沿 X 轴正向传播的平面简谐波的波函数

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

波函数常用周期 T、波长λ 或频率ν 的形式表达

由 $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ ， $uT = \lambda$ 消去波速u

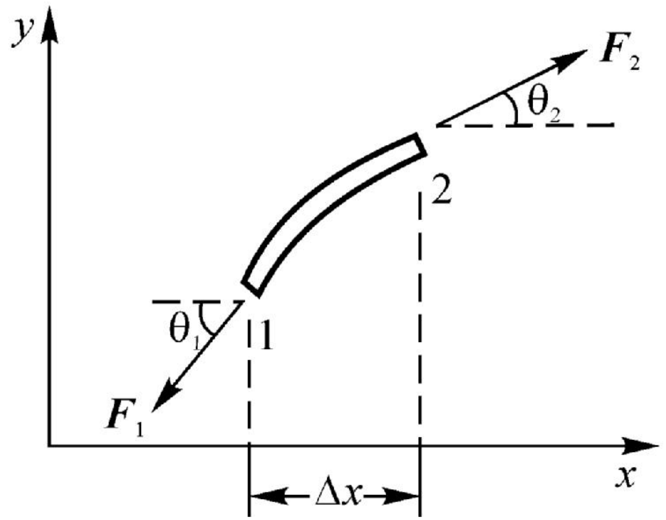
得
$$y = A\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$
$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$\dfrac{1}{T}$ 和 $\dfrac{1}{\lambda}$ 分别具有单位时间和单位长度的含义，

分别与时间变量 t 和空间变量 x 组成对应关系 。

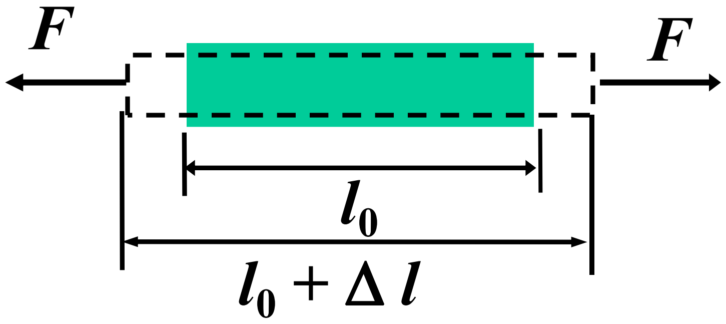
可以一维绳波为例推导波动方程（证明见课本）。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



1) 弹性绳上的横波 $u=\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ F—绳中的张力，μ—绳的线密度

2) 固体棒中的纵波 $u=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$



拉伸

Y—杨氏弹性模量 ρ—棒的密度

其中：$\dfrac{F}{S}=Y\dfrac{\Delta l}{l_0}$

第六章 机械波
(§6.4- §6.5)

本课时教学基本要求

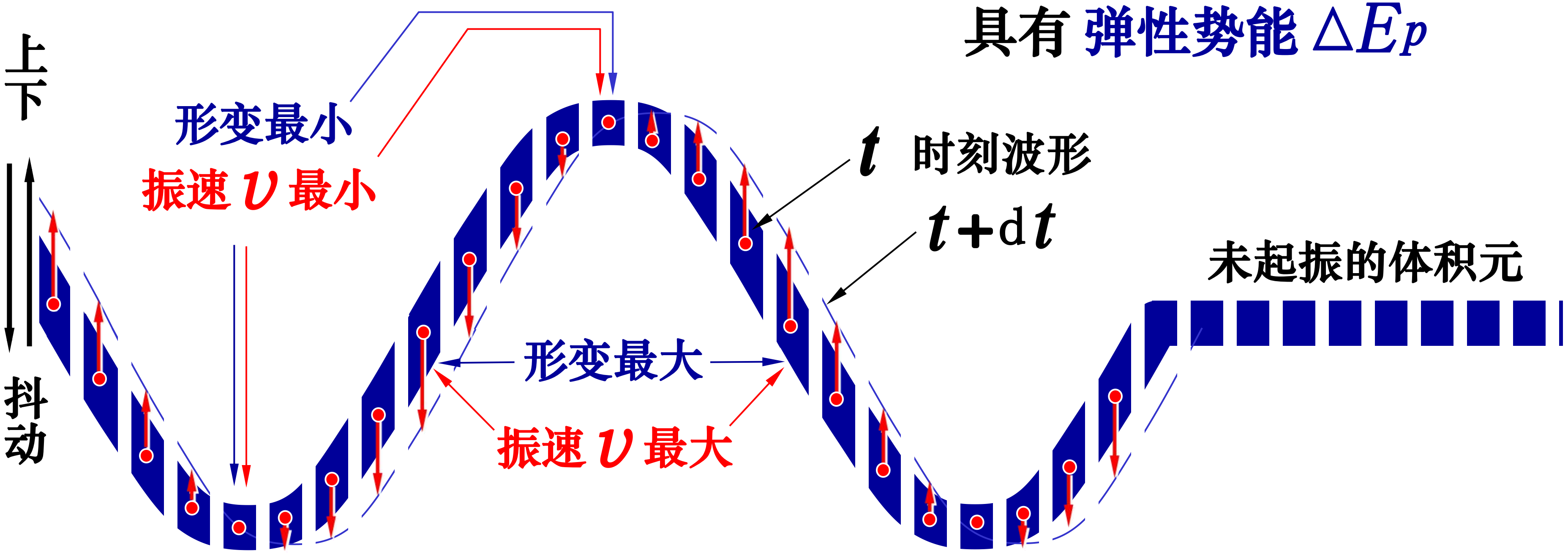
1、理解波的能量特征。了解能量密度、能流密度、波的强度等概念。

2、理解波的叠加原理，掌握波的相干条件及相干波叠加后振幅加强和减弱的条件。

§ 6.4 波的能量 能流密度

现象： 若将一软绳（弹性媒质）划分为多个小单元（体积元）

- 在波动中，各体积元产生不同程度的 **弹性形变**，具有 **弹性势能** ΔE_p



- 各体积元以变化的**振动速率** v 上下振动，具有**振动动能** ΔE_k

理论证明（略），当媒质中有行波传播时，媒质中一个体积元在作周期性振动的过程中，其弹性势能 ΔE_p 和振动动能 ΔE_k 同时增大、同时减小，而且其量值相等，即 $\Delta E_p = \Delta E_k$。后面我们将直接应用这一结论。

一、能量密度（单位体积媒质中波的能量）

设 一平面简谐波 $y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$

在 x 处取体积元 ΔV，媒质密度 ρ

体积元的质量 $\Delta m=\rho\Delta V$

体积元的

振动速度 $v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})$

动能 $\Delta E_k=\frac{1}{2}\Delta m v^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

势能 $\Delta E_p=\Delta E_k$

总量能 $\Delta E=\Delta E_p+\Delta E_k=\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

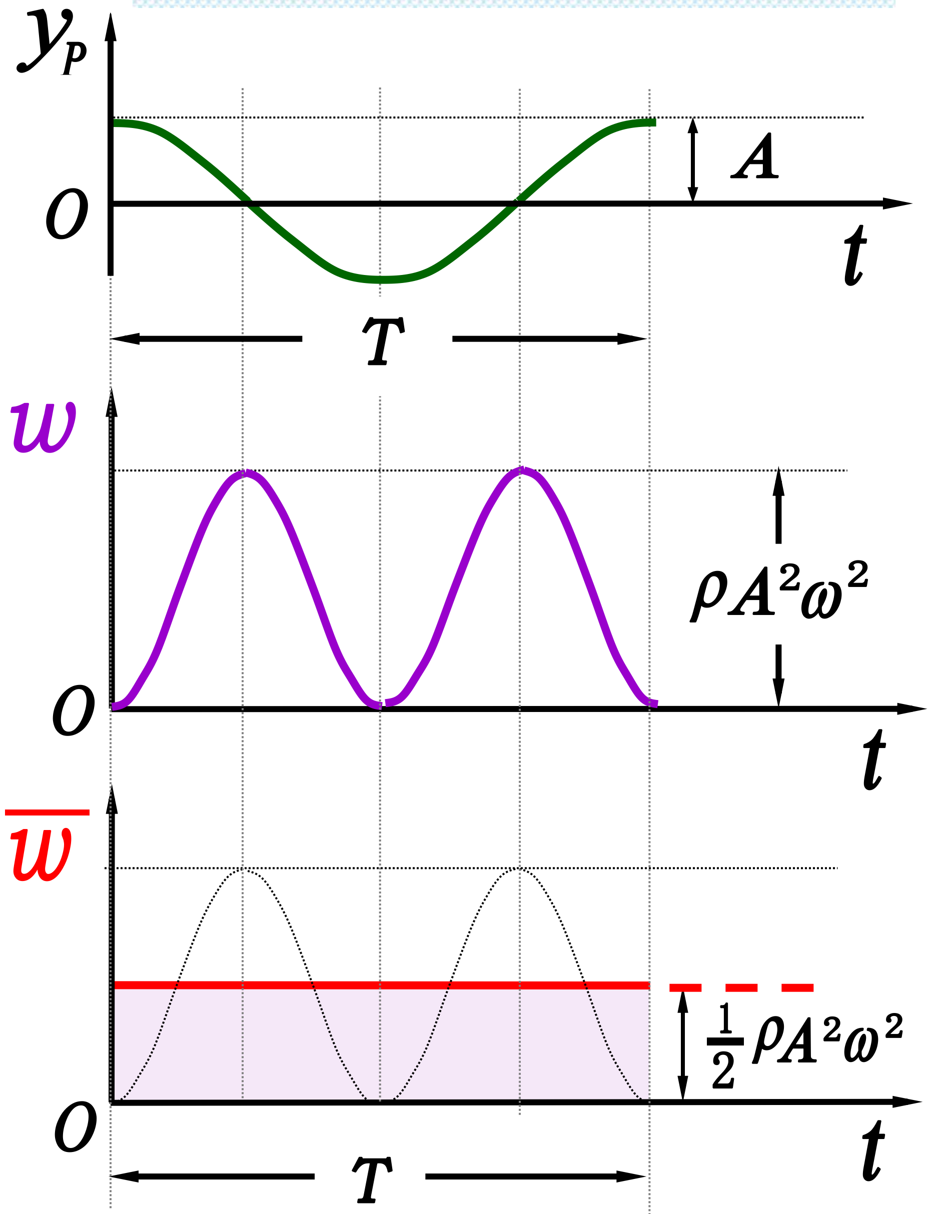
可见，波动过程是媒质中各体积元不断地从与其相邻的上一个体积元接收能量，并传递给与其相邻的下一个体积元的能量传播过程过程。

能量密度 $w=\frac{\Delta E}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

平均能量密度 $\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho \underline{A^2}\,\underline{\omega^2}$

$\overline{w}$ 是 w 在一周期内的时间平均值。单位：焦耳·米$^{-3}$（$\mathrm{J\cdot m^{-3}}$）

借助图线理解 w 和 $\overline{w}$



简谐平面波 $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

在密度为 ρ 的均匀媒质中传播

某点 x_P 处的振动方程

$$y_P = A\cos\omega\left(t - \frac{x_P}{u}\right)$$

该处的 能量密度 (随时间变化)

$$w = \rho A^2\omega^2 \sin^2\omega\left(t - \frac{x_P}{u}\right)$$

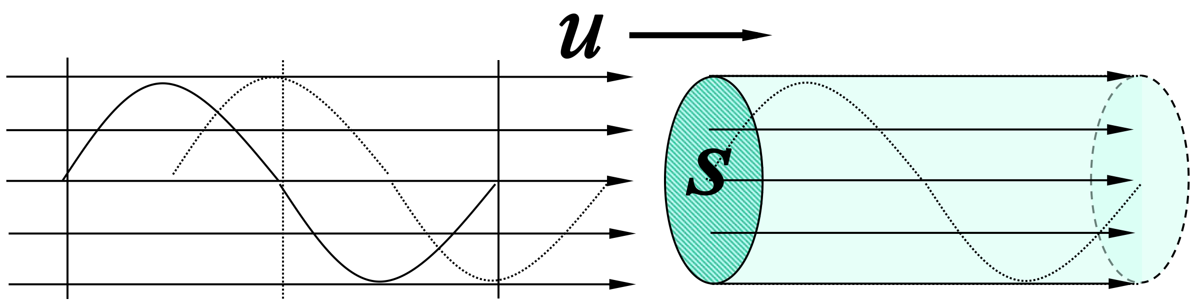
该处的 平均能量密度

(时间平均值)

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

二、 能流 和 能流密度

体积元的能量取决于其振动状态
振动状态以波速 u 在媒质中传播 } 能量以波速 u 在媒质中传播



能流 单位时间垂直通过的某截面积 S 的能量 $P = wsu$

平均能流 一周期内垂直通过某截面积 S 的能量的平均值

$$\overline{P} = \overline{w} s u$$ 单位：瓦 (W)

平均能流密度（波的强度） 垂直通过单位截面积的平均能流

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}\, u = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u$$ 单位：瓦·米$^{-2}$ (W· m $^{-2}$)

例 已知

一频率为 1000 Hz 的声波在空气中传播

波强为

$3\times10^{-2}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$

波速为

$330\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

空气密度为

$1.3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

求

此声波的振幅

解法提要

波强 $I=\overline{w}\,u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

$$\omega=2\pi\nu$$

则 $A=\dfrac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\dfrac{2I}{\rho u}}$

$$=\frac{1}{2000\pi}\sqrt{\frac{2\times3\times10^{-2}}{1.3\times330}}$$

$$=1.8\times10^{-6}\ (\mathrm{m})$$

因在空气中传播的声波是纵波，此振幅值表示媒质各体积元作振动时，在波线方向上相对于各自平衡位置的最大位移。

- 平面波和球面波的振幅

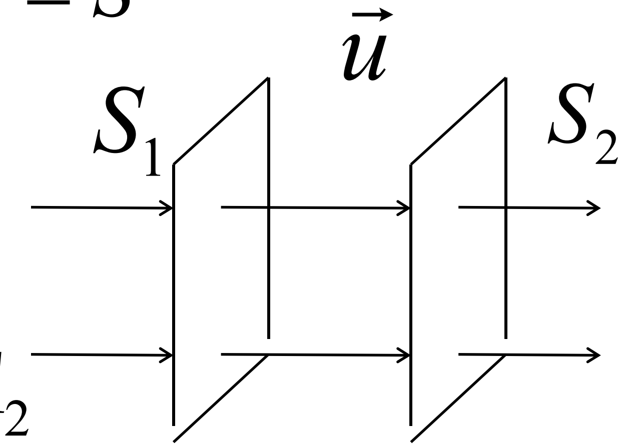
在各向同性、均匀、不吸收能量的介质中传播的平面波在行进方向上振幅不变。

证明：因为

在一个周期 T 内通过S_1和S_2面的能量应该相等

$$\because I_1 S_1 T = I_2 S_2 T, \quad S_1 = S_2 = S$$

$$\frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 S_2 T$$

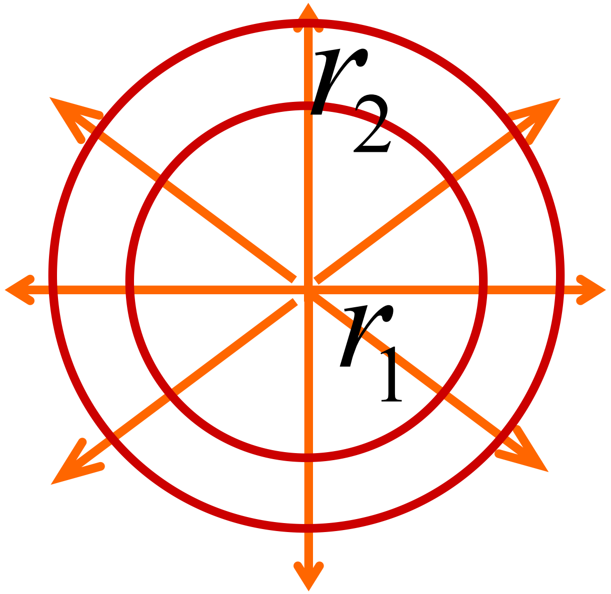


所以,平面波振幅相等：$A_1 = A_2$

$$\because \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S_2 T$$

球面波 $S_1 = 4\pi r_1^2$； $S_2 = 4\pi r_2^2$

$$\therefore A_1 r_1 = A_2 r_2$$



所以振幅与离波源的距离成反比。如果距波源单位距离的振幅为A则距波源r处的振幅为 $\frac{A}{r}$

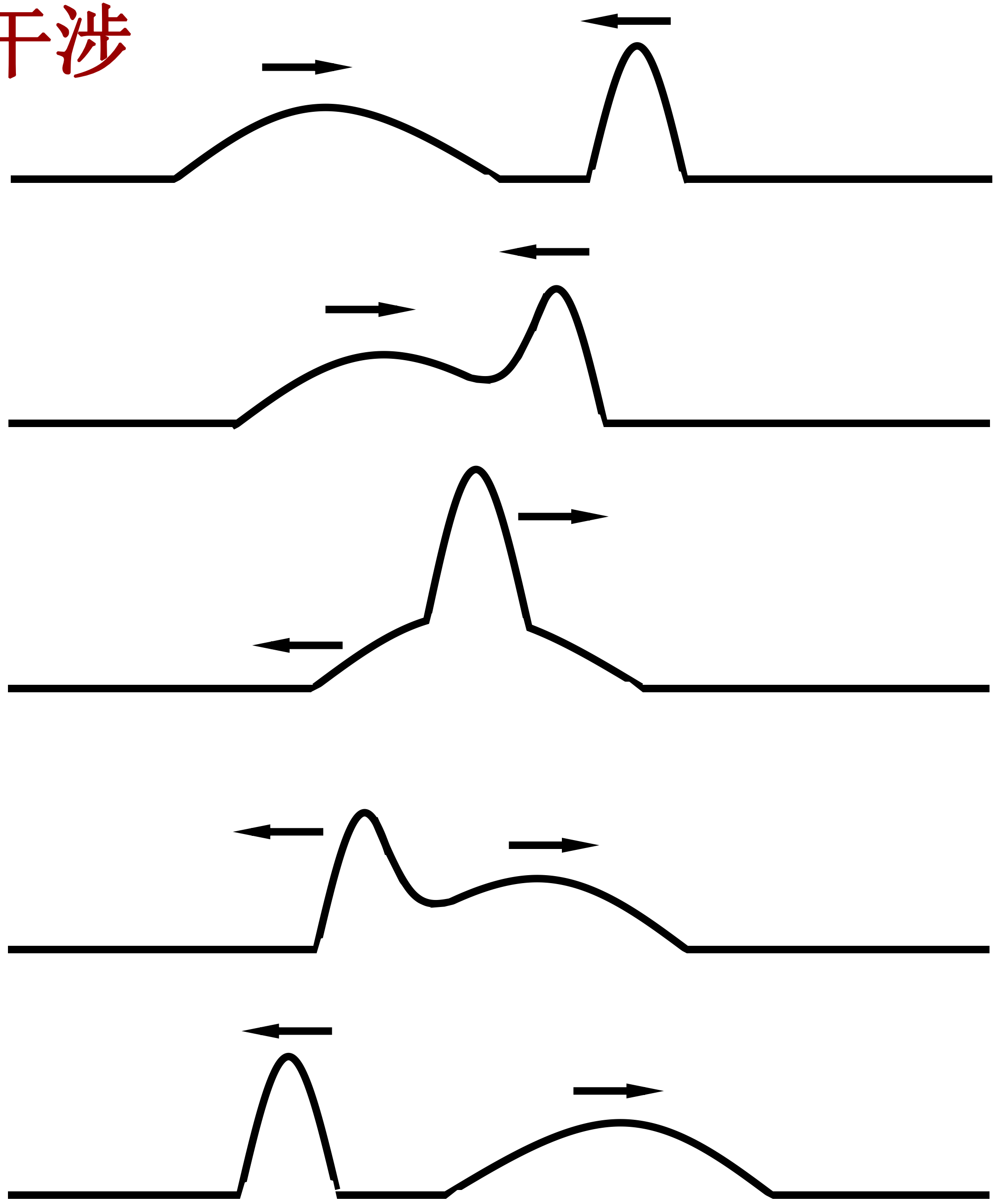
由于振动的相位随距离的增加而落后的关系，与平面波类似，球面简谐波的波函数：

$$y = \frac{A}{r}\cos\omega(t - \frac{r}{u})$$

§ 6.5 叠加原理 波的干涉

一、波的叠加原理

（1） 两波在空间某点相遇，相遇后各波仍保持其各自的特性（如频率、波长、振动方向等），继续沿原方向传播。（2）在相遇的区域内质点的振动是各列波到达该点所引起振动的叠加；



通常波强不太强的波相遇，满足叠加原理，称为线性波。波强强到不满足叠加原理的波，称为非线性波。

二、 波的干涉

波的干涉是在特定条件下波叠加所产生的现象。

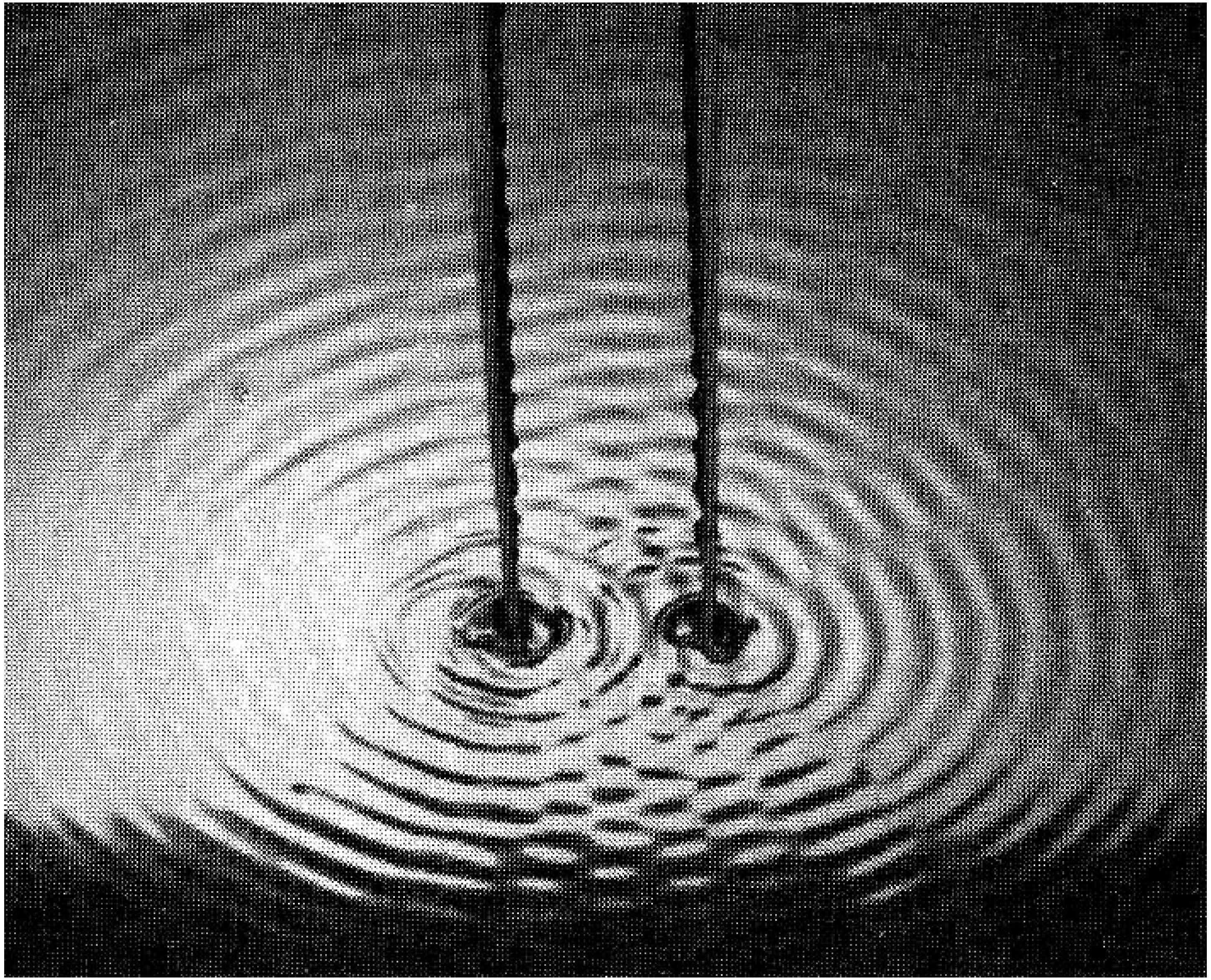
相干条件：
- 振动 频率相同
- 振动 方向相同
- 振动 相位差恒定

这样的两列或多列波叠加时，叠加区域中各质点所参与的两个振动具有各自的恒定相位差，结果使媒质中某些质点的振动始终加强，某些质点的振动始终减弱。这种现象称为波的干涉。

能产生干涉现象的波称为相干波

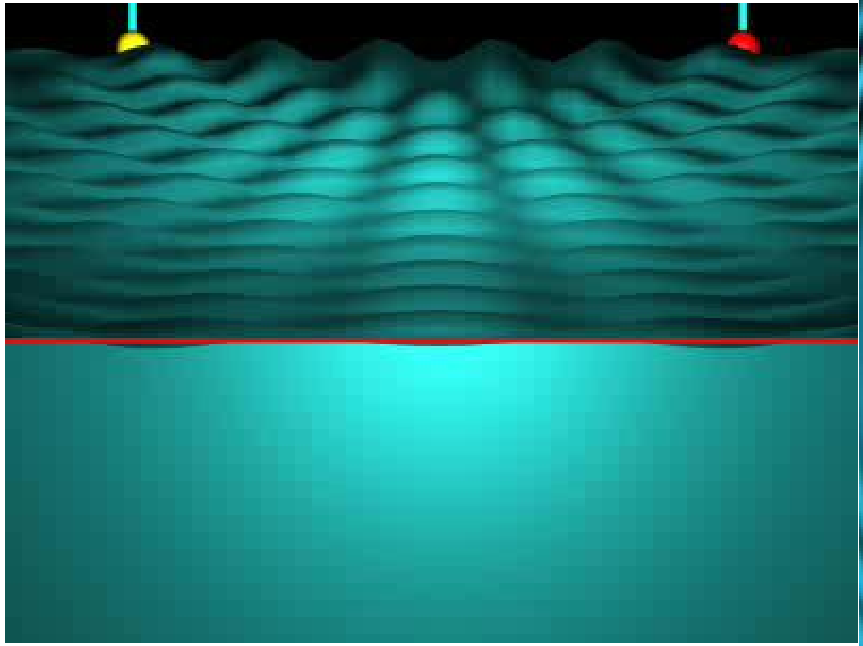
其波源称为相干波源

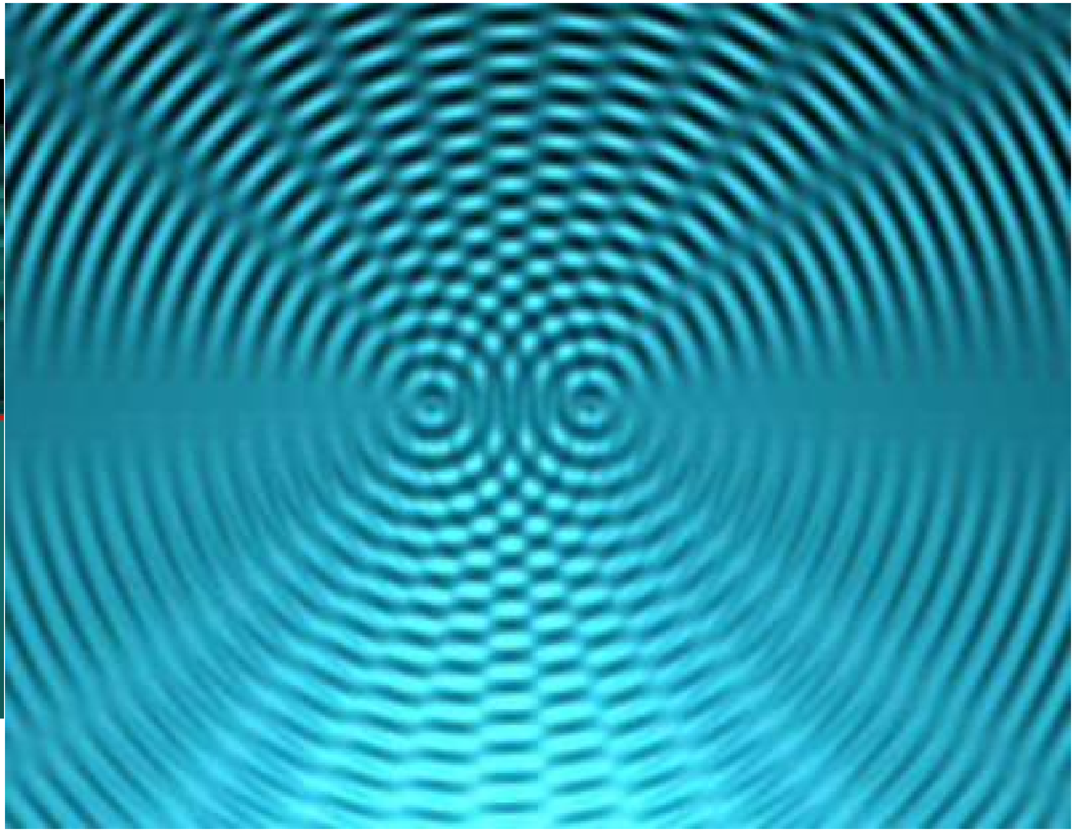
二、 波的干涉



图示是由同频率、同振动方向、同相位的两个波源引起的水面波的叠加情况

水波的干涉图样。

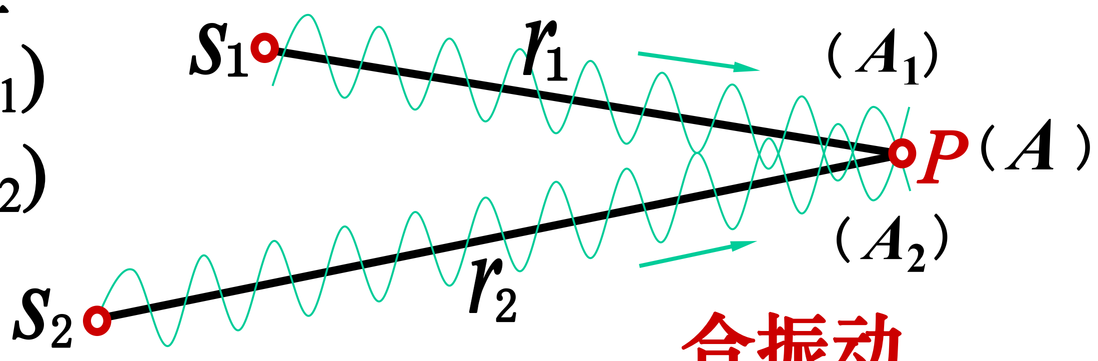




两相干波源的振动方程

$$y_{10}=A_{10}\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$y_{20}=A_{20}\cos(\omega t+\varphi_2)$$



分别引起 P 点的振动

合振动

$$\left.\begin{aligned}y_1&=A_1\cos\left[\omega t+\left(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)\right]\\ y_2&=A_2\cos\left[\omega t+\left(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}y&=y_1+y_2\\ &=A\cos(\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

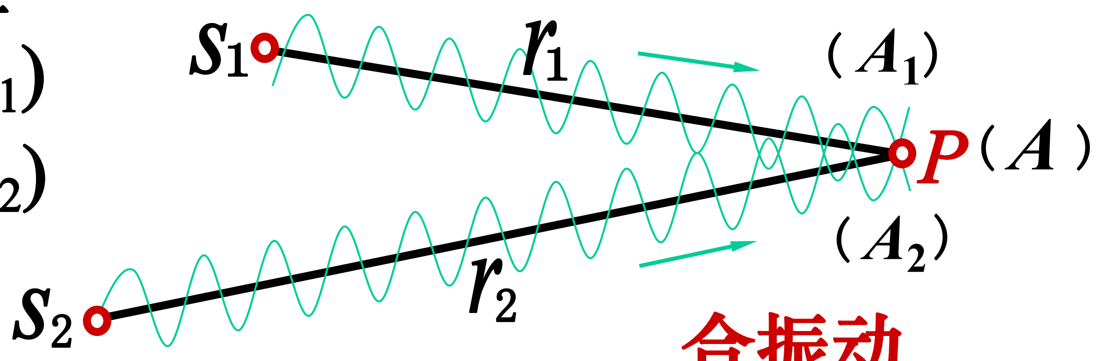
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)}$$

$$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\left(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)+A_2\sin\left(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1\cos\left(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)+A_2\cos\left(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}$$

两相干波源的振动方程

$$y_{10}=A_{10}\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$y_{20}=A_{20}\cos(\omega t+\varphi_2)$$



分别引起 P 点的振动

合振动

$$y_1=A_1\cos\left[\omega t+\left(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)\right]$$

$$y_2=A_2\cos\left[\omega t+\left(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)\right]$$

$$y=y_1+y_2$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\underbrace{\left(\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)}}$$

y_1、y_2 两振动的相位差

$$\left[\omega t+\left(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)\right]-\left[\omega t+\left(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)\right]=\Delta\varphi$$

P点给定，则$\Delta\varphi$ 恒定。故空间每一点的合成振幅 A 保持恒定。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)}$$

当 $\Delta\varphi$

$$=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$

$$=\pm 2k\pi$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ 时

合成振动的振幅最大

$$A_{\max}=A_1+A_2$$

当 $\Delta\varphi$

$$=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$

$$=\pm(2k+1)\pi$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ 时

合成振动的振幅最小

$$A_{\min}=|A_1-A_2|$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)}$$

若 $\varphi_2=\varphi_1$ 即两分振动具有相同的初相位

则 $\Delta\varphi$ 取决于两波源到P点的路程差$\delta=r_2-r_1$，δ 称为**波程差**

当 $\Delta\varphi=2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm 2k\pi$

即 $\delta=r_2-r_1=\pm k\lambda$

$(k=0,1,2,\cdots)$ 时

则合成振动的振幅最大 $A_{max}=A_1+A_2$

波程差为零或为波长的整数倍时，各质点的振幅最大，干涉相长。

当 $\Delta\varphi=2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm(2k+1)\pi$

即 $\delta=r_2-r_1=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$

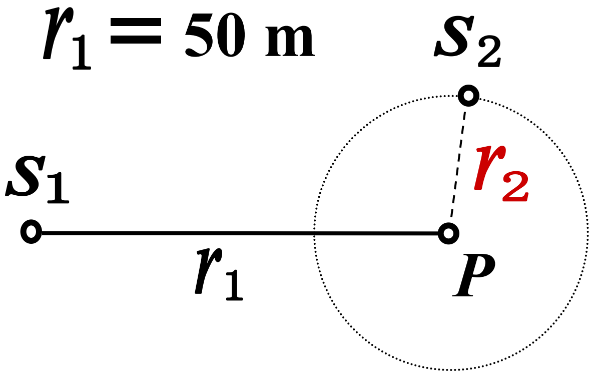
$(k=0,1,2,\cdots)$ 时

则合成振动的振幅最小 $A_{min}=|A_1-A_2|$

波程差为半波长的奇数倍时，各质点的振幅最小，干涉相消。

例 **已知**

两相干波源 S_1、S_2 同初相，$\lambda = 2\ \mathrm{m}$，振动方向垂直黑板，S_1 到定点 P 的距离 $r_1 = 50\ \mathrm{m}$



求

当 r_2 满足什么条件时

- 在 P 点发生相消干涉；
- 在 P 点发生相长干涉。

解法提要

S_2 可位于纸面内以 P 为圆心、以满足下述条件的 r_2 为半径的一系列圆周上。

- 相消干涉 $r_2 - r_1 = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$$r_2 = 50 \pm (2k+1) \ (\mathrm{m})$$

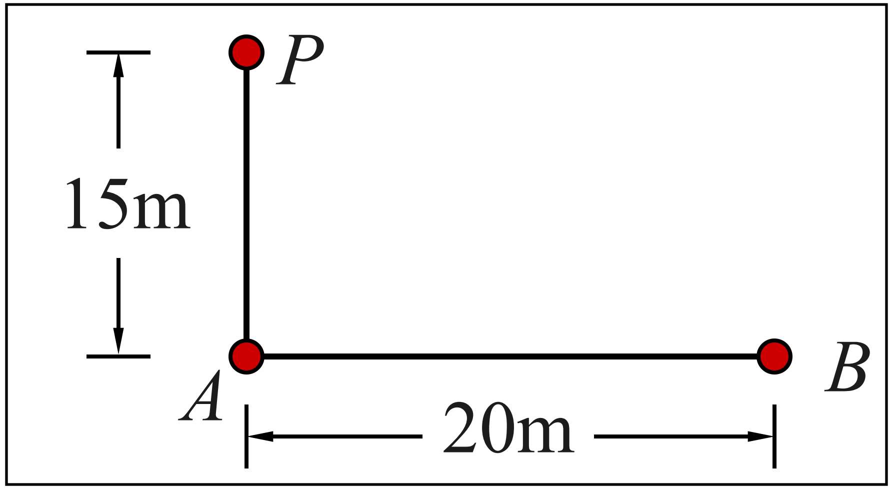
$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

- 相长干涉 $r_2 - r_1 = \pm k\lambda$

$$r_2 = 50 \pm 2k \quad (\mathrm{m})$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

例. 如图所示，A、B 两点为同一介质中两相干波源.其振幅皆为5cm，频率皆为100Hz，但当点 A 为波峰时，点B 适为波谷.设波速为10m/s，试写出由A、B发出的两列波传到点P 时干涉的结果.



解 $BP=\sqrt{15^2+20^2}\,\mathrm{m}=25\,\mathrm{m}$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{10}{100}\,\mathrm{m}=0.10\,\mathrm{m}$$

设 A 的相位较 B 超前，则 $\varphi_A-\varphi_B=\pi$.

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{0.1}=-201\pi$$

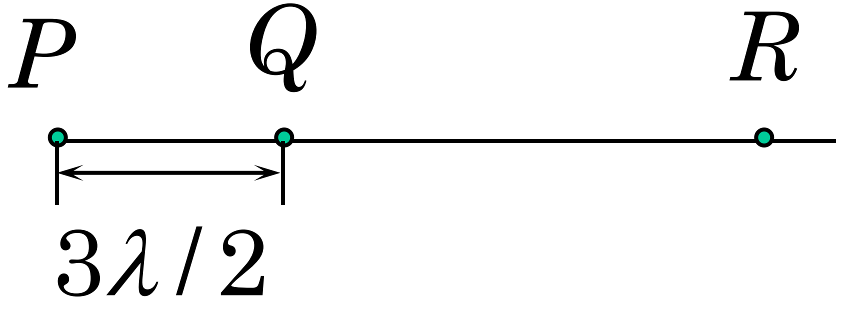
点P 合振幅 $A=|A_1-A_2|=0$

例：两相干波源分别在 PQ 两点处，初相相同，它们相距 $3\lambda/2$，由 P、Q 发出频率为 v，波长为 λ 的两列相干波，振幅分别为 A_1 和 A_2。R 为 PQ 连线上的一点。求：①自 P、Q 发出的两列波在 R 处的相位差。②两波源在 R 处干涉时的合振幅。

解：

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{3\lambda}{2} = 3\pi$$

$\Delta\varphi$ 为 π 的奇数倍，

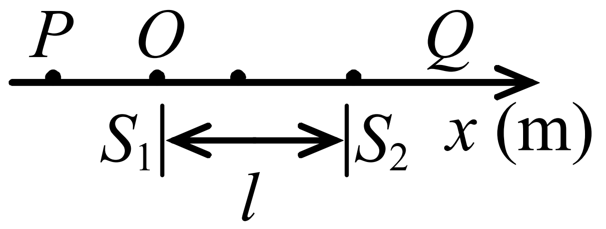


合振幅最小，

$$|A_1 - A_2|$$

例：相干波源S_1和S_2，相距11 m，S_1的相位比S_2超前 $\frac{1}{2}\pi$．这两个相干波在S_1 、S_2连线和延长线上传播时可看成两等幅的平面简谐波，它们的频率都等于100 Hz， 波速都等于400 m/s．试求在S_1、S_2连线外侧的延长线上各点的干涉强度。

解：



取S_1、S_2连线及延长线为x轴，向右为正，以S_1为坐标原点．令 $\overline{S_1S_2}=l$

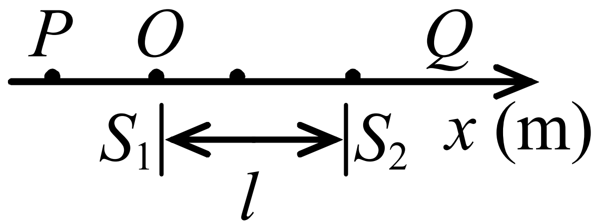
（1）取P点如图，x<0 相位差为：

$$\phi_1-\phi_2=\phi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}|x|-[\phi_{20}-\frac{2\pi}{\lambda}(l+|x|)]$$

$$=\phi_{10}-\phi_{20}+\frac{2\pi}{\lambda}l=\phi_{10}-\phi_{20}+\frac{2\pi}{u}\nu l=6\pi$$

$\therefore\ x<0$各点干涉加强．

（2）再考虑$x>l$各点的干涉情况．取Q点如图．则从S_1、S_2分别传播的两波在Q点的相位差为：



$$\phi_1-\phi_2=\phi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}(x+l)-[\phi_{20}-\frac{2\pi}{\lambda}x)]$$

$$=\phi_{10}-\phi_{20}-\frac{2\pi}{\lambda}l=\phi_{10}-\phi_{20}-\frac{2\pi}{u}\nu l=5\pi$$

$\therefore$ $x>l$各点为干涉静止点．

作业：

6.27

6.34

6.36