第三章 刚体力学基础 流体力学简介

(§3.6 - §3.8)

本课时教学基本要求

1、掌握刚体平面运动特征。

2、掌握刚体平面运动的动力学规律。重点掌握刚体平面运动中的纯滚动。

3、掌握陀螺仪的定点运动。重点掌握旋进方向的判定以及旋进角速度的求解。

4、掌握流体力学中的连续性方程和伯努利方程。


F-WQDJ

◆ 直升机螺旋桨的设置

3-09直升机原理

- 尾桨的设置：直升机发动后机身要在旋翼旋转相反方向旋转，产生一个向下的角动量。为了不让机身作这样的反向旋转，在机身尾部安装一个尾桨，尾桨的旋转在水平面内产生了一个推力，以平衡单旋翼所产生的机身扭转作用。

- 对转螺旋桨的设置：双旋翼直升机则无需尾桨，它在直立轴上安装了一对对转螺旋桨，即在同轴心的内外两轴上安装了一对转向相反的螺旋桨。工作时它们转向相反，保持系统的总角动量仍然为零。

§ 3.6 刚体的平面运动

一、刚体平面运动的运动学

刚体的平面运动：若刚体内所有质点的运动都平行于某一平面，则这种运动称为刚体的平面运动。

例如：直线运动车的车轮。

物体沿斜面的滚动。

黑板擦的运动。

定轴转动是刚体平面运动的一种特殊的形式。

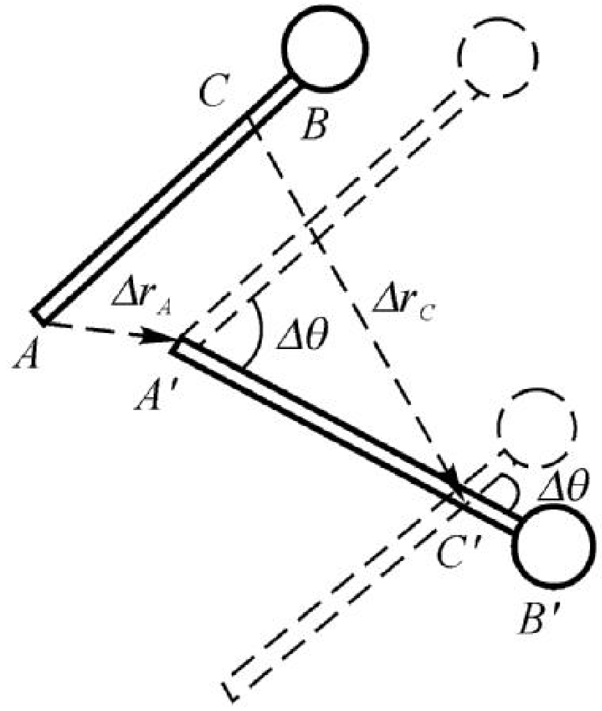
刚体平面运动的描述

可以分解为质心平动和绕质心轴的转动。

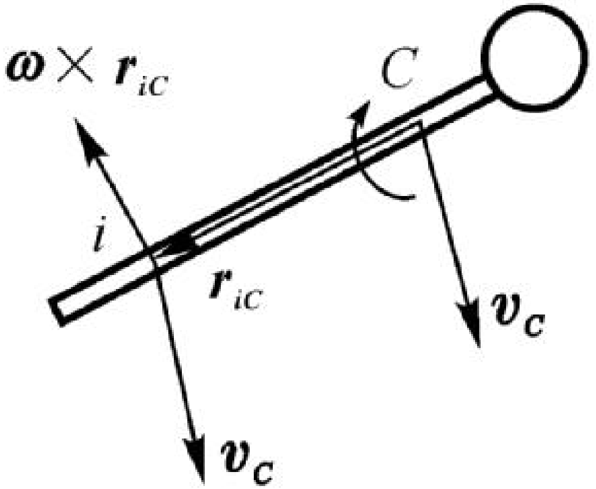
$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ic}$$



(a)



(b)

二、刚体平面运动的动力学

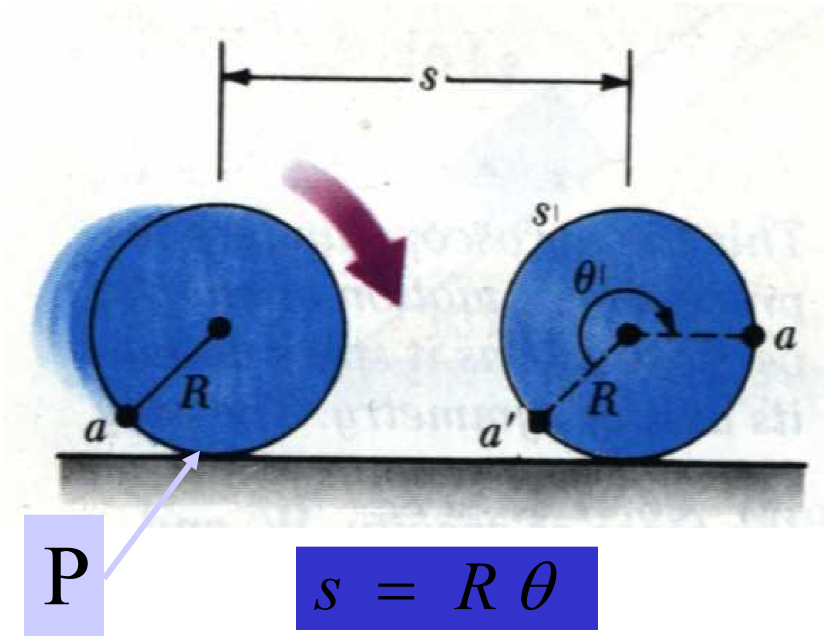
$$\begin{cases} \text{质心的平动} \quad \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}_C \\ \text{绕质心的转动} \quad \mathbf{M}_C = J_C\beta \end{cases}$$

$\vec{F} = m\vec{a}_c$ 是矢量式，在剖面内有两个分量式，再加$M = J_c\beta$，三个独立方程附带必要的初始条件，就可以完全确定刚体的平面运动

三、刚体平面运动中的纯滚动

1、纯滚动的主要特征：

(1) 在滚动中接触点P始终是相对静止的，没有滑动。 **P**点的线速度始终为零。



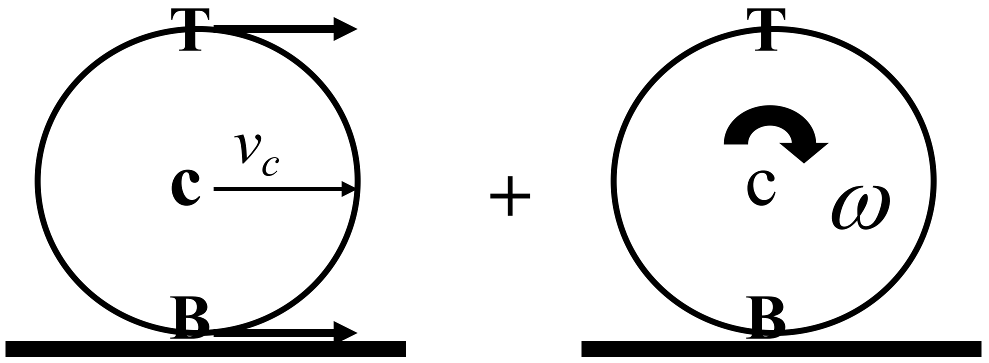
$s = R\theta$

(2) 发生在P点的摩擦力为静摩擦力，不作功。

$$v_c = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = \omega R$$

(3) $s_C = R\theta$, $v_C = R\omega$, $a_C = R\beta$

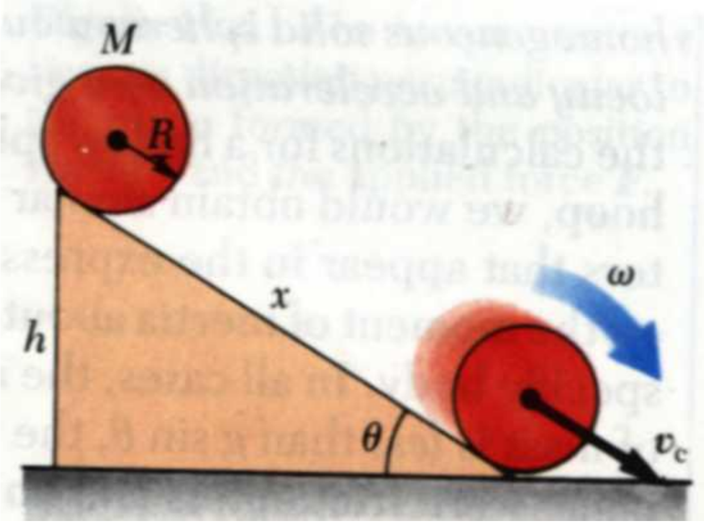
$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta$$



纯滚动时刚体的动能：

动能 $$E_K = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$$

例１、质量为M、半径为R的均匀实心球，由静止开始，从高度h处，沿倾角为θ的斜面无滑动滚下。求实心球滚到底端时质心速度的大小。



（1）解：

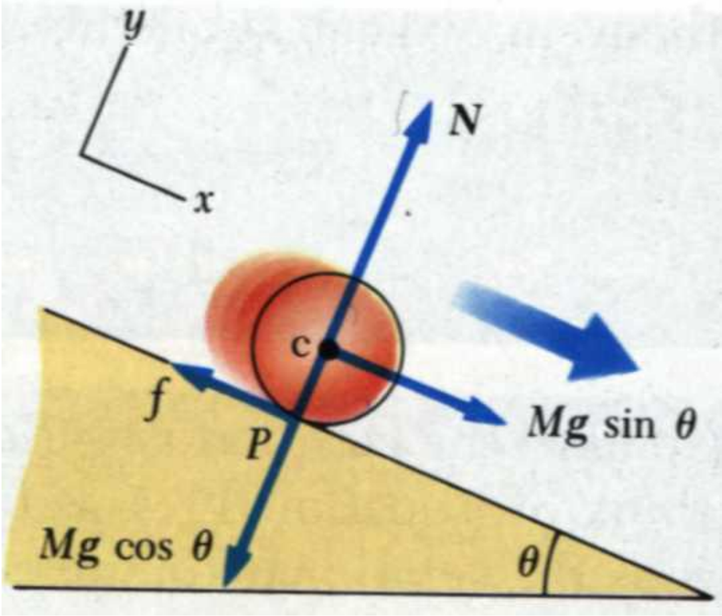
$$\vec{F} = m\vec{a}_c \Rightarrow$$

$$Mg\sin\theta - f = Ma_c$$

$$N - Mg\cos\theta = 0$$

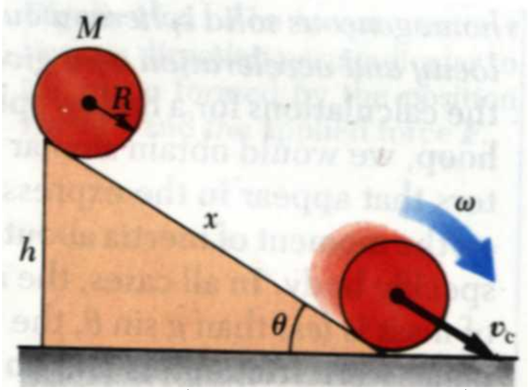
$$M_c = J_c\beta \Rightarrow$$

$$fR = J_c\beta, J_c = \frac{2}{5}MR^2$$



$a_c = R\beta$ 解方程得： $a_c = \frac{5}{7} g \sin\theta$

$v_c^2 = 2a_c x$ $x = \frac{h}{\sin\theta}$ $\therefore v_c = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{\frac{1}{2}}$



（2）解：由机械能守恒：

顶点：$E_{p0} = Mgh$, $E_{k0} = 0$

底部：$E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{J_c}{R^2} + M\right)v_c^2$

$v_c = R\omega$

$E_p = 0$

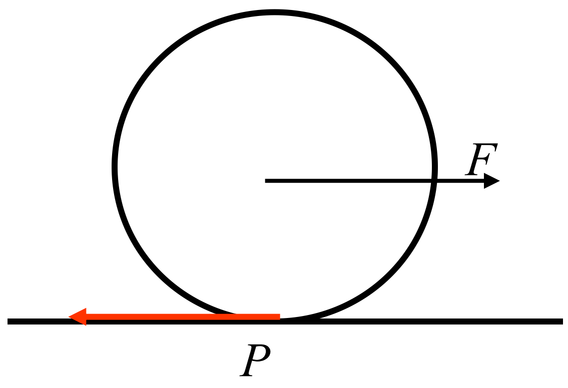
$$E_{k_0} + E_{p_0} = E_k + E_p$$

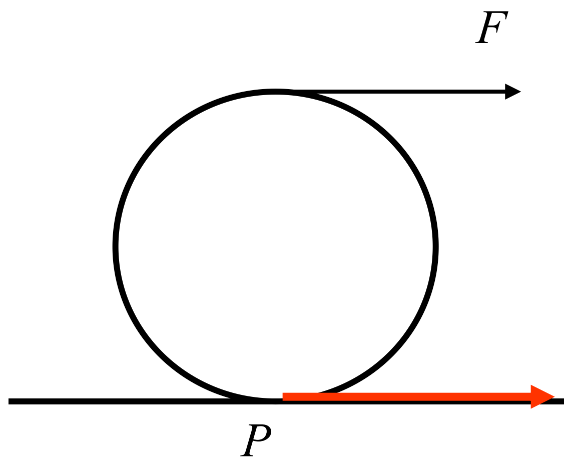
解方程得：

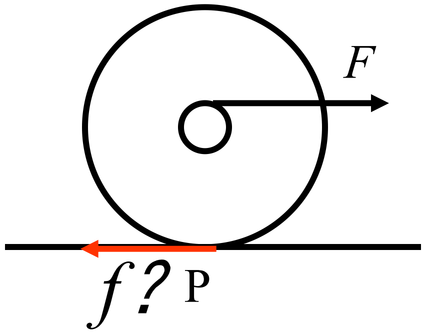
$$v_c = \left(\frac{2gh}{1 + J_c / MR^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7} gh \right)^{1/2}$$

$$J_c = \frac{2}{5} MR^2$$

纯滚动中摩擦力方向的判定

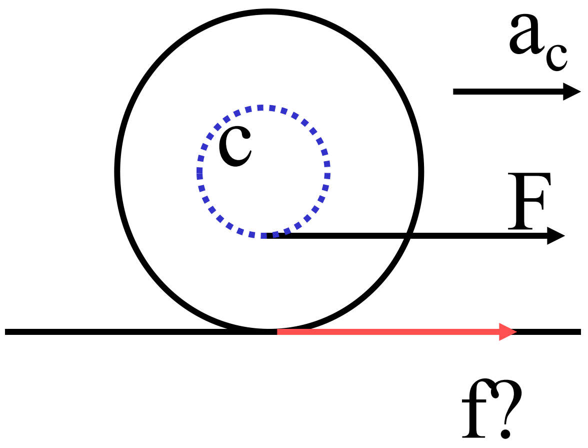


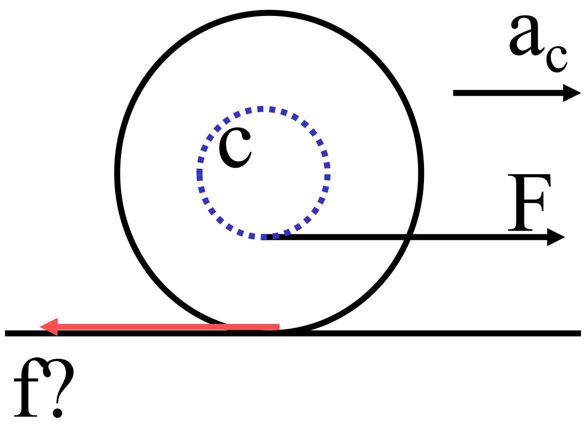




纯滚动中摩擦力方向的判定（习题3.45）

绕线轮的质量为m，绕对称轴的转动惯量为J，大圆半径为R，小圆半径为r，用力F水平拉线的一端，使绕线轮在水平地面上作纯滚动。求（1）绕线轮的角加速度和质心加速度；（2）地面对绕线轮的摩擦力；

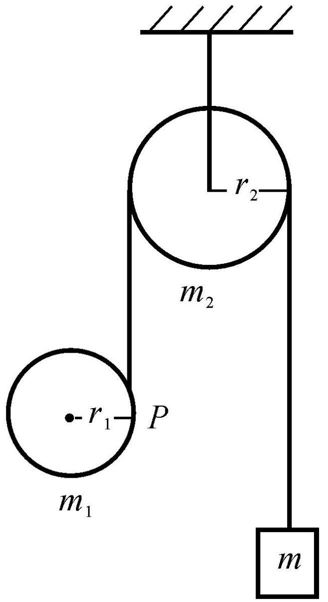


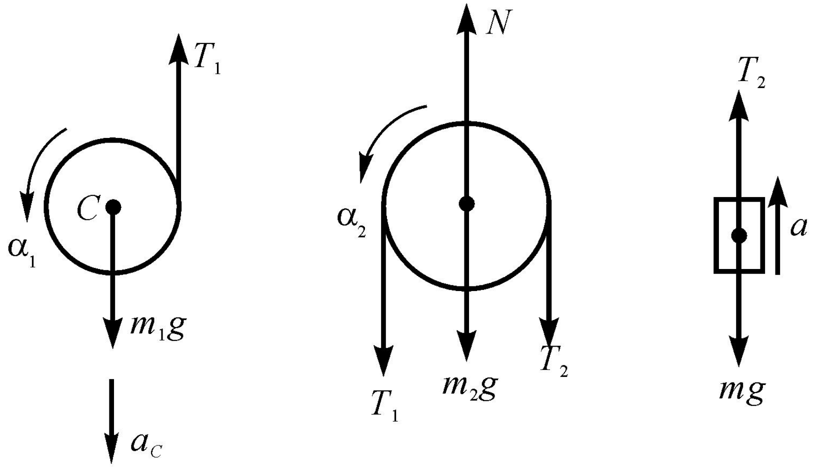


$$\begin{cases} F + f = ma_c \\ F.r + f.R = -J\beta \\ a_c = R\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F - f = ma_c \\ F.r - f.R = -J\beta \\ a_c = R\beta \end{cases}$$

例3.17 求a a_c T





$$m_1g - T_1 = m_1a_c$$

$$T_1r_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\beta_1$$

$$T_1r_2 - T_2r_2 = \frac{1}{2}m_2r_3^2\beta_2$$

$$T_2 - mg = ma$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r_2\beta_2 \\ a_c &= a + r_1\beta_1 \end{aligned}}$$

§ 3.7 陀螺仪的定点运动

◆ 陀螺仪与定向指示仪

包

- 陀螺仪：能够绕其对称轴高速旋转的厚重的对称刚体。

- 陀螺仪的特点：具有轴对称性和绕对称轴有较大的转动惯量。

- 陀螺仪的定向特性：由于不受外力矩作用，陀螺角动量的大小和方向都保持不变；无论怎样改变框架的方向，都不能使陀螺仪转轴在空间的取向发生变化。

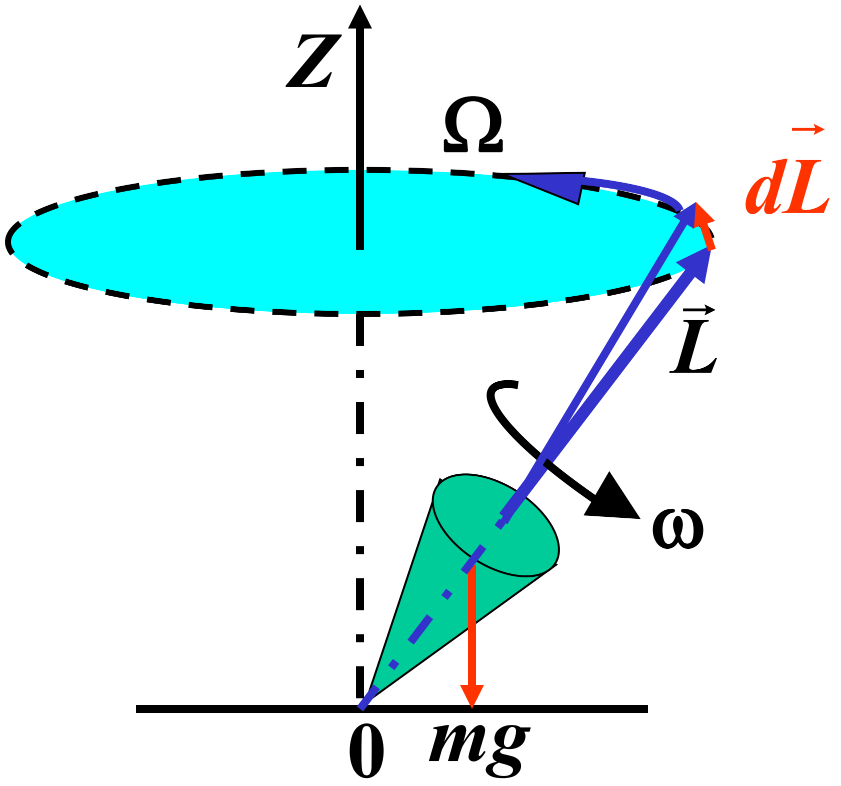
§ 3.7 陀螺仪的定点运动

◆ 陀螺仪的回转效应，又叫旋进（进动）

重力对 0 点的力矩为 $\vec{M}$ ，

$\vec{M}$ 的方向： $\vec{r}\times m\vec{g} \Rightarrow \otimes$

根据角动量定理：$\vec{M}dt = d\vec{L}$



$\because \vec{M} \perp \vec{L} \quad \therefore d\vec{L} \perp \vec{L}$

$d\vec{L}$ 使 $\vec{L}$ 改变方向

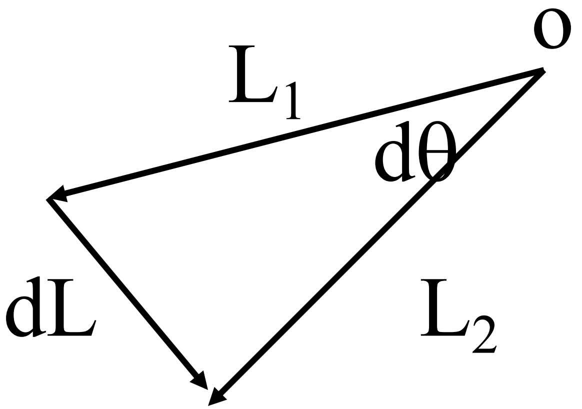
故陀螺的自转轴改变方向，
绕一竖直轴进动
可以证明

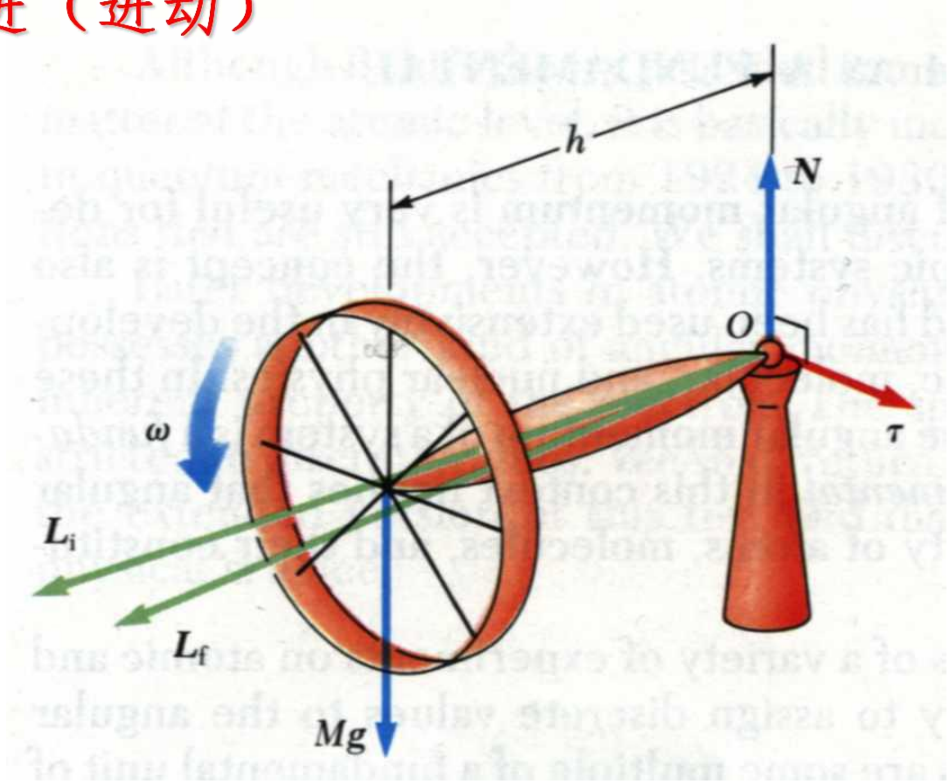
$$\Omega = \frac{M}{L\sin\varphi} = \frac{mgr}{J\omega}$$

其中 $\omega >> \Omega$

◆ 陀螺仪的回转效应，又叫旋进（进动）

$$\Omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{Mgh}{L}=\frac{Mgh}{J\omega}$$





§ 3.8 流体力学简介

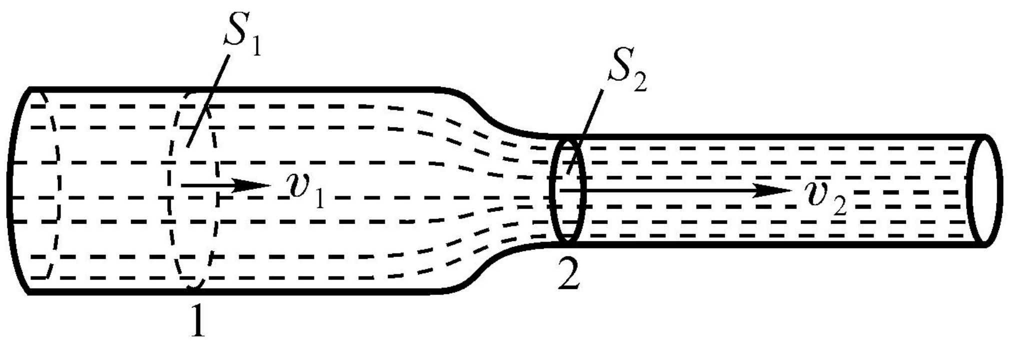
基本概念：　理想流体、定常流动

基本规律：

1、连续性方程：　$\rho S \upsilon = \text{常量}$

2、伯努利方程：　$pV + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{常量}$

1、连续性方程：



dt时间内通过任一截面的体积相等

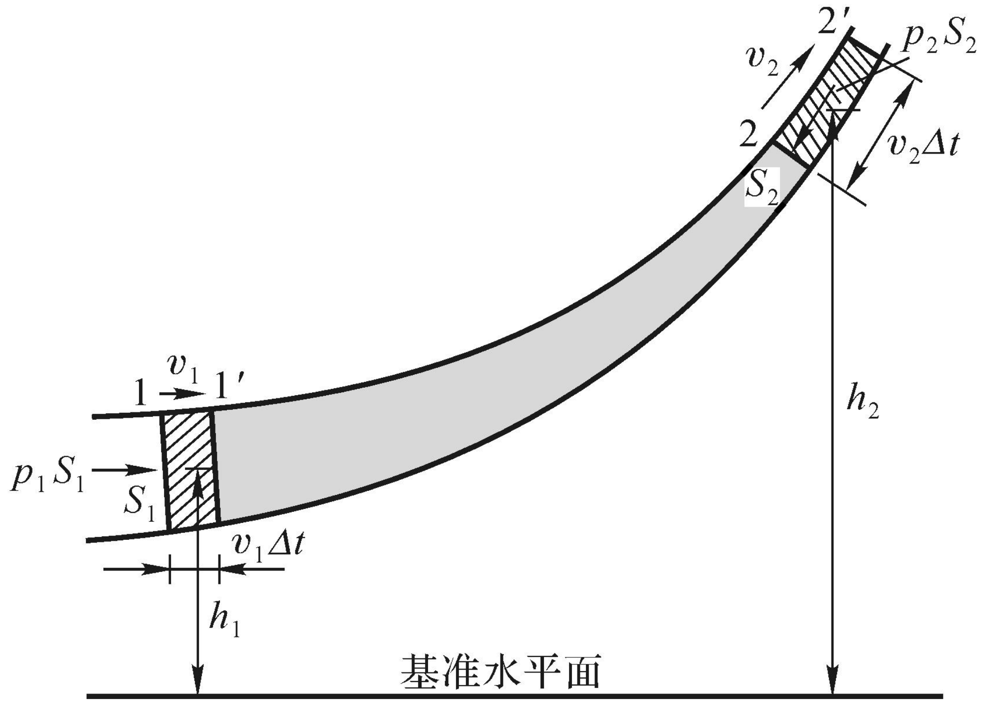
$$s_1\upsilon_1 dt = s_2\upsilon_2 dt$$

$$s\upsilon = \text{常量}$$

$$\rho s\upsilon = \text{常量}$$

2、伯努利方程：

$$A_{外} = \Delta E_k + \Delta E_P$$



$$(p_1 - p_2)V = (\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2) + (mgh_2 - mgh_1)$$

$$p_1V + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mgh_1 = p_2V + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + mgh_2$$

$$pV + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh = 常量 \qquad p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho gh = 常量 \qquad p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = 常量$$

作业：

3.45　3.47

3.49　3.61

3.64