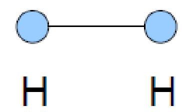
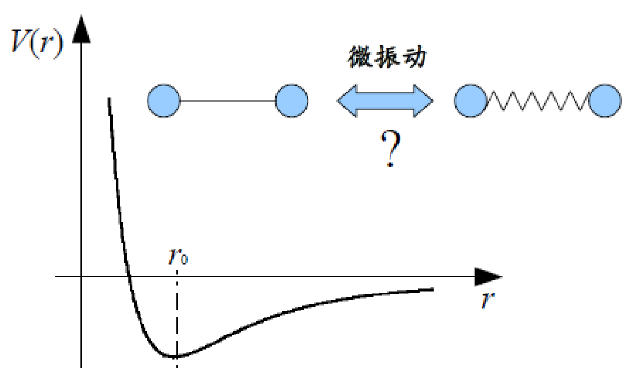
拉格朗日方程的典型应用：多自由度系统的微振动

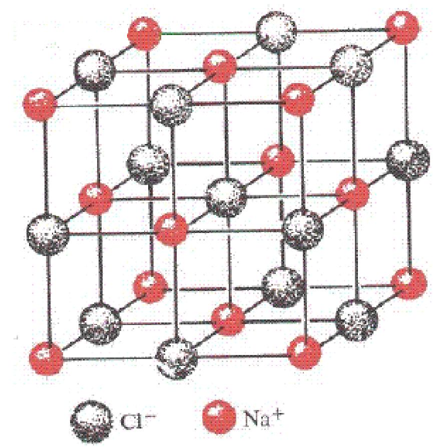
- 问题的背景

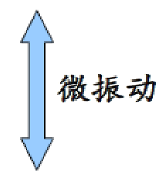
世界是由原子
和分子组成的



在真实世界中原子总是在
平衡位置附近作小幅振动





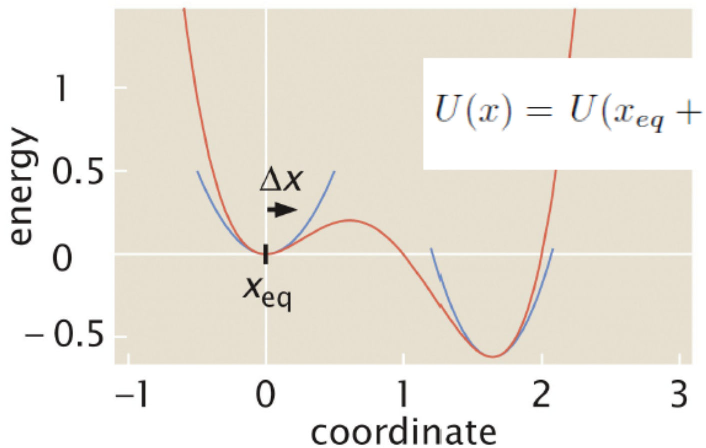


弹簧质点系统
（多自由度）

广义的振动：描述系统状态的参量（如位移、电压、波函数）在其基准值上下交替变化的过程。

微振动的能量

Potential energy near equilibrium point



$$U(x) = U(x_{eq}+\Delta x) \approx U(x_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{eq} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{eq} \Delta x^2$$

$$\mathrm{d}U/\mathrm{d}x|_{eq} = 0$$

$$\Rightarrow U(x_{eq}+\Delta x) \approx U(x_{eq}) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{eq}}_{\text{stiffness}}\Delta x^2$$

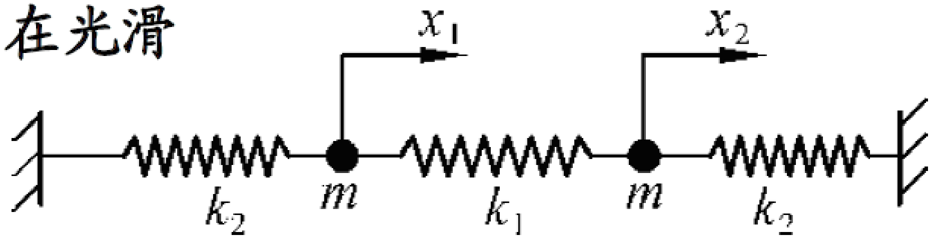
N-dimension: quadratic form

$$U(\boldsymbol{x}_{eq}+\Delta \boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x}_{eq}) + (\Delta x_1 \;\; \Delta x_2 \;\; \cdots \Delta x_N)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_N^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_N \end{pmatrix}$$

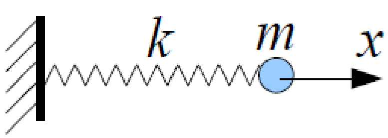
Stiffness matrix

• 简化模型（透视多自由度振动特征）

考虑两质量为 m 的质点，被限制在光滑水平线上运动，3 个轻弹簧沿该水平线连接两质点，中间弹簧的劲度系数为 k_1，两侧弹簧的劲度系数为 k_2，它的外端被固定，两质点静止时各弹簧无伸长.



回顾：



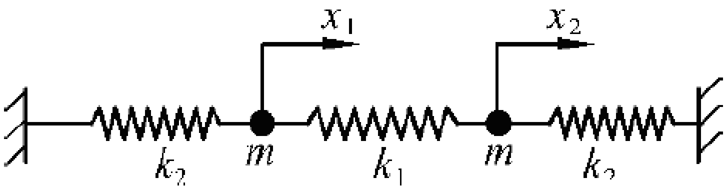
运动微分方程 $m\ddot{x}+kx=0$

固有频率方程 $\omega^2-m^{-1}k=0$

自然的问题：在多自由度振动中，上述方程是否有对应的形式？

- 简正频率（固有频率）和简正模式

如图所示，选取 x_1 和 x_2 作为广义坐标，分别表示两质点相对自身平衡位置的位移．(推导运动微分方程 ...)

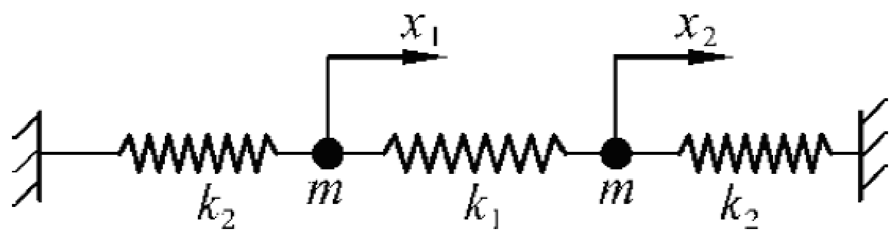


引入记号 $\underbrace{[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\text{系统质量矩阵（对称正定）}}$, $\underbrace{[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}}_{\text{系统刚度矩阵（对称正定）}}$, $\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

【定理】系统的运动微分方程为 $[M]\ddot{\boldsymbol{\psi}}+[K]\boldsymbol{\psi}=0$

与单自由度比较： $m\ddot{x}+kx=0$

证明思路:



系统拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_2}{2}x_1^2-\frac{k_2}{2}x_2^2-\frac{k_1}{2}(x_2-x_1)^2$$

特点：这里动能是广义速度的二次型，势能是广义坐标的二次型.

代入拉格朗日方程可得

$$m\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_1x_2=0$$

$$m\ddot{x}_2-k_1x_1+(k_1+k_2)x_2=0$$

写成矩阵形式即可.（证毕）

(推导频率满足的方程 ......)

【推论】系统的运动微分方程有 $\psi = A\cos(\omega t+\alpha)$ 形式的解，其中 ω 满足特征方程

$$det\left(\omega^2 I-[M]^{-1}[K]\right)=0 \quad 或 \quad det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

$$\omega^2 - m^{-1}k = 0 \qquad (单自由度对应)$$

证明思路:

$$[M]\ddot{\psi}+[K]\psi=0 \Rightarrow \ddot{\psi}+[M]^{-1}[K]\psi=0$$

这个方程类似于谐振子方程，故可猜测有 $\psi = A\cos(\omega t+\alpha)$ 形式的解.

将 $\psi = A\cos(\omega t+\alpha)$ 代入 $\ddot{\psi}+[M]^{-1}[K]\psi=0$ 可得

$$[M]^{-1}[K]\boldsymbol{A}=\omega^2\boldsymbol{A}$$

可见 A 是矩阵 $[M]^{-1}[K]$ 对应于特征值 ω^2 的特征向量.

故有 $det\left([M]^{-1}[K]-\omega^2 I\right)=0 \Rightarrow det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$ (证毕)

注：将矩阵 $[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$ 代入特征方程

$$det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0 \Rightarrow det\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2-\omega^2 m \end{bmatrix}=0$$

久期方程（**secular equation**）

$$\Rightarrow (k_1+k_2-m\omega^2)^2-k_1^2=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{k_2/m} \text{ 或 } \sqrt{(2k_1+k_2)/m}$$

【定义】简正频率：从特征方程解出来的频率

注：它只依赖于系统的质量矩阵和刚度矩阵，是系统固有的.

【定义】简正模式：简正频率对应的振动模式，即矩阵 $[M]^{-1}[K]$ 对应于简正频率平方的特征向量决定的振动模式.

简正频率又称为固有频率、主频率，简正模式又称为主振动。每一主振动中各振幅的比值，称为主振型，也叫主模态。

例题 6 分析系统的简正模式.

解：将 $\omega_1=\sqrt{k_2/m}$ 代入 $[M]^{-1}[K]\boldsymbol{A}=\omega_1^2\boldsymbol{A}$ 或 $([K]-\omega_1^2[M])\boldsymbol{A}=0$

可以得到 $\boldsymbol{A}\propto\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\psi_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)\propto\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$

此时二质点的步调完全一致，称为对称模式.

将 $\omega_2=\sqrt{(2k_1+k_2)/m}$ 代入 $([K]-\omega_2^2[M])\boldsymbol{A}=0$ 可得

$$\boldsymbol{A}\propto\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\psi_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\propto\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

此时二质点的步调完全相反，称为反对称模式.

注：系统微分方程的通解是上面两种模式的线性叠加，可写为

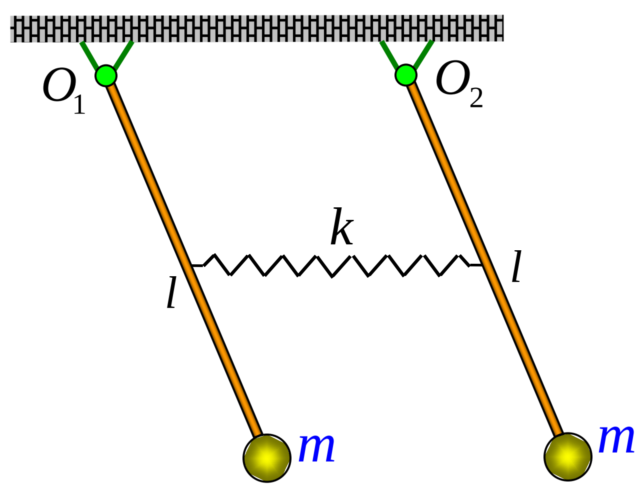
$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

这里 4 个待定实常数 $c_1,c_2,\alpha_1,\alpha_2$ 由初始条件来确定.

拉氏方程的应用

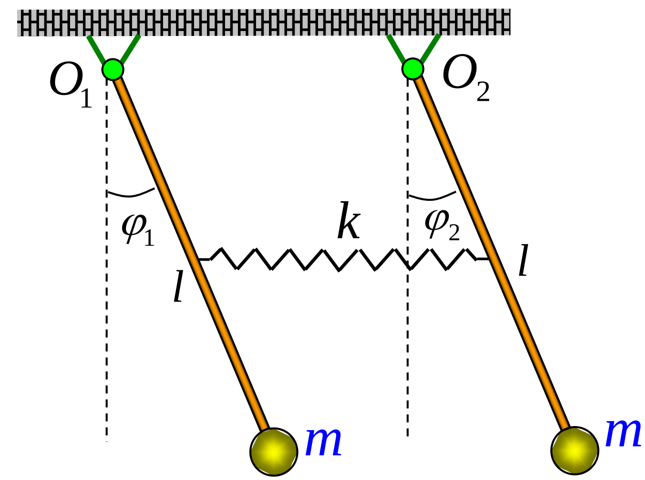
例题

两个相同单摆，用刚度为k的弹簧连接。已知 m, k, l, a，系统静止时，弹簧无变形，不计杆重。试求系统微振动的微分方程及固有频率。



拉氏方程的应用

解 8



1)自由度为2，选 φ_1,φ_2 为广义坐标

2)选平衡位置势能为0，则动势为

$$T=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}_1\right)^2+\frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}_2\right)^2$$

$$V=mgl\left[\left(1-\cos\varphi_1\right)+\left(1-\cos\varphi_2\right)\right]+\frac{1}{2}k\left(a\sin\varphi_2-a\sin\varphi_1\right)^2$$

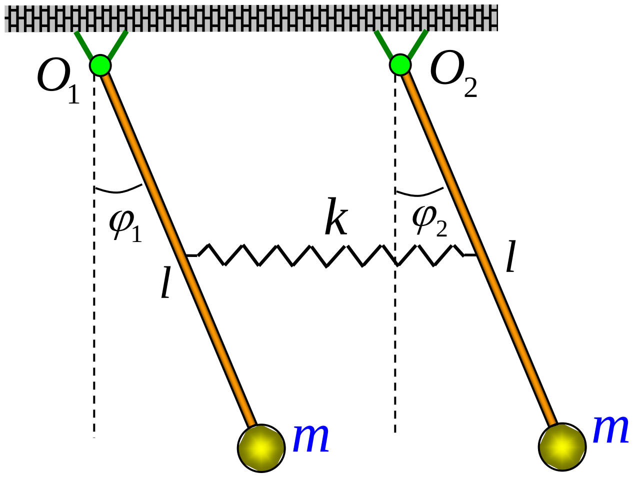
当 φ_1，φ_2 较小时，$1-\cos\varphi_i=\frac{1}{2}\varphi_i^2,\ \sin\varphi_i=\varphi_i$

$$V=\frac{1}{2}mgl\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)+\frac{1}{2}ka^2\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2-2\varphi_1\varphi_2\right)$$

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 \right) - \frac{1}{2} mgl \left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2} k a^2 \left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2 \right)$$



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = ml^2 \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -mgl\,\varphi_1 - k a^2 \varphi_1 + k a^2 \varphi_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml^2 \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -mgl\,\varphi_2 - k a^2 \left(\varphi_2 - \varphi_1 \right)$$

3)代入 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi_1}=0$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi_2}=0$ 中

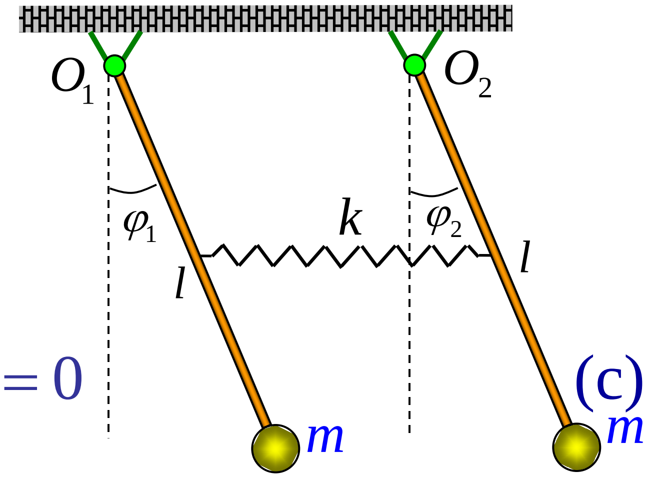
有 $$\begin{cases} ml^2\ddot{\varphi}_1+\left(mgl+ka^2\right)\varphi_1-ka^2\varphi_2=0 \\ ml^2\ddot{\varphi}_2+\left(mgl+ka^2\right)\varphi_2-ka^2\varphi_1=0 \end{cases}$$

即 $$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ka^2+mgl & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2+mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}=0 \quad \text{(a)}$$

设 $\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin\left(\omega_0 t+\alpha\right)$ ，代入式(a)，得

$$\left(K-\omega_0^2 M\right)\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ldots\text{(b)}$$

方程(b)有非0解条件，即频率方程为



$$\begin{vmatrix} ka^2+mgl-ml^2\omega_0^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2+mgl-ml^2\omega_0^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\left(ka^2+mgl-ml^2\omega_0^2\right)^2-k^2a^4=0$$

$$\omega_{01}=\sqrt{\frac{g}{l}},\ \omega_{02}=\sqrt{\frac{2ka^2+mgl}{m^2l}}$$

为系统的主频率。将 ω_{01} 代入式(b)

得

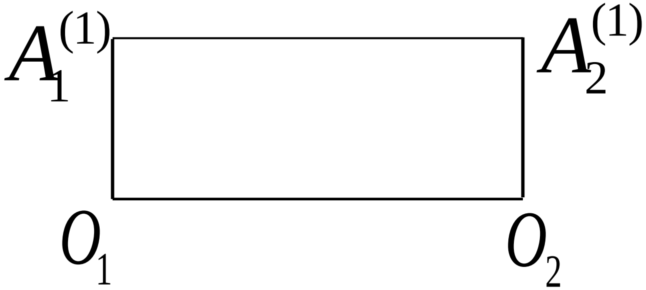
$$\begin{bmatrix} ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

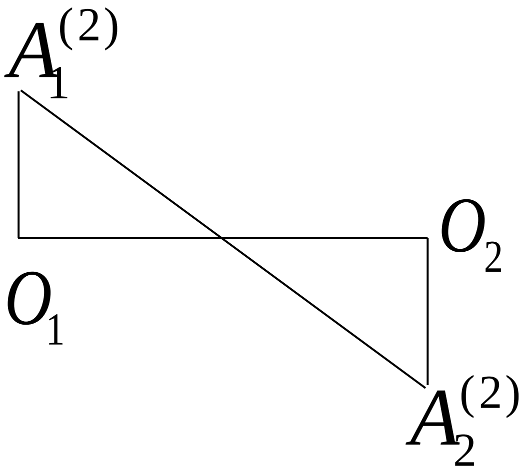
$A_2^{(1)}/A_1^{(1)}=1$ 为系统的第一主振型，振动时弹簧不变形。

将 ω_{02} 代入(b)得

$A_2^{(1)}/A_1^{(1)}=-1$ 为系统的第二主振型，振动时弹簧中点不动。

两振型图如下：



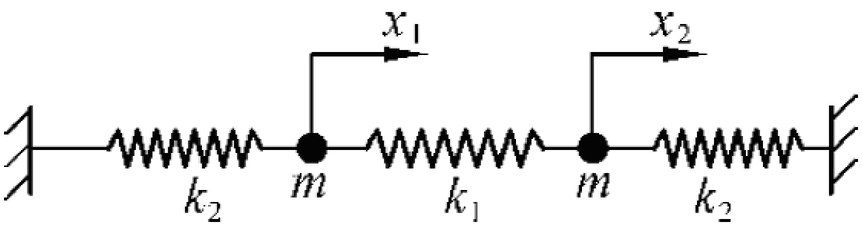


- 简正坐标

【定义】简正坐标：一组特殊的广义坐标 $\{\xi_\alpha\}$，使得系统的运动微分方程表现为一系列简单的振动 $(\ddot{\xi}_\alpha+\omega_\alpha^2\xi_\alpha=0)$. 这意味着系统的拉格朗日函数可表示为如下形式

$$L=\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\dot{\xi}_\alpha^2-\omega_\alpha^2\xi_\alpha^2).\quad \text{why?}$$

例题 7 寻找图示系统简正坐标.



解：我们已经知道得到 $[M]^{-1}[K]$ 对应特征值 ω_1^2 和 ω_2^2 的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. 经过归一化后得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

根据线性代数知，存在矩阵 $[U]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ 使得

在上面的解中，每个广义坐标都可能包含所有频率的振动. 是否存在一组特殊的广义坐标，使得每个广义坐标都以单一的频率振动呢？我们可以换一种构造简正坐标的思路：小振动问题中，T和V的系数矩阵都是正定的实对称二次型矩阵，由线性代数理论，一定存在线性变换，使这两个矩阵同时对角化，即

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{\xi}_{\alpha}^{2} \\ V = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{S} \lambda\, \xi_{\alpha}^{2} \end{cases}$$

把此时的拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s} (\dot{\xi}_{\alpha}^{2} + \lambda_{\alpha}^{2}\, \xi_{\alpha}^{2})$$

代人拉格朗日方程，得运动微分方程

$$\ddot{\xi}_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^{2}\, \xi_{\alpha}^{2} = 0, \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

上述方程组中的每一个方程仅与一个 ξ_{α}^{2} 有关，这将导致每个简正坐标仅以单一频 率振动，即

$$\xi_{\alpha}^{2} = c_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \varphi_{\alpha}), \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

其中 $\omega^{\alpha}=\lambda_{\alpha}$ ，振幅系数 c_{α} 和初相位 φ_{α}可由初始条件决定

$$[U]^{-1}[M]^{-1}[K][U]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix} \Rightarrow [U]^{-1}[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}[U]^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow [U]^{-1}[M]^{-1}[K]\psi=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}[U]^{-1}\psi\\ &\text{系统运动微分方程}\ \ddot{\psi}+[M]^{-1}[K]\psi=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow [U]^{-1}\ddot{\psi}+\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}[U]^{-1}\psi=0$$

只需令 $\xi=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=[U]^{-1}\psi$ 即可得到 $\ddot{\xi}_\alpha+\omega_\alpha^2\xi_\alpha=0$，$(\alpha=1,2)$.

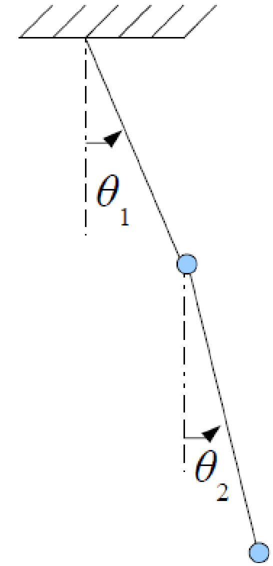
$$\longrightarrow \xi_1=(x_1+x_2)/\sqrt{2},\ \ \xi_2=(x_1-x_2)/\sqrt{2}$$ 此即简正坐标

$$\Rightarrow x_1=(\xi_1+\xi_2)/\sqrt{2},\ \ x_2=(\xi_1-\xi_2)/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_2}{2}x_1^2-\frac{k_2}{2}x_2^2-\frac{k_1}{2}(x_2-x_1)^2=\cdots$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{\xi}_1^2-\omega_1^2\xi_1^2)+\frac{m}{2}(\dot{\xi}_2^2-\omega_2^2\xi_2^2)$$

例题 8 分析双摆简正频率和简正坐标．设线长均为 l 且不可伸长，小球半径可以忽略，质量均为 m. 假定摆角很小．



解：理想约束的完整系统，自由度为 2, 可选摆角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标。当摆角很小时，两个球的速度分别可以写为

$$v_1=l\dot{\theta}_1,\qquad v_2\approx v_1+l\dot{\theta}_2=l(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$$

动能 $$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2$$

以最高悬挂点为势能零点，则势能

$$V=-mgl\cos\theta_1-mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\approx mgl(\theta_1^2+\theta_2^2/2-3)$$

将 $L=T-V$ 代入拉格朗日方程有 ...

$$\left.\begin{cases}2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+2(g/l)\theta_1=0\\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+(g/l)\theta_2=0\end{cases}\right\}\Longleftrightarrow [M]=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\ [K]=\frac{g}{l}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},$$

代入特征方程 $det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$ 求得 ... $\omega=\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\sqrt{g/l}$

将 $\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{g/l}$ 代入 $([K]-\omega_1^2[M])A=0$ 可得

$$A\propto\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\psi_1=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=A\cos(\omega_1 t+\alpha_1)\propto\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$$ 对称模式

将 $\omega_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{g/l}$ 代入 $([K]-\omega_2^2[M])A=0$ 可得

$$A\propto\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\psi_2=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=A\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\propto\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$ 反对称模式

$$[U]=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\xi=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=[U]^{-1}\psi=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}$$ 简正坐标

- 总结 (多自由度振动)

系统的运动微分方程: $$[M]\ddot{\boldsymbol{\psi}}+[K]\boldsymbol{\psi}=0$$

简正频率 ω 满足特征方程:

$$det\left(\omega^2 I-[M]^{-1}[K]\right)=0 \quad \text{或} \quad det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

简正模式: 简正频率对应的振动模式

$$[M]^{-1}[K]\boldsymbol{A}=\omega^2\boldsymbol{A}$$

简正坐标: $$\boldsymbol{\xi}=[U]^{-1}\boldsymbol{\psi} \qquad \ddot{\xi}_\alpha+\omega_\alpha^2\xi_\alpha=0$$