第 14 章

虚俭移原理







第14章 虚位移原理

- § 14-1 约束方程与约束分类
- § 14-2 虚位移与虚功·自由度
- § 14-3 虚位移原理及其应用
- § 14-4 广义坐标·广义坐标形式的虚位移原理

- 概述
- ●约束与约束方程
- ●约束的类型







非自由质点系的平衡,可以理解为主动力通过约束的平衡。约束的作用在于:

一方面阻挡了受约束的物体沿某些方向的位移, 这时该物体受到约束力的作用;而另一方面,约束也 容许物体有可能沿另一些方向获得位移。

当质点系平衡时,主动力与约束力之间,以及主动力与约束所许可位移之间,都存在着一定的关系。这两种关系都可以作为质点系平衡的判据。







刚体静力学利用了前一种情况,通过主动力和约束力之间的关系表示出刚体的平衡条件。

而虚位移原理则将利用后一种情况,他通过主动力在 约束所许可的位移上的表现(通过功的形式)来给出质点 系的平衡条件。虚位移原理运用动力学的功建立静力学的 平衡条件,又被称作静动法;它适合于一些较复杂的平衡 问题,避免一些不需求的约束力,是一般数值方法的基础。

因此,在虚位移原理中,首先要研究加在质点系上的各种约束,以及约束所许可的位移的普遍性质。



2. 约束和约束方程

(1)约束

对非自由质点系的位置、速度之间预先加入的限制条件,称为约束。

(2)约束方程

约束对质点系运动的限制可以通过质点系中各质点的坐标和速度以及时间的数学方程来表示。这种方程称为约束方程。



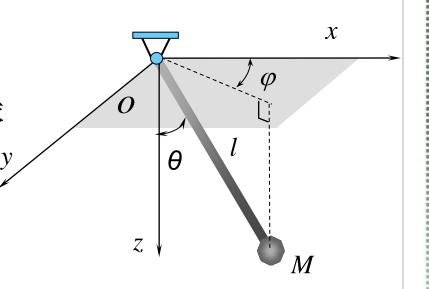
球面摆

点*M*被限制在以固定点*O*为球心、*l*为半径的球面上运动。

如取固定参考系Oxyz,则点M的 坐标x、y、z满足方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

这就是加于球面摆的约束方程。









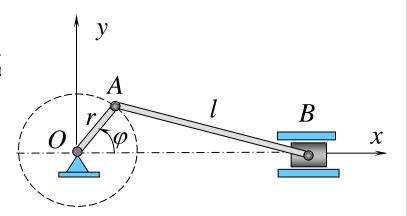
曲柄连杆机构

这个质点系的约束方程可表示成

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$



式中x_A、y_A和x_B、y_B分别为A、B两点的直角坐标。上述方程表明这四个坐标并非都独立。可以消去其中的某三个,从而只剩下一个独立坐标,这一坐标完全确定了此质点系的位置。

以后改称系统的位置为位形。

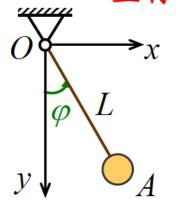






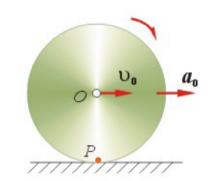
约束的分类

几何约束——阻制证移的约束,约束方程仅包含位置坐标,例如滑块与摆, $f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...)=0$



摆球 $x^2+y^2=L^2$

藻轮 v=rω



非几何约束——如运动约束—阻制运动的约束,例如 纯滚动的轮,约束方程 $f(x_1,v_1,z_1,v_{x1},v_{y2},v_{z2},...)=0$

定常约束——不随时间改变的约束,约束方程不含时 间变量,如上例子

非定常约束——随时间变化的约束,约束方程显含时间变量,例如绳长以v缩短的摆,约束方程 $x^2+y^2=(L-vt)^2$









约束的分类

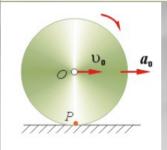
双面约束——阻制两相对方向运动的约束,约束方程 为等式,如上例, $f(x_1,y_1,z_1,v_{x1},v_{y2},v_{z2},...)=0$

单面约束——阻制单方向运动的约束,约束方程为不等式,例如绳与球组成的摆, $x^2+y^2 \le L^2$ ~~~~

完整约束——仅限制证移或可转化成限制证移 的约束,约束方程仅包含或可转化成位置 坐标及时间, $f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,t)=0$



非完整约束——阻制证移和其它运动且不可转化的约束, 约束方程包含其它运动量且不可转化成位置坐标



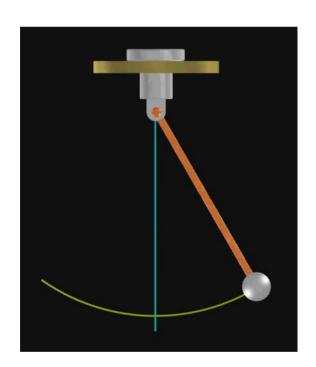
例: 纯滚动的轮, $v=r\omega$, 积分 $x_o-r\varphi=const.$ —完整约束

思考:几种约束间的关系

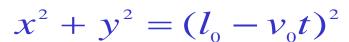
3

● 定常约束和非定常约束

$$x^2 + y^2 = l_0^2$$



定常约束





非定常约束



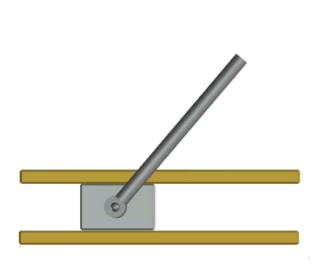


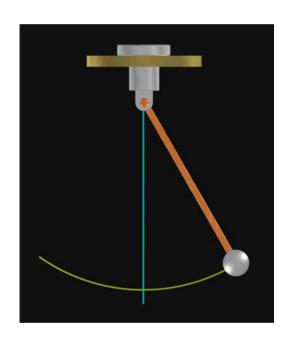




● 双面约束和单面约束

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$





双面约束

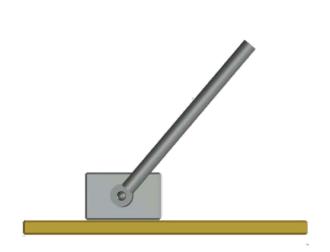




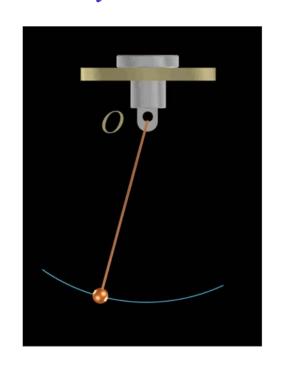




● 双面约束和单面约束



$$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2$$



单面约束



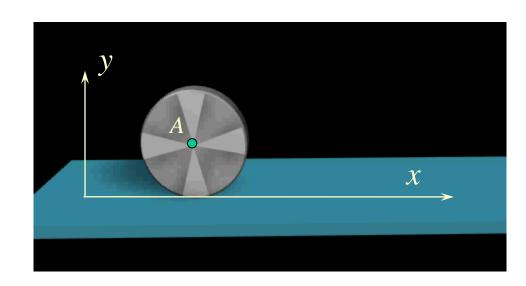






● 完整约束和非完整约束

圆轮在水平直线轨道上纯滚动



完整约束

约束方程:

$$y_A = r$$

$$\dot{x}_{A} = r\dot{\varphi}$$







完整约束和非完整约束 约束方程:

$$\dot{x} - r(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi) = 0$$

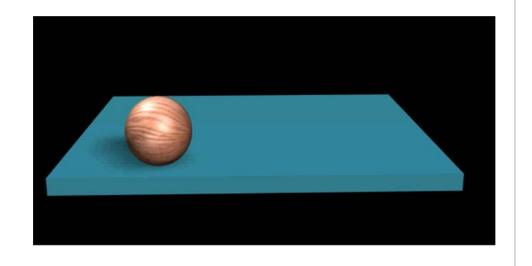
$$\dot{y} + r(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi) = 0$$

圆球在水平面上纯滚动

x, y、z为球心坐标。

 θ 、 φ 、 ψ 为欧拉角。

非完整约束









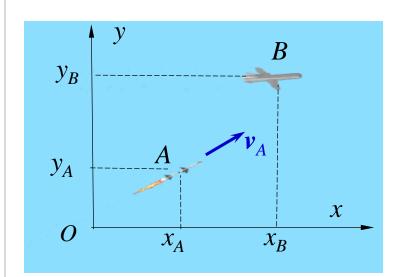
● 完整约束和非完整约束

非完整约束

导弹追踪敌机的可控系统,要求导弹A的速度 v_A 始终指向敌机B,即 v_A // AB,约束方程为:

$$\frac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

这个微分方程不可积分成 有限形式,因此,导弹所受的 约束为非完整约束。



<<) >



- 虚位移
- 虚 功
- 自由度



1. 虚位移

质点或质点系在给定瞬时不破坏约束而为约束所许可的任何微小位移,称为质点或质点系的虚位移。

真实位移 —— 实际发生的位移,用dr表示,它同时满足动力 学方程、初始条件和约束条件。

可能位移 —— 约束允许的位移,用Ar表示,它只需满足约束条件。

虚位移也可表述为:

定常约束情况下的可能位移,非定常约束情况下假想约束"冻结"时的可能位移,用等时变分符号 δr 表示。









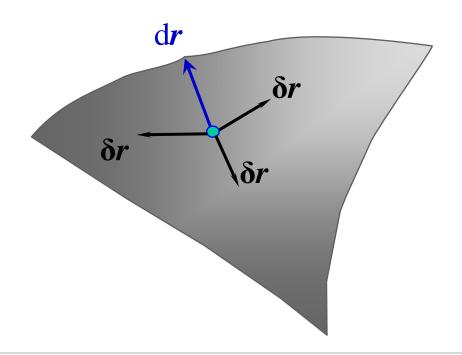
虚位移与实位移的区别:

- ●与实际发生的微小位移(简称实位移)不同,虚位移是纯粹几何概念,是假想位移,只是用来反映约束在给定瞬时的性质。它与质点系是否实际发生运动无关,不涉及运动时间、主动力和运动初始条件。
- ●虚位移仅与约束条件有关,在不破坏约束情况下,具有任意性。而实位移是在一定时间内真正实现的位移,具有确定的方向,它除了与约束条件有关外,还与时间、主动力以及运动的初始条件有关。



虚位移与实位移的区别:

例如,一个被约束在固定曲面上的质点,它的实际位移只是一个,而虚位移在它的约束面上则有任意多个。







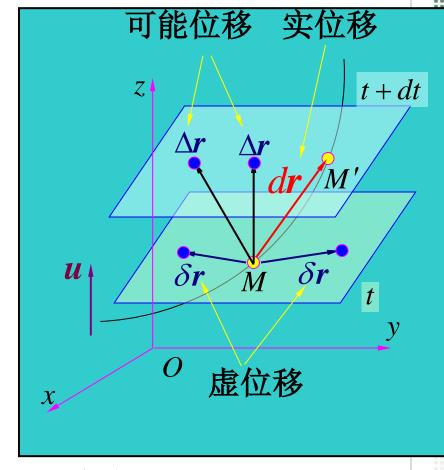




虚位移、实位移、可能位移的区别:

在定常约束的情况下,约束性质不随时间而变,因此,实位移只是所有虚位移中的一个。但对非定常约束,实位移不会和某个虚位移相重合。

约束方程 z-ut=0



虚位移是约束被"冻结"后该瞬时约束允许的无限小位移,与时间t的变化无关($\delta t = 0$)。



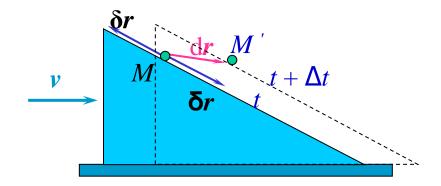






虚位移与实位移的区别:

设有质点M被约束在斜面上运动,同时此斜面本身以匀速 ν 作水平直线运动,这里,斜面构成了非定常约束。





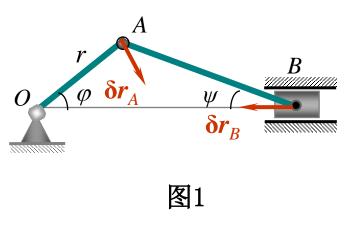




虚位移必须是约束所允许的。如何理解?

图1中机构,如果先给A 点图示虚位移,那么B 点的虚 位移就是错的,是约束不允 许的。

图2中机构,如果先给*A* 点图示虚位移,那么*B* 点的虚位移就是错的,是约束不允许的。



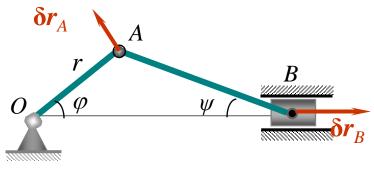


图2



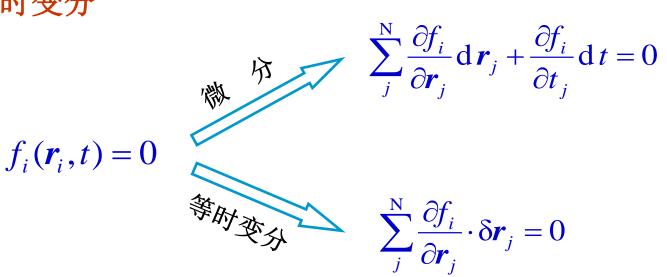


实位移——用dr表示,其投影用dx、dy、dz表示。

虚位移——用 δr 表示,其投影用 δx 、 δy 、 δz 表示。

以上 δr 和 δx 、 δy 、 δz 表示等时变分。

等时变分



等时变分运算与微分运算类似,但 $\delta t = 0$ (δ 运算就是假想约束"凝固"不动的微分运算)

将矢径进行等时变分就是虚位移,将几何约束方程 进行等时变分就可以得到虚位移之间的关系。

<<



