)$	族P的无交并
$t: (x: A) \times P(x)$	t是二元对(x, p)，满足$p \in P(x)$

类型看作集合

类型论的语句/项	集合解释
$p: x =_A y$	p是x和y相等的证据
$x =_A y$	?
$\mathrm{refl}_x: x =_A x$	相等的自反性
$\square^{-1}: x = y \to y = x$	相等的对称性
$\square \cdot \square: x = y \to y = z \to x = z$	相等的传递性
$\mathrm{li}(p): p^{-1} \cdot p = \mathrm{refl}_y$	?
$\alpha: p =_{x =_A y} q$	?

类型看作空间

类型论的语句/项	集合解释
A是类型	A是空间
$a: A$	a是A中的点
$f: A \to B$	f是A到B的连续函数
$A \to B$	A到B的连续函数组成的空间
$\mathcal{U}$	空间宇宙
$P: A \to \mathcal{U}$	P 是以 A 为底空间的纤维丛（纤维是 $P(x)$）
$(x: A) \to P(x)$	纤维丛P的截面空间
$f: (x: A) \to P(x)$	f是A出发的连续函数，满足$f(x) \in P(x)$
$(x: A) \times P(x)$	纤维丛P的全空间
$t: (x: A) \times P(x)$	t是某纤维$P(x)$中的一个点

类型看作空间

类型论的语句/项	空间解释
$p: x =_A y$	p是x到y的一条道路
$x =_A y$	x到y的道路空间
$\mathrm{refl}_x: x =_A x$	常路径
$\square^{-1}: x = y \to y = x$	路径取反
$\square \cdot \square: x = y \to y = z \to x = z$	路径连接
$\mathrm{li}(p): p^{-1} \cdot p = \mathrm{refl}_y$	$p^{-1} \cdot p$和refl_y定端同伦
$\alpha: p =_{x =_A y} q$	α是p到q的定端同伦

群胚法则

引理 1.1

设 $A:\mathcal{U}$, $x,y,z,w:A$, $p:x=y, q:y=z, r:z=w$, 于是:

(i) $p\cdot \mathrm{refl}_y = p$, $\mathrm{refl}_x \cdot p = p$

(ii) $p^{-1}\cdot p = \mathrm{refl}_y$, $p\cdot p^{-1} = \mathrm{refl}_x$

(iii) $(p^{-1})^{-1} = p$

(iv) $p\cdot(q\cdot r) = (p\cdot q)\cdot r$

函子性

引理 1.2

设 $f : A \to B$, $g : B \to C$, $p : x =_A y$, $q : y =_A z$. 求证:

(i) $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$

(ii) $f(p^{-1}) = f(p)^{-1}$

(iii) $g(f(p)) = (g \circ f)(p)$

(iv) $\mathrm{id}_A(p) = p$

依值相等

- 设$P: A \to \mathcal{U}$，$p: x =_A y$，$s: P(x)$，$t: P(y)$，定义依值相等类型:
- $s =_p^B t \coloneqq \mathrm{coe}_p^B(s) =_{B(y)} t$

- 设$f: (x: A) \to P(x)$，$p: x =_A y$，定义$\mathrm{apd}_f(p): f(x) =_p^B f(y)$
- $\mathrm{apd}_f(\mathrm{refl}_x) \coloneqq \mathrm{refl}_{f(x)}$

例子——定长列表连接的结合律

- $\mathrm{assoc}_{+_{\mathrm{Vec}}} : \{n, m, k : \mathbb{N}\} \to \big(p : \mathrm{Vec}(n)\big) \to \big(q : \mathrm{Vec}(m)\big) \to \big(r : \mathrm{Vec}(k)\big) \to (p + q) + r =^{\mathrm{Vec}}_{\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}}(n,m,k)} p + (q + r)$
- $\mathrm{assoc}_{+_{\mathrm{Vec}}}(\mathrm{nil}, q, r) :\equiv \mathrm{refl}_{q+r}$
- $\mathrm{assoc}_{+_{\mathrm{Vec}}}(\mathrm{cons}(v, p), q, r) :\equiv ?$
- 已知$(p + q) + r =^{\mathrm{Vec}}_{\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}}(n,m,k)} p + (q + r)$
- 求证$\mathrm{cons}(v, (p + q) + r) =^{\mathrm{Vec}}_{\mathrm{suc}\left(\mathrm{assoc}_{+_{\mathbb{N}}}(n,m,k)\right)} \mathrm{cons}(v, p + (q + r))$

例子——定长列表连接的结合律

- $l_1\!: \mathrm{Vec}(n_1); l_2\!: \mathrm{Vec}(n_2); p\!: n_1 = n_2$
- $h\!: l_1 =_p^{\mathrm{Vec}} l_2$
- 要证：$\mathrm{cons}(v, l_1) =_{\mathrm{suc}(p)}^{\mathrm{Vec}} \mathrm{cons}(v, l_2)$

- 对p做路径归纳，不妨设p就是refl_{n_1}，n_2就是n_1，此时
- $h\!: l_1 = l_2$
- 要证：$\mathrm{cons}(v, l_1) = \mathrm{cons}(v, l_2)$

同伦

- 设$f, g: (x: A) \to P(x)$
- $H: (x: A) \to f(x) = g(x)$称为$f$到$g$的一个同伦
- 集合观点：逐点相等；空间观点：逐点连续地连线
- 记$f \sim g :\equiv (x: A) \to f(x) = g(x)$
- 同伦是“等价关系”

- 同伦的自然性：设$p: x =_A y$，则$H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y)$
- 证明：对p路径归纳

（同伦）等价

- 设$f: A \to B$，三元对(g, α, β)称为f的一个拟逆，其中$g: B \to A$，$\alpha: f \circ g \sim \mathrm{id}_B$，$\beta: g \circ f \sim \mathrm{id}_A$
- 集合观点：g是f的逆映射，从而f是双射，逆映射存在则唯一
- 空间观点：g是f的同伦逆映射，从而f是同伦等价映射，同伦逆映射存在则同伦意义下唯一
- 记$\mathrm{qinv}(f) :\equiv (g: B \to A) \to \big((f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)\big)$
- 但$\mathrm{qinv}(f)$性质不好，可能存在$e_1, e_2: \mathrm{qinv}(f)$，使得$e_1 \neq e_2$
- 我们需要找一个$\mathrm{isequiv}(f)$与$\mathrm{qinv}(f)$逻辑等价，且对一切$e_1, e_2: \mathrm{isequiv}(f)$，有$e_1 = e_2$

（同伦）等价

- 一种合法的定义是：
- $\mathrm{isequiv}(f) :\equiv \big((g: B \to A) \times (f \circ g \sim \mathrm{id}_B)\big) \times \big((h: B \to A) \times (h \circ f \sim \mathrm{id}_A)\big)$
- 要证明一个f是等价，只要给出f的一个拟逆
- $A \simeq B :\equiv (f: A \to B) \times \mathrm{isequiv}(f)$
- 类型等价是一种“等价关系”
- 记号上不太区分等价和函数

函数外延性公理

- 设$f, g: (x: A) \to P(x)$
- 有happly: $(f = g) \to (f \sim g)$
- 公理：happly是一个等价
- happly的拟逆记作funext: $(f \sim g) \to (f = g)$

泛等公理

- 设$A, B: \mathcal{U}$，有idtoeqv: $(A = B) \to (A \simeq B)$
- idtoeqv$(p) \coloneqq (\mathrm{coe}(p), \cdots)$
- 公理：idtoeqv是一个等价
- idtoeqv的拟逆记作ua: $(A \simeq B) \to (A = B)$

- 注：泛等公理可以推出函数外延性公理

截断层级初探

离散的空间

类型论的语句/项	集合解释
0	$\emptyset$
1	$\{\emptyset\}$
2	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$

类型论的语句/项	空间解释
0	空空间
1	由一个点构成的离散空间
2	由两个点组成的离散空间
$\mathbb{N}$	由可数个点组成的离散空间

离散的空间

- $\mathrm{isSet}(A) \coloneqq (x, y : A) \to (p, q : x =_A y) \to p =_{x =_A y} q$

- $\neg\mathrm{isSet}(\mathcal{U})$
- $\mathrm{refl}_{\mathbf{2}}, \mathrm{flip}_{\mathbf{2}} : \mathbf{2} = \mathbf{2}$
- $\mathrm{coe}(\mathrm{refl}_{\mathbf{2}})(0_{\mathbf{2}}) = 0_{\mathbf{2}}$
- $\mathrm{coe}(\mathrm{flip}_{\mathbf{2}})(0_{\mathbf{2}}) = 1_{\mathbf{2}}$

$0_{\mathbf{2}} \neq 1_{\mathbf{2}}$

- 定义$C: \mathbf{2} \to \mathcal{U}$
- $C(0_{\mathbf{2}}) :\equiv \mathbf{0}$
- $C(1_{\mathbf{2}}) :\equiv \mathbf{1}$
- 设$p: 0_{\mathbf{2}} = 1_{\mathbf{2}}$
- $\mathrm{coe}_{p^{-1}}^{C}(\star): \mathbf{0}$

圆

- $S^1 : \mathcal{U}$
- $\mathrm{base} : S^1$
- $\mathrm{loop} : \mathrm{base} = \mathrm{base}$

- $f : S^1 \to C$
- $f(\mathrm{base}) \coloneqq c$
- $\mathrm{ap}_f(\mathrm{base}) \coloneqq l$（不是依定义相等）

圆

- $f: (t: S^1) \to C(t)$
- $f(\mathrm{base}) :\equiv c$
- $\mathrm{apd}_f(\mathrm{loop}) := l$（不是依定义相等）

- 例子：$C: S^1 \to \mathcal{U}$
- $C(\mathrm{base}) :\equiv \mathbf{2}$
- $C(\mathrm{loop}) := \mathrm{flip}_{\mathbf{2}}$

$\mathrm{refl}_{\mathrm{base}} \neq \mathrm{loop}$

- 设$p : \mathrm{refl}_{\mathrm{base}} = \mathrm{loop}$
- 则$C(\mathrm{refl}_{\mathrm{base}}) = C(\mathrm{loop})$
- 则$\mathrm{refl}_{\mathbf{2}} = \mathrm{flip}_{\mathbf{2}}$

命题

- $\mathrm{isProp}(A) \coloneqq (x, y: A) \to x =_A y$
- 则$\mathrm{isProp}\big(\mathrm{isequiv}(A)\big)$，$\mathrm{isProp}\big(\mathrm{isSet}(A)\big)$，$\mathrm{isProp}\big(\mathrm{isProp}(A)\big)$
- $\mathrm{isSet}(A) \equiv (x, y: A) \to \mathrm{isProp}(x =_A y)$

n-类型

- $\mathrm{is1type}(A) :\equiv (x, y: A) \to \mathrm{isSet}(x =_A y)$
- $\mathrm{is2type}(A) :\equiv (x, y: A) \to \mathrm{is1type}(x =_A y)$

- 0-类型是指集合，-1-类型是指命题

- $\mathrm{isContr}(A) :\equiv (a: A) \times \big((x: A) \to a =_A x\big)$
- $\mathrm{isProp}(A) \simeq (x, y: A) \to \mathrm{isContr}(x =_A y)$
- -2-类型是指可缩的类型

可缩的类型

- $\mathbf{1}$可缩，可缩的类型都等价于$\mathbf{1}$

- $(x: A) \times a =_A x$可缩，因为$(a, \mathrm{refl}_a) = (x, p)$