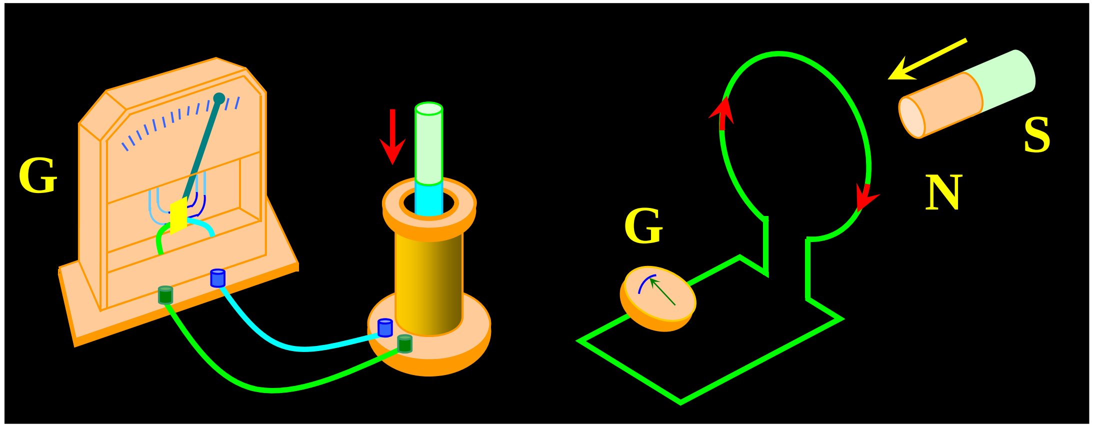
第14章

电磁感应

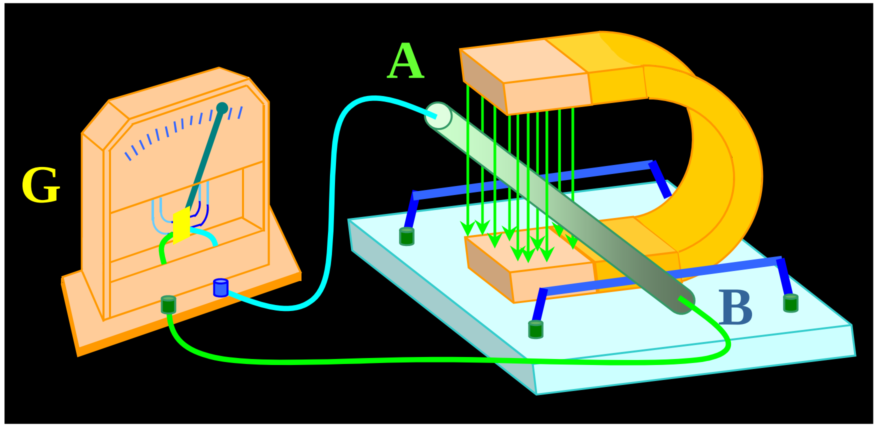
§14.1 电磁感应的基本定律

一、法拉第实验

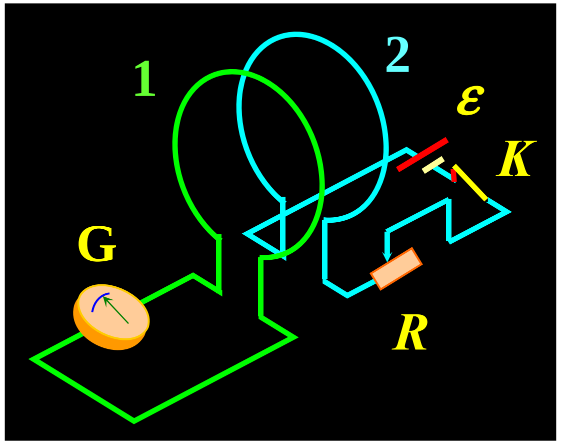
自奥斯特发现电流的磁效应后,许多物理学家致力与其逆效应的研究, 1831年,英国物理学家法拉第经过十年研究, 终于发现了电磁感应现象.



磁铁棒与线圈有相对运动时的
电磁感应现象



金属棒在磁场中运动时的
电磁感应现象



线圈中电流改变时的
电磁感应现象

电磁感应实验现象：

当穿过一个闭合导体回路内的磁通量发生变化时，不管这种变化是有什么原因引起的，闭合回路中都将产生感应电流.

二、法拉第电磁感应定律(重点)

1. 法拉第电磁感应定律与感应电动势

通过闭合回路所包围面积的磁通量发生变化时，回路中产生的感应电动势 ε_i 与磁通量的时间变化率成正比.

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

讨论: (i) 负号反映了感应电动势的方向

但是 Φ_B 是标量，没有方向

$\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$ 也是标量，没有方向，ε_i 也是标量

怎样理解: 法拉第电磁感应定律中的负号反映了感应电动势的方向

(ii) 对于N匝线圈，总感应电动势为:

(a) 通过各匝线圈的磁通量不等:

$$\varepsilon_i = -\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_{B1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Phi_{B2}}{\mathrm{d}t} \cdots + \frac{\mathrm{d}\Phi_{BN}}{\mathrm{d}t}\right) = -\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\Phi_{Bi}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_{Bi}\right) = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_{Bi}$ 称为线圈全磁通

(b) 通过各匝线圈的磁通量相等:

$$\varepsilon_i = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(N\Phi_B)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

$\boldsymbol{\Psi = N\Phi_B}$称为线圈的磁通匝链数

(iii) 若线圈组成闭合回路 → 形成感应电流

2. 闭合回路的感应电流

如果是闭合回路，则回路中的感应电流：
$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\boldsymbol{I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t}$,则:

感生电荷 $\mathrm{d}q = I_i \mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\mathrm{d}\Phi_B$

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i \mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_{B1}}^{\Phi_{B2}} \mathrm{d}\Phi_B = \frac{1}{R}(\Phi_{B1} - \Phi_{B2})$$

流过闭合回路的感生电荷与磁通量变化的快慢无关 → 磁通计的基本原理.

如何利用法拉第电磁感应定律来确定感应电动势的实际方向?

3. 感应电动势ε_i方向的确定★

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

(i) 确定闭合回路中ε_i方向的步骤:

(a) 为计算Φ_B, 选择闭合回路所包围面积的法向n (也即选择回路的环绕方向),

一般选B的方向

(b) 闭合回路中感应电动势参考正方向的确定, 即与回路所包围面积的法向n成右手螺旋关系的方向;

(c) 依照n方向来确定Φ_B 的正负;

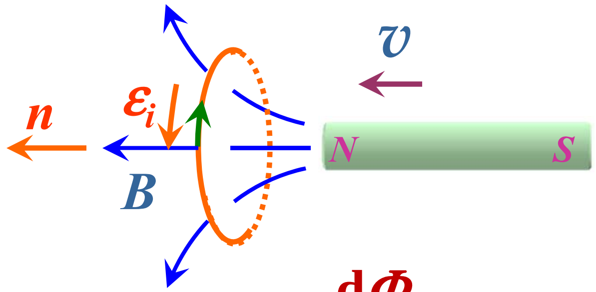
(d) Φ_B的正负确定后，再确定 $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$的正负;

(e) ε_i的方向由 $-\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$ 的正负决定.

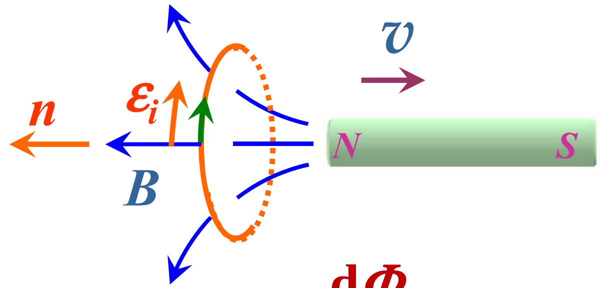
ε_i正: ε_i的方向与参考正方向一致

负: ε_i的方向与参考正方向相反

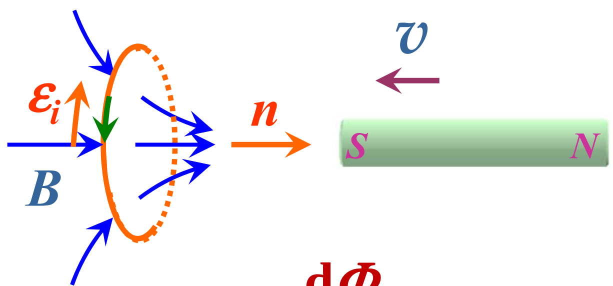
(ii) 确定闭合回路中 ε_i 方向的实例



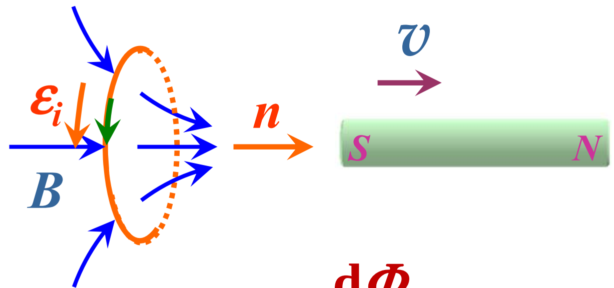
(*a*)$\Phi_B(t)$为正，$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} > 0$ $\varepsilon_\mathrm{i}<0$



(*b*)$\Phi_B(t)$为正，$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} < 0$ $\varepsilon_\mathrm{i}>0$



(*c*)$\Phi_B(t)$为正，$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} > 0$ $\varepsilon_\mathrm{i}<0$

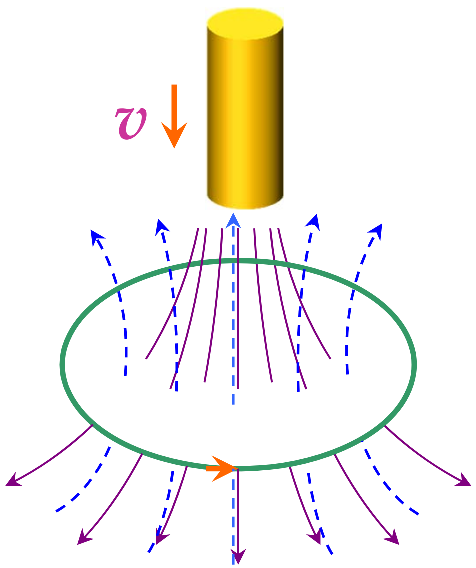


(*d*) $\Phi_B(t)$为正，$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} < 0$ $\varepsilon_\mathrm{i}>0$

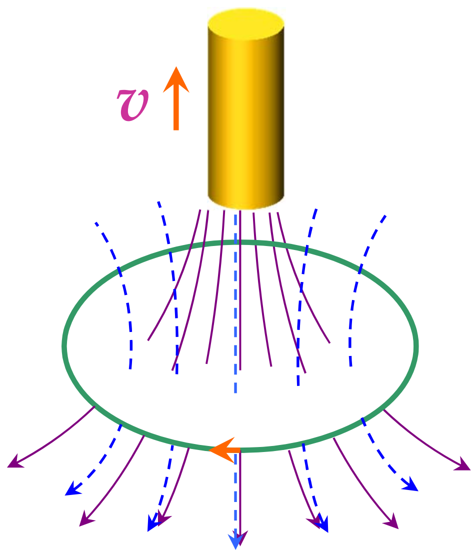
三、楞次定律

1833年, 楞次(Lenz)得出确定感应电流方向的法则, 称为楞次定律:

闭合回路中产生感应电流的方向, 总是使感应电流所产生的通过回路面积的磁通量去补偿或反抗引起感应电流磁通量的变化.



(a)



(b)

感应电流的方向判断

★说明

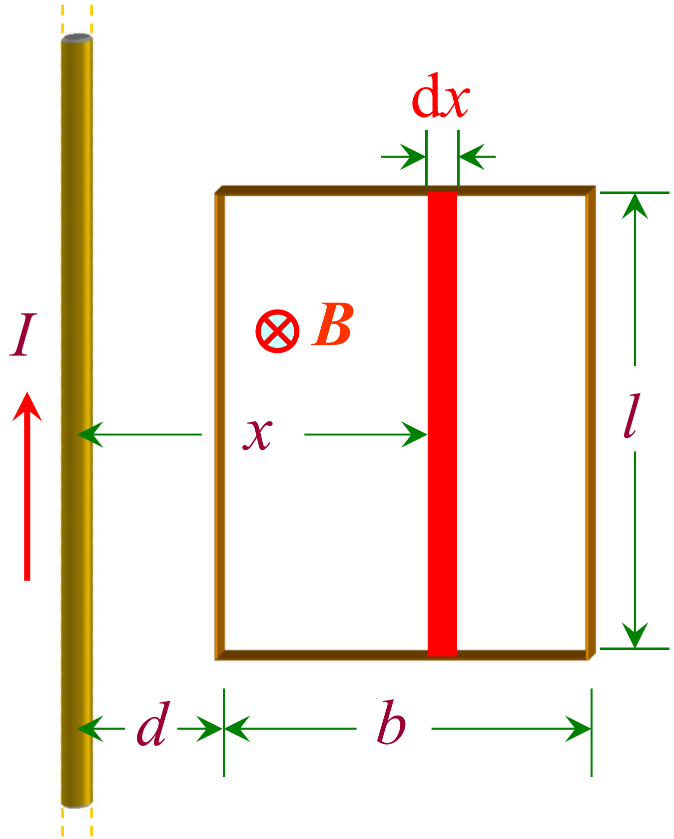
1. 楞次定律是能量守恒定律的体现, 当磁铁棒接近线圈时, 线圈中所激发的感应电流产生斥力将阻止铁棒运动, 此时外力必须克服此斥力做功.

2. 法拉第电磁感应定律中 负 号反映了感应电动势的方向,是楞次定律的数学形式.

四、法拉第电磁感应定律的应用

1、法拉第电磁感应定律求感应电动势

例： 一长直导线中通有交变电流 $I=I_0\sin\omega t$，式中 I 表示瞬时电流，I_0 是电流振幅，ω 是角频率，I_0 和 ω 都是常量. 在长直导线旁平行放置一矩形线圈，线圈面积与直导线在同一平面内，线圈形状参数如图，求任一瞬时线圈中的感应电动势？



解： 在某一瞬时，距直导线为 x 处的磁感应强度为：

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

方向与电流成右手螺旋关系，如图

(a) 先选定闭合回路面积的法向 n（垂直纸面向内），

(b) 矩形线圈中感应电动势的参考正方向为顺时针方向

则通过图中阴影面积**d*S*=*l*dx**的磁通量为:

$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B\cos 0^\circ \mathrm{d}S = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} l\mathrm{d}x$$

在该瞬时*t*,通过整个线圈的磁通量为:

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} l\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 l I_0 \sin\omega t}{2\pi} \ln(\frac{d+b}{d})$$

由于电流随时间变化, 磁通量也随时间变化, 故线圈内的磁感应电动势为:

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 l I_0}{2\pi} \ln(\frac{d+b}{d}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\omega t)$$

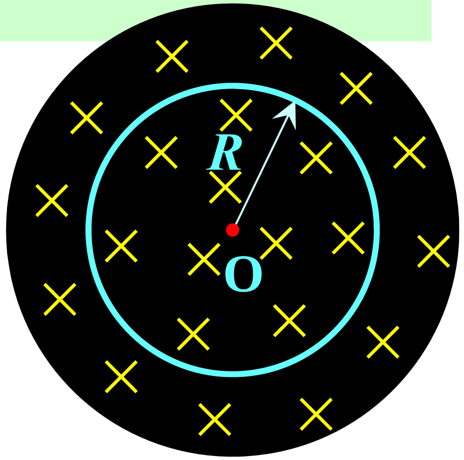
$$= -\frac{\mu_0 l I_0 \omega}{2\pi} \ln(\frac{d+b}{d}) \cos\omega t$$

例：一个限制在圆柱形空间内的磁场，磁感应强度随时间t和半径r变化，$B=kr^2t\sin\omega t$（其中k，ω为常量），垂直纸面向内为正方向。现有半径为R，匝数为N的圆形平面线圈同轴放置，求：

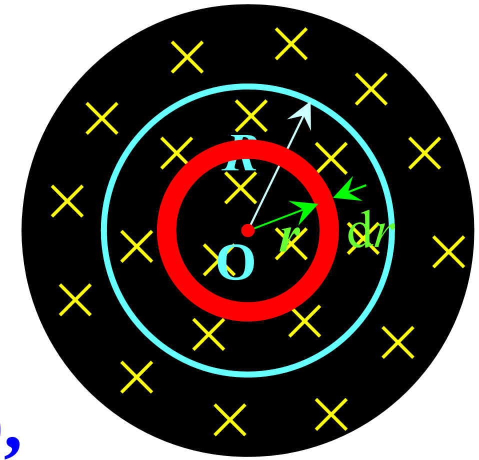
(1) t时刻通过线圈的磁通量；

(2) 线圈内的感应电动势；

(3) 当$\omega t=\pi/4$时感应电动势的方向。



解: (1) 由于磁场随 r 变化，该线圈处于非均匀磁场中，先计算任一时刻通过面元的磁通量，以O为圆心，r为半径，取一宽度为 dr 的同心圆环形。



面元的法向与B相同（垂直纸面向里），其大小为

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$$

则通过该面元的磁通量为:

$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B \cdot \cos 0° \cdot \mathrm{d}S$$

$$= kr^2 t \sin \omega t \cdot 2\pi r \,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi k r^3 t \sin \omega t \,\mathrm{d}r$$

故一匝线圈的磁通量为:

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_0^R 2\pi k r^3 t \sin \omega t \mathrm{d}r = \frac{\pi k R^4 t \sin \omega t}{2}$$

N匝线圈的全磁通为:

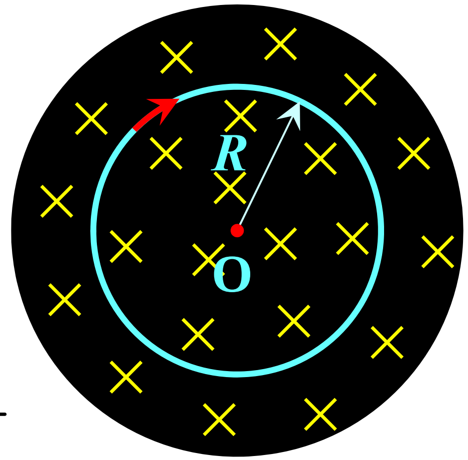
$$\Phi_{BN} = N\Phi_B = \frac{\pi k R^4 N t \sin \omega t}{2}$$

(2) 线圈内的感应电动势

假设圆形平面线圈 L中感应电动势的参考正方向为顺时针, 与B (即面元的法向)成右手螺旋关系:

由于N匝线圈的全磁通为: $$\Phi_{BN}=\frac{\pi kR^4 Nt\sin\omega t}{2}$$

根据法拉第电磁感应定律:



$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{BN}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi kR^4 Nt\sin\omega t}{2}\right)$$

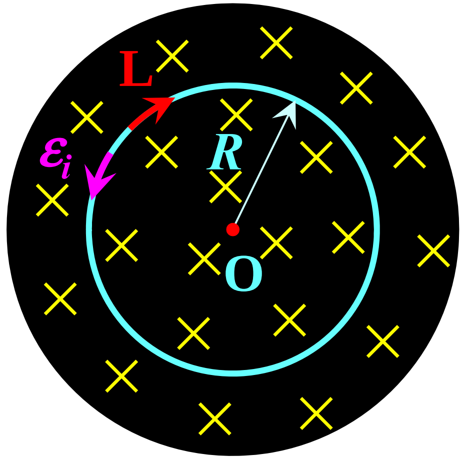
$$=-\frac{\pi kR^4 N\sin\omega t}{2}-\frac{\pi\omega kR^4 Nt\cos\omega t}{2}$$

$$=-\frac{\pi kR^4 N}{2}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$$

(3) 当 $\omega t=\pi/4$ 时感应电动势的方向

$$\varepsilon_{i(\pi/4)}=-\frac{\pi k R^4 N}{2}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)\Big|_{\omega t=\pi/4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi k N R^4(1+\frac{\pi}{4})$$

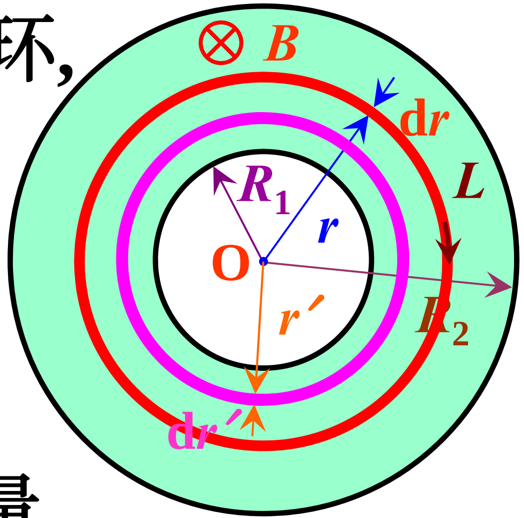


负号表示此时感应电动势的方向与假设的环方向相反，故圆形平面线圈 L 中感应电动势的方向为逆时针.

2、法拉第电磁感应定律求感应电流

例. 高度为D,电阻率为ρ的铜圆环, 内外半径分别为R_1, R_2, 放置在局限于环面的垂直磁场中. 若磁感应强度按 $B=t/r$的规律变化, 求环上的感应电流.

解: 取半径分别为r,宽度为dr的同心圆环, 假设圆环上的感应电动势的方向为顺时针方向, 面积的法向向内



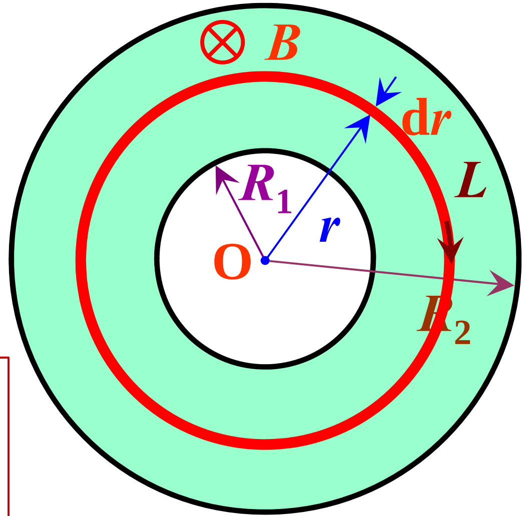
先求通过该圆环总的磁通量. 在该圆环内, 取半径分别为r',宽度为dr 的同心圆环, 通过该圆环的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B \cdot \cos 0^\circ \cdot \mathrm{d}S = \frac{t}{r'} \cdot 2\pi r' \mathrm{d}r' = 2\pi t \mathrm{d}r'$$

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_{R_1}^{r} 2\pi t \mathrm{d}r' = 2\pi t(r - R_1)$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2\pi t(r-R_1)] = -2\pi(r-R_1)$$

负号表示感应电动势为逆时针方向



半径分别为**r**,宽度为**dr**的同心圆环的电导

$$R = \rho\frac{L}{S}$$

$$\boxed{\mathrm{d}G = \mathrm{d}(\frac{1}{R}) = \frac{\mathrm{d}S}{\rho L} = \frac{D\mathrm{d}r}{\rho 2\pi r}}$$

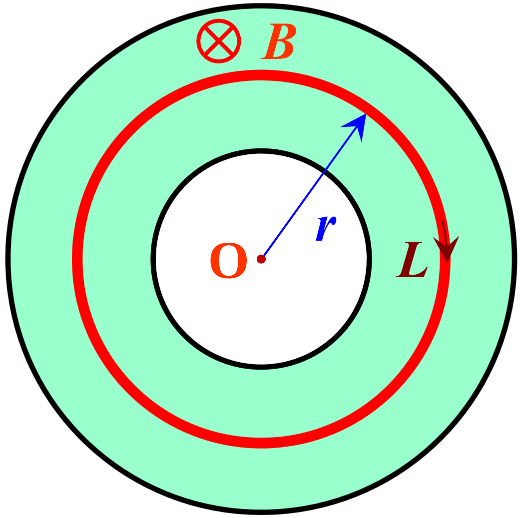
半径分别为**r**,宽度为**dr**的同心圆环的电流

$$\mathrm{d}I_i = \varepsilon_i \mathrm{d}G = -2\pi(r-R_1)\frac{D\mathrm{d}r}{\rho 2\pi r} = -\frac{D}{\rho}(1-\frac{R_1}{r})\mathrm{d}r$$

$$I_i = \int \mathrm{d}I_i = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{D}{\rho}\left(1-\frac{R_1}{r}\right)\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{D}{\rho}(r - R_1 \ln r)\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$= -\frac{D}{\rho}\left[(R_2 - R_1) - R_1 \ln\frac{R_2}{R_1}\right]$$



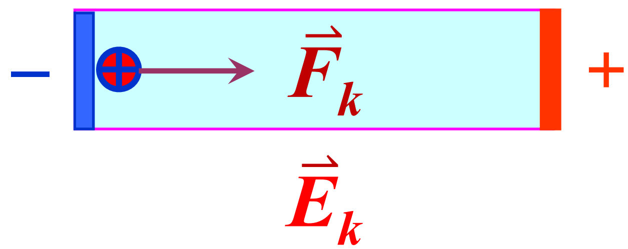
负号表示感应电流的实际方向与假设的顺时针方向相反，故感应电流为逆时针方向流动

五、涡电流的热效应

复习：电源电动势的定义

电动势ε是指在电源内部，将单位正电荷从电源负极移到正极时**非静电力**所做的功

$$\vec{E}_K=\frac{\vec{F}_K}{q}\qquad \vec{F}_K=q\vec{E}_K$$



$$A_{-\mathrm{to}+}=\int_{(-)内}^{(+)}\vec{F}_K\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_{(-)内}^{(+)}q\vec{E}_K\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

E_k方向为电源负极指向正极

$$\varepsilon_i=\frac{A_{-\mathrm{to}+}}{q}=\int_{(-)内}^{(+)}\vec{E}_K\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\varepsilon_i=\oint\vec{E}_K\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

关键在于电源内部任意位置处，非静电场力场强E_k的计算

§ 14-2 动生电动势

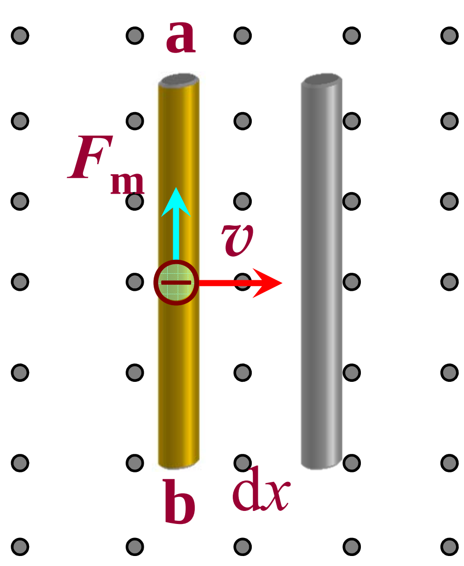
感应电动势
- 动生电动势
  - 导体在磁场中运动
  - 回路的形状,位置变动
- 感生电动势　磁感应强度变化

一、动生电动势与洛仑兹力

导体在磁场中运动或回路的形状、位置的变动而引起**动生电动势**

导体棒在磁场中运动,棒内电子也随之运动,受洛仑兹力(如图):

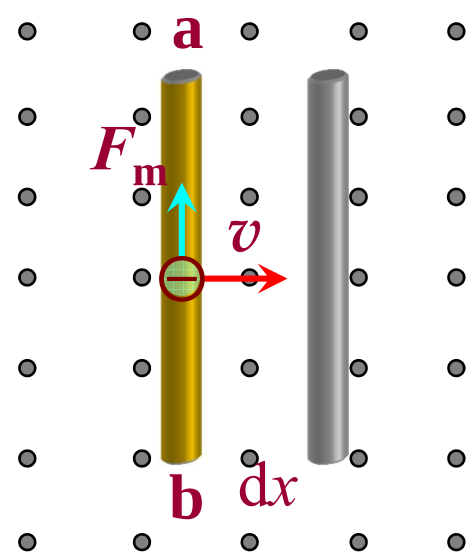
$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$



电子向a端聚集, 形成 b→a向的电场. 当电子受此电场力的作用与洛仑兹力的作用达到平衡时, 电子无宏观运动.

$$-e\vec{E}_e = -e(\vec{v}\times\vec{B})$$

导体在磁场中运动时, 导体棒相当于电源, 此电源中的非静电力为洛仑兹力, 其非静电场强E_K可表示为:



洛仑兹力做功吗?

$$\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_m}{q} = \frac{\vec{F}_m}{-e} = (\vec{v}\times\vec{B})$$

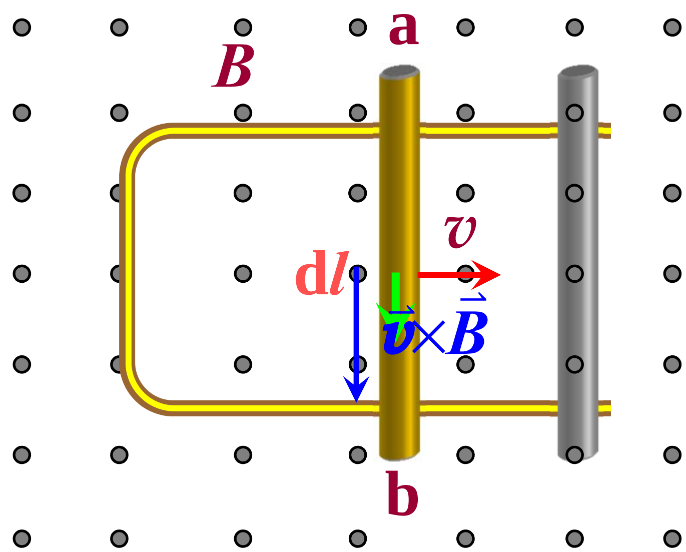
所以动生电动势的方向为E_K在dl方向上分量的方向, 实际就是 $\vec{v}\times\vec{B}$ 在dl方向上分量的方向

由电动势定义,导体棒上的动生电动势为:

$$\varepsilon_i = \int_{(-)}^{(+)} \vec{E}_K \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

讨论:

(a) 在均匀磁场, 导体各线元速度相同, 并且磁场、速度和导体相互垂直时.



假设动生电动势方向为a→b:

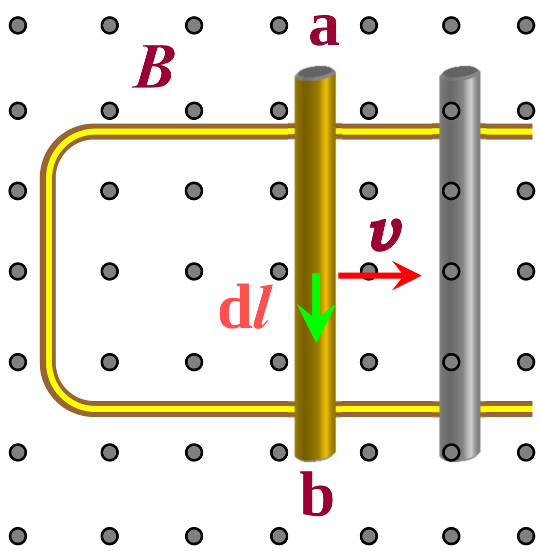
$$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

动生电动势可表示为:

$$\varepsilon_i = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (v\sin 90^\circ B)\cdot\cos 0^\circ\cdot \mathrm{d}l = Bvl$$

(b) 在一般情况下，磁场可不均匀,导体各线元速度可不同，磁场于运动速度可不垂直等，因而动生电动势可表示为:

$$\mathrm{d}\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$



整个导体中的电动势:

$$\varepsilon_i=\int \mathrm{d}\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

注意此式有两个夹角

(1) v 和 B 之间

(2) $\vec{v}\times\vec{B}$与 $\mathrm{d}\vec{l}$之间

若导体构成回路，且整个回路均运动,则:

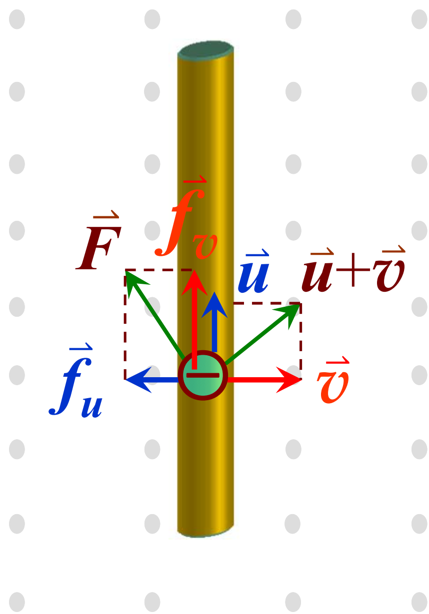
$$\varepsilon_i=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

洛仑兹力真的做功吗?

二、洛仑兹力真的做功吗?

洛仑兹力恒与电荷运动方向垂直，因而不做功，而动生电动势是由于洛仑兹力移动单位正电荷产生的，似乎又做功，如何解释这对矛盾?

如图, 洛仑兹力使电子获得速度**u,** 因此实际电子的运动速度为**(v+u)**所受的总洛仑兹力为:



$$\vec{F} = -e(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B}$$

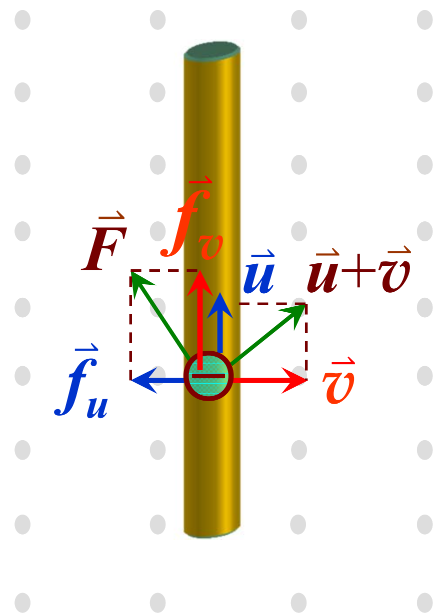
上式表明洛仑兹力与**(v+u)**垂直，对电子不做功，但其中的分力:

$$\vec{f}_v = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

由于此力的方向与电子的位移方向相同, 故它对电子做正功, 形成动生电动势

而另一分力: $\vec{f}_u = -e(\vec{u}\times\vec{B})$

由于此力的方向与棒的运动方向相反，对电子做负功，阻碍导体运动.而要维持导体运动，必须提供外力，此外力正是另一个分力 f_v 的来源.



此两分力做功的总和为0，它起到将外力做功转化为动生电动势的桥梁作用

洛仑兹力总体上不做功，它只是通过一个分力做负功迫使外界提供能量，而通过另一个分力做正功，将部分外界提供能量转化为电能.

三、动生电动势的计算(重点)

① 按定义计算

(a) 先假设动生电动势参考正方向为 a→b,

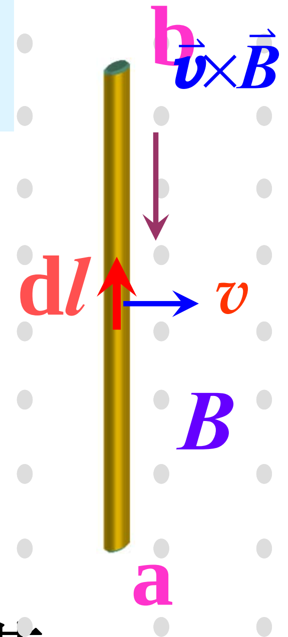
目的是为了确定dl的方向: $\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$

(b) $\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b (vB\sin\theta)\cos\alpha \mathrm{d}l$

$\theta = \angle(\vec{v},\vec{B})$ $\alpha = \angle(\vec{v}\times\vec{B}, \mathrm{d}\vec{l})$

(c) 动生电动势的实际方向:

$\varepsilon_i > 0$, a→b; $\varepsilon_i < 0$, b→a

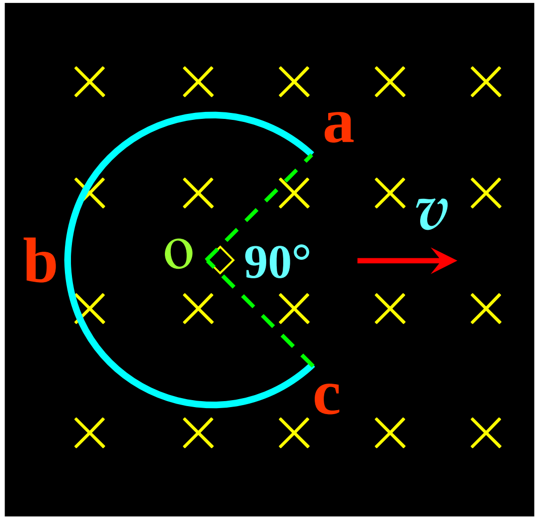


② 按法拉第电磁感应定律计算:

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

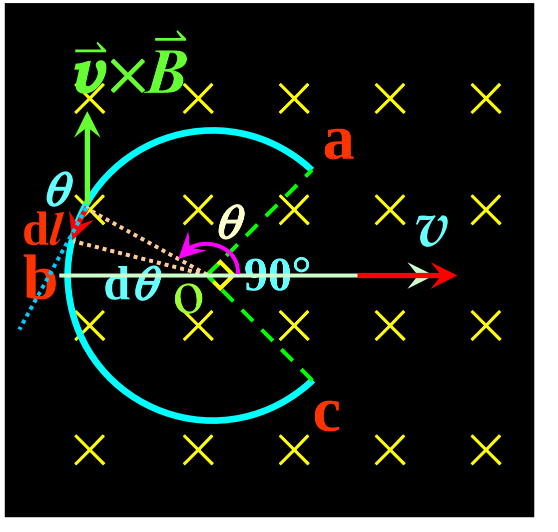
此式一般用于闭合回路, 若对导体棒运动这样的不闭合回路, 需做辅助线构成假想回路.

例:14.4，一导体被弯成半径为R的3/4圆弧的形状，放在均匀磁场B中，若此导线以速度v沿x轴方向匀速向右平动，求此导线中的动生电动势，哪端电势高?



解: 解法一: 按定义计算

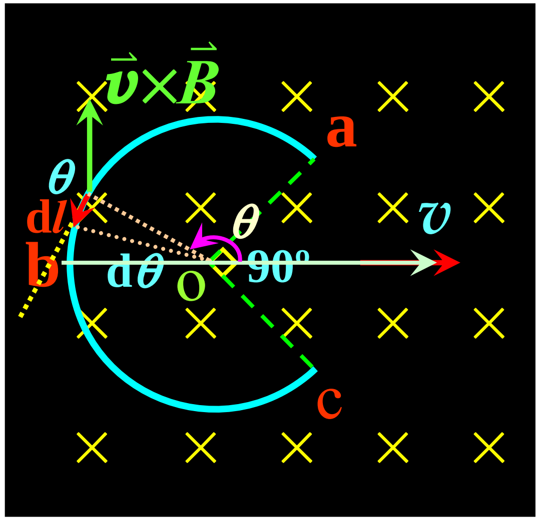
先假设abc圆弧上所产生的动生电动势的方向为 a→b→c (即假设a为电源负极，c为电源正极)，在圆弧上取一段微分元dl，由于微分元导线以速度v沿x轴方向匀速向右平动，在这段圆弧上所产生的动生电动势为:



$$\mathrm{d}\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=(v\sin 90^\circ B)\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$=vBR\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$



$$\varepsilon_{abc}=\int_a^c(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}$$

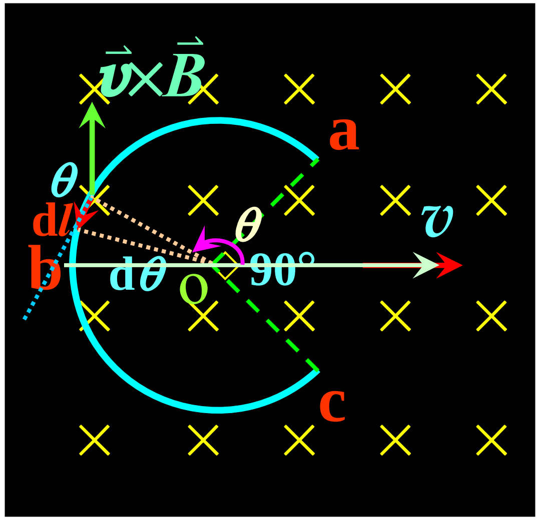
$$=\int_a^c(B\sin 90^\circ v)\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{d}l=\int_{45^\circ}^{315^\circ}BvR\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=BvR\sin\theta\Big|_{45^\circ}^{315^\circ}=BvR(\sin 315^\circ-\sin 45^\circ)$$

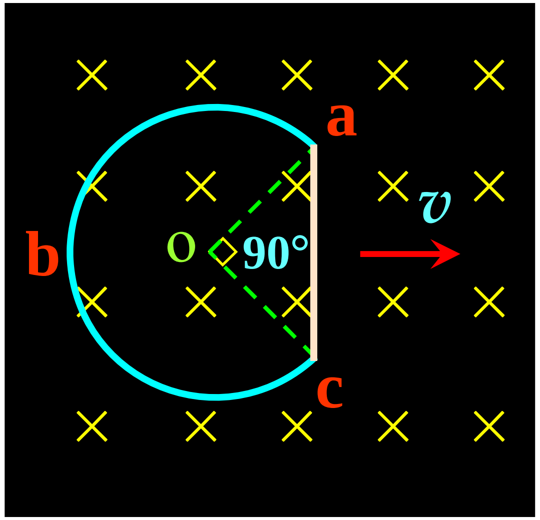
$$=BvR\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}BvR$$

由于计算结果为负值, 故实际的动生电动势的方向与假设的方向相反, 即为c→b→a, 故a点的电势较高.

解法二: 按法拉第电磁感应定律计算



作辅助线ac,使abc形成闭合回路,由于在导线运动时,通过闭合回路abc的磁通量没有发生变化, 因此磁通量的变化率也为0,根据法拉第电磁感应定律,可以得到在闭合回路abc中产生的动生电动势为0.而:



$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{const}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\varepsilon_{abca} = 0 = \varepsilon_{abc} + \varepsilon_{\overline{ca}} = \varepsilon_{abc} - \varepsilon_{\overline{ac}}$$

先假设ac上动生电动势的方向为a→c

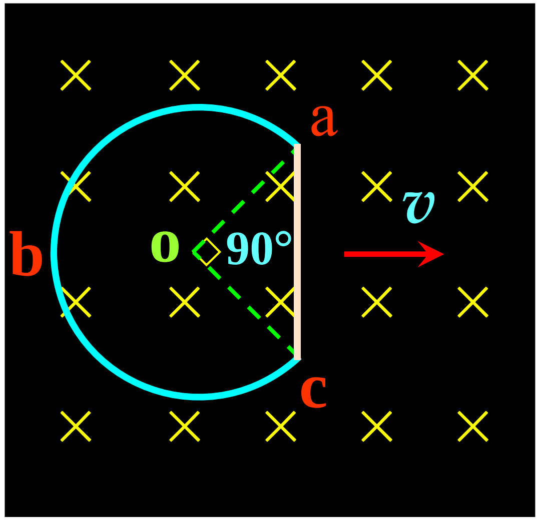
$$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

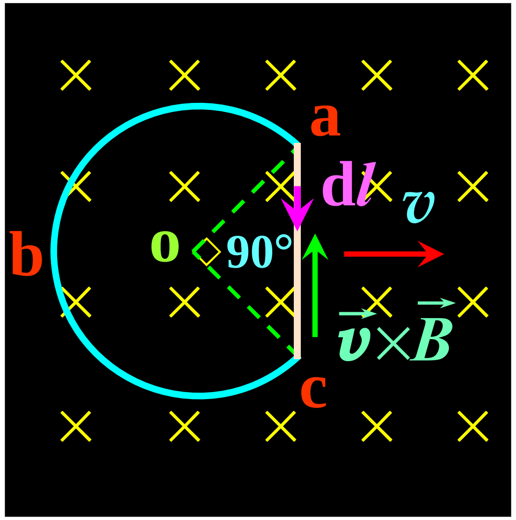
$$\varepsilon_{\mathrm{abc}} = \varepsilon_{\overline{\mathrm{ac}}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} (\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} (v\sin 90^\circ B)\cdot\cos\pi\cdot \mathrm{d}l$$

$$= \int_0^{\overline{\mathrm{ac}}} -Bv\mathrm{d}l = -Bv\overline{\mathrm{ac}}$$

$$= -Bv\sqrt{R^2+R^2} = -\sqrt{2}BvR$$



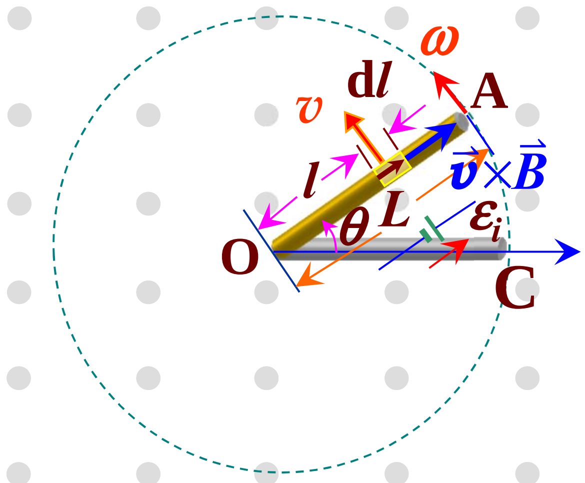


由于计算结果为负值，
故实际的动生电动势的方向与假设的方向相反，即为c→a, 而弧abc段, 实际动生电动势的方向为c→b→a, 故a点的电势较高

例: 在匀强磁场 (B=1.0×10^{-2} T)中, 有L=0.5 m的铜棒逆时针方向绕O轴转动, 转速为50 弧度/s. 求铜棒中的感应电动势, 以及OA之间的电势差.

解: ① 先用电动势定义式计算:

假设动生电动势参考正方向O→A



取线元dl, 速度 $v=l\omega$,

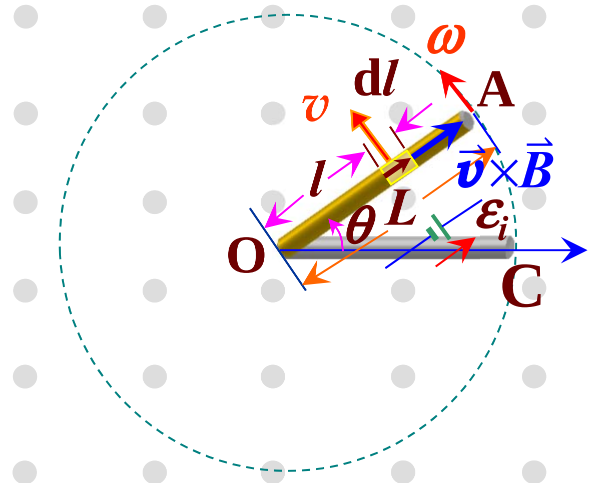
故dl中的动生电动势为:

$$d\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\bullet d\vec{l}$$

$$=(v\sin 90^\circ B)\cdot\cos 0^\circ\cdot dl = vBdl = \omega lBdl$$

注意 $\vec{v}\times\vec{B}$ 的方向与 $d\vec{l}$ 方向之间的夹角

整个铜棒上的电动势为:



$$\varepsilon_i=\int_O^A d\varepsilon_i=\int_0^L Bl\omega dl=\frac{1}{2}\omega BL^2$$

$$=\frac{2\pi\times50\times0.01\times(0.5)^2}{2}$$

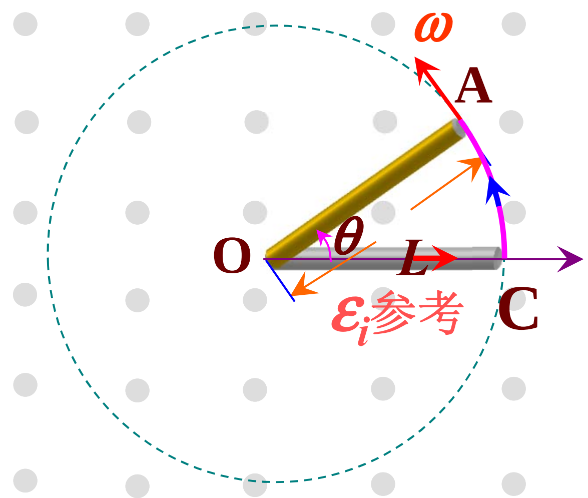
$=$**0.39 (V)**

由于$\varepsilon_i>0$, 所以其方向为O→A, 断路时电源两端的电势差就是电动势,故:

$$U_{OA}=U_O-U_A=-\varepsilon_i=-0.39\ (V)$$

② 按法拉第电磁感应定律计算:

棒从OC位置运动至OA位置, 添加辅助线OC和弧CA, 组成闭合回路OCA



设面元的法向和B成右手螺旋关系, 与动生电动势参考正方向为逆时针

扇形闭合回路OCA的面积

$$S = \pi L^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{L^2}{2} \cdot \theta$$

方向为向外, 由于均匀磁场, 在t时刻穿过回路所围面积的磁通量:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \vec{B} \bullet \vec{S} = B \cdot \frac{L^2}{2}\theta$$

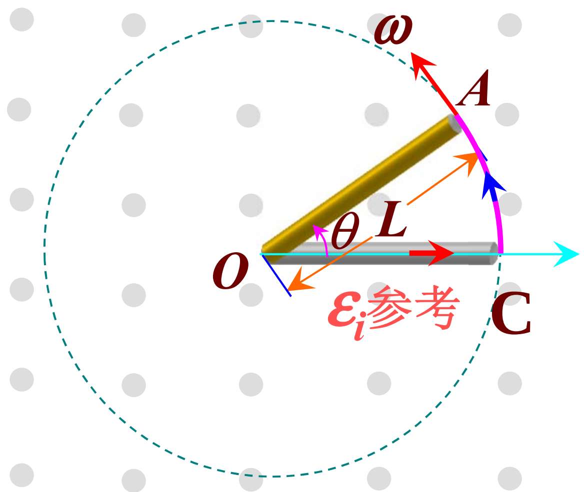
则动生电动势:

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[B \cdot \frac{L^2}{2}\theta] = -\frac{1}{2}\omega B L^2$$

负号表示实际方向与假设方向相反,故实际方向为顺时针即**O→A**,与解①的结果相同

★讨论:

如果是铜盘转动,可把铜盘想象成无数根铜棒并联组成,由于是并联,铜盘边缘与中心的电势差与每根铜棒的电势差相同.

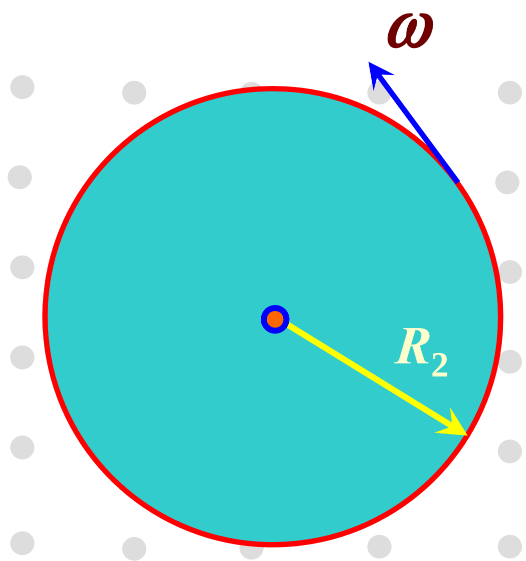


★思考题：

1. 为什么不整体考虑铜盘

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B \cdot S = B \cdot \pi R_2^2$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = 0$$



2. 这样计算的结果是什么?

★小结:

用法拉第电磁感应定律计算动生电动势时添加辅助线成为闭合曲线的基本规则:

(1) 情形1:

为了方便计算使添加的辅助线上产生的动生电动势为0

方法 (a) 使添加的辅助线为静止的

(b) 使添加的辅助线虽然运动,但不切割磁力线

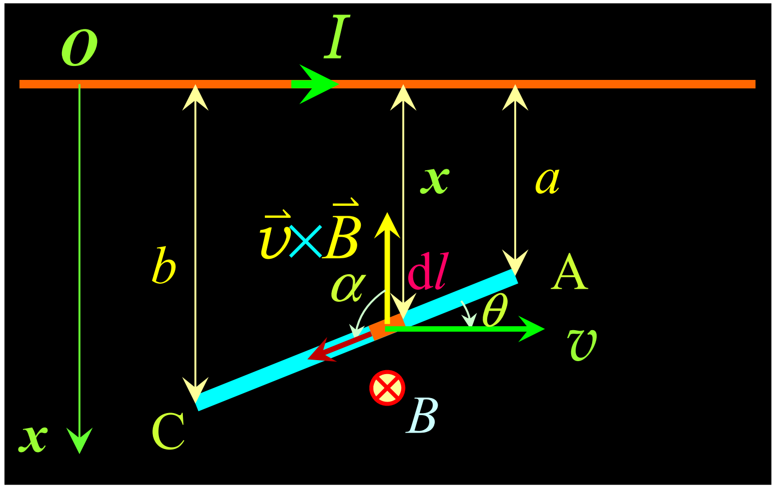
(2) 情形2:

使添加的辅助线为直线, 它虽然运动, 但使整个闭合曲线的磁通量保持不变. 这样原曲线的动生电动势与辅助直线的动生电动势相等, 而直线的动生电动势计算相对较为方便.

非均匀磁场中的动生电动势

例: 一通有电流I的长直水平导线, 在其附近有一斜向的金属棒AC与之共面, 并以平行于电流I的速度v平动. 已知棒端A、C与导线的距离分别为a、b. 试求棒AC中的动生电动势.

解: 设动生电动势参考正方向为A→C, 在棒AC上取一微元dl, 其方向由A→C



$$\mathrm{d}\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=(v\sin 90^\circ B)\cdot\cos\alpha\,\mathrm{d}l=vB\cos\alpha\,\mathrm{d}l$$

由于在微元dl处, 电流所产生的磁感应强度为

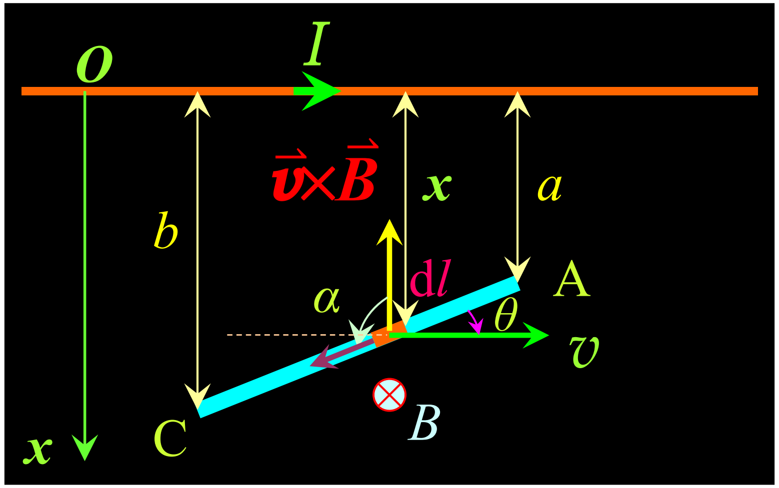
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

而：　$dx = dl \cdot \sin\theta$

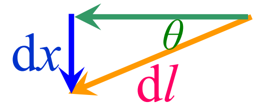
$\alpha = \theta + \pi/2$

$\cos\alpha = -\sin\theta$

$dx = -dl\cos\alpha$



$$d\varepsilon_i = vB\cos\alpha\, dl = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi x}dx$$



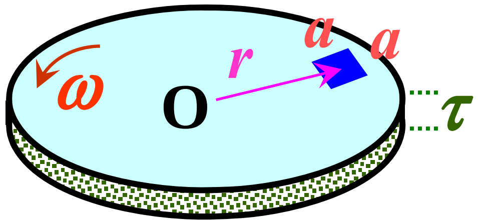
$$\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i = \int_0^l (\vec{v}\times\vec{B})\bullet d\vec{l}$$

$$= \int_a^b -\frac{\mu_0 I v}{2\pi x}dx = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

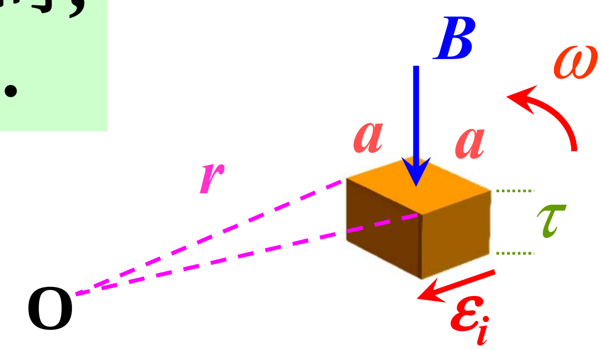
由于 $\varepsilon_i < 0$, 所以此电动势的实际方向为 C→A

四、动生电动势和涡电流的机械效应

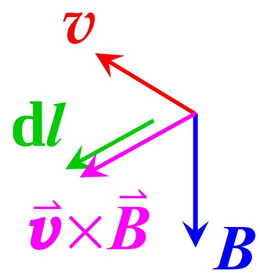
例: (p241,题14.14) 电磁“涡流”制动器由一电导率为 γ 和厚度为 τ 的圆盘组成, 此盘绕通其中心轴旋转, 且有一覆盖面积为 a^2 的磁场 B 垂直于圆盘, 如图所示, 若面积 a^2 在离轴 r 处, 当圆盘角速度为 ω 时, 试求使圆盘慢下来的转矩近似表示式.



解: 圆盘转动时, 沿径向长度为 a 的线段切割磁力线, 产生感应电动势.



假设动生电动势方向为径向指向o

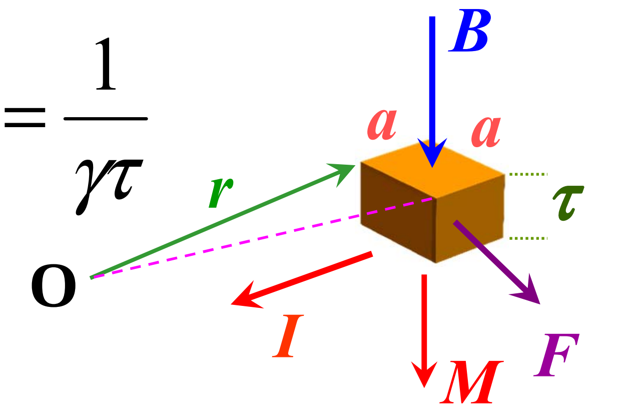


$$\varepsilon_i = vB\sin 90^\circ a\cos 0^\circ = vBa = Br\omega a$$

故动生电动势方向为径向指向O, 感应电流的流动方向为径向指向O

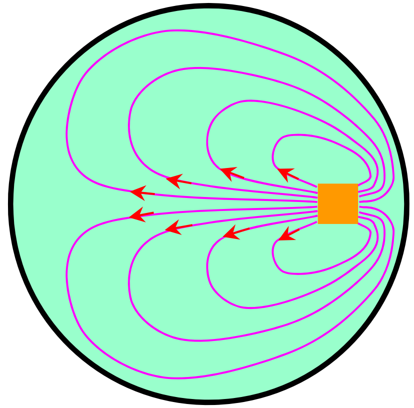
感应电流在盘中形成如图的涡流

小方块沿径向方向的电阻为 $R=\rho\dfrac{l}{S}=\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{a}{a\tau}=\dfrac{1}{\gamma\tau}$



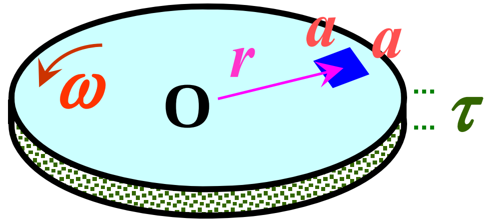
忽略外回路的电阻 (因为其它地方的面积很大,故电阻很小)

感应电流 $I=\dfrac{\varepsilon_i}{R}=\dfrac{Bva}{1/\gamma\tau}=Br\omega a\gamma\tau$



安培力 $F=IaB\sin 90°=IaB$

方向: 阻止圆盘转动的方向



对转轴的力矩

$$M=|\vec{r}\times\vec{F}|=rF\sin 90°=rIaB=B^2r^2\omega a^2\gamma\tau$$

方向向下

§14-3 感生电动势 涡旋电场

一、感生电动势

磁感应强度变化引起导体内的感应电动势→感生电动势

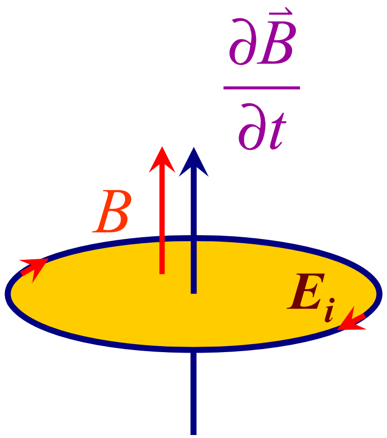
导体静止→无洛仑兹力

→不能是静电力　非静电场力是什么?

1. 涡旋电场的假设

Maxwell假设: 不论空间有无导体存在,变化的磁场总是在其周围激发一种电场,这种电场具有涡旋性,称为感生电场或涡旋电场.

涡旋电场是产生感生电动势的原因.



由于涡旋电场是产生感生电动势的原因,

设涡旋电场的场强为$\boldsymbol{E_i}$, 根据电动势的定义

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

闭合回路

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

2. 法拉第电磁感应定律的变形

对于一个闭合回路

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

导体不动,不随时间而变

导体不动时, 法拉第电磁感应定律可表示为

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

二、涡旋电场的性质

1. 涡旋电场的性质

① 从场的观点看，涡旋电场可在任意有变化磁场的空间存在，而不依赖于是否有导体存在，当有导体存在时，显示出感应电动势.

涡旋电场是由变化的磁场所激发的

② 无源场，电场线无头无尾.

③ 非保守场，环流不为0，无电势概念

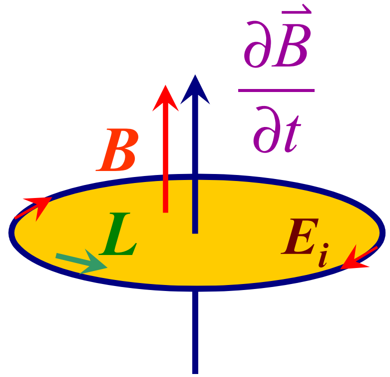
→与静电场完全不同

环流是什么？

④ 感应电场是有旋场，与 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的方向成左手螺旋关系.

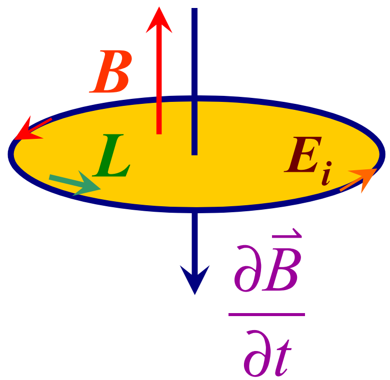
2. 涡旋电场方向与磁场变化 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 方向之间的关系的讨论

环路的方向L与B成右手螺旋关系



(1) B随时间增加

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S} < 0$$



(2) B随时间减小

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S} > 0$$

结论：E_i的方向始终与 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 成反右手螺旋关系

涡旋电场与静电场有差异吗?

3. 涡旋电场与静电场比较

相同之处: 两种电场都能对电荷施加作用力.

不同之处:

(1) 静电场由静电荷激发, 是有源场. 闭合曲面积分不为零.

$$\oiint_S \vec{E}\bullet d\vec{S} \neq 0$$

涡旋电场由变化的磁场激发, 是无源场, 电场线闭合, 闭合曲面积分为零.

$$\oiint_S \vec{E}_i \bullet d\vec{S} = 0$$

(2) 静电场是保守场, 有势场, 环流为零, 可引入电势.

$$\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = 0$$

涡旋电场是非保守场, 无势场, 环流不为零, 没有电势的概念.

$$\oint_L \vec{E}_i \bullet d\vec{l} \neq 0$$

电子感应加速器的制造成功, 电磁波的存在都证实了涡旋电场的存在.

(a)电子作圆周运动→磁场的方向

(b)电子作加速运动→磁场变化(涡旋电场)的方向

三、感生电动势的计算(重点)

① 按电动势的定义计算感生电动势

(假设感生电动势参考正方向为**a→b**, 即**d*l***的方向)

$$\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_i \bullet d\vec{l}$$

必须先求出E_i, 若磁场分布具有对称性, 可先求B, 根据下式求出E_i

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

再用电动势的定义计算感生电动势

② 按法拉第电磁感应定律计算感生电动势

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

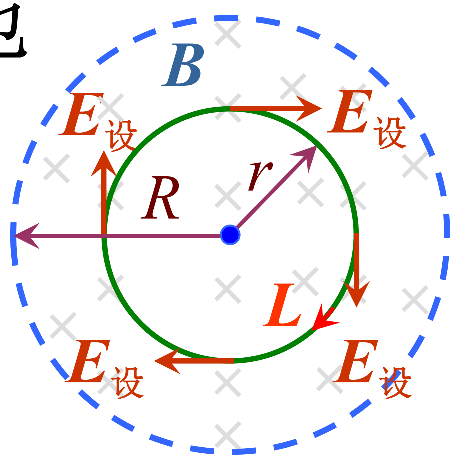
一般用于**闭合回路**，对于不闭合回路，需做**辅助线构成假想回路**.

添辅助线形成闭合回路 (辅助线不产生感生电动势，即辅助线 $\perp E_i$).

如何求出涡旋电场的场强 E_i

例: 在半径为R的圆柱形空间存在着均匀磁场, 如图所示, 当此磁场正以 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 的速率增大时, 求圆柱体内外涡旋电场的分布?

解: 由磁场变化的对称性, 涡旋电场也具对称性取同轴圆周为积分回路L, 顺时针为绕行正向. n与B同向.



(1) $r<R$的区域

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B \cdot \pi r^2$$

由于不知涡旋电场的确切方向, 先假定涡旋电场的方向与回路L的方向一致!

由式: $\oint_L \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B \cdot \pi r^2) = -\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi r^2$

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi r^2$$

$$\boxed{E_i = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

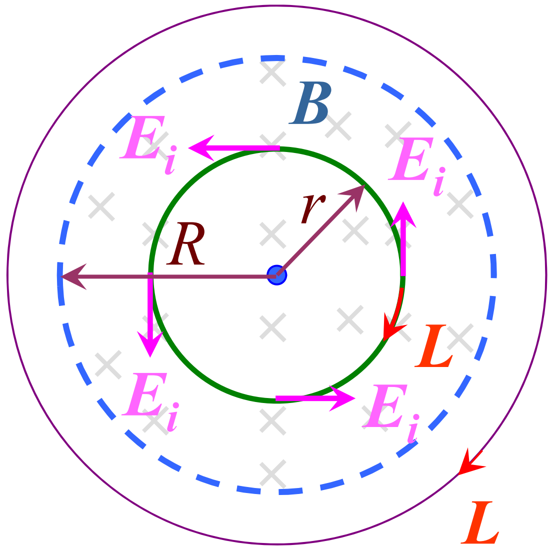
负号"–" 表示E_i的方向与回路绕行方向相反

(2) $r>R$的区域, 因磁场集中在圆柱体内, 故有:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B \cdot \pi R^2$$

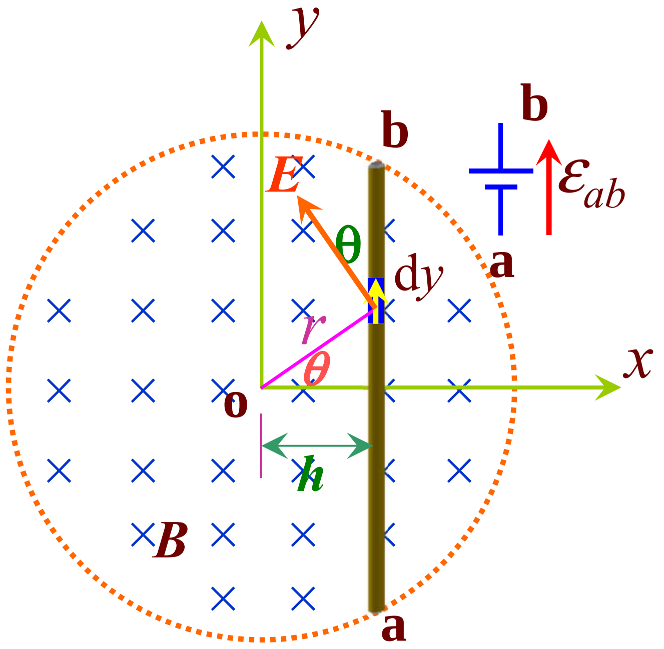
$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi R^2$$

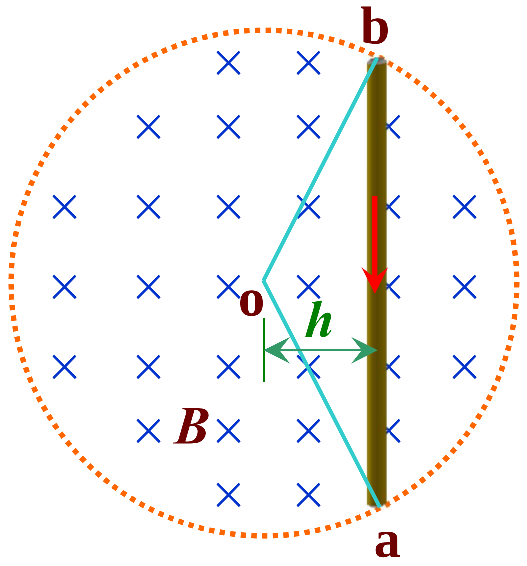
$$\boxed{E_i = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$



尽管磁场只有圆柱体内, 但是由于该磁场变化引起的涡旋电场在圆柱体内外都存在, 充满整个空间, 并不是仅限于半径为R的区域

例: 若在上题的变化磁场中放置一 长为L的细棒ab与圆心o的垂直距离为 h (见图), 求棒ab上的感生电动势.





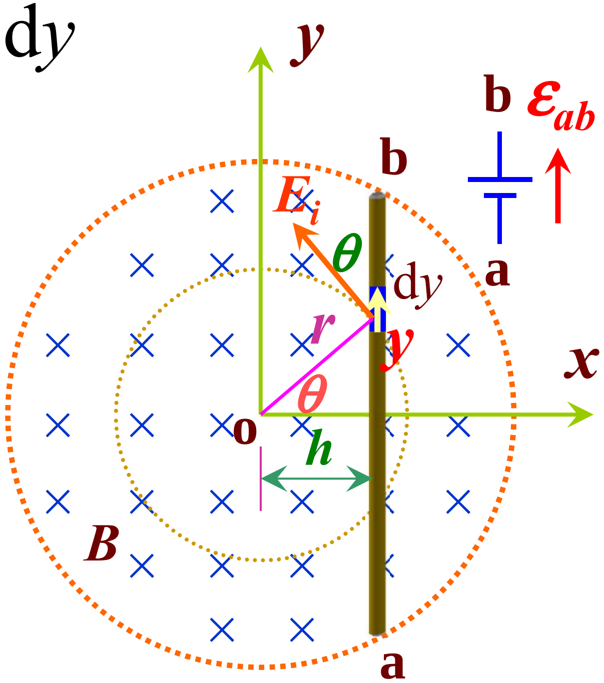
解: (1) 利用感生电动势定义求解:

$r<R$的区域 $E_i = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$，方向如图； $\cos\theta = \frac{h}{r}$

设感生电动势参考正方向为**a→b**，在棒上任取一线元**d*y***，与$\boldsymbol{E_i}$的夹角为$\boldsymbol{\theta}$，**d*y***的感生电动势为:

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{E}_i \bullet \mathrm{d}\vec{y} = E_i \cdot \cos\theta \cdot \mathrm{d}y$$

$$= \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{h}{r}\right) \cdot \mathrm{d}y = \frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y$$



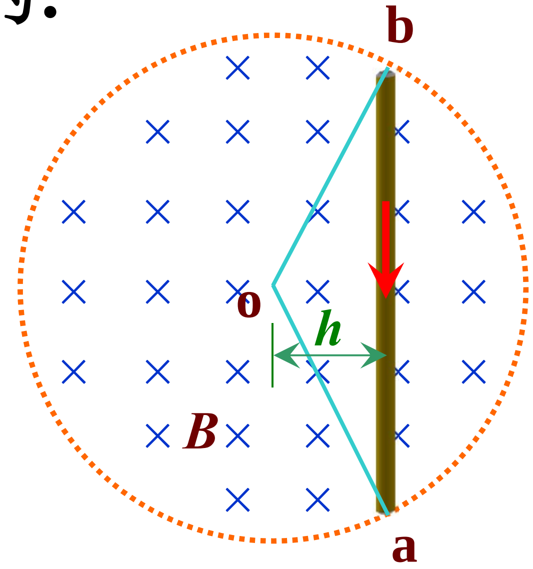
于是棒**ab**上的感生电动势为:

$$\varepsilon_i = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{d}\varepsilon_i = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}y = \frac{hL}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\boldsymbol{\varepsilon_i}>0$，故$\boldsymbol{\varepsilon_i}$的方向为 **a→b**

(2) 用法拉第电磁感应定律求解:

作辅助线oa、ob构成假想回路 obao. 由于E_i为同心圆，ao、bo段上E_i垂直于dl, 故辅助线上的感生电动势为零. 回路obao上的感生电动势即为ε_{ab}. 假设回路为顺时针方向 (即也为电动势的参考正方向), 与面元的法向和磁感应强度都成右手螺旋关系,穿过回路所包围面积的磁通量为:



由于均匀磁场

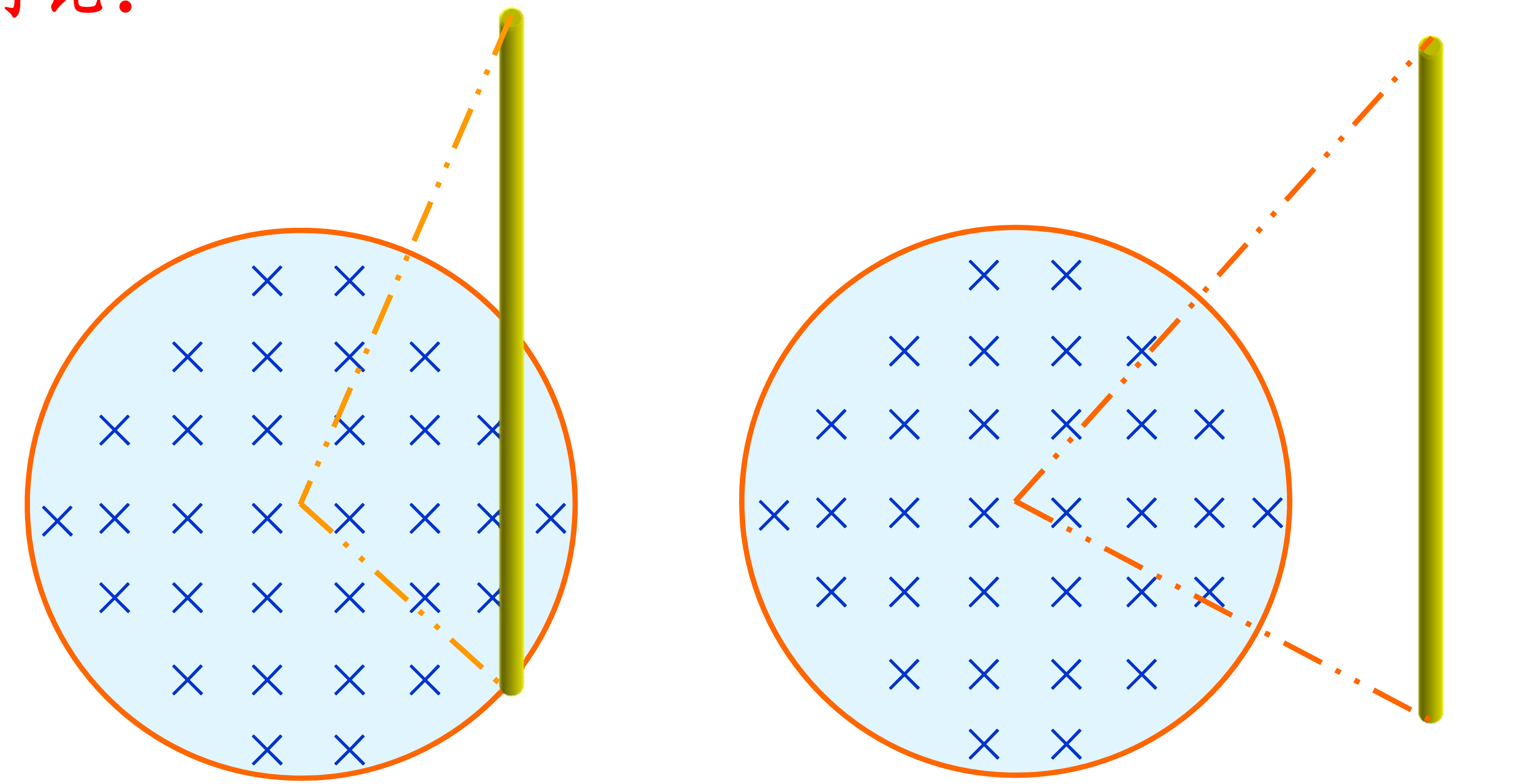
$$\Phi_B = \vec{B}\bullet\vec{S} = B\cdot\frac{1}{2}hL = \frac{1}{2}BhL$$

则:

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{hL}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

负号表示实际的电动势的方向与假设的方向(即回路方向)相反，故ε_i的方向为a→b.

讨论:



涡旋电充满整个空间，不限于半径为R的区域，即使导体处于磁场外，只要磁场变化，也能产生感生电动势.

小结：用法拉第电磁感应定律计算感生电动势时补辅助线成闭合曲线的规则：

目的：为了方便计算使添加的辅助线上产生的感生电动势为0.

方法：使添加的辅助线与涡旋电场相垂直，即辅助线$\perp \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$，从而形成闭合回路，由于添加的辅助线垂直涡旋电场，在辅助线上不会产生感生电动势，故所要求的曲线上的感生电动势就等于闭合曲线上所产生的感生电动势.

四. 感应电动势的计算

同时存在 { 导体运动 动生电动势
磁感应强度变化, 感生电动势

★ 感应电动势的计算方法:

(1)动生电动势和感生电动势分别计算

计算动生电动势时, 可认为磁感应强度不变
计算感生电动势时, 可认为导体不动

[a]导体不为闭合回路,
[b]导体为闭合回路时

(2)动生电动势和感生电动势同时计算

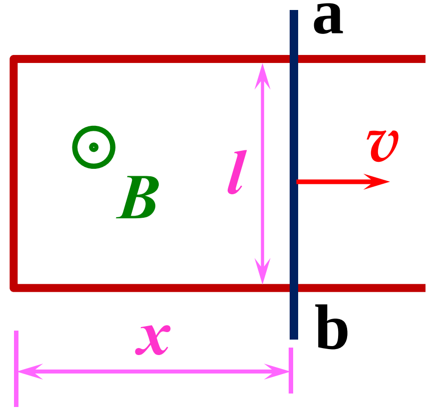
[c]一般导体为闭合回路时, 同时计算比较方便;
但也有例外, 有时导体为闭合回路时,
同时计算并不会带来方便

(1) 导体为闭合回路时

例: 一矩形导线回路两边相距为l, 另一边ab以匀速v向右滑动, v与两边平行; 整个回路都在磁感应强度为B的均匀磁场中, B与回路平面垂直并向外, 如图所示. B随时间作如下变化: $B=B_0\cos\omega t$. 试求ab到左边的距离x时, 回路中的感应电动势ε_i.

解: 方法一: 动生电动势和感生电动势一起计算

面元法向为垂直纸面向外,



通过回路的磁通量为:

$$\Phi_B=\iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\iint_S B\cos\theta \mathrm{d}S$$

$$=B\cdot\cos 0°\cdot S=B_0\cos\omega t\cdot lx$$

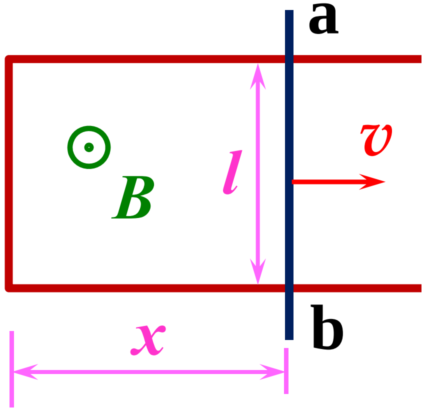
设感应电动势的参考正方向为逆时针方向, 则所求的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_0\cos\omega t\cdot lx) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[B_0 lx(t)\cos\omega t]$$

$$= -[B_0 lv\cos\omega t + (-B_0 lx\omega\sin\omega t)] = B_0 l(\omega x\sin\omega t - v\cos\omega t)$$

方法二: 动生电动势和感生电动势分别计算

面元法向为垂直纸面向外, 感应电动势的参考正方向为逆时针方向.



通过回路的磁通量为:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S B\cos\theta \mathrm{d}S = BS = B\cdot lx$$

(1) 先求的感生电动势

可认为导体不动, 于是ab到左边的距离x不变

用法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(B\cdot lx)}{\mathrm{d}t} = -lx\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -lx\frac{\mathrm{d}(B_0\cos\omega t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= -lx(-B_0\omega\sin\omega t) = B_0 lx\omega\sin\omega t$$

用法拉第电磁感应定律

用定义

(2) 再求的动生电动势　　可认为磁场不变

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(B \cdot lx)}{\mathrm{d}t} = -Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Blv$$

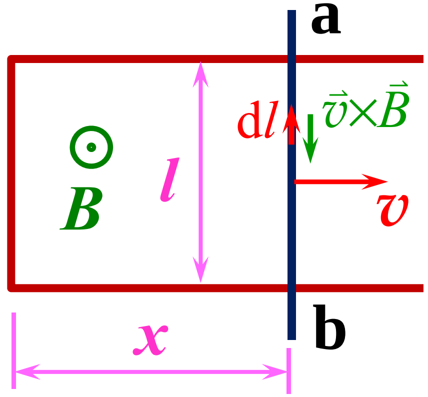
$$= -vlB_0 \cos\omega t$$

设动生电动势的正方向为b→a

$$\mathrm{d}\varepsilon_{i2} = (\vec{v} \times \vec{B}) \bullet \mathrm{d}\vec{l} = vB\sin 90^\circ \mathrm{d}l \cos\pi = -vB\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon_{i2} = \int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} \mathrm{d}\varepsilon_{i2} = \int_0^l -vB\mathrm{d}l = -vB\int_0^l \mathrm{d}l$$

$$= -vBl = -vlB_0 \cos\omega t$$



则所求的感应电动势为:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2} = B_0 l(\omega x \sin\omega t - v\cos\omega t)$$

★讨论：　　匀强磁场为例

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B(t) \cdot S(t)$$

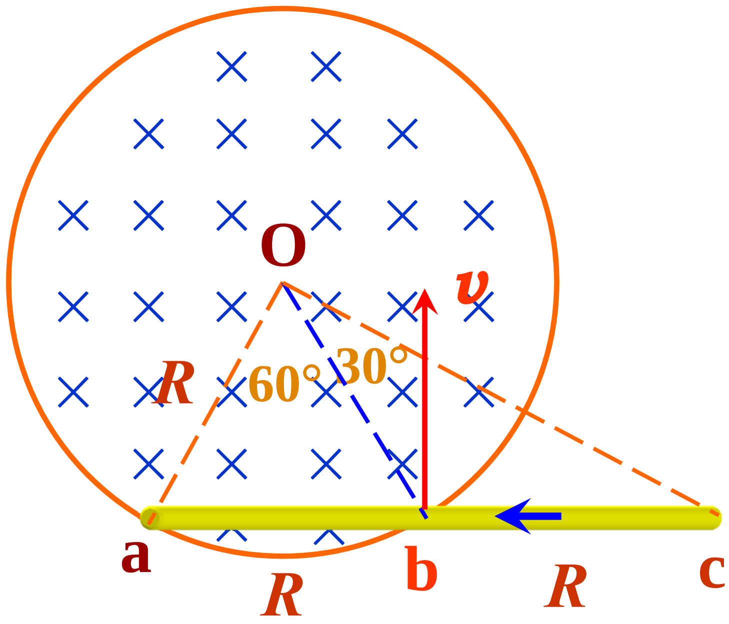
$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B(S(t), B(t))}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial \Phi_B}{\partial S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Phi_B}{\partial B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)$$

由面积*S*变化引起
*B*不随时间而变，
动生电动势

由磁场*B*变化引起的
*S*不随时间而变，
故导体不动
感生电动势

(2)导体不是闭合回路

例: 均匀磁场B被限制在半径为R的圆柱形空间中，但磁场大小的变化率为$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$，磁场方向如图所示，有一根长为$2R$的金属棒ac如图放置，若此时金属棒在此位置还具有一向上的速度v

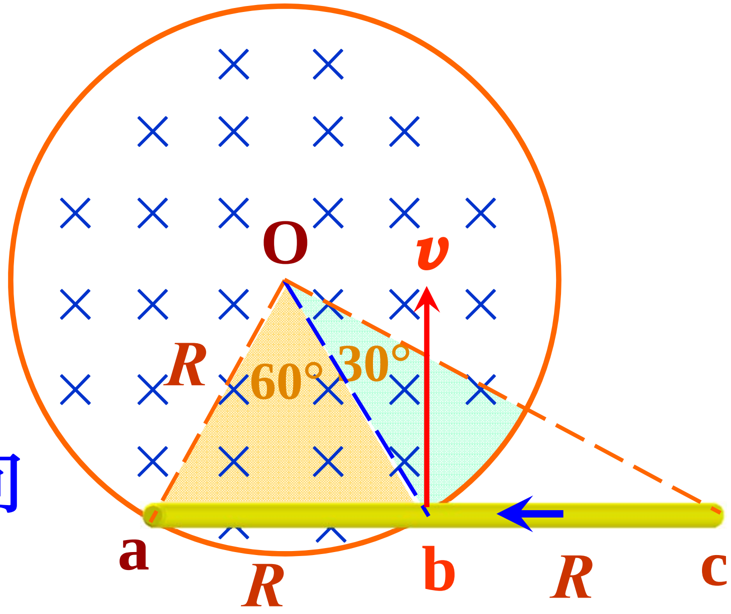


求: 金属棒的感应电动势 (设此时磁场的大小为B) .

解: (1) 先求感生电动势. 因为求感生电动势时假设导体不动

(a) 补辅助线oa和oc形成闭合回路,由于oa和oc垂直于涡旋电场, 故不产生感生电动势.

(b) 假定感生电动势的方向顺时针方向.



通过该闭合回路的磁通量为:

$$\Phi_B=\iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=BS=B(\frac{1}{2}\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R+\frac{30}{360}\cdot\pi R^2)$$

$$=B(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\pi}{12}R^2)=\frac{B}{4}(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})R^2$$

由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_{i1}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

负号表示与回路的方向相反, 故**a→c**

(2) 再求动生电动势 (此时假设磁感应强度不变)

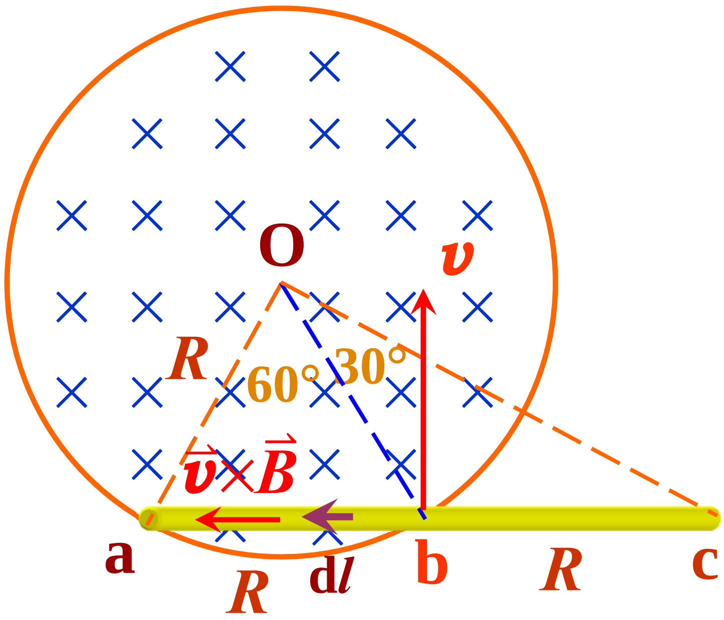
假设动生电动势的方向为 **c→a**　　$\mathrm{d}\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}$

$$\varepsilon_{i2}=\int_{c}^{a}(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\underbrace{\int_{c}^{b}(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}}_{=0}+\int_{b}^{a}(\vec{v}\times\vec{B})\bullet\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{b}^{a}(vB\sin 90^\circ)\cos 0^\circ\mathrm{d}l$$

$$=vB\int_{b}^{a}\mathrm{d}l=vBR$$



方向 **c→a**

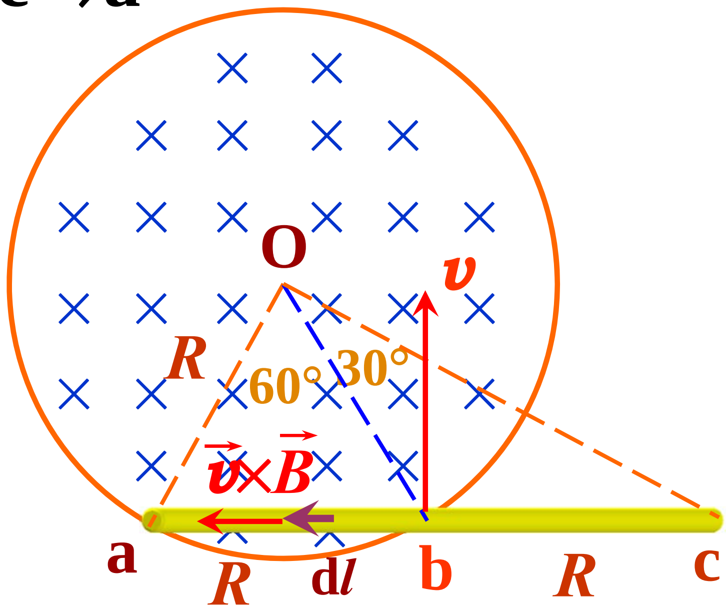
总的感应电动势

假设感应电动势的方向为 c→a

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i2} + \varepsilon_{i1}$$

$$= vBR - \frac{R^2}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向 c→a



★思考题:

(1) 为什么不用添加求感生电动势的一样辅助线求动生电动势?

(2) 为什么感生电动势和动生电动势不能一起计算?

变化的磁场产生感应电动势,如何产生变化的磁场?

§14.4 自感和互感

磁场由电流产生, 电流的变化引起磁场的变化.

一. 自感现象 自感系数

1. 自感现象

由于回路中电流产生的磁通量发生变化而在自身回路中激起感应电动势的现象 → 自感现象.

感应电动势 → 自感电动势

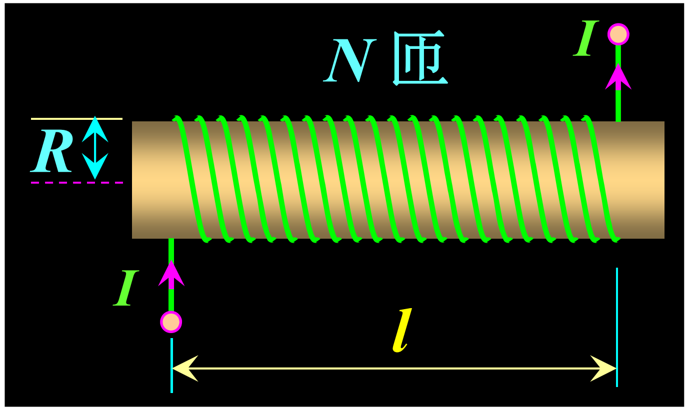
自己感应自己

2. 自感电动势

讨论螺线管中的自感问题:

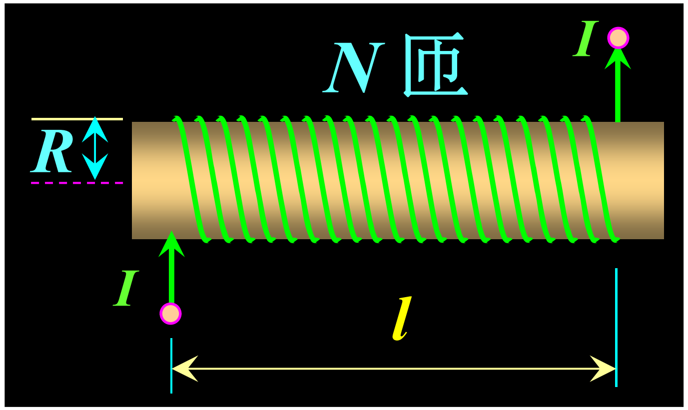
螺线管条件: 细长 ($l >> R$)

密绕 (无漏磁)



则线圈磁感应强度:

$$B=\mu_0 nI=\frac{\mu_0 NI}{l}$$



一匝线圈中的磁通量:

$$\Phi_B=\iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=B\cdot\cos 0^\circ\cdot S=\frac{\mu_0 NI}{l}\pi R^2$$

穿过*N*匝线圈的磁通匝链数或全磁通:

常量

$$\Psi_B=N\Phi_B=N\frac{\mu_0 NI}{l}\pi R^2=\frac{\mu_0 N^2\pi R^2}{l}I$$

$\Psi_B\propto I$ $\Psi_B=LI$ $L=\frac{\mu_0 N^2\pi R^2}{l}$

I 变化→ Ψ_B 变化→?

若I变化，线圈中出现的**自感电动势**：

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

说明：(a) $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t>0$　I是增加的，$\mathrm{d}I$的方向与I相同

$\varepsilon_L<0$　感生电动势与I方向相反，

$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t<0$　I是减小的，$\mathrm{d}I$的方向与I相反

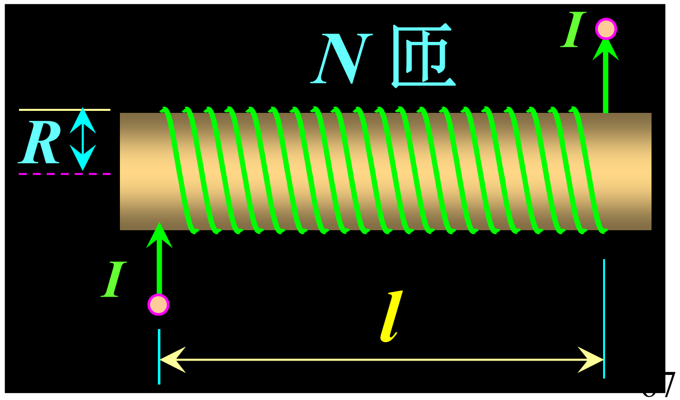
$\varepsilon_L>0$　感生电动势与I方向相同.

阻碍线圈中电流 I 的变化

(b) L称为自感系数

——自感

螺线管　$L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$



3. 自感系数

在一般情况下，回路电流变化而引起全磁通变化，从而出现感应电动势为：

$$\varepsilon_L=-\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

自感系数(自感)定义1:

在一般情况下，L定义为：

$$L=\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}I}$$

在回路形状不变，周围没有铁磁质，空间一点B与回路电流I成正比，而Ψ也与I成正比：

$$\Psi_B=LI$$

自感系数(自感)定义2:

$$L=\frac{\Psi_B}{I}$$

4. 自感的物理意义:

(1) 自感反映了回路保持原有电流不变的能力

→电磁惯性

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

L越大, 感生电动势越大, 阻碍电流变化的能力也越大.

(2) 当回路中没有铁磁质时,自感与回路中的电流无关,仅由回路的几何形状,匝数和磁介质的磁导率等所决定

如螺线管的自感为: $L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$

(3) 当回路中有铁磁质时,自感很大且不是常量

(4) 线圈储存磁场能量能力的大小

(5) 自感L的单位为亨利 (H), 1H = 1 Wb/A.

5. 自感系数的求法

(1) 使所求导线通电流 I 并求出该载流导线的电流I所产生的磁感应强度B的分布.

(2) 求出该载流导线电流 I 所产生的磁感应强度通过该载流导体所组成回路的磁通量Φ.

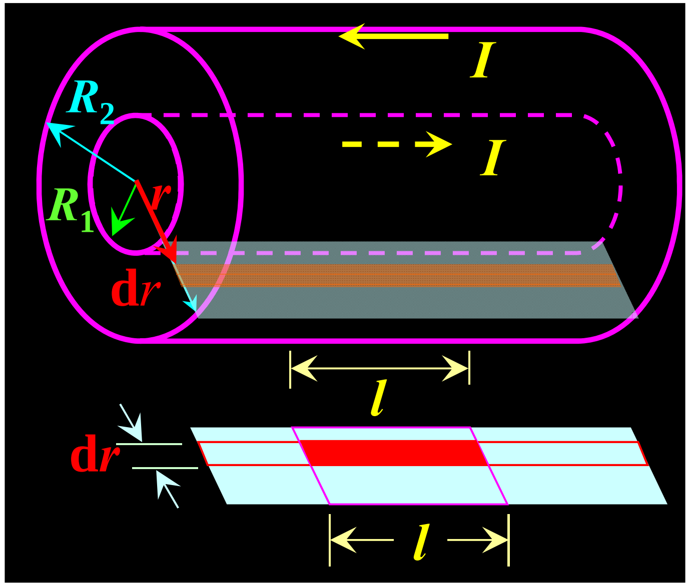
(3) 利用$\Phi = LI$, 计算出自感系数L

与静电场中求导体电容的方法类似

$$q = CU$$

例：如图所示,由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆,其间充满磁导率为$\mu=\mu_0\mu_r$的磁介质,电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流 I 大小相等而方向相反.设内、外圆筒的半径分别为R_1和R_2,求电缆单位长度的自感?

解：应用安培环路定理，可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零.

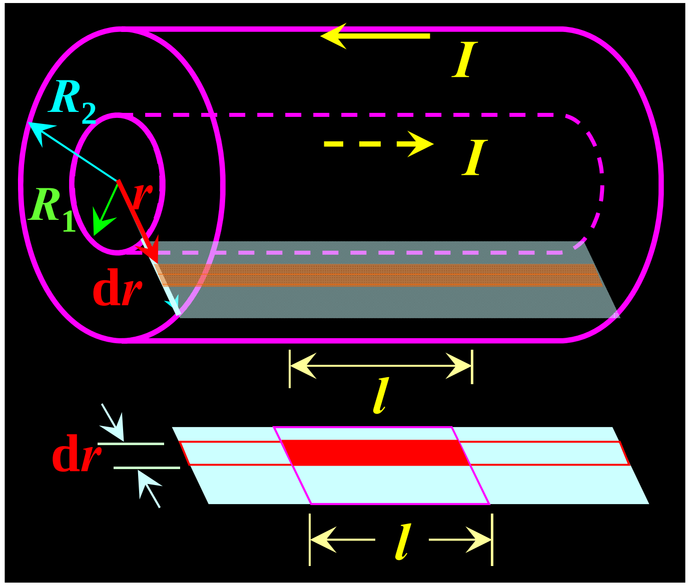


在内外两圆筒之间,离开轴线距离为r处的磁场强度为:

$$\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{l}=H\cdot 2\pi r=\sum_{in} I_i=I \quad \Rightarrow H=\frac{I}{2\pi r}$$

磁感应强度B $$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

在内外圆筒之间,取如图中所示的截面,通过长为l的面积元$l\mathrm{d}r$的磁通量为:



$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B \cdot \cos 0° \cdot \mathrm{d}S$$

$$= B \cdot \cos 0° \cdot l\mathrm{d}r = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

通过两圆通之间l长的截面的总磁通量:

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于$\Phi_B = LI$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

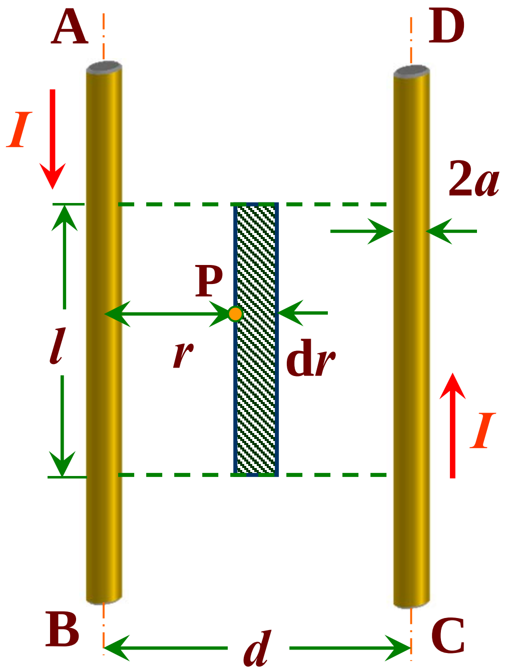
可知单位长度电缆的自感为:

$$L_1 = \frac{L_l}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例: 两根半径为a的平行长直传输线,相距为d (见图),且$a<<d$.试求长为l的这对传输线的自感.

解: 设传输线中通有电流I, 电源和用电器在无限远处, 电流从AB输出, CD返回. 两传输线在离AB为r处产生的总磁感应强度的大小为:

$$B_r=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$



由于$a<<r$,可以忽略两导线内部的磁通量. 因此通过两传输线间长为l.宽为dr的面积元dS的磁通量为:

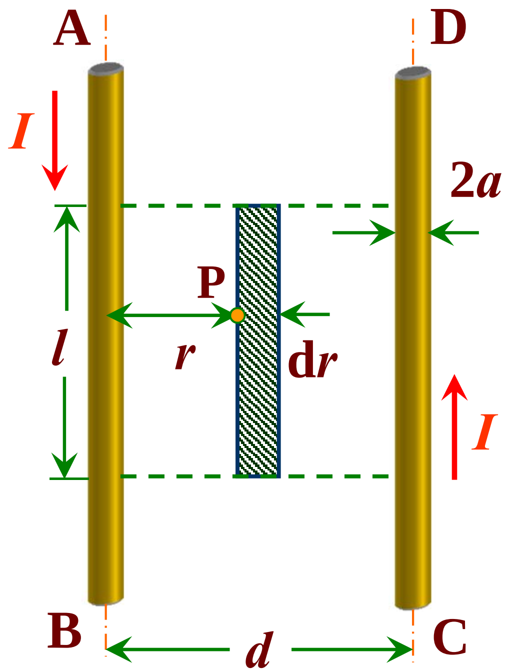
$$\mathrm{d}\Phi_B=\vec{B}_r\bullet \mathrm{d}\vec{S}=[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}]\cdot\cos 0^\circ\cdot l\mathrm{d}r$$

通过长为l的两导线间的磁通量为:

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \iint_S \vec{B}_r \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_a^{d-a} [\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}] l \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



长为l的这对传输线的自感为:

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

这种传输线单位长度的分布电感为:

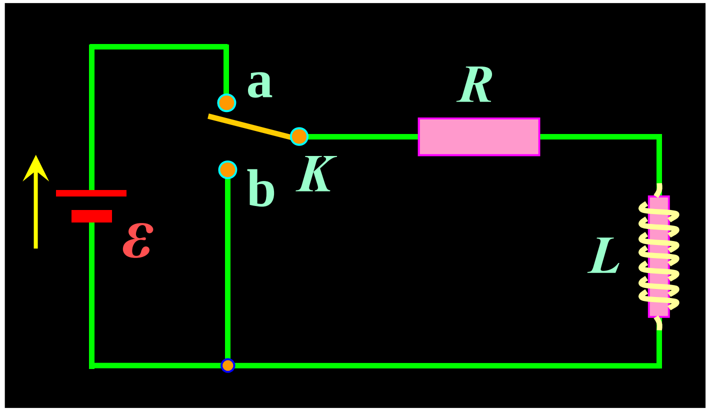
$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

二. R-L电路中电流的增长和衰减过程

由于自感的存在而阻碍或抵抗电路中电流的变化, 使电路中具有保持原由电流不变的特性, 它使电路在接通或断开后, 电路中的电流要经历一个过程才能达到稳定值, 这个过程称为*RL*电路的暂态过程.

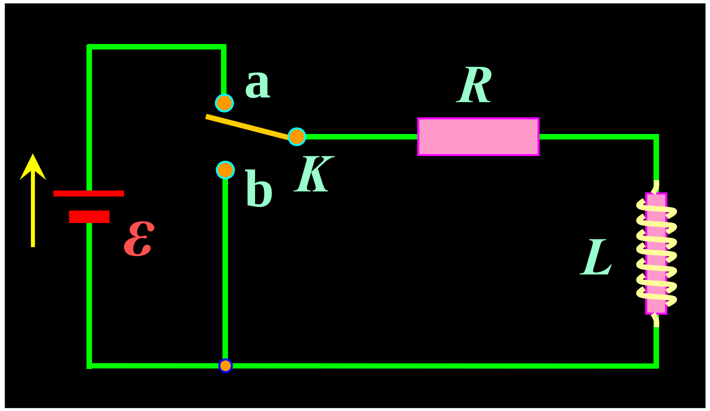
1. 电流的增长过程

设电路有纯电感线圈*L*和纯电阻*R*构成. 当电键K与a接通后, 电路中某瞬时的电流 $i=i(t)$:



由于自感应作用，线圈中出现自感电动势为：

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



回路中的总电动势为$\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}_L$，由全电路欧姆定律得电路方程为：

$$\varepsilon+\varepsilon_L=\varepsilon-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=iR$$

对上式分离变量后积分，取t=0时，i=0,于是：

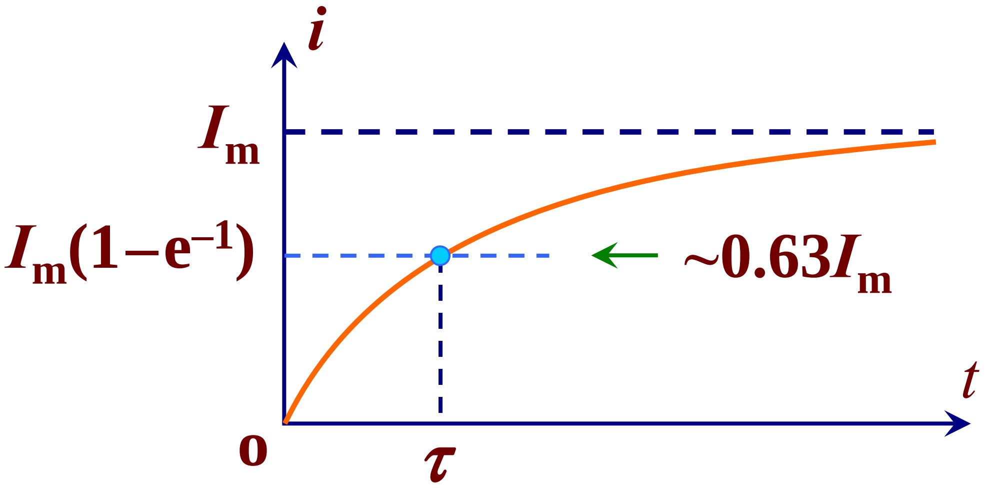
$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{t}{L/R}})=I_m(1-e^{-\frac{t}{L/R}})$$

令 $\tau = L/R$ 得:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = I_m(1 - e^{-t/\tau})$$

(1) 电流 i 按指数规律增长, 逐渐达到稳定值 I_m

(2) 在 RL 电路中, L/R 是表征暂态过程持续长短的特征量, 它具有时间的量纲, 称为 RL 电路的时间常数 τ (弛豫时间).



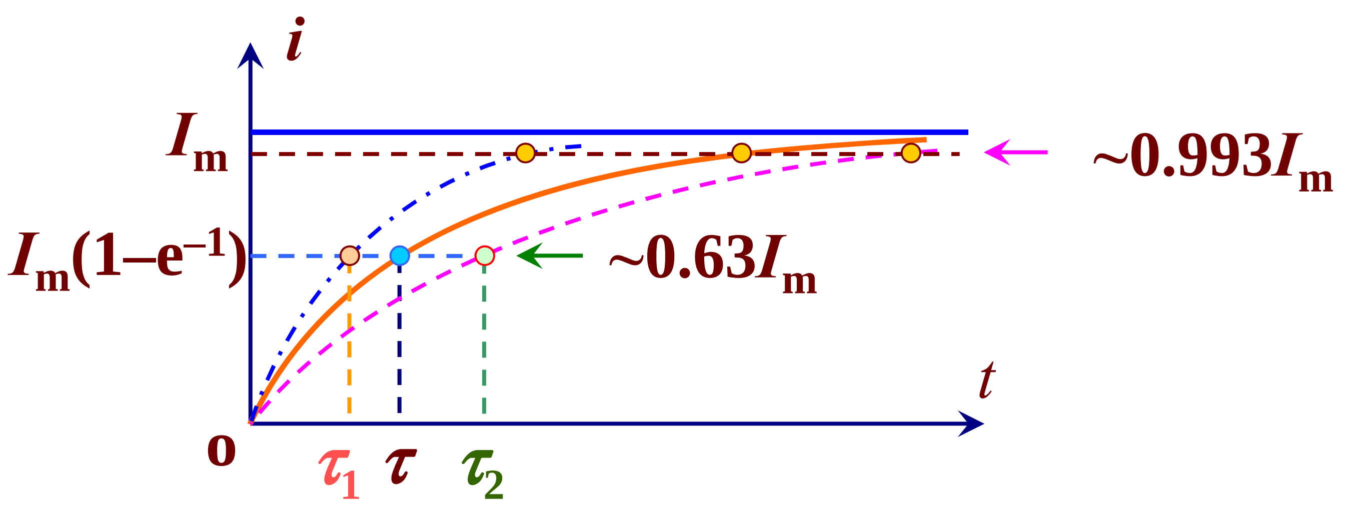
(3) 时间常数 τ 的物理意义

(a) 当 $t=\tau=L/R$ 时 $\quad i=I_m(1-e^{-1})=0.63I_m$

(b) 当$t=5\tau$时 $\quad i=I_m(1-e^{-5})=0.993I_m$

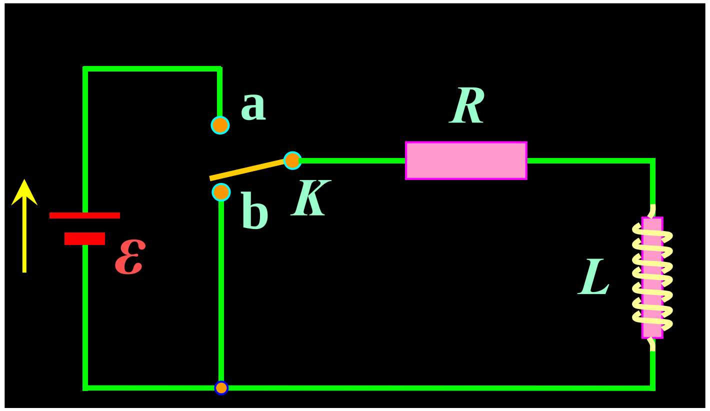
$i=0.993I_m$,可以认为电流已达稳定值.

τ是描述电流增加快慢的一个物理量



2. 电流的衰减过程

当电路中的电流达到稳定值I_0后,将电键K从触点a倒向b,这时回路中无外电源,但由于自感的作用,电流不马上回到零:



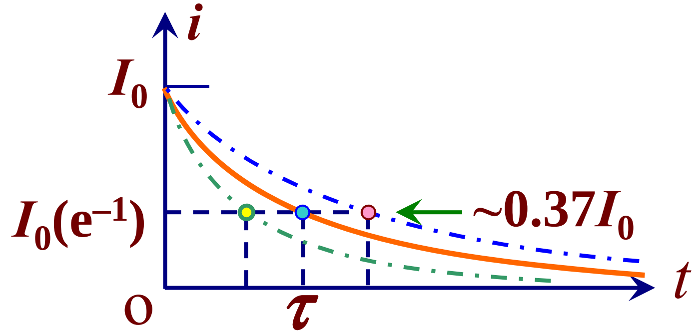
电路方程 $$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$

将上式分离变量后积分, 考虑到$t=0$时, $i=I_0$, 则有:

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-t/\tau}$$

(1) 电流i按指数规律衰减, 逐渐达到稳定值0

(2) 时间常数 τ 的物理意义



(a) 当 $t=\tau=L/R$ 时:

$$i=I_0e^{-1}=0.37I_0$$

在撤去电源的情况下, 时间常数τ表示电流由稳定值I_0至I_0的37%所需的时间.

(b) 当$t=5\tau$时 $i=I_0e^{-5}=0.007I_0$

可以认为电流已为0, 已达稳定值.

τ是描述电流变化快慢的一个物理量

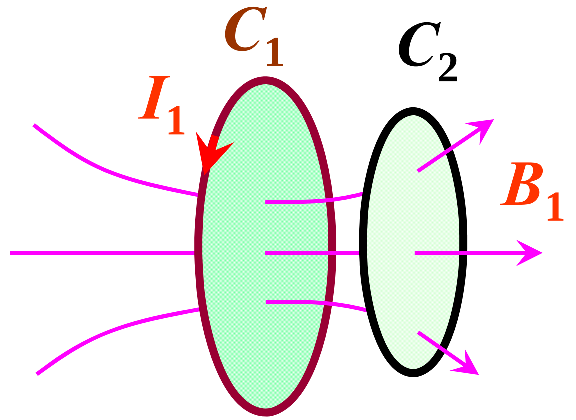
若变化的磁场是由其它线圈电流变化产生的

→ 互感现象

三. 互感现象 互感系数

1. 互感现象:

一个回路中的电流变化在邻近的另一个回路中产生感应电动势的现象，称为互感现象，所产生的电动势称为互感电动势.

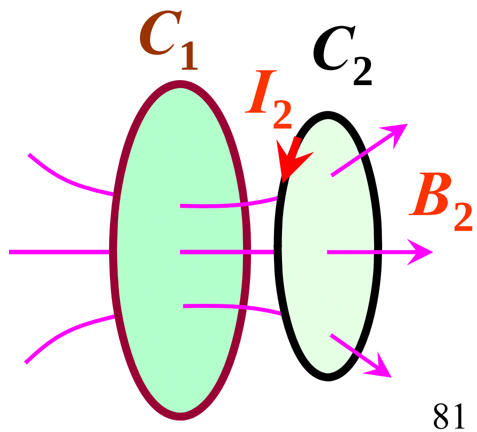


线圈C_1产生的磁场 $B_1 \propto I_1$

通过C_2的全磁通

$$\Psi_{21} \propto B_1 \propto I_1 \qquad \Psi_{21} = M_{21} I_1$$

2. 互感系数 (简称互感): $M_{21} = \dfrac{\Psi_{21}}{I_1}$



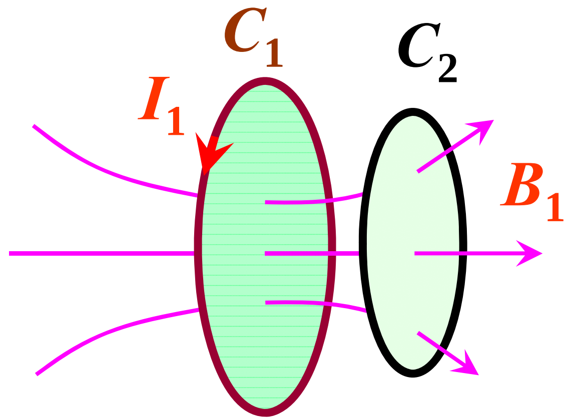
通过C_1的全磁通和互感

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2 \qquad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

3. 互感系数的特性

可以证明，$M_{21}=M_{12}=M$，M也仅由两线圈本身的材料、形状、相对位置和介质磁导率等决定，而与电路中电流、磁场的大小无关.

I_1变化 $\rightarrow$ Ψ_{21} 变化 $\rightarrow$?



4. 互感电动势

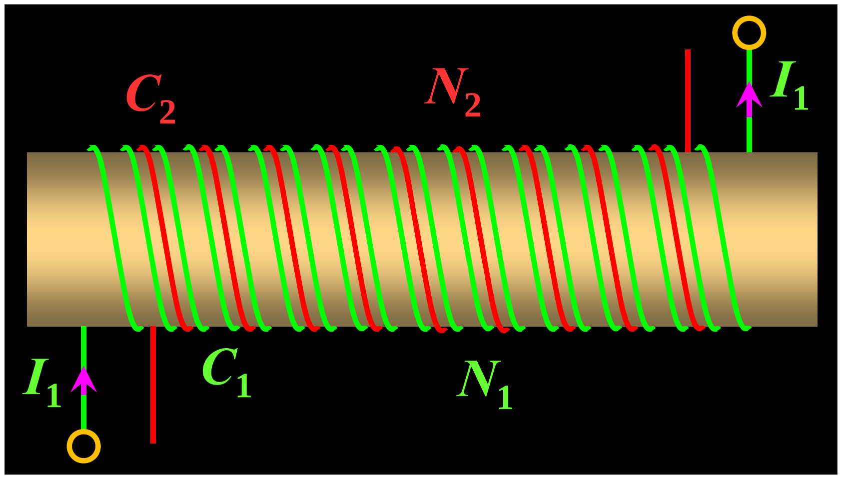
以螺线管为例，长l，半径R，介质的磁导率为μ，绕有

(1) 线圈C_1，N_1匝;

(2) 线圈C_2，N_2匝 .

先让线圈C_1通电流I_1，它产生的磁场为:

$$B_1=\mu n_1 I_1$$

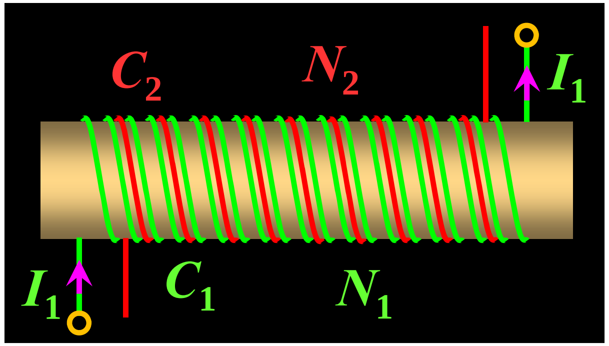


通过C_2线圈的全磁通

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_{B21} = N_2B_1S$$

$$= N_2\mu n_1 I_1 S = N_2\mu\frac{N_1}{l}I_1\pi R^2$$

$$= \mu\frac{N_1N_2}{l}\pi R^2 I_1 \ = M_{21}I_1$$



互感系数

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu\frac{N_1N_2}{l}\pi R^2 = \mu\frac{N_1N_2}{l^2}Sl = \mu n_1 n_2 V$$

互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -\mu\frac{N_1N_2}{l}\pi R^2\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

同样, 让线圈 C_2 通电流 I_2, 当 C_2 中 I_2 变化时, 在 C_1 回路中也将产生互感电动势:

$$\varepsilon_{12}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t}=-\mu\frac{N_1N_2}{l}\pi R^2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=-M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

比较 ε_{21} 和 ε_{12}

$$\boxed{M_{21}=M_{12}=\mu\frac{N_1N_2}{l}\pi R^2=M}$$

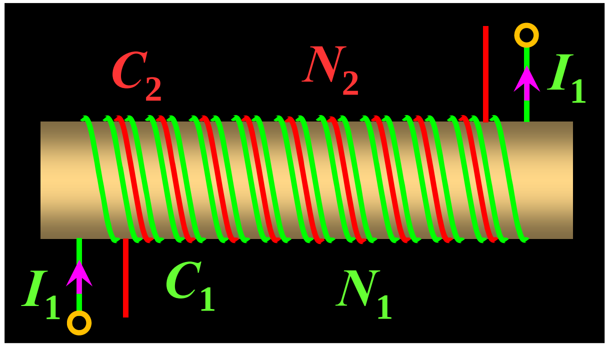
5. 互感系数的物理意义

M 反映了两回路间产生感生电动势的能力

互感电动势 $\quad \varepsilon_2=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_1=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$

互感的单位: 亨利(H). 变压器, 互感器, 耦合器, 感应圈等都是根据互感原理制成的.

6. 互感与自感的关系：



仍以两层螺线管为例
(230页, 例14.10)

原线圈(产生磁场的线圈如C_1)的自感系数L_1

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2}{l} S$$

副线圈(产生感应电流的线圈如C_2)的自感系数L_2

$$L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} S$$

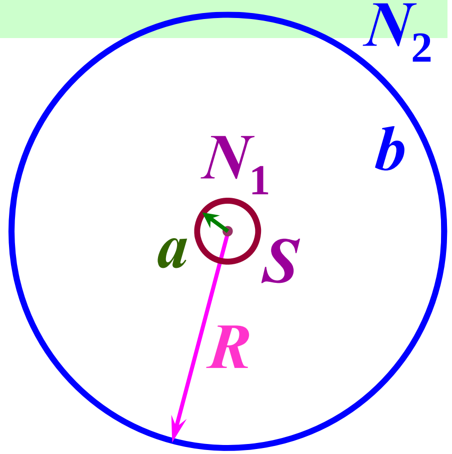
互感系数

$$M = \mu \frac{N_1 N_2}{l} S$$

比较得 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 理想无漏磁时

一般 $M = K\sqrt{L_1 L_2}$ 耦合系数：$0 \le K \le 1$

例: 如图所示, 一小圆环形线圈a由N_1匝细线绕成, 线圈面积为S, 放在另一个匝数为N_2, 半径为R的大圆环形线圈b的中心, 两线圈同轴. 求:当线圈a中的电流以$\mathrm{d}I_a/\mathrm{d}t$的变化率变化时, 线圈$b$中的感生电动势.



解:

$$\varepsilon_b = -M_{ba}\frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} = -M_{ab}\frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t}$$

怎样求M_{ba}?

设线圈b中通有电流I_b,
在小线圈a中的磁场可近似地看作是均匀的.

$$B = N_2\frac{\mu_0 I_b}{2R}$$

通过a线圈的全磁通 $\Psi_a = N_1 BS = N_1 \cdot N_2 \frac{\mu_0 I_b}{2R} \cdot S$

互感 $M = M_{ab} = \dfrac{\Psi_a}{I_b} = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2}{2R} S$

互感电动势 $\varepsilon_b = -M\dfrac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S}{2R} \cdot \dfrac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t}$

§ 14.5 磁场的能量

一、回顾静电场中能量

a、电场的能量储存在电容器中

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

b、电场的能量储存在电场中

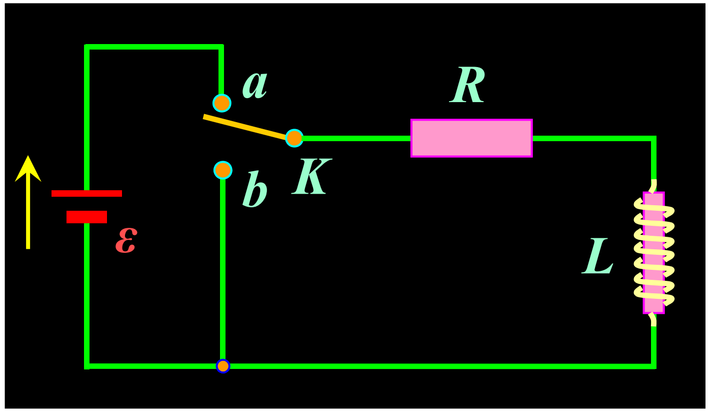
在带电系统形成过程中,外力克服静电场力做功转化为电荷系统或电场的能量,电场的能量密度为:

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

$$W_e = \iiint_{V_{体}} w_e \mathrm{d}V_{体} = \iiint_{V_{体}} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V_{体} = \iiint_{V_{体}} \frac{1}{2}DE\mathrm{d}V_{体}$$

二、自感磁能(线圈的储能)

1. 由电流增长的暂态过程



在RL暂态过程中，电流克服自感或互感，在回路电流消长中存在能量转化问题. 在上一节的RL电路中，由欧姆定律:

$$\sum \varepsilon = \varepsilon - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i\sum R$$

两边乘以$i\mathrm{d}t$

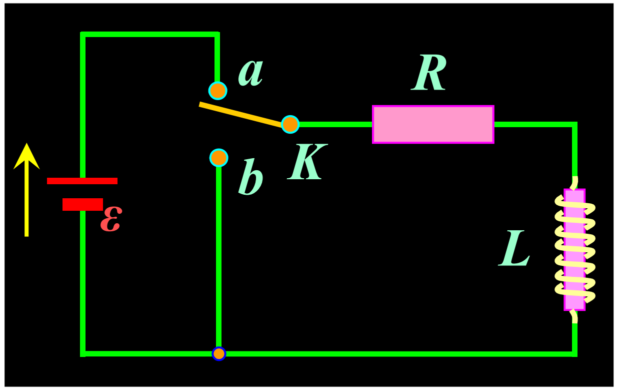
$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri$$

$$\Rightarrow \varepsilon i\mathrm{d}t - Li\mathrm{d}i = Ri^2\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \varepsilon i\mathrm{d}t = Li\mathrm{d}i + Ri^2\mathrm{d}t$$

设$t=0$时刻, $i=0$; t时刻, $i=I_0$,电流从0增长到稳定值的过程中,电源电动势做功:

$$\int_0^t \varepsilon i \mathrm{d}t = \int_0^{I_0} L i \mathrm{d}i + \int_0^t R i^2 \mathrm{d}t$$



在L与i无关的条件下：

$$\int_0^t \varepsilon i \mathrm{d}t = \frac{1}{2} L I_0^2 + \int_0^t R i^2 \mathrm{d}t$$

上式方程右边第二式为电源消耗在电阻上的热能,第一项为克服感生电动势所做的功.

按功能原理,此功以能量形式储存在线圈内.

因此,自感为L的回路中,线圈中储存的磁能为:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} L I_0^2}$$

L的另一物理意义

静电场电容

表示了线圈储存磁场能量能力的大小,故与静电场中的电容具有相同的地位.

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

2. 由电流衰减的暂态过程

设I_0为初始时的电流值，当电键K倒向b后，电流按$i=I_0e^{-t/\tau}$衰减，衰减过程中电阻R上仍要产生焦耳热，能量便来自储存的磁能．电阻R上消耗的焦耳热能可由积分求得：

$$Q=\int_0^{\infty}Ri^2\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}RI_0^2\mathrm{e}^{-2\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}LI_0^2$$

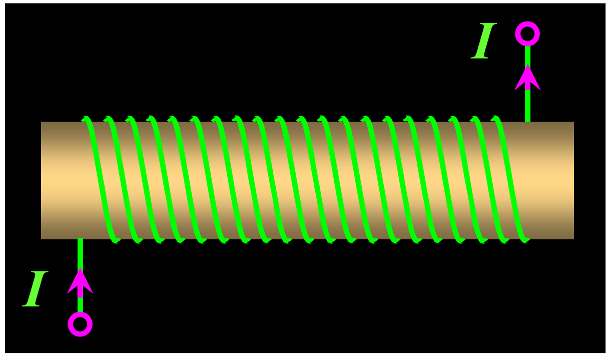
其数值正好等于电源克服自感所作的功，所以线圈中储存的能量通过自感电动势做正功而全部释放出来.

线圈中的磁能 $\boxed{W_m=\frac{1}{2}LI_0^2}$

自感系数 L可以用来表征线圈储存磁能的本领

三、磁场的能量

1. 长直螺线管磁场的能量



线圈中储存的能量可视作存储于磁场之中, 对一个长直螺线管, 磁导率为μ, 电流 I_0.

$$H=nI_0 \Rightarrow B=\mu nI_0 \Rightarrow I_0=\frac{B}{\mu n}=\frac{B}{\mu(N/l)}=\frac{Bl}{\mu N}$$

长直螺线管自感 $L=\dfrac{\mu N^2\pi R^2}{l}=\dfrac{\mu N^2 S}{l}$

将L、I_0 代入线圈中储存的磁能W_m:

$$W_m=\frac{1}{2}LI_0^2=\frac{1}{2}\frac{\mu N^2 S}{l}\cdot\frac{(Bl)^2}{(\mu N)^2}=\frac{1}{2}\frac{B^2 Sl}{\mu}=\frac{1}{2}BHV_{体}$$

定义单位体积内的磁能为**磁能密度**:

$$w_m = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}V_{体}} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

或:

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\bullet\vec{H}$$

2. 一般磁场能量的计算

当均匀磁场时

$$W_m = w_m V_{体} = \frac{1}{2}BHV_{体}$$

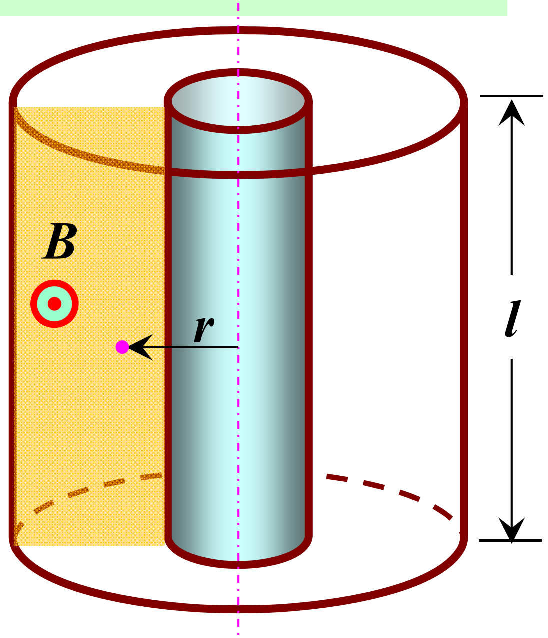
当非均匀磁场时

$$W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V_{体} = \iiint_V \frac{1}{2}BH\mathrm{d}V_{体}$$

$V_{体}$为所有磁感应强度不为0的区域

线圈内的能量储存在磁场中

例. "无限长" 同轴电缆由半径为R_1的铜芯线 (铜芯的磁导率为μ_1) 和半径为R_2的同轴圆筒所组成, 其间充满磁导率为μ的绝缘介质. 电流I从芯线的一端流出经外层圆筒返回, 且电流在芯线内均匀分布. 求长为l的一段同轴电缆的磁场能量和自感系数.



解: 磁场的分布

$r < R_1$ $\qquad H_1 = \dfrac{Ir}{2\pi R_1^2} \qquad \boxed{B_1 = \dfrac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}}$

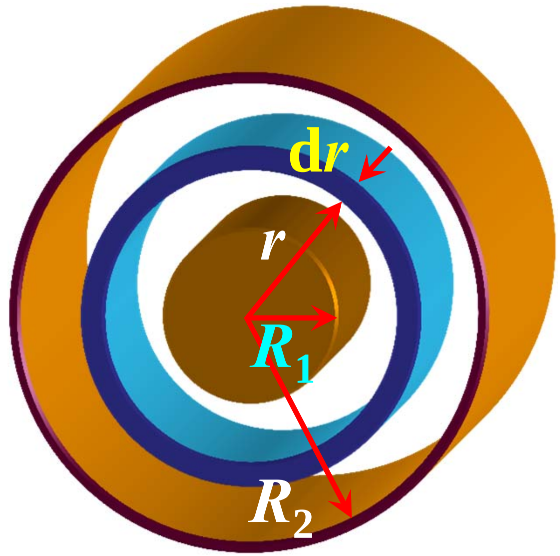
$R_1 < r < R_2$ $\qquad H_2 = \dfrac{I}{2\pi r} \qquad \boxed{B_2 = \dfrac{\mu I}{2\pi r}}$

$r > R_2$ $\qquad H_3 = 0 \qquad \boxed{B_3 = 0}$

磁场能量分布在铜芯线内和同轴圆筒之间的绝缘介质中.

磁能密度

$$w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}=\begin{cases}\dfrac{\mu_1 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4}, & r<R_1\\[2ex] \dfrac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}, & R_1<r<R_2\\[2ex] \mathbf{0}, & \boldsymbol{r>R_2}\end{cases}$$



(a) $\boldsymbol{R_1<r<R_2}$区域内的磁能

在r处取厚为dr，长为l的圆柱薄层，体积为 $dV=2\pi rl dr$，则

$$W_{m1}=\iiint_V w_m \mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(b) $\boldsymbol{r<R_1}$区域内的磁能

$$W_{m2}=\iiint_V w_m \mathrm{d}V=\int_0^{R_1}\frac{\mu_1 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4}\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{\mu_1 I^2 l}{16\pi}$$

(c) $r>R_2$ 区域内的磁能

$$W_{m3}=\iiint_V w_m \mathrm{d}V=0$$

长为l的同轴电缆内贮藏的总磁能为

$$W_m=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\mu_1 I^2 l}{16\pi}$$

长为l的同轴电缆的自感系数L由磁能和自感系数的关系求得

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}LI^2}$$

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\mu_1 l}{8\pi}$$

若内导体是柱面，导线内的磁场为0，则自感系数为

$$L_0=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

所得的结果和上节例题完全相同

四、关于磁场能量的小结

1. 对磁场能量两种观点：

a. 能量储存在线圈内

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$$

b. 能量存储于磁场之中

磁能密度： $$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \bullet \vec{H}$$

$$W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V_{体} = \iiint_V \frac{1}{2} BH \mathrm{d}V_{体}$$

2. 自感的计算方法

a. 按自感的定义 $$L = \frac{\Psi_B}{I}$$

b. 按磁场的能量 $$L = \frac{2W_m}{I_0^2}$$

本章结束！