

静力学专题

平面桁架

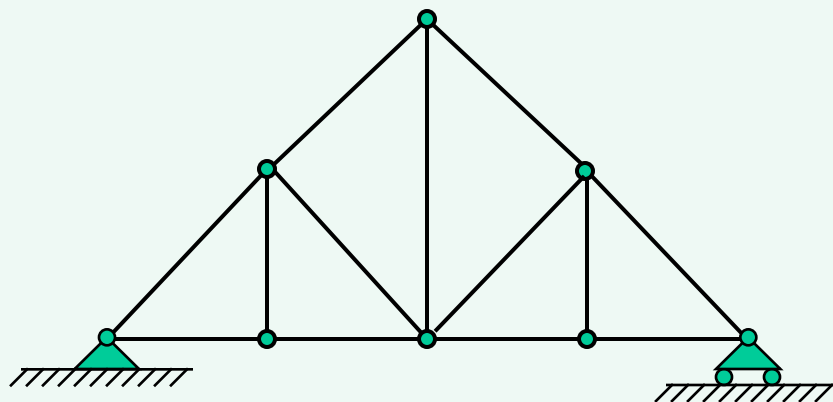


桁架—— 一种由若干杆件彼此在两端用铰链连接而成，受力后几何形状不变的结构。

平面桁架—— 所有杆件都在同一平面内的桁架。

节点—— 桁架中杆件的铰链接头。

杆件内力—— 各杆件所承受的力。



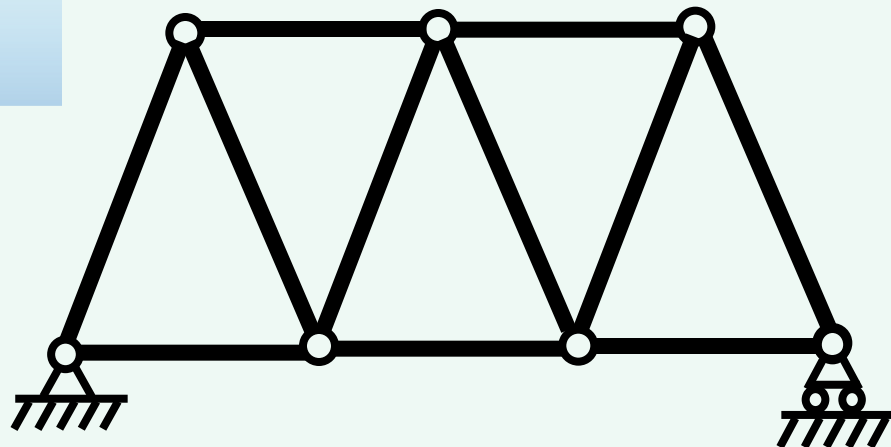
平面理想桁架

假设

- (1) 各杆都是直的
- (2) 各杆两端用光滑铰链连接。
- (3) 所有载荷在桁架平面内，作用于节点上。
- (4) 各杆自重不计。

类型（按组成方式）

简单桁架——以三角形桁架为基础，每增加一个节点需增加两根杆件。



静定: $N=2j-3$ j 为节点数, N 连杆数

简单桁架是静定桁架

复杂桁架：超静定桁架

$N>2j-3$ j 为节点数, N 连杆数

- 求平面桁架各杆内力的方法

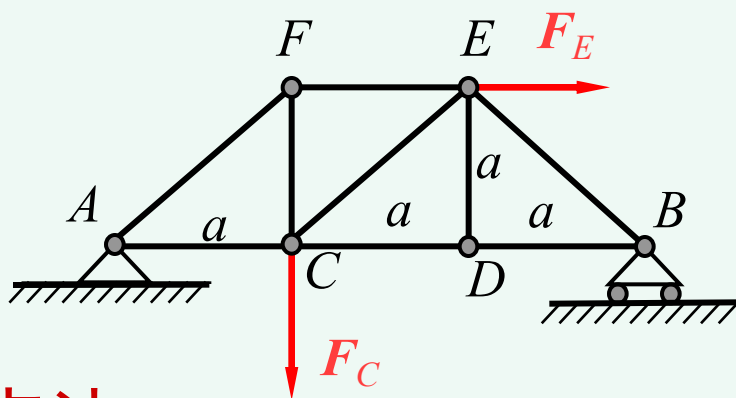
- **节点法**：分别考虑各节点的平衡

- 每个节点都受一平面汇交力系的作用，只能列写两个平衡方程，解两个未知数。
 - 注意选择节点顺序，适合于求解全部杆件内力

- **截面法**：假想地把桁架截开，再考虑其中任一部分的平衡，求出被截杆件的内力。

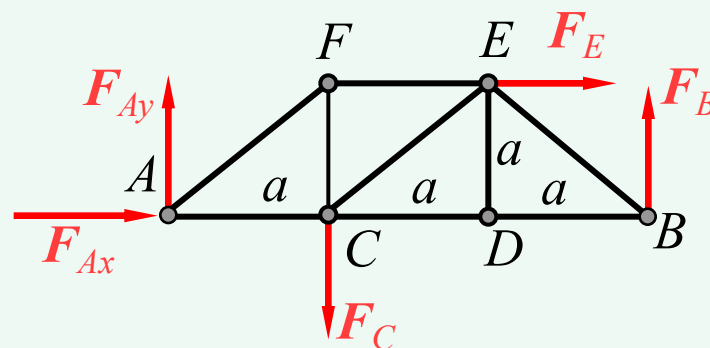
- 平面任意力系的求解方法。因平面任意力系只有3个独立的平衡方程，所以不宜截断三杆以上。
 - 适当地选取一截面以及力矩方程，常可较快地求得某些指定杆件的内力。

例1 如图平面桁架，试求各杆内力。已知铅垂力 $F_C=4\text{ kN}$ ，水平力 $F_E=2\text{ kN}$ 。



解： (1) 节点法

1) 取整体为研究对象，
受力分析如图。

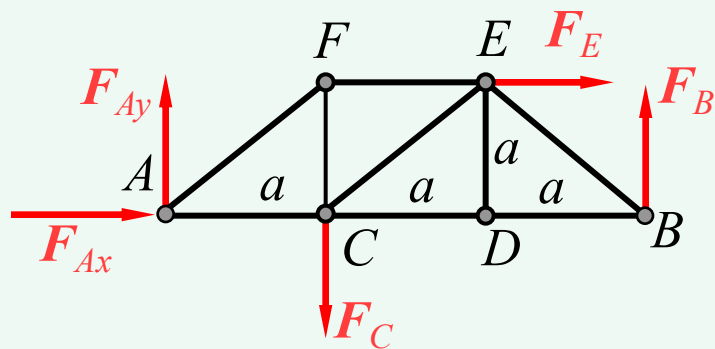


2) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$



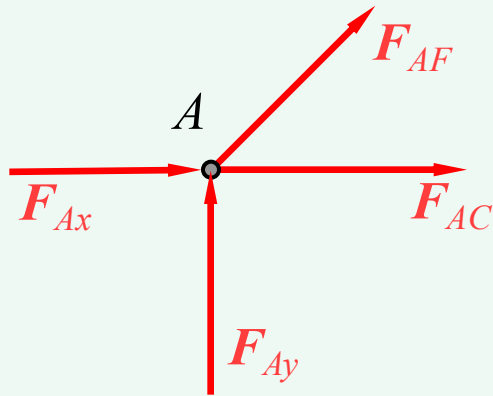
3) 联立求解。

$$F_{Ax} = -2 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

$$F_B = 2 \text{ kN}$$

4) 取节点 A , 受力分析如图所示。
列平衡方程

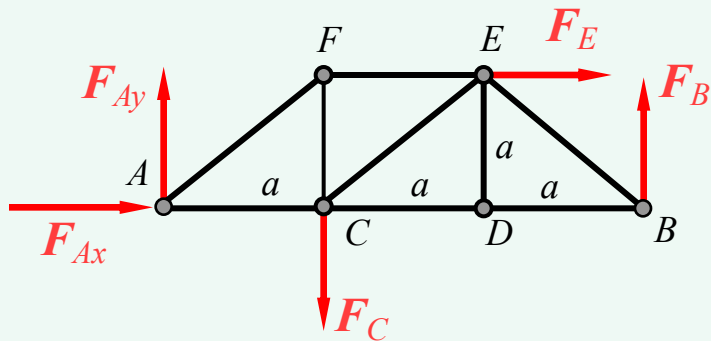


$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{Ax} + F_{AC} + F_{AF} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} + F_{AF} \cos 45^\circ = 0$$

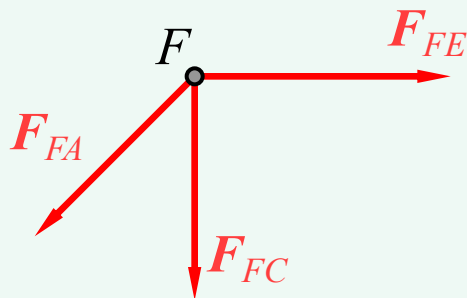


解得

$$F_{AF} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$F_{AC} = 4 \text{ kN}$$

5) 取节点 F , 受力分析如图所示。
列平衡方程



$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{FE} - F_{FA} \cos 45^\circ = 0$$

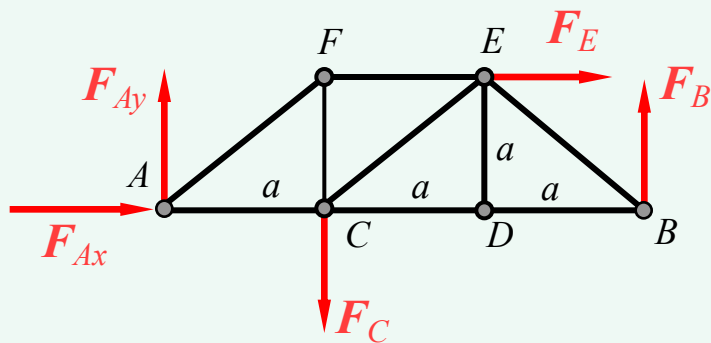
$$\sum F_y = 0,$$

$$-F_{FC} - F_{FA} \cos 45^\circ = 0$$

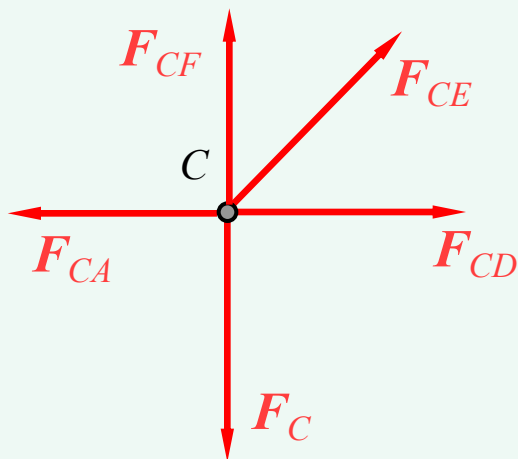
解得

$$F_{FE} = -2 \text{ kN}$$

$$F_{FC} = 2 \text{ kN}$$



6) 取节点C, 受力分析如图所示。
列平衡方程



$$\sum F_x = 0,$$

$$-F_{CA} + F_{CD} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

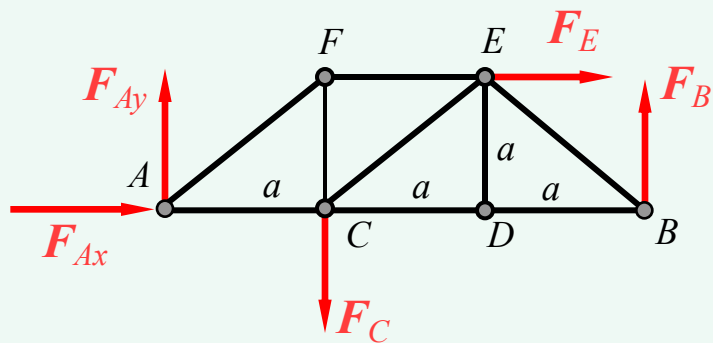
$$\sum F_y = 0,$$

$$-F_C + F_{CF} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{CE} = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$F_{CD} = 2 \text{ kN}$$



7) 取节点D, 受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{DB} - F_{DC} = 0$$

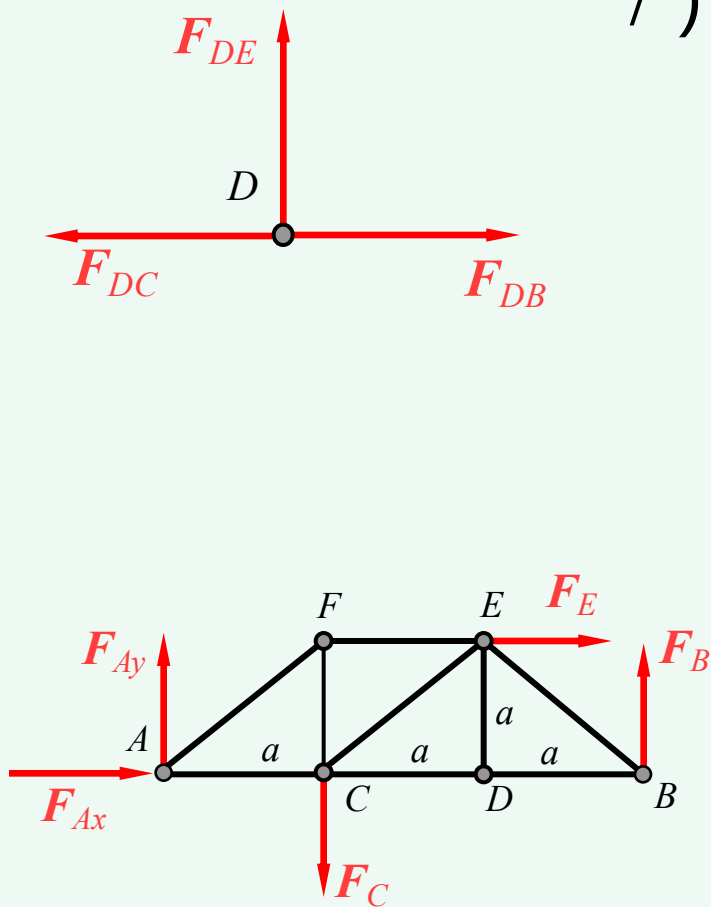
$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{DE} = 0$$

解得

$$F_{DB} = 3 \text{ kN}$$

$$F_{DE} = 0$$



8) 取节点 B , 受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$-F_{BD} - F_{BE} \cos 45^\circ = 0$$

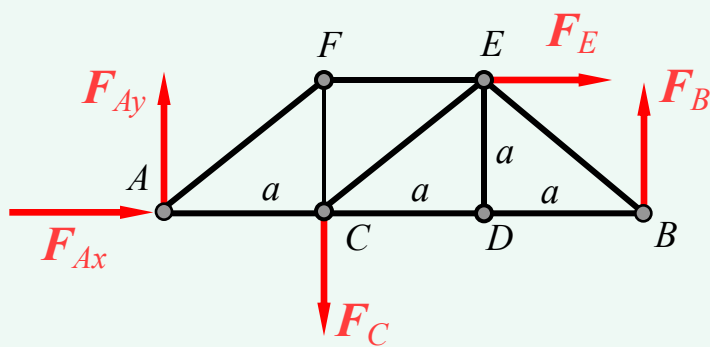
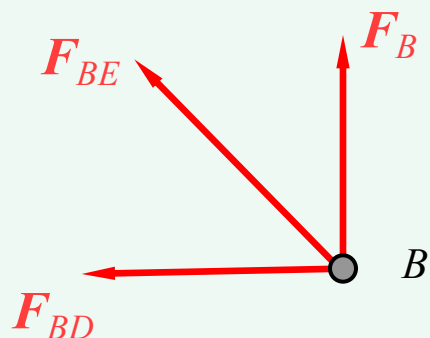
$$\sum F_y = 0,$$

$$F_B + F_{BE} \cos 45^\circ = 0$$

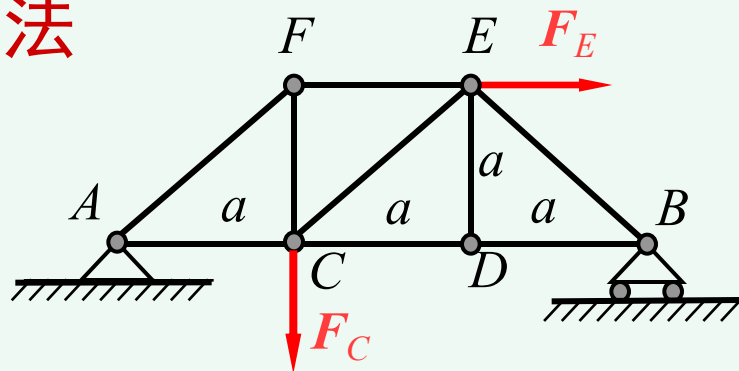
解得

$$F_{BD} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

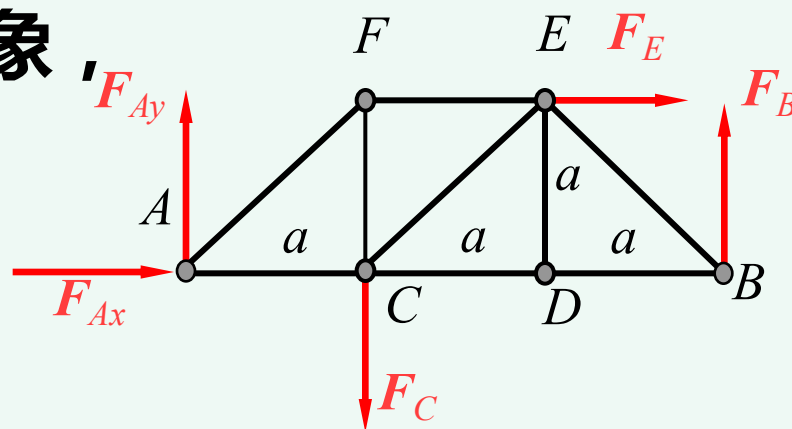
$$F_{BE} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$



解： (2) 截面法



1) 取整体为研究对象，
受力分析如图所示。

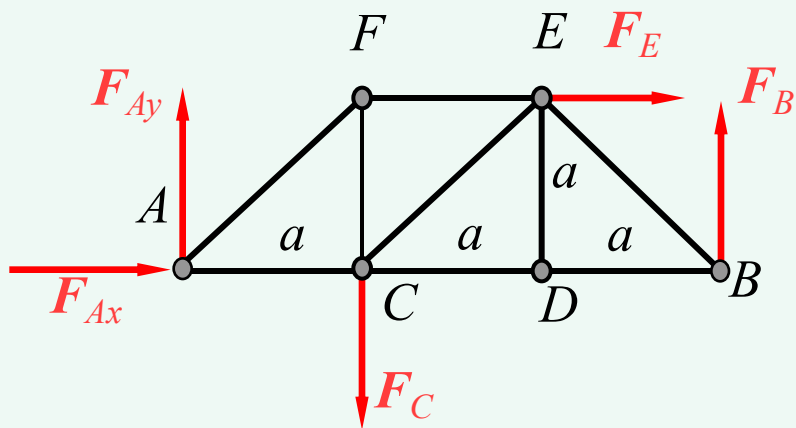


2) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F_C a - F_E a + F_B \times 3a = 0$$



3) 联立求解。

$$F_{Ax} = -2 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

$$F_B = 2 \text{ kN}$$

4) 作一截面 $m-m$ 将三杆截断，取左部分为分离体，受力分析如图所示。

5) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0,$$

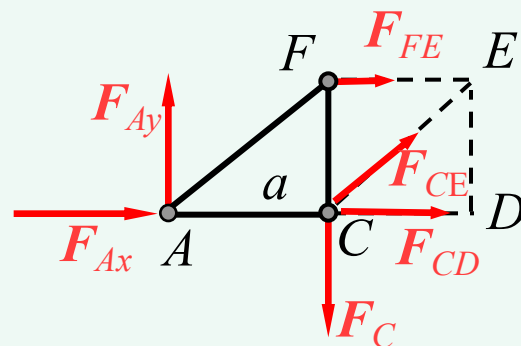
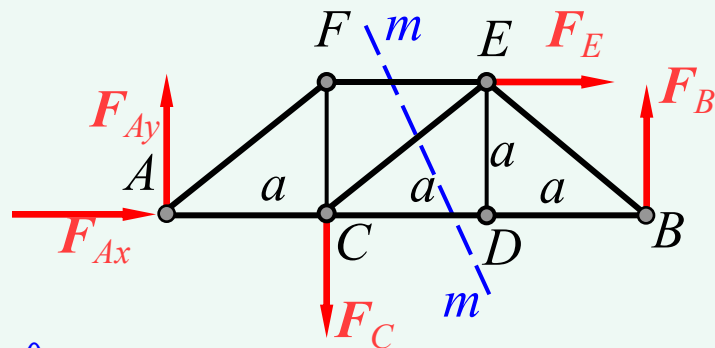
$$F_{CD} + F_{Ax} + F_{FE} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} - F_C + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$- F_{FE} a - F_{Ay} a = 0$$



$$F_{CD} + F_{Ax} + F_{FE} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{Ay} - F_C + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

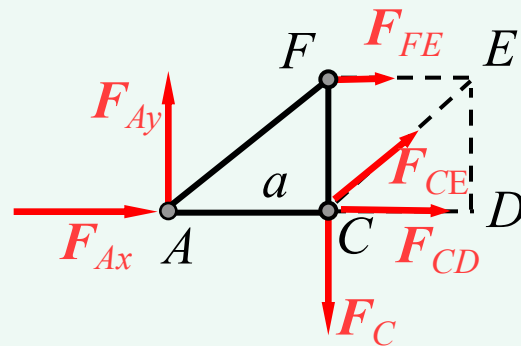
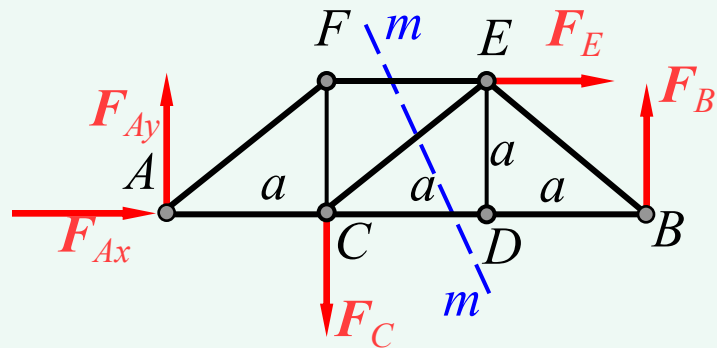
$$-F_{FE}a - F_{Ay}a = 0$$

联立求解得

$$F_{CE} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$F_{CD} = 2 \text{ kN}$$

$$F_{FE} = -2 \text{ kN}$$



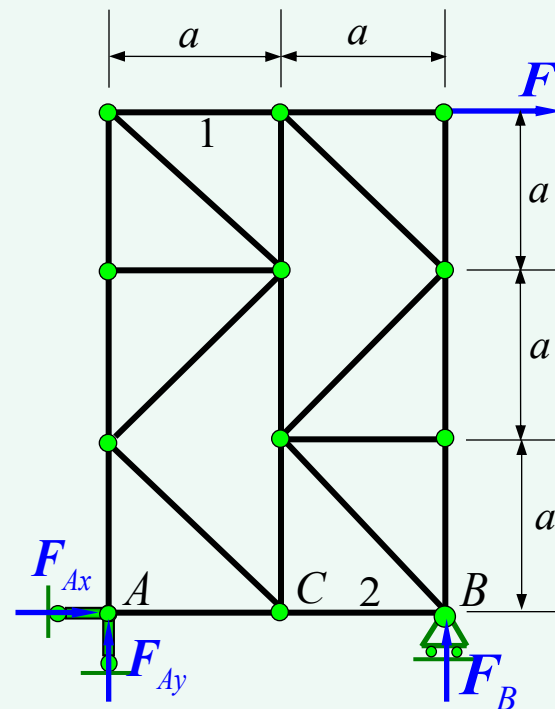
例 2

求图示桁架1，2杆内力。已知 a ， F 。

解： 整体受力如图

由 $\sum M_A = 0$, 得

$$F_B = 1.5F$$



作1-1截面，研究右半部，受力如图，

由 $\sum M_C = 0$,得

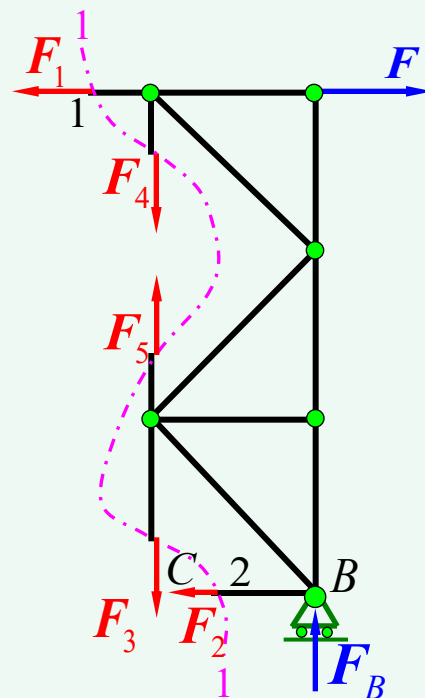
$$F_1 \cdot 3a + F_B \cdot a = F \cdot 3a$$

将 F_B 代入得 $F_1 = \frac{F}{2}$

由 $\sum F_x = 0$,得

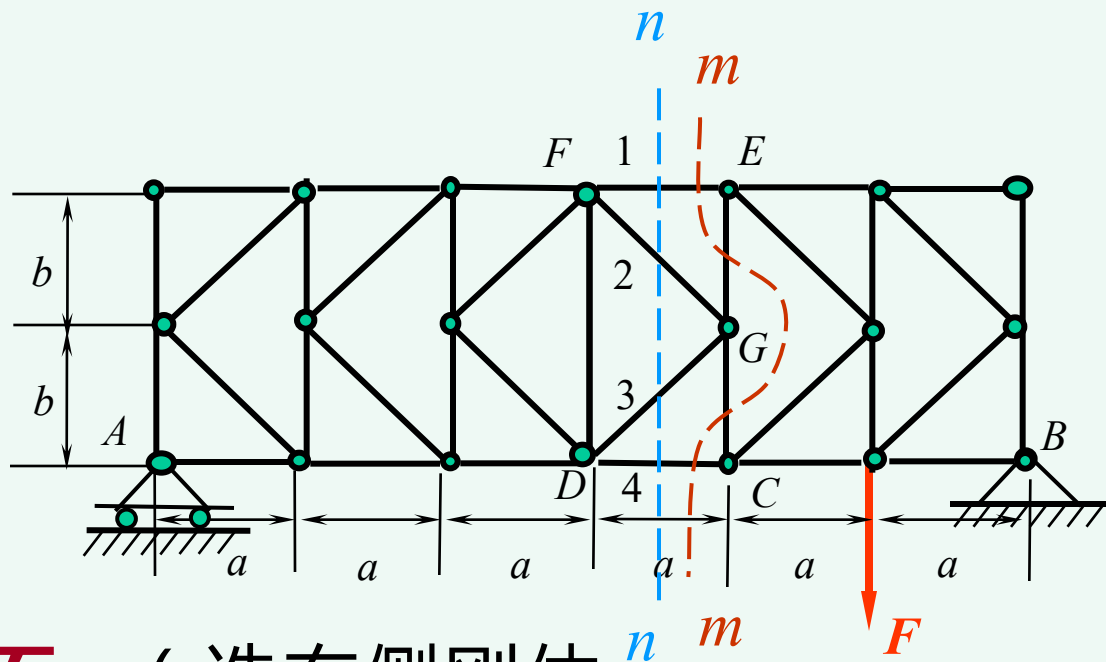
$$F_2 + F_1 = F$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{F}{2}$$



思考题

用截面法求杆1、2的内力。



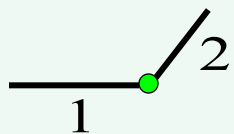
先用截面 m (选右侧刚体为研究对象) $\sum M_C = 0$, 求出杆1的内力 F_1 。

再用截面 n 。 $\sum M_D = 0$, 求出杆2的内力 F_2 。

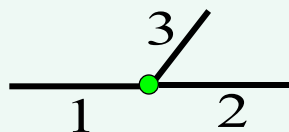
• 零杆的确定

- 零杆与桁架所承受的主动载荷有关；同一桁架在不同的载荷下，零杆可能不同
- 若某节点只与两杆相连，节点上无主动力，两杆不平行，则两杆均为零杆
- 若某节点与三杆相连，节点上无主动力，两杆平行，则第三杆为零杆

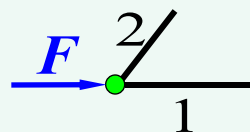
零杆的常见情形



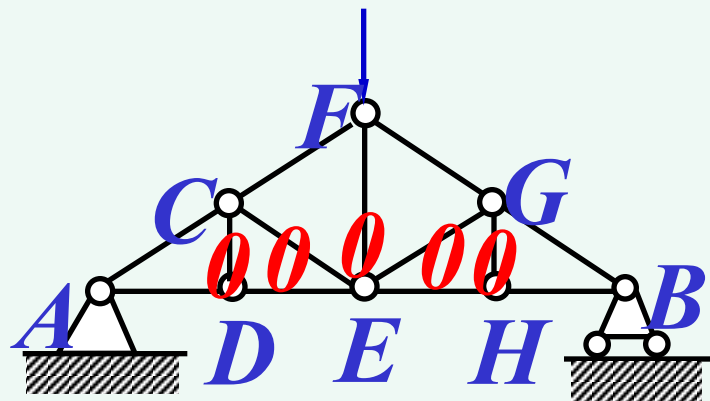
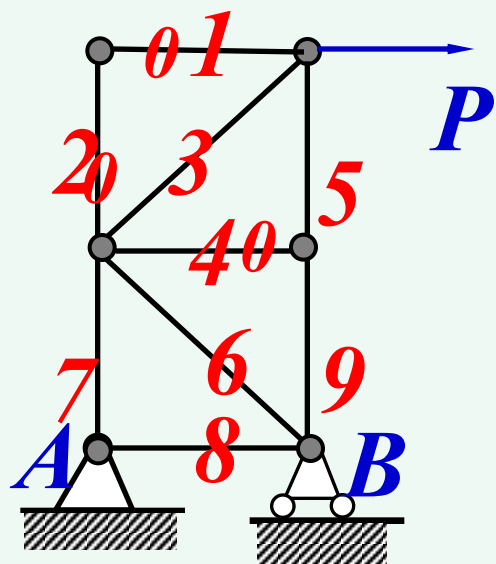
$$F_1 = F_2 = 0$$



$$F_3 = 0$$



$$F_2 = 0$$



作业：

2-57, 58, 59