期末复习题二答案

2019年12月18日 星期三 下午7:41

一、考虑 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 & 6^5 \end{vmatrix}$ 用范德蒙德行列式对它展开

$$=\prod_{1\le i<j\le 6}(j-i)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le 5}(j-i)\cdot(6-5)(6-4)(6-3)(6-2)(6-1)$$

考虑 6^4 的代数余子式 $=(-1-2-3-4-5)\cdot 6^4\cdot\prod_{1\le i<j\le 5}(j-i)=(-1)^{5+6}\cdot 6^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 \end{vmatrix}$

综上 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 6^5 \end{vmatrix}=(1+2+3+4+5)\cdot\prod_{1\le i<j\le 5}(j-i)=15\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!$

二、(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 中 s 个向量，如果存在 P 中不全为零的数 $k_1,k_2\cdots k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性相关，否则就称线性无关

(2) 由于 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r,\beta$ 线性相关

$\Rightarrow\exists$ 不全为0的 $k_1,k_2\cdots k_r,k_{r+1}$, s.t $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0$

假设 $k_{r+1}=0$，则不全为0的 $k_1,\cdots k_r$, s.t $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$ 与 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性无关矛盾

故 $k_{r+1}\neq 0$，则 $\beta=\sum_{i=1}^{r}\frac{k_i}{k_{r+1}}\cdot\alpha_i$

则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 表示

则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 表示

下证该表示唯一，若存在两种表示

$\beta=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\alpha_i$ 且 $\beta=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i'\alpha_i$，$\lambda_1,\cdots\lambda_r$ 与 $\lambda_1',\cdots\lambda_r'$ 不全相等

则 $0=\beta-\beta=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\alpha_i-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i'\alpha_i=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i-\lambda_i')\alpha_i$

则有一组不全为0的 $\lambda_1-\lambda_1',\cdots\ \lambda_r-\lambda_r'$，s.t. $\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i-\lambda_i')\alpha_i=0$

与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 线性无关矛盾

综上 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 唯一表示

三、(i) $\sum_{i=1}^{t}k_tX_t$ 是 $AX=b$ 的解 $\Rightarrow\sum_{i=1}^{t}k_i=1$

$b=A\left(\sum_{i=1}^{t}k_tX_t\right)=\sum_{i=1}^{t}k_t\cdot AX_t=\sum_{i=1}^{t}k_t\cdot b$

由于这是非齐次线性方程，则 $b\neq0$

故 $\sum_{i=1}^{t}k_t=0$

(ii) $\sum_{i=1}^{t}k_t=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{t}k_iX_i$ 是 $AX=b$ 的解

$A\left(\sum_{i=1}^{t}k_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{t}k_i\cdot AX_i=\sum_{i=1}^{t}k_i\cdot b=b$

故得证

综上，原命题得证

四、由于 $n-r\geq 1$，故 $\exists$ 不全为0的 $k_1,k_2\cdots k_n$ s.t $k_1a_1+\cdots+k_na_n=\theta$

故W为非空向量

$\forall (k_1\cdots k_n)^T\in W$, $(k_1',\cdots k_n')\in W$, $a\in R$

下证 $(k_1+ak_1',\cdots,k_n+ak_n')\in W$

$\sum_{i=1}^{n}(k_i+ak_i')\cdot a_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\cdot a_i+a\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i'\cdot a_i=0$

并且W中的加法和数乘满足8条运算规律

综上 W为 R^n 的一个子空间

(2) 不妨设 $a_1,a_2\cdots a_r$ 为一个极大线性无关向量组

则 $a_{r+i}=-l_{1i}a_1-l_{2i}a_2-\cdots-l_{ri}a_r\ (i=1,2,\cdots n-r)$

则可知 $X_1=(l_{11},l_{21},\cdots l_{r1},1,0,\cdots,0)^T$

$X_2=(l_{12},l_{22}\cdots l_{r2},0,1,\cdots,0)^T$

$\cdots$

$X_{n-r}=(l_{1,n-r},l_{2,n-r}\cdots l_{r,n-r},0,0,\cdots,1)^T$

则可知 $X_1,\cdots X_{n-r}$ 线性无关

另一方面 $[a_1,a_2\cdots a_n][k_1\cdots k_n]^T=\theta$

故 $\dim W+\dim[a_1,\cdots a_n]=n$

故 $\dim W=n-r$ 而 $X_1,\cdots X_{n-r}$ 为它的一个n-r元的线性无关向量组

综上 W的一组基为 $X_1,X_2\cdots X_{n-r}$，其维数为n-r

五、(1) $\because (x-2)(x-3)$, $(x-1)(x-3)$, $(x-1)(x-2)$ 在基(I)下的坐标为

$[6,-5,1]^T$, $[3,-4,1]^T$, $[2,-3,1]^T$

则从基(I)到基(II)的过渡矩阵M为 $\begin{bmatrix}6 & 3 & 2\\ -5 & -4 & -3\end{bmatrix}$

则从基(I)到基(II)的过渡矩阵M为$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 从基(II)到基(I)的过渡矩阵为M^{-1}

$$[M \vdots E] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 6 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

综上过渡矩阵为$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$

(3) $P(x)$在基(I)下的坐标为$[1,1,1]^T = X$

$$\therefore X' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -7 \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

则在基(II)下坐标为$[\frac{3}{2}, -7, \frac{13}{2}]^T$

六、设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$为该n维欧氏空间的一组标准正交基

则 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} t_i \varepsilon_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \varepsilon_i$

$\|\alpha\| = 1 \Rightarrow (\alpha, \alpha) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 1$

同理 $\|\beta\| = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = 1$

反证法：若$(\alpha, \beta) = 1$

则有 $1 = (\alpha, \beta) = (\sum_{i=1}^{n} t_i \varepsilon_i, \sum_{i=1}^{n} s_i \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i s_i$

由Cauchy不等式，$1 = (\sum_{i=1}^{n} t_i s_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} t_i^2)(\sum_{i=1}^{n} s_i^2) = 1$

当且仅当 α, β线性相关时取等

结合α, β的模长相等 $\Rightarrow \alpha = \beta$或$\alpha = -\beta$

当且仅当 α,β 线性相关时取等

结合 α,β 的模长相等 $\Rightarrow \alpha=\beta$ 或 $\alpha=-\beta$

(i) $\alpha=\beta \Rightarrow$ 与 α,β 相异矛盾

(ii) $\alpha=-\beta \Rightarrow (\alpha,\beta)=-\|\alpha\|=-1\neq 1$，矛盾

综上 $(\alpha,\beta)=1$ 不成立

原命题成立

七、欲证 A 可逆

只需证 0 不是 A 的特征值

设 λ 为 A 的特征值，X 为特征值对应的特征向量

则有 $AX=\lambda X$

$(AB^T+BA)^T=BA+AB^T$，故 AB^T+BA 为实对称矩阵

又由于 AB^T+BA 的特征值为正实数 $\Rightarrow AB^T+BA$ 为正定矩阵

则有 $X^T(AB^T+BA)X=X^TA^TB^TX+X^TBAX=(AX)^T\cdot B^TX+X^TB(AX)$

$=\lambda X^TB^TX+\lambda X^TBX=2\lambda X^TBX$

(X^TB^TX 为一个数，故 $X^TB^TX=(X^TB^TX)^T=X^TBX$)

而 $0<X^T(AB^T+BA)X=2\lambda X^TBX \Rightarrow \lambda\neq 0$

则原命题得证