第8章（二）

§8.2 向量的乘法

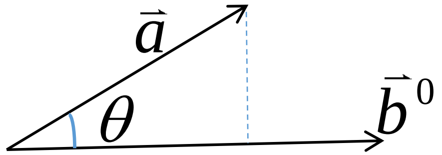
数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

矢量的乘法--数量积（点积、点乘、内积）

定义 称 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$ 为矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 的数量积。

其中 θ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 之间的夹角



模的计算 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

夹角的计算 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

运算律

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

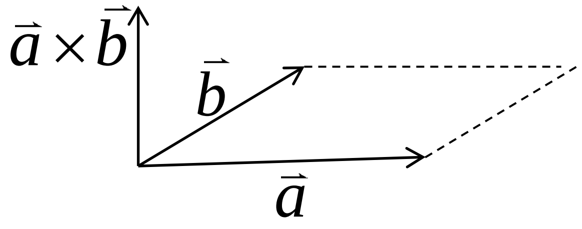
(2) $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$

(3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

定理 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充分必要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

矢量的乘法--矢量积（矢积、叉乘、外积）

定义 称 $\vec{c} \triangleq \vec{a}\times\vec{b}$ 为矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 的矢量积。



其中 $|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 之间的夹角

方向：$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 相互垂直成右手系

※ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 的值等于以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积

※ **叉乘**运算可产生同时垂直两个矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 的矢量

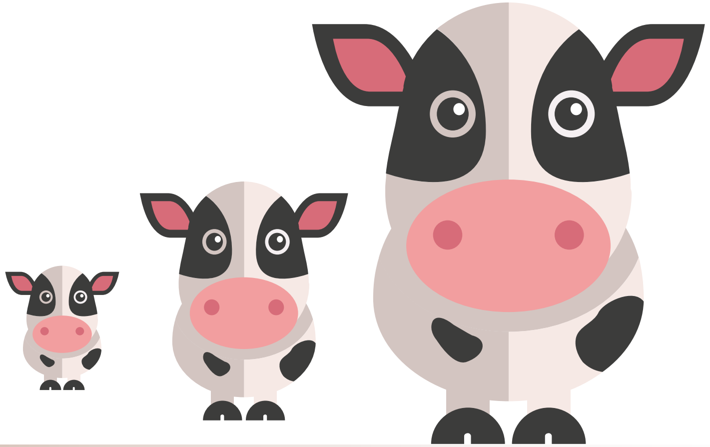
运算律

(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

(2) $k(\vec{a}\times\vec{b}) = (k\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(k\vec{b})$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

定理 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 的充分必要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

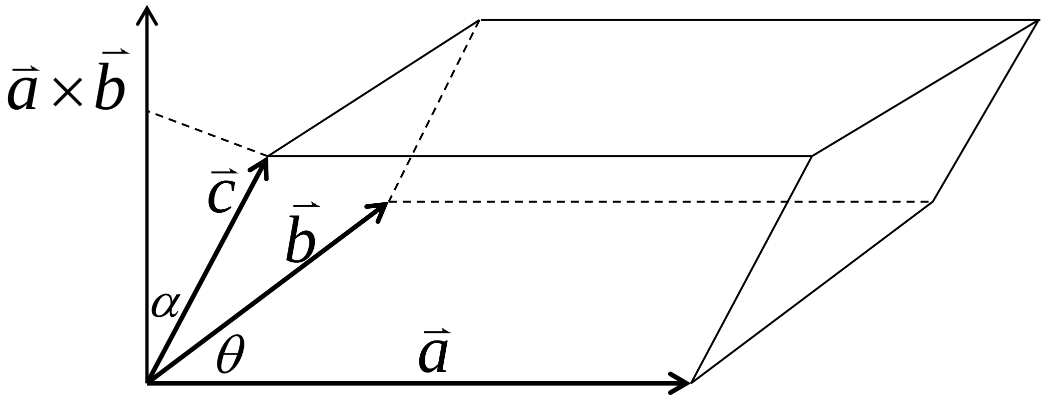


矢量的混合积

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\theta\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha$$

其中 θ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 之间的夹角，α 为 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 之间的夹角

※ **混合积之值等于以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积（如图）**



※ **轮换性：** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

定理 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY