浙大考试周资料分享项目

郁林 ZJU　出品

《常微分》

郁林 ELINC

第一章：绪论

一、常微分方程与偏微分方程

定义 1：联系自变量、未知函数及未知函数导数(或微 分)的关系式称为微分方程.

如果在一个微分方程中，自变量的个数只有一个， 则这样的微分方程称为常微分方程.

如果在一个微分方程中，自变量的个数为两个或两 个以上，称为偏微分方程.

二、微分方程的阶

定义 2 :微分方程中出现的未知函数的最高阶导数或 微分的阶数称为微分方程的阶数.

1

2

n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \qquad (1)$$

这里 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n})=0$ 是 $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数

而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$, y 是未知函数 x 是自变量

三线性和非线性

1 如果方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n})=0$

的左端为 y 及 $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理式

则称其为 n 阶线性方程

不是线性方程的方程称为非线性方程

2. n 阶线性微分方程的一般形式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

这里 $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ 是 x 的已知函数.

3

4

四微分方程的解

定义 3 如果函数 $y = \varphi(x), x \in I$, 满足条件:

(1) $y = \varphi(x)$ 在 I 上有直到 n 阶的连续导数;

(2) 对 $\forall x \in I$ 有: $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$,

: $y = \varphi(x)$ 为方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$ 在 I 上的一个

1 显式解与隐式解

如果关系式 $\Phi(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = \varphi(x), x \in I$ 为方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

的解,则称 $\Phi(x, y) = 0$ 是方程的一个隐式解.

相应定义 4 所定义的解为方程的一个显式解.

注:显式解与隐式解统称为微分方程的解.

2 特解与通解

定义 4：在通解中给任意常数以确定的值而得到的解称为方程的特解.

定义 5 如果微分方程的解中含有任意常数，且所含的相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称这样的解为该方程的通解.

n 阶微分方程通解的一般形式为

$$y = 臥 \; X, C_1, \dots, c_n)$$

其中 $c_1, \dots, c_n$ 为相互独立的任常数.

称函数 $y = g$, ?, •••, c_n) 含有 n 个独立常数是指

存在(x, ?,..., c)的某一邻域使得行列式

0(c_1, c_2, ·,   )

dc_x

其中矿)表示普 k dx

3 定解条件

为了从通解中得到合乎要求的特解，必须根据实际问题给微分方程附加一定的条件，称为定解条件.

求满足定解条件的求解问题称为定解问题.

常见的定解条件是初始条件，n 阶微分方程的初始条件是指如下的 n 个条件： 当 X = X。时 y = y。，

岑=y_0。， ... = y_0"T)
dx dx

这里 x_0, y。, y。$^{1)}$,...,$y_0^{(n-1)}$是给定的 n+i 个常数

当定解条件是初始条件时，相应的定解问题称为初值问题.

五积分曲线和方向场

1 积分曲线

一阶微分方程 毕=$f(x, y)$ dx

的解 y = ϕ(x)所表示 xy 平面上的一条曲线，

称为微分方程的积分曲线.

而其通解 y = ϕ(x,c)对应矽平面上的一族曲线 称这族曲线为积分曲线族.

2 方向场

设函数 $f(x,y)$的定义域为 D,在。内每一点(x,y)处，都画 上一个以 $f(x, y)$的值为斜率,中心在(x,y)点的线段，称带 有这种直线段的区域。为方程

半=$f(x, y)$
dx

所规定的方向场.

在方向场中，方向相同的点的几何轨迹称为等斜线.

方程半=$f(x, y)$的等斜线为 $f(x, y) = k$,其中 k 为参数

第二章一阶微分方程的初等解法

§2.1 变量分离方程与变量变换

定义 1 形如

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

华=f(^)^(y)
dx (2.1)

方程, 称为变量分离方程.

这里 $f(x)$, ?(y)分别是 x, y 的连续函数.

一、变量分离方程的求解 dy=f(" (2」)

1^0 分离变量，当 $\psi(y)$ 丰 0 时,将(2.1)写成

$* = f(x)dx,$ 这样变量就“分离”开了.
$0(y)$

2^0 两边积分得

$$= \int f(x)dx + c \qquad (2.2)$$

1 64 甘 盾 N 新 f 3)的某一原函数
的某一原函数

由(2.2)所确定的函数 y $f(x, c)$就为(2.1)的解.

二、可化为变量分离方程类型

(I) 齐次方程

dy \ a,x + 如 y + c

(II) 形如 § = f|一 ' 丄 I 的方程,
dx ″ a_2x + by + c_2)

其中。1,妃 C_1,%,，2, C_2 为任意常数

(I) 形如

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2.5)$$

方程称为齐次方程，这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数.

求解方法：1^0 作变量代换(引入新变量)$u = \frac{y}{x}$,方程化为

玄=g(u) - u (这里由于空 =xj
dx x ' dx dx

2^0 解以上的变量分离方程

3^0 变量还原.

(II) 形如

dy a.x +by +C dx
a_2x + b_1y + c_2

这里 %, b_, q, a_2, b_2,为常数.

的方程可经过变量变换化为变量分离方程.

分三种情况讨论

1 $c_1 = c_2 = 0$ 的情形

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} = \frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

为齐次方程，由(I)可化为变量分离方程.

2 ? ? = 0 的情形
b_1 b_2

设鱼==疋则方程可改写成 a_2 b_2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = f(a_2x + b_2y)$$

令 $u = a_2x + b_2y$,则方程化为

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx} = a_2 + b_2 f(u)$$

这就是变量分离方程

$b_i \quad b_2$

二0且q与c不同时为零的情形

则 J $qx + b_1y + c_1 = 0$

$[a_2x + by + c = 0$,

代表 xy 平面两条相交的直线，解以上方程组得交点(。,仞丰(0,0).

J $JX = x\text{-}a$

作变量代换(坐标变换) 1 y _ y _伊

则方程化为空=业巨 dX

$a_2X + b\text{-}Y$

为(1)的情形，可化为变量分离方程求解.

解的步骤: 得解

2。作变 5 $JX = x\text{-}a$

叫 $Y=y\text{-}P$

]0 / + 9 + c_1 = 0

1 解万程组 1

$a_2x+by + c = 0$

$dY = a_1$^X + bj = g(Y) dX~ a_2X + bY x

3。再经变换 《= 丫,将以上方程化为变量分离方程 X

4^0 求解 5^0 变量还原

dy 1 ax + by + C) = dY $\qquad$ $a_xX + b$^Y) $\qquad g(\frac{Y}{X})$

dx - ^x + by + C J dX $\qquad$ $a_2X + b_1Y$

注:上述解题方法和步骤适用于更一般的方程类型.

此外，诸如 dy

=f (ax + by + c) n $u = ax + by + c$ dx

yf (xy)dx + xg(xy)d^y = 0 n $u = x$: y

乂 2d = f(xy>) $\qquad$ n $u = xy$

dx

$dy = xf(\frac{y}{x^2})$ 5 =与

dx $\qquad$ X

§2.2 线性方程与常数变易法

一阶线性微分方程

$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0$

在 $a(x)$二0的区间上可写成 半=P(x~) y + Q(x~)

(1)

dx

这里假设 $P(x)$,$Q(x)$在考虑的区间上是 x 的连续函数

若 $Q(x) = 0$,则(1)变为

$\frac{dy}{dx} = P(x)\, y \qquad (2)$

(2)称为一阶齐次线性方程

若 $Q(x)$丰0,则(1)称为一阶非齐线性方程

--------阶线性微分方程的解法-----常数变易法

1^0 解对应的齐次方程 -r

$= p^{(x)} y$ $\qquad$ (2)

得对应齐次方程解

$y = ce$^P(x)dx, $\quad c$ 为任意常数

2^0 常数变易法求解 $\qquad d = P(x)y + Q(x) \qquad$ (1)

(将常数 c 变为 x 的待定函数 $c(x)$,使它为(1)的解)

令 $y = c(x)e$^ P(變为(1)的解,则

$\frac{dy}{dx}$ $\frac{dc(x)}{dx}$ $e^{\int p(x)dx}$ + ... $c(x)$ ... $e^{\int p(x)dx}$ ...

代入(1)得 $\frac{dc(x)}{dx} = Q(x) e^{-\int p(x)dx}$

积分得 $c(x) = \int Q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + c$

3^0 故(1)的通解为

$$y = e^{\int p(x)dx}\left(\int Q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + c\right) \qquad (3)$$

注求(1)的通解可直接用公式(3)

二、伯努利(Bernoulli)方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

的方程，称为伯努利方程. 这里 $P(x)$, $Q(x)$为 x 的连续函数

解法：1^0 引入变量变换 $z = y^{1-n}$,方程变为

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x)$$

2^0 求以上线性方程的通解

3^0 变量还原

§2.3 恰当方程与积分因子

一、恰当方程的定义及条件

设 $u = u(x, y)$是一个连续可微的函数，则它的全微分为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

如果我们恰好碰见了方程

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = 0$$

就可以马上写出它的隐式解

$$u(x, y) = c.$$

1 恰当方程的定义 定义 1 若有函数 $u(x, y)$,使得

$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 则称微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (1)$$

是恰当方程. 此时(1)的通解为 $u(x, y) = c$.

如 $d(xy) = xdy + ydx = 0$

$d(x^3y + xy^2) = (3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy)dy = 0$

$d\left(\int f(x)dx + \int g(y)dy\right) = f(x)dx + g(y)dy =$

0 是恰当方程.

需考虑的问题 $M(x,y)dx + N(x,y')dy = 0,\quad (1)$

(1)方程(1)是否为恰当方程？ (2)若(1)是恰当方程，怎样求解？

(3)若(1)不是恰当方程，有无可能转化为恰当方程求解？

2 方程为恰当方程的充要条件

定理[1] 设函数 $M(x,y)$和 $N(x,y)$在一个矩形区域^中连续且有连续的一阶偏导数则方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (1)$$

为恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad (2).$$

30

二、恰当方程的求解

1 不定积分法

1^0 判断 $M(X,y)dx + N(x,y)dy$ 二。是否为恰当方程 若是进入下一步

2^0 求以 $x, y) = \int M(x, y)dx + y)$,
Au

3^0 由〒=$N(x, y)$求^(y).
8y

31

2 分组凑微法

采用“分项组合”的方法，把本身已构成全微分的项分出来，再把余的项凑成全微分.

---应熟记一些简单二元函数的全微分.

ydx + xdy = d (x^y),

yd:x — xd：y x、
″2= d (_),
y
y
-ydx + xdy Q(y)
x

32

^x−x^ = d (InUi),
xv v

ydx = xdy = d (arctan x).
x + y y

ydx — xdy _ 1 . (ln |x − y|).
x − y 2 |x + y|

33

三、积分因子

非恰当方程如何求解？

对变量分离方程：

dy − f (x)^(y)dx = 0,不是恰当方程.

方程两边同乘以丄，得

I e(y)

--------------------------dy — f (x)dx =0, O(y)

d−1−

a— (f (x)) = 0 = v(y) 曰怜当方科

dy dx

34

对一阶线性方程:

dy — (P(x) y + Q(x)′)dx = 0,不是恰当方程. 方程两边同乘以『 卩(一 二輝，得

1 定义 如果存在连续可微函数 峪y)主0,使得

$\mu(x\,y)^1 M(x, y)dx + \mu(x, y)\, N(x, y)\,(dy = 0$ 为恰当方程，则#(x,y)是方程(1)的一个积分因子.

2 积分因子的确定

$\mu(x, y)$是方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的积分因子的 充要条件是：

35

e) ″gdy — e P (x)d (P(x)y + Q(x))dx = 0,

则诚冲_ −jP (x)dx d — e P (x)^(p(x)y + Q(x))
—瓦—PE = ay

或左边=d (e~j P(x)dx y − j Q(x/P(dx) = 0,

d^(:x, y)!M (x, y) 6 μ0 y)N(x, y)
dy dx

二d. 、QM dN.
N— 一 M— =(-----------)u
dx dy dy dx

36

是恰当方程.

可见，对一些非恰当方程，乘上一个因子后，可变为恰当方程.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (1)$$

36

如果方程$M(x,y)dx + N(x,y)d$^ = 0 存在仅与 x 有关 的积分因 子^(x,y) = ^(x),则告=0,这时方程

3# 侦 % QM 6N、

N— - M — = (--------------)#

dx 0y dy dx

d# _QM dN-

变成 ^{N}ix =(苛一云)#

dM dN_

即 d# =~~切~~ 8x dx

N

由于上式左侧仅与 x 有关,

所以上式右侧只能是 x 的函数的微分,

从而微分方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 有一个仅依 赖于%的积分因子的必要条件是

dM dN

37

此时求得积分因子 N

#-ψ(x)dx

(10) 只是 x 的函数 $w(x)$,而与 y 无关.

dM dN

(每—云)

N

dM dN

dy dx

= N

是方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy - 0$ 一个积分因子。

#(x)- / 5,这里处)=

若(10)只是 x 的函数“(x),而与 y 无关.

则#(x) - eM 泄,这里“(x)

38

a#x)N(x, y) = N(x v) d#(x) + #(x) aN(x, y) - =

+ #x)

=N (x, y)」5 甲(x) +#(x) dx

.dM (x, y)号)#(x)+#(x) W

=(iy—

=#(x) dM (x, y) d#(x)M (x, y)

dy dy

故#(x)是方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 一个积分因子.

3 定理微分方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, (1)$$

有一个仅依赖于 x 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}$$

仅与 x 有关,这时(1)的积分因子为

#(x)=』“g,这里 “(x) - (dM/dy - dN/dx) %

39 40

41

42

同理,微分方程(1)有一个仅依赖于 y 的积分因子的充要条件是

§2.4 一阶隐方程与参数表示

dM dN

dy dx

$-M'$

仅与 y 有关，这时(1)的积分因子为

dM dN

$\#(y) = e'E$,这里代) ″一衰.

$-M$

42

一阶隐式方程(y' 未能解出或相当复杂)

$$F(覧, y, y') = 0, (1)$$

求解一采用引进参数的办法使其变为导数己解出的方程类型.

主要研究以下四种类型

(1) $y = /3, y'),$ (2) $\% = f(y, y'),$

(3) $F(\%, y) = 0,$ (4) $F(y, y) = 0,$

一、可解出 y(或%)的方程 1 形如 $y = f(\%, 华),$

方程的解法，这里假设 $f(\%, y)$ 有连续的偏导数。 1^0

引进参数 $p = y$，则方程(2)变为

$y = f(\%, p),$ (3) (2)

2^0 将(3)两边对%求导,并以$\frac{虫}{dx}$=p 代入，得

p=1+源(4)

这是关于变量%, p 的一阶微分方程。

p— ^{d}p $\frac{f}{亦}$

d%_ f dp

(I) 若求得 (4) 的通解形式为 |y = f(%,p), (3)|

$p =$ 臥 $X, c)$ |p = f + f 半,(4)

d% dp d%

将它代入(3), 即得原方程(2)的通解--------------- ------------

$y = f(\%\#(\%, c)),$ c 为任常数。

(II) 若求得 (4) 的通解形式为

$\% *(p, c)$

则得(2)的参数形式的通解为

J % = 〃(p,c)

[y = f 邸(p,c),p),

其中 p 是参数,c 是任意常数.

(III) 若求得 (4) 的通解形式为

中$(\%, p, c) = 0$

则得(2)的参数形式的通解为

中$(\%, p, c) = 0$

$y = f(\%, p)$

其中 p 是参数,c 是任意常数.

2 形如

$\% = f(y, 半),$ (9)

d%

方程的解法，这里假设(y, y')有连续的偏导数。

1^0 引进参数?=牛,则方程(9)变为

d%

$\% = f(y, p),$

d% 1

2^0 将上式两边对 y 求导，并以年=-代入，得

^y p

丄=堂+堂虫，(10)

p dy dp dy

这是关于变量y, p 的一阶微分方程。 dy f

dp

dp p 土

* S "------------------- = dy ^dT

dp

若求得 (10) 的通解形式为

①$(y, p, c) = 0$

则得(9)的参数形式的通解为

r $\% = f(y, p)$

[①$(y, p, c) = 0$

其中 p 是参数,c 是任意常数.

二、不显含 y(或 x)的方程

1 形如

$$F(x,分=0, \qquad (11)$$

方程的解法，这里假设 $F(x,y)$ 有连续的偏导数。

设 $p=$ 。，则(11)变为:$F(x,p)=0$, dx

从几何上看,$F(x,p)$表示 x_op 平面上的一条曲线或若干条曲线

若能找到该曲线的参数表示:$x=$甲(),$p=$甲(),t 为参数

即满足：F g), 甲 ())=0,

49

由于沿方程 $F(x,p)=0$ 的任何一条积分曲线上，恒满足

$dy=y\ 'dx=pdx$

把 $x=W), p=$ 代入上式得

$dy=)dg(t)=W(t \quad ()dt$

两边积分得

$y)g'(Mt+c,$

于是得到原方程参数形式的通解为

J $x='()$

I $y=\int V(t)'(tXt+c,$

50

解的步骤：1^0 设 p =牛，则方程变为
dx

$F(x,p)=0,$

2^0 引入参数 t,将 $F(x,p)=0$ 用参数曲线表示出来，即 J x =

{ “ (/), “关键一步也是最困难一步”

3^0 把 $x=$), $p=$)代入 $dy=pdx$,并两边积分得

$y=\int V(f'(t)dt+c,$

J $x='(t)$

4^0 通解为、$=w(t'(t)dt+c$

51

2 形如 ，

$F(y,亲)=0, \qquad (12)$

方程的解法，这里假设 $f(y,y')$有连续的偏导数。

解的步骤：1^0 设 $p=$虫，则方程变为:$F(y,p)=0$, dx

2^0 引入参数 t,将 $F(y,p)=0$ 用参数曲线表示出来，即

$y=g(t), p=$ 〃(t) “关键一步也是最困难一步” 3^0

把 $y=$ ’), $p=$ *()代入 $dx=$ ，并两边积分得

$x=[\frac{'}{-}(t)dt+c,$ J ’ (t)

’ 甲 (t

4^0 通解为 | $x=\int$ 和 $dt+C$

[$y=$ ’)

52

第三章

一阶微分方程的解的存在定理

53

54

§3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

54

一存在唯一性定理

1 定理 1 考虑初值问题

■ d *(*yy, (3.1)

-$y(x_0)=y_0$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 R: \x - xj < a]y — yj < b, (3.2)

上连续,并且对 y 满足 Lipschitz 条件:

即存在 L〉0,使对所有$(x,y_1),(x,y_2)$ e R 常成立 $y(x,$ yj—/(x, >2)| < L\yi— y2\ 则初值问题 31) 在区间 x-x_0| < h 上的解存在且唯一 这里 $h=\min(a,^b),M=Max\f(x,y)|$ M <(x,y')eR 1

命题 1 初值问题(3. 1)等价于积分方程\dx = f(x,y),(3.1) [$y(x_0)$ = $y_0 y = y_0 +1$ f(,y)dt (3.5)

Jxo

命题 2 对于所有 〃和 x e $[x_0, x_0+h]$, 甲(x)连续且满足

\^n (x) — y<\ < b

命题 3 函数序列{代(x))在$[x_0, x_0+h]$上一致收敛.

记 lim 代(x) = 0 (x), x e$[x_0, x_0+h]$.
nT8

命题 4 甲(x)是积分方程(3.5)定义于$[x_0,x_0+h]$上连续解.

设 屮(x)是积分方程(3.5)定义于$[x_0, x_0+h]$上的 一个连续解，则 0 (x) = "(x),x e$[x_0,x_0+h]$.

二近似计算和误差估计

求方程近似解的方法…Picard 逐步逼近法，这里 %(x) = y_0

*)= $y_{0+£}$ $x_0 < x < x_0 + h$

$(n=1,2,...)$

对方程的第 n 次近似解 $0_n(x)$和真正解 y = $0(x)$在 $[x_0-h,x_0+h]$内误差估计为

(x)-饥 x)| <--ML/(n + 1)! h^{n+1}, (3.19)

例 1 讨论初值问题

半=x^2+y^2, $y(0)$ = o
dx

解的存在唯一区间，并求在此区间上与真正解的误差不超过 o.o5 的近似解的表达式，其中 $R: -1<x<1, -1<y<1$.

解这里 M = Ma:Af (x, y)| = 2,所以 h = min{1
(x, y)eR

由于* =卽< 2 = L

由 (3. 19) |代(x) — P(x)| < 确皿 ML/ h^{n+1}

=甘 7T7(Lh 尸 1 = V °.°5
L (n +1)! (n +1)!

因而可取 $n=3$,因此我们可以 1/(n + 1)! V o.o5

作出如下的近似表达式 $0_0(x)$ = o,

$0_1(x)$ = £ $[x^2+0_0(x)]dx$ x^3

$0_2(x) = \int_0^x [x^2 + 0_1^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + ...]dx = E + 土$ 3 63 ... 9 x^6 $2x^{10}$ x^{14}

$0_3(x) = \int_0^x [x^2 + 0_2^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + ...]dx$ = $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$

$0_3(x)$就是所求的近似解在区 R[−1,1]上与真正解误差不会超过 0.05.

§3.2 解的延拓

1 饱和解及饱和区间

定义 1 对定义在平面区域?上的微分方程

半=$f(x, y)$, (3.1)

dx

设 $y=$伊(x)为方程(3.1)定义在区间(%,*)的连续解, 若存在方程(3.1)的另一解 $y=$屮(x),它在区间(%,属)上 有定义，且满足

(1)(。2，属)D (%, 0_l)但(%,爲)尹(%， 时,

(2)当 x e (%,0_l)时,“$(x)=$中(X);

则称解 $y=9(x)$,x e (%,0_1)是可延拓的并且称解 $y=y/(x)$是解 $y=9(x)$在(财属)的一个延拓

61

若不存在满足上述条件的轣=*(x),则称解 $y=$ 倾$x)$,x e (%,0_l)为方程的一个不可延拓解，或饱和解 此时把不可延拓解的定义区间(0_l, 0_l)称为一个饱和区间.

2 局部李普希茨(Lipschitz)条件

定义 2 若函数 $f(x,y)$在区域 G 内连续，且对 G 内的每一点户，有以户为中心完全含于 G 内的闭矩形ˆ存在, 在 R_P上 $f(x,$ 丿)关于丿满足 Lipschitz 条件(对不同的点域 R_P大小和常数 L 可能不同)，则称 $f(x,y)$在 G 内关 于 y 满足局部 L ipsch itz 条件.

62

3 解的延拓定理

定理：如果方程(3.1)右侧函数 $f(x,y)$在有界区域 G 中连续，且在 G 内 $f(x,y)$关于 y 满足局部 Lipschitz 条件. 那么方程(3.1)通过 G 内任一点(x_0, y_0)的解 $y=$伊(1) 可以延拓，直到点(x,甲(x))任意接近 G 的边界.

以向 x 增大的一方来说，如果 $y=$甲(x)只延拓到区间 $x_0<x<d$ 上，则当 x T d 时,$(x,0(x))$趋于区域 G 的边界.

63

§3.3 解对初值的连续性和可微性定理

64

一解对初值的连续性

1. 解对初值的连续依赖性

定义设初值问题

.笑=$f(X, y)$, (3.1)

$y(x_0)=y_0$

的解 $y=$饥 $x, x_0, y_0)$在区间［。,6］上存在，如果对〉0,巡=50, $a, b)$> 0,使得对于满足

$(x_0-x_0)^2+(V_0-y_0)^2$

65

的一切(x_0, N_0),

“ =丿(ˆ, $y)$ ax

(3.1)'

66

初值问题

、$y(x_0) = N_0$

的解 y =以 x, x_0, y_0)都在区间 a,但上存在，

并且 |。(x,x_0,N_0)-以 x,x_0,N_0) | < s, x e [a,们

则称初值问题(3.1)的解 y =戒 x, x_0, y_0)在点(x_0, y_0)

连续依赖于初值(x_0, y_0).

66

弓 1 理如果函数 f（球域。内连续，且关于 J 满足利普希茨 条件(利普希茨常数为则对方程 轴 $f(x,y)$ dx

意两个解 p(耳刎邮们的公共存在区间内成立着不

等式 $|\wedge(x) - y/(x) < |\wedge(x_0)$ 肃怫-?点 X_o

区间内的某一值。

67

2 定理 1（解对初值的连续依赖性定理）

方程 字$=f(x,y)$, dx (x,y) w$G \cup R$ (1)

条件：1. f 匯协繁且关于满足局部利普希茨条件；

II. 〃漏紏满足 的解淀义) eG

区间为血方］.

结论:对 V 初>0 3^=使得当) > o

$(x_0 — x_0)^{2+}(y_0 — y_0)^2$

时，方程(1)过点(元 o, y) 的解 y =例 $x, x°, y$o)在［%用上也有 定义，且\ $(p\{x$, xo, yo) - $p(x$, xo, yo) | $<_E$, $a < x < b$.

68

图根据上面定理及方程的解关于自变量的连续性，显然有： 3 定理 2

（解对初值的连续性定！）方程 字$=f(x,y)$, (x,y) E G

$\cup R$ (l)

dx

条件：/(跡内连续且关于满足局部 Lips.条件；

结论：y = .$(x,x_o,y°)$, (x_{oJo}) wG，作为 x,^{x}ol 的函数 在它的存在范围内是连续的.

69

。二解对初值的可微性

对含参量 2 的微分方程

牛$=f(x,y,2)$, (3.1)$_2$

dx

设 $f(x,y,2)$在区域 G, = $\{(x,y,2) \mid (x,y)$ w $G,2_E\ (a,P)\}$ 连续，且在 Gt 内一致地关于 y 满足局部 Lipschitz 条件

则对 V2_0 w $(a,p$ \方程(3.1)$_2$通过点($x°$,yo,2)) w G 的解存在且唯一，记这个解为 y = 甲 $(x$, xo, yo,2o) 且有 yo = 做 ^{x}o, ^{x}o, yo·o) .

(即对 V$(x,y,2)$ w G_2,3 以$(x,y,2)$为中心球 $C \cup G_2$，使 $f(x$, y, 2)在 C 内对 y 满足 Lipschitz 条件,L 与 2 无关)

70

1 解对初值和参数的连续依赖定理

设 $f(x,y,A)$在区域 G连续，且在 G内一致地关于 y 满足 局部 Lipschitz 条 件,(Xo, $y°$,々) w y =戒 x, $x°$, yo，A))

方程(3. 以通过点(x_o,y_o)的解,在区间。< x < 3 上有定 义,其中。< xo <么则对 V$_E$ > o,电=$S(s,a,b)$ > 0,使当

$(x_0 — x_0)^2 + (y_0 — y_0)^2 + (人-爲)^2 <$,

时，方程(3.1)$_人$通过点(xo, yo)的解 y=戒 x, xo, yo, /)在区间 a < x < b 上也有定义且

|倾 x,xo,yo,4)一戒 x,xo,yo，Ao) < £， $a < x < b$

71

2 解对初值和参数的连续性定理

设 $f(x,y,2)$在区域 G_2连续，且在 G_2内一致地关于 y 满足 局部 Lipschitz 条件,则方程(3.1)$_2$ 的解 y = $<p(x, x_o$, y_o,2) 作为 $x, x_o, y_°$,2 的函数在它们存在范围内是连续的

3 解对初值可微性定理

若函数 $f(x,y)$以及^{f}都在区域 G 内连续，则方程

(3.1)的解 y =戒 x, x_o, $y_°$)作为 x,$x_°$, $y_°$的函数在它们存 在范围内是连续可微的

72

浙江大学 2017-2018 学年春度年期

《常揪分方但》期末试卷 A 芯答案

术解下列常微分方程，每题 10 分，共 30 分

l. 來平而上一［刀图济足的常救分方徂•

M： 一切的的. &达式为:（了 一 «）^{3} + （V - W = 『•

可以伟到：2 （二 一 a） + 2“' （v — b） =。·

再■秘余后可以彊到:2 +辿″（!/ － b） + 2 （〃’尸=°

再柢分后可以件到：2/' （” - b） +时 1/ = （） ,即： 卩一 ° = 一 3" v/{y ） 代入上述才观后 •I 分

，＞

可以捋双：（】+1/²）!?” - 3 血″尸〃’=。. 3 才

。虫—F 4~寸

dr — 2u

解：E=宁，0 方理可於化为： 2 分

:’=工。+ = &此可以将利 3 分

==tr[C + Jj — (T^2 + 2r. -F 2), i.c.,

/ = Cf^ - (x^2 + 2J； + 2).

3. e^s sin ydx + （产 cos y + y sin 2y)dy = 0.

解:令尸(h, y) = (f sin T/, Q(x,y] = c* cos y 4- y sin 2y,则：

OP €)Q

瓦 T 缶=° 3 分

因*满足全技分方任:J(（rsiiH/) + ys\n2y (ly = 0, 两边同时紀分’[以捋 5']时 sin n-|- (—cos2y + 孑 3 分

:汾

2 求解高阶常系数微分方程的通解，每题 10 分， 共 20 分

sin 2?/) = C

,旳,M . o .

1. -7^7 十 2 —F 2?/ = In x.

W dx

. 解：特征方程为：

人 2 + 2 人 + 2 = 0. t A|,n = — 1 士、

（份

对应齐次方程的迴解为：Gin~^{x}cosj：H-C_2e~^{x}sin3：

机摆常我变异法. 可特财应的非齐次方理的通解为：y (x) = C、(jr) c^{-x} cos x + GS：) 。-” 而) / 」分

其中 C\ （ir） = —f sin In &低，C2（a：） = f cos f hi & 低

2. 黑一 6 典+ 17 典一 2 晔+20〃 = 0.

dk ax^ 加 dx

解：对应的特征方程为：

人 · ；_6 入③ + 17 户-28A + 20 =（人一2）^{2}（z\$^{2}$ -2A + 5） =0 S 分

因此对应的齐次方程的通解为: G e^{2}^ + C₂xe^{lj} + C3 萨 cos 2x + C^ (f sin 2r .

3 求解高阶变系数微分方程的通解，每题 10 分，共 3。分

1. -4- 5 工堂 + 13// = (r > 0).

解?云工=笠敷摩方仪可化为常系改方収：″，+，板+ 1：切=宀 3 分 求解后可揭: v(i) = 0*53(+ %代如 sin：”+丸户.

即: $y(x)$=拦(G cos(31n x) + C_2 sin(3 In x)) + 爵蛆. 2 分+2 丹+3 分

2 序= § (石丿一 2(石丿•

. 解：切，=p,则/ =娉，

则原方我可化为：华=2 一 2 犬或 p = 0(y = c). 2 分+ 1 分

处’ ”

丄, 则上述方至. 可以辿一步转化为：乡=——<z + 2. 2 分

P 如 y

其辿斛为：£ = EL 土史，则业=7) =丄=项). 2 分

II (lx Z Cl +1 广

&后可以通过分禹变量揭到通解为：C1 In|?/| 4- iy^2 = 3： + c_2. 2 分

3.已知“1 =丄是柢分方程+丄亜−y = 0 的一个特解，墨虫老+丄理−1/ = ：!: 的通辭 &,, ... T . x 、， dx^l

x dx dx^2 x (IT

解: 根据 Lionville 公式，可以求出寺次方程的吕一个线性冬关辭为: 住)=m(z)/ = § J = • 5 分

再狼据屯薮变异仪求出非齐次方法对貳的特解：

• ” + 2 、

y .... -------------. 5 分

X

最后，该方程的诃解为 V = C1---------------C'2----- X ' 2

X X

1. J 糸=4： 7； + 2?/ +

决 cos t. [迦=2 工 + 4?j + c^l sin t.

4 2* e‘ cost

解: £ 令: A = 2 4 ，邛)=

. e^t sin t 则其对应的月梃虚和特征向世

々别为:

A] = 6. •7]= ,Av = 2, i)2 = 1 2+2 分

1

所以，对应的齐次方程的基解矩阵为： X(f，) = c 机 e^{2t}

c" —

4 求解常微分方程组，每题 10 分，共 2Q 分

因此该方程组的解为:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X(t) \times \left(C + \int_0^t X^{-1}(s) F(s) ds \right) \quad 2分$$

$$= \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{2t} \\ e^{6t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-6s} & e^{-6s} \\ e^{-2s} & -e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \cos s \\ e^s \sin s \end{bmatrix} ds \right)$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{29}(3e^{5t} - 3\cos t + 11 \sin t) \\ c_1 e^{6t} - c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{26}(3e^{5t} - 3\cos t - 15 \sin t) \end{bmatrix} \quad 2+2分$$

3P 罗常 =2x 4- 1/ — 2z, =

冰 一; r,

=x 4- ?/ — c.

* 2 1 —2

辭: 令 A = 一 1 0 0 , 其对应的牯征方钮为: |.A —入八=-A³ + 一 + 1 -1

-(A - 1)(人 2 + 1).

时于特任根入 1 = 1,其对成的浙括向量为: vi = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

对于共于夏粮人 X3 = ±L 对应的特枉向量分别为−勺= 所以，我们可以符 $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

原方程 6 勺通弟写为:

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ctis } i — \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right)$$

=◦】 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2$ cos / -sin f cos/ sin cos sin

3 . $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z, \end{cases}$ .riO) = 1 · y(I)) = I- : |U) 三 -•

解：令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，其对应的特征方程为：$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 -$

3 分

$-(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$.

对于特征根 $\lambda_1 = 1$，其对应的特征向量为：$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\pm i$，对应的特征向量分别为：$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

时于共猊史艺 · 1 =

郁林 ELINC

浙江大学 2015--------- 2016 学年秋冬学期

《常微分方程》课程期末考试试卷

考试日期：2016 年八月日，**考试时间：**120 **分钟**

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名： ______________ **学号：** ______________ **所属院系：** ______________

一. **求**下列方程的通解(10 分)

$$e^{x}dx + (e^{x}\cot y + 2y)dy = 0.$$

二. (20 分)

1. **求**下列方程组的通解

$$\begin{cases} x' = -n^2 y + \cos(nt), \\ y' = -n^2 x + \sin(nt), \end{cases}$$

其中 n 是一个给定的正整数。

2. 考虑如下三阶**齐**次线性常微分方程

$$xy''' + (3 + 4x)y'' + (4x + 8)y' + 4y = 0, \ x > 1.$$

已知方程有一解 $y_1 = 1/x$, **求**方程的通解。进一步，判断零解的李雅普诺夫稳定性。

三. (10 分)讨论下面方程组零解的李雅普诺夫稳定性

(1) $\begin{cases} x' = 4y + 2x \\ y' = -2x + y^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = -x^2 y + y^3 \\ y' = -2x^3 + xy^2 \end{cases}$

四. (10 分)判断平衡点的**类**型并画出相图的草图, $\begin{cases} x' = x - y(1-y) \\ y' = 2x + 4y - \sin y \end{cases}$ $x' = x - 3y$

(1) 写出相应的线性化**系**统

(2) 判断该线性化**系**统平衡点的**类**型并画出相图的草图

六(10 分). 设 $A(t)$ = (罷 ()) 在区间 (a, b) 连续，$X_j(t)$ = (以) (j = 1, 2) 是 2 阶齐次线性方程组 $X' = A(t)X$ 的两个解, $W(t)$ = If $x_1(t)$ $x_2(t)$ |. 叙述并证明关于 W(t) 的刘维尔(Liouville)公式。 | $y_1(t)$ $y_2(t)$ |

七(20 分). 设 f (x,y) 在[0,2] x R 有界连续, $y = u(x)$ (x € [0,1]) 是方程

$y' = f(x, y), y(0) = 0$, 的一个解。设[0,1]区间上的连续可微函数 w(x)满足 w(0)=0 且 (*) $w' > f(x, w)$, $\forall x \in [0,1]$.

(1) 问能否判断 $u < w(x)$, $\forall x \in (0,1]$, 并给出充足理由(证明或者举例)；

(2) 如果(*)式仅在 x € (0, 1]成立，判断并给出充足理由；

(3) 第 2 问中如果已知 f 连续可微，判断并给出充足理由。 (若需要，可直接用 Pean。或者 Picard 定理)

八(10 分). 判断是否存在一个[1, 8)上的连续可微函数 F(t)使得

$$F'(t) > t^{-2}F^{3}(t), F(t) > t, \ \forall t > 1$$

(1) 如果存在请举例或给出证明

(2) 如果不存在，给出证明

浙江大学 2015--------- 2016 学年秋冬学期

《常微分方程》课程期末考试试卷参考解答

一. **求**下列方程的通解(10 分)

解. 由于 $M = e^x$, $N = e^x \cot y + 2y$, 则

$$M\_N_x = — \cot v. M$$

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y) dy = 0.$$

可得积分因子

原问题转化为

$$e^x \sin y dx + (e^x \cos y + 2y \sin y) dy = 0.$$

$$d(e^x \sin y — 2y \cos y + 2 \sin y) = 0$$

通解是

$$e^x \sin y — 2y \cos y + 2 \sin y = C$$

二. (20 分)

1. **求**下列方程组的通解

$$\begin{cases} x' = —n^2 y + \cos(nt), \\ y' = —n^2 x + \sin(nt), \end{cases}$$ 其中 n 是一个给定的正整数。

解. 由第二式得到

(1) $$x = ———— 弓 \frac{y'}{n^2} + 弓 \frac{\sin(nt)}{n^2}$$

代入第一式得到

$$y'' — n^4 y = (n — n^2) \cot(nt),$$

特征方程 入^2— $n^4 = 0$,入=士 n^2.

奇次方程的解是

Y = $C_1 e^{n^2 t}$ +。2己_危 设特解是 $y^* = A\sin(nt) + B\cos(nt)$ 得 4 = 0, B =

償+士) 所以

$$y = C_1 e 左 + C_2 e^n 左 —————— \frac{2n \_\_\_\_\_\_ 1}{n(1 + n^2)} 2 — \cos(nt)$$

代入(1)得

$$x = —C_1 e^{n^2 t} + C_2 e^{-n^2 t} 十 — \frac{十 1}{n(1 + n^2)} 2 \sin(nt)$$

即

x ____ C 质 t—1) + C 厂"2t 1 + sin(nt))

—Cie + C2e + n—1

y 1 1 — — cos(nt)

\ u / \ / \ 丿 \ n(1+n²)

2. 考虑如下三阶齐次线性常微分方程

$$xy''' + (3 + 4x)y'' + (4x + 8)y' + 4y = 0, x > 1.$$

已知方程有一解 $y_1 = 1/x$, 求方程的通解。进一步，判断零解的李雅普诺夫稳定性。

解：设 y — ᵘ, 得到

$$u''' + \quad + 4u' — 0, 入(入 + 2)^2 — 0$$

则

$$u — C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3$$

所以通解是

$$y — C^1 e^{-2x} + C2e^{-2x} + C^3$$

渐近稳定

三.(10 分)讨论下面方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$x' = 4y + 2x \quad y' = -2x + y^3 \qquad (2)\ \mathrm{I}\quad x' = -x^2y + y^3 \quad y' = -2x^3 + xy^2$$

解.(1)线性化系统入=1 ± 不稳定

另外，可以定义 $H = x^2 + 2y^2$, 嗨=4($x^2 + y^4$)，不稳定

(2)首次积分 $H = 2x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = x^4 + (y^2 - x^2)^2$, 稳定但是不渐近稳定

$$f\ x' = x - y$$

解. $trA = -2 < 0$, $detA = -3 + 4 = 1$,

四.(10 分)判断平衡点的类型并画出相图的草图] $y' = 4x - 3y$

$$(trA)^2 - 4detA = 0$$

渐近稳定的星形结点或者退化结点。

$$\frac{4 - 3k}{1 - k} = k$$

唯一解 k = 2, 所以渐近稳定的退化结点。 $c = 4 > 0$ 所以在(1,0)点逆时针旋转。

$$\left\{ x' = x - y(1 - y) \quad y' = 2x + 4y - \sin y \right.$$

(1)写出相应的线性化系统

(2)判断该线性化系统平衡点的类型并画出相图的草图

解. J ″,，七 $trA = 4 > 0$, $detA = 3 + 2 = 5$,

I $y' = 2x + 3y$

$$(trA)^2 - 4detA < 0$$

不稳定的焦点

c = 2 > 0 所以在(1,0)点逆时针旋转

六(10 分). 设 $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ 在区间(0,1)连续，$X_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}$ (j = 1,2)是 2 阶齐次线性方程组 $X' = A(t)X$ 的两个解, $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$. 叙述并证明关于 W(t) 的刘维尔(Liouville)公式。

证明.

$$\begin{pmatrix} x_j'(t) \\ y_j'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}$$

$$(X_1', X_2') = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} (X_1, X_2)$$

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= a(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + d(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = (a(t) + d(t))W(t)$$

所以我们得到

x2(t) 丿广 ^{d} ($_{t}$ 丿 K yi(t) y2(t) 丿 1

$$W(t) = W(t_0) \exp(/ (a(s) + d(s))ds) Vt G (0, 1)$$

J to

七(20 分). 设 f(x,y)在[0,2] x R 有界连续，y = ©(x) (x G [0,1])是方程

$$y' = /(x,y), y(0) = 0 ,$$

的一个解。设[0,1]区间上的连续可微函数 w(x)满足 w(0)=0 且

(*) $$w' > f(x, w), \forall x \in [0,1].$$

(1) 问能否判断$\phi(x) < w(x), \forall x \in (0,1]$,并给出充足理由(证明或者举例);

(2) 如果(*)式仅在 $x \in (0,1]$成立，判断并给出充足理由;

(3) 第 2 问中如果已知 f 连续可微，判断并给出充足理由。

(若需要，可直接用 Pean。或者 Picard 定理)

证明. 1. 可以。**首**先(*)式零点的信息($w(0) = \phi(0)$, $w'(0) > f(0, w(0)) = f(0,\phi(0)) = \phi'(0)$)告诉我们存 在少> 0, 使得

$$\phi(x) < w(x), \forall x \in (0, J]$$

下面证明少可以取 1, 如若不然，必然存在 $x_1 \in (J, 1]$, 使得

$$\phi(x) < w(x), \forall x \in (0, x_1), \phi(x_1) = w(x_1)$$

由此，导数的定义告诉我们 $\phi'(x_1) > w'(x_1)$ 也就是说

$f(x_1,w(x_1)) = f(x_1,\phi(x_1)) = \phi'(x_1) > w'(x_1)$ 这与题目已知条件(*)矛盾。

2. 不可以。例如$\phi = x^{3/2}$, $w = -8x^{3/2}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y^{1/3} & |y| < 1 \\ 3/2 & y > 1 \\ -3/2 & y < -1 \end{cases}$$

$$w' = -\frac{3}{3}x^{1/2} > f(x, w) = -x^{1/2}, \forall x \in (0,1]$$

3. 可以。**首**先，记ϕ_n为对应于 $f_n = f(x,y) - 1/n$ 的解(由于 f 有界，在[0,1]区间存在解)，则由 1, 知道

$$\phi_n(x) < \phi_{n+1}(x) < w(x), \forall x \in (0, 1]$$

显然$\phi_n \to \phi(x)$(由积分方程知极限函数是解，由解的**唯**一性知极限函数就是ϕ)，于是我们得到

(2) $$\phi(x) \le w(x), \forall x \in (0, 1]$$

然后我们证明$\phi(x) < w(x), \forall x \in (0,1]$。我们用反证**法**，若否，则存在 $x_1 \in (0,1]$使得$\phi(x_1) = w(x_1)$，于是 由(*)

$$\phi'(x_1) = f(x_1, \phi(x_1)) = f(x_1,w(x_1)) < w'(x_1)$$

由此存在 $x_2 \in (0,x_1)$，使得

$\phi(x_2) > w(x_2)$ 这与(2)矛盾。

八(10 分). 判断是否存在一个[1, 8)上的连续可微函数 F(t)使得

$$F'(t) > t^{-2}F^3(t), F(t) > t, \forall t > 1$$

(1) 如果存在请举例或给出证明

(2) 如果不存在，给出证明

答：不存在。反证**法**，如果存在，则由不等式知道：

$$F^{-3}F'(t) > t^{-2}$$

$$\frac{F^{-2}(t) - F^{-2}(1)}{-2} > 1 - t^{-1}$$

$$F^{-2}(t) < F^{-2}(1) + 2t^{-1} - 2 < 2/t - 1$$

$$F(t) > \sqrt{t/(2-t)}$$

$t \to 2$ 时，F 趋于无穷大，与连续性(保证有界闭区间上有界)矛盾!

浙江大学 2014——2015 学年春夏学期

《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号： 06123700 ，开课学院： 数学科学学院 考试试卷：A/卷、B卷(请在选定项上打/)

考试形式：闭/、开卷(请在选定项上打/)，允许带—无—入场 考试日期：2015 年″月里日，考试时间：也 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______学号：______所属院系：______ 题序| 一 | 二| 三| 四| 五 | 六| 七| 总分

■ˆ分

评卷人

一. 求解下列方程（25 分）

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+y^2}$

2. $2y\backslash +5\left(\frac{}{dx}\right)^2 = 4$

3. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2 \sin(\ln x)$

二. 求解下列方程（组）（25 分）

1. 用幂级数法求解 $y'' + 4xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

2.

$$J 崙=2y - 5x + e^{-}$$

3.

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}+x-2z=0$$

$$\frac{dx}{dt}\quad\frac{dy}{dt}\quad\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}\quad\frac{dy}{dt}\quad\frac{dz}{dt}+x+2y=0$$

$$\backslash \frac{d}{} = x - 6y + e^{-2t}$$

三. (20 分)对于系统 $\begin{cases} x' = 1 - x + y - x^2 \\ y' = x(x - y) \end{cases}$ 找出所有平衡点(奇点)，写出关于这些平衡点所相应的线性化系统，判断平衡点的类型，并画出平衡点附近相图的草图。

四.(15 分)讨论下面 2 个方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$\begin{cases} x' = \\ y' = -4x - y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x^4 y \\ y' = x^3 y^2 \end{cases}$$

五. (15 分)给定区间 I = [0,a]，非负连续函数 $\langle 1,$ u(0) = 0，连续可微函数/ : $(t,x) \in I \times R \to R$，以

及区间[—2,0〕中的一个连续可微函数$\phi(t)$并满足"(0—) = /(0,©(0)).考虑如下问题

J 琴=/(t,x(t — u(t))) t & [0, a]

\ x(t) = ©(t) t $\in$ [—2,0]

(1) 试证明存在一个 $a > 0$ 使得该问题在 $t \in [0,a]$至少存在一个解。

(2) 更进一步，这样的解是否有**唯**一性，给出充足的理由。

浙江大学2014——2015学年春夏学期
《常微分方程》课程期末考试试卷答案

一.求解下列方程（25分）

1 $dy = 2$
. dx x+y²

解：$y = 0$ 是解

当 y = ⁰时, $d = 2$ x + 2

x = C VTyi + ¹ y², C为任意常数

所以解是 y = 0或 X = C$V|y|$ +3y², C为任意常数

2. 2y² + 5(粉² = 4 解：设 y = $V2sin$ t, y =籍⁵cos t, x = x.则

垣 cos t = y，=~~t sin t)~~=龙 cos t 牛

5 dx dx

t = ^^ x + C或 cos t = 0
5

y = x + C),C 为任意常数
5

或特解 y = 土極

3. x² dx — 3xdx + 5y = x² sin(ln x) 解：令 x = e

2 - 4 才 + 5y 孕 sin t 特征方程

入² — 4A + 5 = 0,

A = 2 土 i.

齐次方程解 Y = cie²ᵗcos t + C2e²ᵗsin t

设非齐次方程解为 y* = Ate²ᵗcos t + Bte²ᵗsint,得到

A = —, B = 0.
2,

y = cie²ᵗcos t + C2e²ᵗsin t — $|e^{2t}$ cos t

cix²cos In x + C2x²sin In x — ^^x²cos In x

二.求解下列方程（组）（25分）

1.用幂级数法求解 y″ + 4xy = 0, y（0） = 1, y'（0） = 0 解：设 y = £氣 o a«Xʳᵃ

$2\hat{}2+\rangle$ 、$[a_{n+2}(n+2)(n+1) + 4a_{n-i}\backslash x^n = 0$

所以 $a_2 = 0$, $a_{,,+2} =$ ~~(盘振+])~~, $n = {}^{1\prime}\ 2, ...$ 则

$$a_{3k} \quad \frac{(-1)^k 4^k}{(3k)(3k-1)...(3-2)} \quad \_\_ \quad \frac{(-1)^k 4^k (3k-2)!!!}{(3k)!}$$

$$a_{3k+1} \quad \frac{(-1)^k 4^k}{(3k+1)(3k)...(4-3} \text{广} \quad \frac{(-1)^k 4^k (3k-1)!!!}{(3k+1)!} \quad \hat{}_1$$

$a_{3k+2} = 0$, $k = 1, 2, ...$

因为 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 所以 $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

$$y, \sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)^k 4^k (3k-2)!!!}{(3k)!} x^{3k}$$

2.

$$(\text{崙}=2y - 5x + e^{-t} (1) \mid {}^{d} = x — 6y + e^{-2t} (2)$$

解：(1)得到

$$y = : (x' + 5x — e^{-t})$$

代入(2),

$$x'' + 11x' + 28x = 5e^{-t} + 2e^{-2t}$$

特征方程 $\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$ $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -7$

齐次方程解

$$X = c_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}$$

设 $x'' + 11x' + 28x = 5e^{-t}$ 解为 $x_: = Ae^{-t}$, 则 $A = \&$ $x1 = \& e^{-t}$

设 $x'' + 11x' + 28x = 2e^{-2t}$ 解为 $x_: = Be^{-2t}$, 则 $B = |$, $x_2 = |e^{-2t}$ $x = C_1 e^{-4t} +$

则

$$y = 1 -^{e} \quad \text{-} C_2 e^{-7t} + \text{正} \ e^{-t} + 10^{e} \ ''$$

也—也—也 $+x$ — $2z=0$ (1) $dt\ dt\ dt$ $+ x\ 2z = 0$ (1) d-d+d+x=0

(

(2)

dx+零-d+x+$2y=0$ (3) 解：(1) + (2)

得 $2x' - 2y' + 2x - 2z = 0$ (4)

(1) + (3)得 $2x' - 2z' + 2x + 2y - 2z = 0$ (5)

(2) + (3)得 $2X + 2x + 2y = 0$ (6)
(5)-(6)得 $z' + z = 0$,
$z = C_iC^{-t}$
(4)-(5)得—$2y' + 2z' - 2y = 0$
$y' + y = -c_ie^{-t}$
—t , —t
$y = C_2 e — cite$
代入(6)得* + x + c_2e^{-t}— $c_1te^{-t} = 0$

$x = c\^e^t +$ $t2e^t$— C_2te^t

/ 八、7■十 (20 分)对于系统? $X = 1 — x + y — x^2$ 找出所有平衡点(奇点)，写出关于这些
I $y' = x(x — y)$ 平衡点所相并画出平衡点附近相图的草图。
应的线性化系统，判断平衡点的类型，解：奇点：
$M_i(0, — 1)$，$M_2(1,1)$，$M_3(—1, — 1)$ $M_i(0, — 1)$所
相应的线性化系统 { % = $—x + y$

A_i

特征入=-尹,鞍点

$k = —r+k$

(1, #)点，> 0, y’ > 0
$M_2(1,1)$所相应的线性化系统(匕=—$3x + y$
[$y = x — y$

—3 1
11

特征入=—2 土 A/2,稳定结点
1 - k k = 3
+-,, k = 1 土
-3+k
$dX|y=x = 0 < 1$
$M_s(—1, —1)$所相应的线性化系统 { x’ = x + y y’
= —x + y

11
11

特征入=1 土 i,不稳定焦点
xy’ — yx’ = —x^2— y^2< 0,顺时针

四.(15 分)讨论下面 2 个方程组零解的李雅普诺夫稳定性

(1) ($x' = 4y^3 — x^3$ $y' = —4x — y^3$

(2) ($x' = —x^4y$ $y' = x^3y^2$)

(1)

第5页

(1)

构造

$$V(x, y) = y^4 + 2x^2,$$

$$V'(x, y) = 4x(4y^3 — x^3) + 4y^3(-4x — y^3) = — 4x^4 — 4y^6$$ 渐近稳定

首次积分 V = xy

$$V'(x, y) = y(—x^4y) + x(x^3y^2) = 0$$ 不稳定或者：区域 A = {x > 0, y > 0},
构造

$$V(x, y) = xy^2$$

$$V'(x, y) = y^2(—x^4y) + 2xy(x^3y^2) = x^4y^3$$ 不稳定或者：区域 A = {x > 0, y < 0}, 构造

$$V(x, y) = —x^2y$$

$$V'(x, y) = —2xy(—x^4y) — x^2(x^3y^2) = x^5y^2$$

不稳定

五. (15 分)给定区间/ = [0, a], 非负连续函数 u(t) < 1, u(0) = 0, 连续可微函数 f : (t, x) G I x **R** T **R**, 以及区间[—2, 0〕中的一个连续可微函数如)，并满足#(0—) = /(00(0)). 考虑如下问题

$$fd = /(t, x(t — u(t))) \quad [0, a]$$

$$[x(t) = ©(t) \quad t G [—2, 0]$$

(1) 试证明存在一个 a > 0 使得该问题在 t G [0, a]至少存在一个解。

(2) 更进一步，这样的解是否有唯一性，给出充足的理由。

1. 方程在[-2, T]的解与积分方程的等价性

$$x(t) = J ©(0) + K f(s, x(s — u(s)))ds \quad t G [0, T]$$
$$x(t) \quad I ©(t) \quad t G [—2, 0]$$

2. 基本设定。记

$$M = \max_{妇-2,。]} |©(t)|$$

$$N = \max_{te[-2,a], xe[-2M, 2M]} |f(t, x)|, \quad L = \max_{te[-2,a], xe[-2M, 2M]} |\frac{df}{dx}(t, x)|$$

$$B_a = \{x G C_1([—2, a]) : |x(t)| < 2M, x(t) = ©(t), t < 0\}$$

3. 存在性。可以用欧拉折线法，或者 Picard 迭代，或者压缩映射。这里用压缩映射来说明。 对于 0 < a < min(N, & , a), 我们定义映射

$$T : B_a T C_1([—2, a])$$

$$y(t) = (Tx)(t) •= J ©(0) + « f(s, x(S — u(s)))ds, \quad t > 0,$$
$$y(t) = ( )(t) := [©(t), \quad t < 0 .$$

所以

$|y(t)| < |y(t) - ©(0)| + |©(0)| < Na + M < 2M$, $T : B_a T B_a$ 另外，如果 t > 0, x, y G B_a, $||x|| = \max_{te[\_2,a]} |x(t)|$.

$$|Tx - Ty(t)| < L \int_{Jo} |x(s - u(s))) - y(s - u(s))|ds < La||x - y|| < 1/2||x - y||$$

需要证明区间-2, 用(0〈月< a)中的两个解)相等即可。记

$$M' = \max |x(t)| + \ |y(t')\ |, L' = \max \quad |f(t, x)|$$

6. 唯一性。

妇-2,问’ ’ 妇 妇’ 妇-2,团妇-″,″’dx' '八

则如果 t ∊[0,问，记非负非减函数||x —y||(t) := max$_{se[_2,}$句 |x —y(s)|,则||x —y||(0) = 0,并且

|^{x} —y$^{(t)}$| < Jg —yn(s)ds 今||^{x}—y||$^{(t)}$ < ’ $J5$ ||x —y||(s)ds n||x —y||(t)三 0

(Gronwal 1不等式)证毕。

浙江大学2013——2014学年春夏学期《常微分方程(甲)》课程期末考试试卷 课程号:—06110131—,开课学院:—理学院 ___ 考试试卷:/A卷、B卷（请在选定项上打/） 考试形式：/闭、开卷（请在选定项上打/），允许带—无—入场 考试日期：2014年工月直日，考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______________学号：___________所属院系：____________

题序	■一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

.求解下列方程（20分）

1.

(x 票-4y = x > 0, [y(i) = i.

2. $(1 - x^2)$弊 $+ 2x_{dx} - 2y = 0, -1 < x < 1$.已知一个解 $y_i = x$, 求通解。

二. **求**解**下**列方程（组）（20 分）

1. **求**常微分方程 x^3君—$3x^2$爲$+ 6x_{dx}$— $6y = x^2, x > 0$,的通解.

2. **求**常微分方程组

$$\begin{cases} x' = y + z, & t > 0, \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

的通解。**指**出零解的稳定性。

（10 分）证明奇次方程 P $(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, 有积分因子

$$\mu = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$$

' 用积分因子法求下面方程的通解，

$$xydx — (x^2 + y^2)dy — 0.$$

（提示；奇次方程指，存在正整数 n, 对于任意入, P(Ax, Ay) — $X^n P(x,y), Q(Xx, Ay)$— 入 ^{n}Q(x,y)。则有 P(x,y) — x^nP(1, 土), $Q(x,y) — x^n Q(1,$ *)）

四.（20分）叙述皮亚诺（Pean。）存在性定理，并证明。

五.（10 分）设初值问题

\ 票=x + ⑴ + 疗, x > 0, [y(0) = o，

的解的右行最大存在区间是 [0, 月）。证明:

六. (20 分) 1. **求**解二阶**奇**次线性方程 $x'' + 5x' + 6x = 0,\ t > 0$.并分析零 解 $x = 0$ 的稳定性。

2. **求**解二阶非**奇**次线性方程 $x'' + 5x' + 6x = f(t),\ t > 0$.

3. 假设函数 $g(t)$是 $[0, x)$上的有界连续函数，并且 $f+\hat{}\backslash g(t)\backslash dt$ 有界。设方程 $x'' + 5x' + (6 + g(t))x = 0$,在 $t > 0$ 上有整体解，证明此解在 $t > 0$ 上保**持**有界。

浙江大学20共-201£学年 夏 学期

《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号：061B0010，　　开课学院：数学系

考试试卷：JA卷、B卷（请在选定项上打J）

考试形式：J闭、开卷（请在选定项上打/），允许带 无 入场

考试日期：2014年06月28日，考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______________学号：______________所属院系：____________

题序	*	二	三	四	五	总分
得分						
评卷人						

一、试求解下述一阶微分方程（每小题8分，共32分）

1.求孚=竺孫 川））=0的一个不恒为零的特解. *ax* 3

2.求 $xdy +$ 　　　　$dx = 4x^2ydx$ 的通解.

3-求 x^{2}^ = $y(y-x)$, 、(1) = 1 的特解. uX

4.设/(X)在(T»，+8)内有一阶连续的导数，求微分方程

V(1 + $y^2f(xy))dx + x(y^2f(xy)-X)dy$ = 0。>0)

的通解；并说明该微分方程的任何一条解曲线与曲线？ = 2 °>0)至多相交于 一点.

二、试求出下列高阶方程的解(每小题 8 分，共 32 分)

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^2=0$$

2 d^2y dy 0

2. 3 嘴+4* = x+81nx.

日 $_2$ d

3. %2 $-^2$^(x +1)-^ + 2(x +1)^ = 1 Ox^3 sinx,其中相应齐次微分方程的一个特解为 V =工・

$d^2y\ dy\ /$

4\. $\overline{dx^2}\ \overline{dx}$ — Z V = 5 — $l + e^{2x}$

三、求解下列线性微分方程组（每小题 8 分，共 16 分）

$-3x + 2y + 2z$

$= 2x - 3y + 2z = 2x + 2y - 3z$

2. 一一 = 虫出公 出 一 2 + X2 一 X 4+

四、(10 分) 函数/(x)在(0,+00) 内有一阶连续的导数，/(1) = 1,对任何 x,Ze(0,+co)满足

J: 7 侦)加=爪 f(u)du + x^f(u)du,

试求函数/(x).

五.（10分）记 $(p\hat{}x)=xe^x$ +sinx, $(p_2\{x)$ $-lxe^x$, %（x） = 2sinx, 试讨论:

（1） .如果是某个&阶齐次线性常微分方程的解，求最小的自然

（2） .如果仫,代,代京某个*阶非齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数。？（需要给出适当的理由）

（3） .如果代,此，代是某个&阶（实）常系数齐次线性常微分方程的解,求最小的自然数 A ?并求出该方程的表达式.

浙江大学 2013 - 20 些学年 夏_学期

《常微分方程》课程期末考试参考答案

一、试求下述一阶微分方程(每小题 8 分，共 32 分）U 求¥=?&产’ J; (0)=° 的一个不恒为零的特解；

W 10 牛’ 2’

解：当 j，*0 时，有 $y^{-2.5}dy$ = —xdx ,积分得 J，= (x2+C 严。

3

由初始条件得 C = 0 即特解为= $x^{10/3}$ ；从而特解为》=$x^{10/3}$ c 2

2. *xdy* + 2 j In dr = $4x^2ydx$ 的通解；

解：同除》，得 4- — ID y = 4X，即 Iny = e (C + [4xe ^dx) = x^2-Cx^{-2}

dx x J 4-

通解为. P=/−3。

3. X2? = J，(J，-对，J,(1)=1 的特解；

dx

解：方程为曲=四二，令 J，= x〃得方程 x- = u^2-lu 即 ~~曲.~~= 一, 积分得皿=02

dx x" 2/ dx ″(〃一 2) X *u*

通解为 yz2± = cx^2,.由初始条件 J，(1)=1 得 C=-l.特解为 J，=My

« 1 + x 2，

*伯努明坤£ . 岡蘇〖，乙'

辭弑峻挦 0 冬

p. /设 [(X)在(-00, + Sj) ra 有一阶连续的导数，求常微分方程

XI + y^2f(xy))dx + x(j，2y(xj，) -l)dy = 0 (j- > 0) 的通解；并说明该微分方程的任何一条解曲线与曲线冷，=2。，>0)至多相交于一点. 解：同乘积分因子以=)；釋全微分方程

$\frac{x}{y} f(xy)$

$\int f(xy)dx + \int f(xy)dx$ $+ \chi' = x f(xy)$

$+ \chi(y)$

以赤 W 的 5

(；+空见尝,) -*=° , 3；十房印

得原通解为三+ F(xj，) = C,普中 F(x)是/(x)的一个原函数。假设常微分方程的某条解曲线与

J' 牛

xy = 2 (j； > 0)交于二点义(*1，乃) 及 B(x_2,y_2), 则有

Y Y

x_1y_1 = x^y_2 = 2^ —+ F(2) = C = —+ F(2)

M 泌 J' 2

从而得 X] = x_2, y, = y_2。

$) + (y^3 f(xy) dx + xy^2 f(xy) dy) = 0$

2'

$f(xy)\, d(xy) = 0$

2'

$F(xy) = c$

2'

曲线

二、•（每小题 8 分，共 32 分）试求出下列高阶方程的解：

1. $J'\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^2=0$

解：记■—= P >则有 = $p\frac{~}{dy}$ >原方程化为 vp 虫- p， ax dx dy 0，得丿璽=P 或£_^0，解得

P = GV。从而得ˆ = c>,通解为 $y=C_2e^{C_1x}$。

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2+8\ln x$

解：令 x = e> =川），则乂空=逖，乂 2々=空-处，原方程化为工 dx dt dx~ dt' dt dt

特征方程为一 4“ + 4 = 0 ,解得特征根为片=,2=2

$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=e^{2t}+8t$，

方程贵一 4 才 + 4y = /有特解饥(1)= At^2e^{2t}. ‘代入刚° =捉「2’ d~ y dy

方程冒戸一 4 方* 4> = *有特解代《》=及+ C ‘代入得代。）= 2, + 2，

% +代=!3″ + 2^ + 2 = —$x^2\ln^2 x+2\ln x+2$ 及通解

从而原方程有特解

$y=(C_1+C_2t)e^{2t}$ + 丄广/ + 27 + 2 = (C】+ G 工泪 + —$x^2\ln^2 x+2\ln x+2$

2 — —■— **2**

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(x+1)\frac{dy}{dx}+2(x+1)y=10x^5\sin x$

解：齐次线性方程/- 2x(x + 1)g + 2(x + 1)y = 0 有特解 $p(x)=x$，令 $y=xu$ 原方程化为

空-2 衣= 10s£x『解得 dx' dx

$u=C_1+C_2e^{2x}+4\cos x-2\sin x$

从而原方程的通解为 J， $=(C_1+C_2e^{2x}+4\cos x-2\sin x)x$.

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=\frac{e^x}{1+e^x}$，解：特征方程为 d = o\ j> = $C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 即求 $C_1(x), C_2(x)$

特征根巧=-1 和% = 2，相应的齐次线性方程有通解

面利用变动任意常数法求非齐次线性方程的特解 9（x） = G（x）e-、+C2（x）e2x,

2’

C；(x)e->+C；(x)e» = 0， - C；(x)e^{-x} + 2C；(x>^{2x} - i + ^2j

解得 G(1)=—5M7，C；（X） = §MT。积分得

C](x) = --111(1+ e²3　　　C,(x) = ~7（e-x + arctanex）。

6　　　*　　　"　　　3

通解为 j = e-、(Ci 一丄 111(1 + 广))+ 凌、(。2 -?(广 + arctan e、))。

6　　　3

2

y'=cy

戒 $\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}$ 4'

齐次 6
非齐次 2

三、(每小题 8 分，共 16 分) 求解下列线性微分方程组：

、r

dy dx >

—=*x* + 2 *y* + 3*e dt dt*

dy c dx 』

-------p 2------ = 4 x — *v*

dt dt

解；二个方程相减得｝, =》_虫_疽 2 代入第二个方程得

dt

*d*²*x* „ *dx* ° *A* . *I*\ —2 丁+ 3x = -3e 4 2.) *dt*′ *dt* 1

解得 x = e*C] COS(A/2/) + C₂ sin(J^Z))- e”皿代入 j， =

(I *I* *dt*

G cos(Viz) + G sin(V^r))

(»)

=-3*x* + 2*y* + 2*z*

=2*x* - 3*y* + 2*z*

= 2x + 2j，-3z

解：系数矩阵』= 2 -3 相应的特征多项式为

f-3 2 2、

A-*ZE*\\= =_(久_1)(九 + 5)2 4

_3 J

解得特征值为人 1 = 1 及 A, = 2₃ = -5 e

属于特征值儿=1 的特征向量 R=(1,L1)「，方程组有解 S=(1,1,1)W；

属于特征值% = % =-5 的特征向量乙=(T，O，1/及。3 =(T，l，0)‘ 及 方程组有解 0=(-1,0,1/e-s‘ 2′

03 = (-1,1,0)官 5'；从而方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

20

四、(10 分)函数/Yx)在(0,+«0 内有一阶连续的导数，/"(1) = 1,对任何 X,7e(0,+oO)满足

1 /(")如=4 *f(u)du* + *x^f(u)du,*

试求函数/(X)o 解：关于 X 求导得

、—— —-

丁(街=駅 3)+ [/(昀如，关于/求导得 (1)

xf (彼)=力(.)+ [*f (u)du*。 联立(1)和(2)消去 4' (有一即可)

(2)

xtf (x) + xj″ *f(u)du* = x(f(0 + rj *f(u)du*

o 移项，两边同除 xt,得

/W--

Y

左边，得

:了(U)如=了⑴血= *amM* = /(1) = 1. 2

从而有 = *t* + *(u)du* ,关于 f 求导得 /X0 =- > 由 /0) = 1 解得 /'(f) = 1 + ln£ . 2 *t* -

五.(10 分)记 PJ(AQ = xe^x +sinx , $^_2$(x) = $2xe^x$, $^_3$(x) = 2sinx ,试讨论；

3'(i).如果们,代,代是某个人阶瑟线性常微分方程的解，求最小的自然数次?(需要给出适 当的理由)

矿(2),如果/,仫,饥是某个/C 阶非齐次线性常微分方程的解,求最小的自然数*?(需要给出 适当的理由)

4 (3).如果*収,牝队*是某个 A 阶(实)常系数齐次线性常微分方程的解,求最小的自然数 k? 并求出该方程的表达式。

2 / 瘁 I /

解：(L' £3。%，心，代中仅有二个线性无关解代，代，由齐次线性常微分方程解的结构定理知 解空间至 5 惠三维线性空切，从而最小的自然数 S 2。

(2) . A = 1 2 代~ *(p*$_2$ =!sinx - xe^x,饥-代=-sin x + xe' 为相应的 A 阶齐次线性常微分方程解、注意到它们是线性相关扇，*k* 阶齐次线性常微分方程解空间至少是一维线性空间，从而最小的自然数 A* = 10 2^1

(3) . A =4o 常系数齐次线性常微分方程的解一定是由函数 x 任，耻吹 cos 伊或 Pepsin 雄蛆 成，由解代，饥的表达式知函数 xe'sinx 是 A 阶常系数齐次线性常微分方程的解，特征方程至少 有特征根拡=“，=1 , /z_3 = i, /i_4 = *-i* 从而最小的自然数 A- = 4 且相应的特征方程为

O

0 =(户_1)2(户 _/•)(//+ £) = /? _2〃3+2/? _2 必 +]，常系数齐次线性常微分方程为 J® - $2^{/3)}$+2/-2£ +], = 0。/