练习 **0.1**: 使用 Π 类型与 Σ 类型写出连续与一致连续之定义对应的类型.

连续:

$$\Pi(x:[a,b])\ \ \Pi(\varepsilon:(0,+\infty))\ \ \Sigma(\delta:(0,+\infty))\ \ \Pi(y:[a,b])\ \boxed{|y-x|<\delta \Longrightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon}$$

一致连续:

$$\Pi(\varepsilon:(0,+\infty))\ \ \Sigma(\delta:(0,+\infty))\ \ \Pi(x:[a,b])\ \ \Pi(y:[a,b])\ \boxed{|y-x|<\delta \Longrightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon}$$

练习 **0.2**: 使用 Π 类型与 Σ 类型写出红黑树 任意 插入元素均保持平衡所对应的类型.

$$\Pi(\mathrm{rbt}:\mathrm{rbt\_t})\ \ \Pi(\mathrm{elem}:\mathrm{elem\_t})\ \ \Pi(p:\mathrm{balance}(\mathrm{rbt}))\ \mathrm{balance}[\mathrm{rbt}\mapsto \mathrm{insert\ \ rbt\ \ elem}]$$

练习 **0.3**: 证明同一类型 $=_A$ 具有对称性, 即设$a,a':A,p:a=_A a'$, 证明$a'=_A a$.

记$C(a,a',p)\equiv \boxed{a'=_A a}$, 则

$$\boxed{(z:A)\to C[x\mapsto z, y\mapsto z, p\mapsto 1_z]}\equiv (z:A)\to \boxed{z=z}$$

其中显然有居留元$\lambda(z:A).\,1_z$, 定义$\mathrm{symm}\equiv\lambda a\ \ a'\ \ p.\,\mathrm{ind}_=(a,a',p,\lambda z.\,1_z)$ 得证.

练习 **0.4**: 利用add, 定义自然数的乘法.

$$\mathrm{mul}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$\mathrm{mul}\equiv\lambda m\ \ n.\,\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(m,0,\lambda\ x.\,\mathrm{add}\ \ n\ \ x)$$

练习 **0.5**: 试证明自然数加法的交换律, 即对于任意的$m,n:\mathbb{N}$, 总有$m+n=n+m$.

对m归纳, 当$m\equiv 0$时, 由引理结合对称性可证$0+n\equiv n=n+0$; 当$m\equiv S(m')$时, 对$f\equiv\lambda m'.\,S(m')$应用引理ap即可.

练习 **0.6**: 写出 Boolean 类型 $\mathbb{B}$ 的赋型规则(归纳子$\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}$), 并因此给出对应的定义

$$c:(i:\mathbb{B})\to(x:X(i))\to C((i,x))$$

使得依值对子类型的归纳子$\mathrm{ind}_{\times}$ 退化为余积类型的归纳子 ind_{+}.

形成规则和构造规则略去.

$$\frac{\Gamma,z:\mathbb{B}\vdash C(z):\mathcal{U}\qquad\Gamma\vdash c_t:C[z\mapsto\mathrm{true}]\qquad\Gamma\vdash c_f:C[z\mapsto\mathrm{false}]}{\Gamma\vdash\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}\left(z,c_t,c_f\right):C(z)}\mathbb{B}_{消去}$$

$$\frac{\Gamma,z:\mathbb{B}\vdash C(z):\mathcal{U}\qquad\Gamma\vdash c_t:C[z\mapsto\mathrm{true}]\qquad\Gamma\vdash c_f:C[z\mapsto\mathrm{false}]}{\Gamma\vdash\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}\left(\mathrm{true},c_t,c_f\right)\equiv c_t:C[z\mapsto\mathrm{true}]}\mathbb{B}_{计算\mathrm{t}}$$

$$\frac{\Gamma,z:\mathbb{B}\vdash C(z):\mathcal{U}\qquad\Gamma\vdash c_t:C[z\mapsto\mathrm{true}]\qquad\Gamma\vdash c_f:C[z\mapsto\mathrm{false}]}{\Gamma\vdash\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}\left(\mathrm{false},c_t,c_f\right)\equiv c_f:C[z\mapsto\mathrm{false}]}\mathbb{B}_{计算\mathrm{f}}$$

$$c\equiv\lambda b\ \ x.\,\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}(b,x[i\mapsto\mathrm{true}],x[i\mapsto\mathrm{false}])$$

顺带一提, 余积类型与 Boolean 类型的唯一性规则比较别扭, 以下两种写法均可:

$$\frac{\Gamma,z:\mathbb{B}\vdash C(z):\mathcal{U}\qquad\Gamma\vdash c:(z:\mathbb{B})\to C(z)}{\Gamma\vdash\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}(b,c\ \mathrm{true},c\ \mathrm{false})\equiv c\ \ b:C[z\mapsto b]}\mathbb{B}_{唯一}$$

$$\frac{\Gamma,z:\mathbb{B}\vdash C(z):\mathcal{U}\qquad\Gamma,z:\mathbb{B}\vdash c(z):C(z)}{\Gamma\vdash\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}(b,c[z\mapsto\mathrm{true}],c[z\mapsto\mathrm{false}])\equiv c[z\mapsto b]:C[z\mapsto b]}\mathbb{B}_{唯一'}$$

本文在叙述上对于需要自由变量的情形, 均将其写成了封闭的依值函数(即第1种), 这使得在逻辑顺序上不得不将同一类型等归纳类型放在依值函数类型之后叙述.