期末复习题八

2020年1月3日 星期五 下午9:17

1. 计算行列式：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

2. (1) 已知 3 阶矩阵A满足：$A^2+A+E=0$，证明 $A+2E$ 可逆
并求出 $(A+2E)^{-1}$

(2) 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$ $=\dfrac{A}{|A|}$

3. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \\ \quad x_2+cx_3+cx_4=0 \\ x_1+cx_2 \qquad +x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的维数是 2，求其通解。

(要求用基础解系表示)

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 是 3 维线性空间V的两个(组)基
已知 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$

$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

求(1) 从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵

(2) 若向量 δ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $(1,1,1)^T$，求向量 δ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标

(3) 求一个非零向量 ε，使得 ε 在上面两个(组)基下具有相同的坐标

5. 一个矩阵序列 $\{(b_{ij}^{k})_{m\times n}\}_{k\geq 1}$ 的极限如下定义：$\lim\limits_{k\to\infty}(b_{ij}^{k})_{m\times n}=(\lim\limits_{k\to\infty}b_{ij}^{k})_{m\times n}$，设 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$，其中 $0<a+b<1$，求 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k$

6. 设 R 为实数域，记 $S(R^{n\times n})$ 为所有 n 阶实对称矩阵所成的集合

(1) 试证明 $S(R^{n\times n})$ 关于矩阵的加法运算及实数与矩阵的数乘运算构成实数域上的线性空间

(2) 求 $\dim S(R^{n\times n})$ 并给出该线性空间的一个(组)基

(2) 求 $\dim S(\mathbb{R}^{n\times n})$ 并给出该线性空间的一个(组)基

(3) 定义 $(\cdot,\cdot)$ 如下:

$$(A,B)=\operatorname{tr}(AB) \quad , \quad \forall A,B\in S(\mathbb{R}^{n\times n})$$

问所定义的函数是 $S(\mathbb{R}^{n\times n})$ 上的一个内积吗?

(4) 若已知矩阵 $A,B\in S(\mathbb{R}^{n\times n})$ 在(2)中所给基下的坐标分别为 X 与 Y,请用 X、Y 表示 (A,B) 的值

7. 设 A,B 为正定矩阵,试证明: $|A+B|\geq|A|+|B|$ 　 $A=P^TP$ 　 $B=Q^TQ$