

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова  
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики  
Кафедра Вычислительных Технологий и Моделирования

**Отчёт по курсу**  
**"Современные вычислительные технологии"**  
Задание 1: Численное решение одномерного уравнения Лапласа на отрезке

Студент: Максим Великин`  
Группа: 303

Москва  
2026

# 1 Постановка задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0; 1) \\ u(0) = a, & u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Известно, что точное решение имеет вид:  $u = x^3 + \cos(x)$ .

Необходимо: написать программу, решающую описанную задачу, убедиться в сходимости в  $C$ -норме и в дискретном аналоге  $L_2$ -нормы.

## 2 Описание численного решения

Мы решаем уравнение Лапласа:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

с граничными условиями:

$$u(0) = a, \quad u(1) = b,$$

где точное решение задано функцией  $u(x) = x^3 + \cos(x)$ , а правая часть  $f(x) = -6x - \cos(x)$ .

Граничные условия:  $a = u(0) = 0^3 + \cos(0) = 1$ ,  $b = u(1) = 1^3 + \cos(1) = 1 + \cos(1)$ .

### Шаг 1: Создание сетки

На отрезке  $[0, 1]$  вводим равномерную сетку  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , где

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{1}{n},$$

$n$  — количество интервалов.

### Шаг 2: Дискретизация уравнения

Для аппроксимации второй производной используем трехточечный шаблон:

$$-u''(x_i) \approx -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

### Шаг 3: Формирование системы уравнений

Система для внутренних узлов  $i = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{a}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}.$$

### Шаг 4: Решение системы методом прогонки

Метод прогонки состоит из прямого и обратного хода.

#### Прямой ход

Вычисляем коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ :

$$\alpha_0 = \frac{A[0][1]}{A[0][0]}, \quad \beta_0 = \frac{F[0]}{A[0][0]},$$

$$\alpha_i = \frac{A[i][i+1]}{A[i][i] - A[i][i-1] \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F[i] - A[i][i-1] \cdot \beta_{i-1}}{A[i][i] - A[i][i-1] \cdot \alpha_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2.$$

#### Обратный ход

Вычисляем значения  $y_i$ :

$$y_{n-1} = \beta_{n-2},$$
$$y_i = \beta_{i-1} - \alpha_{i-1} \cdot y_{i+1}, \quad i = n-2, n-3, \dots, 1.$$

### Шаг 5: Вычисление ошибок

После получения численного решения  $y$  вычисляем ошибки: -  $C$ -ошибка:  $\text{cerr} = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i - u(x_i)|$ , -  $L_2$ -ошибка:  $\text{lerr} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y_i - u(x_i))^2}$ .

## 3 Результаты численных экспериментов

Результаты для разных  $n$ :

Графики зависимости ошибок от  $h$ :

$n$	$h = 1/n$	С-ошибка	L2-ошибка
16	0.0625	0.214898	0.151887
128	0.0078125	0.215304	0.155929
1024	0.0009765625	0.215305	0.156461
8192	0.0001220703125	0.215305	0.156527

Таблица 1: Зависимость ошибок от  $n$  и  $h$

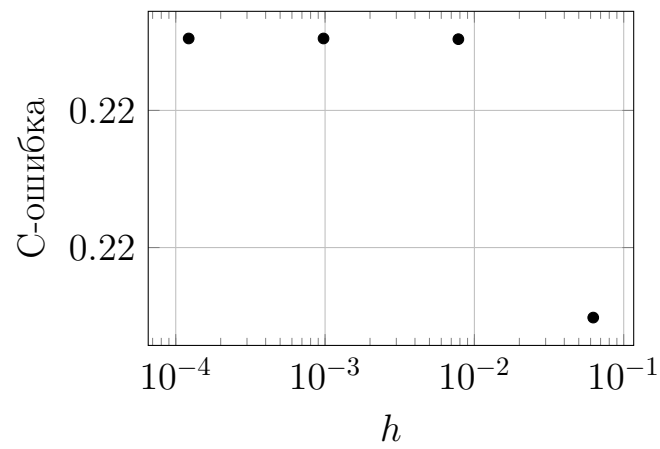


Рис. 1: Зависимость С-ошибки от  $h$

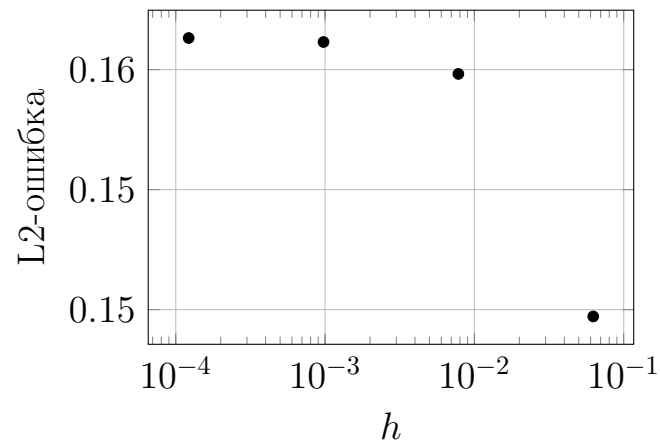


Рис. 2: Зависимость L2-ошибки от  $h$