习题课　常数项级数审敛

一、主要内容

1、常数项级数

常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在(不存在).

收敛级数的基本性质

级数收敛的必要条件:

常数项级数审敛法

<table>
<tr><th>一般项级数</th><th>正 项 级 数</th><th>任意项级数</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. 若 $S_n \to S$,则级数收敛;
2. 当 $n \to \infty, u_n \to 0$, 则级数发散;
3.按基本性质;</td></tr>
<tr><td>4.绝对收敛</td><td>4.充要条件
5.比较法
6.比值法
7.根值法</td><td>4.绝对收敛
5.交错级数
(莱布尼茨定理)</td></tr>
</table>

2、正项级数及其审敛法

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 s_n 有界.

(1) 比较审敛法

(2) 比较审敛法的极限形式

(3) 极限审敛法

设 $u_n \to 0, v_n \to 0$ 若 u_n 与 v_n 是同阶无穷小

则 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛散

特别 若 $u_n \sim v_n$ （等价无穷小）

则 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛散

(4) 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法)

(5) 根值审敛法（柯西判别法)

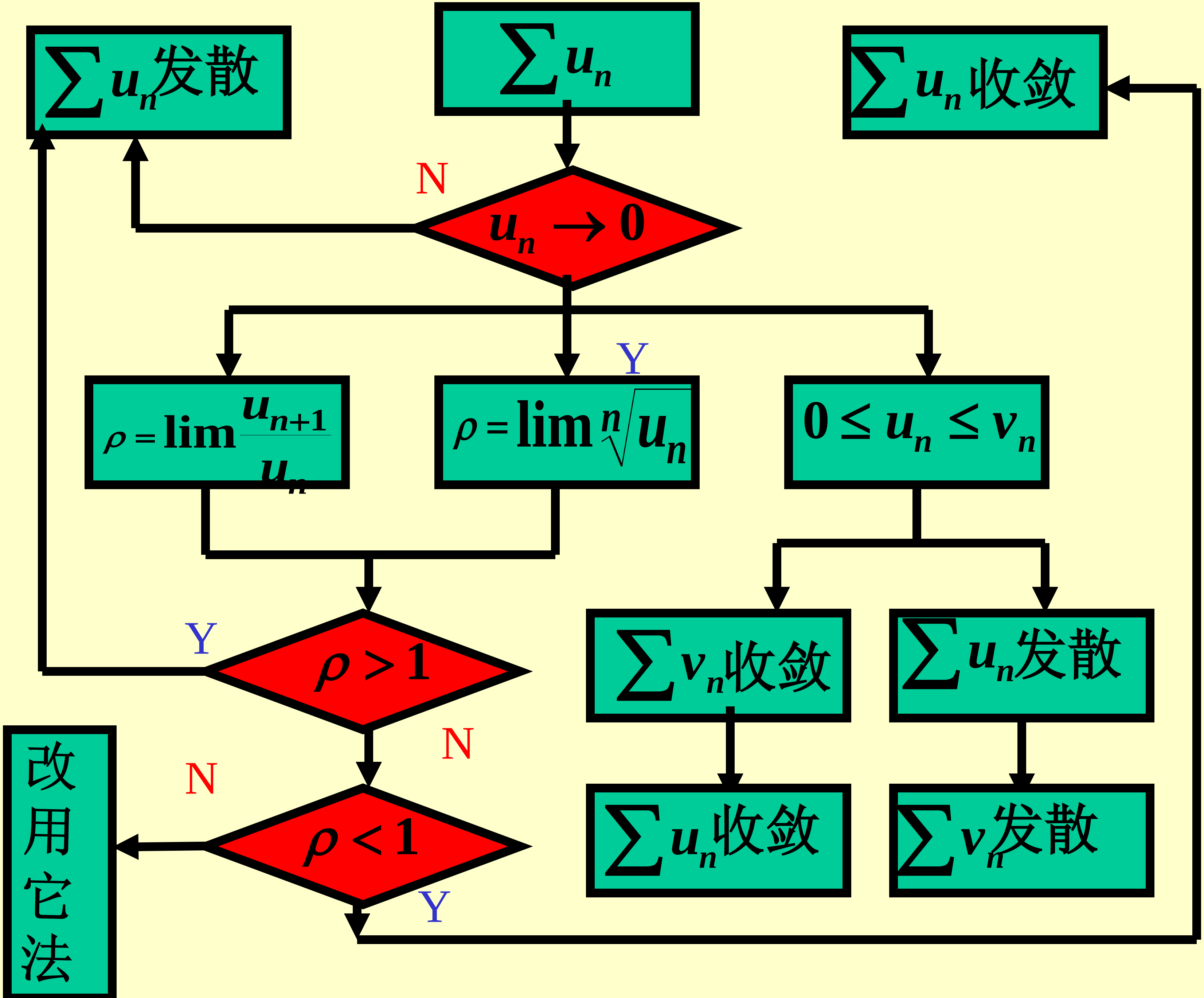
3、交错级数及其审敛法

Leibniz定理

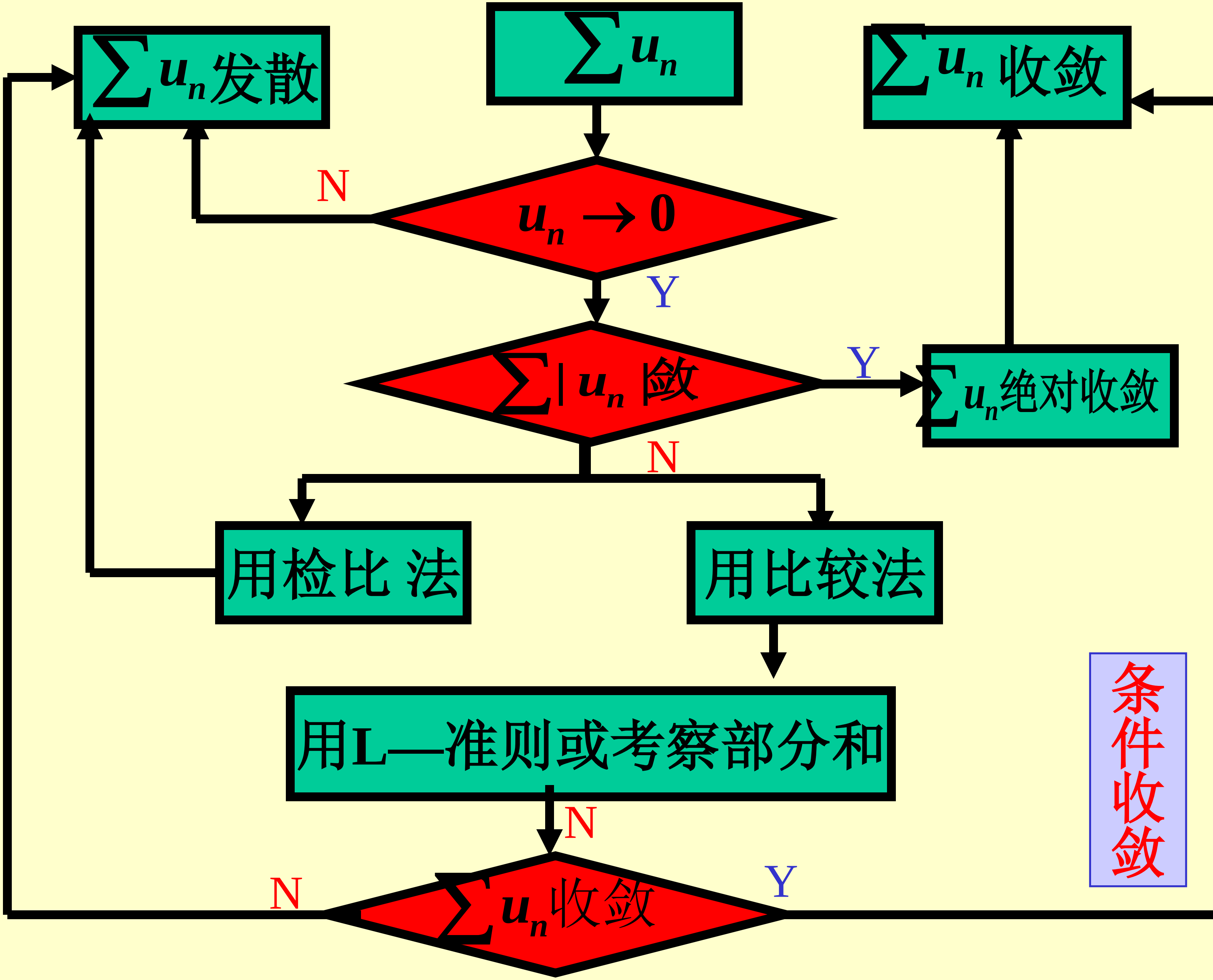
4、任意项级数及其审敛法

绝对收敛，条件收敛

附：正项级数与任意项级数审敛程序



$\sum u_n$发散
$\sum u_n$
$\sum u_n$收斂
N
$u_n \to 0$
Y
$\rho = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$
$\rho = \lim \sqrt[n]{u_n}$
$0 \le u_n \le v_n$
Y
$\rho > 1$
$\sum v_n$收斂
$\sum u_n$发散
N
N
$\rho < 1$
Y
改用它法
$\sum u_n$收斂
$\sum v_n$发散



$\sum u_n$
$\sum u_n$发散
$\sum u_n$ 收敛
N
$u_n \to 0$
Y
$\sum |u_n|$敛
Y
$\sum u_n$绝对收敛
N
用检比 法
用比较法
用L—准则或考察部分和
N
N
$\sum u_n$收敛
Y
条件收敛

二、典型例题

例1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!2^n}$

解 考察正项级数 $\sum u_n=\sum\dfrac{3^n}{n!2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{n!2^n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2(n+1)}=0<1$$

由检比法 $\sum\dfrac{3^n}{n!2^n}$ 收敛

由级数收敛的必要条件得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!2^n}=0$

例2 设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$ 试证 $\sum a_n$ 发散

证 不妨设 $a > 0$ 由极限保号性知

$\exists N$ 当 $n > N$ 时 $a_n > 0$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} = a > 0$

故由比较法的极限形式得 $\sum a_n$ 发散

例3 若 $\sum u_n$ $\sum v_n$ 都发散 则

A $\sum (u_n + v_n)$ 必发散

B $\sum u_n v_n$ 必发散

C $\sum [|u_n| + |v_n|]$ 必发散

D 以上说法都不对

例3　判断级数敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

解 $u_n=\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}=e^0=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x\}$$

$$=\exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\}=e^0=1;$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0,$

根据级数收敛的必要条件，原级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n} \quad (a>0).$

解 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}} = \frac{1}{a} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln(n+2)},$

$\because \quad n \geq 2$时$, n+2 < e^n,$ 从而有

$1 < \sqrt[n]{\ln(n+2)} < \sqrt[n]{n},$ 由于 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln(n+2)} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{a}.$

当$a>1$即$0<\frac{1}{a}<1$时，原级数收敛；

当$0<a<1$即$\frac{1}{a}>1$时，原级数发散；

当$a=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$，

$\because \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty$，原级数也发散.

例4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是否收敛？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解 $\because \quad \frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$， 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散，

即原级数非绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是交错级数，由莱布尼茨定理：

$\because \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \quad =\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0,$$

$$\because \quad f(x)=x-\ln x \quad (x>0),$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}>0 \quad (x>1), \quad \therefore \quad \text{在}\,(1,+\infty)\,\text{上单增},$$

即 $\dfrac{1}{x-\ln x}$ 单减, 故 $\dfrac{1}{n-\ln n}$ 当 $n>1$ 时单减,

$$\therefore \quad u_n=\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}=u_{n+1}\ (n>1),$$

所以此交错级数收敛，故原级数是条件收敛.

例5 设 $\sum a_n$ $\sum c_n$ 都收敛 且 $a_n \le b_n \le c_n$

试证 $\sum b_n$ 收敛

证 由 $a_n \le b_n \le c_n$ 知 $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$

因 $\sum a_n$ $\sum c_n$ 都收敛

故正项级数 $\sum (c_n - a_n)$ 收敛

再由比较审敛法知 正项级数 $\sum (b_n - a_n)$ 收敛

而 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ 即

$\sum b_n$ 可表为两个收敛级数$\sum (b_n - a_n)$ $\sum a_n$ 之和

故 $\sum b_n$ 收敛

例6 设 $a_n > 0, b_n > 0$ 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

若 $\sum b_n$ 收敛 则 $\sum a_n$ 也收敛

证 由题设知 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \dfrac{a_n}{b_n} \le \cdots \le \dfrac{a_1}{b_1} \quad \Rightarrow a_n \le \dfrac{a_1}{b_1} b_n$

而 $\sum b_n$ 收敛 由比较法得 $\sum a_n$ 收敛

例7 Cauchy积分审敛法

设 $y = f(x) > 0$ 单调减少 $u_n = f(n)$ 则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散

证　由 $f(x)$ 单调减少知

$$u_{k+1} = f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) = u_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} u_k$$

即
$$S_{n+1} - S_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散

例8　设 $\{u_n\}$ 是单调增加且有界的正数数列

试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 收敛

证　记 $v_n = 1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$　则　$v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} > 0$

且　$v_n < \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_1}$

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ 的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$

又 $\{u_n\}$ 单调增加且有界　故由单调有界原理知

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$　存在　$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = A - u_1$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ 收敛　进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_1}(u_{n+1} - u_n)$ 收敛

由比较法得　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$　收敛

例9 设正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散 考察 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性

证 记 $u_n=\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 由 $\{a_n\}$ 单调减少 $a_n>0$

故由单调有界原理知 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ 存在

且 $A\geq 0$

若 $A=0$ 由Leibniz审敛法得 交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛 与题设矛盾 $\Rightarrow A>0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+A}<1$$

由检根法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛

例10　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\rho$　　$u_n>0$

证明　(1) $\rho>1\Rightarrow\sum u_n$收敛

(2) $\rho<1\Rightarrow\sum u_n$发散

(3) $\rho=1\Rightarrow\sum u_n$的敛散性不定

证(1)　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\rho>1$ 知　对　$\varepsilon<\rho-1$

$\exists N,n>N$　有　$\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}>\rho-\varepsilon=q>1$

$\Rightarrow\ln\dfrac{1}{u_n}>q\ln n$　　　$\Rightarrow\ln u_n<-q\ln n$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^q}$$ 而 $$\sum \frac{1}{n^q}$$ 收敛

故由比较法知 $\sum u_n$ 收敛

(2) 由 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \rho < 1$$ 知 $\exists N$,当$n > N$

有 $$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} < \rho + \varepsilon = r < 1$$ $$\Rightarrow \ln \frac{1}{u_n} < r \ln n$$

$$\Rightarrow \ln u_n > -r \ln n \quad \Rightarrow u_n > \frac{1}{n^r}$$

而 $\sum \frac{1}{n^r}$ 发散 故由比较法知 $\sum u_n$ 发散

(3) 如 $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n + p\ln(\ln n)}{\ln n} = 1$$

但 $p > 1$时$\sum u_n$收斂 $p \le 1$时$\sum u_n$发散

例11 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$ 的敛散性（$p>0, a$常数）

解 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a^n}{n^p}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p |a| = |a|$$

$|a|<1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a^n}{n^p}\right|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$ 绝对收敛

$|a|>1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a^n}{n^p}\right|$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$ 发散

$|a|=1$ 分情况说明

$a=1$ 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

$p>1$ 收敛 $p\le 1$ 发散

$a=-1$ 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$

$p>1$ 绝对收敛 $p\le 1$ 条件收敛

例12 对 α,β 的值，研究一般项为

$$V_n=\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$$ 的级数的敛散性

解

$$V_n=\sin[n\pi+(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi]=(-1)^n\sin(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi$$

由于当 n 充分大时，$\sin(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi$ 定号

故级数从某一项以后可视为交错级数

当$\alpha\neq$整数 无论β为何值 总有

$$\lim_{n\to\infty}|V_n|=\lim_{n\to\infty}|\sin(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi|=|\sin\alpha\pi|\neq 0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}V_n\neq 0$$ 级数发散

当$\alpha=$整数　$V_n=(-1)^{\alpha+n}\sin\frac{\beta}{n}\pi$

当$n\to\infty$时　$\sin\frac{\beta}{n}\pi$ 非增地趋于 0

由Leibniz审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ 收敛

但　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|V_n|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}|\beta\pi|\left|\frac{\sin\frac{\beta}{n}\pi}{\frac{\beta}{n}\pi}\right|=|\beta\pi|$

而　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散　故由比较法的极限形式

当$\beta\neq 0$时　$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{\beta}{n}\pi\right|$ 发散

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$ 条件收敛

$\beta = 0$ $V_n = 0$ 级数显然收敛

关于常数项级数审敛

正项级数

由级数收敛的必要条件要使 $\sum u_n$ 收敛必须

$$u_n \to 0$$

但在一般项趋于 0 的级数中为什么有的收敛有的却发散，问题的实质是级数收敛与否取决于

$u_n \to 0$ 的阶

因此从原则上讲，比较法是基础，更重要更基本，但其极限形式（包括极限审敛法）则更能说明问题的实质，使用起来也更有效

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 作为 u_n 变化快慢的一种估计　得到检比法和检根法，检比法和检根法的实质是把所论级数与某一几何级数作比较，虽然使用起来较方便但都会遇到“失效”的情况。

$$\sum |u_n| \text{收敛} \Rightarrow \sum u_n \text{收敛}$$

这一结论将许多级数的敛散性判定问题归结为正项级数的敛散性判定

注　①比较法、比较法的极限形式、检比法、检根法、积分审敛法，只能对正项级数方可使用

②检比法、检根法只是充分条件而非必要条件

③L—准则也是充分条件而非必要条件

④通项中含 $a^n, n^n, n!$ 等常用检比法

⑤通项中含有以 n 为指数幂的因子时 常用检根法

⑥使用比较法的极限形式时，关键在于找出与 u_n 同阶或等价的无穷小

如 $\sum\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

记 $u_n=\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}$ $\quad v_n=\frac{1}{n^3}$ 则 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛散

⑦当所讨论的级数中含有参数时，一般都要对参数的取值加以讨论