第9章（二）
多元函数的偏导数

偏导数的概念

定义 设函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{i-1}^0,\ x_i^0+\Delta x_i,\ x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_i}\quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

存在，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 处对变量 x_i **可偏导（偏导数存在）**，此极限为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 处对变量 x_i $(i=1,2,3,\cdots,n)$的**偏导数**. 记为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{P_0} \text{ 或 } \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{P_0} \text{ 或 } D_i f(P_0) \text{ 或 } f'_{x_i}(P_0) \text{ 或 } f'_i(P_0) \text{ 或 } f'_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \text{ 等.}$$

例如，对二元函数 $z=f(x,y)$ 有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}.$$

偏导数的意义

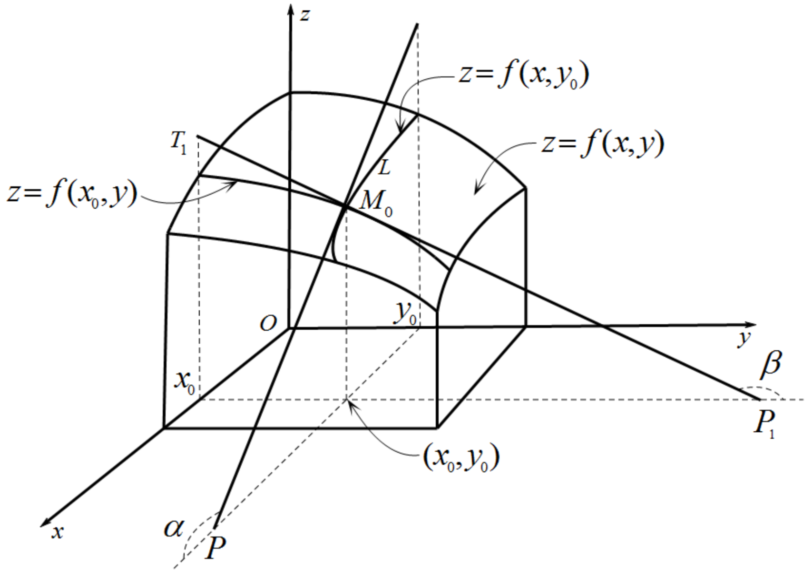
几何意义

对二元函数 $z = f(x, y)$，事实上有

$$f_x'(x_0, y_0) = \frac{\mathrm{d} f(x, y_0)}{\mathrm{d}x}; \quad f_y'(x_0, y_0) = \frac{\mathrm{d} f(x_0, y)}{\mathrm{d}y}.$$

所以 $f_x'(x_0, y_0)$ 是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在 $x = x_0$ 处的切线斜率；

$f_y'(x_0, y_0)$ 是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在 $y = y_0$ 处的切线斜率.



- **多元函数在某点可偏导和在某点连续没有必然的关系.**

例如： $z = |x| + |y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但两个偏导数皆不存在；

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) \neq (0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点两个偏导数皆存在且为零，但不连续.

偏导数的意义

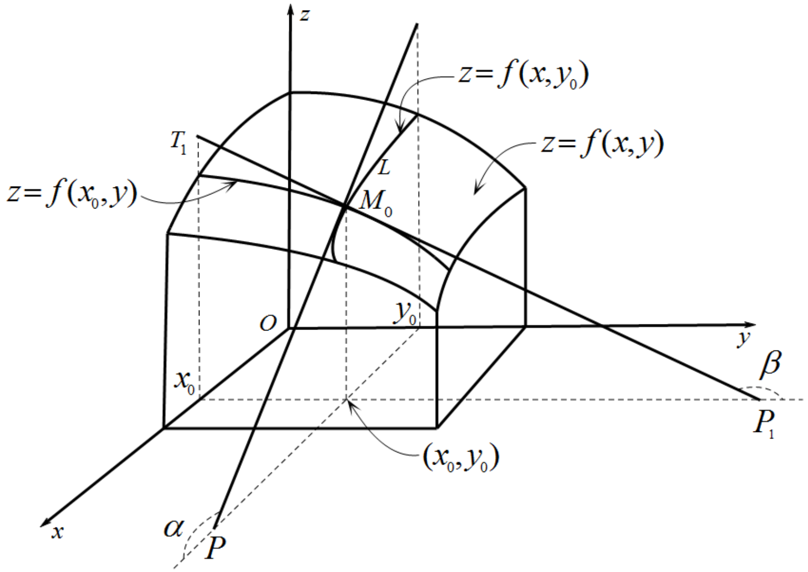
几何意义

对二元函数 $z=f(x,y)$，事实上有

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}\,f(x,y_0)}{\mathrm{d}x};\quad f_y'(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}\,f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}.$$

所以 $f_x'(x_0,y_0)$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在 $x=x_0$ 处的切线斜率；

$f_y'(x_0,y_0)$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在 $y=y_0$ 处的切线斜率.



- **多元函数在某点可偏导和在某点连续没有必然的关系.**

例如： $z=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但两个偏导数皆不存在；

$$z=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点两个偏导数皆存在且为零，但不连续.

多元函数偏导数

- 若 f 在 $\forall P \in D \subset \mathrm{R}^n$ 皆可偏导，则称 f 在 **D 上可偏导**(偏导数存在).

如此，我们可以定义 D 上新的函数 $f_i': D \to R$, 称为 f 关于第 i 个变量的**偏导函数**.

偏导函数一般仍然简称为偏导数。

例 1 求下列多元函数的所有偏导数

(1) $z = \ln(1 + x^2 y)$ (2) $z = x^y$ (3) $u = xy\sin(xyz)$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{1 + x^2 y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{1 + x^2 y}$ (2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\sin(xyz) + xy^2 z\cos(xyz)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\sin(xyz) + x^2 yz\cos(xyz)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x^2 y^2 \cos(xyz)$.

高阶偏导数

定义 设函数 $z=f(x,y)$，若 f_x', f_y' 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，则

(1) 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_x'(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x,y)$ 在点 P_0 处对变量 x **二阶可偏导**（**二阶偏导数存在**），此极限为 $f(x,y)$ 在 P_0 处对 x 的**二阶偏导数**. 记为 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}$ 或 $f_{xx}''(x_0,y_0)$ 等.

(2) 如果极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f_x'(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称 $f(x,y)$ 在点 P_0 处先对变量 x，后对变量 y 的**二阶偏导数存在**，此极限为 $f(x,y)$ 在 P_0 处对 x,y 的**二阶偏导数**. 记为 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_0}$ 或 $f_{xy}''(x_0,y_0)$ 等等.

(3) 同理可定义二阶偏导数 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{P_0}$ 和 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}$ 以及 n 阶偏导数 $\left.\dfrac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\right|_{P_0}$ 等等.

- 二阶及以上偏导数皆称为**高阶偏导数**；

对两个及以上变量分别求偏导的高阶偏导数$\left(\text{例如}\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_0}\text{和}\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y\partial z^2}\text{等}\right)$称为**混合偏导数**.

高阶偏导数

例 2 求 $z = x^2 y + \cos(3x - 2y)$ 的所有二阶偏导数.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3\sin(3x - 2y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2\sin(3x - 2y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y - 9\cos(3x - 2y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -4\cos(3x - 2y)\cdot$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x + 6\cos(3x - 2y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2x + 6\cos(3x - 2y)\cdot$$

定理 （混合偏导与求导次序无关）设二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 皆连续，则在 (x_0, y_0) 点 $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

多元函数的全增量公式

定理 （**全增量公式**）设 $z=f(x,\ y)$ 在点 (x, y) 偏导数 f'_x，f'_y 连续，则有

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y)=f'_x(x,\ y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

$$=f'_x(x,\ y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0\quad .$$

其中 $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha_1=0,\ \ \lim\limits_{\rho\to 0}\alpha_2=0.$

- 对 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 若在某点所有偏导数皆连续，则有全增量公式

$$\Delta u=f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n)-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f'_i\cdot\Delta x_i+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}\to 0.$$

多元复合函数求偏导数的链式法则

定理 **（链式法则）** 设 $z = f(u,\ v)$，$u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$，且在 (x,y) 点 f 偏导连续，u,v 偏导存在，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$.

例 2 求下列函数的一阶偏导数：

(1) $z = u^3 v,\ u = \frac{y}{x},\ v = 2x - 3y$ (2) $z = f(u,v),\ u = \sin(xy),\ v = x^2 + y^2$

解： (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 v\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) + u^3\cdot 2 = \frac{y^2}{x^2}(6x - 7y)$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 v\cdot\frac{1}{x} + u^3\cdot(-3) = \frac{3y^2}{x^3}(1-y)$.

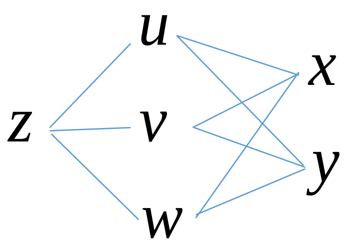
(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u\cdot(y\cos xy) + f'_v\cdot 2x$，$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_u\cdot(x\cos xy) + f'_v\cdot 2y$.

某些复合情况的求偏导链式法则

变量图

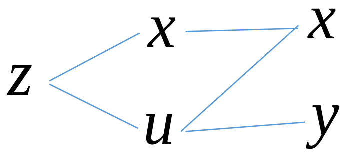
(1) 设 $z = f(u,v,w)$，$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $w = w(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

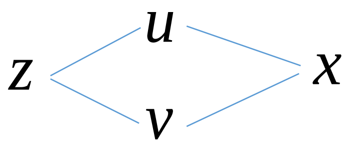


(2) 设 $z = f(x,u)$，$u = u(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x,u) + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f_2'(x,u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

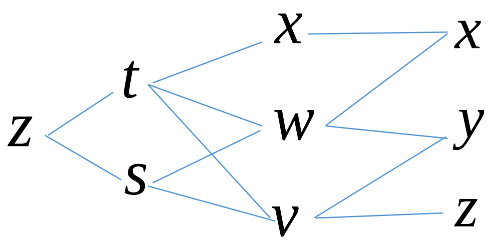


(3) 设 $z = f(u,v)$，$u = u(x)$, $v = v(x)$, 则 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$.



(4) 设 $u = f(t,s)$，$t = t(x,w,v)$, $s = s(w,v)$, $w = w(x,y)$, $v = v(y,z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}.$$ 等等.



多元复合函数求偏导数例题

例 3 设 $u=x,\ v=x^2+y^2$，试变换方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 为 z 关于变量 u,v 的方程。

例 4 设 $z=f\left(\dfrac{x}{y},\ x-2y\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例 5 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明函数 $u=\dfrac{1}{r}$ 满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

隐函数及其偏导数

定义 设 $f:R^n\supset D\to R$, 在 $P(x_1, x_2,\cdots, x_n)\in D$ 满足 $f(x_1, x_2,\cdots, x_n)=0$，如果存在函数 $\varphi:R^{n-1}\supset U\to R$ 使对 $\forall(x_1, x_2,\cdots, x_{n-1})\in U$, 有

$$f(x_1, x_2,\cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2,\cdots, x_{n-1}))=0,$$

则称 φ 为由**函数 f 和点 P 关于变量 x_n 确定的隐函数**. 此时函数关系也可表示为

$$x_n=\varphi(x_1, x_2,\cdots, x_{n-1}).$$

定理 (**二元函数的隐函数存在定理**) 设 $D\subset R^2$ 为开集，如果

(1) 函数 $f:D\to R$ 具有连续的偏导数；

(2) $f(x_0, y_0)=0$， $(x_0, y_0)\in D$；

(3) $f_y'(x_0, y_0)\neq 0$.

则 $\exists U(x_0)\subset R$ 和一个由 f 和点 P 关于 y 确定的隐函数 $\varphi:U(x_0)\to R$,

φ 有连续的导数，且有 $\varphi'(x)=-\dfrac{f_x'(x,\varphi(x))}{f_y'(x,\varphi(x))}$.

隐函数及其偏导数

定理 (三元函数的隐函数存在定理) 设 $E\subset R^3$ 为开集，如果

(1) 函数 $f:E\to R$ 具有连续的偏导数；

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$(x_0,y_0,z_0)\in D$；

(3) $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$

则 $\exists N(x_0,y_0)\subset R^2$ 和一个由 F 和点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 关于 z 确定的隐函数

$z=z(x,y)$，$(x_0,y_0)\in N(x_0,y_0)$，$z(x,y)$ 有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P=-\frac{F_x'(x_0,y_0,z_0)}{F_z'(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P=-\frac{F_y'(x_0,y_0,z_0)}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

例 6

- 已知方程 $e^{xz}+xy+z^2=1$ 确定 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.
- 已知方程 $z^5+xz^4+yz^3=1$ 确定 $z=z(x,y)$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$.
- 已知方程 $f(y-x,\ yz)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，其中 f 二阶偏导连续，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

隐函数及其偏导数

定理 (方程组确定的隐函数存在定理) 对 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ ……(*), $P(x_0,y_0,u_0,v_0)\in R^4$,

(1) 函数 $F,G:U(P)\to R$ 具有连续的偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(3) $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P=\begin{vmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{vmatrix}\neq 0.$

则存在 $Q(x_0,y_0)$ 的邻域 $U(Q)$ 和一个由 (*) 和点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 关于 u,v 确定的隐函数 $\varphi:U(Q)\to R$ 和 $\psi:U(Q)\to R$ 且 $\varphi,\ \psi$ 有连续的偏导数.

$u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 的各个偏导数可由 (*) 两边对 x 和 y 求导后解得.

例 7 已知方程组 $\begin{cases} ue^x+\ln(y+v)=xy \\ ue^y+\ln(x-v)=x+y \end{cases}$ 确定 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$,

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$.


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY