期末复习题七答案

2020年1月4日 星期六　　上午1:37

1. $\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \cdots & a^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \cdots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ R_n-aR_{n-1}}]{\substack{R_2-aR_1 \\ R_3-aR_2}} \begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ ax & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ax & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots ax & -x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{~~对最后一列~~}} (1-x)\cdot(-x)^{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot a^{n-1}\cdot(ax)^{n-1}$

递推

$= (-1)^{n+1}\cdot(x^{n-1}-x^n+a^{2n-2}\cdot x^{n-1})$

$= (-1)^{n+1}\cdot((1+a^{2n-2})\underline{x^{n-1}-x^n})$

或：解这个特征方程，发现原矩阵秩=1，只要解出最后一个特征根就行

2. (1) $|A|=-2 \Rightarrow A$可逆 $\Rightarrow AA^*=-2E \Rightarrow |A|\cdot|A^*|=-8 \Rightarrow |A^*|=4$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{A^*}{-2}$

则 $\left|\left(\frac{1}{12}A\right)^{-1}+(3A)^*\right| = |12A^{-1}+9A^*|$

$= |3A^*| = 27\cdot 4 = 108$

(2) $A^2+3A+E=0 \Rightarrow A^2+3A+2E=E \Rightarrow (A+2E)(A+E)=E$

则 $A+2E$可逆，且$(A+2E)^{-1}=A+E$

3. 由于 $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$

故方程组线性无关的解个数至多有2个

而 $\alpha_1=(2,\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$，$\alpha_2=(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-1)^T$

故通解可表为 $\alpha_1+k(\alpha_1-\alpha_2)=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中$k$为任意常数

4. (1) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\cdot M$

则 $M=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -7 & -5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

(2) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\cdot N$

$$N=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^{-1}\cdot(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}8&5&4&8\\1&4&2&2\\2&2&4&3\\-7&-5&-4&-7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&5&4&8\\1&4&2&2\\2&2&4&3\\-7&-5&-4&-7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&1&2&6\\-1&2&-2&-1\\9&7&8&10\\-7&-5&-4&-7\end{pmatrix}$$

(3) 设其坐标为α，向量为β

则$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\cdot\alpha=\beta$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}8&5&4&8\\1&4&2&2\\2&2&4&3\\-7&-5&-4&-7\end{pmatrix}\alpha=\alpha$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}7&5&4&8\\1&3&2&2\\2&2&3&3\\-7&-5&-4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+R_1}\begin{pmatrix}7&5&4&8\\1&3&2&2\\2&2&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\alpha=\left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},1\right)^T$$

综上 $\alpha=\left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},1\right)^T$

5. 由于相似，故 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$(\lambda+2)\left((\lambda-a)(\lambda-b)-2\right)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-c)$ $c=-2$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\\c=-2\end{cases}$$

可解得 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$ (省略计算)

6. 本题推荐使用正常做法

而这题我来个非常规做法

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+6x_2x_3$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+6x_2x_3$$
$$\le 2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+3x_2^2+3x_3^2$$
$$\le 2x_1^2+6x_2^2+6x_3^2$$
$$\le 6$$

当且仅当 $x_1=0$ 且 $x_2=x_3$ 且 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时取等

综上 $x_1=0,\ x_2=x_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取最大值

此时 $f(x_1,x_2,x_3)=6$

7. 设这2015个向量为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{2015}$ 且2015个正数分别为 $k_1,k_2\cdots k_{2015}$

则 $\alpha_i=k_i\left(\sum_{j=1}^{2015}\alpha_j-\alpha_i\right)$

$\Rightarrow \alpha_i(1+k_i)=k_i\left(\sum_{j=1}^{2015}\alpha_j\right)$

则可知这2015个向量均同向

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2015}\alpha_i=\sum_{j=1}^{2015}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{2015}\frac{k_i}{1+k_i}\right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2015}\frac{k_i}{1+k_i}=1$

且 $\sum_{i=1}^{2015}\alpha_i=\alpha_t\frac{1+k_t}{k_t}$（其中 $t\in[1,2015]$）

8. (1) 考虑 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$\Rightarrow (-1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|-A|=(-1)^n\cdot|A|$

故当 n 为偶数时，$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i<0\Rightarrow\lambda_i$ 中有正有负

(2) 当 n 为奇数时，$(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=(-1)^n\cdot|A|\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\lambda_i<0$

$\Rightarrow \lambda_i$ 中~~必~~有负值

综上，原命题得证