第10章（三）

二重积分的变量替换

浙江大学数学科学学院 卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

二重积分变量替换公式

定理 设 $T\subset \mathrm{R}^2$ 是有界闭区域，该区域的边界 ∂T 由有限条分段光滑曲线所组成，变换 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}, (u,v)\in T$ 是 T 到有界闭区域 D 上连续可导的一一映射，且满足，

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，如果 f 在有界闭区域 D 上可积，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

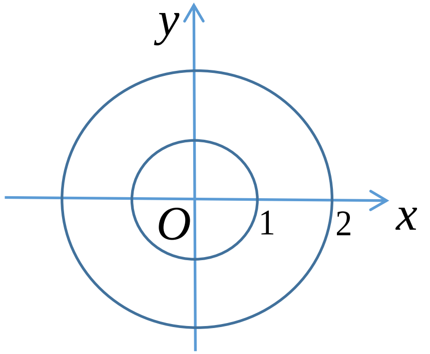
例： 对于极坐标变换 $x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$, 易知 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\left|\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right|=r$，

从而得极坐标系下二重积分的计算公式：$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_T f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

二重积分变量替换举例

例1： 设 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$，计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

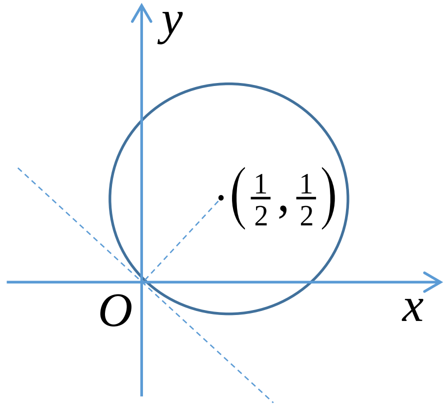


解： 极坐标变换将 $T=\left\{(r,\theta)\middle|1\le r\le 2,\,0\le\theta\le 2\pi\right\}$映到 D 上，所以

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_T r\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\cdot r\,\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{14}{3}\pi\,.$$

例 2： 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le x+y}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解： 如图所示，积分区域为 $T=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\cos\theta+\sin\theta,\,-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\right\}$，



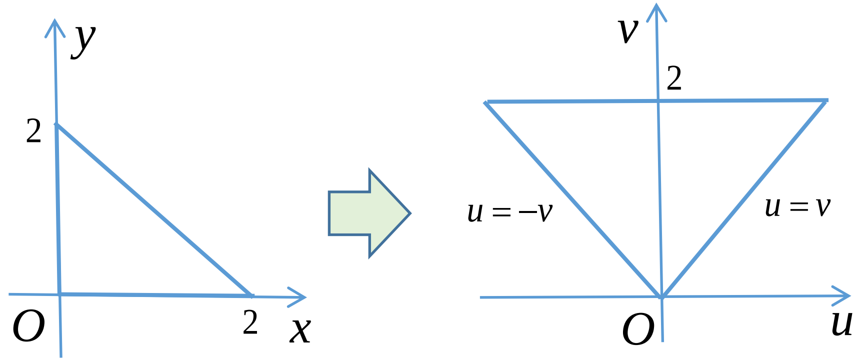
所以 $$\iint\limits_{x^2+y^2\le x+y}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r(\cos\theta+\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\,.$$

二重积分变量替换举例

例 3： 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 x 轴，y 轴和 $x+y=2$ 围成.

解： 作变换 $u=y-x, v=y+x$， 则 $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{v+u}{2}$,

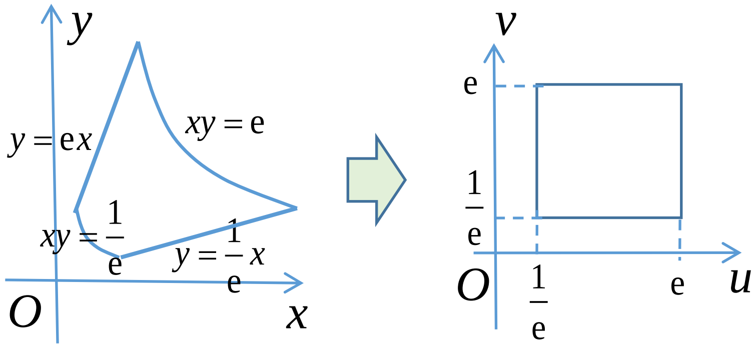
所以 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2}$，因此 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$.



例 4： 计算 $\iint\limits_D\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 围成.

解： 作变换 $xy=u, \dfrac{y}{x}=v$， 即 $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$，可得 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2v}$,

因此 $\iint\limits_D\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}u\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{2v}\ln^2 v\,\mathrm{d}v=\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.




谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY