第10章（五）
三重积分的变量替换

浙江大学数学科学学院 卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

三重积分的一般变量替换

定理 设变换 $x=g_1(u,v,w),\ \ y=g_2(u,v,w),\ \ z=g_3(u,v,w),\ (u,v,w)\in H$ 满足

(1) $g_i\ (i=1,2,3)$在含 H 的开集上有连续偏导数；

(2) $H\to$ 有界闭集 $V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x=g_1(u,v,w),\ \ y=g_2(u,v,w),\ \ z=g_3(u,v,w),\ (u,v,w)\in H\right\}$ 为一一对应的；

(3) 在 H 内变换的雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial w}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial w}\\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$

则当 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续且可积时，有

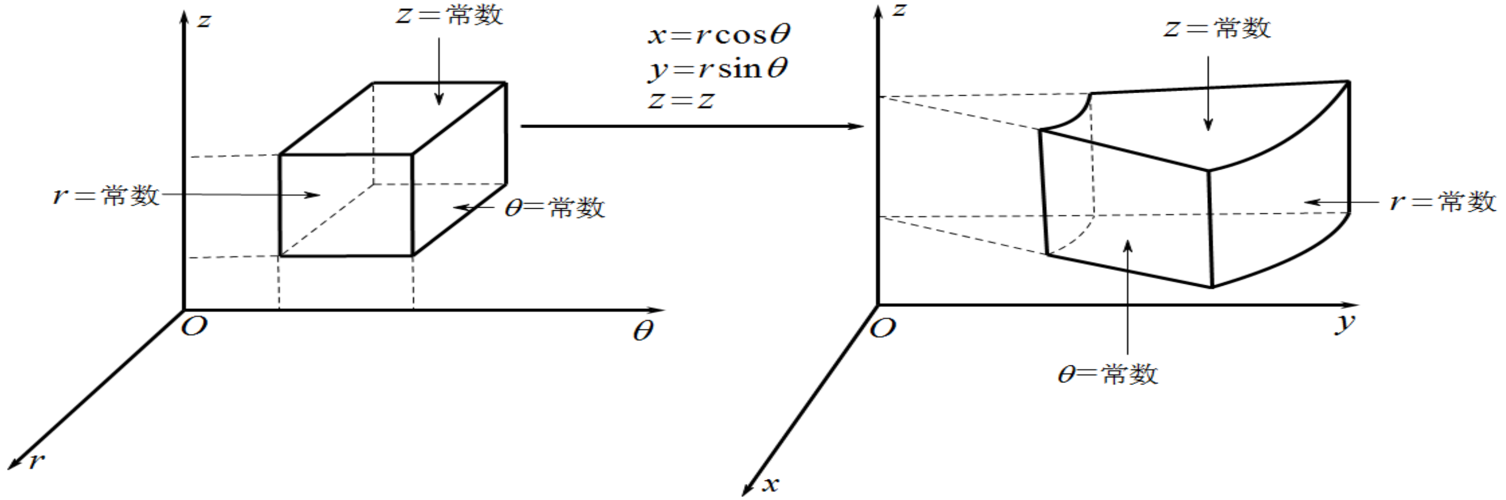
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_H f\left[g_1(u,v,w),\ \ g_2(u,v,w),\ \ g_3(u,v,w)\right]\cdot|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\,.$$

三重积分在柱面坐标系下的计算

柱面坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z,\ (r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$

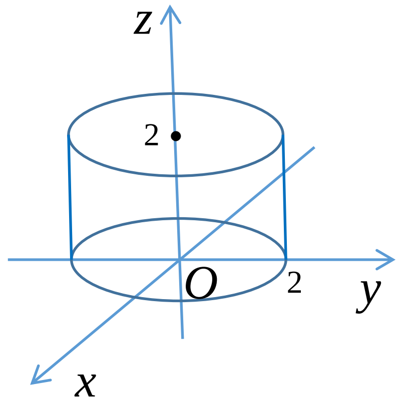
此时 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r,$ 所以有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_H f\left[r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z\right]\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,.$$



三重积分在柱面坐标系下的计算

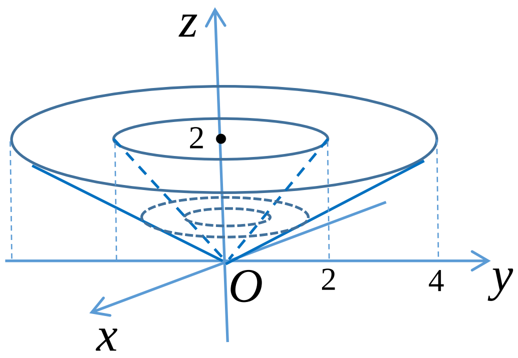
例 1 计算 $\iiint\limits_V (x^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$ 由 $z=0, z=2$ 和 $x^2+y^2=4$ 围成.



解 积分区域为圆柱体的一部分（如图），所以由柱面坐标变换得

$$\iiint\limits_V (x^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_0^2 (r^2\cos^2\theta+z)\mathrm{d}z=8\pi .$$

例 2 用柱面坐标系表示三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V$，其中$V$ 由 $x^2+y^2=z^2$，$x^2+y^2=4z^2$ 和 $z=2$ 围成.



解 积分区域为两个锥面和一个平面围成（如图），所以

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{\frac{r}{2}}^{r} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r\mathrm{d}r\int_{\frac{r}{2}}^{2} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z .$$

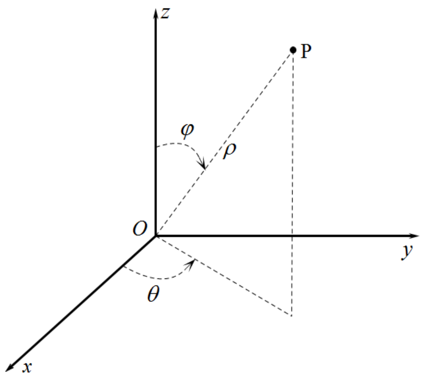
或 $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_z^{2z} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r.$$ （截面法）

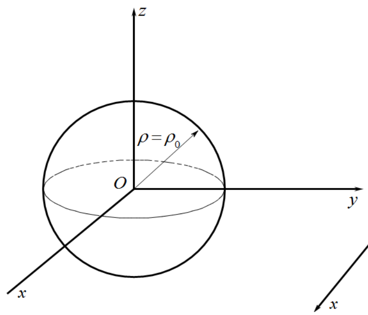
三重积分在球面坐标系下的计算

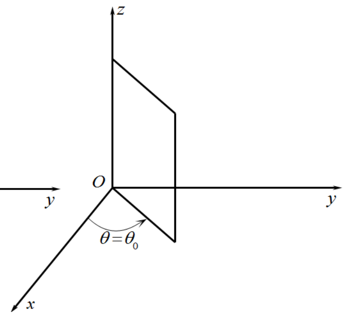
球面坐标变换 $x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=\rho\cos\varphi.\ \ \rho\geq 0, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi.$

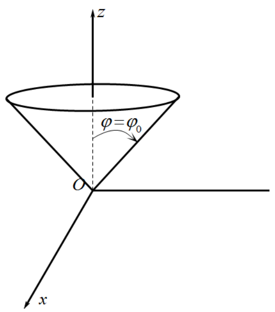
此时 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi,$ 所以有

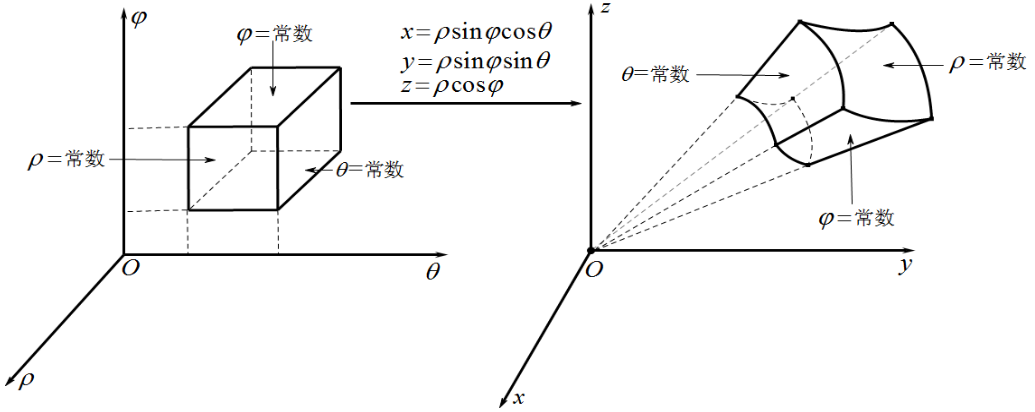
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_H f\left[\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi\right]\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\,.$$







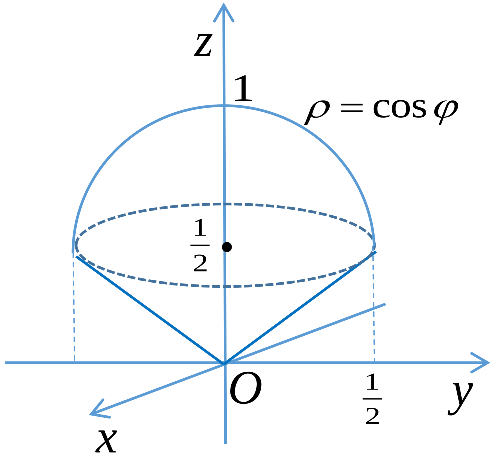




三重积分在球面坐标系下的计算

例 3 计算球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的体积： **解** $V=\iiint\limits_V 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi R^3$.

例 4 计算 $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$， 其中$V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le z,\ x^2+y^2\le z^2\right\}$.

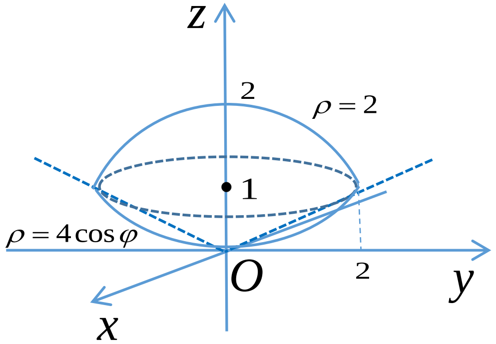


解 积分区域由球面和锥面围成（如图），所以

$$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}\rho\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{10}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

例 5 用球面坐标系表示三重积分$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V$,其中

$$V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2+z^2\le 4z\right\}.$$



解 $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho.$

谢谢！

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY