第12章（二）
第二类曲面积分

数学科学学院　卢兴江

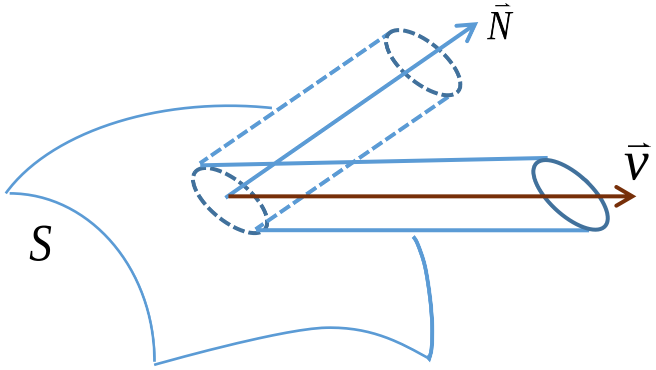
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

流速场通过曲面的流量

设不可压缩流体的密度为 $\rho(x,y,z)$，流速为 $\vec{v}(x,y,z)$，求单位时间内从曲面 S 指定侧流过的**流量**。

流（通）量密度 $\vec{f}(x,y,z)=\rho(x,y,z)\,\vec{v}(x,y,z)$

$$\mathrm{d}I=\left(\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{N}^0\right)\mathrm{d}S \quad\Rightarrow\quad I=\pm\iint_S\left(\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{N}^0\right)\mathrm{d}S \triangleq \iint_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$



即流量为 $$I=\pm\iint_S\left(\vec{f}\cdot\vec{N}^0\right)\mathrm{d}S=\pm\iint_T\left(\vec{f}(\sigma(u,v))\cdot\vec{N}^0\right)\left|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 1 计算 $I=\iint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$， 其中 $\vec{A}=(yz,\ xy,\ zx)$，S 是 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分，上侧.

解： $$I=\iint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint_S (yz,\ xy,\ zx)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\mathrm{d}S=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}[(x+y)(1-x-y)+xy]\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.$$

第二类曲面积分

设 $\vec{N}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, $\quad \vec{f}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$, 那么

因为 $\quad \cos\alpha\, \mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \cos\beta\, \mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}x,\quad \cos\gamma\, \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ 所以有

$$\iint_S \vec{f}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)\mathrm{d}S = \iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

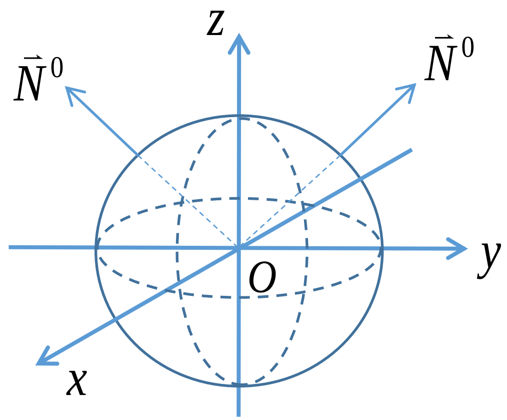
$$= \pm\iint_{D_{yz}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ \pm \iint_{D_{zx}} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \ \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义 设 S 是分片光滑曲面, $\vec{N}^0$ 为 S 的单位法向量, $\vec{f}(x,y,z) = \big(P,\ Q,\ R\big)$ 为 S 上的有界连续向量场, 称积分

$$\iint_S \vec{f}\cdot \vec{N}^0 \mathrm{d}S = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 为 **第二类曲面积分**.

第二类曲面积分举例

例 2 计算 $I=\oiint\limits_S (x+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$，外侧。



解：因球面的外法向量在"左半球$\left(y=-\sqrt{a^2-x^2-z^2}\right)$"和"右半球$\left(y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}\right)$"与轴的正向夹角分别为钝角和锐角，所以有

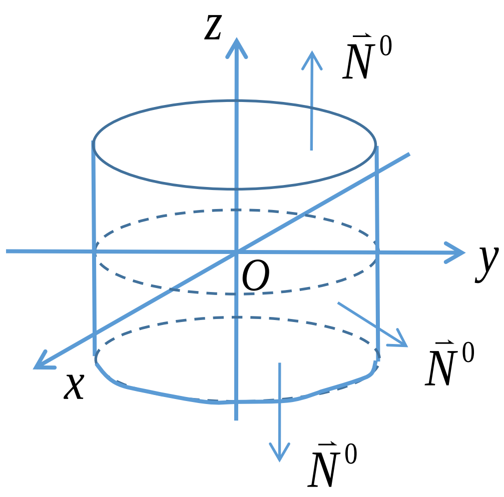
$$\oiint\limits_S (x+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint\limits_{x^2+z^2\le a^2}\left(x-\sqrt{a^2-x^2-z^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{x^2+z^2\le a^2}\left(x+\sqrt{a^2-x^2-z^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\iint\limits_{x^2+z^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

第二类曲面积分举例

例 3 计算 $I=\oiint\limits_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是 $x^2+y^2=a^2$ 及 $z=\pm a$ 围成的表面，外侧。

解：S 分为“上底”、“下底”和“柱面”，分别记为 $S_{上}$，$S_{下}$ 和 $S_{柱}$.



记外法向量为 $\vec{N}^0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$， 那么对 $S_{上}$，$S_{下}$，$\cos\alpha=\cos\beta=0$.

有 $\iint\limits_{S_{上}}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_{下}}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0.$ 而 $\iint\limits_{S_{上}}\dfrac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{S_{下}}\dfrac{z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0.$

对 $S_{柱}$，$\cos\gamma=0$. 有 $\iint\limits_{S_{柱}}\dfrac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$. 再由 $\vec{N}^0$ 与 x 轴正向的夹角关系得

$$\iint\limits_{S_{柱}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\substack{-a\le y\le a\\-a\le z\le a}}\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\substack{-a\le y\le a\\-a\le z\le a}}\frac{-\sqrt{a^2-y^2}}{a^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a^2+z^2}\mathrm{d}z=\frac{\pi^2a}{2}.$$ 即 $I=\dfrac{\pi^2a}{2}$.


谢谢！
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY