第12章（一）
第一类曲面积分

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

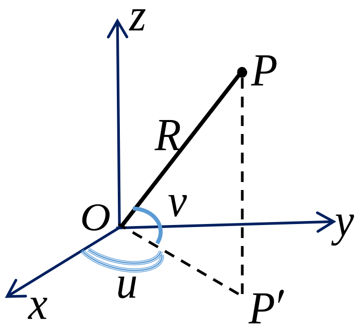
曲面的表示

- **显式表示** $f: \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R},\quad S=\{(x,y,z) \mid z=f(x,y,z),\ (x,y)\in D\}$
- **隐式表示** $F: \mathbb{R}^3 \supset V \to \mathbb{R},\quad S=\{(x,y,z) \mid F(x,y,z)=0,\ (x,y,z)\in V\}$
- **参数表示** $\sigma: \mathbb{R}^2 \supset T \to \mathbb{R}^3$，为向量场，$S=\sigma(T)$，即

$$S=\{(x,y,z) \mid (x,y,z)=\sigma(u,v),\ (u,v)\in T\} \text{ 或 } \sigma(u,v)=\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$$

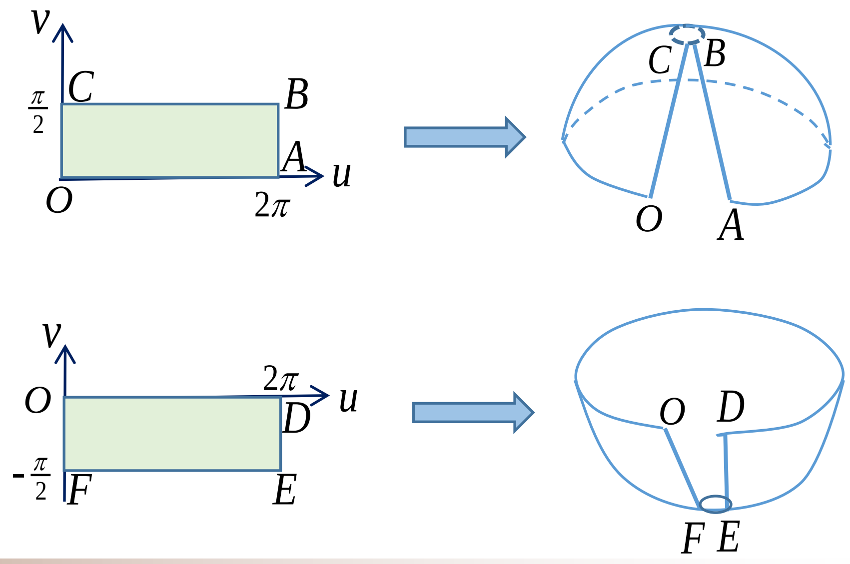
称 (σ,T) 为曲面 S 的一个**参数表示**，称曲面 S 为**参数曲面**.

球面的参数表示



$$\sigma: \mathbb{R}^2 \supset T \to \mathbb{R}^3,\quad \sigma(u,v)=\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$$

$$\begin{cases} x=R\cos u\cos v \\ y=R\sin u\cos v, \\ z=R\sin v \end{cases}\quad T=[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$



曲面的基本法向量

定义 设 (σ, T) 为曲面 S 的一个参数表示， $\sigma(u,v)=\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$， $(u,v)\in T$，

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 在 T 上可偏导，则

(1) $$\vec{N}=\frac{\partial \sigma}{\partial u}\times\frac{\partial \sigma}{\partial v}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

称为 σ 的**基本法向量** .

(2) 若在 T 上 $\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ 连续，且 $\vec{N}\neq 0$，称 (u,v) 是 σ 的**正则点**，否则称为 σ 的**奇点** .

(3) 若 σ 的每一点都是正则点，则称 $S=(\sigma, T)$ 为**光滑曲面** .

- 对 $z=f(x,y)$, $\vec{N}=\left(-f_x', -f_y', 1\right)$
- 对 $F(x,y,z)=0$, $\vec{N}=\frac{1}{|F_z'|}\left(F_x', F_y', F_z'\right)$

对 $\forall P\in S$, $\vec{N}$ 与曲面上任一过 P 点的光滑曲线在 P 点（切向量）垂直.

曲面的面积

定义 设 (σ,T) 为曲面 S 的一个参数表示， σ： $T\to S$ 连续可导，

则称二重积分 $S=\iint\limits_T\left|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 为曲面的**面积** .

- 曲面 $z=f(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy}\quad\Rightarrow\quad S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$
- 曲面 $F(x,y,z)=0\,(F_z'\neq 0),\quad S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{|F_z'|}\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

球面积的计算

（1） $x=R\cos u\cos v,\quad y=R\sin u\cos v,\quad z=R\sin v,\quad (u,v)\in[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$

（2） $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D=\left\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\right\}.$

（3） $x^2+y^2+z^2=R^2.$

第一类曲面积分

定义 设 $S=(\sigma,T)$，σ 在 T 上连续可导，f： $S\to\mathrm{R}$ 为连续的数量场，称

$$\iint\limits_T f(\sigma(u,v))\left|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$ 为 f 在 S 上的**第一类曲面积分（面积积分）**.

- 曲面 $z=z(x,y),\quad (x,y)\in D \quad\Rightarrow\quad \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$
- 曲面 $F(x,y,z)=0\left(F_z'\neq 0,\ z=z(x,y)\right)$，且 S 与在 xoy 平面上的投影 D_{xy} 是一对一的，那么

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{\sqrt{\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2+\left(F_z'\right)^2}}{\left|F_z'\right|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 若为闭曲面则曲面积分常记为 $\displaystyle\oiint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S.$

【注】类似第一类曲线积分，大家可以自行写出关于第一类曲面积分的基本性质.

第一类曲面积分的计算举例

例 1 已知球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，试求球壳的质量。

解法一： 上半球为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$， $(x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$.

$$M=2\iint_{S_{上}}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2+y^2\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r=4a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{8\pi}{3}a^4.$$

解法二： 球面的参数方程为 $x=a\sin\varphi\cos\theta$, $y=a\sin\varphi\sin\theta$, $z=a\cos\varphi$, $0\le\theta<2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$.

$$\mathrm{d}S=\left|\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right|\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$ 于是

$$M=2\iint_{S_{上}}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2\varphi\cdot a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8\pi}{3}a^4.$$

第一类曲面积分的计算举例

例 2 设 a,b,c 为常数，计算 $\displaystyle\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}(ax+by+cz)^2\,\mathrm{d}S$.

解： 由球面的对称性和 x,y,z 的可轮换性有

$$\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}(ax+by+cz)^2\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\mathrm{d}S$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}z^2\,\mathrm{d}S=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot R^2\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}\mathrm{d}S=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot R^2\cdot 4\pi R^2=\frac{4\pi R^4}{3}(a^2+b^2+c^2).$$


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY