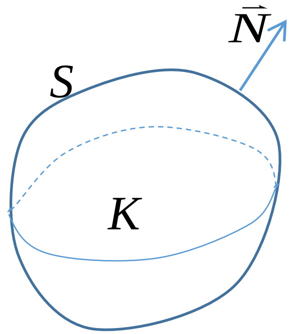
第12章（三）Gauss公式和Stokes公式

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

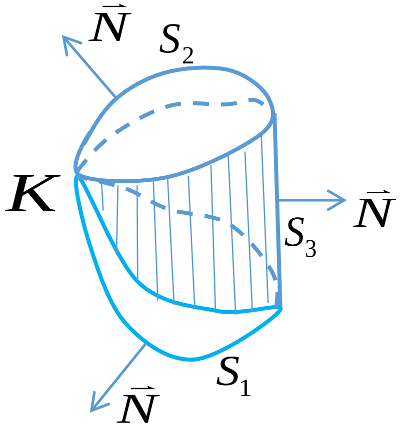
高斯定理---三重积分的“牛顿—莱布尼兹”定理

Gauss定理 设 $K\subset\mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，其边界 S 为分片光滑闭曲面，其法向指向 K 的外部，若 P，Q，R 在包含 K 的一个开集 内连续可导，则

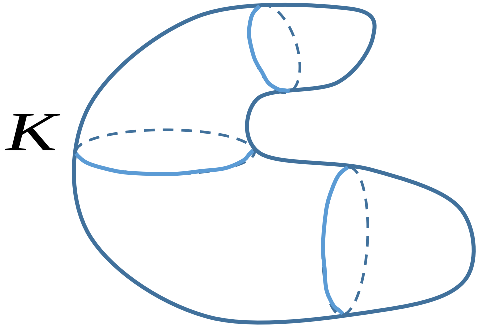


$$\iiint\limits_K\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy\ .$$

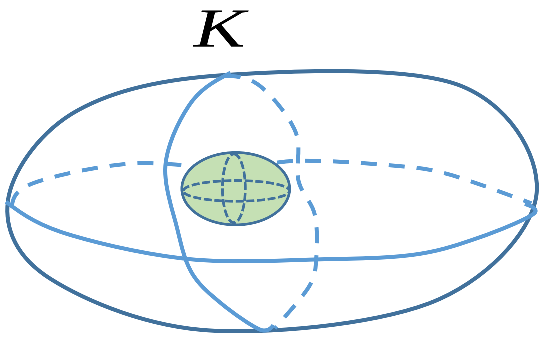
证： 先对 K 为图1的情形证明本定理，然后对 K 的其他情形（如图2，图3 等）由积分区域可加性得到.



【图1】



【图2】

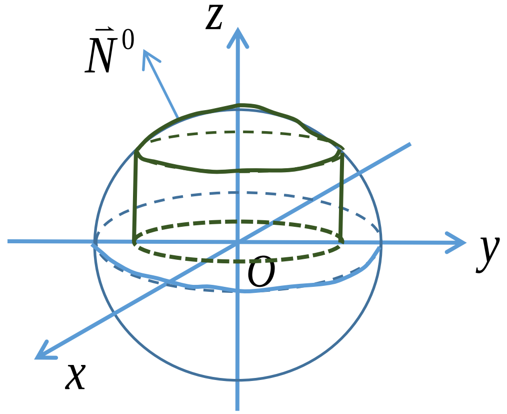


【图3】

利用高斯公式计算曲面积分举例

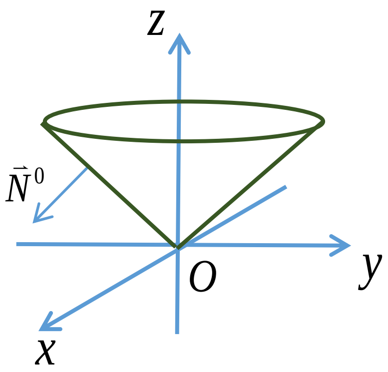
例 1 计算 $I=\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 V 的表面，外侧。

$$V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le b^2\right\},0<b<a.$$



例 2 计算 $I=\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

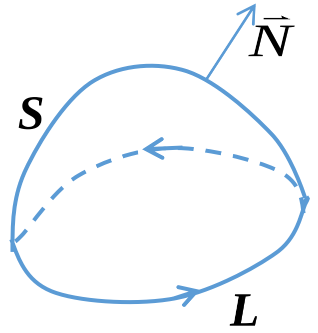
其中 S 是 $x^2+y^2=z^2$ 上 $0\le z\le h$ 的部分，下侧（外侧）。



斯托克斯定理

Stokes定理 设 S 为分片光滑定向曲面，向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$ 在包含 S 的一个开集 V 内连续可导，则有如下 **Stokes 公式**

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$



其中 L 为的 S 的边界曲线（分段光滑），方向与 S 法向量成右手法则.

- Stokes公式为曲面积分的“牛顿—莱布尼兹”公式
- 当 S 为平行于 xoy 平面的“平面片”时，Stokes 公式即为 Green 公式

斯托克斯公式

为了便于记忆，Stokes 公式常常写成以下形式

$$\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \quad \text{或} \quad \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

例 3 计算 $I = \oint_C (x-z)\mathrm{d}x + (x^3 - yz)\mathrm{d}y - 3xy^2\mathrm{d}z$，其中 C 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z = x^2+y^2+1 \end{cases}$，

方向和 z 轴下向成右手系。

谢谢！

浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY