力学原理的统一性：以一维谐振子为例

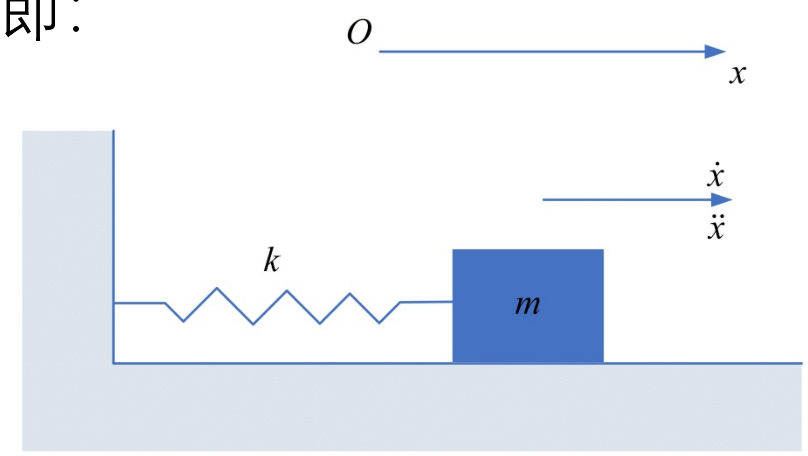
1. 牛顿第二定律

由图所示，一弹簧振子在水平地面上作无阻尼的自由振动，其中弹簧刚度系数为k，质量块的质量为m，图示坐标原点O为质量块的平衡位置。根据胡克定律，弹簧的拉力，即合外力大小与质量块离开平衡位置的位移x成正比，但始终与其运动方向相反，如图2所示。故而由牛顿第二定律可得其运动方程(下述我们直接将运动方程用牛顿第二定律来表达):

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1}$$

即:

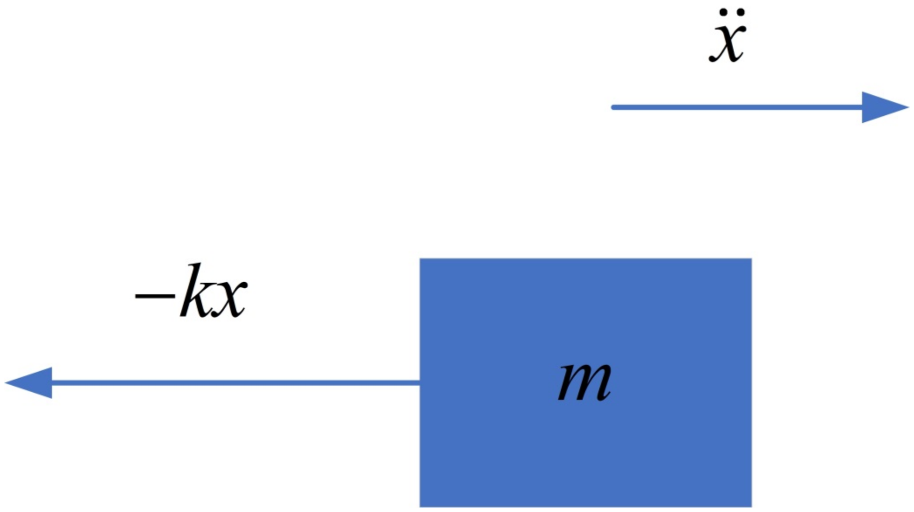
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2}$$



其中$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$是系统的固有频率。公式(2)即为弹簧振子的经典运动方程，为一线性常系数齐次常微分方程，可以直接得到其解析解

$$x = Asin\omega t + Bcos\omega t \tag{3}$$

其中A和B为待定系数，可根据初始条件确定。



2. 机械能守恒定律

弹簧振子的运动方程，即牛顿第二定律，也可通过机械能守恒定律求得。很显然，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \tag{4}$$

弹簧势能为

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \tag{5}$$

则系统的机械能为

$$E = T + V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{6}$$

机械能守恒定律为

$$E = constant\text{或}\dot{E} = 0 \tag{7}$$

对时间求导则得

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \tag{8}$$

经过化简后可得到运动方程(2)。实际对方程(1)两边同时乘以$\dot{x}$则可以得到方程(8)，然后两边积分即可得到方程(6)。由此可见，牛顿第二定律的初积分即为机械能守恒定律；反之，对守恒的机械能进行求导可以得到运动方程。故此机械能中的动能部分对应于牛顿第二定律中的加速度项，势能部分对应着牛顿第二定律中的弹性力项。

3. 拉格朗日方程

弹簧振子的运动微分方程还可以用拉格朗日定理推导出来。其中拉格朗日函数定义为

$$L(x,\dot{x},t)=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2 \tag{9}$$

则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx \tag{11}$$

将方程(10)和方程(11)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \tag{12}$$

整理可得方程(2)

4. 哈密顿正则方程

参照拉格朗日函数的导数方程(10)和方程(11)可以类似定义广义动量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{13}$$

则有

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \tag{14}$$

对拉格朗日函数进行勒让德变换，可以得到哈密顿函数的表达式为

$$H(p,x,t) = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \tag{15}$$

求导可得哈密顿正则方程

$$\frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \tag{16}$$

$$-kx = \frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p} \tag{17}$$

联立方程(16)和(17)，消去广义动量p，可得方程(2)。另外，由方程(6)和方程(15)可见

$$H = E \tag{18}$$

即对于弹簧振子而言，系统的哈密顿函数即其机械能，因而满足机械能守恒定律

$$\dot{H} = \dot{E} = 0 \tag{19}$$

5. 哈密顿原理

若已知拉格朗日函数的显示表达，则将其直接代入哈密顿作用量可得

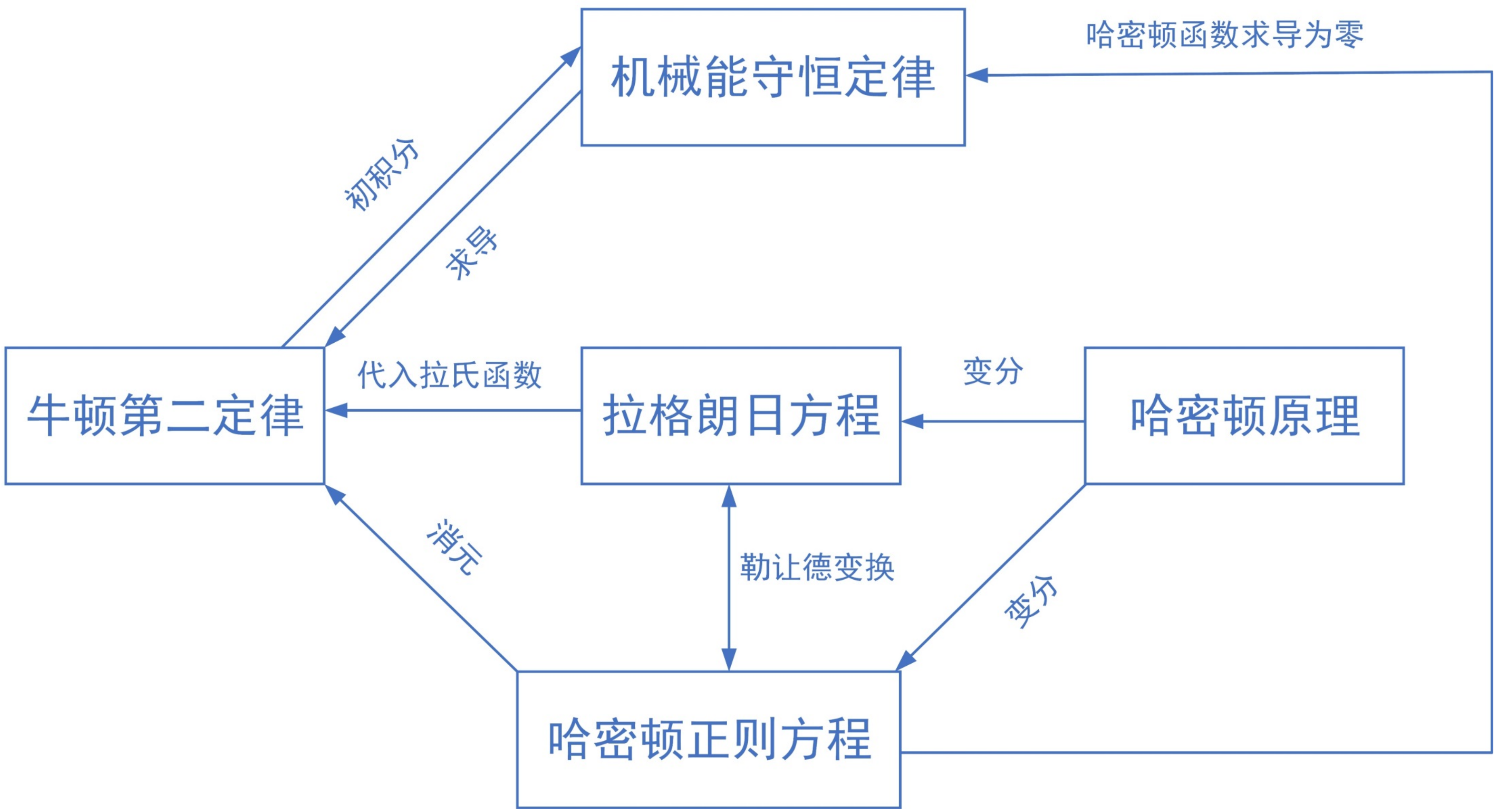
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m\dot{x} - \frac{1}{2} kx^2\right) dt$$

直接变分可得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{x}\delta\dot{x} - kx\delta x) dt \\ &= [m\dot{x}\delta x]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} [m\ddot{x} + kx]\delta x dt = 0\end{aligned}$$

6. 哈密顿—雅可比方程

- 且听下回分解


机械能守恒定律
哈密顿函数求导为零
初积分
求导
牛顿第二定律
代入拉氏函数
拉格朗日方程
变分
哈密顿原理
消元
勒让德变换
变分
哈密顿正则方程