



《离散数学》

第二讲



数理逻辑之等值式

李昊
信息楼**312**



二 命题逻辑等值演算

本章的主要内容：

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集

本章与其他各章的联系

- 是第一章的抽象与延伸
- 是后续各章的先行准备

第一节 等值式

一、等值式与基本的等值式

1. 等值式

定义 2.1 若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式, 则称 A 与 B 等值, 记作 $A \Leftrightarrow B$, 并称 $A \Leftrightarrow B$ 是等值式

几点说明:

- 定义中, A, B, \Leftrightarrow 均为元语言符号 注意: \Leftrightarrow 不是联结词!
- A 或 B 中可能有哑元出现. 例如, 在

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$$

中, r 为左边公式的哑元.

- 用真值表可验证两个公式是否等值

请验证: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$



判断方法:

1. 利用真值表。(计算量太大)
2. 利用已知定律。

利用真值表证明:

$\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等值, 是等值式.

**Table 2**

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

放在同一个表中，两个公式的真值相同，则称这两个公式等值。



利用真值表证明：

$p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 逻辑等值，是等值式.

TABLE 3

Truth Tables for $\neg p \vee q$ and $p \rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

**Table 4****TABLE 4**

A Demonstration That $p \vee (q \vee r)$ and $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Are Logically Equivalent.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F



1 · 基本的等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A, \quad A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C), \quad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

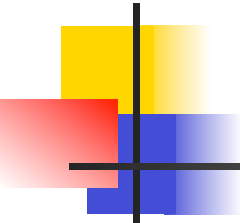
分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C),$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$



零律	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
同一律	$A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
等价等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
假言易位	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
等价否定等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
归谬论	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意：要牢记各个等值式，这是继续学习的基础



二、等值演算与置换规则

1 · 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2 · 等值演算的基础：

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递性

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则（见 3）

3. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式， $\Phi(B)$ 是用公式 B 置换了 $\Phi(A)$ 中的所有的 A 后得到的命题公式，若 $B \Leftrightarrow A$ ，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

三、等值演算的应用举例

1. 证明两个公式等值

例 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ (蕴涵等值式, 置换规则)

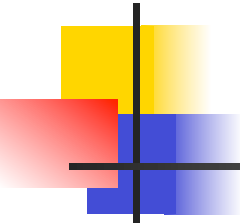
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ (结合律, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ (德摩根律, 置换规则)

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$ (蕴涵等值式, 置换规则)

几点说明:

- 也可以从右边开始演算 (请做一遍)
- 因为每一步都用置换规则, 故可不写出
- 熟练后, 基本等值式也可以不写出
- 用等值演算不能直接证明两个公式不等值



例 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

证 方法一 真值表法（自己证）

方法二 观察赋值法. 易知 000, 010 等是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值

方法三 用等值演算先化简两个公式, 再观察.

2. 判断公式类型

例 用等值演算法判断下列公式的类型

$$(1) \quad q \wedge \neg(p \rightarrow q)$$

$$(2) \quad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$(3) \quad ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

解 (1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

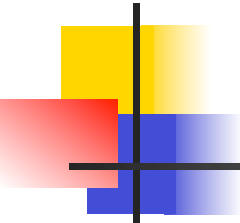
$$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) \quad (\text{德摩根律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 0 \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

由最后一步可知, (1) 为矛盾式.



$$(2) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

由最后一步可知，(2) 为重言式.

问：最后一步为什么等值于 1?

说明：(2) 的演算步骤可长可短，以上演算最省.


$$(3) ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

由最后一步可知，(3) 不是矛盾式，也不是重言式，它是可满足式，其实 101, 111 是成真赋值，000, 010 等是成假赋值.

总结：从此例可看出

A 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

A 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

EXAMPLE 5

证明： $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等值

$$\begin{aligned}\text{证明} \quad & \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ & \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\ & \Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ & \Leftrightarrow 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ & \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q\end{aligned}$$



EXAMPLE 6

证明 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 为永真式

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\&\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\&\Leftrightarrow 1 \vee 1 \\&\Leftrightarrow 1\end{aligned}$$



判断命题公式逻辑等价的方法：

1、真值表

2、命题公式的演算

基本等值定理；

公式的代入不变性；

等值关系的传递性。



命题公式逻辑等价关系的应用：

- 1、判定是否逻辑等价；
- 2、判断是否为永真公式或永假公式；
- 3、命题公式的化简



应用：

有一个逻辑学家误入某部落，被拘于牢囚。酋长意欲放行。于是他对逻辑学家说：“今有两门，一为自由，一为死亡。你可任意开启一门。为协助你逃脱，加派两名战士负责解答你所提问题。两名战士中，一人说的永远是真话，另一永假。”

逻辑学家沉思片刻，然后向一名战士发问。后从容走出。试问：逻辑学家应如何发问？

解答：逻辑学家指着一扇门问一名战士：“当我问他（另一名战士）这扇门是否是死亡之门时，他将回答‘是’，对吗？”

分析：

P：被问战士是诚实人。

q：被问战士回答：是。

r：另一战士回答：是。

s：这扇门死亡之门。



应用：

P	q	r	s
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1

结果说明根据被询战士的回答可选择从哪扇门出去。若回答“是”，说明被指的门非死亡之门。回答“否”，说明该门是死亡之门。