有关微积分

一、定义——变量数学的基础部分，是微分学与积分学的统称（建立于17世纪后半叶）

二、产生背景

思想萌芽于公元前十七世纪，如《庄子》中有一尺之棰，日取其半，万世不竭，认为物质是连续的，无限可分的.十七世纪欧洲开始工业革命，随着资本主义发展需要解决的力学和天文学等自然科学问题很多，而力学与天文学较多地依赖于数学，所有这些问题归纳为四种问题：

1．速度与位移的互求（这类问题与研究行星运动、航海及机械运动密切相关）

2．求曲线的切线（这类问题与机械运动，天文学与航海学有关）

3．求最大、最小值问题

4．求长度、面积、体积、重心

前三类问题导致微分（导数）的概念，第四类问题导致积分的概念。

三、建立
- 牛顿（英国，从物理角度）
- 莱布尼茨（德国，从几何角度）

四、地位：人类文明的重大成果

五、为什么要（首先）学习微积分

数学体系是由逻辑构筑的，昔日重要的数学知识，是今日数学的“逻辑基础”，舍弃了前者会影响后面的学习，例如，微积分已有二百余年的历史，但今天它仍是现代数学的一块基石，另外，微积分在今天仍有较广泛的实际应用。

六、怎样学习微积分

1．数学思维
- 逻辑思维（抽象、归纳、类比、猜想、演绎）
- 非逻辑思维（想象、直觉、灵感）

2．数学三大特点：高度的抽象性，严密的逻辑性，应用的广泛性和灵活性。

七、怎样战胜微积分

独立的批判性思考，多类比、归纳、善于发现不同知识点之间的联系，及时总结，先从薄到厚，再从厚到薄！

1．花足够多的启动时间

2．（深度）预习，作业、及时复习

3．多类比，归纳、猜测

4．独立思考、不耻下问及讨论

5．阶段性总结（注意前后知识的联系）

6．抓住微分与积分这一对主要矛盾，同时注意其它矛盾

学好微积分=教科书+教师+指导书+学习策略+自主管理

八、作业
写上班级和学号
用最薄练习本（20 页以内）
题目之间空一行
及时订正

<u>实数系</u>

高等数学是在实数系(又称实数集)中研究问题的,因此,有必要对实数系作进一步的介绍.

为叙述方便,以后常用逻辑运算符号“$\exists$”表示“存在”、“有”或“找到”，称为存在量词.“$\forall$”表示“对任意的”或“对所有的”，称为全称量词.

一、实数系的完备性

众所周知，推动数系扩展的原因之一是数系的逆运算.自然数集 N 对加法和乘法运算是封闭的，即两自然数相加或相乘后仍为自然数，而对减法运算是不封闭的，如 $5+x=2$ 在自然数系中是无解；为此将自然数系扩充为整数系 Z，而整数系对除法运算是不封闭的，如$5x=2$在整数系中是无解；由此又扩展为有理数系 Q，而有理数系对开方运算又是不封闭的，如$x^{2'}=2$在有理数系中是无解，因此产生了无理数，有理数和无理数统称为实数.

在数轴上，自然数系和整数系中的相邻两数都可用间距为单位长的点表示，它们是一系列的离散点，这种特性称为

自然数系和整数系的离散性；一个有理数也可用数轴上的一个点表示，这种点称为有理点，任意两个不同的有理点r_1与r_2之间必有另一个有理点如$r_3=\frac{r_1+r_2}{2}$.可见，任意两个有理点之间必有无穷多个有理点，这个特性称为**有理数系的稠密性**；但有理点并未充满整个数轴，还存在空隙，比如，还有与原点距离为$\sqrt{2},\pi,e$的这样一些无理点存在.只有有理点和无理点的全体,也即只有实数系的全体实数才能连续地充满整个数轴,这个特性称为实数系的完备性.高等数学中的许多基本概念和理论与实数系的完备性是密切相关的,如确界概念等.

。

映射

1．映射的概念

设X和Y是两个非空集合，如果存在一个法则T，使得X中的每个元素x按法则T在Y中有唯一的元素y与之对应，那末称T为X到Y的映射,记作

$$T:X\to Y,$$

元素y称为元素x（在映射T下）的象，并记作T（x），即

$$y=\mathrm{T}(x),$$

而元素x称为元素y（在映射T下）的一个原象.

集合X称映射T的定义域，T的定义域常记作$D(T)$。X中所有元素的象所组成的集合称为映射T的值域，T的值域

常记作$R(T)$.T的值域有时也称为集合X(在映射T下)的象并记作 $T(X)$,即

$$R(T)=T(X)=\{T(x)\mid x\in X\}.$$

根据集合X、Y的不同情况,在没的数学分支中,术语“映射”有着不同的惯用名称,例如“函数”、“泛函”、“变换”、“算子”等等.如果X是非空集合,Y是一个数集(实数集或复数集),那么从X到Y的映射通常称为定义在X上的函数.我们在中学数学中所接触的函数实际是实数集(或其子集)到实数集的映射.例如,

$$\text{映射 } f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ y=f(x)=\sin x,$$

即为我们所熟悉的正弦函数.

注意,在说明一个具体的映射时,不仅要指出它是从哪个集合到哪个集合的映射,还要指出其具体的对应规则;但使用什么字母来表示所讨论的映射、集合和元素,是可以根据需要(当然也要注意习惯用法)自由选取的.

我们指出,在讨论函数时,为方便起见,常用 $y=f(x)$或$f(x)$来表示函数f,比如正弦函数可表示为$y=sin\,x$, $x\in R$.

2. 几类重要映射

设T是从集合X到集合Y的映射,若$T(X)=Y$,即Y中任一元素均是X中某元素的象,则 称T为X到Y的满射;若对任意的$x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,必有$T(x_1)\neq T(x_2)$,则称T为X到Y的单射;若T既是满射又是单射,则称T为X到Y的一一映射,或称T

为 X 与 Y 之间的一一对应.

有关数学的严密逻辑性(仅供自己欣赏)

一、问 31、331、3331、33331、333331、3333331、33333331 是素数吗？下一个也是吗？

经过仔细的探究，数学家们证明了上述六个自然数都是素数，那么是不是这种形式的数都是素数呢？下一个数 333333331 就不是，它可以被分解为 17 乘以 19607843，因此 333333331 不是质数

二、Fermat 数

所谓 Fermat 数就是形如

$$F_n = 2^{2^n} + 1, n = 0,1,2,\cdots$$

的自然数，因 F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 均为素数 Fermat 1665 年断言，F_n 必为素数。

由费尔马小定理，F_n 的素因子 q 具有形式：$q = k \cdot 2^{n+1} + 1$, 据此，

欧拉在 1732 年把 F_5 分解成

$$F_5 = 641 \times 6700417, 641 = 10 \times 10^6 + 1$$

朗通利于 1880 年得到（$\bar{q} = k \cdot 2^{n+2} + 1$）

$$F_6 = \quad 274177 \times 67280421310721$$

已知的最大合数是 F_{23471}，与费尔马猜测完全背离的是：n≥5 以后，F_n 中一个素数也没发现

三、费马大定理的延伸

费马大定理之后，欧拉也提出过一个猜想，即不可能将一个高于 2 次的幂写成三个同样次幂的和。二百多年来没有人能证明这一猜想，后来用计算机细查，仍未找到解，没有反例是这个猜想成立的有力证据，但谨慎的数学家是不会因此而承认欧拉猜想的。果然，1988 年，哈佛大学的内奥姆发现了一个解：2682440 的 4 次幂加 15365639 的 4 次幂加 18796760 的 4 次幂，等于 20615673 的 4 次幂，即：

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

这说明方程 $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ 有正整数解，即至少对于四次幂，欧拉的猜想是不成立的！