浙江大学 2006-2007 学年春夏学期《线性代数》期末试卷

一、填空题（24 分）

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & 2 & 3\\ 3x & x & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2x & 1\\ 0 & -1 & 3x & x\end{vmatrix}$ 中的 x^4 的系数是 <u>4</u>，x^3 的系数是 <u>-12</u>。

解 x^4的系数即为行列式对角线 4 项相乘的系数，所以系数是 4。记本题的行列式为$|a_{ij}|$，则含x^3的项为：

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-6x^3$$

和

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-6x^3$$

所以x^3的系数为-12。

2. 向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$ 的极大线性无关组是________，用此极大线性无关组表示其余的向量________。

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0 & a & 4\\ 1 & 0 & a & 1 & 5\\ 2 & a & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$，且 $r(A)=4$，则 $a=$________。

解一

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0 & a & 4\\ 1 & 0 & a & 1 & 5\\ 2 & a & 3 & 5 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_1]{\substack{R_2-2R_1\\ R_3-R_1}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4 & a-4 & -2\\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 2\\ 0 & a-2 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{25}}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 2 & a-2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -1 & 1 & a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 0 & a-6 & a-5 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 5-a & a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3R_4]{R_{34}}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 5-a & a-2\\ 0 & 0 & 3(a-6) & 3(a-5) & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-(a-6)R_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 5-a & a-2\\ 0 & 0 & 0 & (a-3)(a-5) & -(a-3)(a-5)\end{bmatrix}$$

因为$r(A)=4$，所以$a\neq 3$且$a\neq 5$。

解二 在上面的求解过程中，变换到下面矩阵时采用另一种做法。

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 0 & a-6 & a-5 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 5-a & a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 0 & a-6 & a-5 & -1\\ 0 & 0 & a-3 & 0 & a-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3-C_5}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0\\ 0 & 0 & a-5 & a-5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3\end{bmatrix}$$

因为$r(A)=4$，所以$a\neq 3$且$a\neq 5$。

解三

这是参考答案的解法

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0 & a & 4\\ 1 & 0 & a & 1 & 5\\ 2 & a & 3 & 5 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{C_4-2C_1\\ C_5-3C_1}]{\substack{C_2-C_1\\ C_3-2C_1}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -4 & a-4 & -2\\ 1 & -1 & a-2 & -1 & 2\\ 2 & a-2 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_4-C_2\\ C_5+2C_2}]{C_3-2C_5}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & a-4 & -2\\ 1 & -1 & a-6 & 0 & 0\\ 2 & a-2 & 3 & 3-a & 2a-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}C_5}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & a-4 & 1\\ 1 & -1 & a-6 & 0 & 0\\ 2 & a-2 & 3 & 3-a & 3-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3+(a-6)C_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & a-4 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & a-2 & (a-3)(a-5) & 3-a & 3-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_{23}]{\substack{C_{45}\\ C_{34}}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & a-4\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 3-a & a-2 & (a-3)(a-5) & 3-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_5+(a-4)C_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 3-a & a-2 & (a-3)(a-5) & (a-3)(a-5)\end{bmatrix}$$

因为$r(A)=4$，所以$a\neq 3$且$a\neq 5$。

4. 设 A，B 都是 3 阶矩阵，满足$E+B=AB$，且 A 的特征值为 2，3，0，则 B 的特征值是__________ 。

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}X$，它的矩阵是_________，它是______定二次型。

二、计算题

1. （10 分）计算行列式： $D=\begin{vmatrix}1 & a & b & a\\ a & 0 & a & b\\ b & a & 1 & a\\ a & b & a & 0\end{vmatrix}$

2. （16 分）设欧氏空间R^3的一组向量$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(2,-1,1)^T,\alpha_3=(-2,1,5)^T$

（1） 求证：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基；

（2） 把$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$改造成$R^3$的标准正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

（3） 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵；

（4） 向量δ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标是$(1,2,0)^T$，求向量$\delta$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的

坐标。

3. （10 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求a的值及所有公共解。

4. （10 分）设$\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，$A=\alpha\beta$，求 A 的特征值和特征向量。

解 因为$\beta\alpha=3$，$A\alpha=(\alpha\beta)\alpha=\alpha(\beta\alpha)=3\alpha$，所以 3 是$A$的特征值，$\eta_1=k_1\alpha(k_1\neq 0)$是$A$的属于特征值 3 的特征向量。又因为$r(A)=1$，则$|A|=0$，由此可知 0 是$A$的特征值，且所对应的齐次线性方程组$-AX=0$的基础解系向量个数为 2，这说明 0 是$A$的特征多项式的二重根，因此$A$的 3 个特征值为：$\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=0$。

因为

$$A=\alpha\beta=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$，解之得基础解系为

$$\eta_2=[-1,\ 2,\ 0]^{\mathrm{T}},\ \eta_3=[-1,\ 0,\ 3]^{\mathrm{T}}$$

故属于特征值 0 的特征向量为：$k_2\eta_2+k_3\eta_3$，其中k_2，k_3不同时为 0。

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$，属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(0,1,-1)^T$，求

（1） 属于特征值$\lambda_3=6$的特征向量；

（2） 矩阵 A。

三、证明题

1. 设A是n阶矩阵，满足$A^3=2E$，$B=A^2-2A+E$，求证：B可逆，并求出B^{-1}。

证明 因为$A^3=2E$，所以 $A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=E$，于是 $(A-E)^{-1}=A^2+A+E$。从而

$$B=A^2-2A+E=(A-E)^2$$

可逆，且

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (A-E)^{-1}\cdot(A-E)^{-1}=(A^2+A+E)^2 \\ &= A^4+2A^3+3A^2+2A+E \\ &= 2A+4E+3A^2+2A+E \\ &= 3A^2+4A+5E \end{aligned}$$

2．设V是欧氏空间，$\boldsymbol{\beta}$是V中的非零向量，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$是V中的s个向量，求对于任意的k，$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_k) > 0$当$i \neq j$时，$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) \leq 0$，求证：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。