期末复习题三答案

2019年12月21日 星期六　　下午5:20

一、下用数学归纳法证明：$D_n=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n+1)!$

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-3=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{2-1}\cdot 3!$ 成立

假设 $n=k$ 时，$D_k=\frac{1}{2}(-1)^{k-1}(k+1)!$

下证 $n=k+1$ 时，$D_{k+1}=\frac{1}{2}(-1)^{k}\cdot(k+2)!$

$$D_k=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&k-1&k&k+1\\1&-1&0&\cdots&0&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&k-2&2-k&0&0\\0&0&\cdots&0&k-1&1-k&0\\0&0&\cdots&0&0&k&-k\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按最后一列}}(-1)^{2(k+1)}\cdot(-k)\cdot D_k+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)\cdot k!$$

$$=(-k)\frac{1}{2}\cdot(-1)^{k-1}\cdot(k+1)!+(-1)^{k+2}(k+1)\cdot k!$$

$$=\left(\frac{k}{2}+1\right)\cdot(-1)^{k}\cdot(k+1)!$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{k}\cdot(k+2)!$$

故归纳假设成立，

则原命题得证，$D_n=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n+1)!$

二、(1) 当 a,b,c,d 互异时，该线性方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 为

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{行列式}]{\text{范德蒙德}}(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)\neq 0$$

设系数矩阵为A

故 $r(\bar{A})=4$，结合 $r(A)\leq 3\Rightarrow r(\bar{A})\neq r(A)\Rightarrow$ 方程组无解

(2) $\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$

结合 $(-1,1,1)^T$ 为通解

$\Rightarrow\begin{cases}-1+k+k^2=k^3\\-1-k+k^2=-k^3\end{cases}\Rightarrow 2k^2-2=0\Rightarrow k=\pm1$

且$K=\pm1$代入符合条件

故$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases} \Rightarrow$ 通解为 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中$t$为任意常数

三、(1) $\because 0\in V$，故V非空，对$\forall A,B\in V, K\in R$

下证 $A+KB\in V$

实际上 $tr(A+KB)=tr(A)+Ktr(B)=0$

故$A+KB\in V$

另一方面关于矩阵加法和数乘符合8条运算性质

故V是$R^{2\times2}$的一个子空间

(2) $V\in R^{2\times2}$，故它可以表示为 $V=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，

$trV=0 \Rightarrow a+d=0$

则 V的一组基可表示为$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

且$\forall A\in V$, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 构成V的一组基

$\dim V=3$

四、$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^n-1$

(i) 当n为奇数时，$\lambda^n-1=(\lambda-1)(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+1)=0$

$\Rightarrow \lambda=1$为其唯一的实特征值

$$\left(\begin{array}{l} \text{当}|\lambda|<1\text{时}, \underbrace{(1+\lambda)}_{>0}+\underbrace{(\lambda^2+\lambda^3)}_{>0}+\cdots+\underbrace{(\lambda^{n-3}+\lambda^{n-2})}_{>0}+\underbrace{\lambda^{n-1}}_{>0}>0 \\ \text{当}|\lambda|\geq1\text{时} \underbrace{1}_{>0}+\underbrace{(\lambda+\lambda^2)}_{>0}+\underbrace{(\lambda^3+\lambda^4)}_{>0}+\cdots+\underbrace{(\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1})}_{>0}>0 \end{array}\right)$$

其特征向量为 $\xi_1=[1,1,1,\cdots 1]^T$

(ii) 当n为偶数时，$\lambda^n-1=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^{n-2}+\lambda^{n-4}+\lambda^{n-6}+\cdots+1)$

$\Rightarrow \lambda=\pm1$ 为其唯二特征值

（$\lambda^{n-2}+\lambda^{n-4}\cdots+1$ 无实根与上文同理）

其特征向量为 $\xi_1=[1,1,\cdots 1]^T$，$\xi_2=[1,-1,1,-1,\cdots,1,-1]^T$

综上，当n为奇数时，特征值为1，特征向量为 $[1,1,\cdots 1]^T$

当n为偶数时，特征值为 ±1，特征向量为 $[1,1,\cdots 1]^T$，$[1,-1,1,-1,\cdots 1,-1]^T$

五、$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

只需使其1，2，3阶主子式大于0

$\Delta_1=1>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0 \Rightarrow t\in(-1,1)$

$\Delta_3=5-4t-1-4-5t^2$

$=-t(5t+4)>0 \Rightarrow t\in(-0.8,0)$

综上，$t\in(-0.8,0)$

六，(1) $\forall f\in R[x]_3$，$f=ax^2+bx+c$

$=a(x^2+1)+b(x+1)+(c-a-b)$

故 $\{1+x^2,1+x,1\}$ 为V的一组基

(2) 令 $\alpha_1=\beta_1=1+x^2$，$\alpha_2=1+x$，$\alpha_3=1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=1+x-\frac{1}{2}(1+x^2)=\frac{1}{2}(1+2x-x^2)$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=1-\frac{1}{2}(1+x^2)-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}(1+2x-x^2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x^2$$

则可以将β_1,β_2,β_3单位化得到一组标准正交基$\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}x,\ \frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{6}x^2,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2\}$

(3) $[1+x+x^2, 1-x^2, 1-x]=[1,x,x^2]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}=[1,x,x^2]M_2=[1+x^2,1+x,1]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}M_2$

$\therefore$从基(A)到基(B)的过渡矩阵$M=M_1^{-1}M_2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$

(4) 基(A)的度量矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

基(B)的度量矩阵$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A,B$等价且合同

但$|A|=4\neq 9=|B|$，故A,B不相似

七、(1) (i) 先证$|E-AB|=|E-BA|$

$$\left|\begin{bmatrix}E&A\\B&E\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}E&A\\B&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&-A\\0&E\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}E&0\\B&E-BA\end{bmatrix}\right|=|E-BA|$$

$$\left|\begin{bmatrix}E&A\\B&E\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}E&A\\B&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&0\\-B&E\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}E-AB&A\\0&E\end{bmatrix}\right|=|E-AB|$$

则有$|E-AB|=|E-BA|$

用 $\frac{1}{\lambda}(A+E)$代替A ($\lambda\neq0$)

$\Rightarrow |E-\frac{1}{\lambda}(A+E)B|=|E-B\frac{1}{\lambda}(A+E)|$

$\Rightarrow |\lambda E-(AB+B)|=|\lambda E-(BA+B)|$

$\Rightarrow |\lambda E-(AB+B)|=|\lambda E-(BA+B)|$

$\Rightarrow \lambda\neq 0$时，$AB+B$与$BA+B$有相同的特征值

当$\lambda=0$时，$|AB+B|=|(A+E)B|=|B(A+E)|=|BA+B|$成立

综上，$AB+B$与$BA+B$有相同的特征值

(2) $AB=(B-A^T)A$

$\Rightarrow AB-BA=-A^TA$

$\Rightarrow tr(AB-BA)=tr(-A^TA)$

$\Rightarrow tr(A^TA)=0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2=0 \Rightarrow A=0$

八、设方阵的秩为r，则存在可逆阵P,Q, s.t $A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$

取 $B=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$，$C=PQ$

则 $A=BC$，同时满足$B^2=B$，B为幂等矩阵

C为可逆矩阵