数集的上界.下界

设A为非空实数集

(*) 若 $\exists M\in R$，对任意的 $x\in A$，都有 $x\leq M$，则称A是有上界的，M为A的一个上界

(*) 若 $\exists m\in R$，对任意的 $x\in A$，都有 $x\geq m$，则称A是有下界的，m为A的一个下界

(*) 若 $\exists m, M\in R$，对任意的 $x\in A$，都有 $m\leq x\leq M$，则称A是有界数集，否则称为无界数集

显然，若数集A有上界，其上界是不惟一的，对下界亦然

例如 $A=\{x \mid x=\cos t,\ 0\leq t\leq \frac{\pi}{2}\}$ 是一个有界数集

上确界，下确界，确界公理

设A是一个非空数集，若

(i) M是A的上界

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$，$M-\varepsilon$ 都不是A的上界，

即任意 $\varepsilon>0$，一定存在 $x_0\in A$，使 $x_0>M-\varepsilon$

则称 M是A的上确界 (supremum)，记为 $\sup A$

类似地，可以定义下确界 $\inf A$ (inf是infimum的缩写)

注意：A的上(下)确界不一定属于A

例如 $B=\{1, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{2n+1}, \cdots\}$ 是有界集，$\sup B=1\in B$，$\inf B=0\notin B$

确界公理 任一有上(下)界的R的非空子集A必有上(下)确界

推论1 若函数f在区间I上有界(即I上函数的值域有界)
则函数在I上必有上(下)确界 $\sup\limits_{x\in I} f(x)$, $\inf\limits_{x\in I} f(x)$

推论2 若f(x)在I上有最大(小)值,则该最大(小)值
必是上(下)确界,反之不然