# 电路分析与电子技术基础

## 互感电路

（5.3.1 ~ 5.3.4）

- 互感电路

  - 互感电路（5.3.1 ~ 5.3.2）

  - 互感电路计算（5.3.3）

  - 变压器（5.3.4）

## v 互感电路

ü 磁路基本概念：

若一个线圈的自身电流发生变化，会引起线圈磁通变化。

ü 电磁感应定律：

若穿过线圈的磁力线（磁通）发生变化，则线圈中会感应出电动势。

ü 自感现象：

由于线圈自身电流或磁通变化，在线圈中感应出电动势。

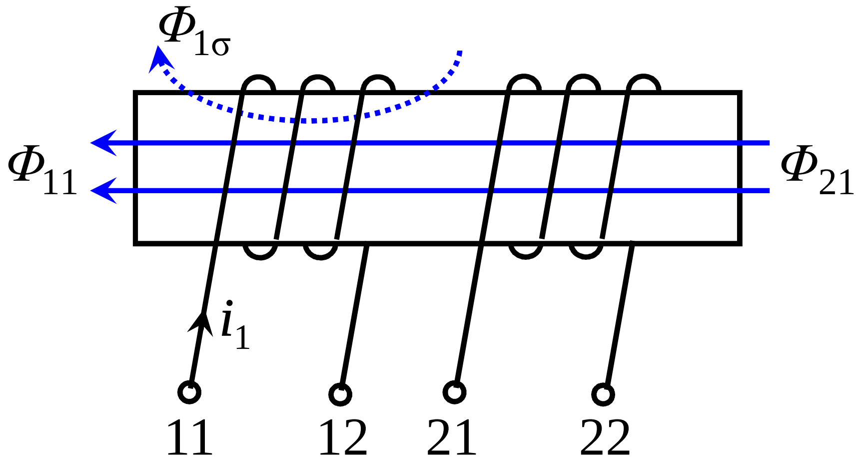
ü 互感现象：

在两个线圈非常靠近时，若其中某个线圈的电流或磁通变化，会导致另一个线圈的磁力线发生变化，从而在另一个线圈中感应出电动势。

ü 电磁耦合

（广泛存在于电气工程中，可用于电路能量的传递和电路信号的变换）

## Ø 互感电路（基本参数：磁通）




- 两个位置靠近的线圈 1、2：
  （匝数分别为 $N_1$、$N_2$）

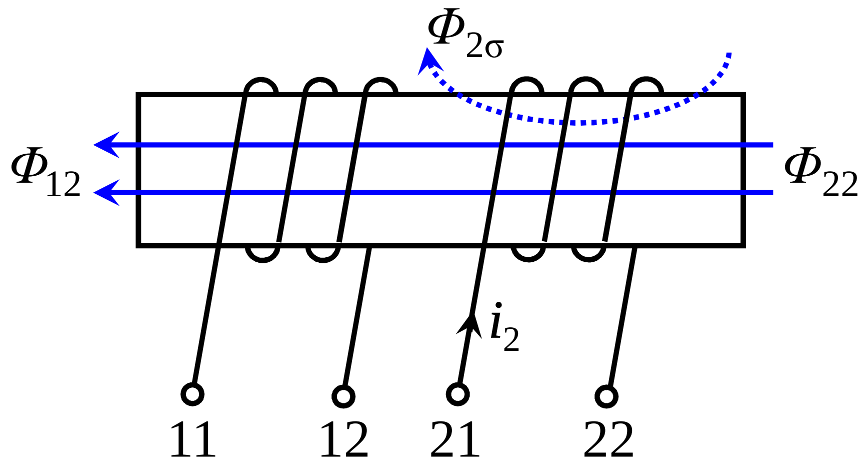
- 自磁通 $\Phi_{11}$：由线圈 1 中的电流 $i_1$ 产生（方向符合右手螺旋法）。
  自感系数：$L_1 = \dfrac{N_1\Phi_{11}}{i_1} = \dfrac{\Psi_{11}}{i_1}$（$\Psi_{11}$ 自感磁链）

- 互感磁通 $\Phi_{21}$：自磁通 $\Phi_{11}$ 中穿越线圈 2 的部分。
  互感系数：$M_{21} = \dfrac{N_2\Phi_{21}}{i_1} = \dfrac{\Psi_{21}}{i_1}$（单位：H，亨利）（$\Psi_{21}$ 互感磁链）

- 漏磁通 $\Phi_{1\sigma}$：自磁通 $\Phi_{11}$ 中只穿越线圈 1 的部分。
  漏感系数：$L_{1\sigma} = \dfrac{N_1\Phi_{1\sigma}}{i_1} = \dfrac{\Psi_{1\sigma}}{i_1}$ （$\Psi_{1\sigma}$ 漏感磁链）

- 磁通关系：$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{1\sigma}$

## Ø 互感电路（基本参数：磁通）




ü 单独定义线圈 2 电流 $i_2$：
（匝数分别为 $N_1$、$N_2$）。

ü 自磁通$\Phi_{22}$： 由线圈 2 中的电流 $i_2$ 产生（方向符合右手螺旋法）。
自感系数：$L_2 = \dfrac{N_2\Phi_{22}}{i_2} = \dfrac{\Psi_{22}}{i_2}$（$\Psi_{22}$ 自感磁链）

ü 互感磁通$\Phi_{12}$： 自磁通$\Phi_{22}$ 中穿越线圈 1 的部分。
互感系数：$M_{12} = \dfrac{N_1\Phi_{12}}{i_2} = \dfrac{\Psi_{12}}{i_2}$ （单位：H，亨利）（$\Psi_{12}$ 互感磁链）

ü 漏磁通$\Phi_{2\sigma}$： 自磁通$\Phi_{22}$ 中只穿越线圈 2 的部分。
漏感系数：$L_{2\sigma} = \dfrac{N_2\Phi_{2\sigma}}{i_2} = \dfrac{\Psi_{2\sigma}}{i_2}$ （$\Psi_{2\sigma}$ 漏感磁链）

ü 磁通关系：$\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{2\sigma}$

## Ø 互感电路（基本参数：磁通）

- ü 针对两个相对静止的线圈，互感系数是相等的：

$$M_{21} = M_{12} = M$$

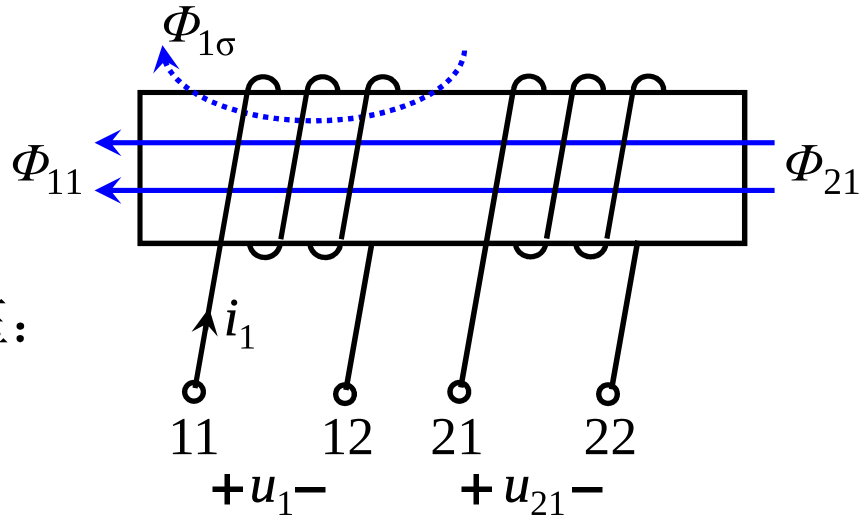
- ü 耦合系数：用于衡量两个线圈之间的耦合程度。

$$K = \sqrt{\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}} \cdot \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}}} \cdot \sqrt{\frac{\Psi_{12}}{\Psi_{22}}} = \sqrt{\frac{M}{L_1}} \cdot \sqrt{\frac{M}{L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

全耦合（$K = 1$）
无耦合（$K = 0$）
紧耦合（$K \to 1$）
松耦合（$K \to 0$）

- ü 耦合系数一般小于 1（存在漏磁通）。

## Ø 互感电路（互感电压）




- 以线圈 1 为基准，线圈 2 的互感电压：

$$u_{21} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = M\frac{di_1}{dt}$$

- 若以线圈 2 为基准，则线圈 1 的互感电压：

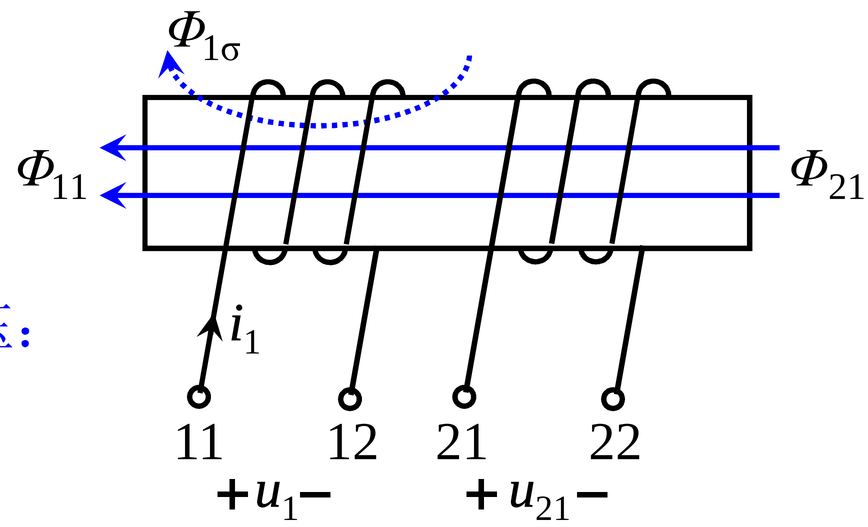
$$u_{12} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Psi_{12}}{dt} = M\frac{di_2}{dt}$$

- 针对正弦交流电路的相量形式表达式：

$$\dot{U}_{21} = j\omega M\dot{I}_1 = jX_M\dot{I}_1$$
$$\dot{U}_{12} = j\omega M\dot{I}_2 = jX_M\dot{I}_2$$

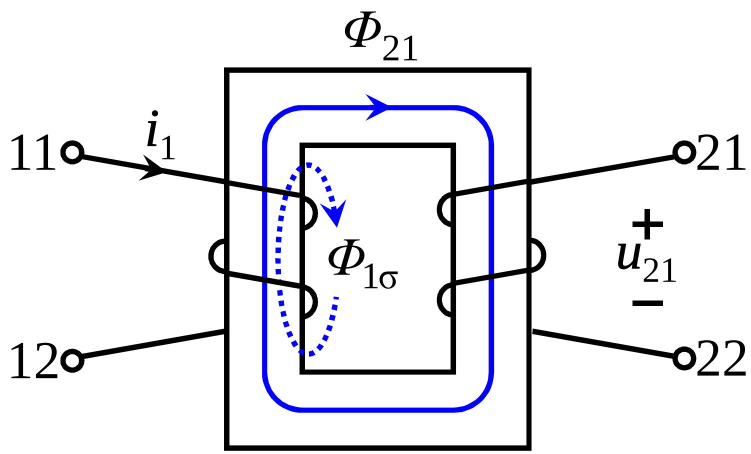
（互感电抗：$X_M = \omega M$）

## Ø 互感电路（互感电压）




ü 以线圈 1 为基准，线圈 2 的互感电压：

$$u_{21} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = M\frac{di_1}{dt}$$

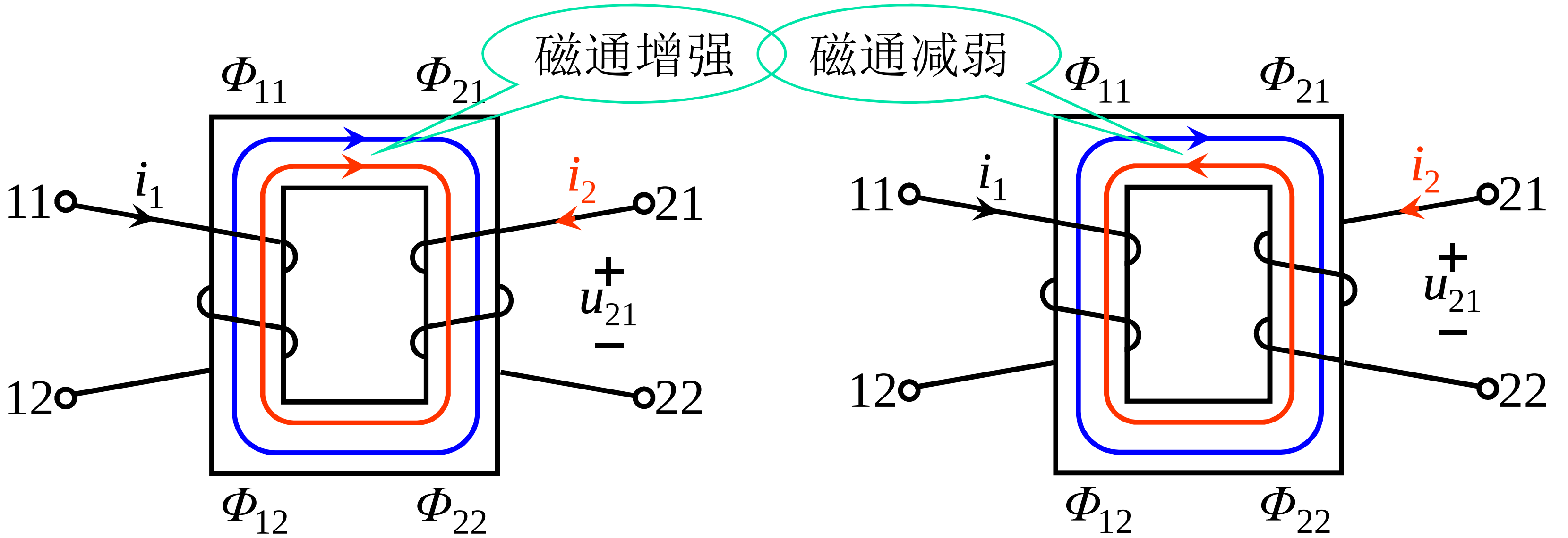



$$u_{21} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = M\frac{di_1}{dt}$$

*互感电压的方向，与互感元件的绕向结构有关。*

## Ø 互感电路（同名端）

ü 同名端：用于标记绕向结构，方便判断互感电压的方向。




$$u_{21} = M\frac{di_1}{dt}$$

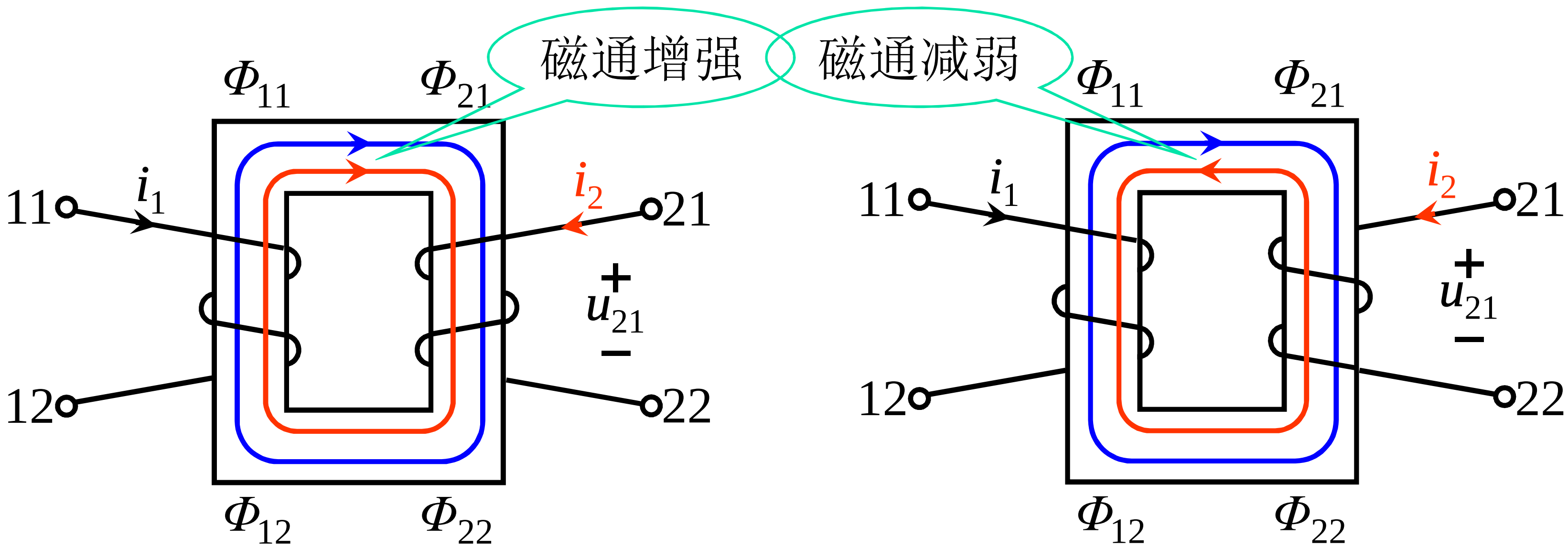
$$u_{21} = -M\frac{di_1}{dt}$$

ü 标记方法：在另一线圈的某一端加入电流，从磁通关联的角度看。

*互感电压的方向，与互感元件的绕向结构有关。*

# 互感电路（同名端）

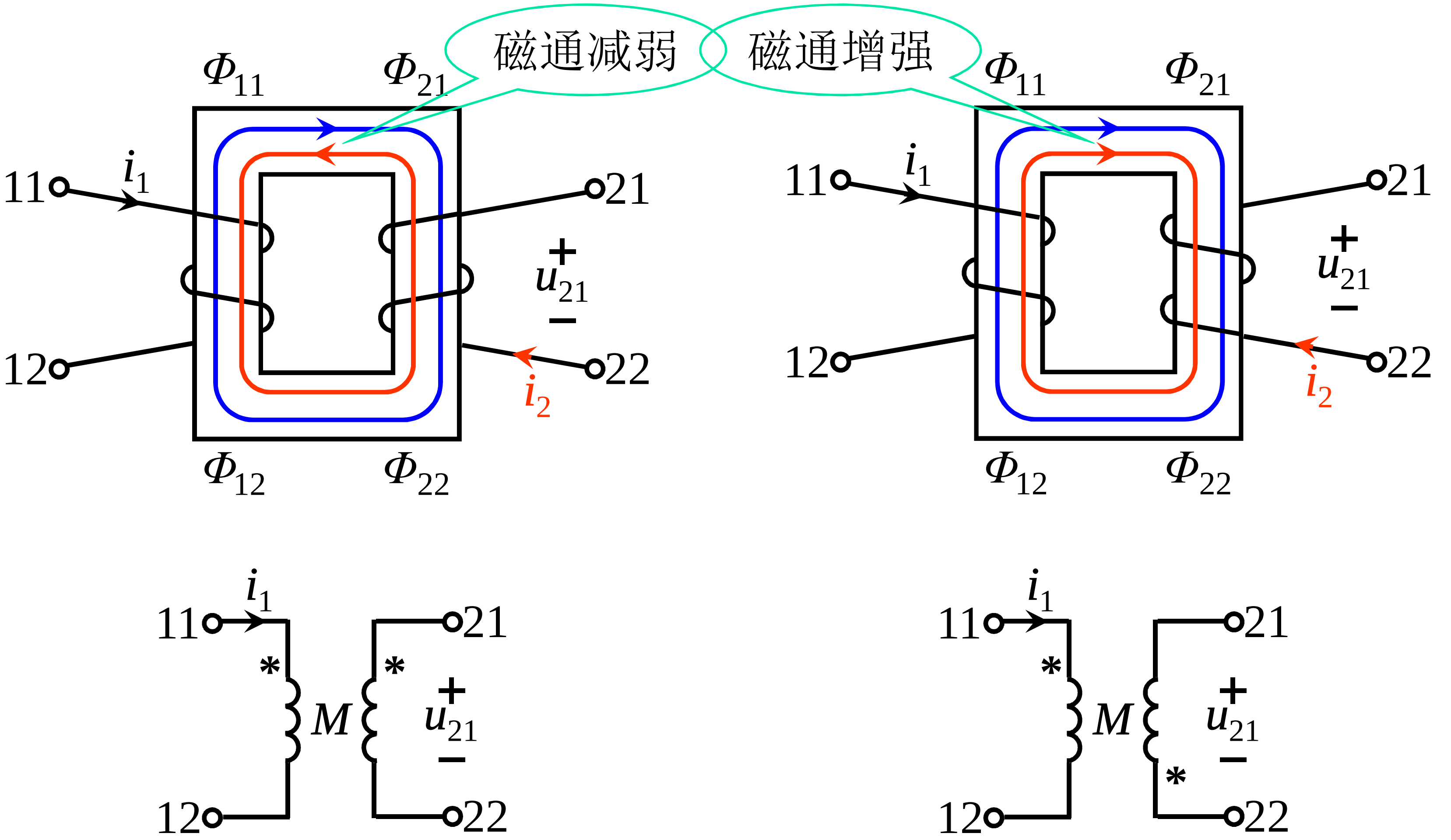
- 同名端：使磁通增强的两个电流端。




- 符号图：

## Ø 互感电路（同名端）

ü 同名端：省略了线圈、绕向、电流等的判断，方便判断互感电压的方向。



## Ø 互感电路（同名端）

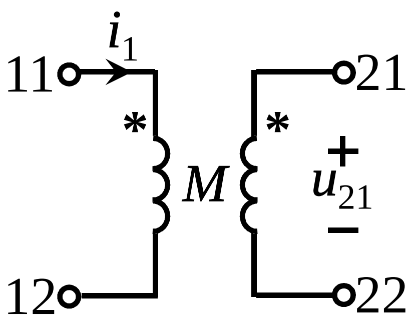
ü 若：

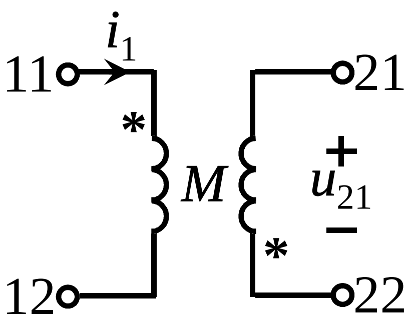
（1）参考电流方向为流入同名端；

（2）互感电压的参考方向从同名端指向非同名端；

则：互感电压表达式为正，否则为负。

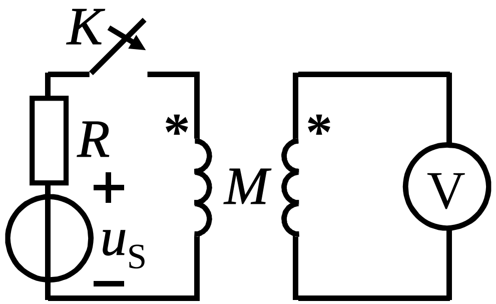
ü 两个以上线圈的同名端表示方法（书 P211 图5.3.4）。



Ø 互感电路（同名端）

ü 同名端的实验测量法。

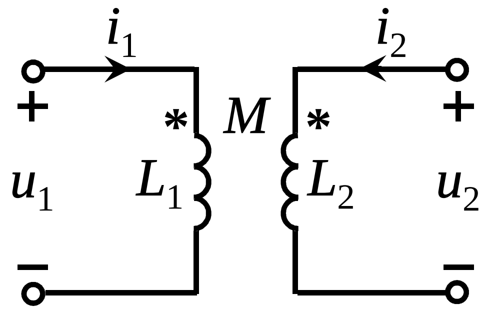



（1）合上开关 *K*；

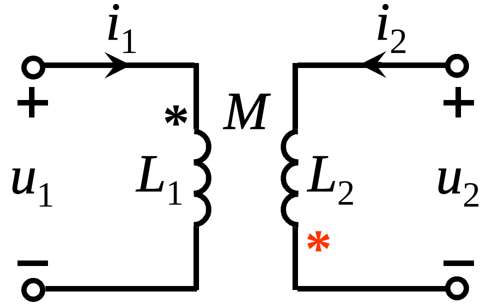
（2）若电压表指示正值，说明图示同名端正确。

## Ø 互感电路（感应电压）

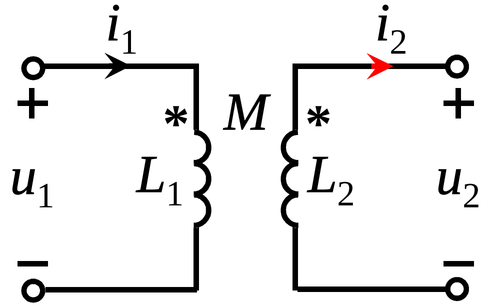
$$\begin{cases} u_1 = u_{\mathrm{L}1} + u_{\mathrm{M}1} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{\mathrm{L}2} + u_{\mathrm{M}2} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$



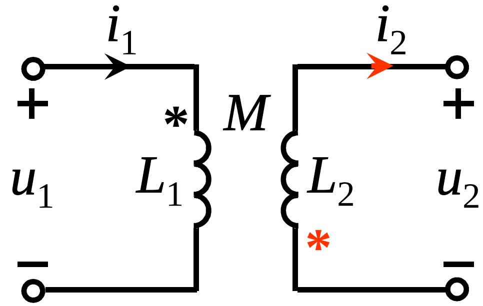

$$\begin{cases} u_1 = u_{\mathrm{L}1} + u_{\mathrm{M}1} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{\mathrm{L}2} + u_{\mathrm{M}2} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$




$$\begin{cases} u_1 = u_{\mathrm{L}1} + u_{\mathrm{M}1} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{\mathrm{L}2} + u_{\mathrm{M}2} = -L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

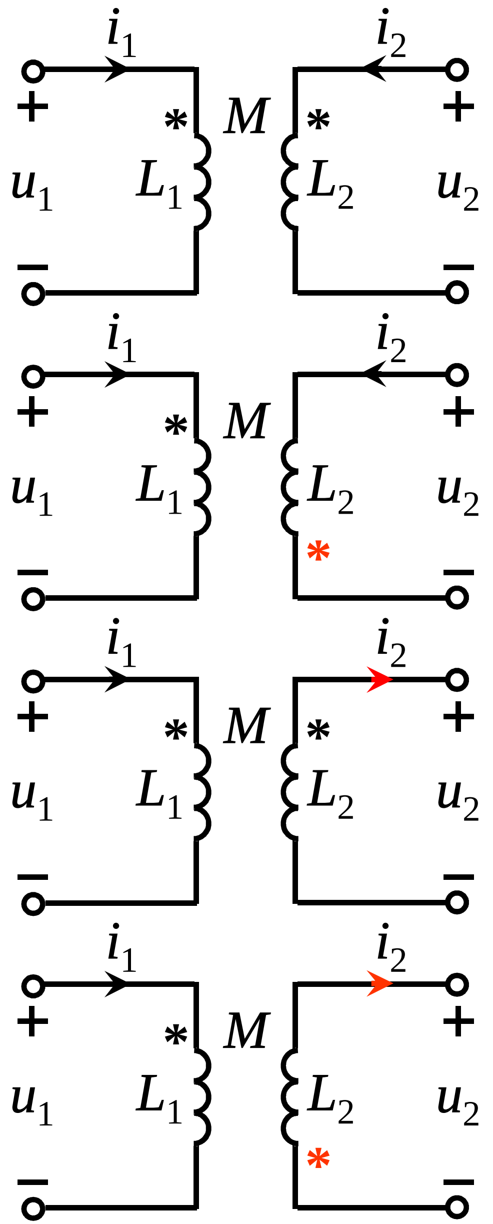



$$\begin{cases} u_1 = u_{\mathrm{L}1} + u_{\mathrm{M}1} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{\mathrm{L}2} + u_{\mathrm{M}2} = -L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$



## Ø 互感电路（感应电压）

$$\begin{cases} u_1 = u_{L1} + u_{M1} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{L2} + u_{M2} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$




### ü 相量形式表达式

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = jX_{L1}\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = jX_{L2}\dot{I}_2 + jX_M\dot{I}_1$$

# Ø 互感电路（感应电压）

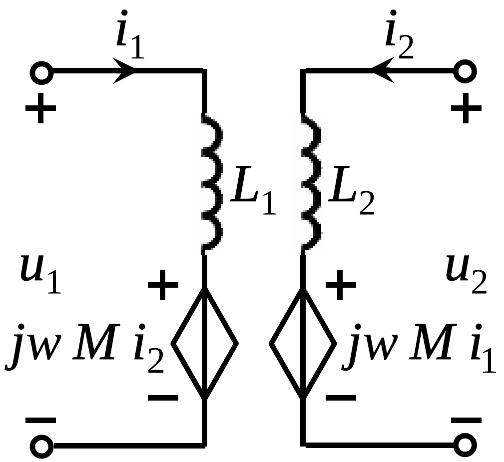
$$
\begin{cases}
u_1 = u_{L1} + u_{M1} = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\
u_2 = u_{L2} + u_{M2} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt}
\end{cases}
$$

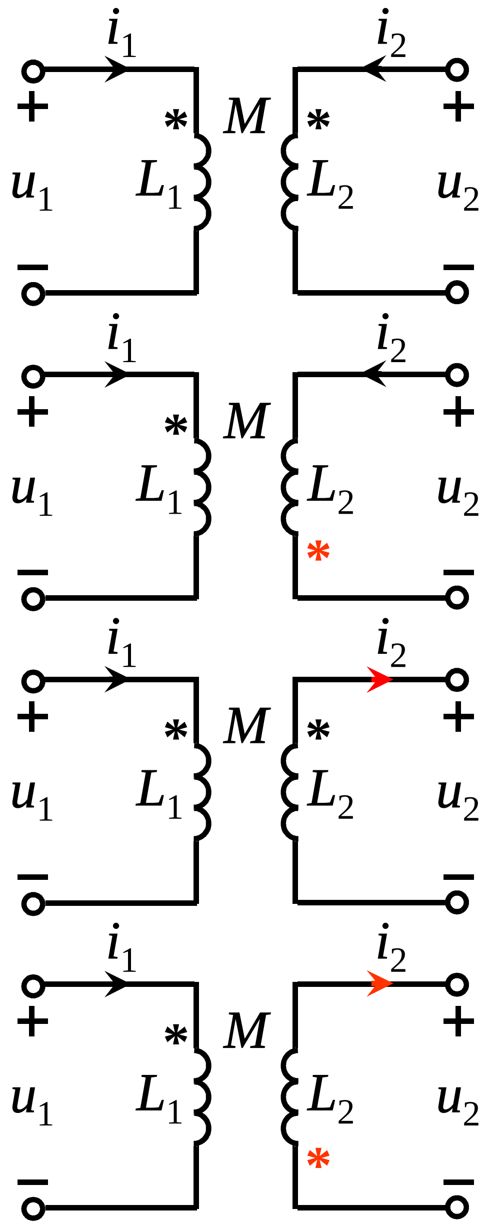
## ü 相量形式表达式

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = jX_{L1}\dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = jX_{L2}\dot{I}_2 + jX_M \dot{I}_1$$

## ü 受控源表示形式



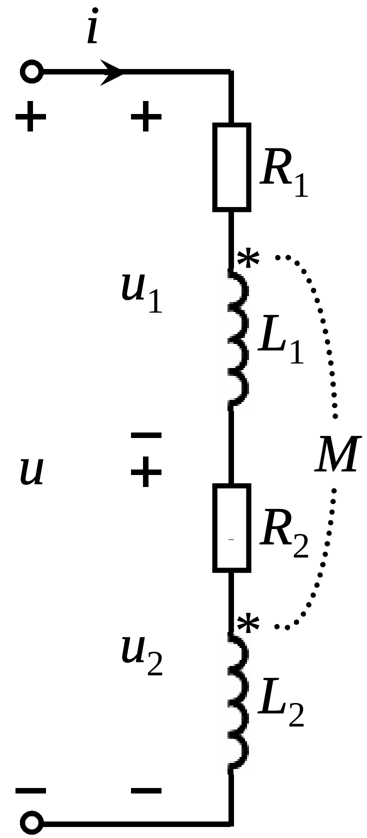
## 互感电路计算

- 互感线圈的串并联方式。
- 互感电路的等效变换。
- 互感电路计算。

## Ø 互感线圈串联（顺向）

ü （右图所示）两个互感耦合线圈。

线圈 1 电阻 $R_1$， 自感 $L_1$；
线圈 2 电阻 $R_2$， 自感 $L_2$；
两线圈互感系数 $M$ （顺向串联）。




ü 由电路，得：

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$= \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M\dot{I} + \dot{I}(R_2 + j\omega L_2) + j\omega M\dot{I}$$

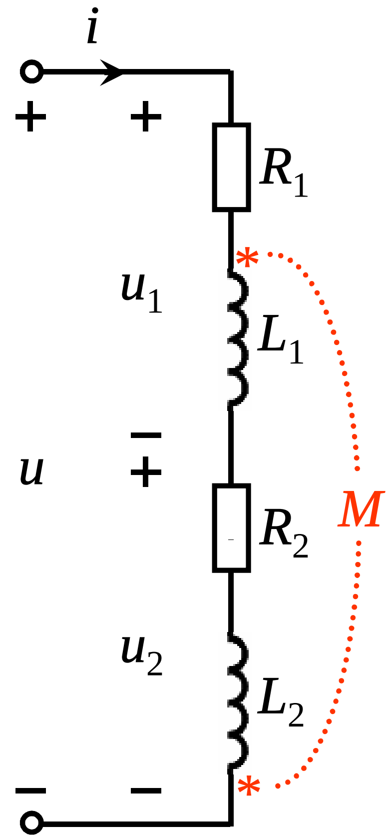
所以，电路等效阻抗为：

$$Z = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

即，等效电感为：$L = L_1 + L_2 + 2M$

磁通增强

## Ø 互感线圈串联（反向）




ü （右图所示）两个互感耦合线圈。

线圈 1 电阻 $R_1$， 自感 $L_1$；
线圈 2 电阻 $R_2$， 自感 $L_2$；
两线圈互感系数 $M$ （反向串联）。

ü 由电路，得：

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$= \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) - j\omega M\,\dot{I} + \dot{I}(R_2 + j\omega L_2) - j\omega M\,\dot{I}$$

所以，电路等效阻抗为：

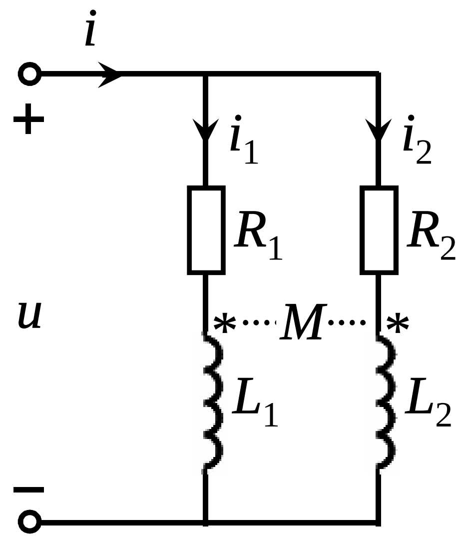
$$Z = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

即，等效电感为：$L = L_1 + L_2 - 2M$

*提供了一种测量互感系数的方法。*

*磁通减弱*

## Ø 互感线圈并联（顺向）




ü （右图所示）两个互感耦合线圈。

线圈 1 电阻 $R_1$， 自感 $L_1$；
线圈 2 电阻 $R_2$， 自感 $L_2$；
两线圈互感系数 $M$ （顺向并联）。

ü 由电路，得：

$$\dot{U} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M\,\dot{I}_2 = Z_1\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2$$

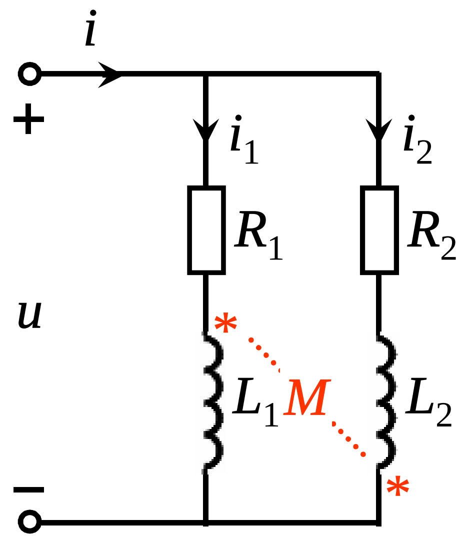
$$\dot{U} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + j\omega M\,\dot{I}_1 = Z_2\dot{I}_2 + Z_M\dot{I}_1$$

可求出电流 $i_1$ 、 $i_2$ 分别关于电压 $u$ 的函数关系式，且：

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}\dot{U}$$

所以，电路等效阻抗为：$Z = \dfrac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}$

## 互感线圈并联（反向）




- （右图所示）两个互感耦合线圈。

  线圈 1 电阻 $R_1$， 自感 $L_1$；
  线圈 2 电阻 $R_2$， 自感 $L_2$；
  两线圈互感系数 $M$ （反向并联）。

- 由电路，得：

$$\dot{U} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - j\omega M\,\dot{I}_2 = Z_1\dot{I}_1 - Z_M\dot{I}_2$$

$$\dot{U} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - j\omega M\,\dot{I}_1 = Z_2\dot{I}_2 - Z_M\dot{I}_1$$

可求出电流 $i_1$ 、 $i_2$ 分别关于电压 $u$ 的函数关系式，且：

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}\dot{U}$$

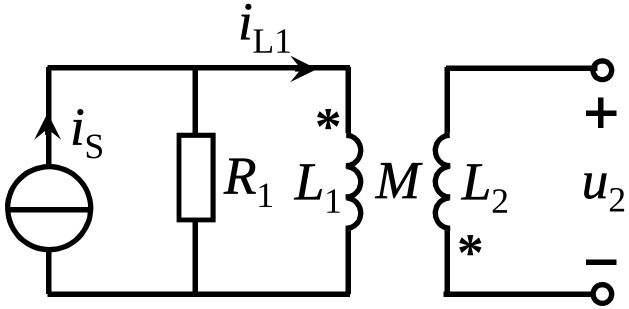
所以，电路等效阻抗为：$Z = \dfrac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}$

【例3.1】

右图所示电路（各元件参数已知）

定义：$i_S = \sqrt{2} I_S \sin \omega t$

求：开路电压 $u_2$ 。




解：$u_2$ 中只包含互感电压。

（$u_1$ 呢？）

以电流 $i_S$ 为参考相量：$\dot{I}_S = I_S \angle 0^\circ$

则：$\dot{I}_{L1} = \dot{I}_S \dfrac{R_1}{R_1 + j\omega L_1}$

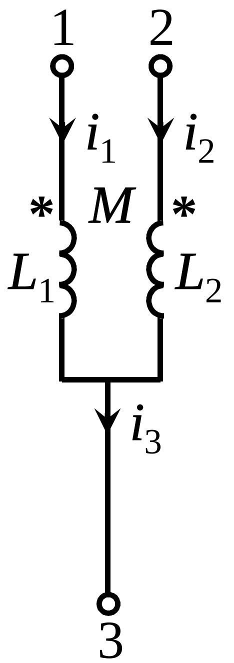
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_{L1}$$

例：$R_1 = 1\Omega$，$X_{L1} = 1\Omega$，$X_{L2} = 2\Omega$，$X_M = 0.5\Omega$，$I_S = 10\text{A}$

则：$\dot{I}_{L1} = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{A}$ $\quad \dot{U}_2 = -2.5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{V}$

所以：$u_2 = 5\sin(\omega t - 135^\circ)\text{V}$

## Ø 互感电路的等效变换（去耦法）




- ü （右图所示）同名端相连的互感电路。
- ü 由电路，得：

$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

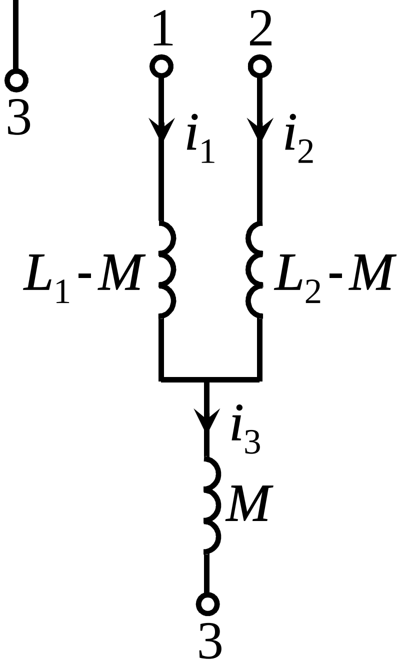
$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

由于 $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$，所以上式可改写为：

$$\dot{U}_{13} = (j\omega L_1 - j\omega M)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_3$$

$$\dot{U}_{23} = (j\omega L_2 - j\omega M)\dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3$$

所以，电路可等效为右图所示。

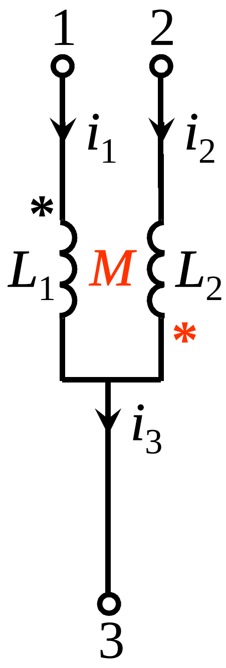



*互感消去法*

*等效电路与电流的参考方向无关。*

## 互感电路的等效变换（去耦法）

- （右图所示）异名端相连的互感电路。




- 由电路，得：

$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$$

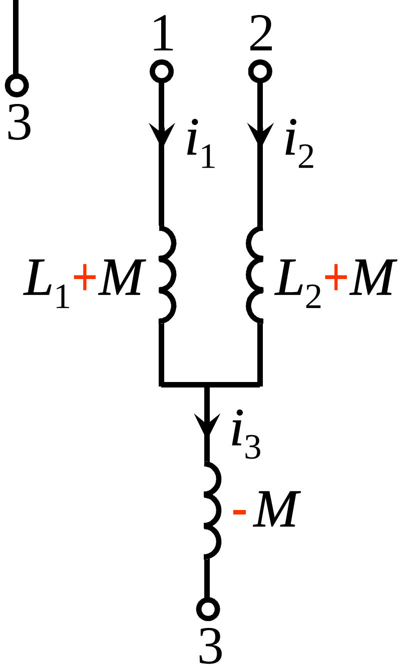
$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1$$

由于 $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$，所以上式可改写为：

$$\dot{U}_{13} = (j\omega L_1 + j\omega M)\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_3$$

$$\dot{U}_{23} = (j\omega L_2 + j\omega M)\dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_3$$

所以，电路可等效为右图所示。

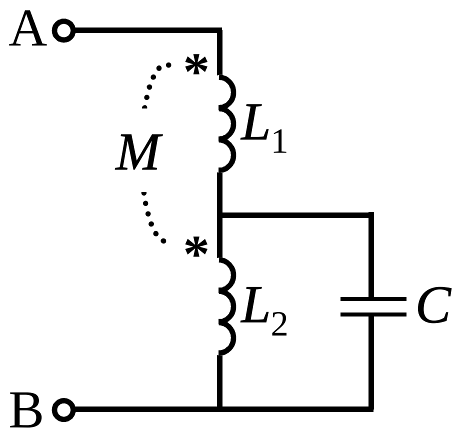



*等效电路与同名端的连接方式有关。*

【例3.2】

右图所示电路。

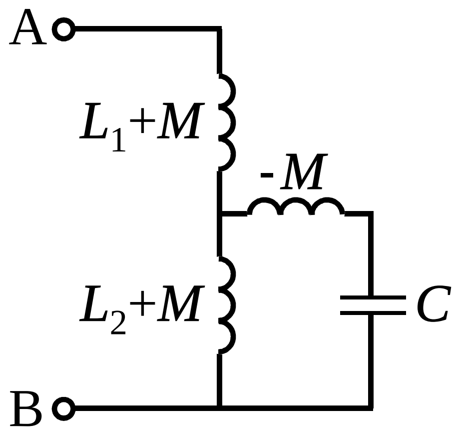
求：*AB* 端口的等效阻抗。




解：根据去耦法等效原电路（如右下图所示）。

等效阻抗为：

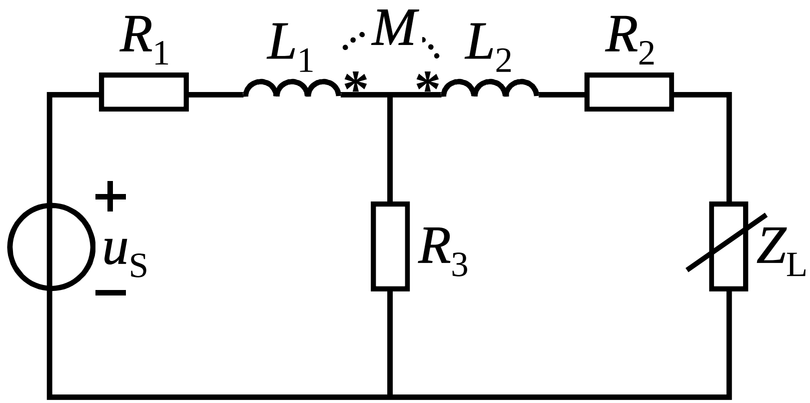
$$Z_{\mathrm{AB}} = jw(L_1 + M) + jw(L_2 + M)//(-jwM - j\frac{1}{wC})$$



【例3.3】

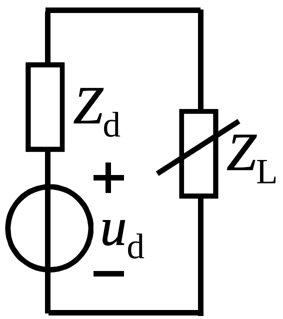
右图所示电路。

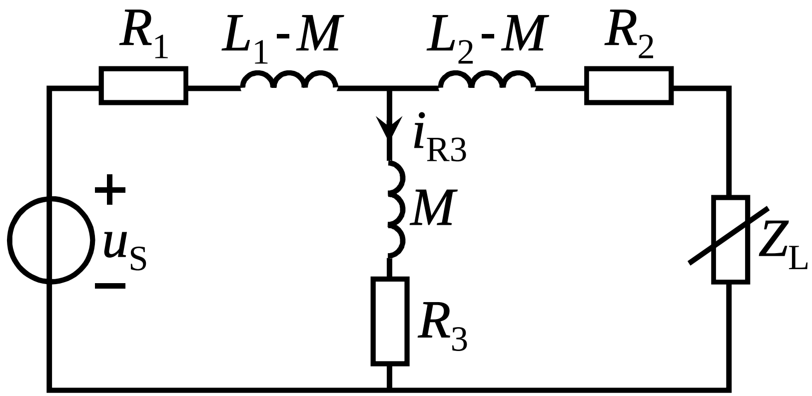
求：最大输出功率时的负载 $Z_L$ 。




解：根据去耦法等效原电路（如右下图所示）。

此电路的戴维宁等效如下图所示。

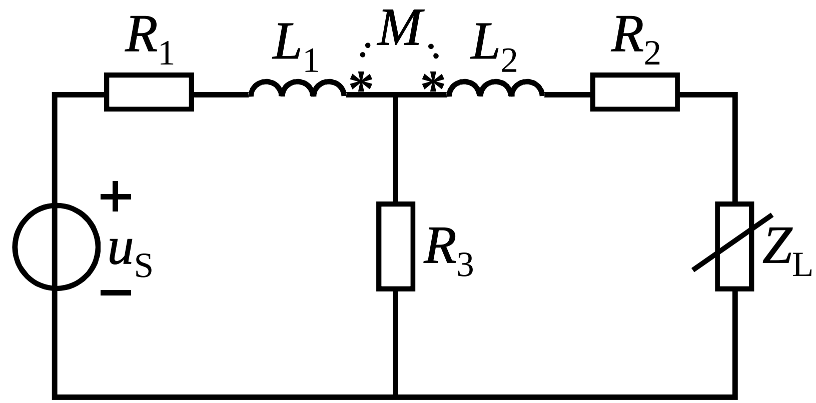



根据最大功率传输定理，当 $Z_L = \overset{*}{Z}_d$ 时，负载上获得最大功率。

右图所示电路。

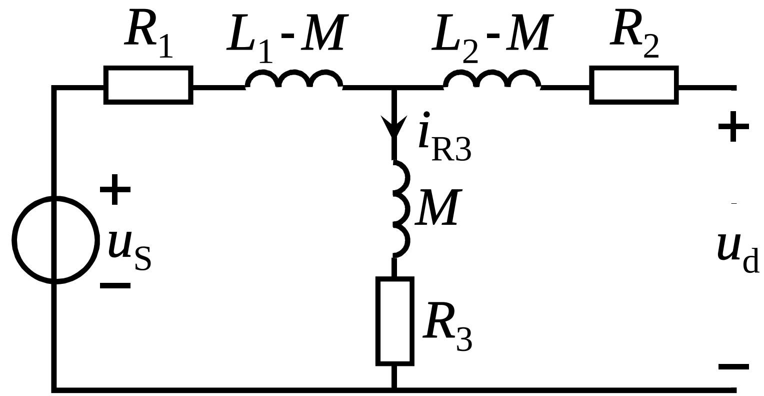
求：最大输出功率时的负载 $Z_{\mathrm{L}}$ 。




解：根据右图求戴维宁等效电压：

$$\dot{U}_{\mathrm{d}} = (j\omega M + R_3)\dot{I}_{\mathrm{R3}}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{R3}} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{R_1 + j\omega L_1 + R_3}$$



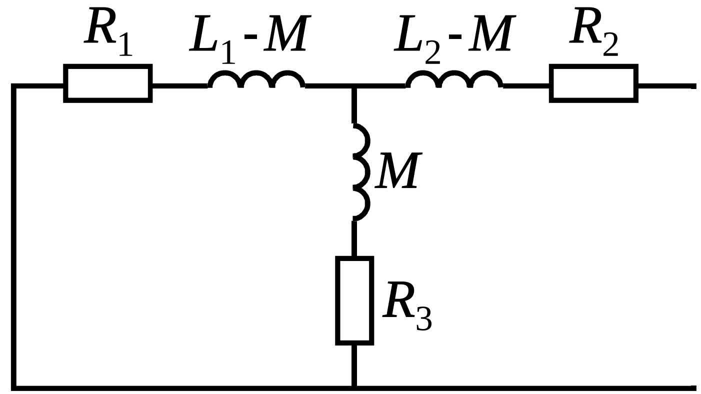

根据右下图求戴维宁等效内阻：

$$Z_{\mathrm{d}} = R_2 + j\omega(L_2 - M) + [R_1 + j\omega(L_1 - M)]//[j\omega M + R_3]$$

$$= R_{\mathrm{d}} + jX_{\mathrm{d}}$$

所以，当 $Z_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{d}} - jX_{\mathrm{d}}$ 时，

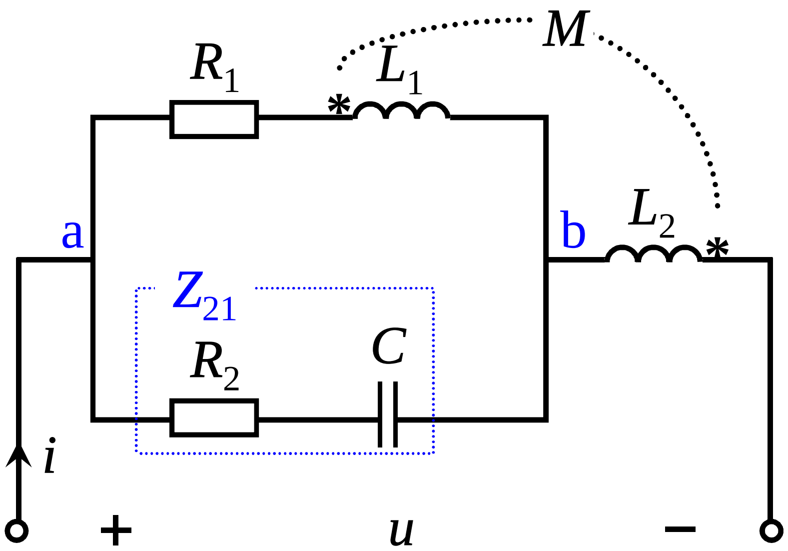
可得最大输出功率：$P_{\max} = \dfrac{U_{\mathrm{d}}^2}{4R_{\mathrm{d}}}$



【例3.4】

右图所示电路。

求：$P_{ab}$ 及电路的总功率 $P$ 。




解：根据去耦法等效原电路（右下图）。

$$Z_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_M)$$
$$Z_2 = R_2 + j(-X_C + X_M)$$
$$Z_3 = j(X_{L2} - X_M)$$
$$Z_{21} = R_2 - jX_C$$

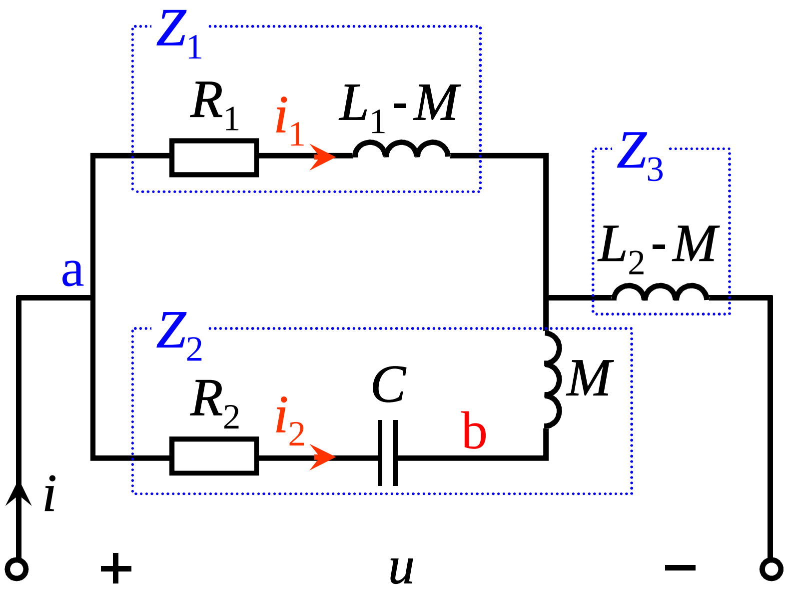
据电路，有：$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{Z_1 // Z_2 + Z_3}$

可推导出：$\dot{I}_1 = \dot{I} \cdot \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$， $\dot{I}_2 = \dot{I} \cdot \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_2 \cdot Z_{21}$$

所以：$P_{ab} = U_{ab} I \cos(\dot{U}_{ab}, \dot{I})$

$$P = U I \cos(\dot{U}, \dot{I})$$



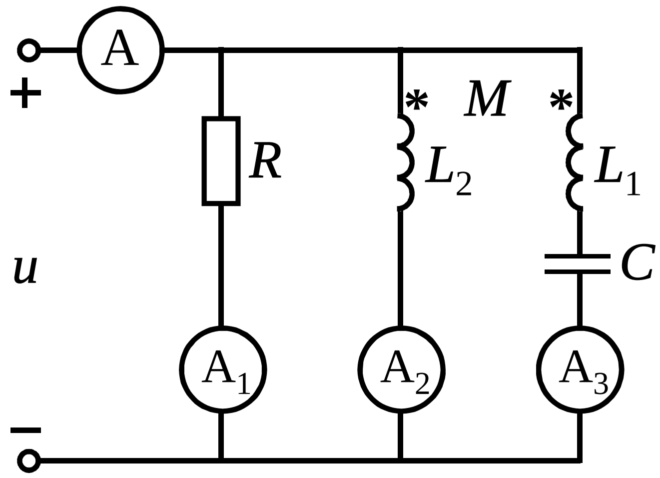
【例3.5】

右图所示电路。

已知：$U$、$R$、$L_1$、$L_2$、$M$；

调节 $C$ 使电路发生电流谐振。

求：$C$ 及电流表的读数。




解：根据去耦法等效原电路（右下图）。

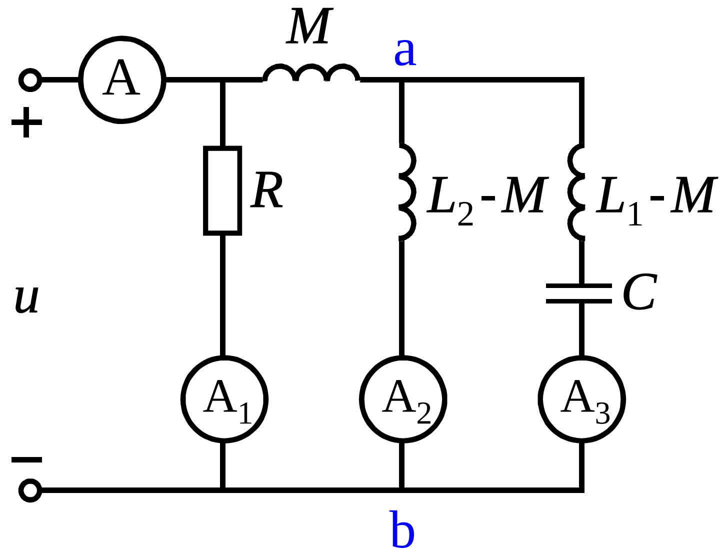
当电路发生电流（并联）谐振时：

$$\frac{1}{jw(L_2-M)}+\frac{1}{jw(L_1-M)+\dfrac{1}{jwC}}=0$$

由此，可求得 $C$ 。

由于发生了电流谐振（$ab$ 断路）：

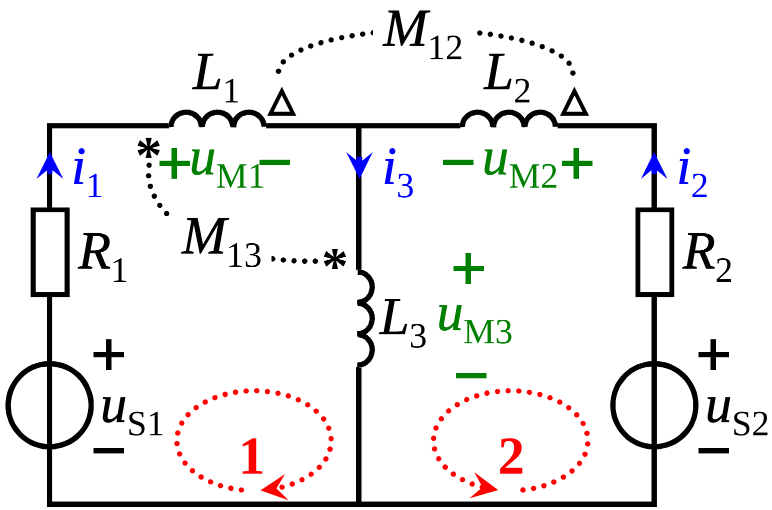
$$I_{\mathrm{A}}=I_{\mathrm{A1}}=\frac{U}{R},\quad I_{\mathrm{A2}}=I_{\mathrm{A3}}=\frac{U}{w(L_2-M)}$$




*$a\sim b$ 对外等效断路*

【例3.6】

分析右图所示电路。




解：定义各支路电流。

并，以此得各互感电压方向。

定义两个回路。

列回路方程（支路电流法）：

$$\dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_3(j\omega L_3) = \dot{U}_{S1} - \dot{U}_{M1} - \dot{U}_{M3}$$

$$\dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + \dot{I}_3(j\omega L_3) = \dot{U}_{S2} - \dot{U}_{M2} - \dot{U}_{M3}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

其中：$\dot{U}_{M1} = \dot{I}_2(-j\omega M_{12}) + \dot{I}_3(j\omega M_{13})$

$$\dot{U}_{M2} = \dot{I}_1(-j\omega M_{21})$$

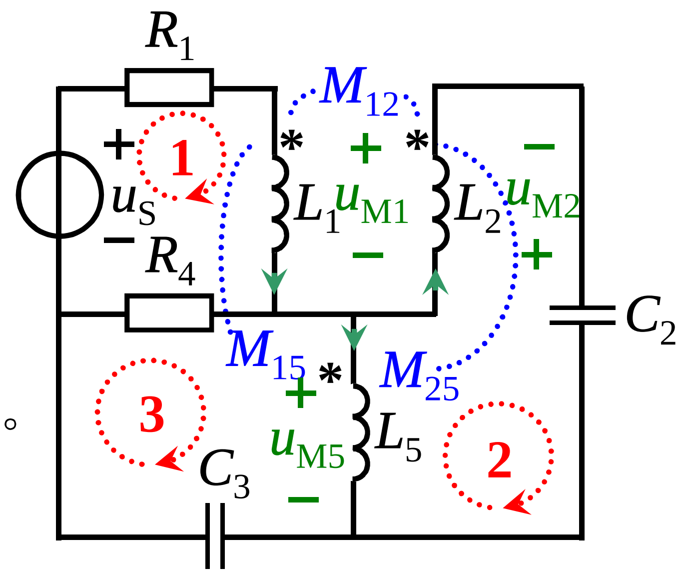
$$\dot{U}_{M3} = \dot{I}_1(j\omega M_{31})$$

*为便于分析复杂互感电路，一般采用支路电流法、回路电流法求解。*

【例3.7】

分析右图所示电路。

已知：互感关系




解：定义三个回路。

定义三个电感电流（可得各互感电压方向）。

列回路方程：

$$\dot{I}_{\mathrm{m1}}(R_1+jX_{\mathrm{L1}}+R_4)-\dot{I}_{\mathrm{m3}}(R_4)=\dot{U}_{\mathrm{S}}-\dot{U}_{\mathrm{M1}}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{m2}}(jX_{\mathrm{L5}}+jX_{\mathrm{L2}}-jX_{\mathrm{C2}})-\dot{I}_{\mathrm{m3}}(jX_{\mathrm{L5}})=\dot{U}_{\mathrm{M5}}-\dot{U}_{\mathrm{M2}}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{m3}}(R_4+jX_{\mathrm{L5}}-jX_{\mathrm{C3}})-\dot{I}_{\mathrm{m1}}(R_4)-\dot{I}_{\mathrm{m2}}(jX_{\mathrm{L5}})=-\dot{U}_{\mathrm{M5}}$$

其中：

$$\dot{U}_{\mathrm{M1}}=\dot{I}_{\mathrm{m2}}(-jX_{\mathrm{M12}})+(\dot{I}_{\mathrm{m3}}-\dot{I}_{\mathrm{m2}})(jX_{\mathrm{M15}})$$

$$\dot{U}_{\mathrm{M2}}=\dot{I}_{\mathrm{m1}}(-jX_{\mathrm{M21}})+(\dot{I}_{\mathrm{m3}}-\dot{I}_{\mathrm{m2}})(-jX_{\mathrm{M25}})$$

$$\dot{U}_{\mathrm{M5}}=\dot{I}_{\mathrm{m1}}(jX_{\mathrm{M51}})+\dot{I}_{\mathrm{m2}}(-jX_{\mathrm{M52}})$$

*为便于分析复杂互感电路，一般采用支路电流法、回路电流法求解。*

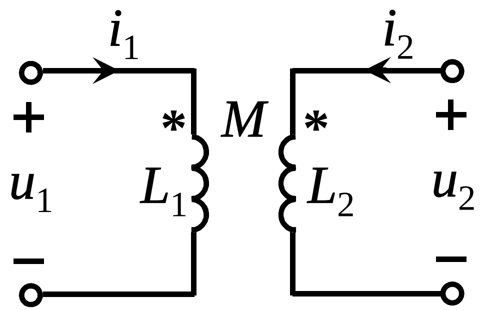
*书 P214例 5.3.1 ~ 5.3.2 采用的书写格式 ...*

## v 变压器

ü 变压器：

利用互感耦合，完成从一个电路向另一个电路传送信号或电能的器件。

ü 基本符号：



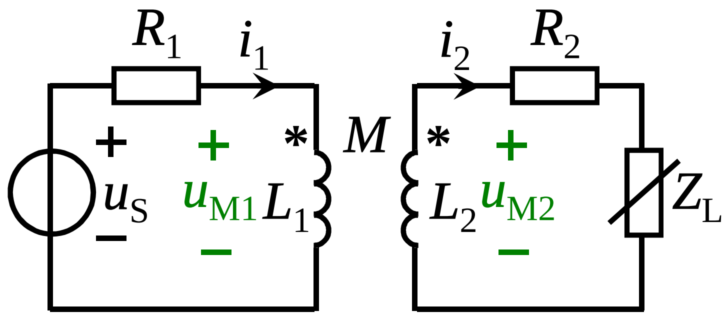

ü 原边（变压器的一次侧）：接信号源或电源的线圈；
副边（变压器的二次侧）：接负载的线圈。

ü 两线圈间以空气为磁介质相耦合，两个电路之间没有直接的电气连接。

ü 变压器是电子线路中常见的电磁耦合电路，能变换交流电压和电流。

## Ø 空心变压器

ü 空心变压器由两个绕在同一个非铁磁材料芯柱上的线圈组成。（原理线路图如右所示）。




ü 由电路，得：

$$\dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2(j\omega M) = \dot{U}_S$$

$$\dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2 + R + jX) - \dot{I}_1(j\omega M) = 0$$

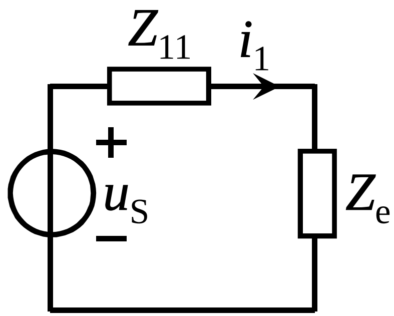
令：$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 \quad Z_{22} = (R_2 + R) + j(\omega L_2 + X)$

则：$\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$，$\dot{I}_2 = \dfrac{j\omega M}{Z_{22}}\dot{I}_1$

所以，输入阻抗为：$Z_{in} = \dfrac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$

## Ø 空心变压器

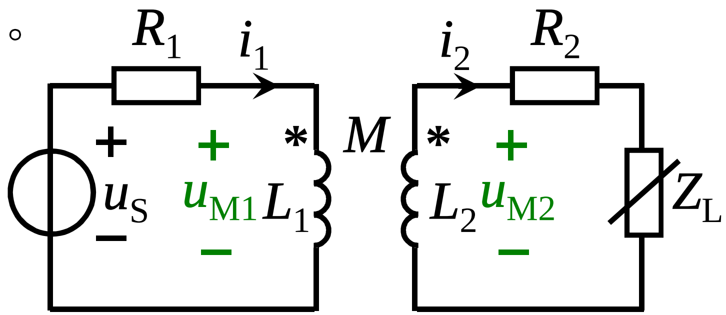
ü 右图，空心变压器的等效图（从一次侧）。




ü 若空载（即二次侧开路），输入阻抗为 $Z_{11}$。

接入负载后，（从一次侧看）相当于引入：

额外阻抗：$Z_e = \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$




（又称二次侧归算到一次侧的归算阻抗，
表示空心变压器二次侧电路对一次侧电路的影响。）

$$Z_e = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{(\omega M)^2}{R_{22} + jX_{22}} = \frac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j\frac{(\omega M)^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R_e + jX_e$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

## 空心变压器

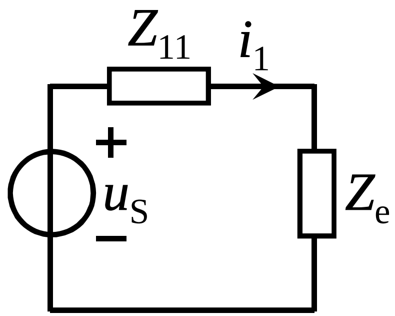
- 电源输出功率：

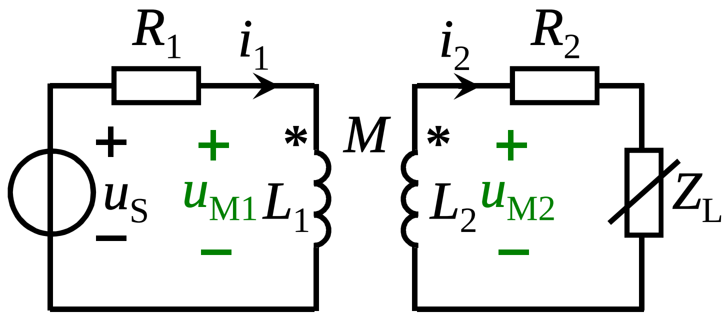
$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_S \overset{*}{I}_1$$

$$= \dot{I}_1 (Z_{11} + Z_e) \overset{*}{I}_1$$

$$= I_1^2[(R_1 + R_e) + j(X_{L1} + X_e)]$$

$$P = I_1^2 (R_1 + R_e)$$




- 副边获得功率：$P_2 = I_1^2 R_e = I_1^2 \dfrac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = I_2^2 (R_2 + R)$

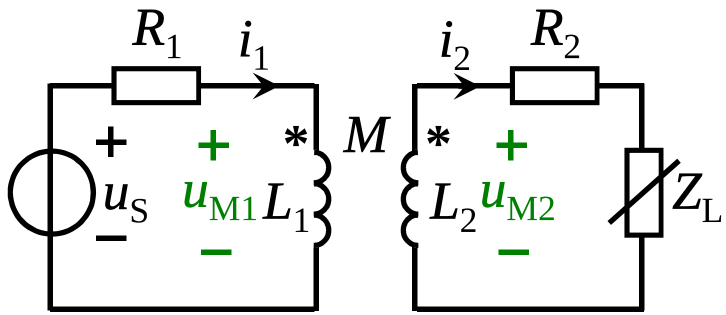
$$Z_e = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{(\omega M)^2}{R_{22} + jX_{22}} = \frac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j\frac{(\omega M)^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R_e + jX_e$$

**【例3.8】**

分析右下图所示电路。

已知：$L_1 = 0.025\text{H}$，$R_1 = 50\Omega$，$L_2 = 0.1\text{H}$，$R_2 = 200\Omega$，$M = 0.045\text{H}$，$U_S = 100\text{V}$, $\omega = 105\text{rad/s}$, $Z_L = (1000 + j500)\Omega$ 。

求：传输效率。




解：以电压源为参考相量 $\dot{U}_S = 100\angle 0^0 \text{V}$

并定义：$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$

$$Z_{22} = (R_2 + R) + j(\omega L_2 + X)$$

则：$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}} = 0.153\angle -65.8^0 \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M}{Z_{22}} \dot{I}_1 = 0.0652\angle -59.28^0 \text{A}$$

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_S \overset{*}{I}_1 = 15.31\angle 65.8^0 \text{VA} = 6.28\text{W} + j13.96\text{var}$$

$$\tilde{S}_2 = I_2^2 Z_L = 4.25\text{W} + j2.13\text{var}$$

所以：$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \times 100\% = 67.7\%$$

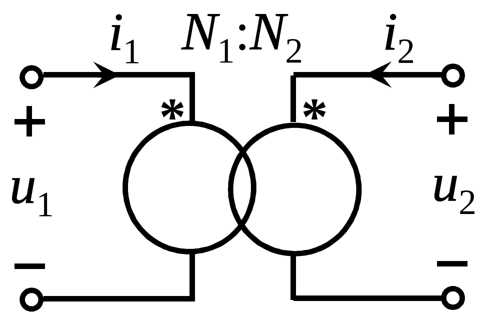
## Ø 理想变压器

ü 理想变压器的绕组绕在高导磁率材料上。

ü 基本条件：

（1）忽略原边和副边的电阻（本身不消耗能量）；
（2）无漏磁通（耦合系数等于1）；
（3）磁路材料的导磁率为无穷大（电感 $L_1$、$L_2$，互感 $M$ 均为无穷）。

ü 符号：



## Ø 理想变压器（磁通关系）

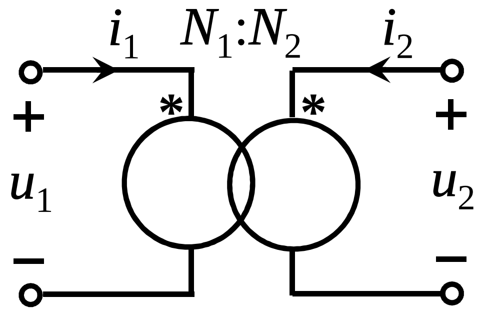
- 理想变压器无漏磁通（耦合系数等于 1）。
- 穿过一个线圈的磁通，必然全部穿过另一个线圈：$\begin{cases}\Phi_{11}=\Phi_{21}\\ \Phi_{22}=\Phi_{12}\end{cases}$
- 若两绕组产生的磁通是相互增强的，则：

$$\begin{cases}\Phi_1=\Phi_{11}+\Phi_{12}=\Phi_{11}+\Phi_{22}\\ \Phi_2=\Phi_{22}+\Phi_{21}=\Phi_{22}+\Phi_{11}\end{cases}$$

即，总磁通相等。

- 定义：$\Phi_0=\Phi_1=\Phi_2$，两绕组的公共磁通。

## 理想变压器（电压关系）




- 右图所示理想变压器：$\begin{cases} u_1 = N_1 \dfrac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \dfrac{d\Phi_0}{dt} \\ u_2 = N_2 \dfrac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \dfrac{d\Phi_0}{dt} \end{cases}$

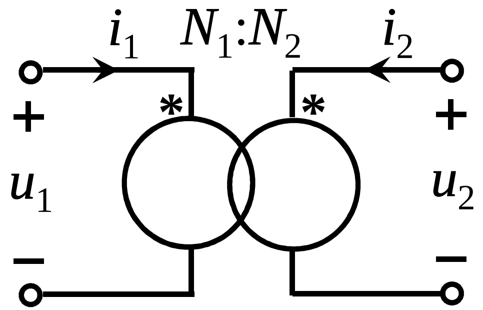
- 针对正弦交流电路，磁通 $\Phi_0$ 是角频率$\omega$的正弦函数，有：$\begin{cases} \dot{U}_1 = N_1 j\omega \dot{\Phi}_0 \\ \dot{U}_2 = N_2 j\omega \dot{\Phi}_0 \end{cases}$

- 两绕组电压之比：$\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = n$ 或 $\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = n$，且 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 同相。

  （$n$：理想变压器的变比）

- 定义：$\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi_2$，两绕组的公共磁通。

## Ø 理想变压器（电流关系）




ü 右图所示理想变压器：$u_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt}$

ü 针对理想变压器，电感 $L_1$、$L_2$，互感 $M$ 均为无穷：

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{M}{L_1}\cdot\frac{di_2}{dt}$$

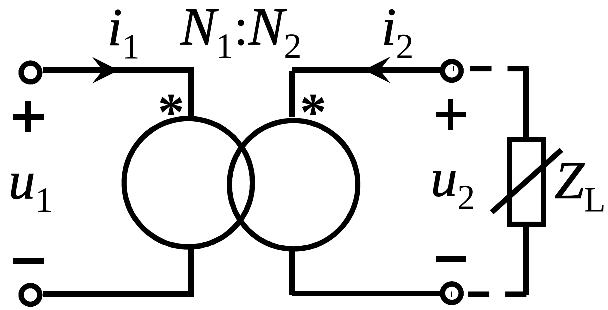
由于：$L_1 = \dfrac{N_1\Phi_{11}}{i_1}$，$M = \dfrac{N_2\Phi_{21}}{i_1} = \dfrac{N_2\Phi_{11}}{i_1}$

有：$\dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{N_2}{N_1}\cdot\dfrac{di_2}{dt}$

ü 针对正弦交流电路：$j\omega\dot{I}_1 = -\dfrac{N_2}{N_1}\cdot j\omega\dot{I}_2$

两绕组电流之比：$\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\dfrac{N_2}{N_1} = -\dfrac{1}{n}$，且 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 反相。

## 理想变压器（特点）




- 电压、电流变换：$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \quad \dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2$

- 阻抗变换：$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2\frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2} = n^2 Z_L$

  （$Z_1$：原边入端阻抗；$Z_L$：负载。）

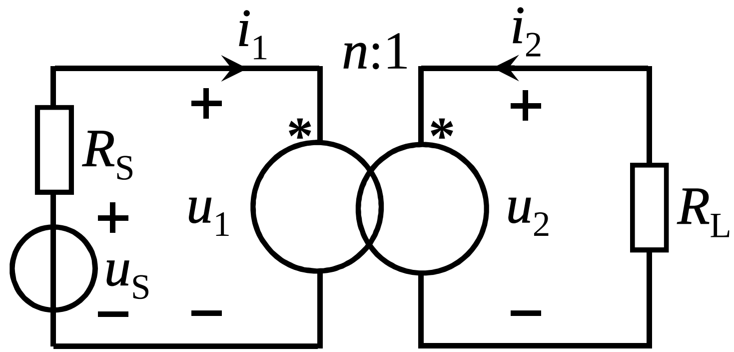
- 不消耗能量：$\tilde{S} = \dot{U}_1\overset{*}{I}_1 + \dot{U}_2\overset{*}{I}_2 = n\dot{U}_2(-\frac{1}{n}\overset{*}{I}_2) + \dot{U}_2\overset{*}{I}_2 = 0$

*理想变压器可以看作：一个对外具有两个连接端口的元件。*

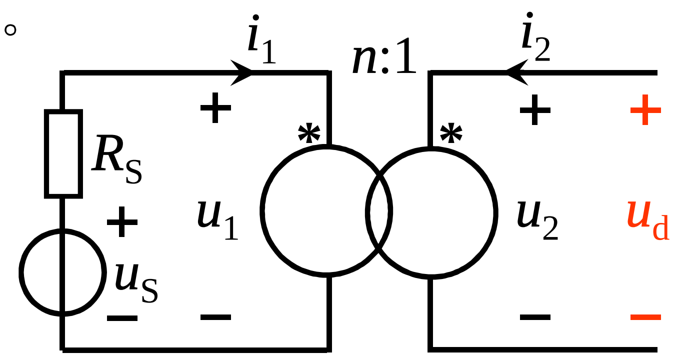
【例3.9】

右图所示电路（电路各参数已知）。

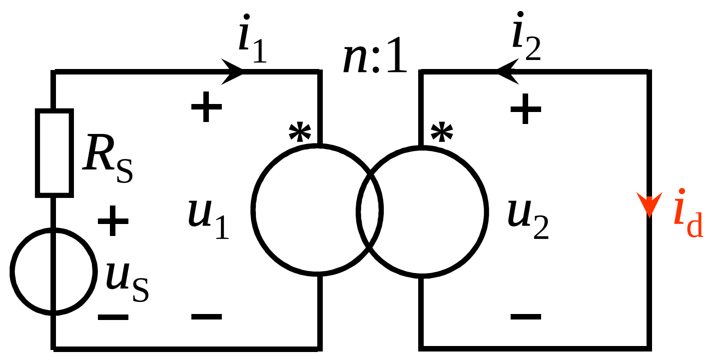
求：当理想变压器的变比 $n$ 为多少时，负载 $R_L$ 获得最大功率。




解：按开路短路法，求原电路的戴维宁等效。




（1）开路：$\begin{cases} \dot{I}_2 = 0 \quad \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 = 0 \\ \dot{U}_1 = \dot{U}_S \quad \dot{U}_d = \dot{U}_2 = \dfrac{1}{n}\dot{U}_S \end{cases}$




（2）短路：$\begin{cases} \dot{U}_2 = 0 \quad \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 = 0 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_S}{R_S} \quad \dot{I}_d = -\dot{I}_2 = n\dot{I}_1 = n\dfrac{\dot{U}_S}{R_S} \end{cases}$

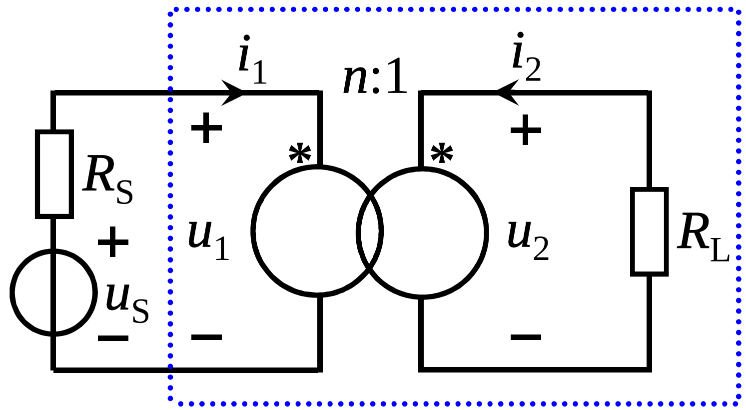
（3）最大输出功率时：$R_L = R_d = \dfrac{\dot{U}_d}{\dot{I}_d} = \dfrac{R_S}{n^2}$

所以，当 $n = \sqrt{\dfrac{R_S}{R_L}}$ 时，$P_{max} = \dfrac{U_d^2}{4R_d}$

【复例3.9】

右图所示电路。

求：当理想变压器的变比 $n$ 为多少时，负载 $R_L$ 获得最大功率。




解：将虚框内电路等效：$R'_L = n^2 R_L$

由于理想变压器不消耗功率，所以：

当 $R_S = R'_L$ 时，输出最大功率。

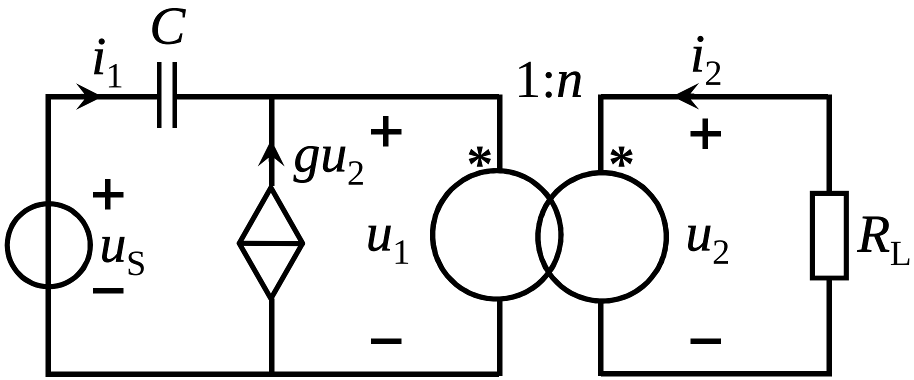
所以：$n = \sqrt{\dfrac{R_S}{R_L}}$

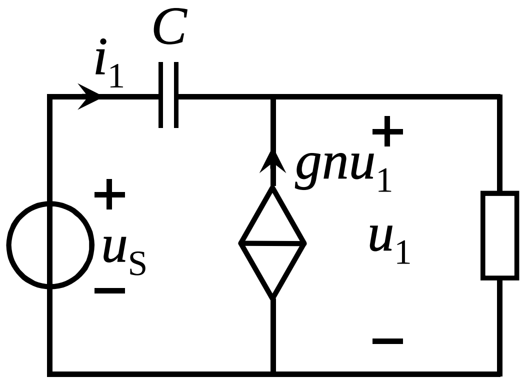
$$P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_S}$$

$$n = \sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \qquad P_{max} = \frac{U_d^2}{4R_d} \qquad R_d = \frac{R_S}{n^2} \qquad U_d = \frac{U_S}{n}$$

**【例3.10】**

分析下图所示电路。




$R=\dfrac{R_L}{n^2}$

解：等效电路如右上图所示。

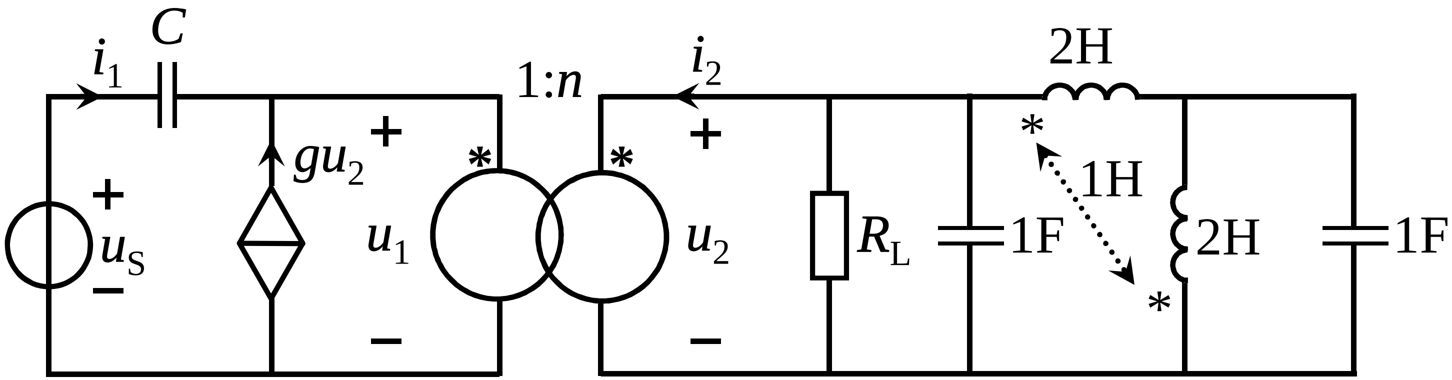
根据节点电压法，有：$\dot{U}_1(G+jB_C)=\dot{U}_S\cdot jB_C+gn\dot{U}_1$

可求得：$\dot{U}_1=\dot{U}_S\dfrac{jB_C}{G-gn+jB_C}$

所以：$\dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_S-\dot{U}_1}{jX_C}$，$P=\dfrac{U_1^2}{R}$

【例3.11】

分析下图所示电路。（$u_S = U_S \sin t$）




解：去耦（右图）

串联谐振（右图）

并联谐振（右图）

## 本节作业

- 习题 5（P249）
  34、38（互感电路）

  *所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。*

## 本节作业

- 习题 5（P250）

  42、44（变压器）

  *所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。*