# 第7章　级数（四）

## §7.4 幂级数及其收敛性质

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

# 幂级数的概念

级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 称为**幂级数**.

级数中每一项为幂函数，可以说是最简单的函数项级数，是多项式函数的延伸.

特别是当 $x_0 = 0$ 时，幂级数为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$. 此幂级数称为关于 $x$ 的幂级数，或称为中心为原点的幂级数，以下着重讨论此幂级数。

事实上，对关于 $(x-x_0)$ 的幂级数，可令 $x - x_0 = t$ ，就得到中心为原点的幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

- 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 收敛，则称 $x = x_0$ 为幂级数的**收敛点**；否则称为**发散点**.
- 由所有收敛点组成的集合称为幂级数的**收敛域**.

# 幂级数的收敛半径和收敛域

**阿贝尔定理** (1) 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则在 $\left(-|x_0|, |x_0|\right)$ 内绝对收敛；

(2) 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处发散，则在 $\left(-\infty, -|x_0|\right) \cup \left(|x_0|, +\infty\right)$ 发散.

**推论** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在某非零点收敛，在某点发散，那么存在正数 $R$，使得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛，在 $[-R, R]$ 外发散。

- 以上推论中的 $R$ 称为幂级数的**收敛半径**. 区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的**收敛区间**.
- 当 $x = -R$ 或 $x = R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散，所以幂级数的**收敛域**可能是 $(-R, R)$ 或 $[-R, R)$ 或 $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$.
- 若幂级数仅在 $x = 0$ 处收敛，则 $R = 0$；若幂级数对 $\forall x$ 都收敛，则 $R = +\infty$.

# 幂级数收敛半径和收敛域

**定理** 对 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，如果 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ ，则幂级数的收敛半径为 $R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$

**定理** 对 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，如果 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \mu$ ，则幂级数的收敛半径为 $R=\begin{cases}\frac{1}{\mu}, & 0<\mu<+\infty\\ +\infty, & \mu=0\\ 0, & \mu=+\infty\end{cases}$

**例题**

求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}x^{2n+1},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\ln n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{4^n}x^n$$


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY