解: 由于 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 根据均值不等式, 有

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}}.$$

因此

$$xyz\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}abc,$$

等号在 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}, y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}, z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ 时成立.

所以, 当 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}, y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}, z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ 时, xyz 取最大值 $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}abc$.

第 0 章习题

习题 0.1

1. 判断下列所给关系是否正确, 并说明理由:

(1) 设 $A=\{1\}, B=\{1,2\}$:

(a) $A\subset B$, (b) $A\in B$, (c) $1\in A$, (d) $1\subset B$;

(2) 设 $A=\{1,2\}, B=\{\{1\},\{2\}\}, C=\{\{1\},\{1,2\}\}, D=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$:

(a) $A=B$, (b) $A\subset B$, (c) $A\subset C$, (d) $A\in C$, (e) $A\subset D$,

(f) $B\subset C$, (g) $B\subset D$, (h) $B\in D$, (i) $A\in D$.

2. 设集合 $S=\{1,2,3,4\}$, 列出 S 的所有子集.

3. 设 $A=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{R}, x(x^2-1)(x-2)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)(x-7)=0\right\}$, $B=\mathbb{N}$, $C=\mathbb{Z}_+$, $D=\mathbb{Q}$. 求 $A\cup B$, $A-C$ 及 $A\cap D$.

4. 设 $A=\{x|x\in\mathbb{R}, 1\leqslant x<3\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{R}, \dfrac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$, 求 $A\cup B$, $A\cap B$ 及 $A-B$.

5. 设 A,B,C 为集合, 用草图说明 (验证) 以下集合运算的正确性:

(1) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$;

(2) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$;

(3) $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(4) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$;

(5) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$;

(6) $A-(A-B)=A\cap B$.

6. 证明以下等式:

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(3) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(4) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

7. 等式 $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件是什么?

8. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{u,v\}$, 写出 $A\times B, A^2, B^2$.

9. 设 $A=\{x|x\in\mathbb{R},0\leqslant x\leqslant 1\}$, 写出 A^3.

10. 下面三个等式指出笛卡儿积对三种运算 "$\cup,\cap,-$" 都服从分配律, 试证之:

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

(3) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

11. 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, 试问下面哪些法则 f 定义了从 A 到 B 内的一个映射? 为什么?

(a) $f(1)=b$, $f(2)=c$, $f(3)=d$;

(b) $f(2)=a$, $f(3)=b$, $f(4)=c$, $f(1)=d$, $f(2)=e$;

(c) $f(2)=d$, $f(4)=a$, $f(3)=b$, $f(1)=e$;

(d) $f(1)=a$, $f(2)=a$, $f(3)=c$, $f(4)=d$.

12. 设 $A=\{x,y,z\}$, $B=\{0,1\}$, 试列出所有的从 A 到 B 的映射, 共有多少个?

13. 试找出下列 $f:A\to B$ 映射中的单射、满射、双射. 对双射, 写出其逆映射:

(1) $A=\mathbb{R}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|x\geqslant 0\}$, $f(x)=x^2$;

(2) $A=B=\mathbb{Q}$, $f(x)=x+c$, 其中 c 是一个有理数;

(3) $A=\{x\in\mathbb{R}|0\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|0\leqslant x\leqslant 2\}$, $f(x)=2x$;

(4) $A=B=\mathbb{Z}$, $f(x)=x^3$.

14. 设 $\mathbb{Z}_+$ 是正整数全体, $A=\{2,4,6,8,\cdots\}$ 是正偶数全体, 试作一映射 $f:\mathbb{Z}_+\to A$ 使之成为双射, 再写出该映射的逆映射.

15. 设 $\mathbb{Z}_+$ 是正整数全体, $\mathbb{Z}$ 是整数全体, 试构造一个映射 $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}$ 使之成为双射.

16. 设 A,B 都是有限集合, 且 A 的元素个数为 n, B 的元素个数为 m, 试在下面三种情况下分别确定 n 与 m 的大小关系:

(1) 存在一个单射 $f:A\to B$;

(2) 存在一个满射 $f:A\to B$;

(3) 存在一个双射 $f:A\to B$.

17. 设 $A=B=C=\{a,b,c,d\}$, $f:A\to B$, $g:B\to C$ 如下:

$$f(a)=b,\quad f(b)=c,\quad f(c)=d,\quad f(d)=a;$$
$$g(a)=b,\quad g(b)=b,\quad g(c)=c,\quad g(d)=c.$$

试写出复合映射 $g\circ f:A\to C$.

18. 设 $A=\{x\in\mathbb{R}|-1\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|0\leqslant x\leqslant 2\}$, $C=\{x\in\mathbb{R}|-1\leqslant x\leqslant 2\}$. 映射 $f:A\to B$ 及 $g:B\to C$ 分别定义为 $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$, 试写出复合映射 $g\circ f:A\to C$.

19. 设 A, B 是两个非空集合, $A\times B$ 是积集, 记 $p_1: A\times B\to A$, $p_1(x,y)=x$; $p_2: A\times B\to B$, $p_2(x,y)=y$ 为两个投影, 证明: p_1, p_2 都是满射. 问: p_1 是单射的充要条件是什么? p_2 是单射的充要条件是什么?

20. 证明: $\sqrt{2}$ 是无理数.

21. 若正整数 p 不是完全平方数, 证明: $\sqrt{p}$ 为无理数.

22. 若 p, q 为互异的素数, 证明: $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ 为无理数.

习题 0.2

23. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{|x|-x}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x-1|-2}}$;

(3) $f(x)=\ln\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$;　　(4) $f(x)=\arccos(2^x-3)+\ln(\ln x)$.

24. 求下列函数的反函数, 并指出反函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x>0$;　　(2) $f(x)=\sqrt{4-x^2},\quad -2\leqslant x\leqslant 0$;

(3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1},\quad x\neq -1$;　　(4) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ -x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -x^3, & x>1; \end{cases}$

(5) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}},\quad -\infty<x<+\infty$.

25. 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

26. 分析下列函数的单调性:

(1) $f(x)=2x^2,\quad x\in(-\infty,0)$;　　(2) $f(x)=x^3,\quad x\in\mathbb{R}$;

(3) $f(x)=\dfrac{|x|-x}{2},\quad x\in\mathbb{R}$;　　(4) $f(x)=x^2-2x+1,\quad x\geqslant 1$.

27. 分析下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ (a 为常数, 且 $a>0$);

(2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $f(x)=|x|+x$;

(4) $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

28. 证明下列结论:

(1) 两个偶函数的乘积是偶函数;

(2) 两个奇函数的乘积是偶函数;

(3) 一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

29. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 证明 f 可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和, 且表示法唯一.

30. 证明不存在定义在 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的偶函数.

31. 设 f,g,h 均为 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数, 且满足

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(f(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant h(h(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

32. 若函数 f,g 在定义域 D 上有界, 证明: $f+g, f-g, f\cdot g$ 也在 D 上有界.

33. 试问: 是否存在两个无界函数, 但它们的乘积是有界函数?

34. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

35. 设 f,g 均为 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 试问: $f+g$ 是否为 $\mathbb{R}$ 上的周期函数? 为什么?

36. 写出下列周期函数在 $[0,2\pi]$ 上的表达式:

(1) $f(x)=\arcsin(\sin x)$;

(2) $g(x)=\arccos(\cos x)$.

37. 证明关于取整函数 $y=[x]$ 的如下不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $1-x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant 1$;

(2) 当 $x<0$ 时, $1 \leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right] < 1-x$.

38. 设 $a,b\in\mathbb{R}$, 证明:

(1) $\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$;

(2) $\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

39. 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x$, 求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$.

40. 将下列函数分解成基本初等函数的四则运算和复合:

(1) $f(x)=\arccos[\cos^2(\mathrm{e}^x+\ln x)]$;

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2+2\sin x}$;

(3) $f(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}$;

(4) $f(x)=\cot\sqrt[x]{x}$;

(5) $f(x)=\log_a\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\mathrm{e}^{\tan x^2}(a>0, a\neq 1)$.

习题 0.3

41. 画出以下极坐标方程表示的曲线草图:

(1) $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$;

(2) $r=1-\cos\theta$;

(3) $r=\sin 2\theta$;

(4) $r=4\cos 3\theta$;

(5) $r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$.

42. 将以下直角坐标方程表示的曲线化为极坐标方程:

(1) $x+2y-1=0$; (2) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^3=xy\ (a>0,b>0)$;

(3) $x^2+(y-4)^2=16$; (4) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$.

43. 证明柯西不等式:

对于任意 $2n(n\in\mathbb{N}_+)$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;\ b_1,b_2,\cdots,b_n$, 有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

等号成立当且仅当存在常数 λ,μ 使得 $\lambda a_i+\mu b_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

44. 证明伯努利不等式:

对于任意正整数 n 和实数 $a\in[-1,+\infty)$, 有

$$(1+a)^n\geqslant 1+na.$$

45. 已知 $x^2+y^2=1$, 求 $z=x^2+y^2+2x+y+1$ 的最大值与最小值.

46. 设正数 x,y,z 满足 $3x+4y+5z=1$.

(1) 求证: $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{50}$;

(2) 求 $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}$ 的最小值.

47. 设 $x,y\in\mathbb{R}$, 求 $(x-y)^2+(2x-5)^2+4y^2$ 的最小值.

48. 求函数 $y=\sqrt{x^2-8x+25}+\sqrt{x^2+2x+5}$ 的最小值.

49. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ 为全体正实数的集合), 证明:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|,$$

并说明此不等式的几何意义.

50. 设曲线 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$, $p>0$, 验证

(1) 当 $0<e<1$ 时为椭圆;

(2) 当 $e=1$ 时为抛物线;

(3) 当 $e>1$ 时为双曲线.

【注】 椭圆、抛物线和双曲线可以统一定义为: 与一个定点 (焦点) 的距离和一条定直线 (准线) 的距离的比为常数 e (离心率) 的点的轨迹. $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 中的 e 即为离心率, p 为定点 (焦点) 到定直线 (准线) 的距离.