Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Вычислительных Технологий и Моделирования

Отчёт по курсу
"Современные вычислительные технологии"

Задание 1: Численное решение одномерного уравнения Лапласа на отрезке

Студент: Максим V`
Группа: 303

Москва
2026

1 Постановка задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad x \in (0;1) \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.
Известно, что точное решение имеет вид: $u = \cos(10x)$.
Необходимо: написать программу, решающую описанную задачу, убедиться в сходимости в C-норме и в дискретном аналоге L_2-нормы.

2 Описание численного решения

Мы решаем уравнение Лапласа:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

с граничными условиями:

$$u(0) = a, \quad u(1) = b,$$

где точное решение задано функцией $u(x) = \cos(10x)$, а правая часть $f(x) = 100\cos(10x)$. Граничные условия: $a = u(0) = \cos(0) = 1$, $b = u(1) = \cos(10)$.

Шаг 1: Создание сетки На отрезке $[0,1]$ вводим равномерную сетку $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, где

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{1}{n},$$

n — количество интервалов.

Шаг 2: Дискретизация уравнения Для аппроксимации второй производной используем трехточечный шаблон:

$$-u''(x_i) \approx -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Шаг 3: Формирование системы уравнений Система для внутренних узлов $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{a}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Шаг 4: Решение системы методом прогонки Метод прогонки состоит из прямого и обратного хода.

Прямой ход Вычисляем коэффициенты α_i и β_i:

$$\alpha_0 = \frac{A[0][1]}{A[0][0]}, \quad \beta_0 = \frac{F[0]}{A[0][0]},$$

$$\alpha_i = \frac{A[i][i+1]}{A[i][i] - A[i][i-1] \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F[i] - A[i][i-1] \cdot \beta_{i-1}}{A[i][i] - A[i][i-1] \cdot \alpha_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Обратный ход Вычисляем значения y_i:

$$y_{n-1} = \beta_{n-2},$$

$$y_i = \beta_{i-1} - \alpha_{i-1} \cdot y_{i+1}, \quad i = n-2, n-3, \ldots, 1.$$

Шаг 5: Вычисление ошибок После получения численного решения y вычисляем ошибки: - C-ошибка: $\text{cerr} = \max_{0 \le i \le n} |y_i - u(x_i)|$, - L_2-ошибка: $\text{lerr} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (y_i - u(x_i))^2}$.

3 Результаты численных экспериментов

Результаты для разных n:

n	$h = 1/n$	C-ошибка	L2-ошибка
16	0.0625	0.214898	0.151887
128	0.0078125	0.215304	0.155929
1024	0.0009765625	0.215305	0.156461
8192	0.0001220703125	0.215305	0.156527

Таблица 1: Зависимость ошибок от шага сетки

Графики зависимости ошибок от h:

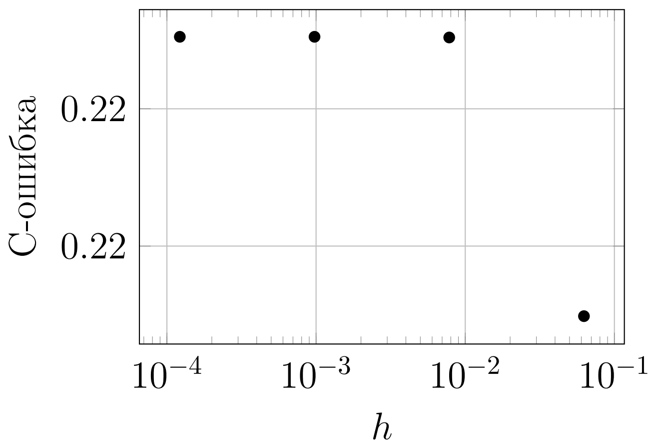

Рис. 1: Зависимость C-ошибки от h

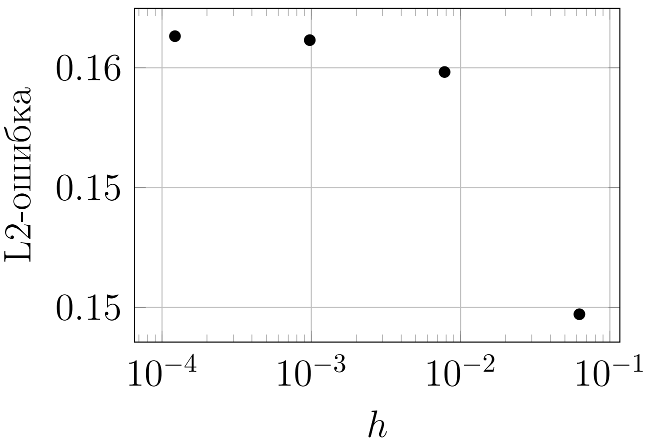

Рис. 2: Зависимость L2-ошибки от h