第11章（一）
第一类曲线积分

浙江大学数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

曲线的表示

参数曲线

$$C\subset R^3:\ \begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t),\quad t\in[a,b] \\ z=z(t)\end{cases}\quad 或\quad \alpha:[a,b]\to\alpha(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big).$$

$\alpha(a)$: 曲线起点； $\alpha(b)$: 曲线终点.

若 $\alpha(a)=\alpha(b)$, 则为闭曲线. 若 $z(t)\equiv 0$, 则为平面曲线.

- **曲线的参数表示不唯一**

例如四分之一单位圆的参数表示:

(1) $\alpha:[0,1]\to R^2$, $\alpha(t)=t\,\vec{i}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}$.

(2) $\beta:[0,1]\to R^2$, $\beta(t)=t^2\,\vec{i}+\sqrt{1-t^4}\,\vec{j}$.

(3) $\gamma:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to R^2$, $\gamma(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$

定义（**参数表示的等价性**）设 $\alpha:[a,b]\to R^3$， $\beta:[c,d]\to R^3$ 为曲线 C 的两个参数表示， 若存在函数 $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ 满足 (1) φ 在 (a,b) 上连续可导，且 $\varphi'(t)>0,\ t\in(a,b)$;

(2) $\varphi(a)=c,\ \varphi(b)=d$; (3) $\alpha(t)=\beta[\varphi(t)],\ t\in[a,b]$.

则称 C 的参数表示 α 和 β 是**等价**的。

曲线及其弧长

定义 设 $\alpha:[a,b]\to R^3$， $\alpha(t)=\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$.

(1) α 的**图像**： $C=\{\alpha(t)\,|\,t\in[a,b]\}$；

(2) 若 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则称 C 为**连续曲线**；

(3) 若 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上导函数连续，则称 C 为**光滑曲线**；

(4) 若 C 连续且由有限多个光滑曲线“连接”而成，则称 C 为**分段光滑曲线**.

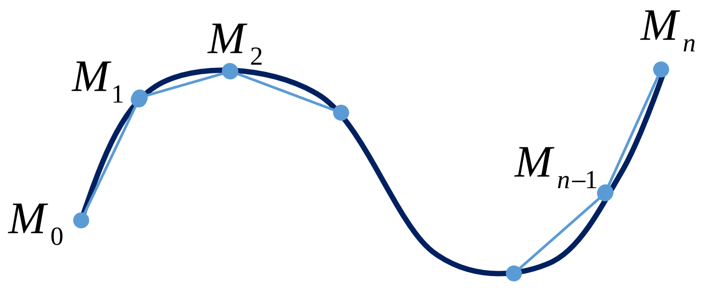
弧长

$$\alpha(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\quad t\in[a,b]$$

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

$$L\approx S_P=\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$$ 其中 $M_i\big(x(t_i), y(t_i), z(t_i)\big), i=0,1,2,\cdots,n.$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}$$



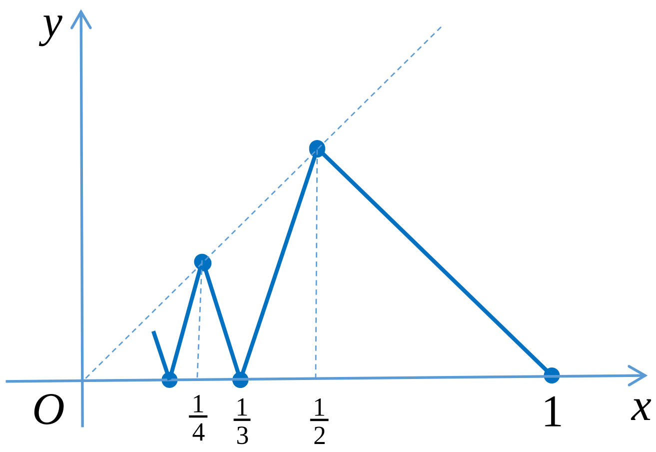
曲线及其弧长

定义 若对曲线 $\alpha:[a,b]\to R^3$， $\alpha(t)=\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$ 的任意分割 P，S_P 有上界，则称曲线是**可求长**的，否则称为**不可求长**的.

不可求长曲线例子

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x=0 \text{ 或 } x=\frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{2n}, & \text{当 } x=\frac{1}{2n} \\ -(2n-1)x+1, & \text{当 } \frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2n-1} \\ (2n+1)x-1, & \text{当 } \frac{1}{2n+1}<x<\frac{1}{2n} \end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$



定理 若对曲线 $\alpha:[a,b]\to R^3$， $\alpha(t)=\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$ 是分段光滑曲线，则此曲线是可求长的，且其弧长为 $L=\int_a^b|\alpha'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$

曲线的弧长与参数表示的选取无关

【注】当 $z(t)\equiv 0$ 时为平面曲线情形

弧长微分

空间曲线

若曲线 $L=\{(x(t),y(t),z(t))|t\in[a,b]\}$ 是 $\mathbb{R}^3$上的光滑曲线，则此曲线的弧长微分公式为

$$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\cdot$$

平面曲线

特别地，如果曲线是xoy平面内的曲线，根据曲线的直角坐标表示、极坐标表示和参数方程表示，其弧长微分公式分别为：

$$ds=\begin{cases}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.\ \text{其中 } y=y(x),\ x\in[x_1,\ x_2];\\ \sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta.\ \text{其中} x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta,\ \ \theta\in[\theta_1,\ \theta_2];\\ \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.\ \text{其中 } x=x(t),y=y(t),\ t\in[t_1,\ t_2];\end{cases}$$

例 1

求曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长.

第一类曲线积分的概念

定义 设 C 是 R^3 的分段光滑曲线， $f: C \to \mathrm{R}$ 为连续的数量场，α： $[a,b] \to \mathrm{R}^3$ 是C的一个参数表示，

称积分 $\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y,z)|\alpha'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

为 f 沿着曲线 C 的**弧长积分**，也称为**第一类曲线积分**.

- $\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f[\alpha(\xi_i)]|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})|$， $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}|t_i - t_{i-1}|$
- 若 $f(x,y,z)$ 为 C 在 (x,y,z) 处的密度，则 $\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 为质线的质量.
- 若 C 是平面曲线， 则 $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$
- （反向曲线）若 C 的参数表示为 $\alpha: [a,b]\to R^3$， 称 $\alpha^-: [a,b]\to R^3$，$\alpha^-(t)=\alpha(a+b-t)$

  为 C 的**反向曲线**，记为 C^-. 易知 $\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{C^-} f(x,y,z)\mathrm{d}s$.

第一类曲线积分的性质

性质一 如果曲线 L 有两个等价的参数表示，则由这两个参数表示得到的弧长积分是相等的，也就是说，弧长积分与参数表示的选取无关.

性质二 弧长积分的值与曲线的走向（从端点 A 到端点 B，还是从端点 B 到端点 A）无关，（参数范围）积分上限大于积分下限.

性质三 (线性性) 设 f, g 为 L 上的数量场(函数)，$k_1, k_2 \in \mathrm{R}$ ，则

$$\int_L (k_1 f + k_2 g)\, ds = k_1 \int_L f\, ds + k_2 \int_L g\, ds.$$

性质四 (有限可加性) 设 L 由分段光滑的子曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 首尾相连而成，则

$$\int_L f\, ds = \int_{L_1} f\, ds + \cdots + \int_{L_n} f\, ds\ .$$

第一类曲线积分的性质

性质五

(非负性) 若 f 在 L 上非负，则 $\int_L f ds \geq 0$.

由此可得：在C上 $f \geq g \Rightarrow \int_C f\ \mathrm{ds} \geq \int_C g\ \mathrm{ds}$ ；　$\left|\int_L f ds\right| \leq \int_L |f| ds.$

性质六

（中值定理）若 f 在包含 C 的开集上连续，C为分段光滑曲线，

则 $\exists \xi \in C$ 使 $\int_C f\ \mathrm{ds} = f(\xi) \cdot l\ (C$ 的弧长$)$.

例 2

(1) 求 $\int_C z\ \mathrm{ds}$, 其中 C： $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\quad t \in [0, a]$.

(2) 求 $\int_C (x+y)\ \mathrm{ds}$, 其中 C 为以 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$ 为顶点的三角形一周.

(3) 求密度为 ρ_0 的匀质摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 一拱绕 x 轴的转动惯量.


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY