第11章（四）
积分与路径无关性

浙江大学数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

有势场与势函数

定义 设 $\vec{f}: \mathrm{R}^n \supset D \to \mathrm{R}^n$，若 $\exists \varphi: D \to R$，使 $\nabla \varphi(\vec{x}) = f(\vec{x})$，$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则称 $\vec{f}$ 是**保守场（有势场）**，称 φ 是的一个**势函数**.

- 有势场 $\vec{f}$ 在区域 G 上的任意两个势函数相差一个常数.
- 例如： $\vec{f} = (yz,\ xz,\ xy)$ 在 R^3 中是有势场，其势函数为 $\varphi(x,y,z) = xyz + C$.

  $\vec{g} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$ 在 R^2 中是有势场，其势函数为 $\psi(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$

定理 设 $D \subset \mathrm{R}^n$ 为开集，$\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n): \ D \to \mathrm{R}^n$ 为连续可导的有势场，则

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, n. \quad \left(\text{或记为 } D_i f_j = D_j f_i\right)$$

【注】此定理之逆不一定成立。例如 $\vec{f} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ 在 $\mathrm{R}^2 / \{O\}$ 不是有势场.

曲线积分第二基本定理

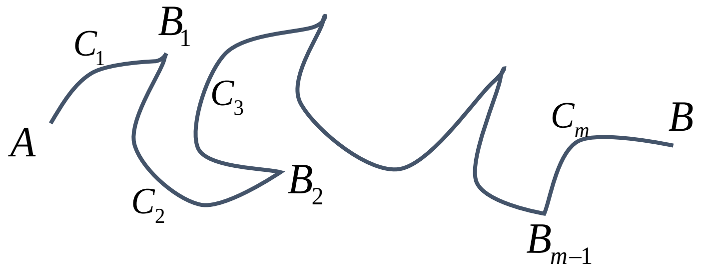
定理 设 G 为 R^n 的区域，$\vec{f}: G \to \mathrm{R}^n$ 连续，φ 为 $\vec{f}$ 的一个势函数，则对 $A,B \in G$ 和任意的 A 到 B 的分段光滑路径 $\alpha:[a,b] \to G$，$\alpha(a)=A$，$\alpha(b)=B$，有

$$\int_C \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha = \varphi(B)-\varphi(A).$$

其中 α 为 C 的一个参数表示.

证明： 若 C 为光滑的，则有 $\displaystyle\int_C \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha = \int_a^b \vec{f}\big(\alpha(t)\big)\cdot \alpha'(t)\mathrm{d}t$

$$= \int_a^b \nabla\varphi\big(\alpha(t)\big)\cdot\alpha'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\varphi\big(\alpha(t)\big)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \varphi(B)-\varphi(A).$$



若 C 为分段光滑的，即 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$，其中 $C_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为光滑曲线，则有

$$\int_C \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha = \int_{C_1} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha_1 + \int_{C_2} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha_2 + \cdots + \int_{C_m} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha_m$$

$$= [\varphi(B_1)-\varphi(A)] + [\varphi(B_2)-\varphi(B_1)] + \cdots + [\varphi(B)-\varphi(B_{m-1})] = \varphi(B)-\varphi(A).$$

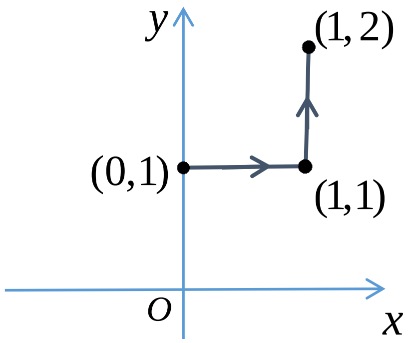
曲线积分与路径无关

- 由曲线积分的第二基本定理知，有势场 $\vec{f}$ 的曲线积分与路径无关，其积分值由势函数在曲线的两个端点的函数值决定.

定义 设 $D\subset \mathrm{R}^n$ 为开集，$\vec{f}: D\to \mathrm{R}^n$ 连续，$A,B\in D$. 若对任意的分段光滑从 A 到 B 的路径 C，$\int_C \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha$ 的值相同（其中 α 为 C 的一个参数表示），则称 $\vec{f}$ 在 D 上的**曲线积分与路径无关**，记为 $\int_A^B \vec{f}\cdot \mathrm{d}\alpha$.

例如 (1) $\int_{(0,1)}^{(2,3)} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = (xy)\Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = 6.$

(2) $\int_{(0,1)}^{(1,2)} \dfrac{2xy+1}{y}\mathrm{d}x + \dfrac{y-x}{y^2}\mathrm{d}y = \left(x^2+\dfrac{x}{y}+\ln y\right)\Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = \dfrac{3}{2}+\ln 2.$



曲线积分的第一基本定量与势函数的计算

定理 设 G 为 R^n 的区域，$\vec{f}: G \to \mathrm{R}^n$ 为连续的向量场，若 $\vec{f}$ 在 G 上的**曲线积分与路径无关**，取 $A \in G$，则 $\varphi: G \to \mathrm{R}$，$\varphi(x) = \int_A^x \vec{f} \cdot \mathrm{d}\alpha$ 是 $\vec{f}$ 的一个**势函数**. 即 φ 可导且 $\nabla\varphi = \vec{f}$.

其中 α 为从 A 到 x 的任一分段光滑路径的参数表示.

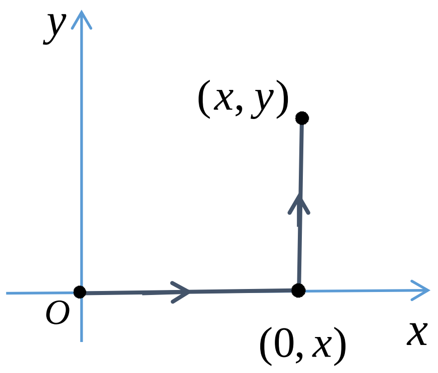
例 1 求 $\vec{f} = (3x^2 \sin y + x)\vec{i} + (x^3 \cos y - 2y)\vec{j}$ 的势函数.

解：

$$\varphi(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 \sin y + x)\mathrm{d}x + (x^3 \cos y - 2y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x (3x^2 \sin 0 + x)\mathrm{d}x + \int_0^y (x^3 \cos y - 2y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x^3 \sin y - y^2 + C.$$



例 2 求 $\vec{f} = 2xy\vec{i} + (ze^y + x^2)\vec{j} + e^y\,\vec{k}$ 的势函数.

曲线积分与路径无关的等价条件

定理 设 G 为 R^n 的区域，$\vec{f}: G \to \mathrm{R}^n$ 为连续的向量场，则以下命题等价：

(1) $\vec{f}$ 在 G 内为保守场（有势场）；

(2) $\vec{f}$ 在 G 内的曲线积分与路径无关；

(3) $\vec{f}$ 在 G 内沿任意分段光滑的闭曲线的曲线积分为零.

例 3 设 $\vec{f} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$，计算 $\displaystyle\oint_{x^2+y^2=a^2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\alpha$，方向取正向.

解： 取曲线的参数表示为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_{x^2+y^2=a^2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

【注】由上可知 $\vec{f} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ 在 $\mathrm{R}^2/\{O\}$ 上不是保守场，虽然它满足 $\dfrac{\partial\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}$.

向量场为有势场的充分条件

定义 对 $D \subset \mathrm{R}^n$ 为开集，若 $\forall a, b \in D$, $\overline{ab} \in D$, 则称 D 为**凸集**.

定理 设 $\vec{f}: \mathrm{R}^n \supset G \to \mathrm{R}^n$ 连续可导的向量场, G 是 R^n 的凸集，则 $\vec{f}$ 在 G 内为保守场（有势场）当且仅当 $D_i f_j = D_j f_i \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

【注】以上定理的结论可以推广到单连通区域上.

定理 设 $D \subset \mathrm{R}^2$ 为单连通区域，$P(x, y)$, $Q(x, y)$ 连续可导, 则以下命题等价：

(1) $\vec{f} = (P, Q)$ 在 D 内为保守场（有势场）；

(2) $\vec{f}$ 在 D 内的曲线积分与路径无关；

(3) $\vec{f}$ 在 D 内沿任意分段光滑的闭曲线的曲线积分为零；

(4) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内每一点皆成立.

【注】对 R^3 上的单连通区域有相同的结论.

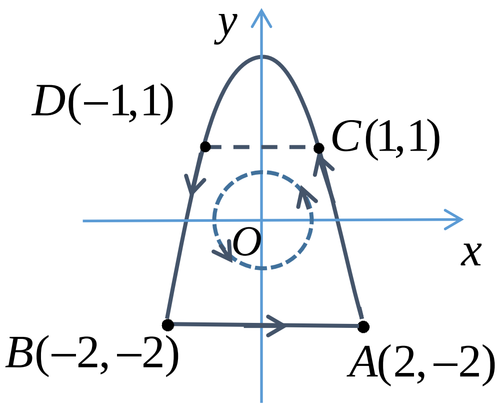
曲线积分例题

例 4 计算 $\int_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 为

(1) 从 $A(2,-2)$ 沿 $y=2-x^2$ 到 $B(-2,-2)$ 再沿直线 $y=-2$ 到 A.

(2) 从 $C(1,1)$ 沿 $y=2-x^2$ 到 $D(-1,1)$.

(3) 从 $A(2,-2)$ 沿 $y=2-x^2$ 到 $B(-2,-2)$.



解：记 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 因此有

$$(1)\ \int_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{x^2+y^2=a^2\text{(正向)}} \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\pi.$$

$$(2)\ \int_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{x^2+1^2}=-\arctan x\Big|_1^{-1}=\frac{\pi}{2}.$$

$$(3)\ \int_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\pi-\int_{BA}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\pi-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1^2}=\frac{3\pi}{2}.$$


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY