第10章（二）直角坐标系下二重积分的计算

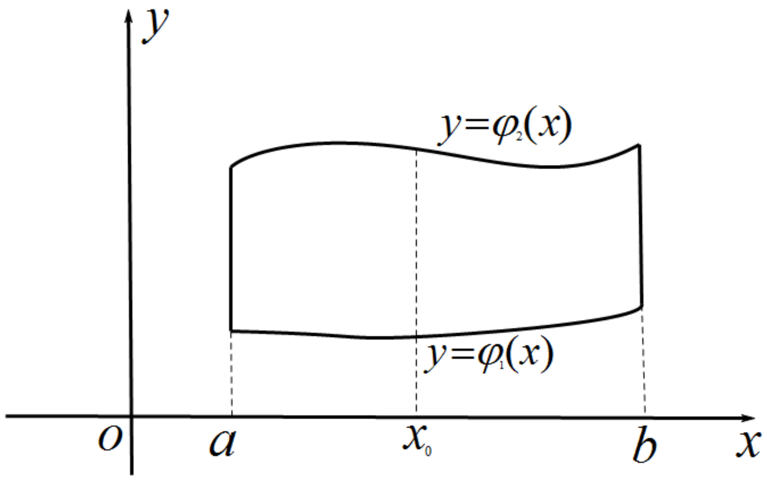
浙江大学数学科学学院 卢兴江

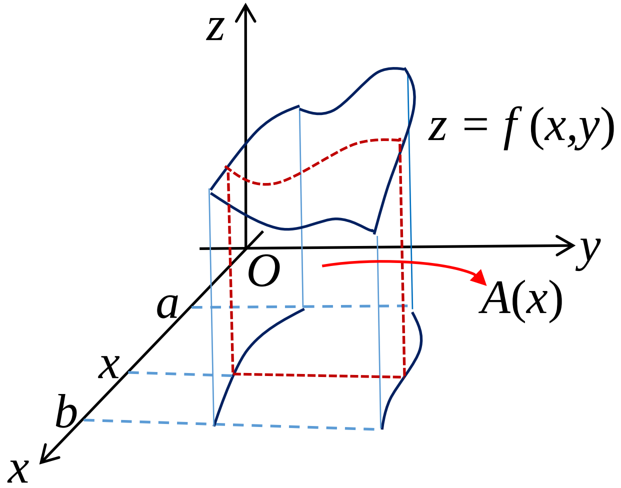
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

二重积分化作累次积分

我们从求曲顶柱体的体积出发来得出二重积分的计算公式（累次积分）

设积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ (称此类区域为 x 型区域.)





$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

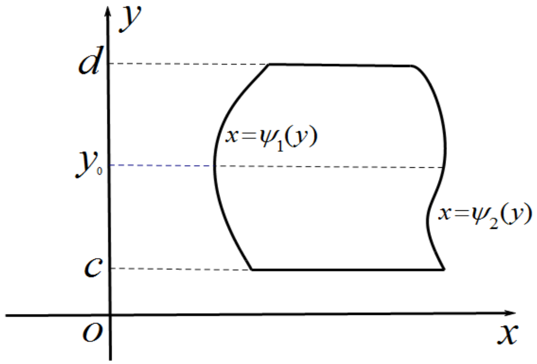
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=V=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\ .$$

累次积分

二重积分化作累次积分

同理可以得到 y 型区域 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ 的二重积分化为累次积分的计算公式为：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

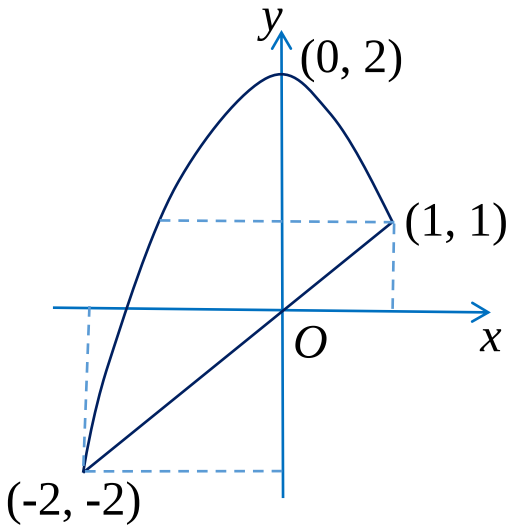


例1 分别用两种不同次序的累次积分计算二重积分 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x,\ \ y=2-x^2$ 围成.

解 两种不同次序的累次积分为：

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}xy\ \mathrm{d}y=\int_{-2}^1 x\cdot\frac{1}{2}\left[(2-x^2)^2-x^2\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}\,.$$

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2-y}}^{y}xy\ \mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}xy\ \mathrm{d}x=\frac{9}{8}\,.$$



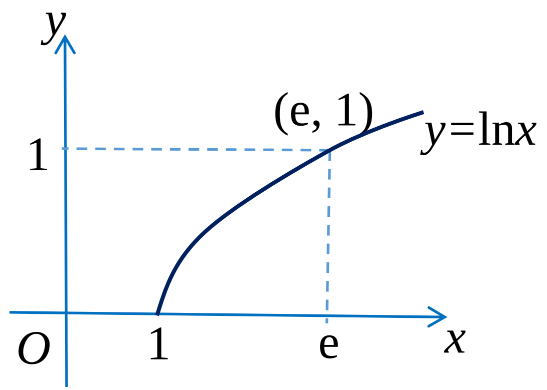
二重积分交换积分次序

例2 将累次积分 $\int_1^{e} dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序。

解 这个累次积分对应的二重积分的积分区域为:

$D=\{(x,y) \mid 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x\}$，如图.

所以 $\int_1^{e} dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

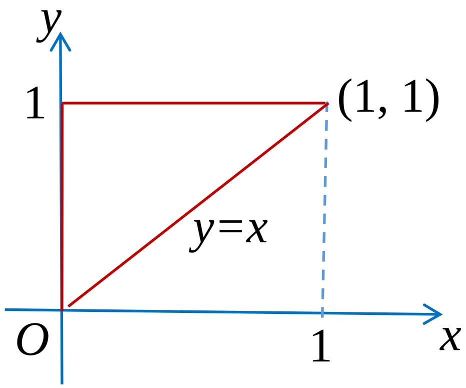


例3 计算二重积分 $\iint\limits_D x\sin\left(y^3\right)dxdy$，其中 D 由 $x=0,\ y=1,\ y=x$ 围成.

解 若先对 y 后对 x 积分，那么其累次积分为 $\int_0^1 dx \int_x^1 x\sin y^3 dy$.

采取先对 x 后对 y 积分，那么原积分 $=\int_0^1 dy \int_0^y x\sin y^3 dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2 \sin y^3 dy = -\frac{1}{6}\left(\cos y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(1-\cos 1).$$




谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY