第十二章

稳恒磁场

第十二章 磁场

§12-1 磁场 磁感应强度

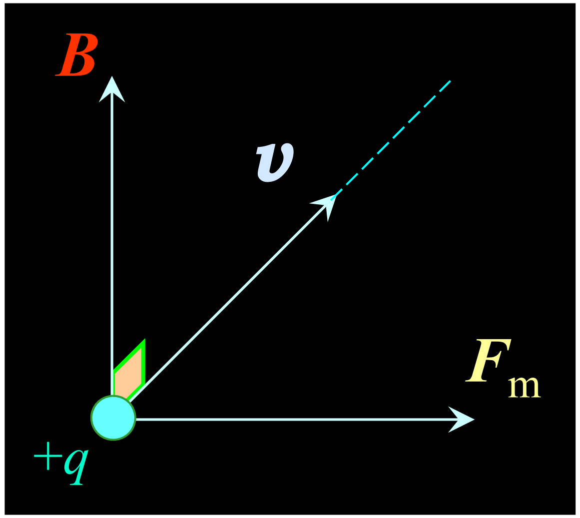
1. 电流的磁效应

(a) 运动电荷形成磁场,

(b) 磁场—磁场、磁场—电流、电流—电流之间有相互作用力

2. 磁感应强度

a. 磁感应强度的引入



检验电荷q_0以速度v运动,所受的力为F, 实验发现:

① 改变$\boldsymbol{v}$ 而保持速率不变,发现力F总是垂直于$\boldsymbol{v}$

② 当$\boldsymbol{v}$ 在某些方向时, $F=0$

这是一个特别的方向

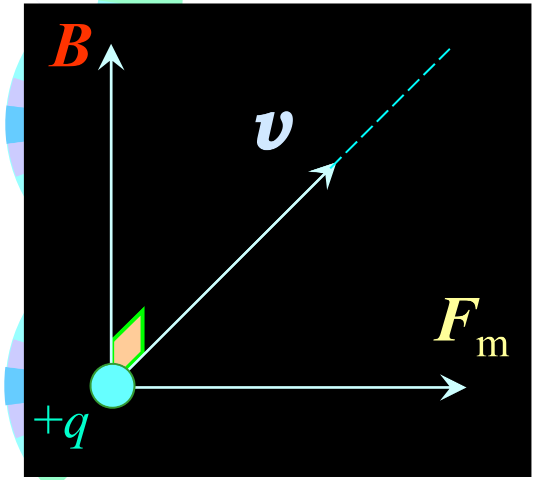
定义该方向为磁感应强度B 的方向

③ 当$\boldsymbol{v}$垂直于$F=0$时检验电荷的运动方向时,

电荷受力达到极大值$F_{\max}$

④ $F_{\max}$与v成正比,也与q成正比, $F_{\max}\propto vq$

B的定义: 大小　$B=F_{\max}/qv$



方向: $\vec{F}_m \times \vec{v}$ 的方向确定,

可用右手螺旋法则确定.

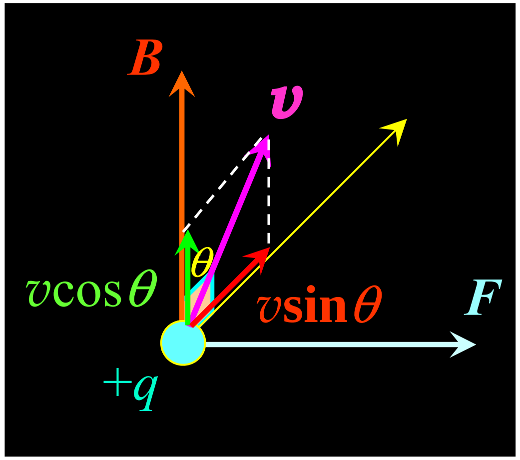
单位: T(特斯拉), 1 T = 1 N/(A.m)

1 T = 10^4 Gs

b. 洛仑兹力

与B一致的分量 $v\cos\theta$受力为0,

故　$B=F/qv\sin\theta$



磁场中运动电荷受力大小

$$F=qvB\sin\theta$$

矢量式: $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$

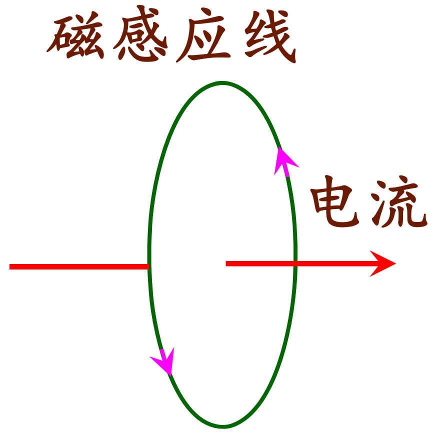
若电场和磁场同时存在,则电荷受力为:

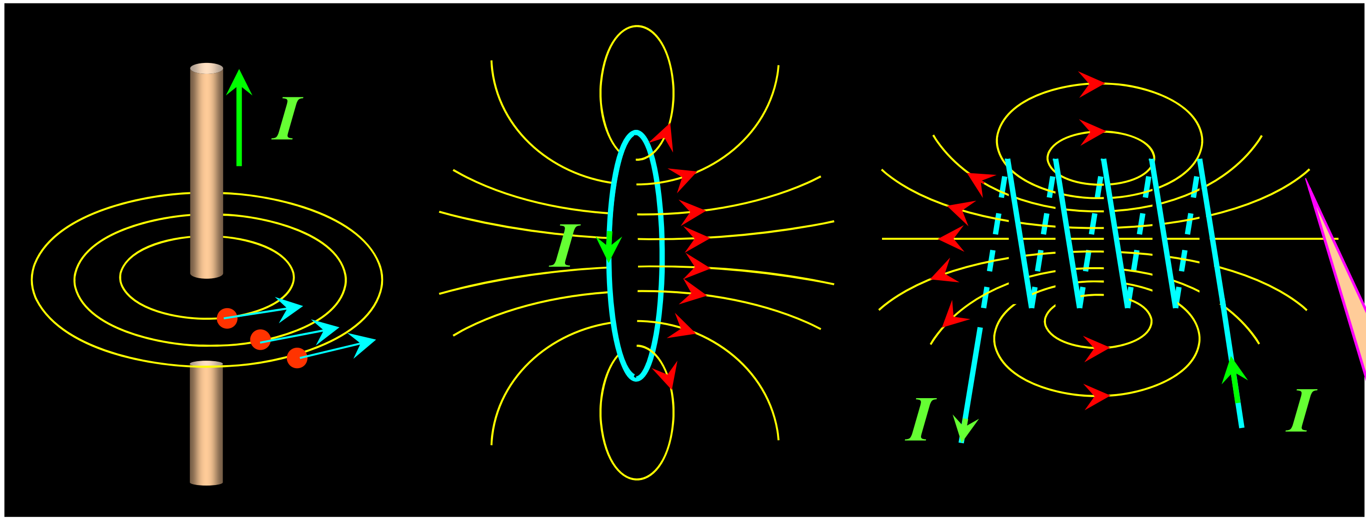
$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$ 洛伦兹关系式

3. 磁感应线

a. 磁感应线的定义：

磁感应线上任一点的切线方向和该点的磁场方向一致.





(a) (b) (c)

几种磁场的磁感应线

b. 磁感应线的特点:

① 磁感应线为闭合曲线, 无起点, 无终点, 相应的磁场称涡旋场.

② 磁感应线的环绕方向与电流方向服从右手螺旋法则.

③ 通过单位垂直面积的磁感应线的数目等于该点的磁感应强度

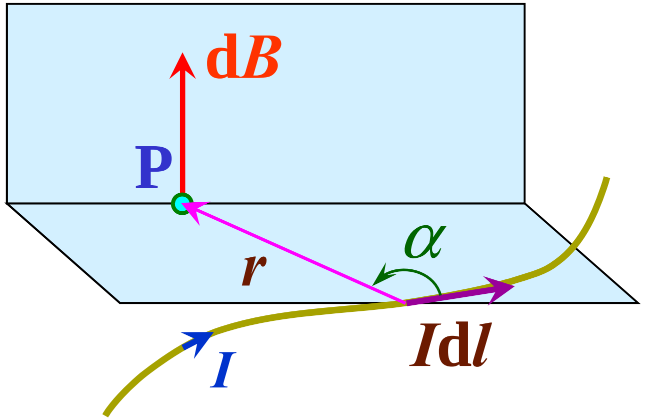
如何求磁感应强度$\vec{B}$矢量?

§ 12-2 毕奥—萨伐尔定律

一. 毕奥—萨伐尔定律

1.电流元激发的磁场

电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$在空间P点激发磁场的磁感应强度



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$k=\frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

相当于电场中点电荷产生的电场

2. 磁场中的场强叠加原理

对任意电流线所激发的总磁感应强度为:

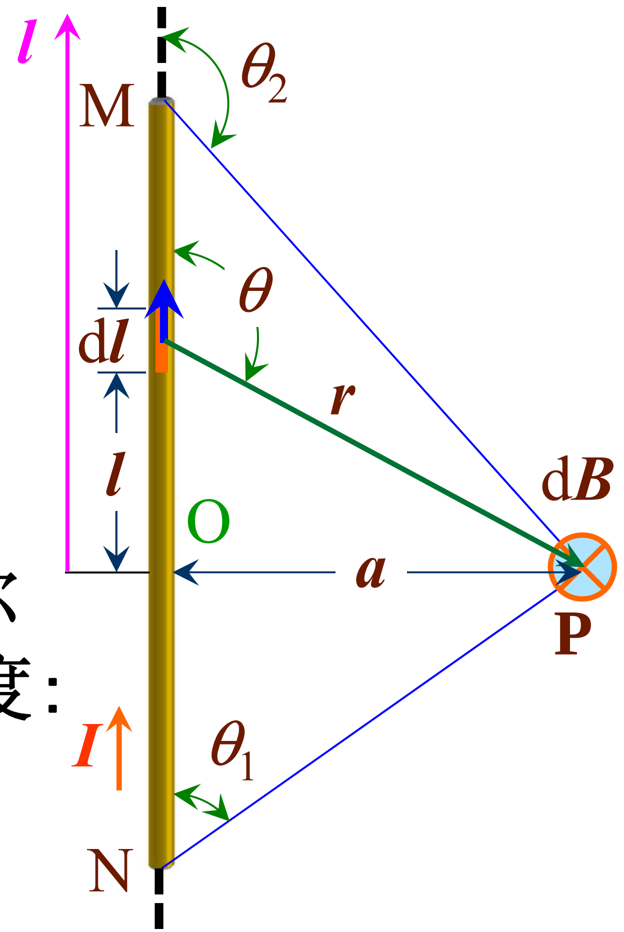
$$\vec{B}=\int_L\mathrm{d}\vec{B}=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

矢量和

二. 毕奥—萨伐尔定律的应用(★)

1. 载流直导线的磁场

设长L的载流直导线MN，电流为I，求离导线距离为a的场点P处的磁感应强度：



取电流元$I\mathrm{d}l$，按毕奥-萨伐尔定律，电流元在P点的磁感应强度：

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

$\mathrm{d}\vec{B}$ 垂直纸面向内，且各电流元在P点磁感应强度的方向都相同，可用普通定积分求总磁感应强度：

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$$B=\int_L\mathrm{d}B=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

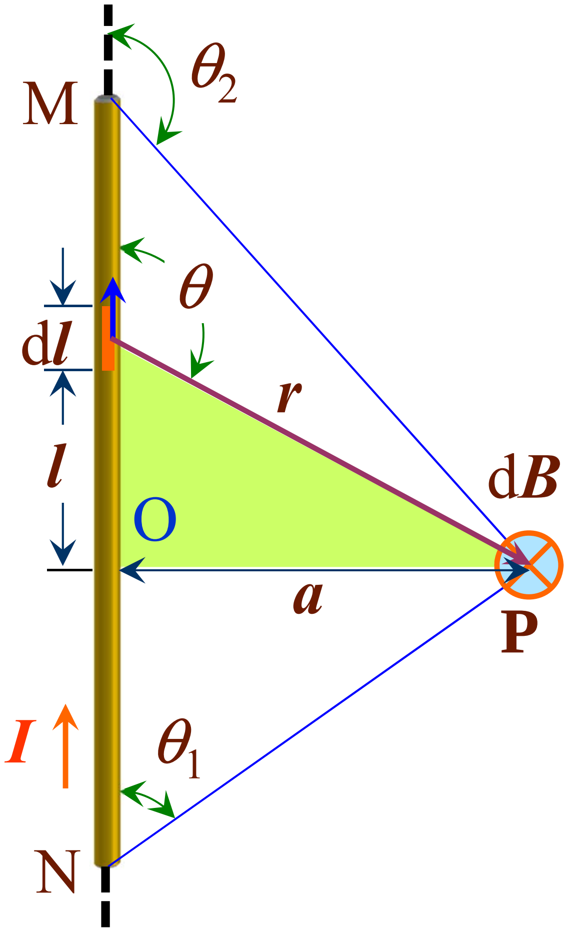
上式中的变量之间的关系:

$$r=\frac{a}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{a}{\sin\theta}$$

$$\boldsymbol{l}=a\cot(\pi-\theta)=-a\cot\theta$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

将以上关系式代入上式;



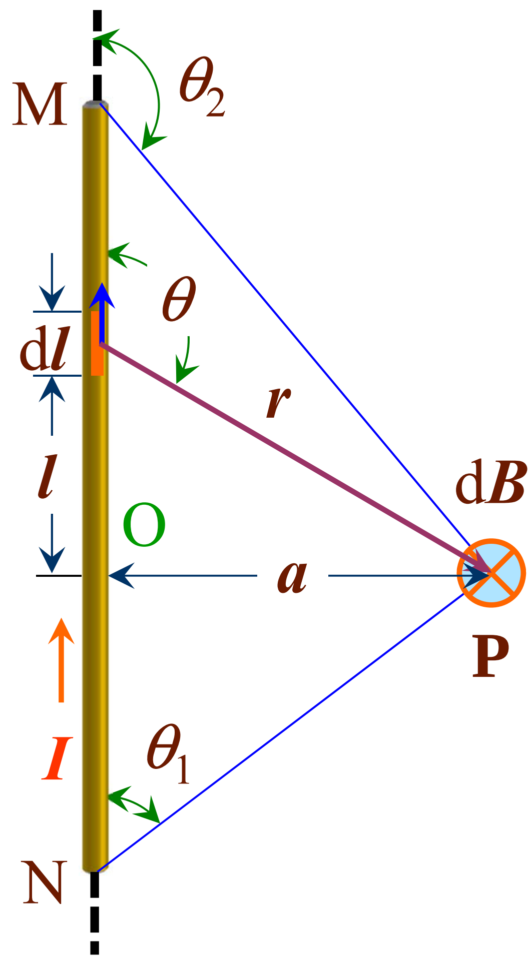
$$B=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$$=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia\csc^2\theta\sin\theta}{(a/\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

方向为垂直纸面向内

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



(1) 当$L>>a$,
相当于无限长载流直导线,
$\theta_1=0,\ \theta_2=\pi$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

(2) 当$L>>a$, 端点处
$\theta_1=90°,\quad \theta_2=\pi,$
相当于半无限长载流直导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

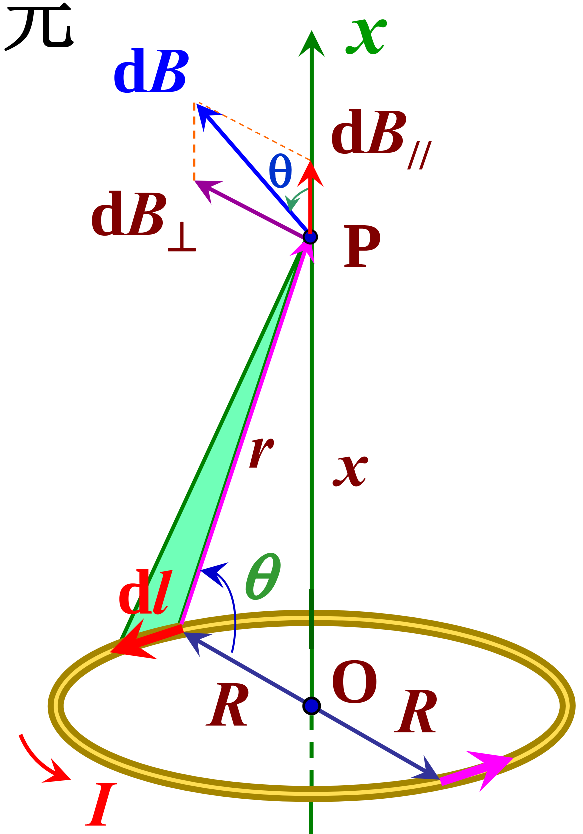
(3) 半无限长载流直导线的延长线上,
$\theta_1=\pi,\ \theta_2=\pi$

$$B=0$$

2. 载流圆线圈轴线上的磁场

(1) 载流圆线圈轴线上的磁场

设圆形线圈半径***R***,通电流***I***,计算轴线上**P**点处的磁感应强度.电流元***I*d*l***, **d*l*⊥*r***,在**P**点产生的**d*B***为:



$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

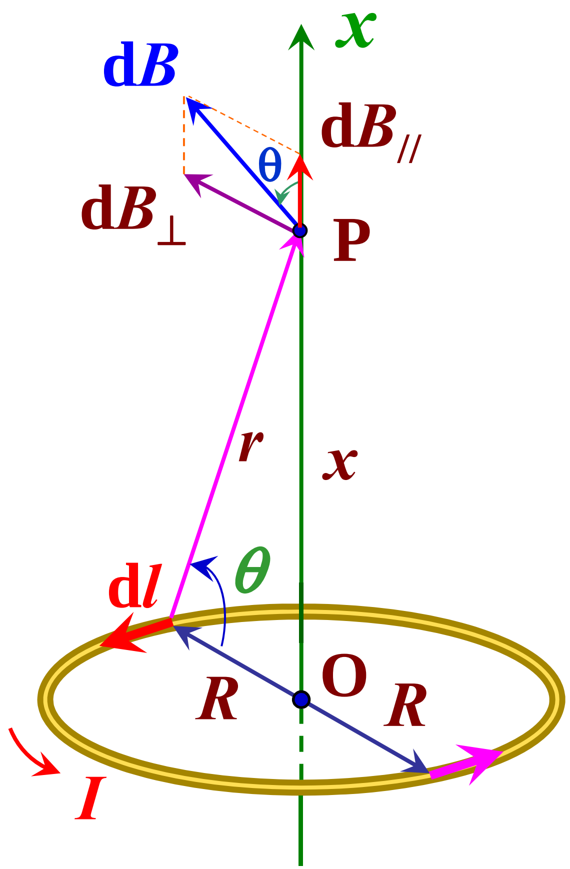
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin 90^\circ}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}$$

d*B*可分解为**d*B***$_{//}$和 **d*B***$_\perp$

$$\mathrm{d}B_\perp = \mathrm{d}B\sin\theta$$

$$\mathrm{d}B_{//} = \mathrm{d}B\cos\theta = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\cos\theta$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\perp}$分量相互抵消, $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{//}$相互加强:



$$\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\mathrm{d}B_{//} = \mathrm{d}B\cos\theta = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l}{4\pi r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l}{4\pi r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3}\mathrm{d}l$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{//} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}_{//}$$

$$= \int_L \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3}\mathrm{d}l = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + x^2)^{3/2}}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

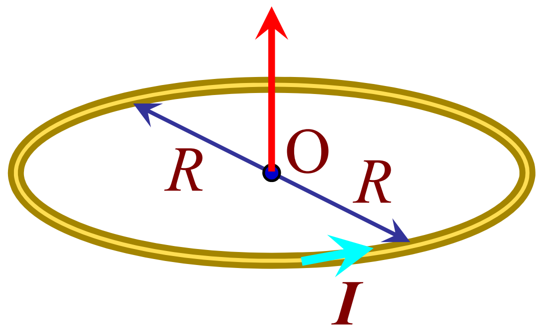
$\boldsymbol{B}$的方向沿**OP**轴, 与电流方向成右螺旋关系.

★ 讨论:

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

① 在圆心O处, $x=0$, 则:

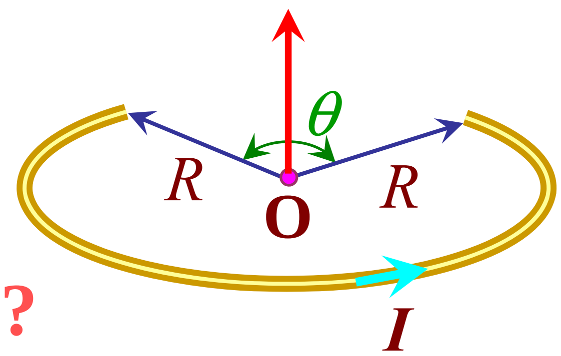
$$B(\mathrm{O})=\frac{\mu_0 I}{2R}$$



(a) 若圆线圈密绕N匝, 因为每匝线圈在圆心的磁感应强度的方向都相同, 则:

$$B(\mathrm{O})=\frac{\mu_0 I N}{2R}$$

(b) 若圆线圈不足1匝,则在圆心O ($x=0$)处的磁感应强度:



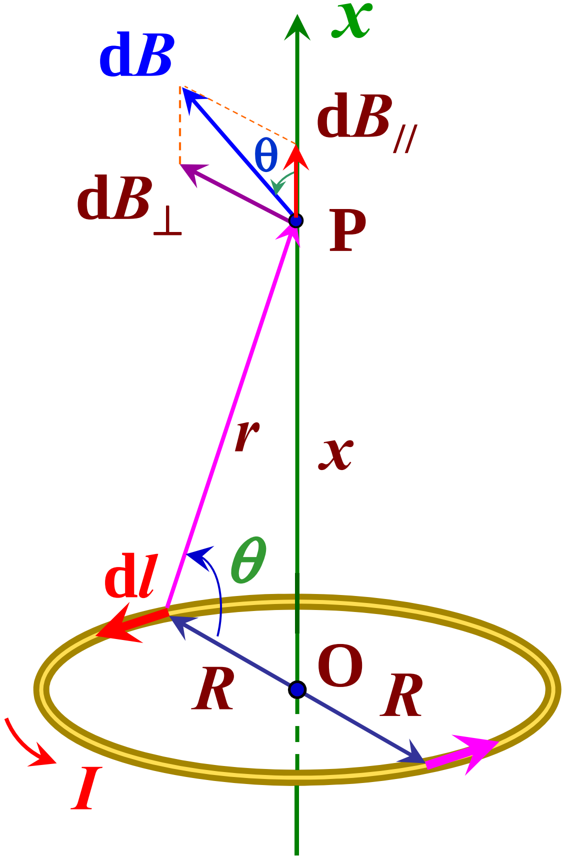
可按圆心角之比计算, 为什么?

② 在轴线上远离圆线圈中心的各点($x>>R$):

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$

上式中$S=\pi R^2$为圆线圈的面积.



③ 载流线圈在磁场中的地位

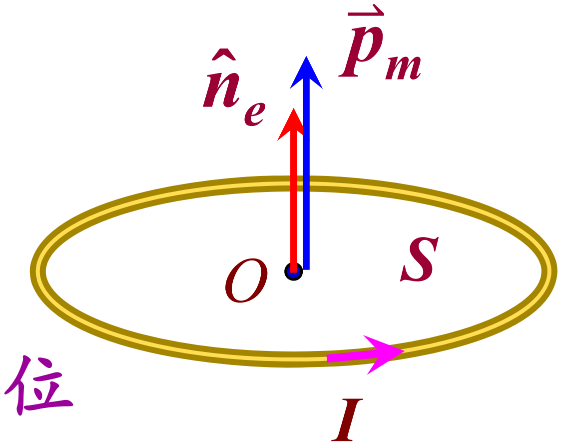
非常重要，相当于电场中的电偶极子

(2) 载流线圈的磁矩 磁偶极子

引入磁矩 p_m 来描述载流线圈的磁性质：

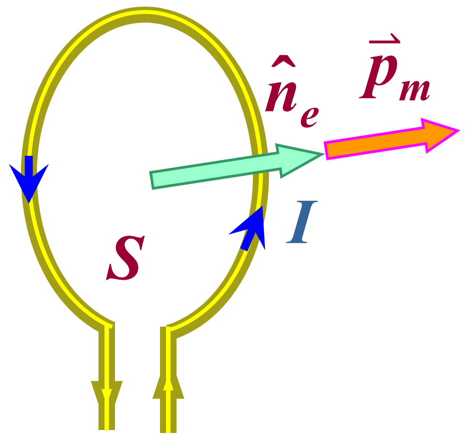
相当于电场中的电偶极子

$$\vec{p}_m = IS\,\hat{n}_e$$



(a) 与电场中的电偶极矩同样地位

(b) $\hat{n}_e$ 的方向与电流环绕方向呈右螺旋关系



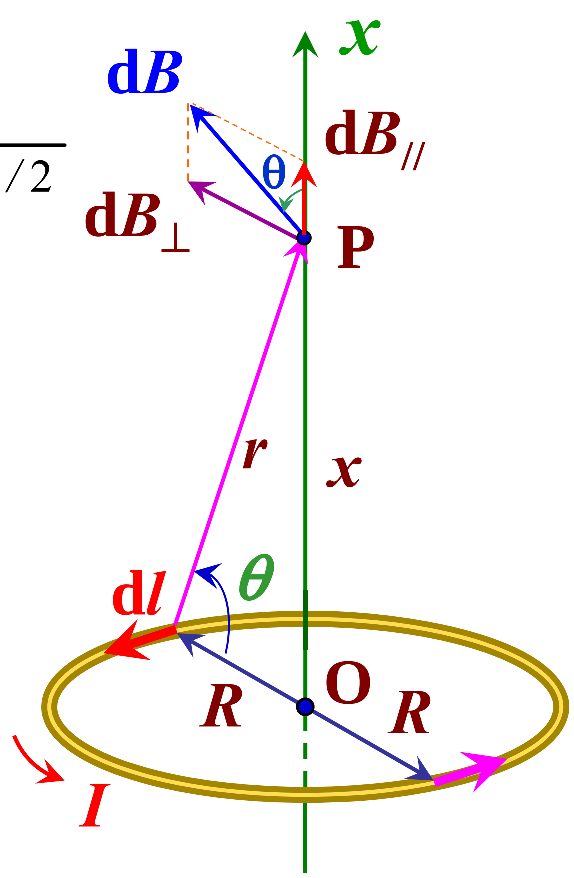
(c) 载流线圈的匝数为 N 时

$$\vec{p}_m = NIS\,\hat{n}_e$$

(3) 载流圆线圈的磁场与磁矩的关系

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 I\pi R^2}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 IS}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 p_m}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}$$

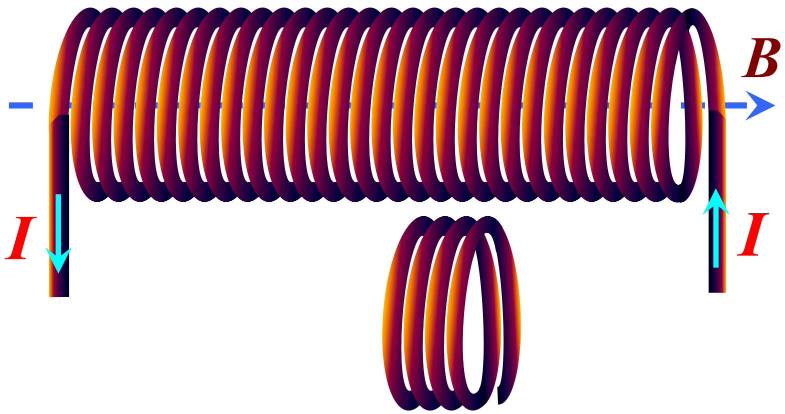


$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}}$$

远离圆线圈处($x>>R$):

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}}$$

3. 载流直螺线管内部的磁场

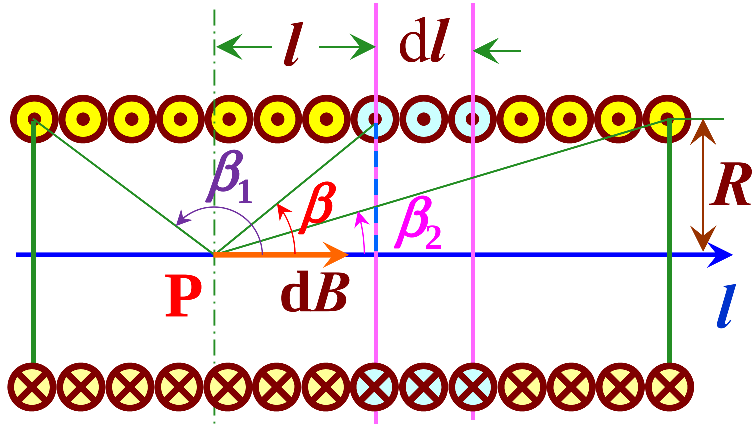


设单位长度匝数为n

怎样分割?

在螺线管上取$\mathrm{d}l$，匝数$\mathrm{d}N=n\mathrm{d}l$，相当于电流强度$\mathrm{d}I=I\cdot\mathrm{d}N=I\cdot n\mathrm{d}l$的圆电流，

$\mathrm{d}N$匝线圈或$\mathrm{d}I=I\cdot n\mathrm{d}l$的圆电流在P点的磁感应强度的大小$\mathrm{d}B$为:



载流直螺线管

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}\cdot n\mathrm{d}l=\frac{\mu_0(I\cdot n\mathrm{d}l)R^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

方向

一匝的磁场

匝数$\mathrm{d}N$

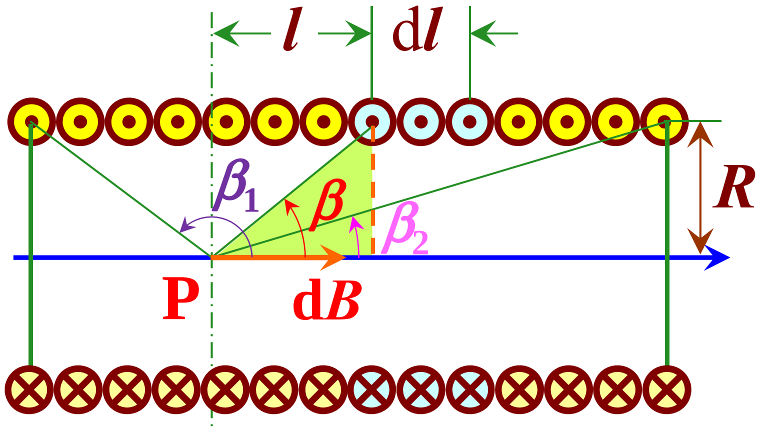
$\mathrm{d}I$的圆电流磁场

引入变量β是**P**点到**d*l*** 所引矢量与轴线间的夹角,由图可知:

$l = R\cot\beta$

$\mathrm{d}l = -R\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta$

$R^2 + l^2 = R^2\csc^2\beta$



载流直螺线管

代入上式得:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I R^2 n\,\mathrm{d}l}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2 n(-R\csc^2\beta)\mathrm{d}\beta}{2(R^2\csc^2\beta)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I n\,\mathrm{d}\beta}{2\csc\beta}$$

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0}{2} nI\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$$

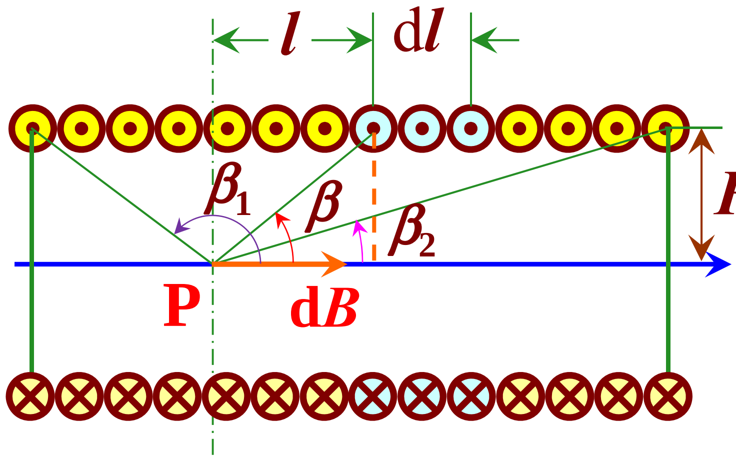
P点产生**d*B***的方向为沿轴线向右

各圆电流在**P**点产生的**d*B***有相同的方向,

整个螺线管在P点产生的磁感应强度:

$$B=\int \mathrm{d}B=\int_{\beta_1}^{\beta_2}(-\frac{\mu_0}{2}nI\sin\beta)\mathrm{d}\beta=\frac{\mu_0}{2}nI(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

方向沿轴线向右



载流直螺线管

讨论:

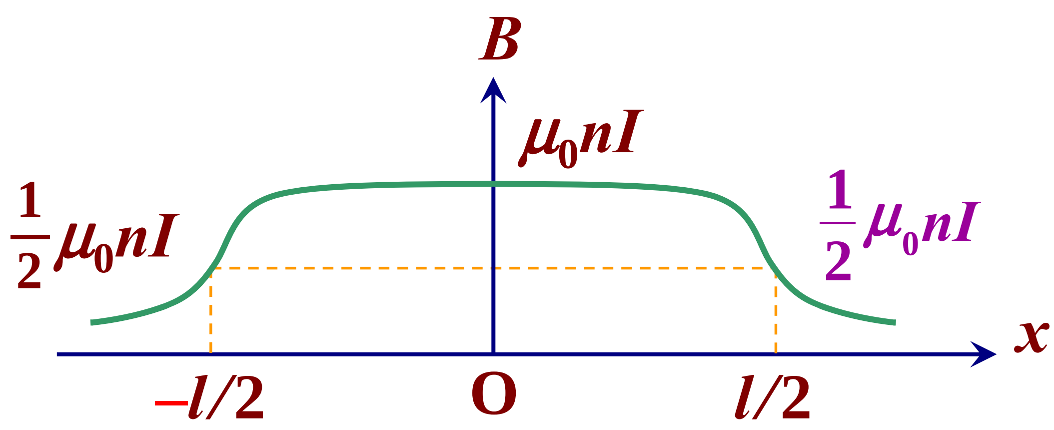
① $L>>R$, 相当于无限长螺线管, 此时 $\beta_1\to\pi$, $\beta_2\to 0$,于是有:

$$B=\mu_0 nI$$

②长直螺线管上的两端点,相当于半无限长螺线管, $\beta_1=\pi/2$, $\beta_2\to 0$ 或$\beta_2=\pi/2$, $\beta_1\to\pi$,则:

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$$

直螺线管轴线上的磁场分布

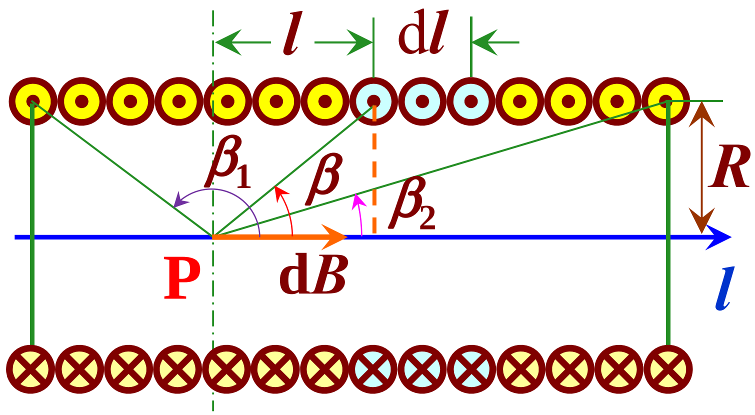


③ $B=\mu_0 nI$ 中 nI 的意义

螺线管上 dl 的匝数 dN=ndl, 其电流强度为

$$\mathrm{d}I=I\cdot \mathrm{d}N=I\cdot n\mathrm{d}l$$

$$nI=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}$$

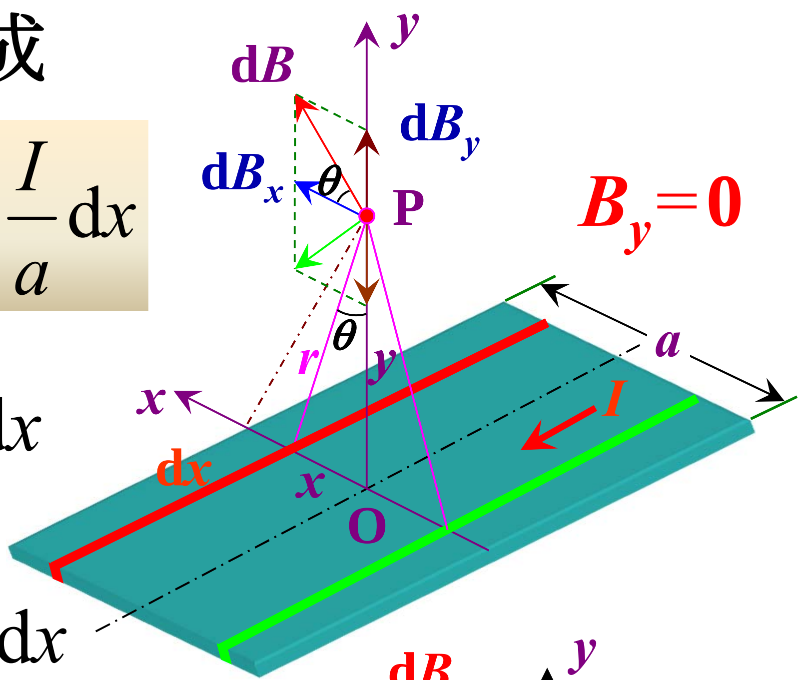


螺线管中沿轴线单位长度的电流→电流线密度

4. “无限长”均匀载流薄铜片的磁场

电流为**I**, 宽度为**a**的无限长平面可看作是由多个宽度为**dx**的直导线组成

$$\mathrm{d}I=\frac{I}{a}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi r}=\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{I}{a}\mathrm{d}x$$



$B_y=0$

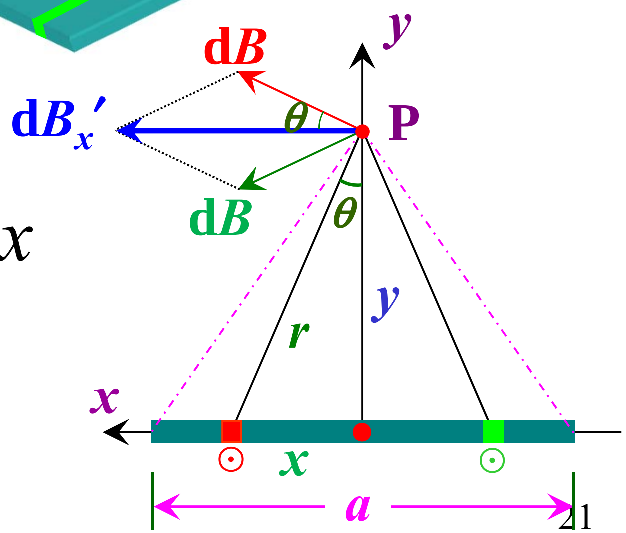
$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\cos\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi ar}\cos\theta\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi ar}\frac{y}{r}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

y是常量

$$B=B_x=\int\mathrm{d}B_x=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 Iy}{2\pi a}\frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{x}{y}\Bigg|_{x=-a/2}^{x=a/2}$$



$$B=B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}[\tan^{-1}\frac{a}{2y}-\tan^{-1}(-\frac{a}{2y})]=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2y}$$

方向为 x 正向

讨论:

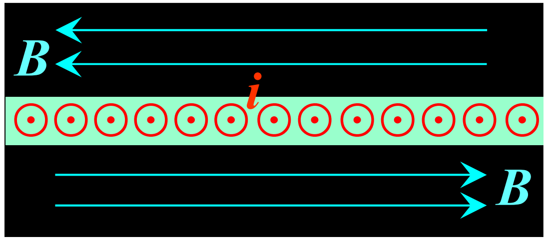
(1) $y>>a$, P点离平面电流很远 $\tan^{-1}\frac{a}{2y}\approx\frac{a}{2y}$

$$B=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2y}\approx\frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$ 相当于一根无限长直导线

(2) $a\to\infty$, 无限宽平面电流

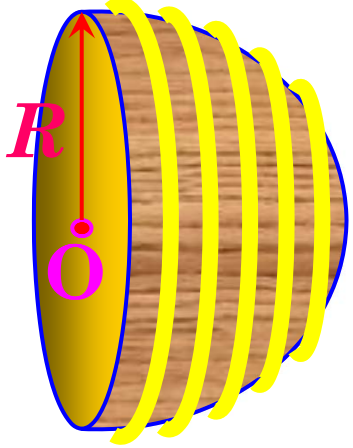
电流线密度 $i=I/a$ $\tan^{-1}\frac{a}{2y}\to\tan^{-1}\infty\approx\frac{\pi}{2}$

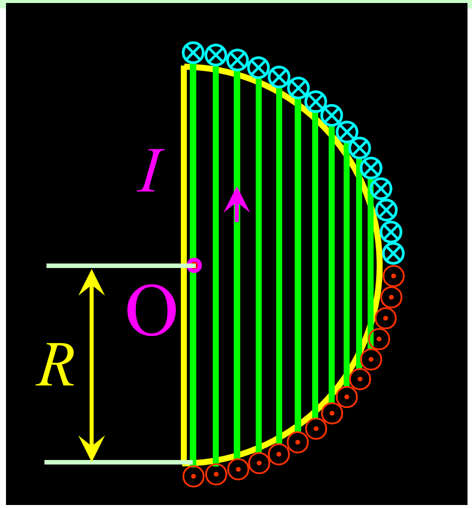
$$B=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2y}=\frac{\mu_0 i}{2}$$



例: 在半径为R的木球上密绕着细导线，相邻的线圈彼此平行地靠着，以单层排列并盖住半个球面，共有N匝，当导线中通有电流 I 时，求球心O处的磁感应强度.

解: 建立坐标系，如图所示

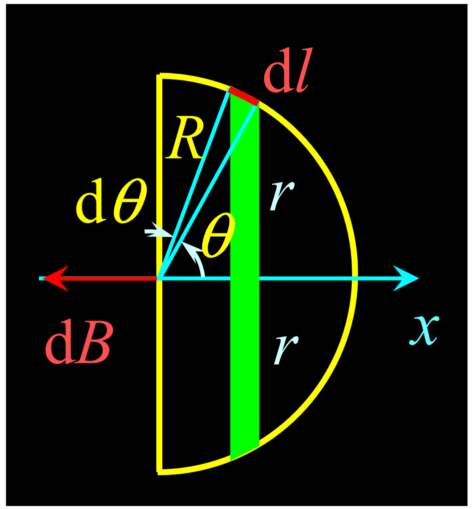




单位弧长的匝数为: $n=\dfrac{N}{\pi R/2}$

θ处$\mathrm{d}\theta$圆心角的匝数为:

$$\mathrm{d}N=n\mathrm{d}l=\frac{N}{\pi R/2}R\mathrm{d}\theta=\frac{N}{\pi/2}\mathrm{d}\theta$$



1匝线圈在球心O处的磁感应强度.

$$B=-\frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$

d*N*匝线圈的电流在圆心O处产生的磁感应强度

d*B*的方向都为负*x*方向，大小为:

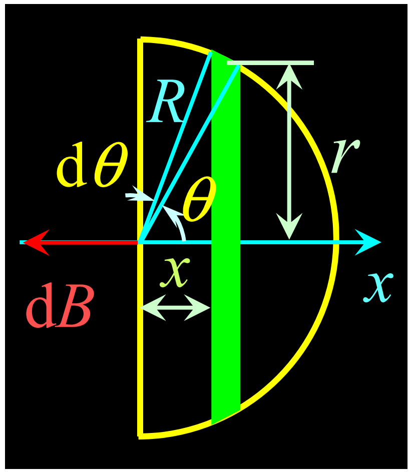
$$\mathrm{d}B=\mathrm{d}B_x=-\frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}N=-\frac{\mu_0 I r^2}{2R^3}\mathrm{d}N$$

$$=-\frac{\mu_0 I(R\sin\theta)^2}{2R^3}\frac{N}{\pi/2}\mathrm{d}\theta=-\frac{\mu_0 N I\sin^2\theta}{\pi R}\mathrm{d}\theta$$

由于**d*B*的方向都为负*x*方向**

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^{\pi/2}(-\frac{\mu_0 N I\sin^2\theta}{\pi R})\mathrm{d}\theta$$

$$=(-\frac{\mu_0 N I}{\pi R})\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{\mu_0 N I}{4R}$$

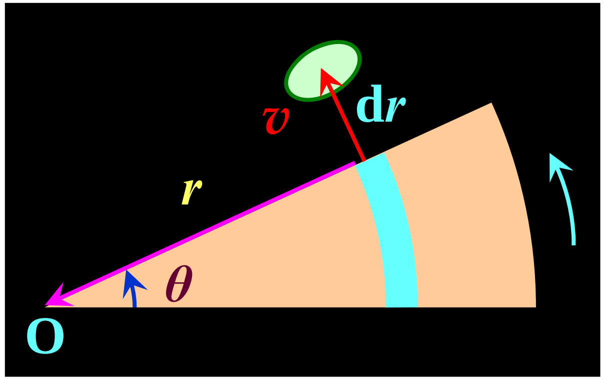


方向为负*x*方向

注意
积分限

圆周运动的带电体所产生的磁场

例: 一扇形塑料片, 半径为R,张角为θ, 表面均匀带电,电荷面密度为σ. 现使扇形薄片绕过O点并垂直于表面的轴线逆时针转动,转速为每秒n转. 求: O点处的磁感应强度



解: 解法一: 等效圆电流法

微元的电量 $dq=\sigma\theta r dr$

dt 时间内旋转的次数为ndt

dt 时间内通过截面的电荷电量

$$dq'=dq\cdot ndt=ndt\sigma\theta rdr$$

一次通过的电量

通过的次数

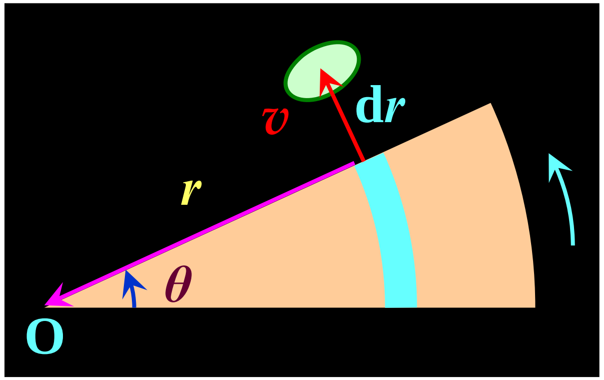
等效电流为 $$dI=\frac{dq'}{dt}=ndq=n\sigma\theta rdr$$

该等效圆电流在O点所产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0 n\sigma\theta r}{2r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 n\sigma\theta}{2}\mathrm{d}r$$

方向为垂直扇形向外

O点处的磁感应强度



$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0 n\sigma\theta}{2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 n\sigma\theta R}{2}$$

方向为垂直扇形向外

小结: 利用毕奥-萨伐尔定律求磁感应强度

(1) 建立适当的坐标系

(2) 选取电流元,用毕奥-萨伐尔定律求出该电流元在所求点所产生的磁感应强度,并判断其方向.

有时可以用已知磁感应强度的载流导线(如圆线圈、无限长直导线等)代替电流元.

(3) 对电流分布进行对称性分析,找到要求的分量,据此分析求出电流元所产生磁场磁感应强度在各要求方向的分量.

(4) 用磁感应强度叠加原理将各个方向磁感应强度分量相加或积分.

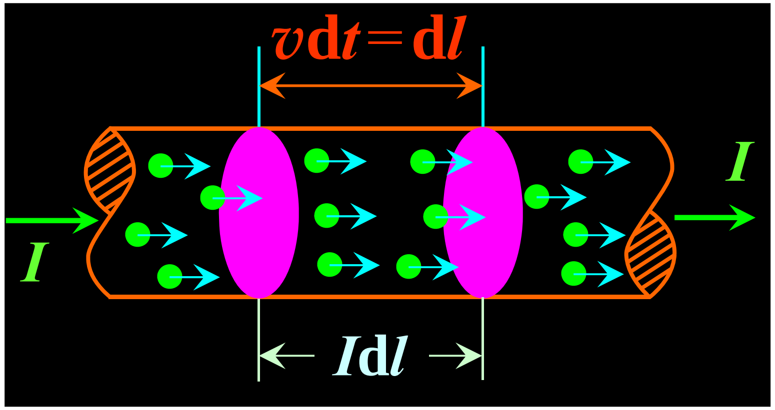
(5) 求出磁感应强度的大小和方向.

问题: 电流中每个运动电荷对磁场的贡献

三. 运动电荷的磁场

电荷的定向运动→电流.

设电荷密度n，每电荷的带电量q (假定正电荷)，运动速度v，电流元$I\mathbf{d}l$，导体的截面S，则$\mathbf{d}t$时间内流过截面S的电量为:



$$\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t = qnSv\mathrm{d}t$$

故: $I = qnvS$

电流元$I\mathrm{d}l$产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

电流元$I\mathrm{d}l$内有带电粒子数 $\mathrm{d}N = n\mathrm{d}V = nS\mathrm{d}l$

设$\mathrm{d}B$为这些运动粒子所激发的磁场，则每个粒子(磁场方向相同)所激发的磁场为B:

为什么能除带电粒子数?

$$\vec{B}=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N}=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}\right)/\mathrm{d}N$$

正电荷$\boldsymbol{v}$与$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$的方向一致

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qvnS\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}/nS\mathrm{d}l$$

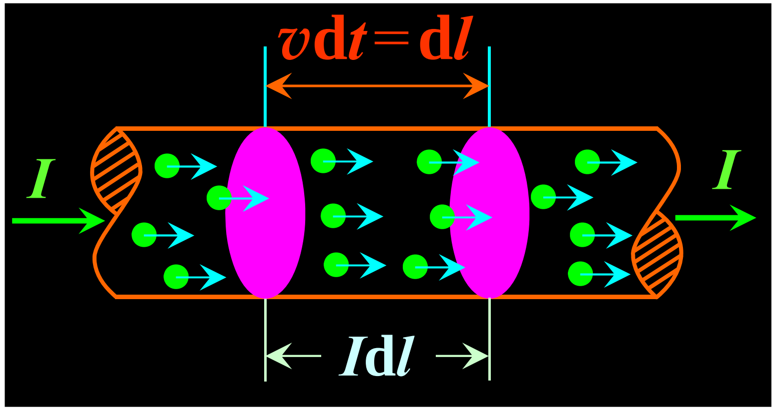
$\boldsymbol{v}$与$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$交换矢量符号

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnS\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}\mathrm{d}l/nS\mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

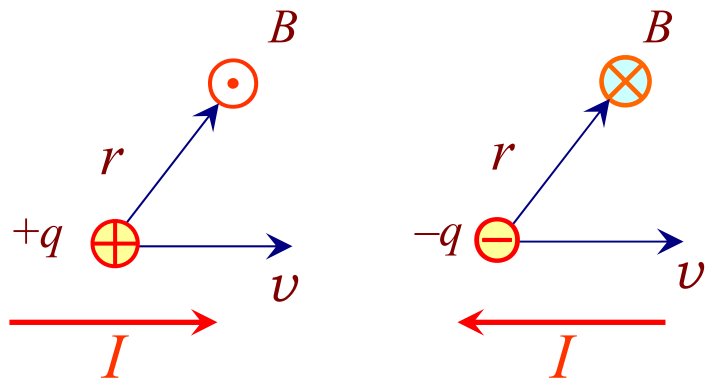
运动电荷的磁场

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}}$$

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$



关于运动电荷磁场的方向,见下图:



电子时, $\vec{v}$ 与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 方向相反, 故 $\vec{v}$ 是负的, 而$\boldsymbol{q}$也是负的

例: 一扇形塑料片, 半径为R,张角为θ, 表面均匀带电,电荷面密度为σ. 现使扇形薄片绕过O点并垂直于表面的轴线逆时针转动,转速为每秒n转. 求: O点处的磁感应强度.

解法二: 运动电荷的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$\mathrm{d}q=\sigma\theta r\mathrm{d}r$$

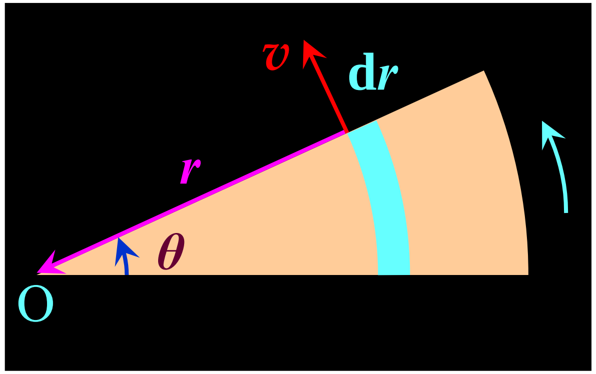
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 v\sin 90^\circ \mathrm{d}q}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0\omega r\mathrm{d}q}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 2\pi n r\sigma\theta r\mathrm{d}r}{4\pi r^2}$$

$$=\frac{\mu_0 n\sigma\theta}{2}\mathrm{d}r$$ 方向为垂直扇形向外

O点处的磁感应强度

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0 n\sigma\theta}{2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 n\sigma\theta R}{2}$$

方向为垂直扇形向外

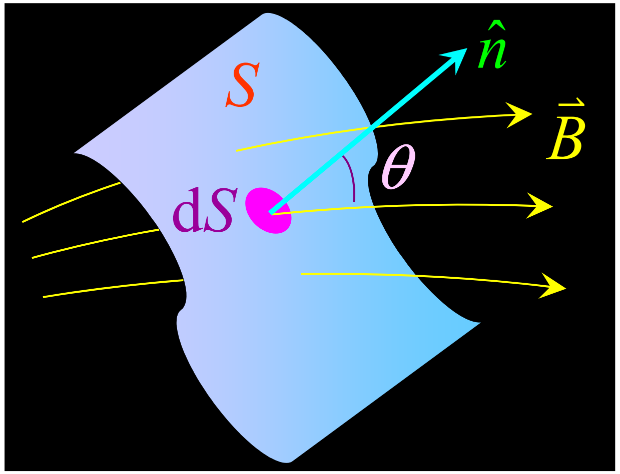


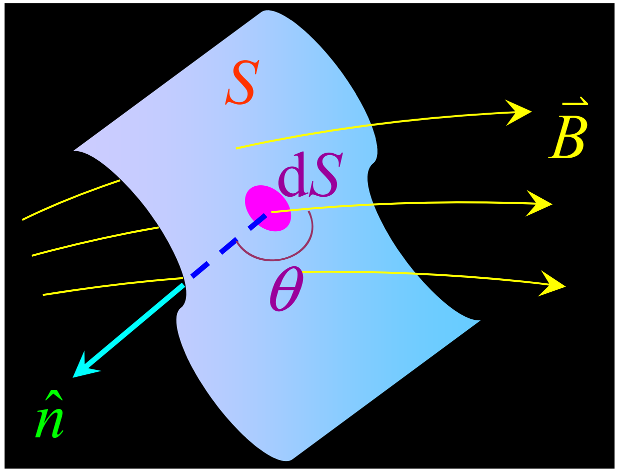
求磁感应强度是否有更简单的方法? 如高斯定理

§ 12-3 磁场的高斯定理 安培环路定理

一、磁通量

通过一给定面积的总磁感应线数, 用$\boldsymbol{\Phi_B}$表示:





1. 通过面元的磁通量

如图dS的法线与磁感应强度方向间的夹角为θ, 则通过dS的磁通量为:

$$\mathrm{d}\Phi_B = B\mathrm{d}S_{\perp} = B\cos\theta\,\mathrm{d}S \qquad \text{或} \qquad \mathrm{d}\Phi_B = \vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{S}$$

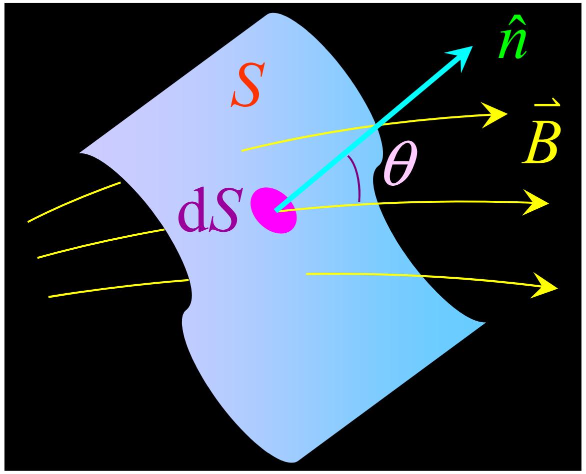
2. 通过任意曲面的磁通量

曲面的法线方向 → 可任意取

但**只能在曲面的同一侧**

通过有限曲面S的磁通量为:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$$



磁通量的单位韦伯**Wb (T.m^2),**

1T = 1Wb/m^2.

3. 通过闭合曲面的磁通量

闭合曲面的法线方向 → 外法线

$$\Phi_B = \oint\!\!\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

二、磁场中的高斯定理

磁感应线是无始无终的闭合线，从一闭合面穿进的磁力线，必从另一处穿出.

对闭合曲面，取外法线方向为正. 磁力线穿出闭合曲面，磁通量为正，穿入为负，则对闭合曲面:

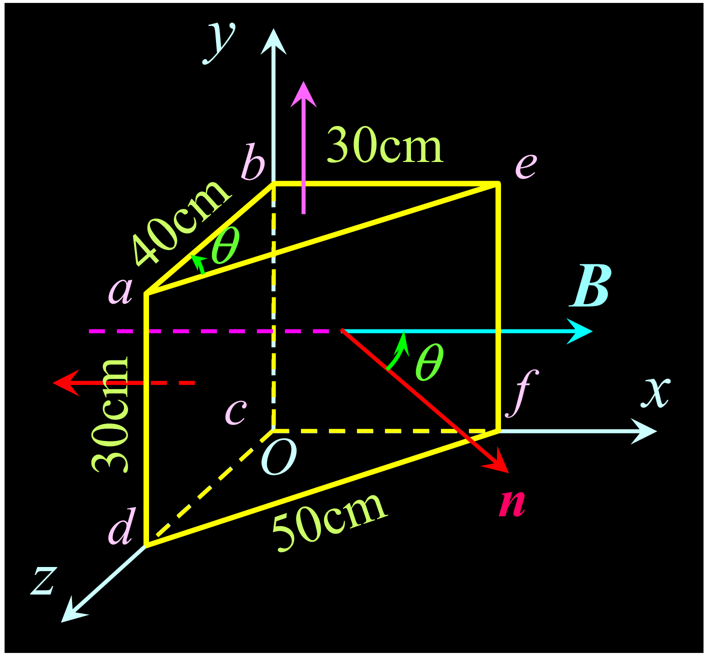
$$\oiint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

此式称为磁场中的高斯定理,与电场中的高斯定理相对应.

即：磁场中通过任何一闭合曲面 S 的磁通量恒等于0.

磁场中的高斯定理反映了涡旋场的特性，电场中的高斯定理反映了有源场的特性.

例: 已知B=2.0T, 方向沿x正方向, 如图所示, 求通过abcd, befc, aefd面的磁通量



解: 取外法线, 由于匀强磁场

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S B\cos\theta \mathrm{d}S$$

$$= B \cdot \cos\theta S$$

$$\Phi_{abcd} = B\cos 180° S_{abcd}$$

$$= -0.24\ (\mathrm{Wb})$$

$$\Phi_{befc} = B\cos 90° S_{befc} = 0\ (\mathrm{Wb})$$

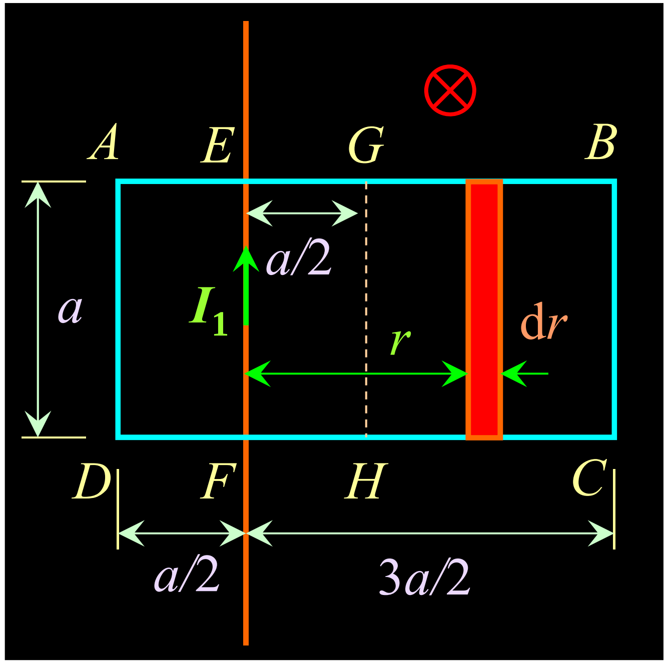
$$\Phi_{aefd} = B\cos\theta S_{aefd} = 2\times(4/5)\times 0.5\times 0.3 = 0.24\ (\mathrm{Wb})$$

$$\Phi_{abe} = \Phi_{dfc} = B\cos 90° S_{abe(dfc)} = 0\ (\mathrm{Wb})$$

$$\Phi_{Bm} = \oiint_S \vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{S} = -0.24+0+0.24+0+0 = 0\ (\mathrm{Wb})$$

例: 一长$2a$, 宽为a的矩形导线回路与无限长直载流导线I_1共面放置, 如图所示, 求矩形回路的磁通量.

解: (1) 电流I_1产生的磁场为 $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$



设矩形线圈平面的法向为垂直纸面向内. 通过矩形回路的磁通量由三部分组成,即面积AEFD、EGHF、GBCF

$$\mathrm{d}\Phi_B=\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cos\theta\cdot a\mathrm{d}r$$

因 $\Phi_{B(\mathrm{AEFD})}+\Phi_{B(\mathrm{EGHF})}=0$

$$\Phi_B=\Phi_{B(GBCH)}=\iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_{a/2}^{3a/2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cos 0^\circ\cdot a\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}(\ln\frac{3a/2}{a/2})=\frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}\ln 3$$

三、安培环路定理

我们在研究静电场时，
得静电场的环流为零，

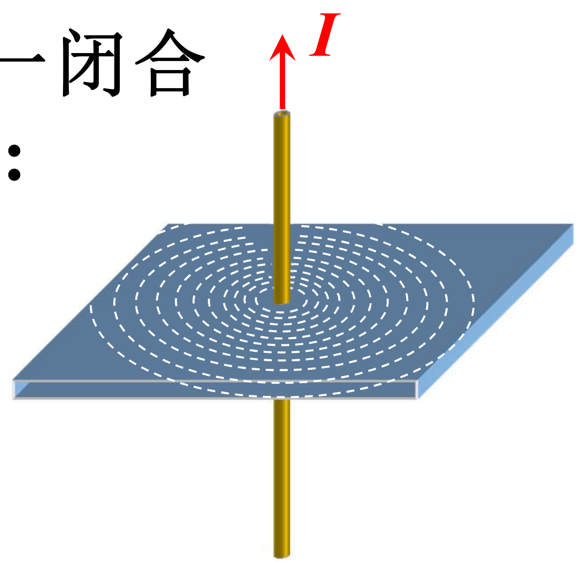
$$\oint_L \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

磁场中 $\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = ?$

由于磁感应线是闭合的，**B**的环流可不为零.

以长直导线为例来研究磁感应强度的环流：

在垂直于导线的平面内作一闭合曲线，线上任一点的磁感应强度：

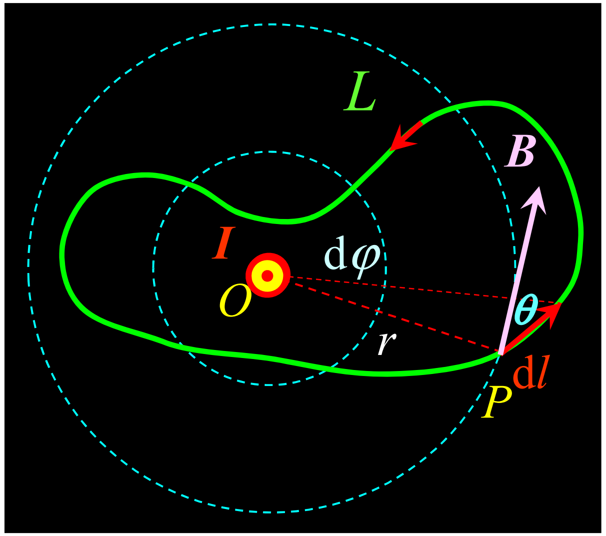


$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

I为导线电流，***r***为考察点的距离

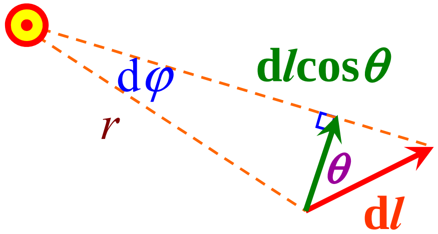
1. 闭合回路包围电流

(1) 按如图(右手螺旋关系)的绕行方向沿闭合曲线B矢量的环路积分为:



$$\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$= \oint_L Br\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r\mathrm{d}\varphi$$



$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \mu_0 I$$

图中 $\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}\varphi$

?

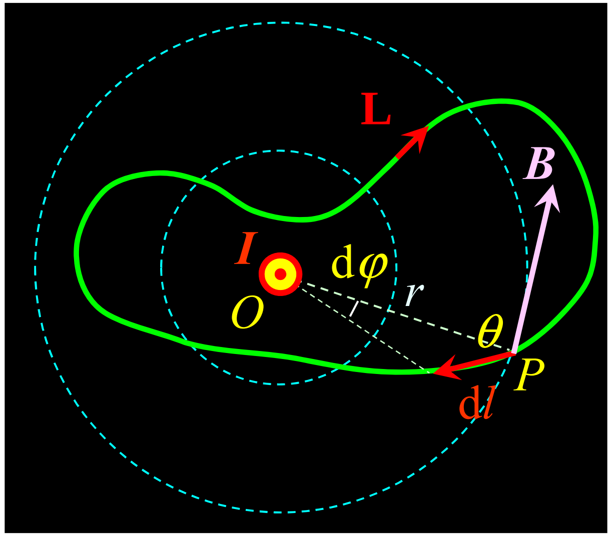
(2) 若不成右手螺旋关系

$$\mathrm{d}l\cos\theta = -r\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot(-1)\cdot r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot(-1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\mu_0 I = \mu_0(-I)$$



把上式的负号放入电流中, 即 $-\mu_0 I = \mu_0(-I)$

可以认为对闭合曲线的绕行方向与电流不成右手螺旋关系, 电流取负值.

$$\oint_L \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I & I\text{与}L\text{成右手螺旋关系} \\ \mu_0(-I) & I\text{与}L\text{成反右手螺旋关系} \end{cases}$$

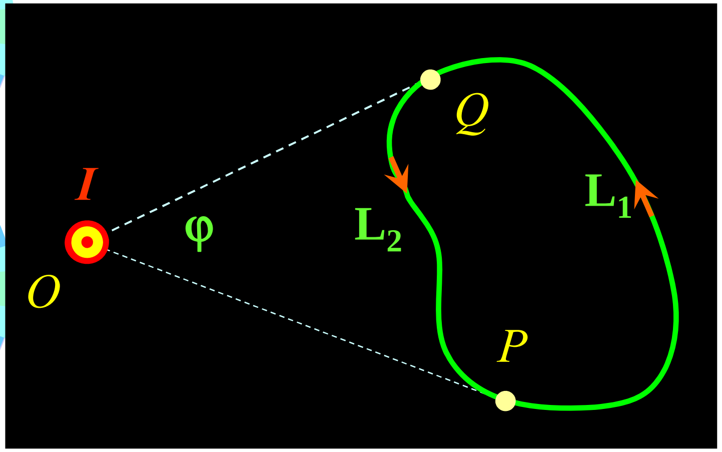
2. 闭合回路不包围电流

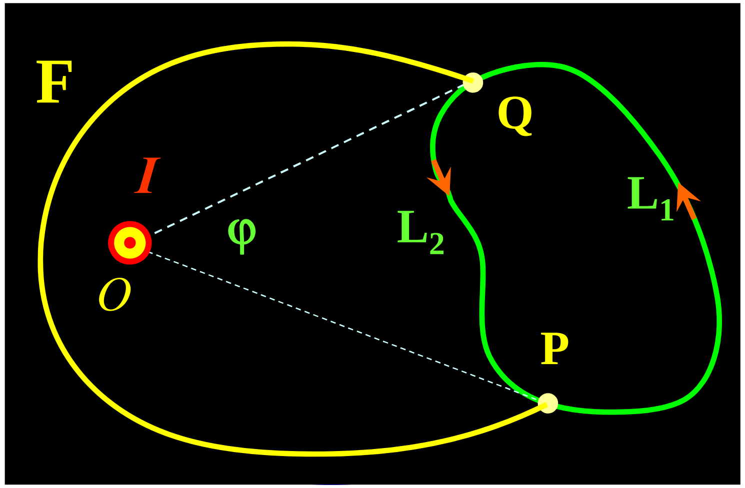
$$\oint_{QFPL_1Q}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\oint_{QL_2PFQ}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I-\mu_0 I=0$$

$$=\int_{QFP}\vec{B}\bullet d\vec{l}+\int_{L_1}\vec{B}\bullet d\vec{l}+\int_{PFQ}\vec{B}\bullet d\vec{l}+\int_{L_2}\vec{B}\bullet d\vec{l}$$

$$=\int_{L_1+L_2}\vec{B}\bullet d\vec{l}=\oint_L\vec{B}\bullet d\vec{l}=0$$

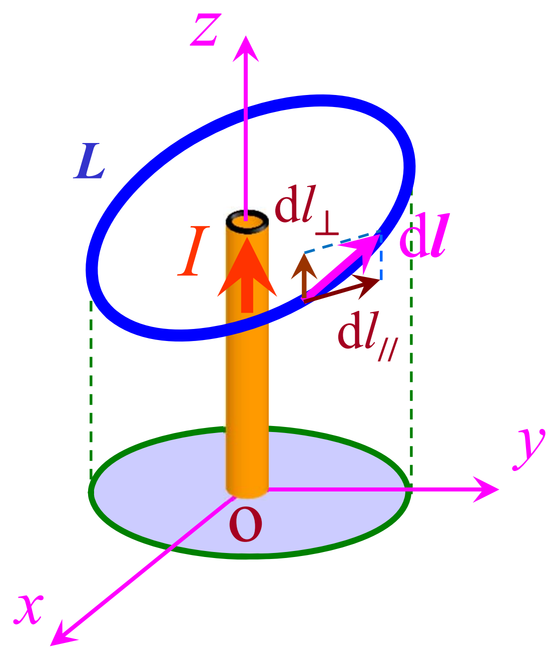
即闭合曲线不包围电流时, ***B***矢量的环流为零.





3. 闭合回路不在垂直于导线的平面内

若闭合回路不在垂直于导线的平面内，可将d*l*分解为垂直于*xy*平面的$\mathbf{d}\boldsymbol{l}_\perp$和平行于*xy*平面的$\mathbf{d}\boldsymbol{l}_{//}$



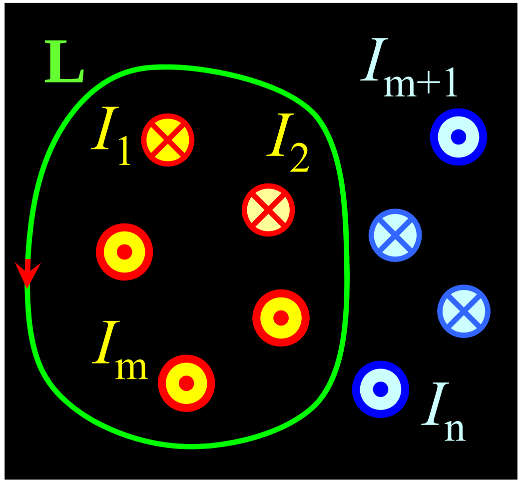
$$\because \quad \vec{B} \perp \mathrm{d}\vec{l}_\perp \qquad \therefore \quad \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l}_\perp = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B} \bullet (\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \mathrm{d}\vec{l}_\perp)$$

$$= \oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l}_{//} = \mu_0 I$$

对于任意形状的载流导线，上面关系都成立

4. 闭合回路包围多根电流



$$\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i) \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L (\sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l}) = \sum_{i=1}^{n} \oint_L \vec{B}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \oint_L \vec{B}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \sum_{i=m+1}^{n} \oint_L \vec{B}_i \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{m} I_i$$

5. 磁场的安培环路定理

在一般情况下： $$\boxed{\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{in} I_i}$$

称为安培环路定理. 表述如下：

安培环路定理: 在磁场中, 沿任何闭合曲线B矢量的线积分 (或B矢量的环流), 等于真空的磁导率μ_0乘以穿过这个闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和 (即曲线所包围的).

(1) 环路定理中电流值的正负,由右手螺旋法则决定

(2) 环路定理中电流I只包括穿过环路的电流,
但定理中的磁场由环路内外的所有电流决定

(3) B矢量的环流不为零,表明磁场为非势场.
磁场中不能引入标量势的概念

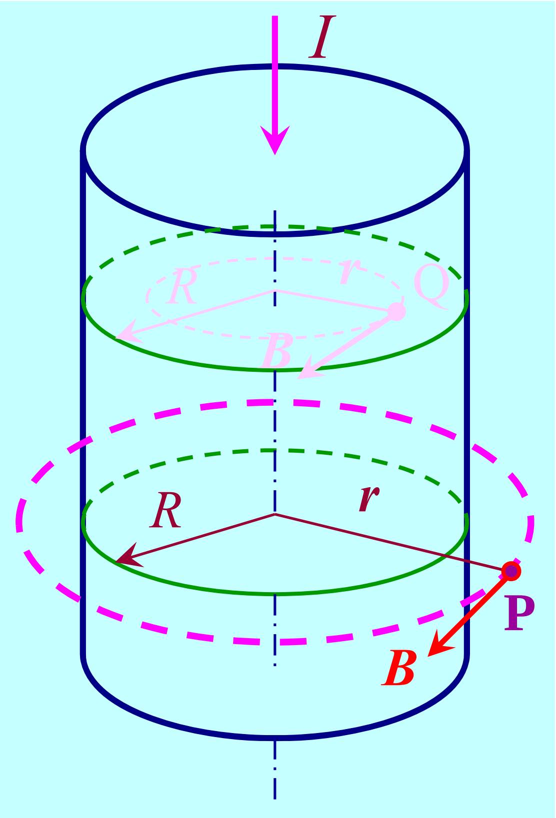
(4) 满足一定条件下,可以求解磁感应强度B.

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{in} I_i}$$

四、安培环路定理的应用(★)

1. 长直圆柱形载流导线内外的磁场

设: 圆柱截面半径为R电流I沿轴流动, 过P点(或Q点)取半径为r的磁感应线为积分回路, 环路的方向与电流成右手螺旋关系, 则B矢量的环流为:



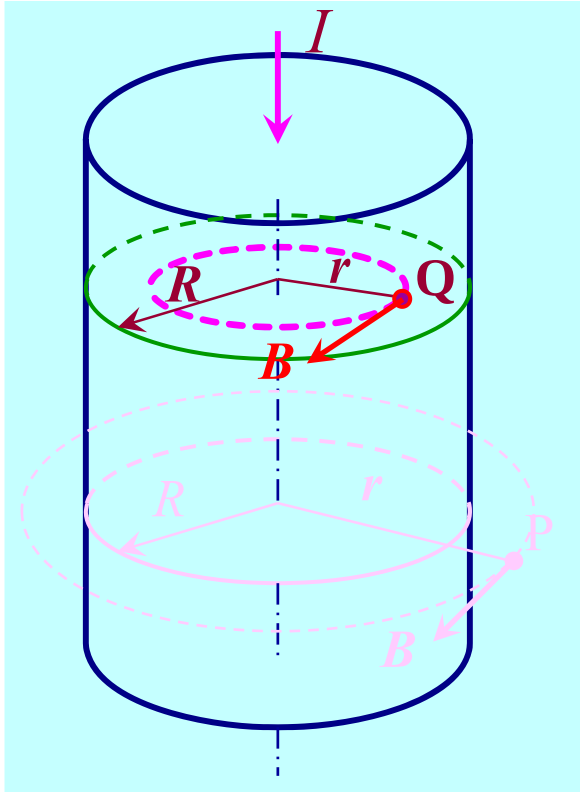
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cdot\cos\theta\, dl = B\cdot 2\pi r$$

(1) 当$r > R$ (图中P点)

由环路定律 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{in} I_i$

得: $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$　即: $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$　方向与电流成右手螺旋关系

(2)当$r<R$ (图中Q点) 可考虑两种情形



① 情形一: 电流分布在圆柱形导体表面, 由环路定律可知;

$B \cdot 2\pi r = 0$ 即: $\boxed{B = 0}$

② 情形二:电流均匀分布在圆柱形导体的截面上, 穿过积分回路的电流:

$$\sum_{in} I_i = j \cdot S = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

所以, 应用安培环路定律得:

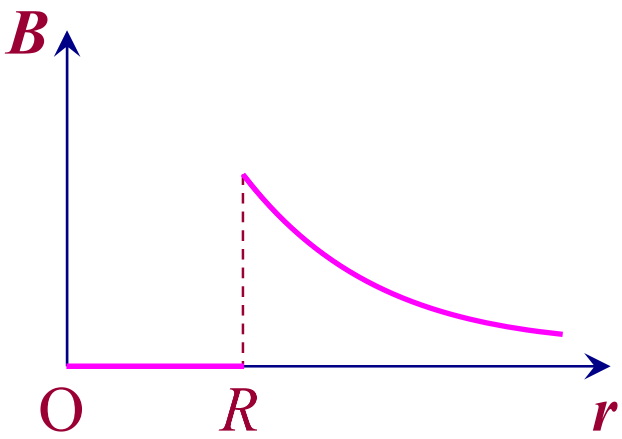
$$\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

Q点的磁感应强度为:

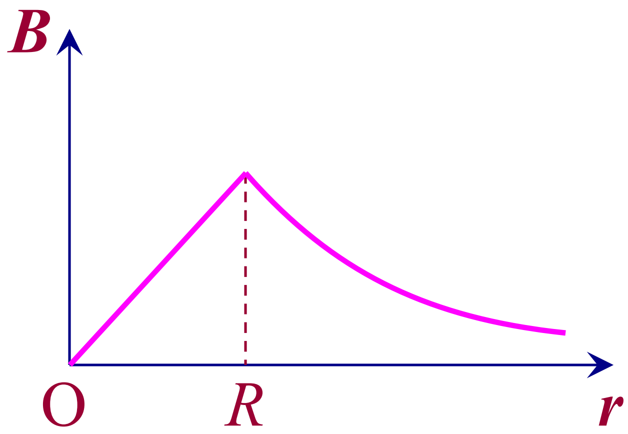
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}}$$

方向与电流成右手螺旋关系

两种情形的磁场分布



电流分布在导体侧面时

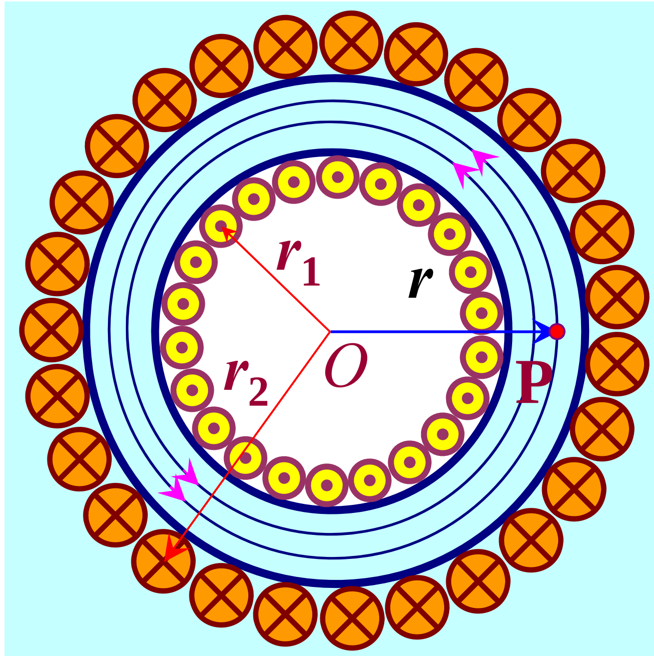


电流均匀分布在导体截面时

思考题: 有限长载流导线可否用安培环路定理求磁感应强度?

为什么?

2. 载流螺绕环内的磁场



设环上线圈的总匝数为N，
电流为I

(1) 环内：

考虑到对称性，环内磁场的磁感应线都是同心圆，选择通过管内某点P的磁感应线L作为积分环路，环路的方向与电流成右手螺旋关系，则B矢量的环流：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}l = B\cdot 2\pi r$$

由环路定律：$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$

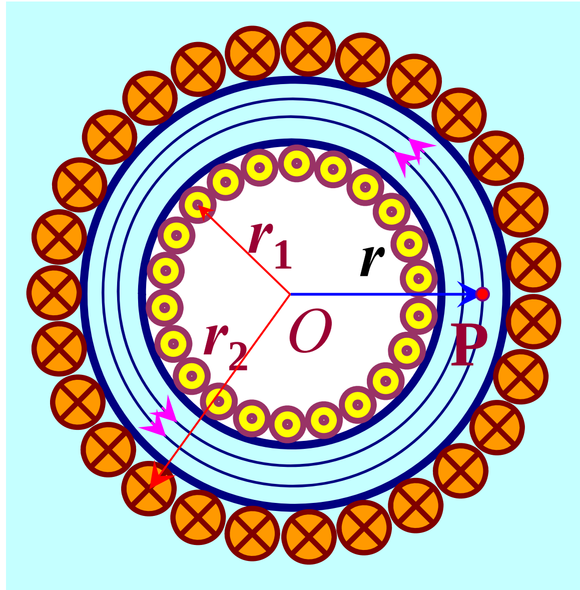
计算得P点的磁感应强度为：$\boxed{B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$

r相同，则B相等

当r_2-r_1远小于环的平均半径r时，令$l=2\pi r$则：

$$B=\frac{\mu_0 NI}{l}=\mu_0 nI$$

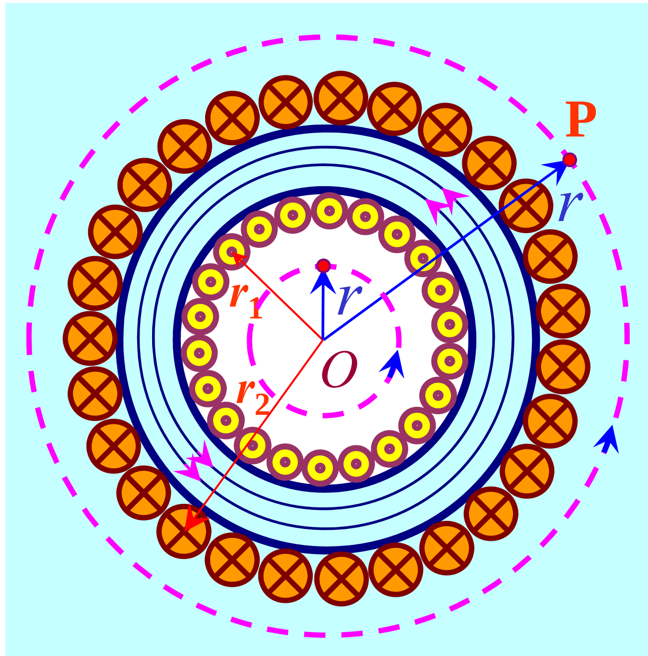
n为螺绕环单位长度上的匝数，B的方向与电流流向成右手螺旋关系。



(2) 环外：环外的磁感应强度(包括圆环外区和内区)

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_L B\cdot\cos\theta\, dl$$

$$=B\cdot 2\pi r=\mu_0\sum_{in} I_i=0$$



$B=0$ 磁场全部集中在管内

★讨论: 当 $r_1 \to \infty$时, 保证n不变, 变成无限长螺线管

(i) 环外 $B=0$

无限长螺线管管外磁场为0

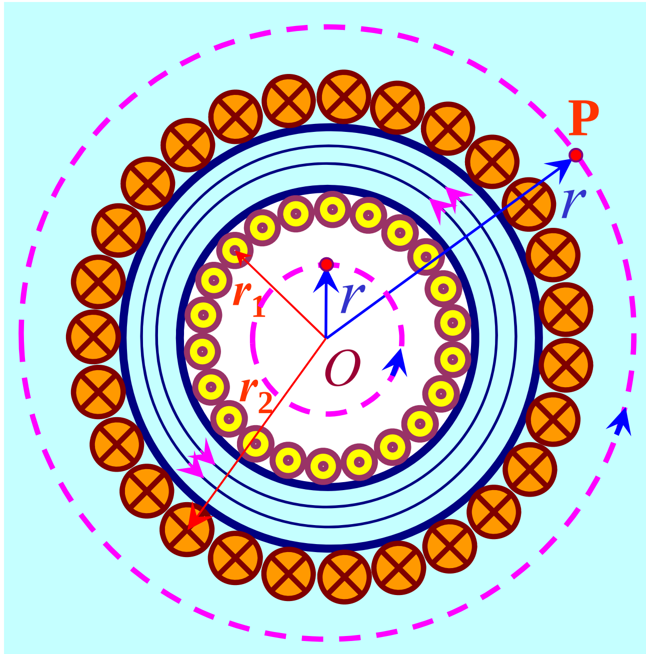
(ii) 环内轴线上

$$B=\mu_0 nI$$

方向与电流成

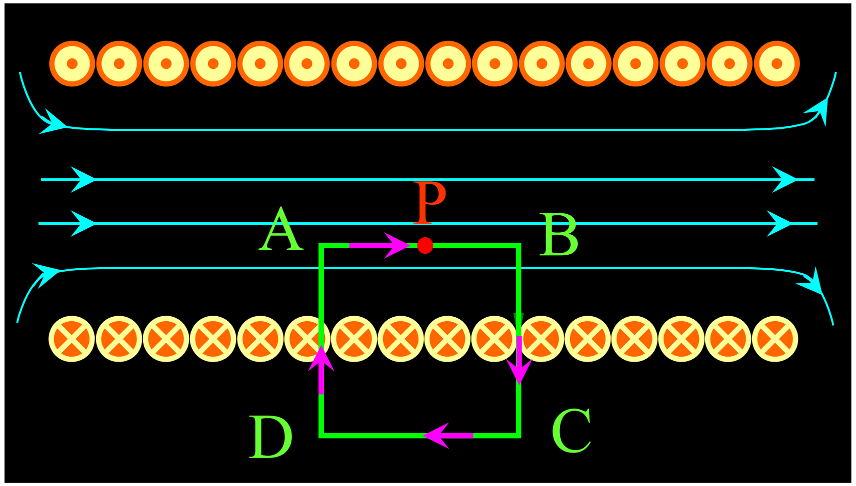
右手螺旋关系

(iii) 无限长螺线管管内, 与轴线距离相等的点其磁感应强度相等(相当于载流螺绕环内的r相同)



3. 载流长直螺线管内的磁场

设密绕长螺线管，单位长度的线圈匝数为n，通电流I，计算管内一点P处的磁感应强度. 过P点做闭合回路ABCD



CD段及BC和DA在管外部分 $B=0$，

BC和DA在管内部分，虽然$B\neq 0$，但dl与B垂直，

$$\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0$$

所以B矢量沿ABCD 的线积分为:

$$\oint_L \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_{AB}\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\int_{BC}\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\int_{CD}\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\int_{DA}\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{AB}\vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=B\cdot L_{\mathrm{AB}}$$

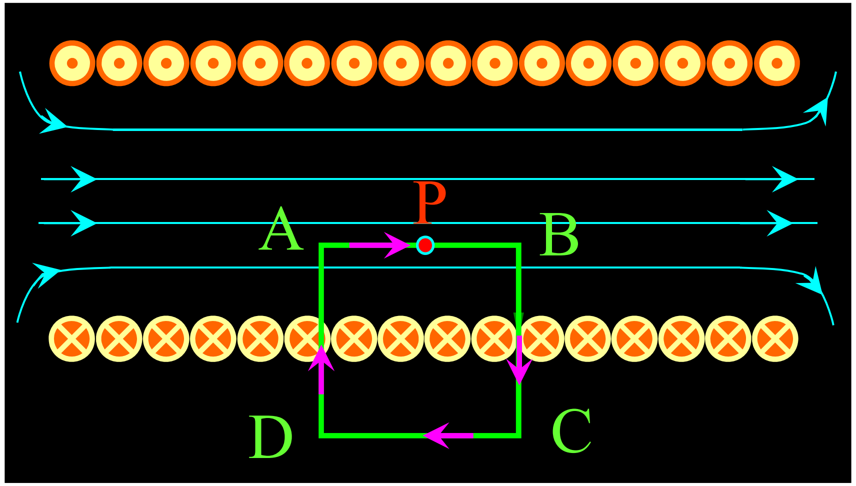
设螺线管长为l共有N匝, 则单位长度上有 $N/l=n$匝线圈.

回路ABCD包围的总电流为 $L_{AB}nI$

由安培环路定律: $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot L_{AB}=\mu_0 L_{AB}nI$

所以: $\boxed{B=\mu_0 nI}$

或: $B=\dfrac{\mu_0 NI}{l}$



方向与电流成右手螺旋关系

由于矩形回路为任取, AB段在管内任何位置, 上式均成立.

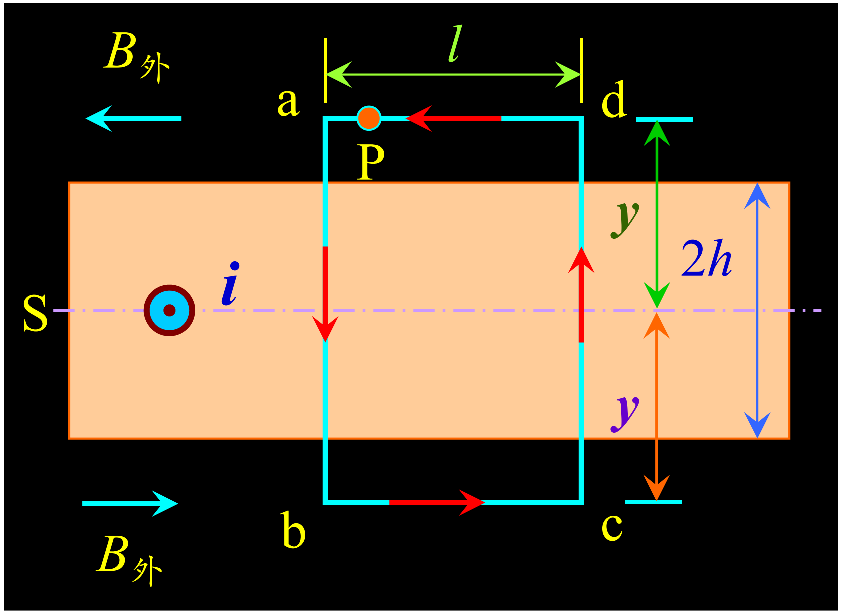
载流长直螺线管内的磁场为匀强磁场

例:有一厚度为2*h*的无限大导体平板,其内有均匀电流平行于表面流动，假设电流密度为*i*, 试求空间的磁感应强度的分布.

解:

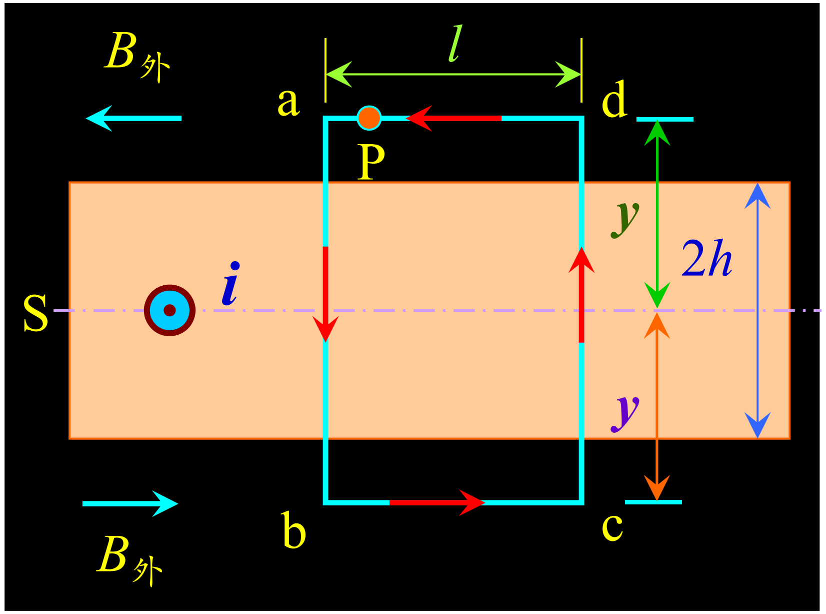
分析:

由板中电流的流向,很容易知道板外磁场的方向.而无限大厚导体板可以看成无限多个薄的无限大平板的叠加.



因此它产生的磁场是以板的厚度中心平分面为对称面而上下对称.

磁感应强度的大小与S面距离相等的点处都应相等.故这样取积分围线,通过要求的一点P,作一个矩形的积分围线abcd,其中ad与bc长为l,且处于与电流垂直的平面上并与S面平行,积分围线的方向与电流成右手螺旋关系.



根据安培环路定理:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{in} I_i$$

$$\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{(d)}^{(a)} \vec{B}_{外} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{(a)}^{(b)} \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{(b)}^{(c)} \vec{B}_{外} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{(c)}^{(d)} \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(d)}^{(a)} B_{外} \cos 0^\circ \mathrm{d}l + \int_{(a)}^{(b)} B \cos\frac{\pi}{2} \mathrm{d}l$$

$$+ \int_{(b)}^{(c)} B_{外} \cos 0^\circ \mathrm{d}l + \int_{(c)}^{(d)} B \cos\frac{\pi}{2} \mathrm{d}l$$

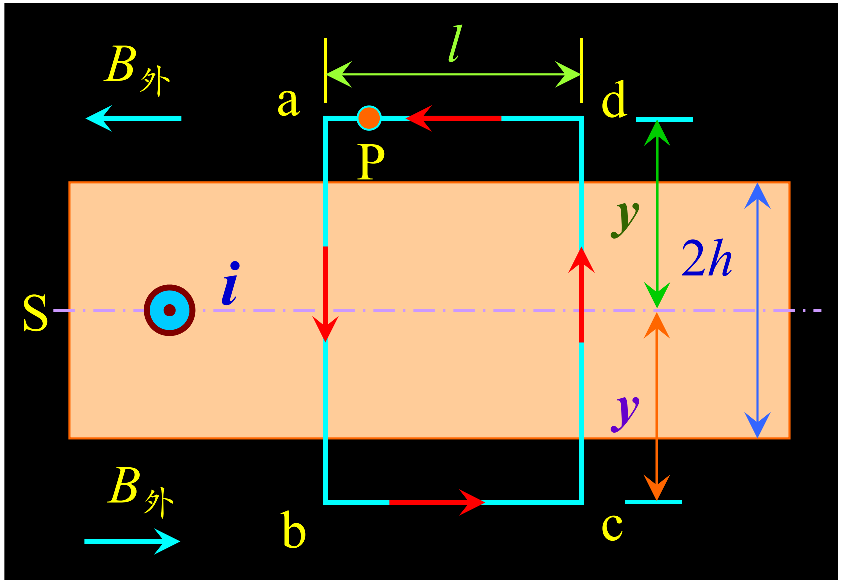
$$= B_{外} l + 0 + B_{外} l + 0$$

$$= 2B_{外} l$$

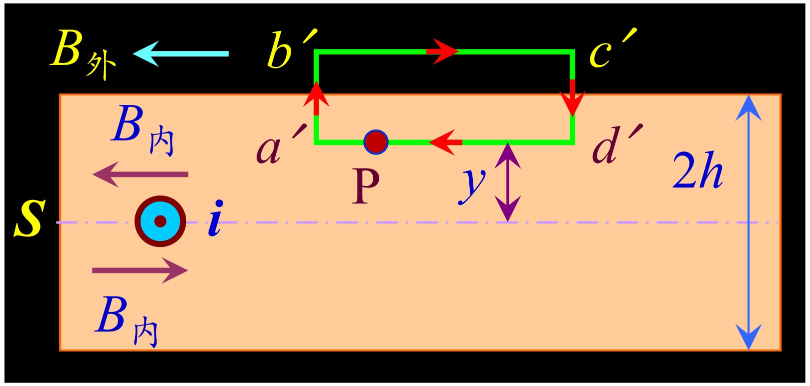
$$= \mu_0 S i = \mu_0 2hli$$

$$B_{外} = \mu_0 hi$$

方向与电流成右手螺旋关系



在导体内取同样的积分围线a′b′c′d′, 设a′d′离S面的距离为y, 则由安培环路定理



$$\oint_L \vec{B}\bullet d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{in}} I_i$$

$$= \int_{(d')}^{(a')} \vec{B}_{内}\bullet d\vec{l} + \int_{(a')}^{(b')} \vec{B}\bullet d\vec{l} + \int_{(b')}^{(c')} \vec{B}_{外}\bullet d\vec{l} + \int_{(c')}^{(d')} \vec{B}\bullet d\vec{l}$$

$$= B_{内} l + 0 + (-)B_{外} l + 0$$

$$B_{外} = \mu_0 hi$$

$$= B_{内} l - B_{外} l = \mu_0 \{-[(h-y)li]\}$$

Why "–"

$$B_{内} = -\mu_0 (h-y)i + B_{外} = -\mu_0(h-y)i + \mu_0 hi$$

$$= -\mu_0 hi + \mu_0 yi + \mu_0 hi = \mu_0 yi$$

$$B_{内} = \mu_0 yi$$ 方向与电流成右手螺旋关系

小结: 用安培环路定理求磁感应强度:

(1)对电流分布进行对称性分析, 说明电流产生磁场的特点.

(2)根据磁场的对称性情况取适当的积分环路, 并指明积分环路的方向.

四种对称, 两种积分回路

(3) 根据所取的积分环路对磁感应强度矢量求环流.

(4)判断积分环路所围的电流并根据积分环路方向求出各电流的代数值.

(5)利用安培环路定理求出磁感应强度的大小, 并说明其方向.

两种求磁感应强度方法的比较:

(1)利用毕奥-萨伐尔定律求磁感应强度的方法，理论上可以求出任意电流所激发的磁场, 但由于磁感应强度是一个矢量，因此求矢量和，必须将电流元的磁感应强度分解到各个分量后才能求解，过程比较烦琐.

(2)与利用毕奥-萨伐尔定律相反，利用安培环路定理求解磁感应强度时，过程比较简单, 但由于要求产生磁场的电流分布对称性要比较好，使得在积分环路上磁感应强度都相同或者与环路的垂直，因此该方法使用的范围比较窄.

(3) 将安培环路定理和叠加原理结合起来求解磁感应强度.