期末复习题六答案

2020年1月3日 星期五　　下午11:49

1. 解: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\cdots\cdots \; R_{n-1}-R_n]{R_1-R_2 \; R_2-R_3} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{C_n-C_{n-1}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & x & x & \cdots & x & 1-x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按最后一列展开}} (1-x)^n - x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots x & x \end{vmatrix}$

(i) 当 $x=0$ 时, $|D|=1$

(ii) 当 $x\neq 0$ 时, $|D| = (1-x)^n - x^2 \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (1-x)^n - x^2\cdot(-x)^{n-2} = (1-x)^n + (-1)^{n+1}\cdot x^n$

(利用 $R_i = R_i - R_{n-1}$, $i\in[1,n-2]$)

且该式当 $x=0$ 时, $|D|=1$ 也可以满足条件

综上, $|D| = (1-x)^n + (-1)^{n+1}\cdot x^n$

2. $\because AX - X = A^2 - E \Rightarrow (A-E)X = A^2 - E$, 且 $A+E$ 为可逆矩阵

$\Rightarrow X = A+E$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. 解: 由于 $\operatorname{rank} A = 3$, 所以线性方程组 $Ax=b$ 的对应齐次线性方程组的基础解系含有一个解向量

令一方面 $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = (1,1,2,3)^T$

$\beta_2 = \dfrac{\alpha_1+2\alpha_3}{3} = (0,1,0,2)^T$ 为 $Ax=b$ 的解

综上 $x = \beta_1 + k(\beta_1-\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数

4. (1) $\forall k_1,k_2\in P$，若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\theta$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\-k_1+3k_2=0\\2k_1+k_2=0\\4k_1+2k_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\end{cases}$$

故综上 α_1,α_2 线性无关

(2) $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

综上 $\dim V=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为 V 的一组基

(3) 从 $\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 中可得出 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为一组基

且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$

(4) 因为 $(\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

所以由基(I)到基(II)的过渡矩阵 $M=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

5. 解：因矩阵 A 是实对称矩阵，因此，题目所要求的矩阵 P 及正交阵 U 均存在

(实际上，对矩阵 P 进行标准正交化即可得到 U)

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

$\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$

λ_1 和 λ_2 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-2,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,0,1)^T$

λ_3 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(1,2,-2)$

则可知令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则 P 可逆，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$

则可知令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则 P 可逆，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$

对 P 中向量进行标准正交化，$\beta_1=\alpha_1$，

$\beta_2=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$

$\beta_3=\alpha_3$

$$U=\left(\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\frac{\beta_3}{|\beta_3|}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\\ 0&\frac{\sqrt5}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则 U 正交，且 $U^TAU=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$

6. 解：二次型 f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&a&\cdots&a&a\\a&1&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{bmatrix}$，特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&\cdots&-a&-a\\-a&\lambda-1&\cdots&-a&-a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-a&-a&\cdots&\lambda-1&-a\\-a&-a&\cdots&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1+a)^{n-1}[\lambda-1-(n-1)a]$$

则矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)a$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1-a$

下面分几种情形进行讨论

1. 当 $a=1$ 时，矩阵 A 的特征值是 $n-1$ 个 0 和 1 个特征值 $1+(n-1)a>0$，所以该二次型的秩为 $\cancel{n-1}$ 1，正惯性指数为 1，负惯性指数为 0，符号差为 1

2. 当 $a=-\frac{1}{n-1}$，矩阵 A 的特征值为 1 个 0 和 $n-1$ 个特征值 $1-a>0$，所以该二次型的秩是 $n-1$，正惯性指数为 $n-1$，负惯性指数为 0，符号差为 $n-1$

3. 当 $a\neq1,-\frac{1}{n-1}$ 时，则 A 的所有特征值均为非零，所以秩为 n，它的正负惯性指数要分几个区间讨论

(i) 当 $a>1$ 时，则 A 的特征值 $1+(n-1)a>0$，但 $1-a<0$，所以该二次型的秩为 n，正惯性指数是 1，负惯性指数是 $n-1$，符号差为 $2-n$

(ii) 当 $-\frac{1}{n-1}<a<1$ 时，矩阵 A 的特征值全部大于零，所以该二次型的秩

(ii) 当 $-\frac{1}{n-1}<a<1$ 时,矩阵A的特征值全部大于零,所以该二次型的秩为n,正惯性指数为n,负惯性指数为0,符号差为n

(iii) 当 $a<-\frac{1}{n-1}$ 时,则A的特征值 $1+(n-1)a<0$,其他(n-1)个特征值 $1-a>0$,所以该二次型的秩为n,正惯性指数n-1,负惯性指数为1,符号差为n-2

7. 因为A的n个特征值 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 互不相同,故存在n阶可逆矩阵P,使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

又因为 $AB=BA$

$$P^{-1}ABP=P^{-1}APP^{-1}BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}BP$$

$$P^{-1}BAP=P^{-1}BPP^{-1}AP=P^{-1}BP\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_i C_{ij}=\lambda_j C_{ij}\Rightarrow(\lambda_i-\lambda_j)C_{ij}=0\Rightarrow C_{ij}=0\ (i\neq j)$$

$$\Rightarrow P^{-1}BP=\begin{pmatrix}C_{11} & & \\ & C_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & C_{nn}\end{pmatrix}$$

8. 设原题中的方阵为A,其阶数为n

则方阵A可相似对角化 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

(i) 当方阵A可相似对角化 $\Rightarrow\exists$ 可逆矩阵P,使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \ddots\end{pmatrix}$

(i) 当方阵A可相似对角化 $\Rightarrow \exists$ 可逆矩阵P, s.t $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

则可知P的n个列向量为A的特征向量,由于P可逆$\Rightarrow$这n个特征向量为线性无关$\Rightarrow A$有n个线性无关的特征向量

(ii) 当A有n个线性无关的特征向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$

$\Rightarrow$ 这n个特征向量对应的特征值为$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$,由于$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关,故$P$可逆

且 $AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A$可相似对角化

综上,原命题得证