数学基础多元主义

顺便谈谈综合数学

Trebor

数学基础

- 大厦只能有一个基础
- 如果基础有任何问题，大厦就会倒塌
- 更换基础意味着推倒重建

数学基础

- ~~数学只能有一个基础~~
- ~~如果基础有任何问题，数学就会倒塌~~
- ~~更换基础意味着推倒重建~~

- 有很多编程语言共存
- 编程语言实现有问题，可以随时修改
- 编程语言可以随意对接更换

[Complementary foundations for mathematics: when do we choose?]

集合论

先有集合还是先有元素?

先有元素：质料集合论

有没有不是集合的元素?

ZFA

NFU

ZF, ZFC

NBG, MK

CZF, IZF

先有集合：结构集合论

SEAR

ETCS

结构化 ZFC

判定

- 一阶逻辑里面只有一种判定：p true （也可以写作 $\vdash p$），例如
- $$\frac{p \text{ true} \quad q \text{ true}}{(p \wedge q) \text{ true}}$$
- 注意区分 $(\neg p)$ true 与 $\neg(p$ true$)$ （也可以写作 $\nvdash p$）
    - 前者："可以证明 p 是错的"，后者："无法证明 p 是对的"
    - 这两个否定符号的性质也不同
- 类型论的判定有多种，例如 $x : A$ 表示"x 的类型是 A"，$x \equiv y$ 表示"x 与 y 判值相等".
    - 与相等类型区分：相等类型可以进一步参与构造其他类型，如 $\neg(x = y)$ 是类型.
    - $x \equiv y$ 不是类型，不能参与构造其他类型，$\neg(x \equiv y)$ 的否定符号也与前者性质不同.

类型论

- 命题是不是类型？ （“是” = “表示为 / 编码为”）
  - 不是：Russell类型论，HOL，SEAR
  - 是：MLTT，CIC
- 用什么表示相等关系？
  - 判定：外延类型论，NuPRL
  - 判定和类型：内涵类型论，MLTT*，CIC
  - 类型：弱类型论
  - A secret third thing?
- ……

一些常见的论点

- ZFC里面有 $1 \in 3$，$\pi \notin 3$ 这样的离谱命题
  - 数学里面到处都是，实数作为 Dedekind 分割也有 $\frac{3}{4} \in \pi$ 属于离谱命题.
- 类型论里偶数类型的元素不是自然数类型的元素，需要额外转换
  - ZFC里面 $2/1 \in \mathbb{Q}, 2 \in \mathbb{N}$ 也需要转换
- ETCS需要范畴论，是循环定义
- 把命题编码成类型不自然（或者丑陋）
  - 把有序对编码成 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 也很丑陋
- 为了形式化数学，只能用类型论
  - 集合论也有成熟的形式化成果

一些常见的论点

- 移除排中律使得能做的数学变少了
  - 经典数学可以嵌入其中，因此并没有变少
- HoTT与排中律互斥，难以用到主流数学中
  - HoTT与命题排中律和集合的选择公理并不互斥
- MLTT等类型论里的规则太多太复杂
  - MLTT自带了逻辑，ZFC还需要搭建在一阶逻辑的基础上
- 集合更简单，当然应当作为基本对象
  - 这不是天生的，古希腊人就不这么认为
  - ZFC是“良基外延树的理论”

数学基础多元主义

- 几乎所有基础都能做到差不多的事情
- 不同基础适合做的事情不同
  - ZFC：内模型
  - ETCS：内语言
- 不同基础之间可以相互翻译
  - ZFC = ETCS+R
  - ZFC+? = HoTT+AC
- 不同基础给出不同的指导思想
  - 层垒谱系，数学结构主义

一些问题

- 不同系统之间的翻译
- 机械化的形式系统之间的自动翻译，如何处理有差异的定义？
  - Lean 3 → Lean 4
  - Dedukti
  - Metamath → Lean
- 避免反复造轮子
- 如何正确比较系统的强度？
  - F系统与“非直谓性”

公理化几何与综合数学

- Euclid 的几何：以点、线为基本对象，用公理刻画
- Descartes 的几何：通过已有的实数理论，用 $\mathbb{R}^2$ 编码平面几何
- 集合论：
  - 用集合编码一切其它数学对象——解析
  - 用公理直接刻画集合——综合
    - ZFC是“良基外延树的综合理论”

综合数学

- 如果研究的对象结构非常丰富，足够支撑类似集合论（类型论）的语言
  - 形如魔改版集合论（类型论）的综合数学，甚至可以自己成为数学基础
- 成果如何体现?
  - 有一套标准的模型
  - 语言内证明的事情 $\Longrightarrow$ 关于标准模型的命题
  - 也有别的模型……
- 优雅而极简
  - 综合微分几何：所有映射都光滑！
  - 综合计算理论：所有映射都可计算！（后面的讲座）
  - 综合同伦论：免除讨论无穷层组合学的烦扰

综合数学

- Rice 定理
  - 大致思想：程序的任何非平凡性质都不可判定.
  - 经典皮肤：定义判断器为某程序 Y，输入自然数，输出判断（或不停机）. 记被其判断为“是”的自然数子集为 $e(Y) \subseteq \mathbb{N}$. 考虑程序 X，输入判断器，输出是/否（必须停机），并且当 $e(Y_1) = e(Y_2)$ 时 $X(Y_1) = X(Y_2)$ 成立，那么 X 要么全输出“是”，要么全输出“否”.
    - 只考虑了判断器，更一般程序的性质的不可判定性可以类似推广
    - “性质”：不能追究实现细节，只要结果相同就需要看作相同的程序
      - 如 “此判断器在输入 1 时会停机” 就是合法的性质

综合数学

- Rice 定理
  - 大致思想：程序的任何非平凡性质都不可判定.
  - 新潮皮肤：有某个类型 $\mathbb{S}$，$(\mathbb{N} \to \mathbb{S})$ 表示判断器的类型
    - 所有函数 $(\mathbb{N} \to \mathbb{S}) \to \mathbf{2}$ 都是常函数
    - 或者 $[(\mathbb{N} \to \mathbb{S}) \to \mathbf{2}] \cong \mathbf{2}$.
    - 解释到标准模型里 $\Longrightarrow$ 经典皮肤
  - 证明十分简洁（见 Andrej Bauer 的讲话）
- 特例：停机问题，即所有映射 $\mathbb{S} \to \mathbf{2}$ 都是常函数.

综合数学

- 一些综合数学的例子：
  - 综合（初等?）几何，Euclid / Hilbert / Tarski / ...
  - 综合微分几何：任何函数都光滑，有无穷小量，$f(x+\delta x)=f(x)+f'(x)\delta x$ 严格相等
  - 综合同伦论：HoTT（可以加入选择公理等）
    - 综合 $(\infty,1)$–范畴理论
  - 综合论域论
    - 论域论：为了给（可能不停机等等的）程序提供指称语义
  - 综合 Tait 可计算性：Jon Sterling + spinoff
- 能不能在证明助理中临时进入某个综合数学语言，电脑自动生成对应的经典结论?