§14-2 虚位移与虚功·自由度

在应用虚位移原理过程中，求出系统各虚位移间的关系是关键，常用方法有：

(1) 几何法　在定常约束的情况下，实位移是虚位移的一个，可用求实位移的方法求虚位移间的关系，特别是实位移正比于速度，所以可通过各点速度间的关系来确定对应点的虚位移关系。

如平移刚体上各点的虚位移相等，定轴转动刚体上各点虚位移与其到转轴的距离成正比；平面运动刚体则一般可用速度投影定理和速度瞬心法求两点虚位移间关系等。

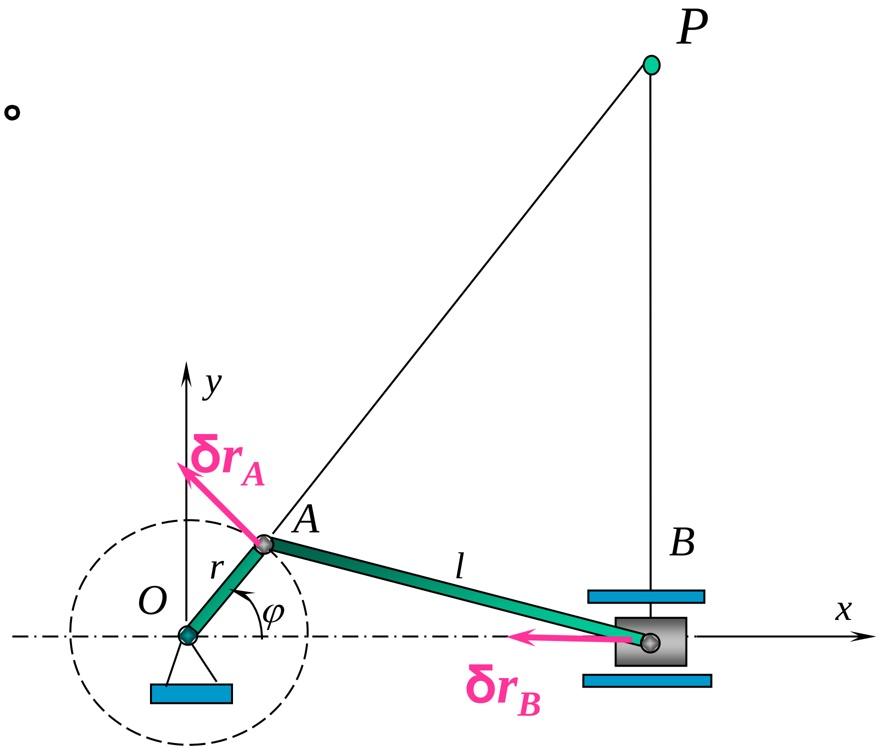
§ 14-2 虚位移与虚功·自由度

以图曲柄连杆机构为例，由于连杆AB可作平面运动，其速度瞬心为点P。

虚位移$\delta \boldsymbol{r}_A$与$\delta \boldsymbol{r}_B$方向如图所示。

所以虚位移$\delta \boldsymbol{r}_A$与$\delta \boldsymbol{r}_B$大小间关系为

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B}=\frac{PA}{PB}$$



§14-2 虚位移与虚功·自由度

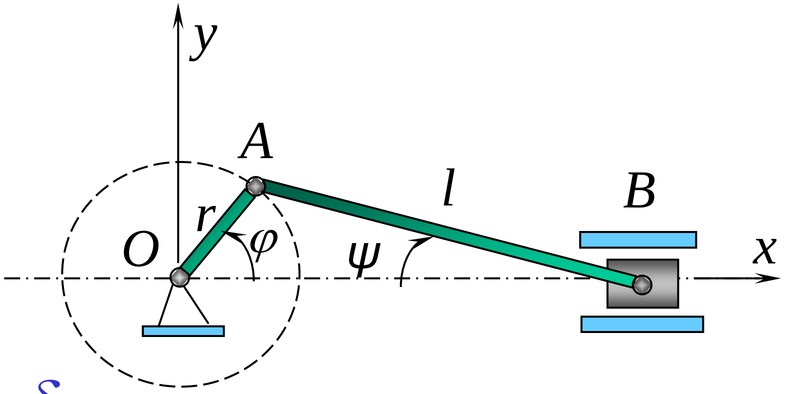
(2) 解析法　对于较复杂的系统，各点的虚位移间关系比较复杂，这时

- 可建立一固定直角坐标系，将系统放在一般位置，写出各点的直角坐标（表示为某些独立参变量的函数）；
- 然后进行变分运算，求及各点虚位移的投影。这种确定虚位移间关系的方法称为解析法。

或选取适当的固定坐标系，写出约束方程并进行变分，也可求得各点的虚位移间的关系。

§15-2 虚位移与虚功·自由度

例如在图中，设曲柄长$OA=r$，连杆长$AB=l$。则点A和B的坐标为



$$x_A = r\cos\varphi, \quad y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

求变分，有

$$\delta x_A = -r\sin\varphi\,\delta\varphi, \quad \delta y_A = r\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\,\delta\varphi - l\sin\psi\,\delta\psi$$

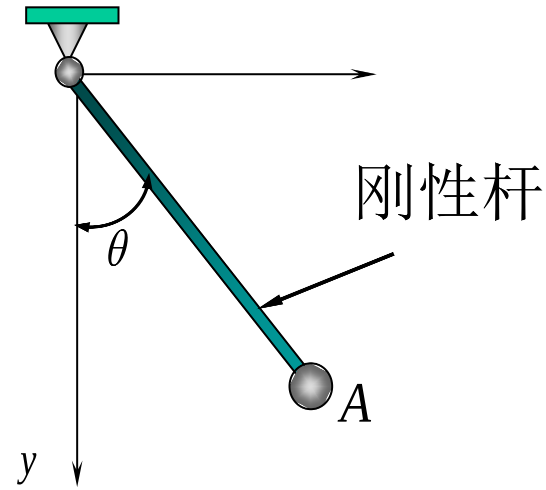
考虑到有关系，$r\sin\varphi = l\sin\psi$，所以有

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\,\delta\varphi - r\cos\varphi\tan\psi\,\delta\varphi$$

上面式子给出了A、B 两点虚位移的投影δx_A 、δy_A 、δx_B 与虚位移$\delta\varphi$的关系。

§ 15-2 虚位移与虚功·自由度

如图所示单摆，约束方程为



$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

等时变分

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0$$

§ 15-2 虚位移与虚功·自由度

2. 虚功·理想约束

力在虚位移上所作的功称为**虚功**，记为δW。因为虚位移是假想位移，所以虚功也是假想的概念。

因为虚位移是微小量，所以虚功计算与元功计算类似。如力$\boldsymbol{F}$在虚位移$\delta\boldsymbol{r}$上所作的虚功为

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$$

$$\delta W = M \cdot \delta \varphi$$

一般来说，主动力和约束力都可以作虚功。

§15-2 虚位移与虚功·自由度

如果质点系所受的约束力在任意虚位移上所作虚功之和恒等于零，则这样的约束称为**理想约束**。

故理想约束条件可表示成

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

式中$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$是作用在第$i$个质点上的约束力。

§15-2 虚位移与虚功·自由度

动能定理里曾列举了约束力在质点系实位移上元功之和恒等于零的各种情况。由于在定常约束情况下，实位移可以从虚位移转化而来，彼此具有相同的几何性质，所以，那里所讲的各种情况也属于理想约束。

这些约束包括固定的或运动着的光滑支承面、铰链、始终拉紧而不可伸长的软绳、刚性连接，以及作纯滚动刚体所在的支承面等。理想约束是大量实际情况的理论模型。

§15-2 虚位移与虚功·自由度

3. 自由度

一般情况，一个由n质点组成的质点系在空间的位形用直角坐标来确定需要$3n$个坐标，即x_i、y_i、z_i（i=1，2, ..., n）。如果系统受到s个完整约束，其约束方程为

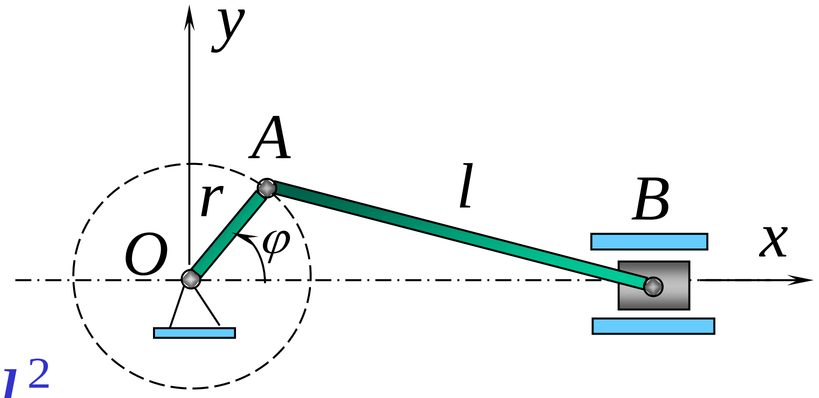
$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\ x_n,\ y_n,\ z_n;\ t)=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

则系统的$3n$个坐标并不完全独立，只有$k=3n-s$个坐标是独立的（余下的s个由约束方程确定），故确定该质点系的位形只需$3n-s$个坐标，我们说该质点系有$3n-s$个自由度。因此，**确定受完整约束的质点系位形的独立坐标数目称为系统的自由度**（对非完整约束，独立参量数和自由度不同！）。

一般质点的位置需用3个坐标，刚体的位置需用6个坐标，物体系统包含n_1质点和n_2刚体，受s个约束，其自由度为 $k=3n_1+6n_2-s$

§ 15-2 虚位移与虚功·自由度

例如，曲柄连杆机构：



这个质点系的约束方程可表示成

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

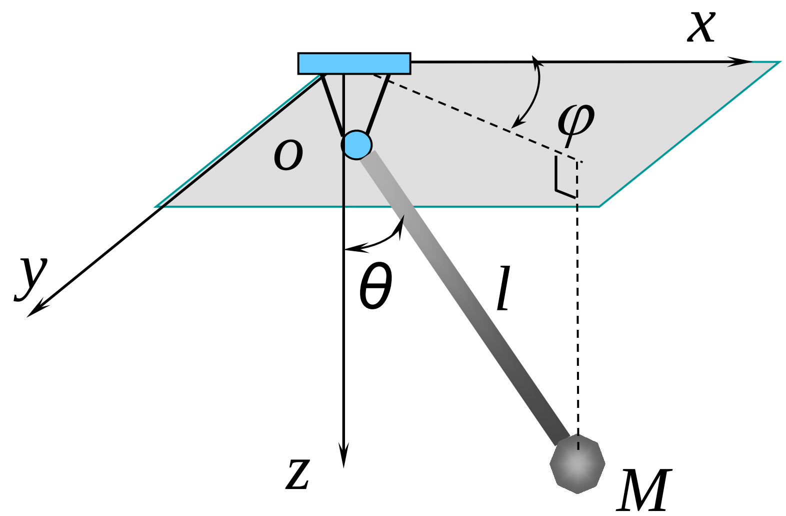
$$y_B = 0$$

式中x_A、y_A和x_B、y_B分别为A、B两点的直角坐标。上述方程表明这四个坐标并非都独立。可以消去其中的某三个，从而只剩下一个独立坐标，这一坐标完全确定了此质点系的位置。因此该质点系有1个自由度。

§ 15-2 虚位移与虚功·自由度

例如，球面摆:

点M被限制在以固定点O为球心、l为半径的球面上运动。



如取固定参考系$Oxyz$，则球面摆的约束方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$

质点M的自由度 ?

§15-3 虚位移原理

- 虚位移原理
- 应用虚位移原理解题的步骤

§15-3 虚位移原理

虚位移原理（又称为虚功原理，principle of virtual work，拉格朗日1764年提出）

具有双面、定常、理想约束的静止质点系，其平衡的必要和充分条件是：所有主动力在任何虚位移上的虚功之和等于零。

表达式为

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

在实际应用时，常将式写成解析式，得相应的平衡条件

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0$$

上式称为**静力学普遍方程或虚功方程**。

<< >>

§15-3 虚位移原理

证明:

➢ **必要性证明:** 由刚体静力学知，此时作用在系统内任一质点A_i上的主动力$\boldsymbol{F}_i$和约束力$\boldsymbol{F}_{Ni}$之矢量和必等于零，即满足条件

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}=\boldsymbol{0}$$

对每个质点选取虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$，则对应的虚功之和等于零，即

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

对全体i求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

由于理想约束的假设 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，所以原式成立。

§15-3　虚位移原理

➢ **充分性证明：**采用反证法。设在条件下质点系并不平衡，则必有质点（至少一个）上作用有非零的合力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$，由于运动是从静止开始的，故它的实位移$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$必与$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}$同向，所以$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}$作做正功，即

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0$$

对全系统求虚功和，并考虑到理想约束条件，将得到

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0$$

在定常约束条件下，可取与实位移$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$相重合的虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

它和原设条件式矛盾，可见，质点系中没有任何质点能在此条件下进入运动，故充分性得证。

§15-3　虚位移原理

应用虚位移原理解题的步骤

（1）确定研究对象：常选择整体为研究对象。

（2）　约束分析：是否理想约束？（注：虽然该原理的应用条件是理想约束，但也可以用于有摩擦的情况，只要把摩擦力当作主动力，在虚功方程中计入摩擦力所做的虚功即可。）

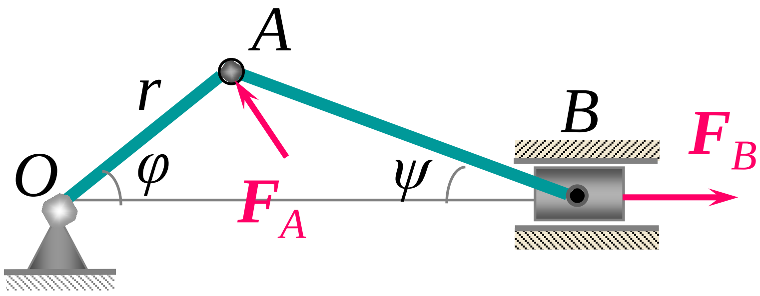
（3）　受力分析：

- 求主动力之间的关系或平衡位置时：只画主动力。
- 求约束力时：解除约束，视约束力为主动力。

（4）　给出系统一组虚位移，列出虚功方程。

（5）找出虚位移之间的关系，代入虚功方程并求解。

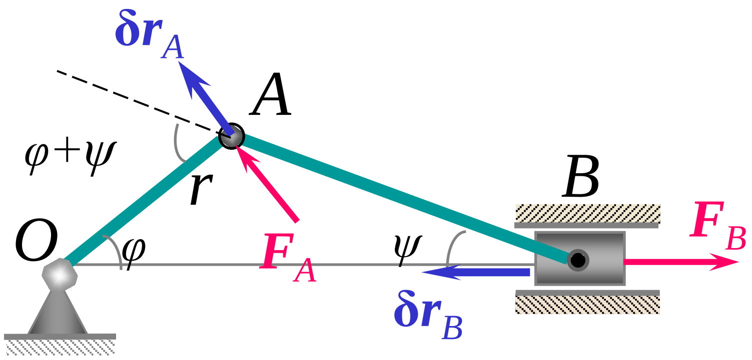
例题15-1 曲柄连杆机构静止在如图所示位置上，已知角度φ和ψ。不计机构自身重量，试求平衡时主动力 $\boldsymbol{F}_A$（垂直于OA）和 $\boldsymbol{F}_B$ 的大小应满足的关系。



§15-3 虚位移原理

解： 几何法

以 $\delta \boldsymbol{r}_A$ 和 $\delta \boldsymbol{r}_B$ 分别代表主动力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 作用点的虚位移，如图所示。



根据虚位移原理的平衡方程，有

$$\sum \delta W = F_A \delta r_A - F_B \delta r_B = 0$$

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\delta r_A}{\delta r_B}$$

因 AB 是刚杆，两端位移在 AB 上的投影应相等，即

$$\delta r_A \sin(\varphi + \psi) = \delta r_B \cos \psi$$

可见 A、B 两点的虚位移大小之比等于

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{\cos \psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

从而解得

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{\cos \psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

§ 15-3　虚位移原理

解析法

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0$$

根据虚位移原理的平衡方程，有（建立坐标轴，与坐标轴正向相反的力取负号）

$$\sum\delta W=F_{Ax}\delta x_A+F_{Ay}\delta y_A+F_{Bx}\delta x_B+F_{By}\delta y_B=0$$

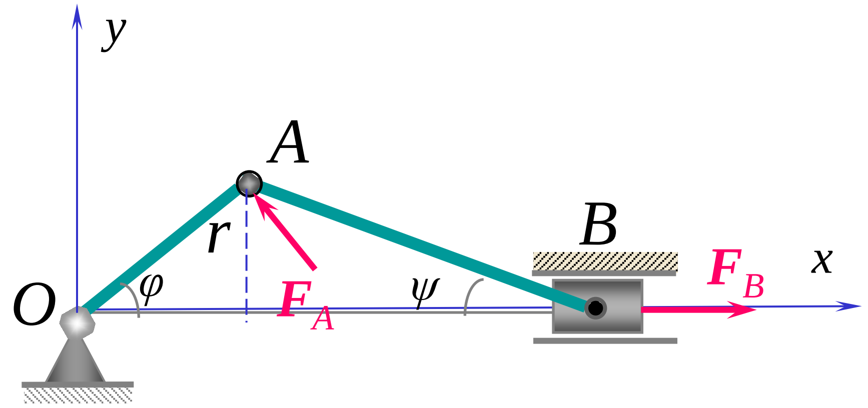
$$\sum\delta W=-F_A\sin\varphi\,\delta x_A+F_A\cos\varphi\,\delta y_A+F_B\delta x_B=0$$

点A和B的坐标为

$$x_A=r\cos\varphi$$

$$y_A=r\sin\varphi$$

$$x_B=r\cos\varphi+l\cos\psi$$

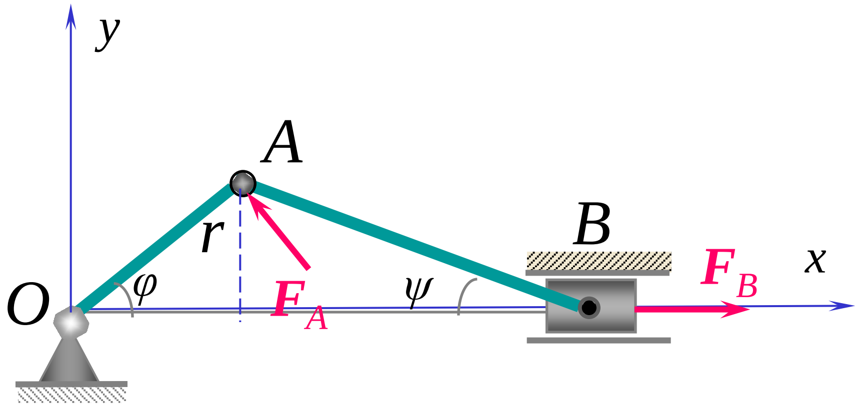


§ 15-3 虚位移原理

求变分，有 $\delta x_A = -r\sin\varphi\,\delta\varphi$

$$\delta y_A = r\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\,\delta\varphi - l\sin\psi\,\delta\psi$$



注意：系统只有一个自由度

考虑到关系 $r\sin\varphi = l\sin\psi$ ，所以有 $r\cos\varphi\,\delta\varphi = l\cos\psi\,\delta\psi$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\,\delta\varphi - r\cos\varphi\tan\psi\,\delta\varphi$$

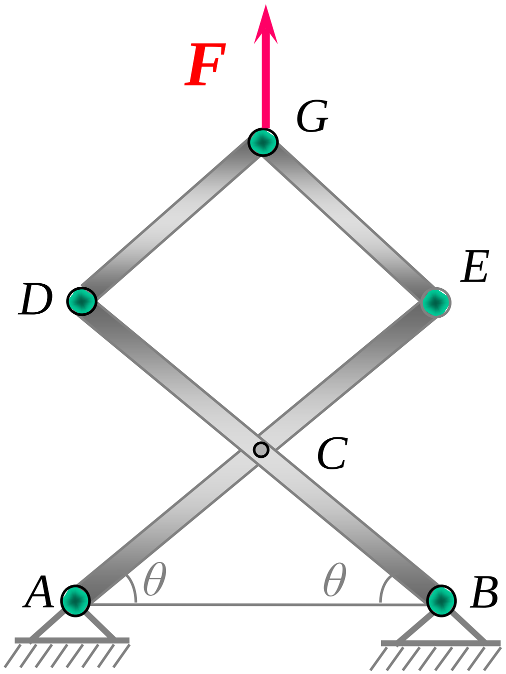
代入 $\sum\delta W = -F_A\sin\varphi\,\delta x_A + F_A\cos\varphi\,\delta y_A + F_B\delta x_B = 0$

可得 $\dfrac{F_B}{F_A} = \dfrac{\cos\ \psi}{\sin\,(\varphi+\psi)}$

可见：几何法直观，解析法通用

<< >>

例题15-2 已知如图所示结构，各杆都以光滑铰链连接，且有$AC=CE=BC=CD=DG=GE=l$。在点G作用一铅直方向的力$\boldsymbol{F}$，试求支座B的水平约束力$\boldsymbol{F}_{Bx}$。



§ 15-3　虚位移原理

解：

此题可用虚位移原理来求解。用约束力F_{Bx}代替水平约束，并将F_{Bx}当作主动力。

设B，G二点沿x、y的虚位移为δx_B和δy_G，根据虚位移原理，有

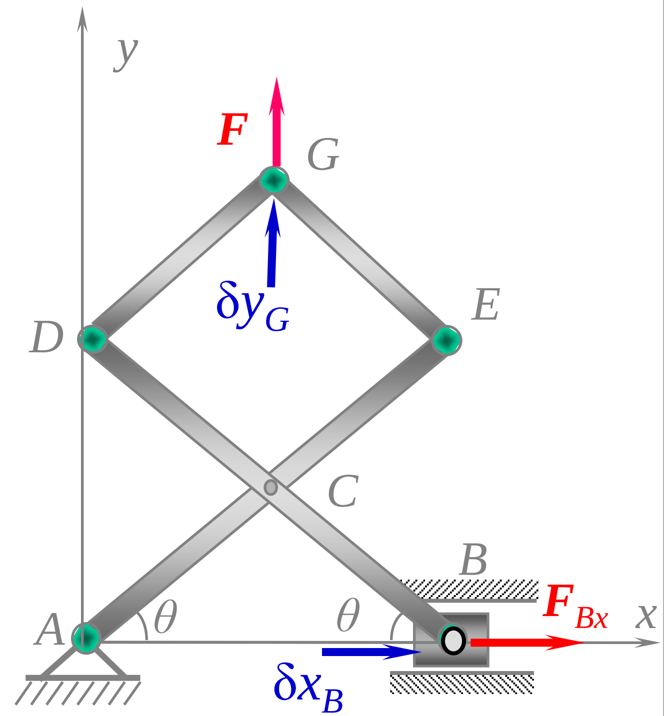
$$F_{Gy}\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

G、B点坐标 $y_G = 3l\sin\theta$, $x_B = 2l\cos\theta$

其变分为

$$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta \qquad \text{(b)}$$



§ 15-3 虚位移原理

$$F_{Gy}\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

其变分为

$$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

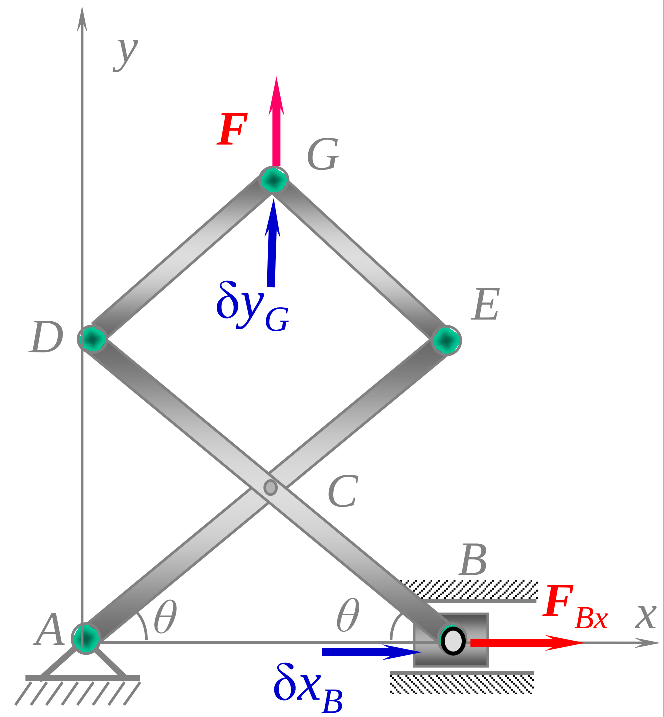
$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta \qquad \text{(b)}$$

代入式（a），得

$$F\times 3l\cos\theta\,\delta\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

$$(F\times 3l\cos\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta)\,\delta\theta = 0$$

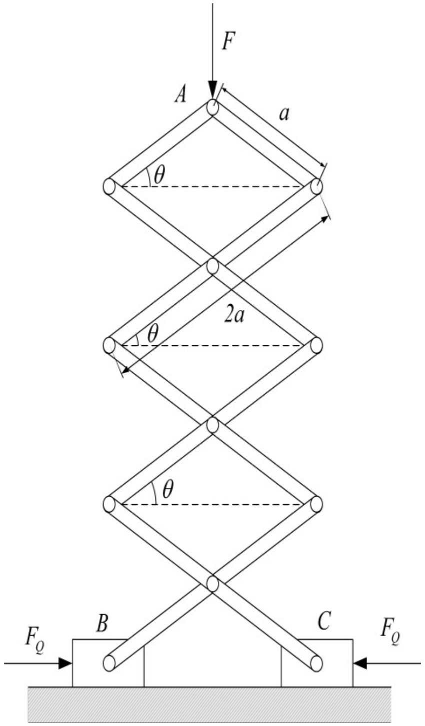
因$\delta\theta \neq 0$，解得 $F_{Bx} = \dfrac{3}{2}F\cot\theta$



虚功原理在惰钳（lazy tongs）受力分析中的应用。在生活中惰钳有多种应用，它延伸了手的作用距离。惰钳机构一般由六根长杆和两根短杆组成，长杆长2a，短杆长a，杆与杆之间用铰链相连。

如图，若惰钳顶部受到大小为F力的作用，下部受力大小为F_Q，图中θ大小已知，且不计摩擦。则：F_Q的大小为多少时能使系统处于平衡状态

惰钳铆钉锤



解：该问题的自由度为1，取θ为广义坐标。图中A、B、C各点的坐标和虚位移可表示为

$$\begin{cases} y_A = 7asin\theta, & \delta y_A = 7acos\theta\delta\theta \\ x_B = -acos\theta, & \delta x_B = asin\theta\delta\theta \\ x_C = acos\theta, & \delta x_C = -asin\theta\delta\theta \end{cases}$$

由虚功原理，

$$\sum \delta W_F = -F\delta y_A + F_Q\delta x_B - F_Q\delta x_C$$

$$= \left(-7Facos\theta + 2F_Q asin\theta\right)\delta\theta = 0$$

由上式可得本问题的解

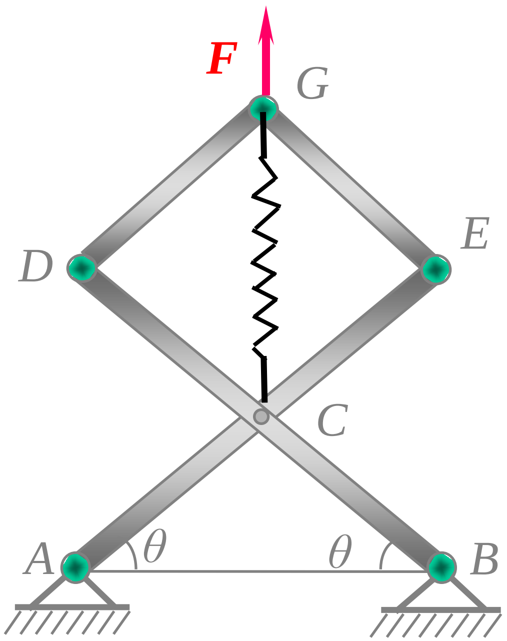
$$F_Q = \frac{7}{2}Fcot\theta$$

上面的分析适用于由六根长杆组成的惰钳，对于由n组长杆组成的惰钳，问题的解有如下推广形式：

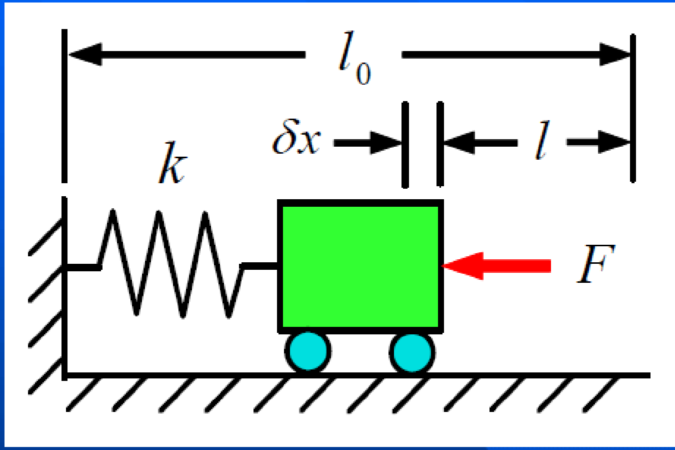
$$F_Q = \frac{2n+1}{2} F cot$$

讨论1

如果此题在G、C两点之间再连上一根弹簧，求支座B的水平约束力F_{Bx}。



值得注意的是关于弹簧的虚功，考虑如下平衡问题，弹簧的原长为l_0，被压缩长度为l，求压缩力F的虚功。



压缩力F做虚功为

$$W_F = -F\delta x$$

弹簧力做虚功为

$$W_k = \int_l^{l+\delta x} kxdx = \frac{1}{2}k[(l+\delta x)^2 - l^2]$$

$$= \frac{1}{2}k(\delta x)^2 + kl\delta x = kl\delta x = F\delta x$$

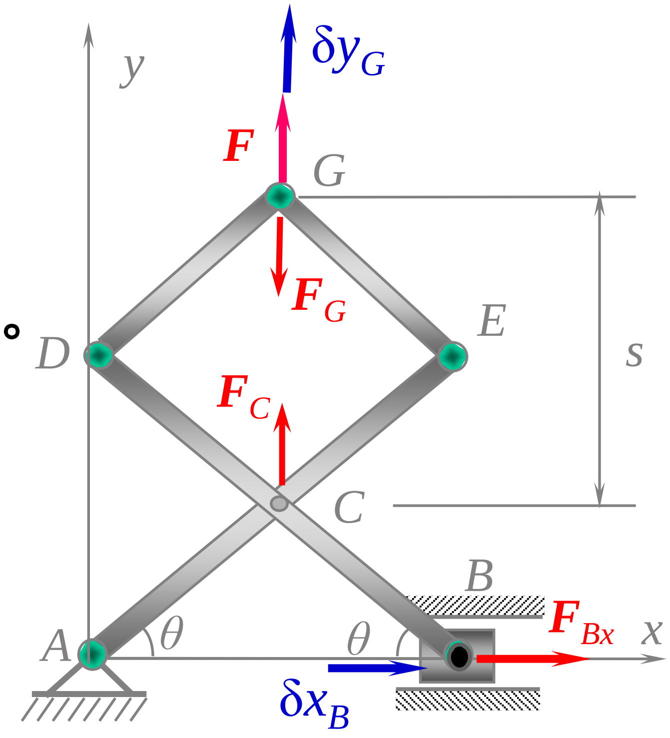
事实上，对于任意随位移x变化的力$F=f(x)$，虚功都等于 $F\delta x$

<< >>

§15-3 虚位移原理

解：

设弹簧刚度为k，且在图示瞬时弹簧已有伸长量δ_0。此弹簧对G、C两点的拉力F_G、F_C为系统内力（非刚体情况，内力要做功），如图所示。



根据虚位移原理，有

$$F\delta y_G - F_G\delta y_G + F_C\delta y_C + F_{Bx}\delta x_B = 0$$

由于 $y_G = 3l\sin\theta,\quad y_C = l\sin\theta$

$x_B = 2l\cos\theta$

其变分为 $\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta,\quad \delta y_C = l\cos\theta\delta\theta$

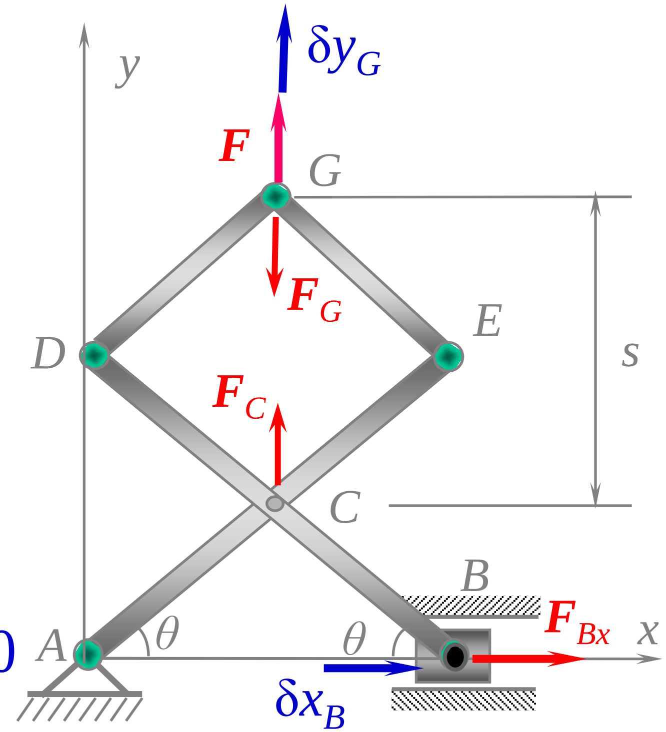
$\delta x_B = -2l\sin\theta\,\delta\theta$

§ 15-3　虚位移原理

$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$，$\delta y_C = l\cos\theta\delta\theta$

$\delta x_B = -2l\sin\theta\,\delta\theta$

图示位置，弹簧有伸长量δ_0，则弹簧拉力为$F_C=F_G=k\delta_0$。代入虚位移原理



$$F\delta y_G - F_G\delta y_G + F_C\delta y_C + F_{Bx}\delta x_B = 0$$

得 $$F\times 3l\cos\theta\,\delta\theta - k\delta_0\times 3l\cos\theta\,\delta\theta + k\delta_0\times l\cos\theta\,\delta\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

消去$\delta\theta$，解得有弹簧时，B处的水平约束反力为

$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta$$

§15-3 虚位移原理

讨论2

另一种分析方法

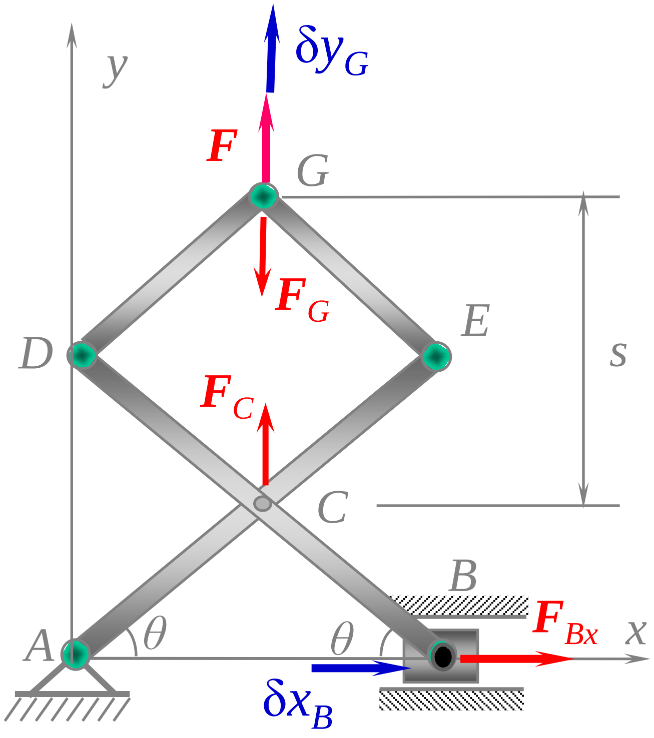
令 $s=GC$，由图有

$$s = 2l\sin\theta$$

其变分为

$$\delta s = 2l\cos\theta\,\delta\theta \qquad \text{(c)}$$

已知弹簧有伸长量δ_0，则弹簧拉力为$F_C=F_G=F_{CG}=k\delta_0$。当G、C两点间有相对伸长的虚位移δs时，弹簧力所作虚功为负。



<< >>

§15-3　虚位移原理

根据虚位移原理有

$$F\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B - F_{GC}\delta s = 0$$

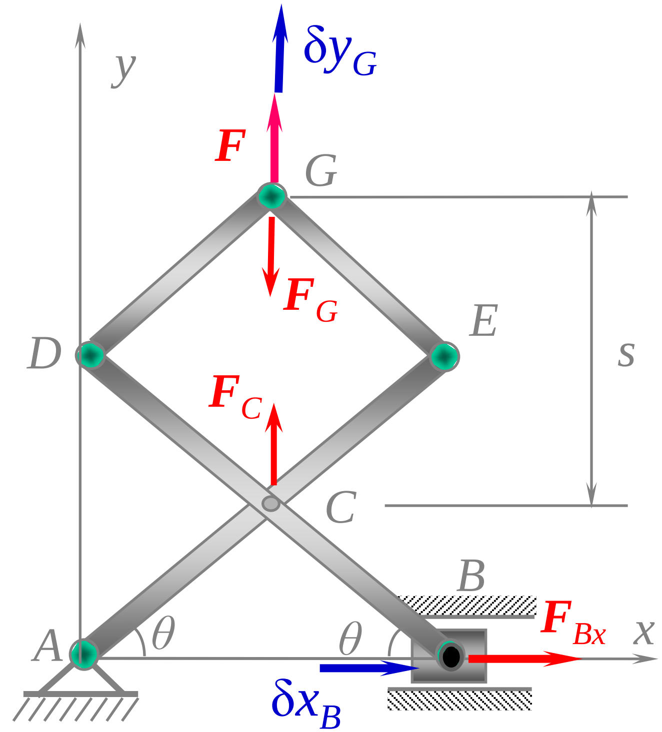
将式
$$\delta y_G = 3l\cos\theta\,\delta\theta$$
$$\delta x_B = -2l\sin\theta\,\delta\theta \qquad \text{(b)}$$
$$\delta s = 2l\cos\theta\,\delta\theta \qquad \text{(c)}$$

代入上式，注意F_{CG}=$k\,\delta_0$，得

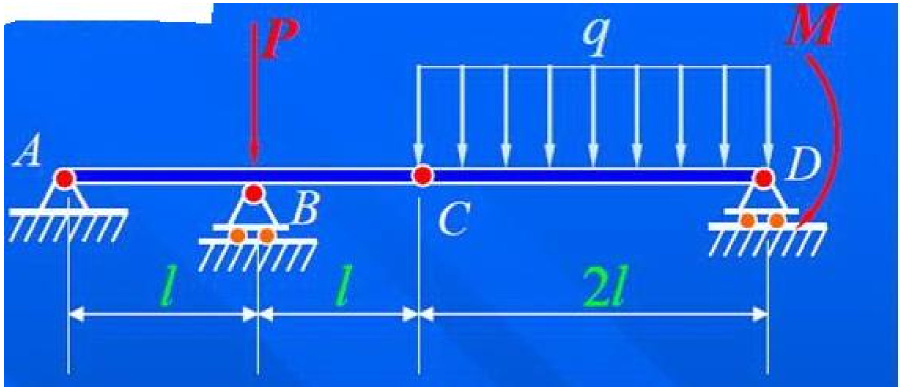
$$F\times 3l\cos\theta\,\delta\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta\,\delta\theta$$
$$-k\delta_0\times 2l\cos\theta\,\delta\theta = 0$$

消去$\delta\theta$，解得有弹簧时，B处的水平约束力为

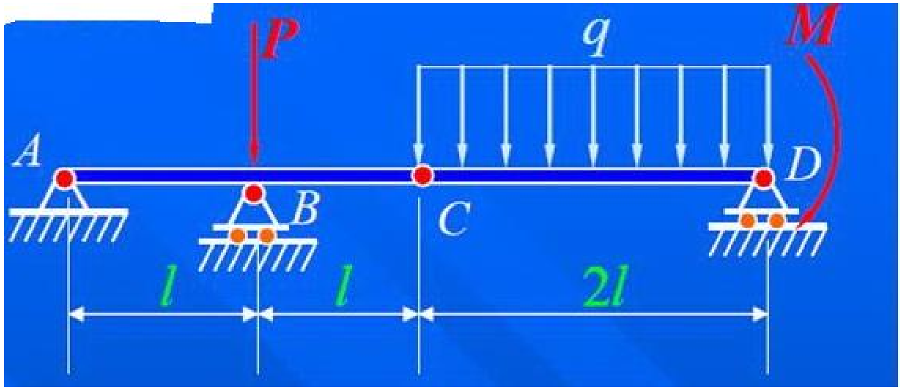
$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta$$



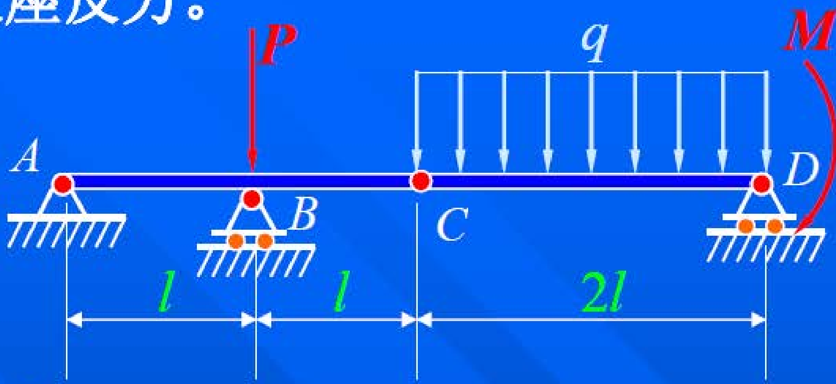
求连续梁的支座反力



求连续梁的支座反力



例15-3 求图示连续梁的支座反力。

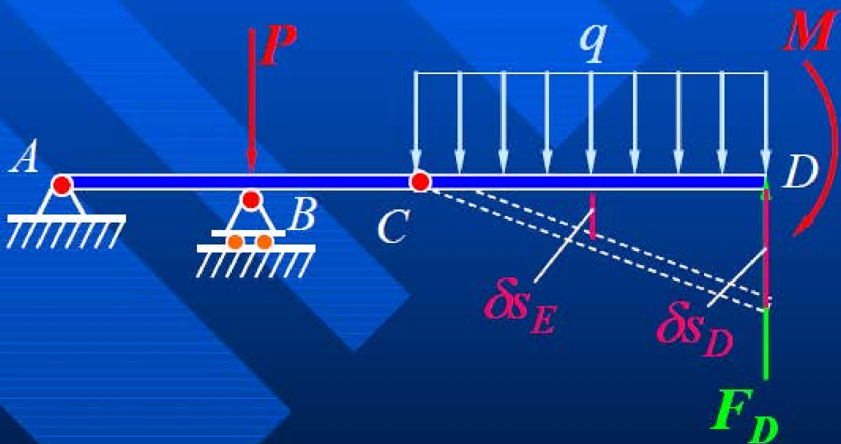


解： (1) 解除D处约束，代之以反力F_D，并将其视为主动力。

$$q\cdot 2l\cdot \delta s_E - F_D\cdot \delta s_D + M\frac{\delta s_D}{2l} = 0$$

其中

$$\frac{\delta s_E}{\delta s_D} = \frac{1}{2}$$

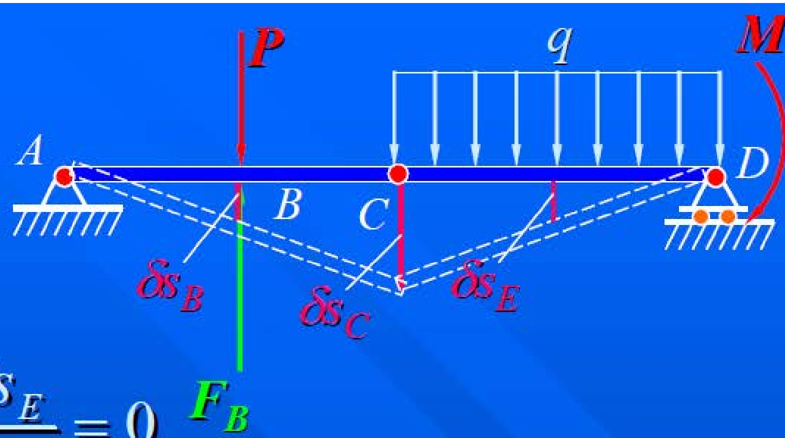


解得

$$F_D = \frac{M}{2l} + ql$$

<< >>

(2) 解除B处约束，代之以反力 F_B，并将其视为主动力。



由虚功方程，得

$$P\delta s_B - F_B\delta s_B + 2ql\delta s_E - M\frac{\delta s_E}{l} = 0$$

其中

$$\delta s_B = \delta s_E$$

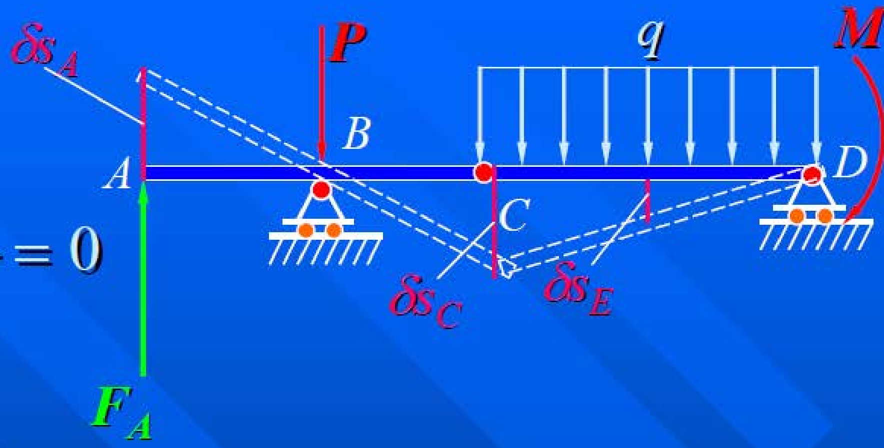
代入虚功方程，得

$$(P - F_B + 2ql - \frac{M}{l})\delta s_B = 0$$

解得

$$\boxed{F_B = P + 2ql - \frac{M}{l}}$$

(3) 解除A处约束，代之以反力 F_A，并将其视为主动力。



由虚功方程，得

$$F_A \delta s_A + 2ql\,\delta s_E - M\frac{\delta s_E}{l} = 0$$

其中

$$\delta s_A = \delta s_C = 2\delta s_E$$

代入虚功方程，得

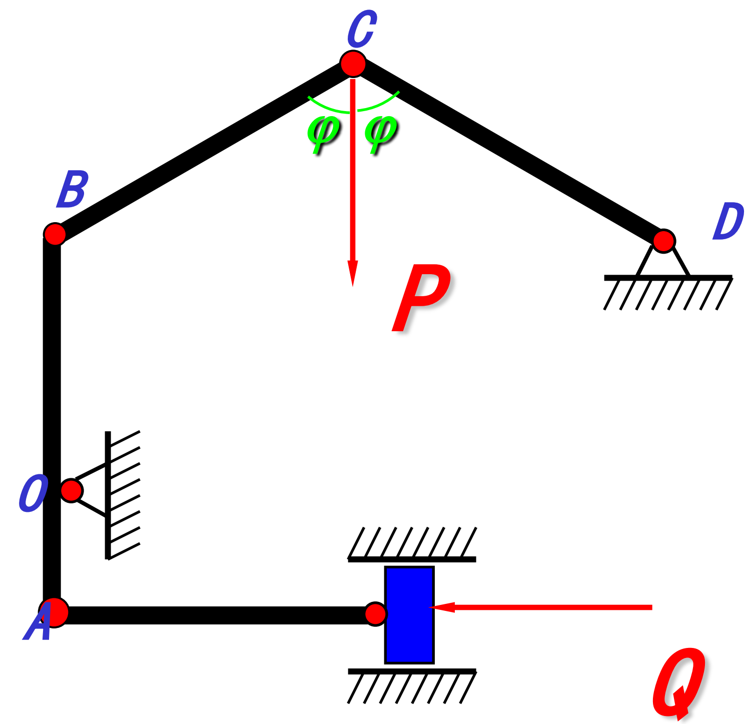
$$\left(F_A + ql - \frac{M}{2l}\right)\delta s_A = 0$$

解得

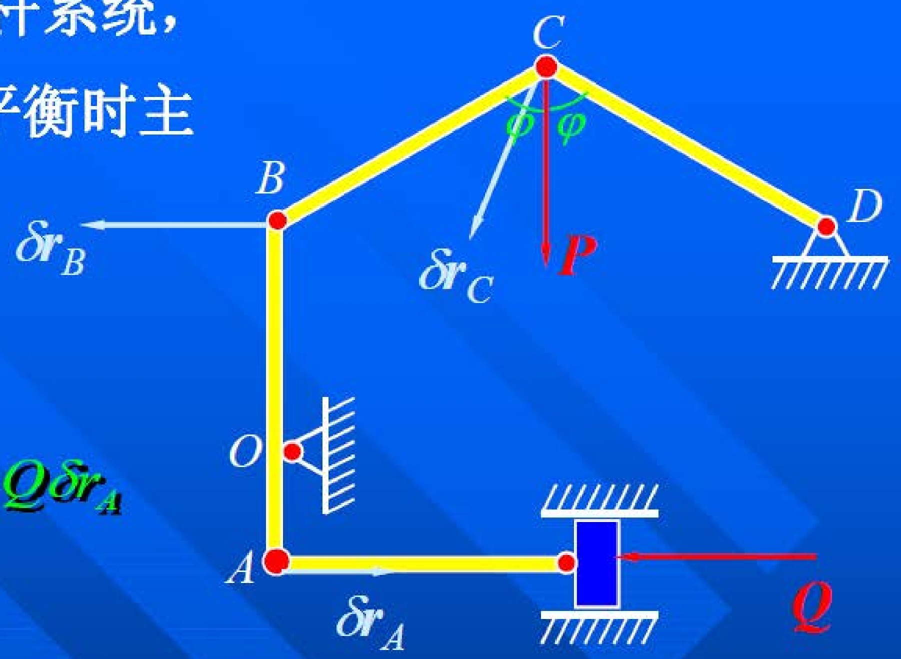
$$\boxed{F_A = \frac{M}{2l} - ql}$$

<< >>

图示操纵汽门的杠杆系统，已知$OA/OB = 1/3$，求此系统平衡时主动力P 和Q 间的关系。



例15-4 图示操纵汽门的杠杆系统，已知$OA/OB=1/3$，求此系统平衡时主动力P和Q间的关系。



解：(1) 取系统为研究对象

$$\sum \delta W_F = P\delta r_C \cos(90^\circ - \varphi) - Q\delta r_A = 0$$

由运动学关系可知：

$$\delta r_C \cos(2\varphi - 90^\circ) = \delta r_B \sin\varphi$$

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{3}$$

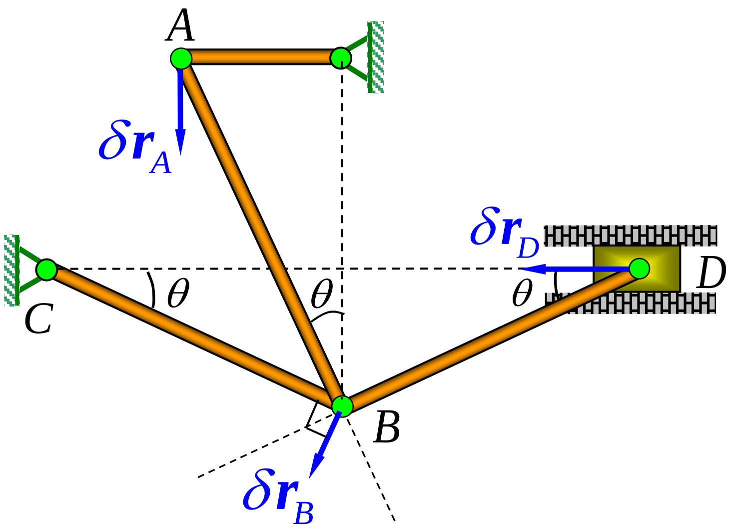
$$\frac{\delta r_A}{\delta r_C} = \frac{2}{3}\cos\varphi$$

$$\sum \delta W_F = P\delta r_C \cos(90^\circ - \varphi) - Q\delta r_A = (P\sin\varphi - Q\frac{2}{3}\cos\varphi)\delta r_C = 0$$

$$\boxed{\frac{P}{Q} = \frac{2}{3}\cot\varphi}$$

<< >>

例题 求图示机构中，A、D两点虚位移关系。



解：

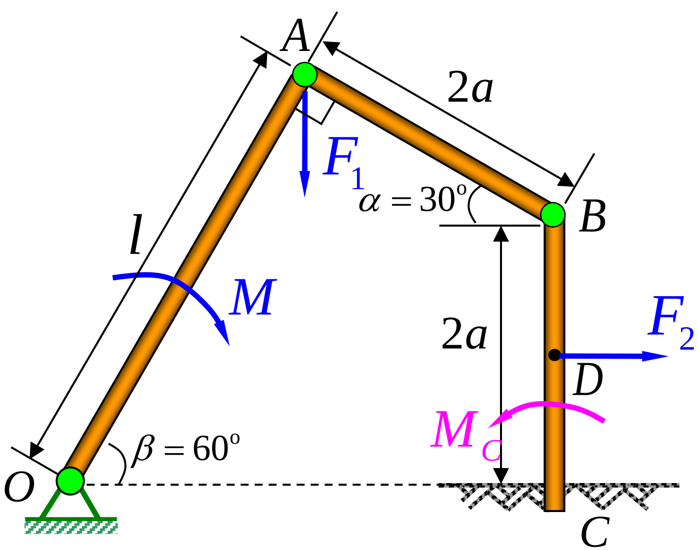
$$\delta r_A \cdot \cos\theta = \delta r_B \cdot \cos 2\theta$$

$$\delta r_B \cdot \cos\left(90^\circ - 2\theta\right) = \delta r_D \cdot \cos\theta$$

$$\delta r_D = \delta r_A \,\mathrm{tg}\, 2\theta$$

例题 5. 求图示结构固定端C处的约束力偶矩。

已知力偶矩M，力F_1和F_2，$OA=l$，$AB=BC=2a$，$BD=DC$，$\alpha=30°$，$\beta=60°$，$\angle OAB=90°$。



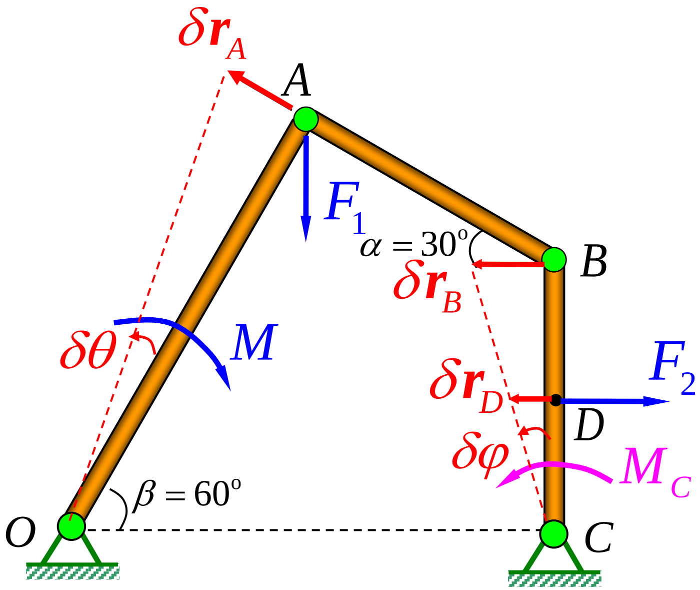
解：解除C端转动约束，代以M_C，视为主动力。

给定图示虚位移：

$\delta r_B=2a\delta\varphi$, $\delta r_D=a\delta\varphi$

$$\delta r_A=\delta r_B\cdot\cos 30^\circ=\sqrt{3}a\delta\varphi$$

$$\delta\theta=\frac{\delta r_A}{l}=\frac{\sqrt{3}a\delta\varphi}{l}$$



由 $\sum\delta W_F=0$ 得

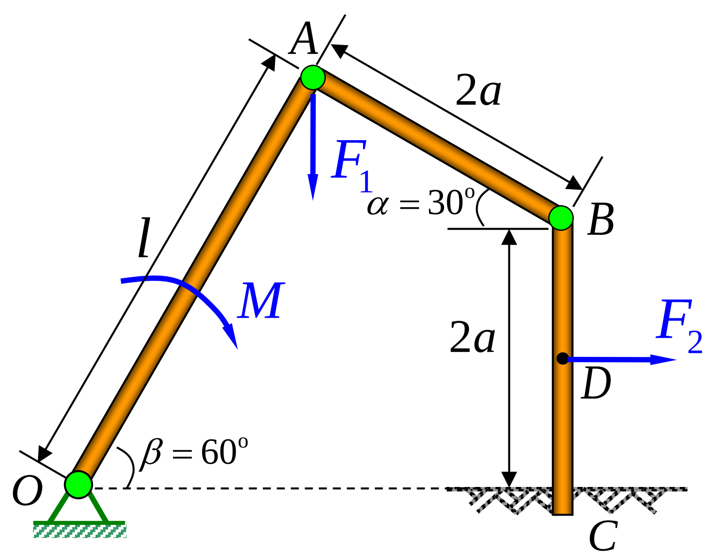
$$M_C\cdot\delta\varphi-F_2\delta r_D-F_1\cos 60^\circ\cdot\delta r_A-M\cdot\delta\theta=0$$

代入虚位移关系，得 $M_C=F_2a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}F_1a+\dfrac{\sqrt{3}aM}{l}$

题型特点： 求静定结构约束力。

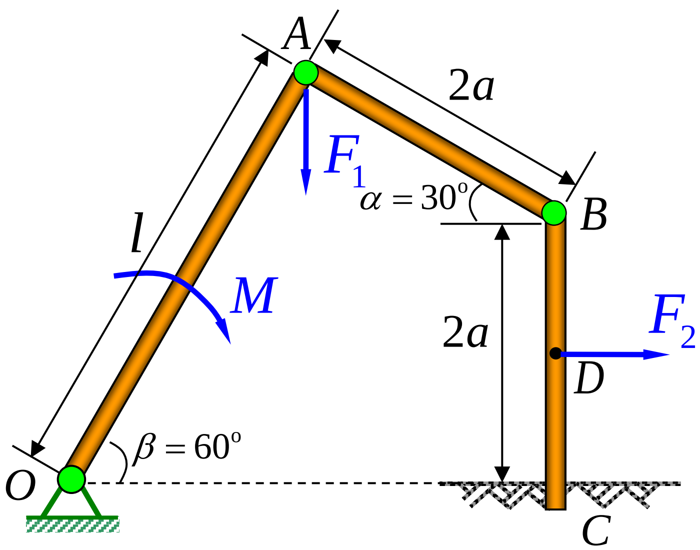
先解除一个约束，代以相应约束力，视该约束力为主动力。

思考 如何求 $\boldsymbol{F}_{Cx}$、$\boldsymbol{F}_{Cy}$？

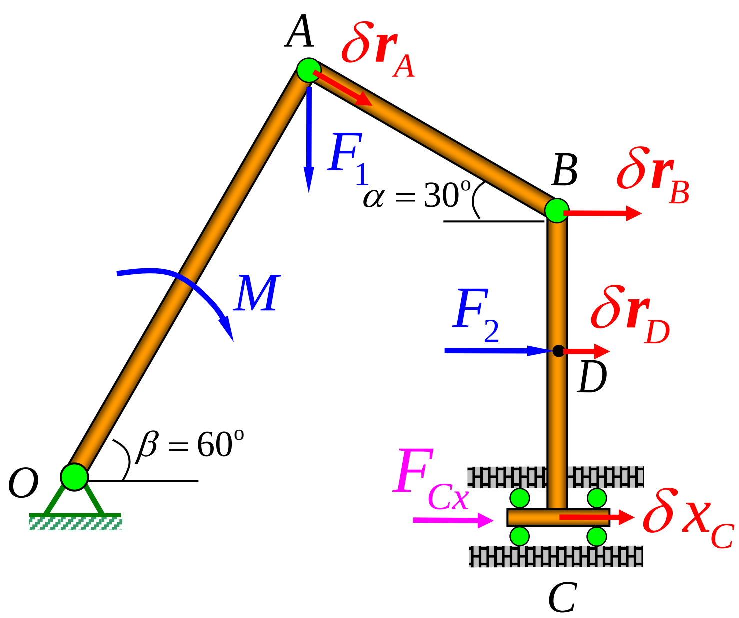


答8

1. 求F_{Cx}

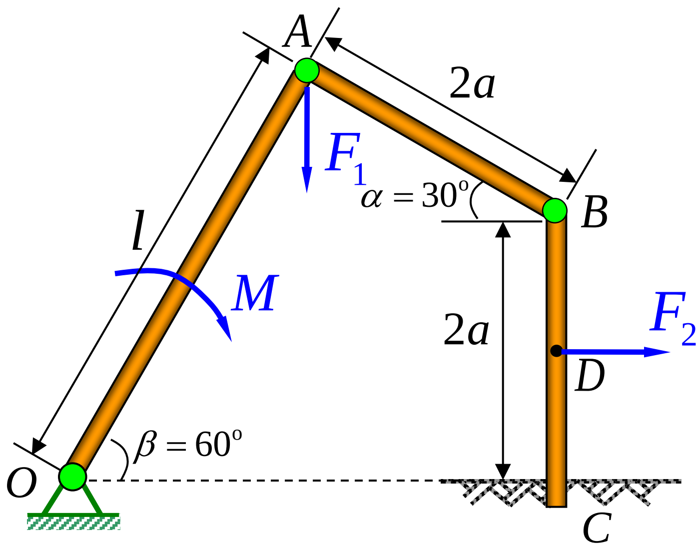


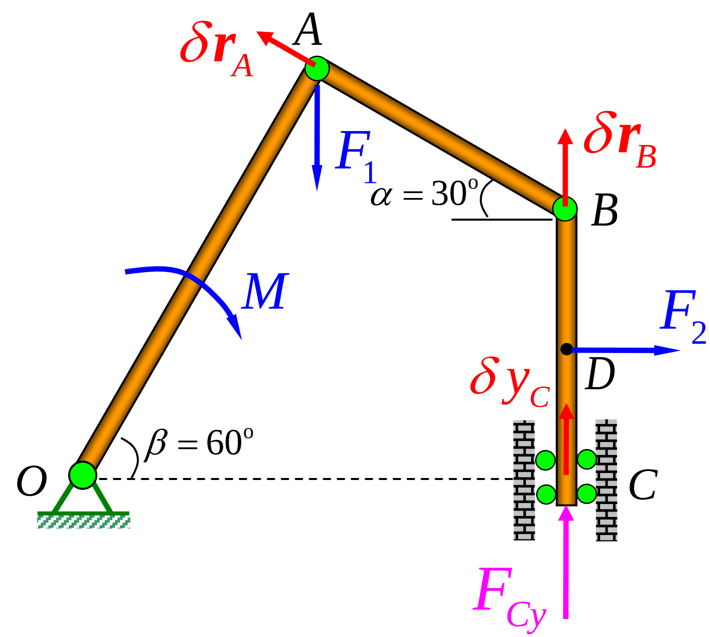
A
2a
l
F_1
$\alpha = 30^\circ$
B
M
2a
F_2
D
O
$\beta = 60^\circ$
C



A
$\delta \mathbf{r}_A$
F_1
B
$\delta \mathbf{r}_B$
$\alpha = 30^\circ$
M
F_2
$\delta \mathbf{r}_D$
D
O
$\beta = 60^\circ$
F_{Cx}
δx_C
C

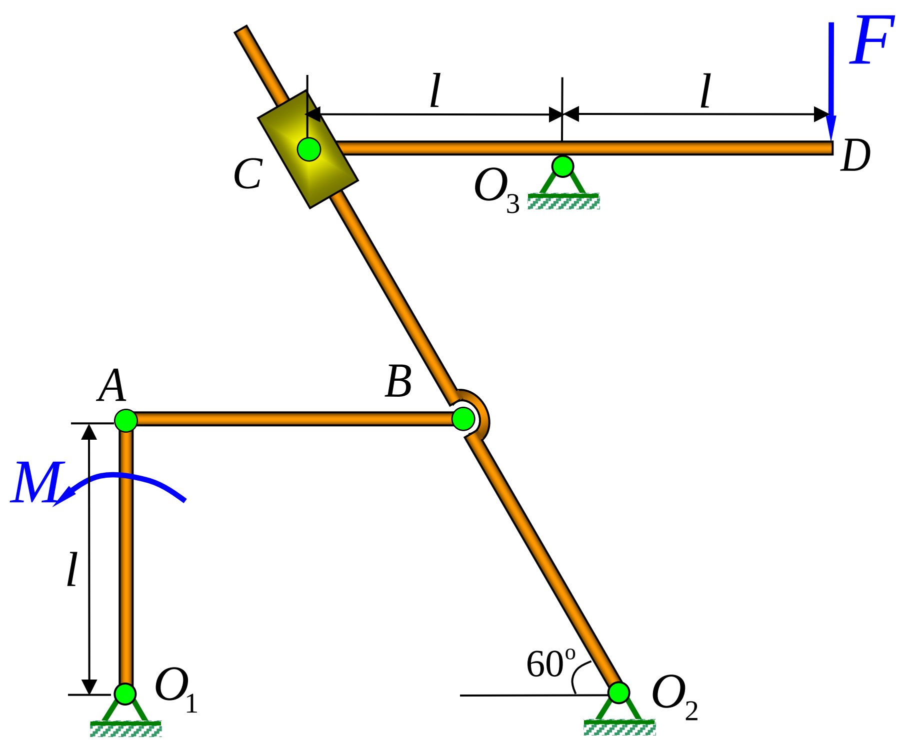
2. 求$\boldsymbol{F}_{Cy}$





例题

2. 图示机构中，杆长$O_1A=O_3C=O_3D=l$，套筒C可在O_2C杆上滑动，图示位置O_1A铅直，杆CD、AB水平，$O_2B=BC$。求力F与力偶矩M的平衡关系。



解8

给虚位移如图(b)：

由运动关系

$$\delta r_C = \delta r_D$$

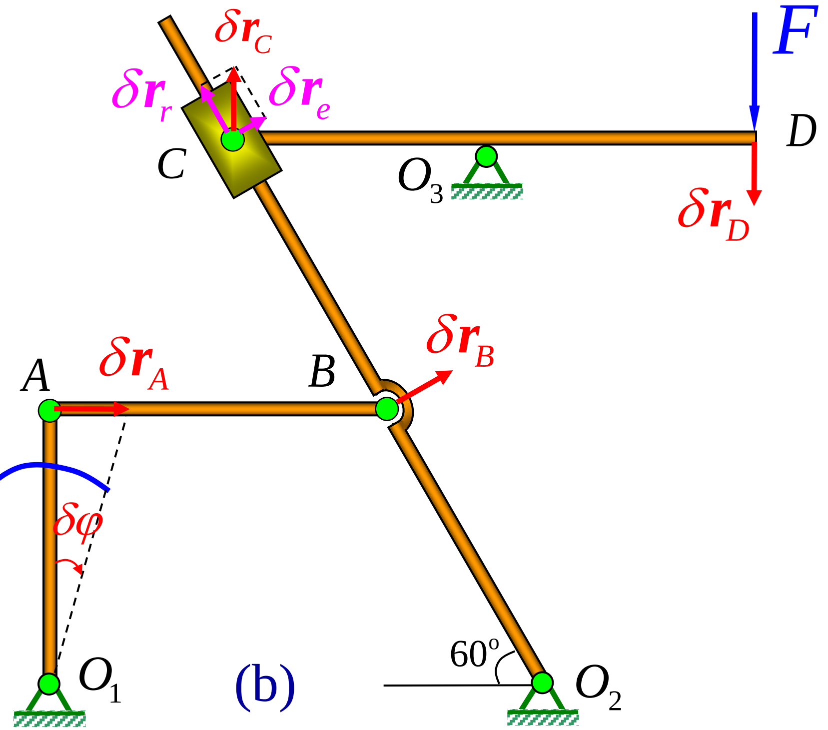
$$\delta \boldsymbol{r}_C = \delta \boldsymbol{r}_e + \delta \boldsymbol{r}_r,\ \delta r_e = \frac{1}{2}\delta r_C$$

$$\delta r_B = \frac{1}{2}\delta r_e$$

$$\delta r_A = \delta r_B \cdot \cos 30^\circ$$

$$\delta r_A = \frac{\sqrt{3}}{8}\delta r_D$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_A}{l} = \frac{\sqrt{3}}{8l}\delta r_D$$



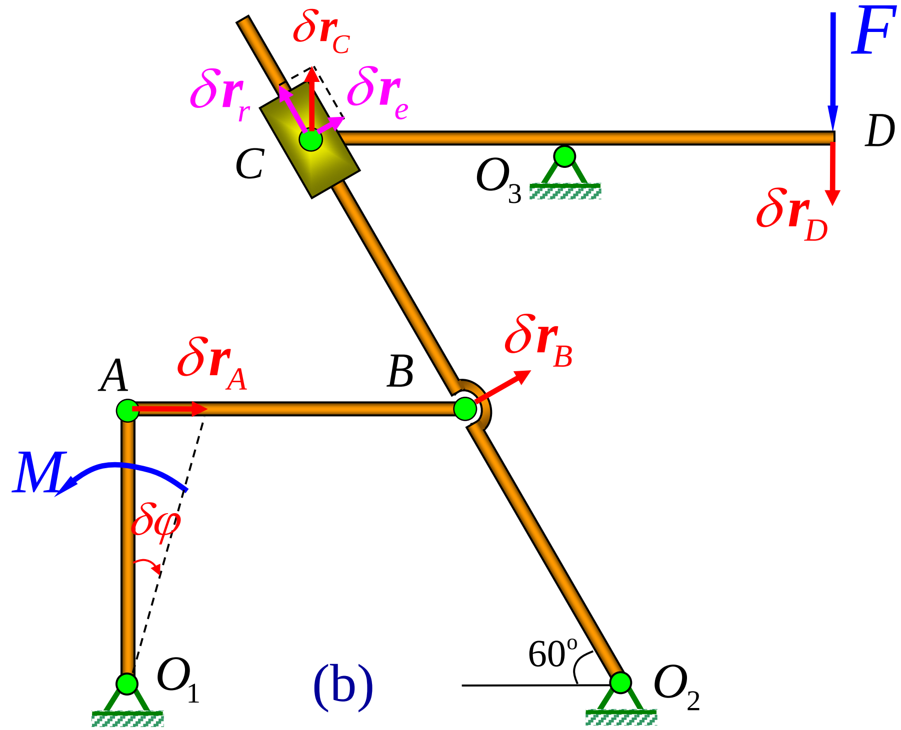
(b)

虚功方程应用于刚体系统

由 $\sum\delta W_F=0$ ，有

$$-M\delta\varphi+F\delta r_D=0$$

$$F=\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{M}{l}$$



题型特点：给定虚位移，求主动力平衡关系。

注释：套筒虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_C=\delta\boldsymbol{r}_e+\delta\boldsymbol{r}_r$ 应用 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$ 导出。

作业

- 14-5, 6, 8, 9, 10