函数展开成幂级数

由于幂级数在收敛域内确定了一个和函数，因此我们就有可能利用幂级数来表示函数。如果一个函数已经表示为幂级数，那末该函数的导数、积分等问题就迎刃而解。

一、泰勒级数

上节例题 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)\quad(-1<x\le 1)$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 存在幂级数在其收敛域内以$f(x)$为和函数

问题: 1.如果能展开, a_n 是什么?

2.展开式是否唯一?

3.在什么条件下才能展开成幂级数?

定理1　如果函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数，且在 $U_\delta(x_0)$ 内能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

则其系数 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

且展开式是唯一的.

证明 $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在 $u(x_0)$ 内收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导任意次,得

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x - x_0) + \cdots$$

令 $x = x_0$, 即得

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$ 泰勒系数

泰勒系数是唯一的, $\therefore f(x)$的展开式是唯一的.

定义　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处任意阶可导, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的麦克劳林级数.

问题　$$f(x) \underset{==}{?} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

泰勒级数在收敛区间是否收敛于 $f(x)$? 不一定.

例如 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$点任意可导, 且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)$的麦氏级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$

该级数在$(-\infty,+\infty)$内和函数$s(x)\equiv 0.$

除 $x=0$外, $f(x)$的麦氏级数处处不收敛于$f(x)$.

定理 2 $f(x)$在点x_0的泰勒级数，在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x)\Leftrightarrow$在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

证明 必要性 设$f(x)$能展开为泰勒级数，

$$\because\ f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n(x)$$

$$\therefore R_n(x)=f(x)-s_{n+1}(x),\quad \because \lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=f(x)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=0;$$

充分性 $\because f(x)-s_{n+1}(x)=R_n(x),$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=f(x),$

$\therefore f(x)$的泰勒级数收敛于 $f(x)$.

定理 3 设 $f(x)$在$U(x_0)$上有定义，$\exists M>0$，对 $\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$，恒有 $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则 $f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内可展开成点x_0的泰勒级数.

证明

$$\because \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le M\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$x \in (x_0-R, x_0+R)$

$\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}$ 在$(-\infty,+\infty)$收敛,

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 故 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$,

$x \in (x_0-R, x_0+R)$

$\therefore$ 可展成点x_0的泰勒级数.

二、函数展开成幂级数

1. 直接法(泰勒级数法)

步骤: (1) 求 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 或 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$,

则级数在收敛区间内收 敛于 $f(x)$.

例1 将$f(x)=e^x$展开成幂级数.

解 $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1.$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$e^x \leftrightarrow 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$\forall M>0$, 在$[-M,M]$上 $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le e^M$

$$\therefore e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

由于M的任意性, 即得

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例2 将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

解 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2}),\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$

$\therefore\ f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n,\ (n=0,1,2,\cdots)$

且$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin(x+\frac{n\pi}{2})\right|\le 1 \quad x\in(-\infty,+\infty)$

$$\therefore \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

例3 将$f(x)=(1+x)^{\alpha}(\alpha\in R)$展开成$x$的幂级数.

解 $\because f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,\qquad \therefore R=1,$$

在(−1,1)内,若设

$$s(x)=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$s'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$xs'(x)=\alpha x+\alpha(\alpha-1)x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots$$

利用 $\dfrac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}+\dfrac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

$$\therefore (1+x)s'(x)$$

$$=\alpha+\alpha^2 x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha^2(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1}+\cdots$$

$$=\alpha s(x)$$

$$\therefore \frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{\alpha}{1+x},\quad 且\ s(0)=1.$$

两边积分 $\displaystyle\int_0^x \frac{s'(x)}{s(x)}dx=\int_0^x \frac{\alpha}{1+x}dx,\qquad x\in(-1,1)$

得 $\ln s(x)-\ln s(0)=\alpha\ln(1+x),$

即 $\ln s(x)=\ln(1+x)^{\alpha}$,

$\therefore s(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x\in(-1,1)$

$\therefore$ $(1+x)^{\alpha}$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

牛顿二项式展开式

注意: 在$x=\pm1$处收敛性与α的取值有关.

$\alpha\le-1$ 收敛区间为$(-1,1)$;

$-1<\alpha<1$ 收敛区间为$(-1,1]$;

$\alpha>1$ 收敛区间为$[-1,1]$.

当$\alpha=-1,\pm\frac{1}{2}$时，有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1,1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$

$$[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$

$$[-1,1]$$

双阶乘

2. 间接法

根据唯一性, 利用常见展开式, 通过**变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分,复合**等方法,求展开式.

例如 $\cos x = (\sin x)'$

$$\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$x \in [-1,1]$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$x \in (-1,1]$$

例4 将$f(x) = \dfrac{x-1}{4-x}$在$x=1$处展开成泰勒级数(展开成$x-1$的幂级数)并求$f^{(n)}(1)$.

解 $\because \dfrac{1}{4-x}=\dfrac{1}{3-(x-1)}=\dfrac{1}{3(1-\dfrac{x-1}{3})},$

$$=\frac{1}{3}[1+\frac{x-1}{3}+(\frac{x-1}{3})^2+\cdots+(\frac{x-1}{3})^n+\cdots]$$

$$|x-1|<3$$

$$\therefore \frac{x-1}{4-x}=(x-1)\frac{1}{4-x}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(x-1)^3}{3^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots$$

$$|x-1|<3$$

于是 $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=\dfrac{1}{3^n}$, 故 $f^{(n)}(1)=\dfrac{n!}{3^n}$.

三、小结

1.如何求函数的泰勒级数;

2.泰勒级数收敛于函数的条件;

3.函数展开成泰勒级数的方法.

思考题

什么叫幂级数的间接展开法?

思考题解答

　　从已知的展开式出发, 通过变量代换、四则运算或逐项求导、逐项积分等办法,求出给定函数展开式的方法称之.

练 习 题

一、将下列函数展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间：

1、a^x；　　　　2、$(1+x)\ln(1+x)$；

3、$\arcsin x$；　　　　4、$\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

二、将函数$f(x)=\sqrt{x^3}$展开成$(x-1)$的幂级数，并求展开式成立的区间 .

三、将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开成$(x+4)$的幂级数 .

四、将级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$的和函数展开成$(x-1)$的幂级数 .

练习题答案

一、1、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$；

2、$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1} \quad (-1 < x \le 1)$；

3、$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!}{(n!)^2(2n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1)$；

4、$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1} \quad (-1,1)$.

二、$1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}(\frac{x-1}{2})^{n+2}$

$(0 \le x \le 2)$.

三、$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n \quad (-6,-2).$

四、$\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n}$

$+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n+1} \quad (-\infty,+\infty).$