Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Вычислительных Технологий и Моделирования

# Отчёт по курсу "Современные вычислительные технологии"

Задание 1: Численное решение одномерного уравнения Лапласа на отрезке

Студент: Максим Великин`
Группа: 303

Москва
2026

# 1 Постановка задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad x \in (0;1) \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.
Известно, что точное решение имеет вид: $u = x^3 + \cos(x)$.
Необходимо: написать программу, решающую описанную задачу, убедиться в сходимости в $C$-норме и в дискретном аналоге $L_2$-нормы.

# 2 Описание численного решения

Мы решаем уравнение Лапласа:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

с граничными условиями:

$$u(0) = a, \quad u(1) = b,$$

где точное решение задано функцией $u(x) = x^3 + \cos(x)$, а правая часть $f(x) = -6x - \cos(x)$.
Граничные условия: $a = u(0) = 0^3 + \cos(0) = 1$, $b = u(1) = 1^3 + \cos(1) = 1 + \cos(1)$.

### Шаг 1: Создание сетки

На отрезке $[0,1]$ вводим равномерную сетку $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, где

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{1}{n},$$

$n$ — количество интервалов.

### Шаг 2: Дискретизация уравнения

Для аппроксимации второй производной используем трехточечный шаблон:

$$-u''(x_i) \approx -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

### Шаг 3: Формирование системы уравнений

Система для внутренних узлов $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{a}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}.$$

### Шаг 4: Решение системы методом прогонки

Метод прогонки состоит из прямого и обратного хода.

#### Прямой ход

Вычисляем коэффициенты $\alpha_i$ и $\beta_i$:

$$\alpha_0 = \frac{A[0][1]}{A[0][0]}, \quad \beta_0 = \frac{F[0]}{A[0][0]},$$

$$\alpha_i = \frac{A[i][i+1]}{A[i][i] - A[i][i-1]\cdot\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F[i] - A[i][i-1]\cdot\beta_{i-1}}{A[i][i] - A[i][i-1]\cdot\alpha_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

#### Обратный ход

Вычисляем значения $y_i$:

$$y_{n-1} = \beta_{n-2},$$

$$y_i = \beta_{i-1} - \alpha_{i-1}\cdot y_{i+1}, \quad i = n-2, n-3, \ldots, 1.$$

### Шаг 5: Вычисление ошибок

После получения численного решения $y$ вычисляем ошибки: - $C$-ошибка: $\text{cerr} = \max_{0\le i\le n}|y_i - u(x_i)|$, - $L_2$-ошибка: $\text{lerr} = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(y_i - u(x_i))^2}$.

## 3 Результаты численных экспериментов

Результаты для разных $n$:

Графики зависимости ошибок от $h$:

| $n$ | $h = 1/n$ | C-ошибка | L2-ошибка |
|---|---|---|---|
| 16 | 0.0625 | 3.4978e-05 | 2.4722e-05 |
| 128 | 0.0078125 | 5.47547e-07 | 3.96549e-07 |
| 1024 | 0.0009765625 | 8.55519e-09 | 6.21711e-09 |
| 8192 | 0.0001220703125 | 1.41648e-10 | 1.04551e-10 |

Таблица 1: Зависимость ошибок от $n$ и $h$

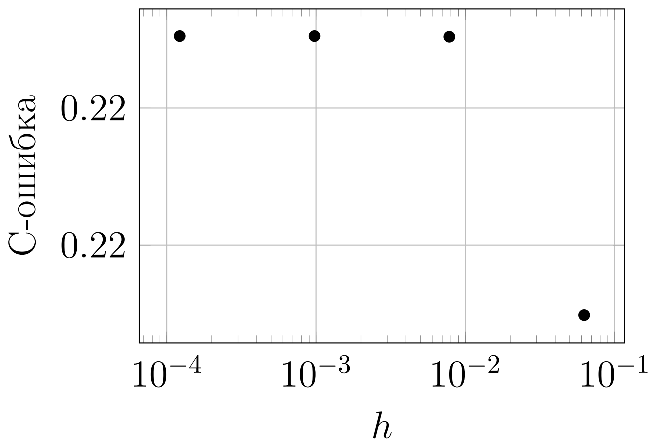


Рис. 1: Зависимость C-ошибки от $h$

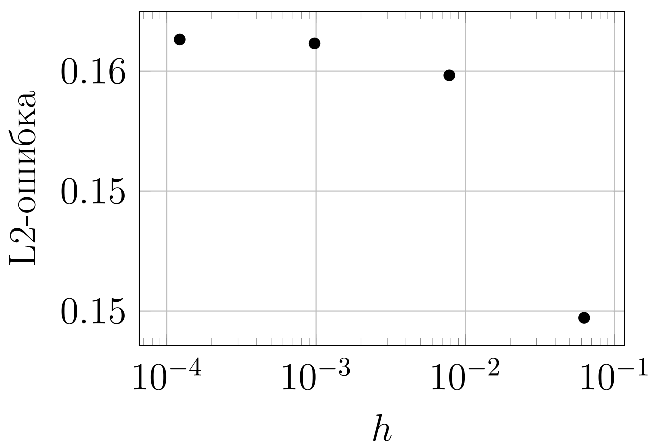


Рис. 2: Зависимость L2-ошибки от $h$