期末复习题五

2019年12月21日 星期六 下午5:08

一、计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$ 84

二、设A是r阶可逆矩阵，B,C,D为相关矩阵使得 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 为m×n矩阵，E_r，E_{m-r}，E_{n-r}为单位矩阵

(1) 试求(m-r)×r矩阵X和r×(n-r)矩阵Y使得下面两式成立

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & F_1 \end{pmatrix} \qquad X = -CA^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & Y \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & F_2 \end{pmatrix} \qquad Y = -A^{-1}B$$

并求出F_1和F_2 $\quad F_1 = D - CA^{-1}B \quad F_2 = D - CA^{-1}B$

(2) 当m=n时，化 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ 为较低阶的行列式的积

三. (1) 已知矩阵A满足 $(A-E)^2 = 2(A+E)^2$，求 A^{-1} A可逆； $A^{-1} = A - 6E$

(2) 已知矩阵A满足 $2A^2+3A-3E=O$，求证(A+2E)可逆，并且求出 $(A+2E)^{-1}$

$(2A-E)(A+2E)=E \quad \therefore r(A+2E)=r(E) \quad 2A-E$

四. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 是n维线性空间V的一组基，向量组 $\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_n$ 有

$\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_1+\alpha_2, \cdots \beta_n=\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_n$ (1) $\beta_1 \sim \beta_n$ 在α基下坐标 r(B)

(1) 求证向量组 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 也是线性空间V的一组基 ∴线性无关 $=n$ $=r$ $=\dim V$

(2) 求基 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 的过渡矩阵

(3) 在V中求在基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 和基 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 下具有相同坐标的向量α

(3) $[a, 0, 0, \cdots, 0]^T = \alpha$

(3) 在V中求在基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$和基$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$下具有相同坐标的向量$\alpha$

五. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，如果$\eta$是线性方程组$Ax=b$的一个解，求线性方程组$Ax=b$的通解

六. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，且$\lambda=2$是$A$的二重特征值，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵

七、设实二次型$f(x_1,x_2\cdots,x_n)=X^TAX$，证明：在条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$下，$f$的最大值恰是该二次型的矩阵$A$的最大特征值。

八、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为5个5元向量，$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)_{5\times5}$，甲乙两人都对$A$实施了有限次初等变换如下

$$A\xrightarrow[\text{等变换}]{\text{有限次初}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&1\\0&2&0&0&4&8\\0&0&0&3&6&11\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所不同的是：甲只使用了初等行变换，而乙既使用了初等行变换也使用了初等列变换。基于上述初等变换过程，甲乙都得出$r(A)=3$且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一组极大线性无关组。请判断甲乙两人是否正确，请说明详细理由。