第8章（五）

§8.5 曲面与空间曲线

数学科学学院　卢兴江

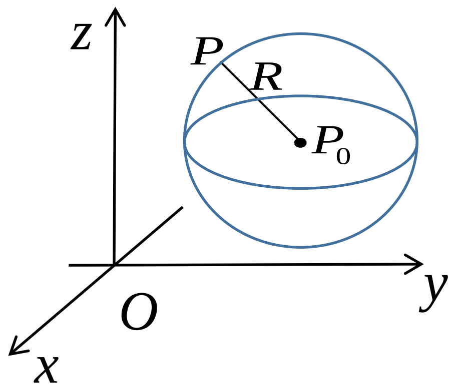
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

曲面与空间曲线

曲面

曲面方程的一般形式：$F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in V\subset R^3$

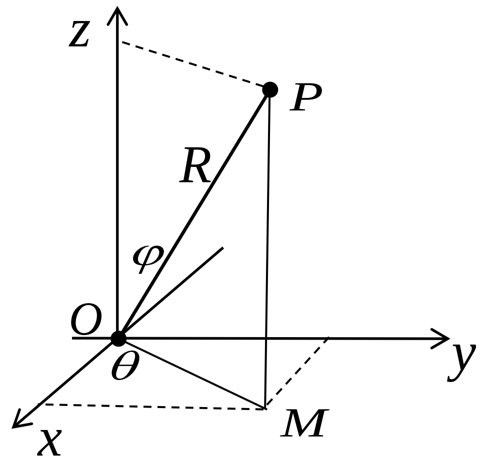
例如球面方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$



曲面方程的参数形式：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ （u,v为参数）

球心在原点半径为R的球面方程：

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\varphi \end{cases},\ \begin{pmatrix} 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta<2\pi \end{pmatrix}$$



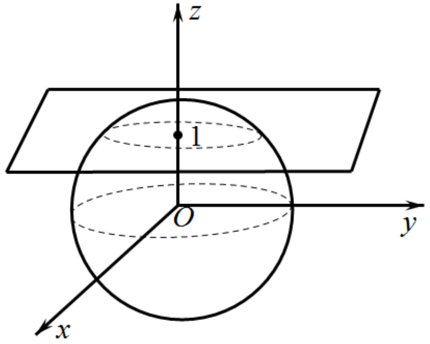
【注】参数表示不唯一.

曲面与空间曲线

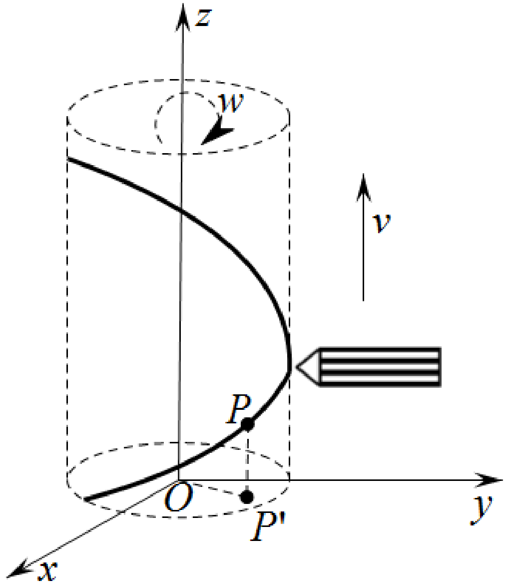
空间曲线

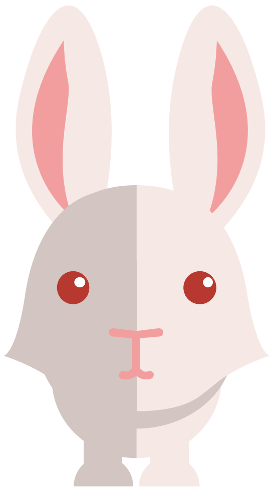
空间曲线方程的一般形式：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

例如球面与平面的交线（圆周）：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=1 \end{cases}$



空间曲线方程的参数形式：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad (t\text{为参数}) \\ z=z(t) \end{cases}$



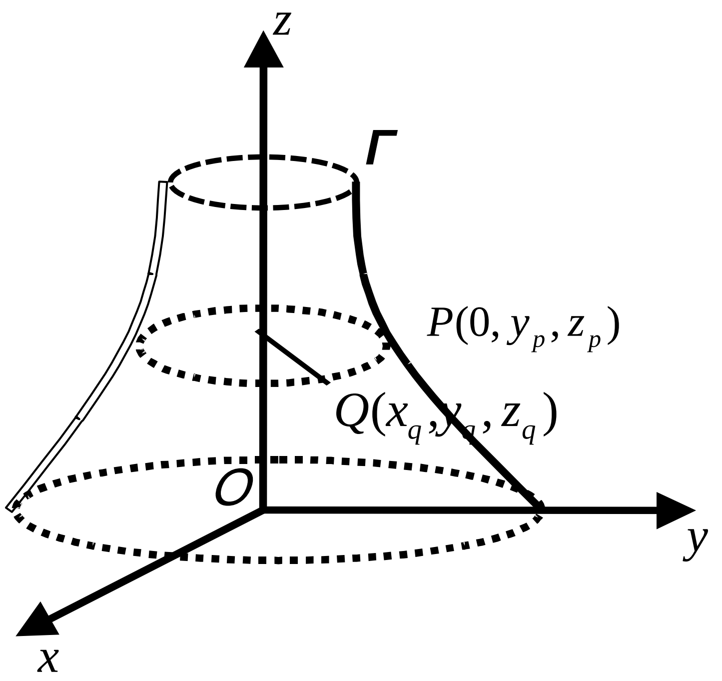


圆柱螺线的参数方程：

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \quad ,(0\le t<+\infty) \\ z=vt \end{cases}$$

旋转曲面方程

问题 求曲线Γ：$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程



设 Q 为曲面上任意一点，它必是已知曲线上某一点 P 绕 z 轴旋转而得，所以有

$$z_p = z_q,\ y_p = \pm\sqrt{x_q^2+y_q^2} \Rightarrow F(\pm\sqrt{x_q^2+y_q^2},\ z_q)=0$$

由点Q的任意性知旋转曲面的方程为： $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$

易知曲线Γ绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程为：$F(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

同理可得曲线Γ_1：$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 或 y 轴、Γ_2：$\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 或 z 轴旋转一周的曲面方程

旋转曲面方程

例 求曲线Γ: $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 z 轴和 y 轴旋转一周所得曲面的方程

解：绕 z 轴 $z = \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$，即 $z = x^2 + y^2$. **绕 y 轴** $\sqrt{x^2+z^2} = y^2$，即 $x^2+z^2 = y^4$.

例 求过点 $(1,2,0)$ 和 $(0,2,3)$ 的直线绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程

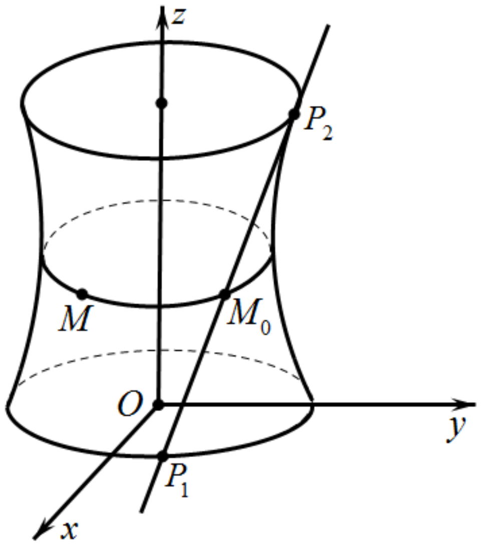
解：直线方程为 $x = 1+t,\quad y = 2,\quad z = -3t$.

曲面上任意一点 M 由直线上某点 M_0 而旋转而至，所以

设 $M(x,y,z)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则有 $z = z_0$, $x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2$

记 $z_0 = -3t_0$, 则 $t_0 = -\dfrac{z_0}{3} = -\dfrac{z}{3}$, 从而 $x_0 = 1-\dfrac{z}{3}$, $y_0 = 2$

代入得所求曲面方程为 $x^2+y^2 = \left(1-\dfrac{z}{3}\right)^2 + 4$.

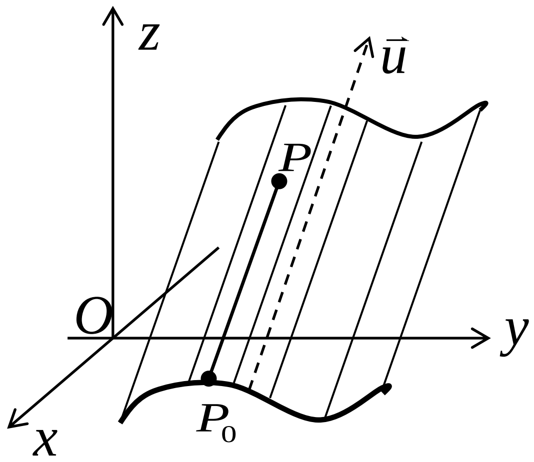


柱面方程

定义 一条直线沿某固定曲线平行移动所生成的曲面称为**柱面**。其中直线称为柱面的**母线**，固定曲线称为柱面的**准线**。

例 准线为 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线方向为 $\vec{u}=(a,b,c)\ (c\neq 0)$ 的柱面方程为

$$F\left(x-\frac{a}{c}z,\ y-\frac{b}{c}z\right)=0.$$



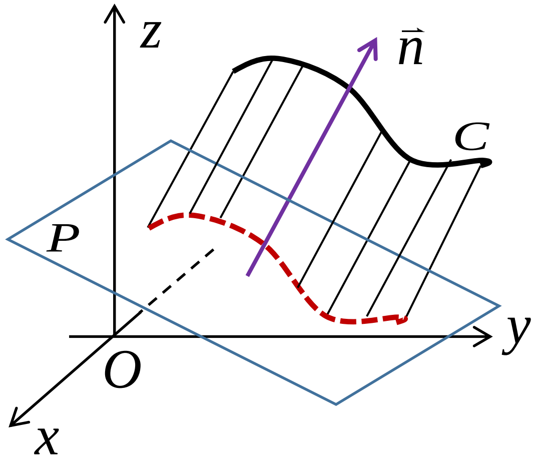
特别，若母线方向为 $\vec{u}=(0,0,1)$，则上述柱面方程为 $F(x,\ y)=0$.

$x^2+y^2=a^2$ 为圆柱面 $\left(\text{母线平行于 } z \text{ 轴，准线可取为} \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}.\right)$；

同样，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$z=y^2$ 也是母线平行于 z 轴的柱面，请分别给出一条准线。

投影柱面与投影曲线

定义 以曲线C为准线，以平面P的法向为母线方向的柱面称为曲线C到平面P的**投影柱面**；此投影柱面与平面P的交线称为曲线C到平面P的**投影曲线**。

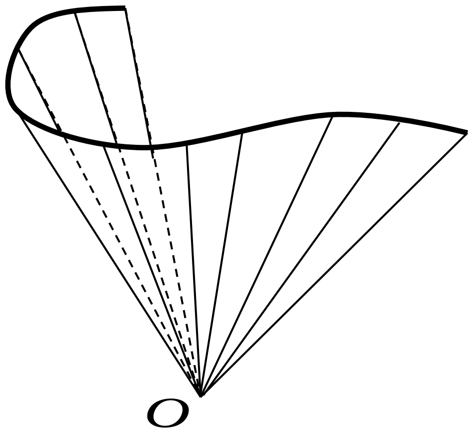


例 曲线Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 消去z 所得方程 $H(x,\ y)=0$ 即为曲线Γ到xoy平面的投影柱面；曲线$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$为曲线$\Gamma$到$xoy$平面的投影曲线。

例 曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2+(z-3)^2=16 \end{cases}$分别投影到$xoy$平面和$2x+3y+z=0$ 的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} (x-2z+6)^2+(y-3z+9)^2=16 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$.

锥面方程

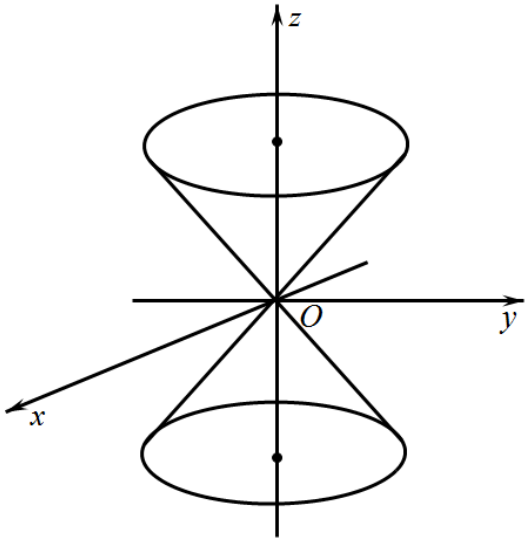
定义 过某定点的动直线沿不过此定点的曲线移动所生成的曲面称为**锥面**。其中直线称为锥面的**母线**，曲线称为柱面的**准线**，定点称为锥面的**顶点**。



例 准线为$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$，顶点为原点的锥面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$ 称为**椭圆锥面**。

特别，当$a=b$时，$x^2+y^2=\dfrac{a^2}{c^2}z^2$ 称为**圆锥面**。

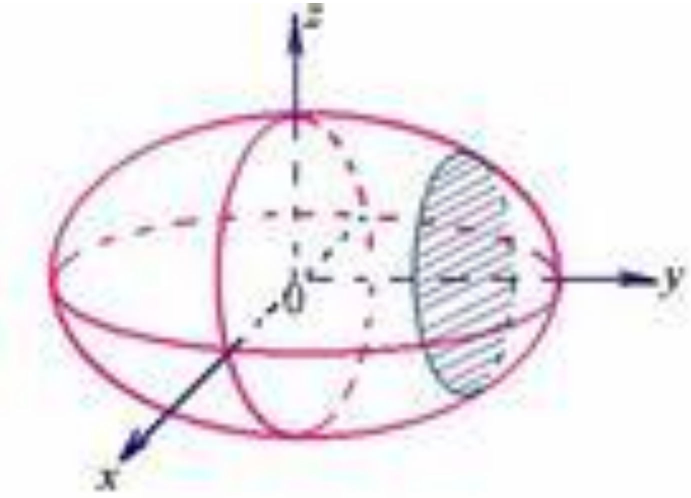


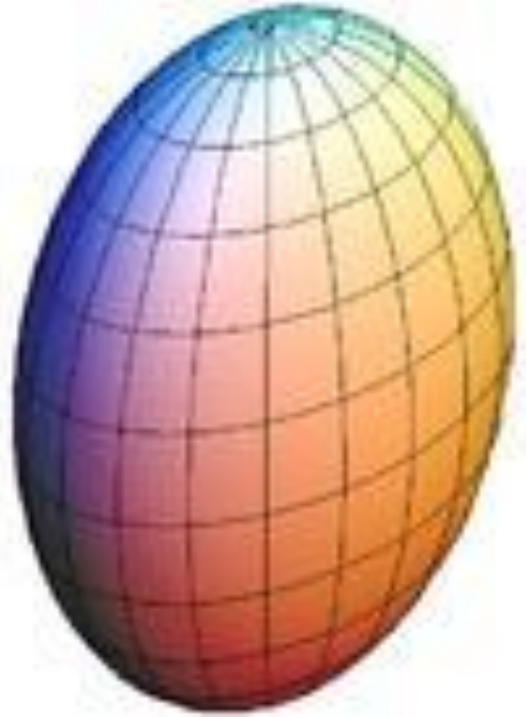
常见二次曲面的标准方程与图形

一般方程 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz+a_1x+a_2y+a_3z+a_0=0$

（1）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

- 有界性： $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c$
- 与平面 $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ 的交线（$|x_0|<a$ 等）皆为椭圆
- 当 $a=b$ 时称为旋转椭球面





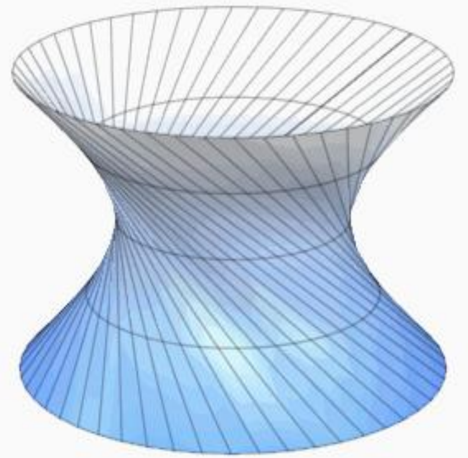
常见二次曲面的标准方程与图形

（2）椭圆抛物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

- $z \geq 0$
- 与平面 $z = z_0 > 0$ 的交线为椭圆
  与平面 $x = x_0$ 或 $y = y_0$ 的交线
  皆为抛物线
- 当 $a = b$ 时称为旋转抛物面

常见二次曲面的标准方程与图形

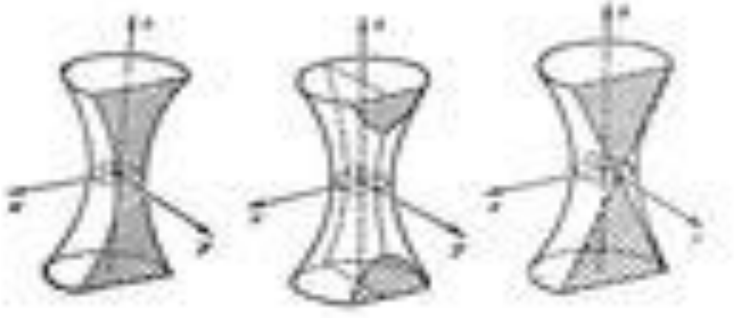
（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



- 与平面 $z=z_0$ 的交线为椭圆
- 与平面 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 的交线

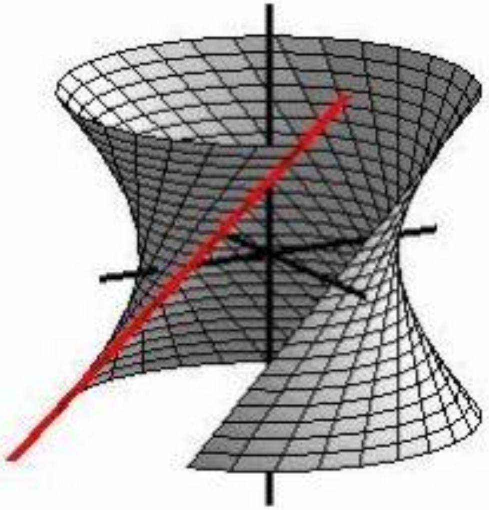
  皆为双曲线

  （与 $x=a$ 或 $y=b$ 的交线为两条相交直线）



直纹面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$

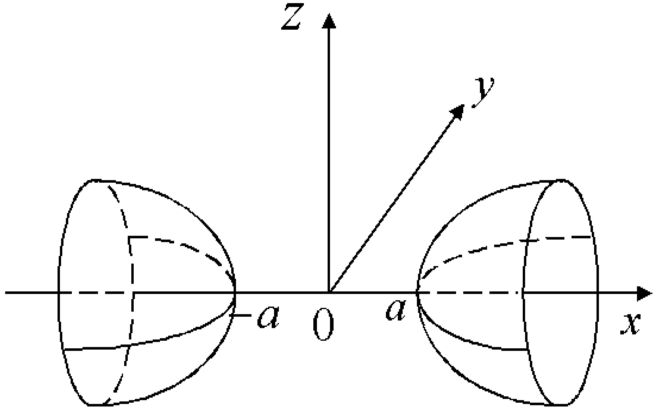
$\Leftrightarrow$ 两族直线： $\begin{cases}\lambda\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\\ \mu\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\\ \mu\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}$



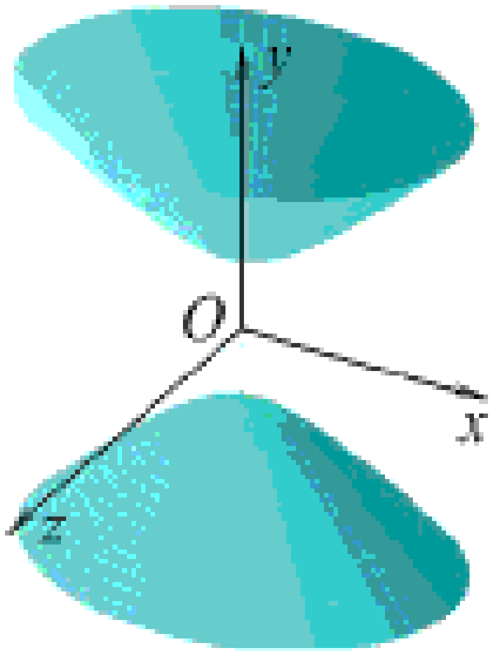
常见二次曲面的标准方程与图形

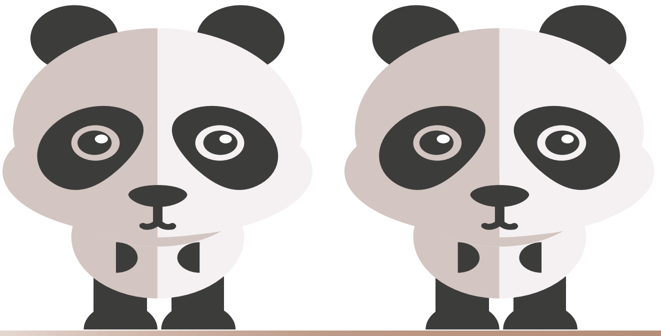
（4）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



- 与平面 $x=x_0\ (|x_0|>a)$ 的交线为椭圆
- 与平面 $y=y_0$ 或 $z=z_0$ 的交线皆为双曲线

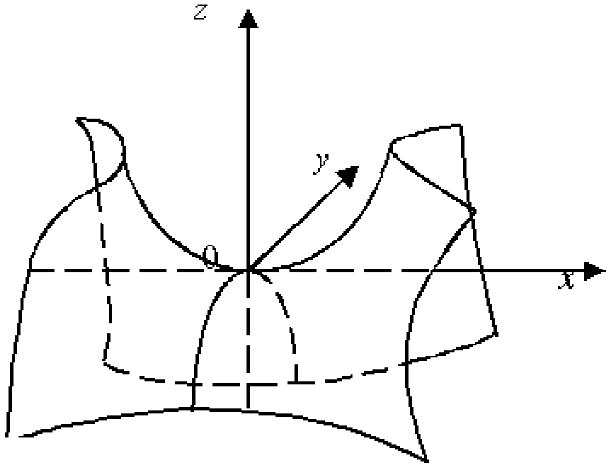




$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

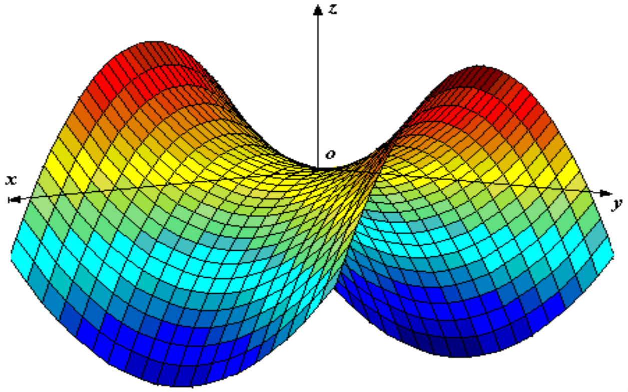
常见二次曲面的标准方程与图形

（5）双曲抛物面（马鞍面） $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$



- 与平面 $z=z_0\neq 0$ 的交线为双曲线
- 与平面 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 的交线皆为抛物线

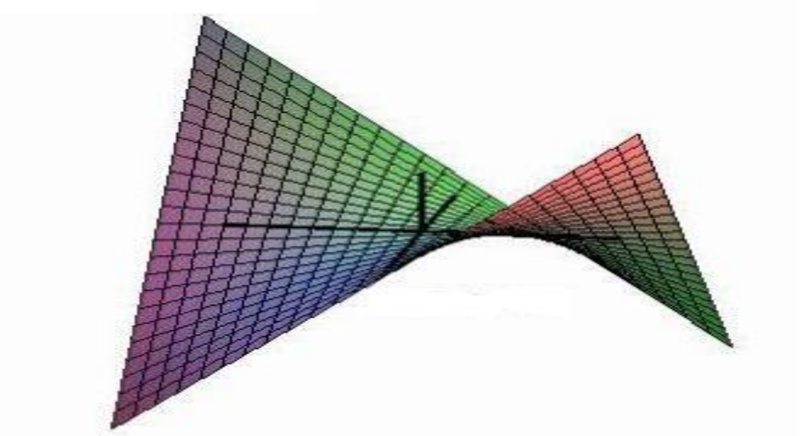
（与 $z=0$ 的交线为两条相交直线）



$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

直纹面： $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} \iff z\cdot 1=\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)$

$\iff$ 两族直线： $\begin{cases}\lambda z=\mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu=\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda z=\mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu=\lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$




谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY