复习内容

两种思想方法：

- 从具体到一般，再从一般到具体
- 通过各种变换(等价变换、相似变换、合同变换)将复杂问题化为简单问题来讨论

内容：

- 第一章 行列式
- 第二章 线性方程组
- 第三章 矩阵
- 第四章 线性空间和线性变换
- 第五章 特征值和特征向量
- 第六章 二次型

P202 习题 5.1 第 4 题 **特征子空间**

4. 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的一个特征值. 记 A 的属于 λ_0 的特征向量的全体及零向量为

$$W_{\lambda_0}=\left\{\xi\in P^n \middle| A\xi=\lambda_0\xi\right\}.$$

证明：

(1) 若 $\xi_1,\xi_2\in W_{\lambda_0}$，则 $\xi_1+\xi_2\in W_{\lambda_0}$；

(2) 若 $\xi_1\in W_{\lambda_0}$，则对任意的 $k\in P$ 有 $k\xi_1\in W_{\lambda_0}$；

(3) 由(1)，(2)导出 W_{λ_0} 为 P^n 的一个子空间，称为属于 λ_0 的**特征子空间**. 特征子空间 W_{λ_0} 中任意非零向量都是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

证 (1) $\xi_1,\xi_2\in W_{\lambda_0}$，所以有 $A\xi_1=\lambda_0\xi_1,\ A\xi_2=\lambda_0\xi_2$，而 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_0\xi_1+\lambda_0\xi_2=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)$，所以 $\xi_1+\xi_2\in W_{\lambda_0}$.

(2) $\xi_1\in W_{\lambda_0}$，所以 $A\xi_1=\lambda_0\xi_1$，而 $A(k\xi_1)=kA\xi_1=k\lambda_0\xi_1=\lambda_0(k\xi_1)$，因此 $k\xi_1\in W_{\lambda_0}$.

(3) 由（1），（2）可知非空集合 $W_{\lambda_0}=\left\{\xi\in P^n \middle| A\xi=\lambda_0\xi\right\}$ 中元素符合加法和数乘的封闭性, 所以构成一个子空间.

第一章 行列式

本章主要学习了以下内容

- 一个概念(n阶行列式)
- 九类可直接计算出的行列式
- 三种计算行列式的方法(化简为九类可直接计算出的行列式，降阶，递推)
- n个未知量n个线性方程的线性方程组解公式(克拉默法则)

逆序数的计算方法

由此得出计算排列的逆序数的一个方法：

$$\begin{aligned}\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = &\ \tau_1(i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数}) \\ &+ \tau_2(i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数}) \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ \tau_{n-1}(i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}).\end{aligned}$$

据此方法计算得

$$\tau(15432) = 0 + 3 + 2 + 1 = 6,$$

所以 15432 为偶排列.

任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性

二阶行列式

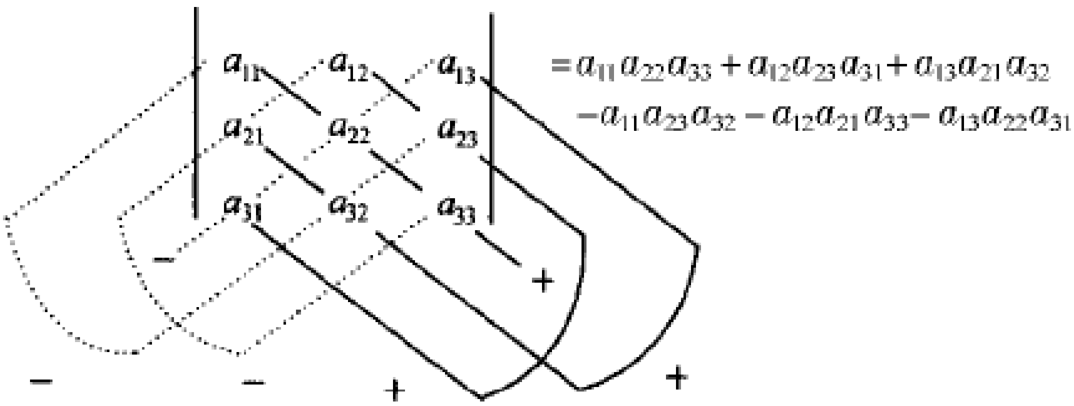
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

行列式的性质

性质 1 $D = D^{\mathrm{T}}$

性质 2 如果行列式中两行(列)互换，行列式的值只改变一个符号。

推论 1 行列式中若有两行(列)对应元素全相等，则行列式为零。

性质 3 以数k乘行列式中某一行(列)中所有元素，等于用k乘以此行列式。

换言之，行列式某一行（列）所有元素有公因子k，可将k提到行列式记号外相乘

推论 2 若行列式中有一行(列)的元素全为零，则行列式为零。

性质 4 如果行列式中两行(列)元素对应成比例，则行列式为零。

性质 5 分行(列)相加。

性质 5（分行(列)相加性）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1}+\cdots+h_{i1} & b_{i2}+c_{i2}+\cdots+h_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}+\cdots+h_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & h_{i2} & \cdots & h_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 行列式的某一行(列)元素加上另一行(列)对应元素的k倍，行列式不变。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\
c_{11} & \cdots & c_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{s1} & \cdots & c_{sr} & b_{s1} & \cdots & b_{ss}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1s} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{s1} & \cdots & b_{ss}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & c_{s1} & \cdots & c_{sr} \\
0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & b_{s1} & \cdots & b_{ss}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\
b_{11} & \cdots & b_{1s} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{s1} & \cdots & b_{ss} & c_{s1} & \cdots & c_{sr}
\end{vmatrix}
= (-1)^{rs} \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1s} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{s1} & \cdots & b_{ss}
\end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sr} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$$

特别注意，这里是$n-1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)$$

$$\cdot (a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdot (a_n - a_{n-1})$$

克拉默(Cramer)法则[1]P33

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

的系数行列$D \neq 0$，则该方程有唯一解，其解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}，\ x_2 = \frac{D_2}{D}，\ \cdots，\ x_m = \frac{D_m}{D}$$

其中：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & b_m & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

若$a_{ij} \in P(i,j = 1,2,\cdots,m)$，$P$为某个数域，则解$x_1,x_2,\cdots,x_m$均属于$P$。

定理 1.4.1 行列式按行或按列展开

n阶行列式$D = \left|a_{ij}\right|_n$等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (j = 1,2,\cdots,n)$

$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D & , \quad i = k \\ 0 & , \quad i \neq k \end{cases}$

$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = \begin{cases} D & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k \end{cases}$

定理 1.4.3 拉普拉斯(Laplace)定理

设D为n阶行列式，任取定其中k行(列)$(1 \leq k < n)$，则由这k行(列)构成的一切k阶子式$N_1, N_2, \cdots, N_t$与它们所对应的代数余子式$A_1, A_2, \cdots, A_t$乘积之和等于D，即

$$D = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

其中$t = C_n^k$

例如

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&0&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\times(-1)^{(1+3)+(1+2)}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{24}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$，（1）求D的值；（2）若记 M_{ij},A_{ij} 分别为D中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，计算 $2A_{11}+3M_{12}+2M_{13}-A_{14}$。

解：（1）$D=-16$

（2）$2A_{11}+3M_{12}+2M_{13}-A_{14}=2A_{11}-3A_{12}+2A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}2&-3&2&-1\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=\quad 4$$

05-06 秋冬期末 A 卷

计算行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\0&0&0&1&3\\0&0&0&2&4\\0&1&0&1&1\end{vmatrix}$。

$= -20$

07-08 秋冬期末 A 卷

多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 3 \\ 3x & x & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & -1 & 3x & x \end{vmatrix}$ 中的 x^4 的系数是___4___，x^3 的系数是___-12___。

06-07 春夏期末 A 卷

解 x^4的系数即为行列式对角线 4 项相乘的系数，所以系数是 4。记本题的行列式为$|a_{ij}|$，则含x^3的项为：

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -6x^3$$

和

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -6x^3$$

所以x^3的系数为-12。

08-09 秋冬期末 A 卷

在 5 阶行列式$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$中包含

$a_{13}a_{25}$的所有正项是____________。

答案

$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$，$a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$，$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$

提示：找出 1，2，4 的所有排列：$a_{13}a_{25}a_{3?}a_{4?}a_{5?}$

124　35124　2+3=5 －

142　35142 ＋

412　35412 －

421　35421 ＋

241　35241 －

214　35214 ＋

09-10 春夏期末 A 卷

计算排列$43218765\cdots(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)$的逆序数。

解 逆序数为

$$\overbrace{(3+2+1)+(3+2+1)+\cdots+(3+2+1)}^{n\text{个}(3+2+1)}=6n。$$

确定 8 级排列$63i72\,j84$中数字i和j的值，使得排列是偶排列。

09-10 秋冬期末 A 卷

答案 当$i=1$，$j=5$时，

$\tau(63172584)=5+2+3+1+1=12$。

计算行列式：$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & a & b & a\\ a & 0 & a & b\\ b & a & 1 & a\\ a & b & a & 0\end{vmatrix}$ / 06-07 春夏期末 A 卷

解 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & a & b & a\\ a & 0 & a & b\\ b & a & 1 & a\\ a & b & a & 0\end{vmatrix}\overset{C_3-C_1}{\underset{C_4-C_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & a & b-1 & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ b & a & 1-b & 0\\ a & b & 0 & -b\end{vmatrix}$

$$\overset{R_1+R_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+b & 2a & 0 & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ b & a & 1-b & 0\\ a & b & 0 & -b\end{vmatrix}$$

$$=(1-b)\begin{vmatrix}1+b & 2a & 0\\ a & 0 & b\\ a & b & -b\end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2+R_3}{=\!=\!=}(1-b)\begin{vmatrix}1+b & 2a & 0\\ 2a & b & 0\\ a & b & -b\end{vmatrix}$$

$$=(1-b)(-b)\begin{vmatrix}1+b & 2a\\ 2a & b\end{vmatrix}$$

$$=b(b-1)(b(b+1)-4a^2)$$

/ 08-09 春夏期末 A 卷

计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1+x \\ 1+x & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \end{vmatrix}$。

答案 $x^3(x+2)$

提示：R_3-R_1，R_4-R_2

计算行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & x \\ x & x & x & x+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$。

08-09 秋冬期末 A 卷

答案

$$\boldsymbol{D}=\frac{1+10x}{24}$$

提示：R_2-R_1，R_3-R_1，R_4-R_1，

$C_1+2C_2+3C_3+4C_4$

设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a$，则$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}x & a_{11}x+a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}x & a_{21}x+a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32}x & a_{31}x+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

07-08 春夏期末 A 卷

（$(1-x^2)a$）。

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\boldsymbol{A}|=a$，

$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+x\boldsymbol{\alpha}_2, x\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\boldsymbol{A}|=1$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ 2 。

07-08 秋冬期末 A 卷

解 $|\boldsymbol{B}|=$

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal[C_2-C_1]{C_3-C_2}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal{C_3-2C_2}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal{C_2-2C_3}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal{C_1-C_2-C_3}2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$=2|\boldsymbol{A}|=2$$

计算行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&2&1\\2&3&5&5\\4&9&17&25\\8&27&65&125\end{vmatrix}$。

09-10 春夏期末 A 卷

解 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&2&1\\2&3&5&5\\4&9&17&25\\8&27&65&125\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&1&5\\4&9&1&25\\8&27&1&125\end{vmatrix}$$

$$=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)$$

$$+(3-2)(1-2)(5-2)(1-3)(5-3)(5-1)$$

$$=12+48=60。$$

07-08 春夏期末 A 卷

计算行列式$D_4=\begin{vmatrix}2^5-2&2^4-2&2^3-2&2^2-2\\3^5-3&3^4-3&3^3-3&3^2-3\\4^5-4&4^4-4&4^3-4&4^2-4\\5^5-5&5^4-5&5^3-5&5^2-5\end{vmatrix}$。

解 $D_4=\begin{vmatrix}2^5-2&2^4-2&2^3-2&2^2-2\\3^5-3&3^4-3&3^3-3&3^2-3\\4^5-4&4^4-4&4^3-4&4^2-4\\5^5-5&5^4-5&5^3-5&5^2-5\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[C_3-C_4]{\substack{C_1-C_2\\C_2-C_3}}\begin{vmatrix}2^4 & 2^3 & 2^2 & 2\\ 2\cdot 3^4 & 2\cdot 3^3 & 2\cdot 3^2 & 2\cdot 3\\ 3\cdot 4^4 & 3\cdot 4^3 & 3\cdot 4^2 & 3\cdot 4\\ 4\cdot 5^4 & 4\cdot 5^3 & 4\cdot 5^2 & 4\cdot 5\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}2^3 & 2^2 & 2 & 1\\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1\\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1\\ 5^3 & 5^2 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[C_{23}]{C_{14}}2880\begin{vmatrix}1 & 2 & 2^2 & 2^3\\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3\\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3\\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3\end{vmatrix}$$

$$=2880\cdot(5-4)\cdot(5-3)\cdot(5-2)\cdot(4-3)\cdot(4-2)\cdot(3-2)$$

$$=34560$$

09–10 春夏期末 A 卷

4 阶行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{vmatrix}$，求

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{A}_{jk}$$

解

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{A}_{jk}$$

$$= (\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{31}+\boldsymbol{A}_{41})$$

$$+(\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{32}+\boldsymbol{A}_{42})$$

$$+(\boldsymbol{A}_{13}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{33}+\boldsymbol{A}_{43})$$

$$+(\boldsymbol{A}_{14}+\boldsymbol{A}_{24}+\boldsymbol{A}_{34}+\boldsymbol{A}_{44})$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&4&1&2\\1&3&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&3&4\\4&1&2&3\\3&1&1&2\\2&1&4&1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&2&1&4\\4&1&1&3\\3&4&1&2\\2&3&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3&1\\4&1&2&1\\3&4&1&1\\2&3&4&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&4&1&2\\1&3&4&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&3&4\\1&4&2&3\\1&3&1&2\\1&2&4&1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&2&1&4\\4&1&1&3\\3&4&1&2\\2&3&1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2&1&3\\4&1&1&2\\3&4&1&1\\2&3&1&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&3&4\\1&-3&2&3\\1&1&1&2\\1&1&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&1&1\\4&1&1&1\\3&4&1&1\\2&3&1&-3\end{vmatrix}$$

$$=-32-32=-64$$

设$\alpha = [1，0，2，4]^T$，$\beta = [2，-1，3，-1]^T$，$A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$，计算$|2E - A|$。

解：$A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}(2 \quad -1 \quad 3 \quad -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -2 \\ 8 & -4 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

$$|2E - A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 2 \\ -8 & 4 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \\ -8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -8*(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

06-07 秋冬期末 A 卷

解二 因为$\beta^{\mathrm{T}}\alpha = 4$，$A\alpha = (\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha = \alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha) = 4\alpha$，所以 4 是$A$的特征值。又因为$r(A) = 1$，则$|A| = 0$，由此可知 0 是$A$的特征值，且所对应的齐次线性方程组$-AX = 0$的基础解系向量个数为 4-1=3，这说明 0 是$A$的特征多项式的三重根。所以$2E - A$特征值分别为：

$\lambda_1 = 2 - 4 = -2$

教材习题 4.6 第 9 题的结果

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2 - 0 = 2$

因此$|2E - A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = -16$

第二章 线性方程组

- 求解一般的线性方程组的方法——**消元法**
- 线性方程组理论——**秩**的概念

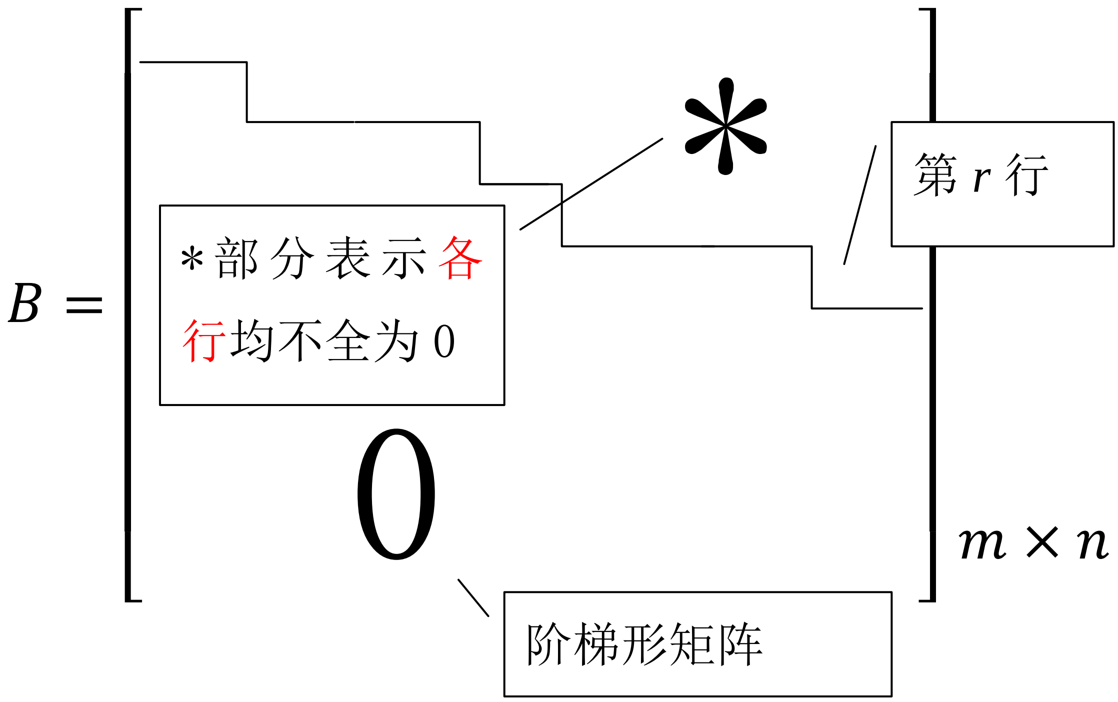
解线性方程组的方法——消元法

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

将增广矩阵

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]
$$

经过初等行变换变化为约化阶梯形矩阵



然后再求解。

线性方程组理论

一般的线性方程组

$$\text{线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

有解 $\Leftrightarrow \quad r(\overline{A})=r=r(A)$

在有解的条件下：

- 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(\overline{A})=r(A)=r=n$
- 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(\overline{A})=r(A)=r<n$
- 若$a_{ij}\in P$，$b_k\in P(i,k=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n)$，$P$为某个数域，且自由未知量均在$P$中取值，则解$x_1,x_2,\cdots,x_n$均属于$P$。

推论 1

当$m=n$时

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

有唯一解 $\Leftrightarrow$ $|a_{ij}|_n\neq 0$

有无穷多解 $\not\Leftrightarrow$ $|a_{ij}|_n=0$

齐次线性方程组

$$\text{齐次线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的解情况如下：

- 只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r=n$
- 有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r<n$

- 若$a_{ij} \in P(i = 1,2,\cdots,m;\ \ j = 1,2,\cdots,n)$，$P$为某个数域，且自由未知量均在$P$中取值，则解$x_1, x_2, \cdots, x_n$均属于$P$。

推论 2

当$m=n$时

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

只有零解 $\Leftrightarrow$ $\left|a_{ij}\right|_n \neq 0$

有非零解 $\Leftrightarrow$ $\left|a_{ij}\right|_n = 0$

（12 分）设非齐次线性方程组 A X ＝ B 的增广矩阵$\overline{A}$经初等行变换化为

$$\overline{A}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a+1&a+1&b-2\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$,讨论当a,b取何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解；当有无穷多解时，求出其通解。

05-06 秋冬期末 A 卷

解：

1 ）当$a+1\neq 0$时，方程组有惟一解；

2 ）当$a+1=0,\text{and } b-2\neq 0$时，方程组无解；

3 ）当$a+1=0,\text{and } b-2=0$时，$r(A)=r(\overline{A})=2<4$,方程组有无穷多解。

此时

$$\overline{A}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

转化为方程组

$$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$$ 令$t_1=x_3,t_2=x_4$,则

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解。

解： 上述两个方程组有公共解，即将其联立后的方程组有解。

06-07 春夏期末 A 卷

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$

相应的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3(1-a) \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3(1-a) \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，此时 $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，方程组有无穷多解，

其通解为 $k(1,0,-1)^T$。

当 $a \neq 1$ 时，$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$

由此可知必须有 $a=2$，此时 $r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，解为 $(0,1,-1)^T$ 。

（15 分）问 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、无穷多解？在有解的情况下，求出其全部解。

06-07 秋冬期末 A 卷

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+1 & 1+k & k^2+4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1+k}{2}(4-k) & k(k-4) \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \end{pmatrix}$$

由此可以知道

- $k=-1$，　　$r(A)=2, r(\overline{A})=3$，方程组无解；
- $k\neq -1, k\neq 4$，　$r(A)=3, r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，解为：

  $x_1=\dfrac{k^2+2k}{k+1}$，$x_2=\dfrac{k^2+2k+4}{k+1}$，$x_3=-\dfrac{2k}{k+1}$。

- $k=4$，　$r(A)=2, r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多解。此时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=K\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$，其中 K 为任意常数。

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

(1) 求该线性方程组的通解(要求用该方程组的一个特解与对应导出组的基础解系的线性组合之和来表示)

(2) 写出该方程组解向量集合的一组极大线性无关组

08-09 春夏期末 A 卷

答案 特解

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

通解

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3$$

其中k_1，k_2，k_3为任意常数。

极大线性无关组为$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_3$。

已知齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$

问（1）a，b，c满足何种关系时，方程组仅有零解。

（2）a，b，c满足何种关系时，方程组有无穷多解，并用基础解系表示他的全部解。

07-08 春夏期末 A 卷

解 系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

（1）当a，b，c两两互异时，方程组只有唯一零解。

（2）下面分四种情况讨论

① 当$a=b\neq c$时与原方程组同解的方程组是

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

方程组有无穷多解，全部解为$k_1[1,\ -1,\ 0]^{\mathrm{T}}$，其中 k_1为任意常数。

② 当$a=c\neq b$时与原方程组同解的方程组是

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$$

方程组有无穷多解，全部解为$k_2[1，0，-1]^{\mathrm{T}}$，其中k_2为任意常数。

③ 当$b=c\neq a$时与原方程组同解的方程组是

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1=0\end{cases}$$

方程组有无穷多解，全部解为$k_3[0，1，-1]^{\mathrm{T}}$，其中k_3为任意常数。

③ 当$a=b=c$时与原方程组同解的方程组是

$$\{x_1+x_2+x_3=0$$

方程组有无穷多解，全部解为$k_4[1，-1，0]^{\mathrm{T}}+k_5[1，0，-1]^{\mathrm{T}}$，其中$k_4$，$k_5$为任意常数。

设线性方程组为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3\\4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5\\6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7\\8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4=9\end{cases}$$

试就参数λ的值讨论方程组的解，并且在有解时求出它的解。（要求用方程组对应的导出组的基础解系和方程组的一个特解来表示）

07-08 秋冬期末 A 卷

解

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2&3&1&2&3\\4&6&3&4&5\\6&9&5&6&7\\8&12&7&\lambda&9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-4R_1]{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}\begin{bmatrix}2&3&1&2&3\\0&0&1&0&-1\\0&0&2&0&-2\\0&0&3&\lambda-8&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{34}]{\substack{R_3-2R_2\\R_4-3R_2}}\begin{bmatrix}2&3&1&2&3\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&\lambda-8&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{bmatrix}2&3&0&2&4\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&\lambda-8&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

当$\lambda=8$时，解为

$$\begin{cases}x_1=2-\dfrac{3}{2}x_2-x_4\\x_3=-1\end{cases}$$，其中x_2，x_4为自由未知量。

通解为：

$\xi=[2，0，-1，0]^{\mathrm{T}}+k_1\left[-\frac{3}{2}，1，0，0\right]^{\mathrm{T}}+$
$k_2[-1，0，0，1]^{\mathrm{T}}$，其中$k_1$，$k_2$为任意常数。

当$\lambda \neq 8$时，解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \dfrac{3}{2}x_2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$，其中x_2为自由未知量。

通解为：$\xi = [2,\ 0,\ -1,\ 0]^{\mathrm{T}} + k\left[-\frac{3}{2},\ 1,\ 0,\ 0\right]^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意常数。

08-09 秋冬期末 A 卷

问参数a，b取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有解？在有解时，有多少解，且求出所有解。

解

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-3R_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+R_2]{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$$

（1）当$a\neq 1$时，有唯一解，解为

$$x_1=\frac{b-a+2}{a-1}，\ x_2=\frac{a-2b-3}{a-1}，$$
$$x_3=\frac{b+1}{a-1}，\ x_4=0$$

（2）当$a=1$，$b\neq -1$时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=3$，所以方程组无解。

（3）当$a=1$，$b=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=2=r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)<4$，方程组有无穷多解，解为

$$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$$

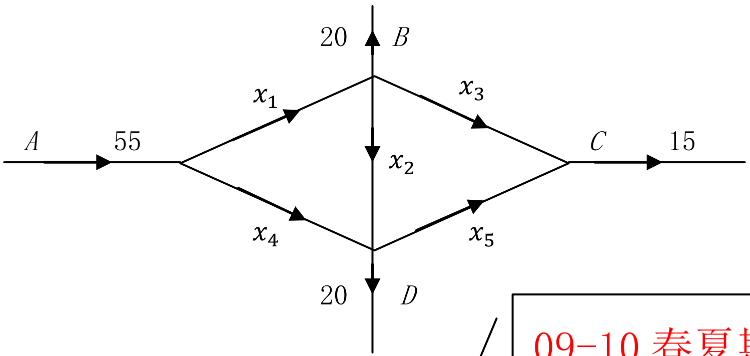
$$\boldsymbol{\xi}=[-1，1，0，0]^{\mathrm{T}}+k_1[1，-2，1，0]^{\mathrm{T}}$$
$$+k_2[1，-2，0，1]^{\mathrm{T}}$$

其中k_1，k_2为任意常数。

下图是某地区的灌溉渠道网，各节点流出总量平衡，流量和流向均已在图上标明。

（1）确定各段的流量x_1，x_2，x_3，x_4，x_5；

（2）如果BC段渠道关闭，那么AD段的流量保持在什么范围内，才能使所有段的流量不超过 30？



09-10 春夏期末 A 卷

附录三习题 4

解 （1）根据图示，可以列出方程

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +x_4 \qquad =55 \\ x_1-x_2-x_3 \qquad\qquad =20 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad +x_5=15 \\ \qquad x_2 \qquad +x_4-x_5=20 \end{cases}$$

复习时看一下

附录三的内容

解得

$$\begin{cases} x_1=55-t_1 \\ x_2=20-t_1+t_2 \\ x_3=15 \qquad -t_2 \\ x_4= \qquad t_1 \\ x_5= \qquad\qquad t_2 \end{cases} \text{其中} \begin{cases} 0 \le t_1 \le 55 \\ 0 \le t_2 \le 15 \\ t_1 - t_2 \le 20 \end{cases}$$

（2）关闭了BC段渠道，则$x_3 = 0 \Longrightarrow x_4 = t_2 = 15$。

由于各段的流量不超过 30，所以 $55 - t_1 \le 30 \Longrightarrow t_1 \ge 25$，故$25 \le t_1 \le 30$。

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a\\2\\10\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\b\\c\end{bmatrix}$$

问：当a，b，c满足什么条件时，

（1）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法唯一？

（2）$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？

（3）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法不唯一？并求出一般表达式。

09-10 春夏期末 A 卷

解 设有数k_1，k_2，k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}]$$

$$=\begin{bmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-5R_1]{\substack{R_{12}\\ R_2-\frac{1}{2}R_1}}\begin{bmatrix}2&1&1&b\\0&-2-\frac{a}{2}&-1-\frac{a}{2}&1-\frac{ab}{2}\\0&0&-1&c-5b\end{bmatrix}$$

（1）当$-2-\frac{a}{2}\neq 0$时，即$a\neq-4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法唯一。

（2）当$-2-\frac{a}{2}=0$时，即$a=-4$时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -b-1\\ 0 & 0 & 1 & 1+2b\\ 0 & 0 & 0 & 1-3b+c\end{bmatrix}$$

当$3b-c\neq 1$时，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解，所以$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

(3) 当$a=-4$，且$3b-c=1$时，即$a=4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，则方程有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法不唯一。与下面方程同解

$$\begin{cases}2k_1+k_2=-b-1\\ k_3=1+2b\end{cases}$$

解得$k_1=t$，$k_2=-2t-b-1$，$k_3=1+2b$，其中t为任意常数。因此有

$$\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(1+2b)\boldsymbol{\alpha}_3$$

三元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为1，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的三个线性无关的解，且$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[1,\ 2,\ 3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[0,\ -1,\ 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1=[1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是____________________。(要求用方程组对应的导出组的基础解系与方程组的一个特解来表示)

07-08 秋冬期末 A 卷

解 因为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 1，则导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系向量个数为 3-1=2。因为$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的三个线性无关的解，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=2\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1)=2\boldsymbol{b}$$

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}=\left[\frac{1}{2}，1，\frac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，且

$$(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=[0，2，4]^{\mathrm{T}}$$
$$(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=[1，3，2]^{\mathrm{T}}$$

是对应的导出组的解，容易验证它们是线性无关的，因此它们是导出组的基础解系。由此可知非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是

$$\left[\frac{1}{2}，1，\frac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}+k_1[0，2，4]^{\mathrm{T}}+k_2[1，3，2]^{\mathrm{T}}$$

其中k_1，k_2为任意数。

08-09 秋冬期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$是5×4矩阵，且$r(\boldsymbol{A})=2$，4 维列向量$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O}$，线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的 3 个解向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1，0，1，-1]^{\mathrm{T}}，$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=[2，-1，1，0]^{\mathrm{T}}，$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=[1，2，0，0]^{\mathrm{T}}$$

则线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是____________。

解 因为$r(\boldsymbol{A})=2$，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$解空间的维数为 2。因为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解，容易验证$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以它是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系。因此线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是：

$$\boldsymbol{\alpha}=[1,\ 0,\ 1,\ -1]^{\mathrm{T}}+k_1[1,\ -1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,\ 3,\ -1,\ 0]^{\mathrm{T}}$$

其中k_1，k_2为任意常数。

设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$是n维非零列向量，n维零列向量$\boldsymbol{\xi}_0$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_s$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的一个基础解系，求证：

$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$解集合中的一个极大线性无关组。

08-09 秋冬期末 A 卷

证明 因为

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{b}$，

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{b}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$，

所以$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$是线性方程

组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解。如果数$k_0$，$k_1$，$k_2$，$\cdots$，$k_s$使得

$$k_0\boldsymbol{\xi}_0+k_1(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s)=\boldsymbol{\theta} \qquad (1)$$

式(1)即为

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{\xi}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s=\boldsymbol{\theta} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{A}[(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\xi_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s]=\boldsymbol{A\theta}=\boldsymbol{\theta}\Longrightarrow$$

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{A}\xi_0+k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\eta}_s=\boldsymbol{\theta}\Longrightarrow$$

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\theta}$$

$$\Longrightarrow k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \qquad (3)$$

把(3)式代入(2)式，得$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s=\boldsymbol{\theta}$，

由于$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$线性无关，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0 \qquad (4)$$

把(4)式代入(3)式，得$k_0=0$，所以

$$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_s=0,$$

因此$\boldsymbol{\xi}_0$，$\xi_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\xi_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\xi_0+\boldsymbol{\eta}_s$线性无关。

假设$\boldsymbol{\xi}$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的任一个解，则存在数$l_1$，$l_2$，$\cdots$，$l_s$使得

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\eta}_s$$

$$=(1-l_1-l_2-\cdots-l_s)\xi_0+l_1(\xi_0+\boldsymbol{\eta}_1)+$$

$l_2(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+l_s(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s)$，

所以$\boldsymbol{\xi}$可以由$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$线性表示，因此$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$解集合中的一个极大线性无关组。

07-08 秋冬期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是$m\times n$矩阵，且$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，求证齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$有非零的公共解。

证一 因为$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，则

$$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$$

从而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$$

有非零解，因此$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$有非零的公共解。

证二 因为$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，则$r(\boldsymbol{A})<n$，$r(\boldsymbol{B})<n$，记

$$r(\boldsymbol{A})=r_1，\ r(\boldsymbol{B})=r_2$$

设齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系为:

$$\boldsymbol{\xi}_1，\ \boldsymbol{\xi}_2，\ \dots，\ \boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$$

设齐次线性方程组$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$的基础解系为:

$$\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

因为 $n-r_1+n-r_2=n+(n-r_1-r_2)>n$，则 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$线性相关，从而存在不全为零的数 l_1，l_2，…，l_{n-r_1}，k_1，k_2，…，k_{n-r_2}使得

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}=\boldsymbol{\theta}$$

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}=-\left(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}\right)$$

因为l_1，l_2，…，l_{n-r_1}和k_1，k_2，…，k_{n-r_2}中至少有一组数不全为零，不妨假设l_1，l_2，…，l_{n-r_1}不全为零，则由$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$的线性无关性知

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}\neq\boldsymbol{\theta}$$

从而

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}=-\left(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}\right)\neq\boldsymbol{\theta}$$

因为$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$和$-(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2})$分别是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$的解，因此$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$有非零的公共解。

第三章 矩阵

- 矩阵的概念及运算；
- 两种方法（矩阵分块和等价标准形）；
- 秩。

伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

当A为可逆矩阵时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

利用初等变换求逆矩阵。计算题常用此法。

$$[A \ \vdots \ E] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} [E \ \vdots \ A^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{\text{初等}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots\cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

处理“证明A可逆，且求出A^{-1}”一类问题时，设法找一个B使

$$AB = E$$

这样就证明了A可逆，其逆为B，例如若$A^2 = 2E$，则有

$$(A+E)(A-E) = E$$

所以$A+E$可逆，且$(A+E)^{-1} = A-E$；$A-E$可逆，且$(A-E)^{-1} = A+E$。

分块求逆

(a) 若

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_t \end{bmatrix}$$

则A可逆 $\Leftrightarrow$ A_i均可逆$(i = 1,2,\cdots,t)$。A可逆时

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_t^{-1} \end{bmatrix}$$

若

$$A=\begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & A_1 \\ O & O & \cdots & A_2 & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O & A_{t-1} & \cdots & O & O \\ A_t & O & \cdots & O & O \end{bmatrix}$$

则A可逆 $\Leftrightarrow$ A_i均可逆$(i=1,2,\cdots,t)$。A可逆时

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & A_t^{-1} \\ O & O & \cdots & A_{t-1}^{-1} & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O & O \\ A_1^{-1} & O & \cdots & O & O \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}\text{可逆}$$

$\Leftrightarrow$ A，B可逆

且有

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

易出现的错误

设A，B是矩阵，在矩阵计算中常见的错误有：

- $AB = BA$
- A是n阶矩阵，k是数，$|kA| = k|A|$，例如 $|-A| = -|A|$
- $|AB|=|A||B|$　　错误原因：这里的A，B不一定是方阵。当A，B是同阶方阵时这个等式成立
- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $AB=O \Rightarrow A=O$或$B=O$
- 若$A \neq O$，且$AB=AC \Rightarrow B=C$
- $|A+B| = |A| + |B|$
- $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

注意：以上都是常见的错误，而不是正确的结论

各种相似式子归类一

- $|AB|=|A||B|$ （假设A，B是同阶方阵）
- $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ （假设A，B是可逆矩阵）
- $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$ （假设A，B是可逆矩阵）

- $|A+B|\neq|A|+|B|$ （假设A，B是同阶方阵）
- $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$ （假设A，B是同形矩阵）
- $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$ （假设A，B是同阶可逆矩阵）

- $|kA|=k^{n}|A|$ （假设A是n阶方阵）
- $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$
- $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ （假设A是可逆矩阵，且$k\neq0$）
- $|A^{k}|=|A|^{k}$ （假设A是方阵）
- $(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*}$ （假设A是n阶可逆矩阵）

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$
- $(A^{-1})^{-1}=A$ （假设A是可逆矩阵）
- $(A^{*})^{*}\neq A$，$(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A$ （假设A是可逆矩阵）

- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ （假设A是可逆矩阵）
- $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ （假设A是可逆矩阵）
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ （假设A是可逆矩阵）
- $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ （假设A是方阵）
- $|A^*| = |A|^{n-1}$ （假设A是可逆矩阵）

- $A^*A = |A|E$ （假设A是方阵，不必要求A可逆）
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ （假设A是可逆矩阵）

下面假设A，B，A_1，A_2，$\cdots$，A_t都是方阵。

- $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$
- $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{rs}|A||B|$
- $\begin{vmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_t \end{vmatrix} = |A_1||A_2|\cdots|A_t|$

下面假设A，B，A_1，A_2，$\cdots$，A_t都可逆。

- $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_t \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_t^{-1} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} O & O & \cdots & A_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & A_{t-1} & \cdots & O \\ A_t & O & \cdots & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & O & \cdots & A_t^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ A_1^{-1} & O & \cdots & O \end{bmatrix}$

各种相似式子归类二

矩阵行列式

$|kA| = k^n|A|$ （假设A是方阵）

$|AB|=|A||B|$ （假设A，B是同阶方阵）

$|A+B| \neq |A| + |B|$ （假设A，B是同阶方阵）

$\left|A^k\right| = |A|^k$ （假设A是方阵）

转置矩阵

$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$

$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ （假设A，B是同形矩阵）

$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$

$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ （假设A是方阵）

$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

伴随矩阵

$A^*A = |A|E$ （假设A是方阵，不必要求A可逆）

$A^* = |A|A^{-1}$，$|A^*| = |A|^{n-1}$ （假设A是可逆矩阵）

$(AB)^* = B^*A^*$ （假设A，B是可逆矩阵）

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ （假设A是可逆矩阵）

$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ （假设A是可逆矩阵）

$|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$ （假设A是可逆矩阵）

$|A^*| = |A|^{n-1}$ （假设A是可逆矩阵）

$(kA)^* = k^{n-1}A^*$ （假设A是可逆矩阵）

可逆矩阵

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ （假设A，B是可逆矩阵）

$(A^{-1})^{-1} = A$ （假设A是可逆矩阵）

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ （假设A是可逆矩阵，且$k \neq 0$）

$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ （假设A是可逆矩阵）

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ （假设A是可逆矩阵）

$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ （假设A，B是可逆矩阵）

- 在证明题中利用下述一些有关秩的结论是很有用的。

(1) $r(A_{m\times n})\le \min(m，n)$

(2) $r(A_{m\times n}B_{n\times t})\le \min\left(r(A_{m\times n})，r(B_{n\times t})\right)$

(3) 若A，B均为可逆矩阵，则

$r(AC)=r(C)$，$r(CB)=r(C)$，$r(ACB)=r(C)$

(4) $r\left(\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)=r(A)+r(B)$

*(5) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

*(6) $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\left(r(A)，r(B)\right)$

此处n是A的列数，也是B的行数

*(7) 若AB=O，则$r(A)+r(B)\le n$

此处n是A的列数，也是B的行数

*(8) 若A为列满秩矩阵，则$r(AB)=r(B)$

若B为行满秩矩阵，则$\mathrm{r(AB)=r(A)}$

*(9) A，B，C为同阶方阵，则

$$r(AB)+r(BC)\le r(B)+r(ABC)$$

*(10) 若A为n阶方阵，且$A^2=A$(这类矩阵称为**幂等矩阵**)，则

$$r(A)+r(A-E)\le n$$

*(11) 若A为n阶方阵，且$A^2=E$(这类矩阵称为**对合矩阵**)，则

$$r(A+E)+r(A-E)\le n$$

课件中的补充例题可以看一看。

设A， B， C为三阶可逆矩阵，

05-06 秋冬期末 A 卷

（1）化简等式$(BC^T-E)^T\cdot(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$；

（2）当$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$时，求出上式结果。

解：（1） $(BC^T-E)^T\cdot(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$

$=[AB^{-1}(BC^T-E)]^T+[(BA^{-1})^{-1}]^T$

$=[AC^T-AB^{-1}]^T+[AB^{-1}]^T=CA^T$

（2） 上式$=CA^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&1&4\\1&2&2\end{pmatrix}$

已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，把$A$的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得到矩阵$B$，再把$B$的第 1 列与第 2 列对调得到矩阵$\boldsymbol{C}$，求矩阵$\boldsymbol{C}^{-1}$。

08-09 春夏期末 A 卷

答案 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -5 & -1 & 3\end{bmatrix}$

求逆矩阵方法

$(\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{E})\rightarrow(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{C}^{-1})$

设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{X}$都是 4 阶矩阵，且满足$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$是 4 阶单位矩阵。

09-10 春夏期末 A 卷

解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\Rightarrow\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$，

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}5 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 5 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

09-10 秋冬期末 A 卷

求满足关系式$\boldsymbol{AC}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BC}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵$\boldsymbol{A}$，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

解 因为$AC^{\mathrm{T}}(E-BC^{-1})^{\mathrm{T}}=E\Rightarrow A[(E-BC^{-1})C]^{\mathrm{T}}=E\Rightarrow A(C-B)^{\mathrm{T}}=E$，则

$$A=[(C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{T}\right)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

05-06 秋冬期末 A 卷

设矩阵$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$，$A^*$为其伴随矩阵，已知$r(A^*)=1$，求$a$。

解：由于$r(A^*)=1$，因此有$r(A)=n-1=2$。

$$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-a&1-a^2\\0&a-1&1-a\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&2-a-a^2\\0&a-1&1-a\\1&1&a\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}2-a-a^2=0\\a-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow a=-2。$$

06-07 秋冬期末 A 卷

设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且适合 $2A^*B-AB=2E+A$，求矩阵 B。

解： 容易计算 $|A|=2$，则 $AA^*=2E$。由于 $2A^*B-AB=2E+A$，故

$(4E-A^2)B=(2E+A)A$。可以验证 $2E\pm A$ 都是可逆阵，则

$$B=(2E-A)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}。$$

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\2&2&0&a&4\\1&0&a&1&5\\2&a&3&5&4\end{pmatrix}$，且 $r(A)=4$，则 $a=$__________。

06-07 春夏期末 A 卷

解一

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2&3\\2&2&0&a&4\\1&0&a&1&5\\2&a&3&5&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-2R_1]{\substack{R_2-2R_1\\R_3-R_1}}\begin{bmatrix}1&1&2&2&3\\0&0&-4&a-4&-2\\0&-1&a-2&-1&2\\0&a-2&-1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{25}}\begin{bmatrix}1&3&2&2&1\\0&-2&-4&a-4&0\\0&2&a-2&-1&-1\\0&-2&-1&1&a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&3&2&2&1\\0&-2&-4&a-4&0\\0&0&a-6&a-5&-1\\0&0&3&5-a&a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3R_4]{R_{34}}\begin{bmatrix}1&3&2&2&1\\0&-2&-4&a-4&0\\0&0&3&5-a&a-2\\0&0&3(a-6)&3(a-5)&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-(a-6)R_3}\begin{bmatrix}1&3&2&2&1\\0&-2&-4&a-4&0\\0&0&3&5-a&a-2\\0&0&0&(a-3)(a-5)&-(a-3)(a-5)\end{bmatrix}$$

因为$r(A)=4$，所以$a\neq3$且$a\neq5$。

解二 在上面的求解过程中，变换到下面矩阵时采用另一种做法。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 & a-5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5-a & a-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 & a-5 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3-C_5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & a-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

因为$r(A)=4$，所以$a\neq 3$且$a\neq 5$。

解三

这是参考答案的解法

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & a & 4 \\ 1 & 0 & a & 1 & 5 \\ 2 & a & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_4-2C_1\\ C_5-3C_1}]{\substack{C_2-C_1\\ C_3-2C_1}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&0&-4&a-4&-2\\1&-1&a-2&-1&2\\2&a-2&-1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_4-C_2\\ C_5+2C_2}]{C_3-2C_5}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&0&0&a-4&-2\\1&-1&a-6&0&0\\2&a-2&3&3-a&2a-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}C_5}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&0&0&a-4&1\\1&-1&a-6&0&0\\2&a-2&3&3-a&3-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3+(a-6)C_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&0&0&a-4&1\\1&-1&0&0&0\\2&a-2&(a-3)(a-5)&3-a&3-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_{23}]{\substack{C_{45}\\ C_{34}}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&a-4\\1&0&-1&0&0\\2&3-a&a-2&(a-3)(a-5)&3-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_5+(a-4)C_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\2&3-a&a-2&(a-3)(a-5)&(a-3)(a-5)\end{bmatrix}$$

因为$r(A)=4$，所以$a\neq 3$且$a\neq 5$。

07-08 春夏期末 A 卷

设 4 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$，则$(A^*)^*=$（ 25A ）。

$\boxed{(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}}$

07-08 秋冬期末 A 卷

设n阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}\end{bmatrix}$$

求$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$。

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{B}^2=n\boldsymbol{B}$$

从而

$$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{n}\boldsymbol{B}\right)^2=\boldsymbol{E}-\frac{2}{n}\boldsymbol{B}+\frac{1}{n^2}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n}\boldsymbol{B}$$
$$=\boldsymbol{A}$$

由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$可得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$$

故

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$$

$$=\begin{bmatrix}-1+\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2n} & -1+\frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \cdots & -1+\frac{1}{2n}\end{bmatrix}$$

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，求：（1）$\boldsymbol{A}^2$，（2）$\boldsymbol{A}^{2011}$

10-11 秋冬期末 A 卷

解法一 （1）

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

（2）令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$

$$A^{2010}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{1005}=\boldsymbol{E}+1005\boldsymbol{B}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\1005&1&0\\1005&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^{2011}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1005&1&0\\1005&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\1006&0&1\\1005&1&0\end{bmatrix}$$

设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，那么 $(2\boldsymbol{A})^*=$____________。

08-09 秋冬期末 A 卷

答案 $\begin{bmatrix}8&8&0&0\\0&8&8&0\\0&0&8&8\\0&0&0&8\end{bmatrix}$

08-09 秋冬期末 A 卷

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|2\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{A}^{-1}|=$____________。

答案 $\frac{1}{2}$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$，已知矩阵

$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21}+a_{31} & 4a_{22}+a_{32} & 4a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{M}^{-1}$。

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 4a_{22} & 4a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2+R_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21}+a_{31} & 4a_{22}+a_{32} & 4a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}$$

所以

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & \frac{1}{4}b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \frac{1}{4}b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & \frac{1}{4}b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & \frac{1}{4}b_{12} & -\frac{1}{4}b_{12}+b_{13} \\ b_{21} & \frac{1}{4}b_{22} & -\frac{1}{4}b_{22}+b_{23} \\ b_{31} & \frac{1}{4}b_{32} & -\frac{1}{4}b_{32}+b_{33} \end{bmatrix}$$

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别是m和n阶可逆方阵，$\boldsymbol{C}$为$m+n$阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^*=$ $\underline{(-1)^{mn}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & a\boldsymbol{B}^* \\ b\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}}$。

06-07 秋冬期末 A 卷

设 A 是 n 阶矩阵，满足$|A|\neq 0$，求证：（1）$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$，（2）$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$。

证明：（1） 由于 $AA^*=|A|E$，所以$|A|\left|A^*\right|=|A|^n$，即得$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$；

（2）由于$A^*(A^*)^*=\left|A^*\right|E=|A|^{n-1}E$，所以有

$$(A^*)^*=|A|^{n-1}\left(A^*\right)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A。$$

设A是n阶矩阵，满足$A^3=2E$，$B=A^2-2A+E$，求证：B可逆，并求出B^{-1}。

06-07 春夏期末 A 卷

证明 因为$A^3=2E$，所以

$$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=E$$

于是

$$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$$

从而

$$B=A^2-2A+E=(A-E)^2$$

可逆，且

$$B^{-1}=(A-E)^{-1}\cdot(A-E)^{-1}=(A^2+A+E)^2$$

$$= A^4 + 2A^3 + 3A^2 + 2A + E$$
$$= 2A + 4E + 3A^2 + 2A + E$$
$$= 3A^2 + 4A + 5E$$

08-09 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵且$\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{E}$，若$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$，试证明：$\boldsymbol{B}$可逆，并求出$\boldsymbol{B}^{-1}$。

证一 因为$\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}$$
$$= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})$$

且$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$。再$\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{E}$可得$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}$，所以$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$。类似还可得到$(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}) = 10\boldsymbol{E}$，所以

$$(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E})。$$

故$\boldsymbol{B}$可逆，且

$$\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$= \frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$$
$$= \frac{1}{10}\boldsymbol{A}^2 + \frac{3}{10}\boldsymbol{A} + \frac{2}{5}\boldsymbol{E}$$

证二 采用待定系数法。因为$\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{E}$，若$\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$

可逆且逆矩阵是关于矩阵$\boldsymbol{A}$的多项式，则逆矩阵必是$a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E}$形式。因此假设$(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，则

$$a\boldsymbol{A}^4+(b-2a)\boldsymbol{A}^3+(c-2b+2a)\boldsymbol{A}^2+(2b-2c)\boldsymbol{A}+2c\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$$

由$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，得

$$(c-2b+2a)\boldsymbol{A}^2+(2a+2b-2c)\boldsymbol{A}+(2b-4a+2c)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$$

令

$$\begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ 2a+2b-2c=0 \\ -4a+2b+2c=1 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{10} \\ b=\dfrac{3}{10} \\ c=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

故$\boldsymbol{B}$可逆，且

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}^2+\frac{3}{10}\boldsymbol{A}+\frac{2}{5}\boldsymbol{E}$$

设A是n阶矩阵，且满足$A^3=6E$，矩阵$B=A^2-2A+$

$4E$，求证：矩阵B可逆，并且求出B^{-1}。

10-11 春夏期末 A 卷

证明

因为$A^3=6E$，则

$$A^3-2A^2+4A+2A^2-4A+8E=14E$$

$$A(A^2-2A+4E)+2(A^2-2A+4E)=14E$$

$$(A^2-2A+4E)(A+2E)=14E$$

所以

$$(A^2-2A+4E)^{-1}=\frac{1}{14}(A+2E)$$

也可采用待定系数法。

06-07 秋冬期末 A 卷

设A，B，C是n阶矩阵，且$AB=BC=CA=E$，则$A^2+B^2+C^2=$______________。

解 因为$AB=BC=E$，则$A=B^{-1}$，$C=B^{-1}$，从而$A=C$。又因为$AC=E$，则$A^2=E$。同理可得$B^2=C^2=E$，因此$A^2+B^2+C^2=3E$

06-07 秋冬期末 A 卷

设A是n阶矩阵，且$A^2+2A-4E=O$，则$(A-E)^{-1}=$ $\underline{A+3E\quad}$。

06-07 秋冬期末 A 卷

设n阶矩阵$B=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中$a_i\neq 0$，$b_i\neq 0$，$(i=1，2，\cdots，n)$，则$r(B)=$_______________。

教材习题 4.6 第 9 题

解

$B=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$，因为$a_i\neq 0$，$b_i\neq 0$，$(i=1，2，\cdots，n)$，则$a_ib_i\neq 0$，从而$r\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)=r(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix})=1$，且$r(B)\geq 1$。又因为

$$r(B) \le r\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = 1，所以 r(B) = 1。$$

说明 此题不必要求 $a_i \neq 0$，$b_i \neq 0$，$(i = 1，2，\cdots，n)$，只要 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 中至少有一个不为零，并且 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 中也至少有一个不为零即可。

记住这个结论，经常要用到这个结论。

09-10 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶矩阵，$\boldsymbol{A}$可逆，且存在一个常数λ，满足矩阵$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$，求证：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。

证明 由 $A = (A - \lambda E)B$ 可得：$A = AB - \lambda B$，$AB = A + \lambda B$。

因为 A 可逆，则由 $A = (A - \lambda E)B$ 可得：$E = A^{-1}(A - \lambda E)B = (E - \lambda A^{-1})B$。

由此可知 $(E - \lambda A^{-1})$ 可逆，逆矩阵为 B，所以 $B(E - \lambda A^{-1}) = E$。由此可得：$BA = A + \lambda B$

因此$AB = BA$。

第四章 线性空间和线性变换

- 线性空间
- 同构
- 欧氏空间
- 线性变换

其中同构和线性变换不作要求。

定义 4.1.1 线性空间、向量

设P是一个数域，其中元素用a，b，c，…来表示，V是一个非空集合，其中元素用$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…来表示，如果下列条件被满足就称V为P上的一个**线性空间**，V中的元素通常称为**向量**。

1. 加法

在V中定义一个**加法**，对于V中任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$，均有V中一个确定的向量$\boldsymbol{\gamma}$与它们对应，这个向量称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和，记为$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$。

2. 数乘

有一个**数量乘法**，对于P中每一个数k和V每一个

向量$\boldsymbol{\alpha}$，有V中一个确定的向量$\boldsymbol{\delta}$与它们对应，这个向量称为k与$\boldsymbol{\alpha}$的**数量乘积**，记为$\boldsymbol{\delta} = k \cdot \boldsymbol{\alpha}$。

3. 八条运算规律

对任意的$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma} \in V$，任意的$k$，$t \in P$，加法和数量乘法满足下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

(2) 结合律 $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$

(3) 在V中存在一个**零向量**，记为$\boldsymbol{\theta}$，对于V中的每一个向量$\boldsymbol{\alpha}$，都有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}$

(4) 对于V中每一个向量$\boldsymbol{\alpha}$，在V中存在一个向量$\boldsymbol{\beta}$使得$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$，这样的$\boldsymbol{\beta}$称为$\boldsymbol{\alpha}$的一个**负向量**

(5) $k \cdot (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k \cdot \boldsymbol{\alpha} + k \cdot \boldsymbol{\beta}$

(6) $(k + t) \cdot \boldsymbol{\alpha} = k \cdot \boldsymbol{\alpha} + t \cdot \boldsymbol{\alpha}$

(7) $(kt) \cdot \boldsymbol{\alpha} = k \cdot (t \cdot \boldsymbol{\alpha})$

(8) $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

- 一个非空集合
- 两个封闭的运算
- 八条运算规律

定义 4.2.2 线性相关、线性无关

设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$是数域P上的线性空间V中s个向量,如果存在P中不全为0的数k_1，k_2，$\cdots$，k_s，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta}$$

则称$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$**线性相关**；否则就称**线性无关**。

证明线性无关的方法

假设有一组数k_1，k_2，$\cdots$，k_s使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta}$$

如果能根据上面的假设证明

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$$

则也就证明了$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$**线性无关**

性质 4.2.3 在P^n中，设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}，\cdots，\boldsymbol{\alpha}_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{bmatrix}$$

$$A=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_s]$$

则

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(A) < s$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(A) = s$

推论 1 在P^n中任意$r(r > n)$个向量必线性相关。

推论 2 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n \in P^n$，记

$A = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]$，则。

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关 $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

定理 4. 3. 1 向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s(s \geq 2)$线性相关 $\Leftrightarrow$
$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个向量是其余个$s-1$向量的线性组合。

推论 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s(s \geq 2)$线性元关 $\Leftrightarrow$
$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$中每一个向量都不能经其余个$s-1$向量线性表示。

定理 4. 3. 2 若向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，

而

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$线性相关，

则

- $\boldsymbol{\beta}$必可经$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，
- 且线性表示唯一。

定理 4.3.3 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$中每一个向量都可经$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，若$r > s$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关。

定理 4.3.4 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$中每一个向量都可经$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，则$r \leq s$。

定义 4.3.2 极大线性无关组

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$中的一部分$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$向量称为原向量组的一个**极大线性无关组**，如果

（1） $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性无关

（2） 再添加(如果可能)原向量组的任何一个向量$\boldsymbol{\alpha}_k$都有$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$，$\boldsymbol{\alpha}_k$线性相关

或

定义 4.3.2 极大线性无关组

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$中的一部分$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$向量称为原向量组的一个**极大线性无关组**，如果

（1） $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性无关

（2） $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$中任何一个向量$\boldsymbol{\alpha}_k$均可经$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示

性质 4.3.1 向量组与其极大线性无关组等价。

性质 4.3.2 向量组的任意两个极大线性无关组必等价，从而它们所含的向量个数相等。

定义 4.4.3 过渡矩阵

设

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad \text{(I)}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\ \boldsymbol{\varepsilon}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n' \quad \text{(II)}$$

n维线性空间V中的两组基。$\boldsymbol{\varepsilon}_1'$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2'$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n'$经基(I)线性表示为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1' = m_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + m_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + m_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2' = m_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + m_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + m_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_n' = m_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + m_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + m_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

以$\boldsymbol{\varepsilon}_1'$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2'$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n'$在基(I)下的坐标作为列向量构成的矩阵

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

称为基(I)到(II)的**过渡矩阵**。

由定理 4.4.1 推论 3 之(3)可知，M为可逆矩阵，且借助矩阵形式有

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1',\ \boldsymbol{\varepsilon}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n'] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n]M$$

定理 4.4.2 设

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad \text{(I)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\ \boldsymbol{\varepsilon}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n' \quad \text{(II)}$$

n维线性空间V中的两组基，M是基(I)到(II)的过渡矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$是V中的一个向量，$\boldsymbol{\alpha}$在基(I)和基(II)下的坐标分别为

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad X'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

则

$$X=MX',\quad X'=M^{-1}X$$

定义 基变换公式、坐标变换公式

称

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1',\ \boldsymbol{\varepsilon}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n']=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n]M$$

为**基变换公式**。

称

$$X=MX',\quad X'=M^{-1}X$$

为**坐标变换公式**。

在P^n空间有下面结论：

（1）$\boldsymbol{\beta}$能(否)经$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

$\Leftrightarrow$非齐次线性方程组$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\beta}$有(没有)解

$\Leftrightarrow r([\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s])$ 是（否）等于 $r([\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s \quad \vdots \quad \boldsymbol{\beta}])$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$只有零解

$\Leftrightarrow r([\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s]) = s$

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$有非零解

$\Leftrightarrow r([\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s]) < s$

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$是(否)能作为P^n的一组基

$\Leftrightarrow$行列式$|[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]|$是(否)不为零

（5）计算向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$的极大线性无关组可通过对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]$施行初等行变换

化阶梯形矩阵而推断出来。

而一般的维欧氏空间V，只要取定一组基，研究V中向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$在这组基下的坐标$\boldsymbol{X}_{\alpha_1}$，$\boldsymbol{X}_{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{X}_{\alpha_s}$（$P^n$中向量！），即可将$V$中问题转化为$P^n$中问题来解决。

定理 4.5.1 线性空间V的一个非空子集W，若关于V的加法和数乘封闭，则W就是V的一个子空间。

例 4.5.6 设V是数域P上的线性空间，

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_t$$

是V中一组向量，记

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_t)$

$= \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t \mid k_1, \ k_2, \ \cdots, \ k_t \in P\}$

显然

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_t\} \subseteq L(\boldsymbol{\alpha}_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_t)$$

故$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_t)$非空，且可验证关于$V$中加法，数乘封闭，从而$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_t)$为$V$的子空间，

称为由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_t$**生成的子空间**。

以线性空间的观点来看齐次线性方程组$A_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$的解集合$W$是一个线性空间（$P^n$的子空间），且$\dim(W)=n-r$，其中$r=r(A)$。$W$的一组基$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$就是$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$的基础解系，从而$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$的解全体可表示为

$$\boldsymbol{\xi}=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

其中t_1，t_2，…，t_{n-r}为任意常数。

以线性空间的观点来看数域P上矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$的列向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$是P^m中向量，行向量$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_m$是P^n中向量，且有

$$\begin{aligned}&\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\cdots，\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=r(A)\\&=\dim L(\boldsymbol{\beta}_1，\boldsymbol{\beta}_2，\cdots，\boldsymbol{\beta}_m)\end{aligned}$$

例 4.11.2 设A为$m\times n$实矩阵，求证：

$$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}})=r(A)$$

定义 4.8.1 内积，欧几里得空间(为**欧氏空间**)

设V是实数域$\mathbf{R}$上的一个线性空间，如果对V中任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$都有唯一确定的实数与它们对应，将这个实数记为$(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$，且具有下列性质：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha})$

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$，且$(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$

这里$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$是V中任意向量，k是任意实数，则称$(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$为向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$的**内积**。具有内积的实线性空间$V$称为**欧几里得空间**，简称为**欧氏空间**。

设α,β为 n 维欧氏空间中两个向量，且模$\|\alpha\|=2,\|\beta\|=4$，求内积$(4\alpha-3\beta,4\alpha+3\beta)$。

05-06 秋冬期末 A 卷

解：$(4\alpha-3\beta,4\alpha+3\beta)=(4\alpha,4\alpha)+(4\alpha,3\beta)+(-3\beta,4\alpha)+(-3\beta,3\beta)$

$=16(\alpha,\alpha)-9(\beta,\beta)=-80$

设在向量空间 R^3 中有两组基：

05-06 秋冬期末 A 卷

（Ⅰ） $\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(1,1,0)^T,\varepsilon_3=(1,1,1)^T$

（ⅠⅠ） $\eta_1=\varepsilon_2,\eta_2=\varepsilon_3-\varepsilon_1,\eta_3=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$，

求 （1）基（Ⅰ）到基（ⅠⅠ）的过渡矩阵M；

（2）若 α 在基（Ⅰ）下的坐标为 $X=(1,0,2)^T$，求 α 在基（ⅠⅠ）下的坐标Y；

（3）求在上述两组基下具有相同坐标的向量。

解：（1） $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_2,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

则过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$。

（2） $X=MY \quad \Rightarrow Y=M^{-1}X$

$$(M,X)=\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\1&0&-1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&2&3\\1&0&-1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

所以 $Y=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)^T$。

（3） $X=MX \quad \Rightarrow (M-E)X=0$

$$M-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，则 $X=k(1,0,1)^T$。

于是得到在上述两组基下有相同坐标的向量为

$$\beta=k(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=k(2,1,1)^T$$。

06-07 春夏期末 A 卷

设欧氏空间 R^3 的一组向量 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(2,-1,1)^T,\alpha_3=(-2,1,5)^T$

（1） 求证：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基;

（2） 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 改造成 R^3 的标准正交基 β_1,β_2,β_3;

（3） 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

（4） 向量 δ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $(1,2,0)^T$，求向

量 δ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。

解

（1） $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\0&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-5&5\\0&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，

可知秩为 3，从而线性无关。

（2）由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是相互正交的，因此只需单位化即得标准正交基

$$\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$$

（3） $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{6}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$。

（4） $\delta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

推出

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{30}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\ 2\sqrt{6}\\ 0\end{pmatrix}。$$

已知$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$和$\boldsymbol{\beta}_1=[2，1，0，0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[1，3，0，0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[0，0，1，1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=[0，0，1，-1]^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^4$的两组基，而从基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$到$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$。

07-08 秋冬期末 A 卷

（1）求基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；

（2） 求 向 量 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$ 在 基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标；

答案

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1，\ -2，\ 0，\ 0]^{\mathrm{T}}，$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2，\ 9，\ 0，\ 0]^{\mathrm{T}}，$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=[0，\ 0，\ 2，\ 4]^{\mathrm{T}}，$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=[0，\ 0，\ -3，\ -7]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\delta}=[-2，\ 3，\ 13，\ -5]^{\mathrm{T}}$$

$V=\{[a\quad b\quad c\quad d]^{\mathrm{T}}|a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$，设基 I 和基 II 分别为

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\varepsilon}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

(1) 求基 I 到基 II 的过渡矩阵；

(2) 分别求向量$\boldsymbol{\alpha}=[4\quad 3\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 和基 II 下的坐标；

(3) 求一个向量$\boldsymbol{\beta}$，它在基 I 和基 II 下具有相同的坐标。

08-09 春夏期末 A 卷

解

(1) 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，则基 I 到基 II 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) 因为向量$\boldsymbol{\alpha}=[4\quad 3\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 下的坐标是$\boldsymbol{X}=[1,\ 1,\ 1,\ 1]^{\mathrm{T}}$，则向量$\boldsymbol{\alpha}=[4\quad 3\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 II 下的坐标是

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

(3) 设向量$\boldsymbol{\beta}$在两组基下具有相同的坐标$\boldsymbol{X}$，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}$，即$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，解之得

$$\boldsymbol{X} = k[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}，k\text{为任意常数}$$

所以$\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\varepsilon}_1 = k[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$。

09-10 秋冬期末 A 卷

在线性空间V中，设基 I 和基 II 分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

(1) 求基 I 到基 II 的过渡矩阵；

(2) 分别求向量$\boldsymbol{\alpha} = [2 \quad 3 \quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 和基 II 下的坐标；

(3) 求一个向量$\boldsymbol{\beta}$，它在基 I 和基 II 下具有相同的坐标。

答案

(1) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$

(2) 向量$\boldsymbol{\alpha} = [2 \quad 3 \quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 和基 II 下的坐标分别

为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

（3）$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}k & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中$k\neq 0$。

08-09 秋冬期末 A 卷

设V是实数域$\mathbf{R}$上的全体2×2矩阵，即

$$V=\mathbf{R}^{2\times 2}=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$$

V的运算是普通矩阵的加法和数量乘法，V对于这两种运算成为线性空间，V的子集合

$$V_1=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\middle| a+b+c+d=1;\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$$

$$V_2=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\middle| a+b+c+d=0;\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$$

问V的子集合V_1和V_2对于V中的运算是否构成为V的子空间(要说明理由)？写出该子空间的一组基，并且求出它的维数。

解 因为V的零元素$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$不在$V_1$中，所以$V_1$不是$V$的子空间(或者说明$V_1$对于$V$的加法或数乘运算不封闭)。

V_2是V的子空间，理由如下：

(1) 零元素$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\in V_2$，所以$V_2$非空。

(2) 如 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\c_2 & d_2\end{bmatrix}\in V_2\Longrightarrow a_1+b_1+c_1+d_1=0$，$a_2+b_2+c_2+d_2=0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\c_1+c_2 & d_1+d_2\end{bmatrix},$$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)$

$=(a_1+b_1+c_1+d_1)+(a_2+b_2+c_2+d_2)=0$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2$

(3) $k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}ka_1 & kb_1\\kc_1 & kd_1\end{bmatrix}$，则 $ka_1+kb_1+kc_1+kd_1=k(a_1+b_1+c_1+d_1)=0$

$\Longrightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in V_2$

所以V_2是V的子空间。V_2的基是：

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

$\dim(V_2)=3$。

在 $\mathbf{R}^2$ 中，由基 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,\ 1]^{\mathrm{T}}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=[1,\ 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[2,\ 3]^{\mathrm{T}}$ 的过渡矩阵是____________。向量$\boldsymbol{\xi}=[3,\ 1]^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$下的坐标是____________。

08-09 秋冬期末 A 卷

答案 $\boldsymbol{M}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\left[-\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right]^{\mathrm{T}}$

07-08 春夏期末 A 卷

设V是实数域$\mathbf{R}$上的全体4×4反对称矩阵所构成的线性空间，即

$$V=\left\{\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{4\times4}\middle|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A},\ a_{ij}\in\mathbf{R}\right\}$$

写出 V 的一组基（ $e_{12}-e_{21}$，$e_{13}-e_{31}$，$e_{14}-e_{41}$，$e_{23}-e_{32}$，$e_{24}-e_{42}$，$e_{34}-e_{43}$ ）。V 的维数是（ 6 ）。设 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3 & 1\\-2 & 0 & 4 & -2\\-3 & -4 & 0 & -2\\-1 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$，写出 $\boldsymbol{A}$ 在上面这组基下的坐标（ $[2,\ 3,\ 1,\ 4,\ -2,\ -3]^{\mathrm{T}}$ ）。

06-07 秋冬期末 A 卷

设$\alpha_1=(1,0,-1,2)^T,\alpha_2=(2,-1,-2,6)^T,\alpha_3=(3,1,a,4)^T$，$\beta=(4,-1,-5,10)^T$，已知$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，

则$a=$____-3____。

07-08 春夏期末 A 卷

已知向量组$\boldsymbol{\beta}_1=[0,\ 1,\ -1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[a,\ 2,\ -1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[b,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}}$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,\ 2,\ -3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[3,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[9,\ 6,\ -7]^{\mathrm{T}}$有相同的秩，且$\boldsymbol{\beta}_3$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。求$a$，$b$的值，并写出$\boldsymbol{\beta}_3$由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示的一个表达式。

解

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&10&20&3b\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-10R_2]{-\frac{1}{6}R_2}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&-\frac{1}{6}(1-2b)\\0&0&0&\frac{1}{3}(5-b)\end{bmatrix}$$

因为$\boldsymbol{\beta}_3$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3)=2$，由此可得$b=5$。

$$\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&-\frac{1}{6}(1-2b)\\0&0&0&\frac{1}{3}(5-b)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&9&5\\0&1&2&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可得：

$$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$$

或

$$\boldsymbol{\beta}_3=\left(\frac{1}{2}-3t\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{3}{2}-2t\right)\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中t为任意数。

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a & 5\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+R_1]{R_{12}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & a & 5\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+aR_2]{R_{23}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5-a\end{bmatrix}$$

因为$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=2$，由此可得$a=5$。

09-10 秋冬期末 A 卷

向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\a\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\c\end{bmatrix}$$

决定数a，c的值，使得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩最小，并求出向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组，并用此极大线性无关组表示其它的向量。

答案 $[\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_4]\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&7&-4\\0&1&-4&3\\0&0&a+18&c-11\end{bmatrix}$

当 $a=-18$，$c=11$ 时秩最小，这时$r(\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_4)=2$。

极大线性无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，且$\boldsymbol{\alpha}_3=7\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$。

设V是欧氏空间，$\boldsymbol{\beta}$是V中的非零向量，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$是V中的s个向量，且对于任意的k，$(\boldsymbol{\beta}，\boldsymbol{\alpha}_k)>0$，当$i\neq j$时，$(\boldsymbol{\alpha}_i，\boldsymbol{\alpha}_j)\leq 0$，求证：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。

06-07 春夏期末 A 卷

证明 若

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta}\qquad(1)$$

其中 k_1，k_2，…，k_s 为数。不妨假设 k_1，k_2，…，$k_r \geq 0$，k_{r+1}，k_{r+2}，…，$k_s \leq 0$。由(1)式可得

$$
\begin{aligned}
& k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \\
& \qquad = -(k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s)
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} &= k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \\
&= -k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} - k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2} - \cdots - k_s\boldsymbol{\alpha}_s
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) \\
&= (k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r,\ -k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} \\
&\qquad - k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2} - \cdots - k_s\boldsymbol{\alpha}_s) \\
&= -\sum_{j=r+1}^{s}\sum_{i=1}^{r} k_i k_j (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) \leq 0
\end{aligned}
$$

从而$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$，$\boldsymbol{\gamma}=0$。由此可得

$$
\begin{aligned}
& 0 = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r) \\
& = \sum_{i=1}^{r} k_i(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i)
\end{aligned}
$$

因为$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) > 0$，则$k_i = 0$，　$i = 1$，2，…，r

$$
\begin{aligned}
& 0 = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \\
& = (\boldsymbol{\beta},\ -k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} - k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2} - \cdots - k_s\boldsymbol{\alpha}_s)
\end{aligned}
$$

$$= -\sum_{j=1}^{s} k_j(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha}_j)$$

因为$(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，则

$k_j = 0,\quad j = r+1,\ r+2,\ \cdots,\ s$

因此$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关。

07-08 春夏期末 A 卷

2. 设A是$m\times n$矩阵，B是$m\times t$矩阵，$r(B)=t$。令$C=(A,B)_{m\times(n+t)}$，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(r)}$为齐次线性方程组$CX=0$的一个基础解系，设$X^{(i)}=\begin{pmatrix} X_0^{(i)} \\ X_1^{(i)} \end{pmatrix}$，这里$X_0^{(i)}$为$X_1^{(i)}$的前$n$个元素。求证$X_0^{(1)}$，$X_0^{(2)}$，…，$X_0^{(r)}$线性无关。

证:

因为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(r)}$为齐次线性方程组$CX=0$的一个基础解系，

所以$CX^{(i)}=(A,B)X^{(i)}=0$，即

$$(A,B)X^{(i)}=(A,B)\begin{pmatrix} X_0^{(i)} \\ X_1^{(i)} \end{pmatrix}=AX_0^{(i)}+BX_1^{(i)}=0。$$

假设

$$k_1X_0^{(1)}+k_2X_0^{(2)}+\cdots+k_rX_0^{(r)}=0 \qquad (1)$$

因为$k_iAX_0^{(i)}+k_iBX_1^{(i)}=0$，

所以

$A\left(k_1X_0^{(1)}+k_2X_0^{(2)}+\cdots+k_rX_0^{(r)}\right)+B\left(k_1X_1^{(1)}+k_2X_1^{(2)}+\cdots+k_rX_1^{(r)}\right)=0$。

由（1）知道，$B\left(k_1X_1^{(1)}+k_2X_1^{(2)}+\cdots+k_rX_1^{(r)}\right)=0$。

因为$r(B)=t$，所以

$k_1X_1^{(1)}+k_2X_1^{(2)}+\cdots+k_rX_1^{(r)}=0$。

再结合（1）可得$k_1X^{(1)}+k_2X^{(2)}+\cdots+k_rX^{(r)}=0$。

由于$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$\cdots$，$X^{(r)}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，即$X_0^{(1)}$，$X_0^{(2)}$，$\cdots$，$X_0^{(r)}$线性无关。

第五章 特征值和特征向量

- 特征值和特征向量
- 矩阵的对角化
- 矩阵相似理论和应用

实对称矩阵的对角化

定义4.10.2 相似

设A，$B \in P^{n\times n}$，若存在可逆矩阵$P \in P^{n\times n}$，使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称A与B**相似**。

性质4.10.3 若A与B相似,则$r(A) = r(B)$，$|A| = |B|$。

定义 5.1.1 特征值(或**特征根**)，**特征向量**

设A为数域P上的n阶方阵,如果存在数域P上的数λ_0和非零向量$\boldsymbol{\xi}$，使得$A\boldsymbol{\xi} = \lambda_0\boldsymbol{\xi}$，则称$\lambda_0$为$A$的一个**特征值**(或**特征根**)，而$\boldsymbol{\xi}$称为$A$的属于特征值$\lambda_0$的一个**特征向量**。

定理 5.1.1

设A为n阶方阵，则A能与对角矩阵相似的充要条件为A有n个线性无关的特征向量。若A有n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，⋯，$\boldsymbol{\xi}_n$，可记$P=[\boldsymbol{\xi}_1 \quad \boldsymbol{\xi}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\xi}_n]$，则$P$是一个可逆矩阵，且使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$$

此处λ_1，λ_2，⋯，λ_n是A的特征值，$\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$是属于特征值$\lambda_i$的特征向量

定理 5.1.2

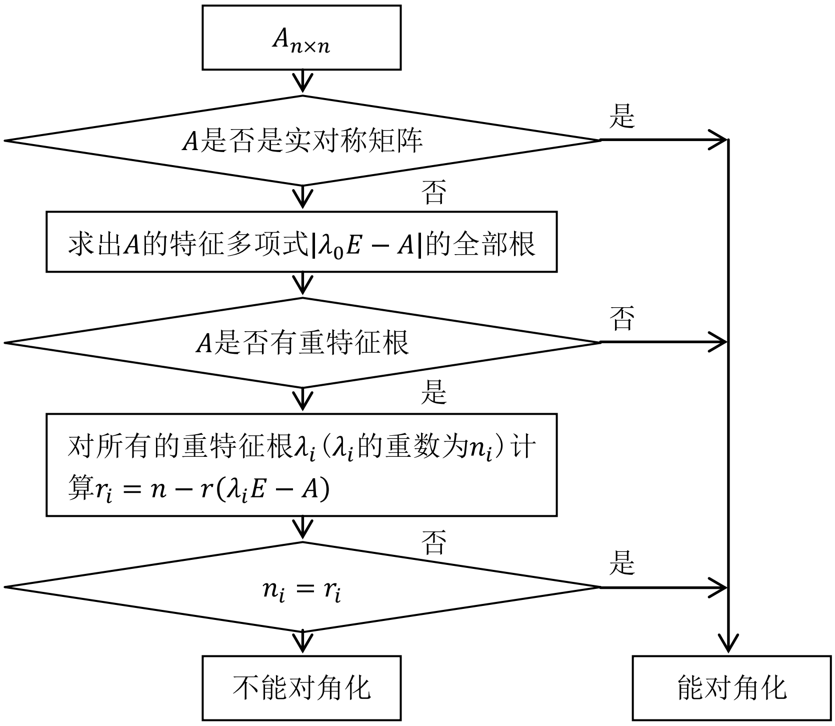
（1）λ_0是A的一个特征值的充要条件为λ_0是A的特征多项式$f(\lambda)$在数域P中的一个根，即$|\lambda_0 E-A|=0$。

（2）若λ_0是A的一个特征值，则属于λ_0的特征向量的全体是齐次线性方程组$(\lambda_0 E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$的所有非零解。

矩阵对角化方法

设A是n阶方阵，判别A能否对角化可按下述步骤

进行：



对能对角化的矩阵A，对角化的具体步骤如下：

(1)解特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|$$

求出A的全部相异的特征值：

$$\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_s$$

(2)将$\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_s$逐个代入

$$(\lambda_i E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}，i=1,2,\cdots,s$$

求得一个基础解系（即解空间W_{λ_i}的一组基）

$$\boldsymbol{\xi}_{i1}，\boldsymbol{\xi}_{i2}，\cdots，\boldsymbol{\xi}_{ir_i}$$

这是一组线性无关的特征向量。

(3)因A可对角化，所以$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$，将这n个

线性无关的特征向量记为$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_n$。

(4) 取$P=[\boldsymbol{\xi}_1 \quad \boldsymbol{\xi}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\xi}_n]$，则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中λ_i是特征向量$\boldsymbol{\xi}_i$所对应的特征值。

实对称矩阵对角化

(1) 求出特征值和n个线性无关的特征向量。

(2) 再用施密特正交化方法将线性无关向量组

$$\boldsymbol{\xi}_{i1}, \boldsymbol{\xi}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{ir_i} (i=1,2,\cdots,s)$$

改造成标准正交向量组

$$\boldsymbol{\eta}_{i_1}, \boldsymbol{\eta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_{r_i}} \ (i=1,2,\cdots,s)$$

且

$$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$$

则

$$\boldsymbol{\eta}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{1r_1}, \boldsymbol{\eta}_{21}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{2r_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{sr_s}$$

就是$\boldsymbol{R}^n$的一组标准正交基，记

$$U=[\boldsymbol{\eta}_{11} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_{1r_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_{s1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_{sr_s}]$$

则U就是正交矩阵，且

n_1个

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & n_2\text{个} & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_s \quad n_s\text{个} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_s \end{bmatrix}$$

其中主对角线上元素为A的全部特征值。

特征值和特征向量

设A为n阶方阵，λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n是A的全体特征根（重根按重数计），则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}A$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

(2) A为可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ $\lambda_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$

(3) 设$p(x)=a_kx^k+\cdots a_2x^2+a_1x+a_0$，若$\lambda_0$是$A$的一个特征值，则

$$p(\lambda_0)=a_k{\lambda_0}^k+\cdots a_2{\lambda_0}^2+a_1\lambda_0+a_0$$

是$p(A)$的一个特征值。同时若$\boldsymbol{\xi}$是A的属于λ_0的特征向量，则$\boldsymbol{\xi}$也是$p(A)$的属于$p(\lambda_0)$的特征向量。

特别地若A可对角化，则$p(A)$的全部特征值为

$$p(\lambda_1)，p(\lambda_2)，\cdots，p(\lambda_n)$$

(4) A为可逆矩阵，若λ_0是A的一个特征值，则λ_0^{-1}是A^{-1}的一个特征值。同时若$\boldsymbol{\xi}$是A的属于λ_0的特征向量，则$\boldsymbol{\xi}$也是A^{-1}的属于λ_0^{-1}的特征向量。

矩阵	特征值	特征向量
A	λ_0	ξ
A^{-1}	λ_0^{-1}	ξ
A^*	$\lambda_0^{-1}\|A\|$	ξ
A^k	λ_0^k	ξ
$p(A)$	$p(\lambda_0)$	ξ

若$A^2 = A$，则A的特征值或为零，或为 1

若$A^2 = E$，则A的特征值或为 1，或为-1

若$A^k = \boldsymbol{O}$，则A的特征值均为零(参见例 5.2.6)

例 5.5.3

设n阶方阵A满足$A^2 = A$，且$r(A) = r(0 < r \leq n)$，求$|5E + A|$。

解

先证A能对角化，由$A^2 = A$可推出A的特征值或为 0，或为 1。下面设法求出它们的重数。

特征值 0 所对应的方程组$(0E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$的基础解系所含向量个数

$$r_1=n-\ r(A)=n-r$$

特征值 1 所对应的方程组$(1E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$的基础解系所含向量个数

$$r_2=n-\ r(E-A)$$

由附录四练习题第二题第 3 小题知，此时$r(A)+r(E-A)=n$，故

$$r(E-A)=n-r(A)=n-r$$

从而$r_2=n-\ r(E-A)=r$。由$r_1+r_2=n$知，A能与对角矩阵Λ相似，且Λ的主对角线上元素为r个 1，$n-r$个 0，即可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}[\overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{r},\ \overbrace{0,\ \cdots,\ 0}^{n-r}]$$

再取多项式$p(x)=x+5$，利用性质 5.3.8 之(2)有

$$|5E+A|=p^r(1)p^{n-r}(0)=6^r5^{n-r}$$

矩阵相似的理论和应用

能对角化的矩阵就是与对角矩阵相似的矩阵，所以对角化是矩阵相似理论的一部分。

若A与B相似，则

（1）$r(A) = r(B)$

（2）A，B有相同的特征多项式，从而

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A，|A| = |B|$$

（3）设$p(x) = a_k x^k + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$，则

$$p(A)与p(B)相似$$

性质 5.5.1

设A，B均为n阶方阵，且A，B均能对角化，则

$$A与B相似 \iff A，B有相同的特征多项式$$

课件中的补充例题可以看一看。

06-07 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是3阶矩阵，满足$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，且$\boldsymbol{A}$的特征值为2，3，0，则$\boldsymbol{B}$的特征值是__________。

如果已知$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$不可逆，实际上就是已知$\boldsymbol{A}$的特征值为2，3，0

解　由$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$得$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$，故的特征值为：1，1/2，$-1$。

06-07 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{\alpha}=[1，2，3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[1，1/2，1/3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量。

解　因为$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=3\boldsymbol{\alpha}$，所以 3 是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\eta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}(k_1\neq 0)$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值 3 的特征向量。又因为$r(\boldsymbol{A})=1$，则$|\boldsymbol{A}|=0$，由此可知 0 是$\boldsymbol{A}$的特征值，且所对应的齐次线性方程组$-\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系向量个数为 2，这说明 0 是$\boldsymbol{A}$的特征多项式的二重根，因此$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值为：$\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=0$。

因为

教材习题 4.6 第 9 题的结果

$$A = \alpha\beta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

将$\lambda = 0$代入齐次线性方程组$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$，解之得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_2 = [-1，2，0]^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\eta}_3 = [-1，0，3]^{\mathrm{T}}$$

故属于特征值 0 的特征向量为：$k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3$，其中$k_2$，$k_3$不同时为 0。

设二阶矩阵$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，求行列式$|\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}|$的值；

05-06 秋冬期末 A 卷

解 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}$的特征值为：

$$f(\lambda_1) = f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 4 = 2$$

$$f(\lambda_2) = f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 4 = 2$$

因此$|\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}| = f(1) \times f(2) = 4$

07-08 秋冬期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，$r(\boldsymbol{A}) = r$，$(r < n)$，则矩

阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为______________，行列式 $\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k\right|=$______________________。

解 由教材 P224 例 5. 5. 3 可知，因为$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$r(\boldsymbol{A})=r$，$(r<n)$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为 0（$n-r$重根）和 1（$r$重根），令 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^k$，则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k$的特征值分别为：

$f(0)=1$（$n-r$重根）

$f(1)=1+k$（r重根）

所以 $\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k\right|=f^{(n-r)}(0)f^r(0)=(1+k)^r$。

09-10 秋冬期末 A 卷

设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，$\lambda_4=3$，求

（1） $|2\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{A}^{-1}|$；

（2） $|\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$；

（3） $|(\boldsymbol{A}^*)^*|$。

答案

（1） $|\boldsymbol{A}|=-12$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-12\boldsymbol{A}^{-1}$

$$|2\boldsymbol{A}^* - 3\boldsymbol{A}^{-1}| = |-24\boldsymbol{A}^{-1} - 3\boldsymbol{A}^{-1}| = |-27\boldsymbol{A}^{-1}|$$

$$= -\frac{3^{11}}{4}$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^3 - 2\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}$ 有一个特征值 $3^3 - 23^2 - 23 - 3 = 0$，所以

$$|\boldsymbol{A}^3 - 2\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}| = 0$$

(3) $|(\boldsymbol{A}^*)^*| = |\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2} = (-12)^{3^2} = -12^9$。

设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵且$\boldsymbol{A}^3 = 8\boldsymbol{E}$，求$|\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}|$的值。

08-09 春夏期末 A 卷

解 因为$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

其中λ_1，λ_2，λ_3为$\boldsymbol{A}$的特征值。由此可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

因为$\boldsymbol{A}^3 = 8\boldsymbol{E}$，则

$$P\begin{bmatrix}\lambda_1^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^3\end{bmatrix}P^{-1}=8E$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^3\end{bmatrix}=8P^{-1}EP=8E$$

所以$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$。由此可知$A^2+3A-2E$的 3 个特征值为$2^2+3\times2-2$=8，因此

$$|A^2+3A-2E|=8^3=512$$

05-06 秋冬期末 A 卷

设$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$，已知$\lambda=2$是$A$的二重特征根，且$A$有三个线性无关的特征向量，求实数$x$，$y$。

解 因为$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+5=10$，所以$\lambda_3=6$。由于$A$有三个线性无关的特征向量，所以当$\lambda=2$时，齐次线性方程组$(2E-A)X=O$的解空间的维数为 2，从而$r(2E-A)=3-2=1$。由于

$$2E-A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -2 & -y\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2+xR_1}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{bmatrix}$$

于是$x-2=0$，$-x-y=0$，因此$x=2$，$y=-2$。

设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$，属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,\ -1,\ 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,\ 1,\ -1]^{\mathrm{T}}$，求

(1) 属于特征值$\lambda_3=6$的特征向量；

(2) 矩阵$\boldsymbol{A}$。

06-07 春夏期末 A 卷

解 (1) 因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+R_2]{R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关。令$\boldsymbol{\beta}=[x,\ y,\ z]^{\mathrm{T}}$是属于特征值$\lambda_3=6$的特征向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}_2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x-y=0\\x-z=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow x=y=z\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}=[1,\ 1,\ 1]^{\mathrm{T}}$$

(2) 令

$$P=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta]=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

则

$$A=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}10&4&4\\4&10&4\\4&4&10\end{bmatrix}$$

设A是 3 阶实对称矩阵，特征值是2，2，3，属于特征值 3 的特征向量是$\alpha_1=[1,\ 1,\ 1]^T$，求矩阵A。

答案

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&1&1\\1&7&1\\1&1&7\end{bmatrix}$$

07-08 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是 3 阶实可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$的特征值是$\frac{1}{\lambda_1}$，$\frac{1}{\lambda_2}$，$\frac{1}{\lambda_3}$，这里λ_1，λ_2，λ_3是互不相同的正整数，若$\boldsymbol{B}$的特征值是-5，1，7，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2-6\boldsymbol{A}$，求$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，并分别写出与$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}$相似的对角形矩阵。

解 因为$\boldsymbol{A}$的特征值是$\frac{1}{\lambda_1}$，$\frac{1}{\lambda_2}$，$\frac{1}{\lambda_3}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2-6\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1^2-\frac{6}{\lambda_1}$，$\lambda_2^2-\frac{6}{\lambda_2}$，$\lambda_3^2-\frac{6}{\lambda_3}$。因为$\boldsymbol{B}$的特征值是$-5$，1，7，所以可令$\lambda_1^2-\frac{6}{\lambda_1}=-5$，$\lambda_2^2-\frac{6}{\lambda_2}=1$，$\lambda_3^2-\frac{6}{\lambda_3}=7$。因为$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$是互不相同的正整数，解 $\lambda_1^2-\frac{6}{\lambda_1}=-5$，$\lambda_2^2-\frac{6}{\lambda_2}=1$，$\lambda_3^2-\frac{6}{\lambda_3}=7$ 得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$。所以与$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}$相似的对角形矩阵分别为：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & b\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$是二重特征值，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$是对角矩阵，写出此对角矩阵。

07-08 秋冬期末 A 卷

答案

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 6$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

09-10 春夏期末 A 卷

设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}$

(1) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$($\boldsymbol{\Lambda}$是 3 阶对角矩阵),并写出对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$;

(2) 求$\boldsymbol{A}^{10}$。

解

(1) $\boldsymbol{A}$的特征多项式$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-2&\lambda-1&-1\\1&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$。

特征值$\lambda_1=0$,$\lambda_2=3$,$\lambda_3=-3$。

属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

属于特征值$\lambda_3=-3$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

(2) $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$

$$A^{10}=Q\Lambda^{10}Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2\times 3^9&3^9&3^9\\3^9&2\times 3^9&-3^9\\3^9&-3^9&2\times 3^9\end{bmatrix}$$

06-07 秋冬期末 A 卷

设A是3阶实对称矩阵，特征值为1，-1，-1，属于特征值1的特征向量为$\beta=[1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$，求

(1) 属于特征值-1的所有特征向量；

(2) 矩阵A；

(3) 求A^{10}。

解 (1) 设属于特征值-1的特征向量为$X=[x_1,\ x_2,\ x_3]^{\mathrm{T}}$，则$X\perp\beta$，即

$$x_1-x_3=0$$

从而有两个线性无关的特征向量$X_1=[0,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}}$，$X_2=[1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$，而且有$X_1\perp X_2$。因此属于特征值$-1$的所有特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$，其中$k_1$，$k_2$为不全为零的任意常数。

(2) 由(1)知，取

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^{10}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$。

设 $\boldsymbol{A}$ 是元素全为 2 的 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是____________。

答案 $2n$，$\overbrace{0,\ 0,\ \cdots,\ 0}^{n-1\text{个}}$

设$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为n维单位正交列向量，矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$，求证$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$都是$\boldsymbol{A}$的特征向量，并分别求出它们对应的特征值。

05-06 秋冬期末 A 卷

证明 因为$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为n维单位正交列向量，所以

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=1$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\beta}\\&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\beta}\\&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})\\&=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

因此$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$-1$的特征向量。

08-09 秋冬期末 A 卷

设矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{X}$是$n\times m$实矩阵，且$r(\boldsymbol{X})=m(\leq n)$，求证存在

正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n-m} & \\ & \boldsymbol{O}_m\end{bmatrix}$，这里$\boldsymbol{E}_{n-m}$是$(n-m)$阶单位矩阵，$\boldsymbol{O}_m$是$m$阶零矩阵。

证 明 因 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ ，所以$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵。其次

$$\boldsymbol{A}^2=[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^2=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

由于$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 0 和 1。另外

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\\ &=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\\ &=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})-\mathrm{tr}((\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\end{aligned}$$

$$=n-\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_m)=n-m$$

所以特征值 1 是$\boldsymbol{A}$的$n-m$重特征值,特征值 0 是$\boldsymbol{A}$的m重特征值，因此存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n-m} & \\ & \boldsymbol{O}_m\end{bmatrix}$。

第六章 二次型

已知实矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&5\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

问：

(1) t 取值在什么范围时，A 为正定矩阵?为什么?

(2) t 取何值时， A 与 B 等价?为什么?

(3) t 取何值时， A 与 C 相似?为什么?

(4) t 取何值时， A 与 D 合同?为什么?

05-06 秋冬期末 A 卷。

第 6 章习题 6.5 第 9 题

解 (1) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的所有顺序主子式都大于零，即有

$$|2|=2>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0,\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{vmatrix}=3t>0.$$ 所以要求 $t>0$ 即可.

(2) A 与 B 等价充要条件是秩（A）= 秩（B），因为

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{bmatrix},$$ 所以秩（B）=2，所以要求秩（A）=2. 而

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&t\end{bmatrix},$$ 只有当 $t=0$ 时秩（A）=2，所以当 $t=0$ 时 A 与 B 等价.

(3) A 与 C 相似，则必有 tr A=tr$C$，所以有 $t+4=9$，从而得到 $t=5$．所以 $t\neq5$ 时 A 与 C 不相似，当 $t=5$ 时，A 与 C 都能与对角矩阵相似，且 $|\lambda E-A|=|\lambda E-C|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$，所以 A 与 C 相似(参见习题 6.4 的第 4 题).

(4) A 与 D 合同则要求秩相等并且有相同的正惯性指数. $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，所以

秩（D）=3，又由于 $|\lambda E-D|=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-1)$，所以 D 的正惯性指数为 2. 而

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&t\end{bmatrix}$$ 且 $|\lambda E-A|=(\lambda-t)(\lambda-1)(\lambda-3)$，所以要秩为 3 则 $t\neq 0$，要正惯性指数为 2，则要求 $t\leq 0$，因此当 $t<0$ 时 A 与 D 合同.

设 $A=\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_3&0\\0&0&a_2\end{bmatrix}$，则当 $C=$ 时，$C^{\mathrm{T}}AC=B$。

解 记 $X=[x_1,\ x_2,\ x_3]^{\mathrm{T}}$，$Y=[y_1,\ y_2,\ y_3]^{\mathrm{T}}$，矩阵 A 所对应的二次型为

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2$$

令

$$\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_3\\x_3=y_2\end{cases}$$

07-07 秋冬期末 A 卷。

第 6 章习题 6.2 第 7 题

即 $X=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}Y=CY$，则

$$\begin{aligned}f(x_1,\ x_2,\ x_3)&=X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACY\\&=a_1y_1^2+a_3y_2^2+a_2y_3^2=Y^{\mathrm{T}}BY\end{aligned}$$

因此 $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$。

已知二次型 07-08 春夏期末 A 卷

$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$。

（1）写出二次型的矩阵。

（2）用正交线性替换 $X=QY$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形。

（3）求实对称矩阵 B 使得 $A=B^3$。

解：（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$。

（2）使用实对称矩阵对角化的方法，具体略。

（3）因为 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&8\end{pmatrix}$，令 $H=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$，

则有

$$A=Q\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&8\end{pmatrix}Q^T=QH^3Q^T=(QHQ^T)(QHQ^T)(QHQ^T)$$

。令 $B=QHQ^T=(?)$，则 $A=B^3$ 且 B 为实对称矩阵。

实 二 次 型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩是 2。

（1）写出二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵表示；

（2）求参数a及二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵特征值；

（3）指出方程$f(x_1, x_2, x_3) = 1$表示何种二次曲面。

08-09 春夏期末 A 卷

答案

（1）

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

（2）$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda^2 - (6 + a)\lambda + 6a - 18)$$

因为二次型f的秩是 2，则$\lambda_1 = 0$是$\boldsymbol{A}$的特征值，且当$\lambda_1 = 0$时$|\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$。将$\lambda_1 = 0$代入上式可解得$a = 3$，则二次型$f$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

由此可知$\boldsymbol{A}$的另两个特征值为：$\lambda_2 = 4$，$\lambda_3 = 9$

（3）$f(x_1, x_2, x_3) = 1$是一个椭圆柱面。

在求参数a时也可按照下面方法：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & a\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{12}}\begin{bmatrix}-1 & 5 & -3\\ 5 & -1 & 3\\ 3 & -3 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2+5R_1}\begin{bmatrix}-1 & 5 & -3\\ 0 & 24 & -12\\ 0 & 12 & -9+a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}-1 & 5 & -3\\ 0 & 24 & -12\\ 0 & 0 & -3+a\end{bmatrix}$$

因为二次型f的秩是 2，则$\boldsymbol{A}$的秩也是 2，所以$a=3$。

设A是实对称矩阵，B是正定矩阵。求证AB的特征值全是实数。

07-08 春夏期末 A 卷

证：因为B是正定矩阵，所以存在可逆矩阵C使得$B=C^{\mathrm{T}}C$。所以 AB与矩阵$C(AB)C^{-1}=C(AC^{\mathrm{T}}C)C^{-1}=CAC^{\mathrm{T}}$相似。因为$A$是实对称矩阵，所以$CAC^{\mathrm{T}}$是实对称矩阵，所以$CAC^{\mathrm{T}}$的特征值全是实数，从而$AB$的特征值全是实数。

已知$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是n阶正定矩阵，矩阵方程$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$只有唯一解，且$n$阶方阵$\boldsymbol{B}$是该矩阵方程的解，求证：

（1）$\boldsymbol{B}$是对称矩阵；

（2）$\boldsymbol{B}$是正定矩阵。

07-08 秋冬期末 A 卷

证

（1）因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是对称矩阵。因为$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$的解，则

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}$$

$$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$$

由此可知$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$也是方程$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$的解，由解的唯一性知$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{B}$是对称矩阵。

（2）由$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}$两边取共轭得$\overline{\boldsymbol{AB}}+\overline{\boldsymbol{BA}}=\overline{\boldsymbol{C}}$，由于$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}+\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$，由此可知$\overline{\boldsymbol{B}}$也是方程$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$的解，由解的唯一性知$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵。设$\lambda$是$\boldsymbol{B}$的特征值，非零向量$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{B}$的属于特征值$\lambda$的特征向量，则$\boldsymbol{B\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$。由此可得

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB\xi}+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BA\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}$$

$$(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\lambda\boldsymbol{\xi}+(\lambda\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}$$

$$2\lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}$$

因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是正定矩阵，则$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}>0$，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}>0$，所以$\lambda>0$。因为$\boldsymbol{B}$的所有特征向量都大于零，因此$\boldsymbol{B}$是正定矩阵。

08-09 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，则$\boldsymbol{A}$既是正定矩阵又是正交矩阵的充分必要条件$\boldsymbol{A}$是单位矩阵。

证 $\Rightarrow$ 因为$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$。又因为$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$。由此可知$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$。从而$\boldsymbol{A}$的特征值为 1 或-1。又因为$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$的特征值全大于 0，因此$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 1。故存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{E}$。

$\Leftarrow$ 因为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$。所以$\boldsymbol{A}$既是正定矩阵又是正交矩阵。

08-09 秋冬期末 A 卷

已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2$，其中$\overline{x}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$。

（1） 写出二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵；

（2） 用正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$化二次型$f(x_1, x_2, x_3)$为标准形。

此题在此计算比较复杂，要小心，在后面的计算也不简单，不过解题方法是熟知的

解

(1)

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, \ x_2, \ x_3) \\
&= (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)\overline{x} + 3\overline{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 \\
&= \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{2}{3}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)
\end{aligned}
$$

所以二次型矩阵是

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}
\end{bmatrix}
$$

(2)

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \lambda-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \lambda-\frac{2}{3}\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$$

特征值是：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$。

属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关的特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的线性无关的特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

令

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}$$

则$f(x_1，x_2，x_3)=y_2^2+y_3^2$。

09-10 春夏期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，如果存在非零列向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$，则$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值大于零。

证（用反证法证）因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，则存在正交矩阵$\boldsymbol{U}$使得$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}[\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_n]$，其中$\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的特征值，经过正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}$后二次型$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$。若结论不成立，则$\boldsymbol{A}$的特征值全部小于或等于零，则对于任何的向量$\boldsymbol{X}$，都有$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\le 0$，与题设矛盾，所以矩阵$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值大于零。

设二次型$f(x_1，x_2，x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，经过正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$后变为$f(x_1，x_2，x_3)=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$，且$\boldsymbol{Q}$的最后一列是$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

（1）求正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$；

（2）求二次型$f(x_1，x_2，x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$；

（3）问上述所求的二次型是否唯一，请说明理由。

09-10 秋冬期末 A 卷

解

（1） f 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$，

所以属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

设属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}=[x\quad y\quad z]^{\mathrm{T}}，\text{这里} x^2+y^2+z^2=1$$

由 $(\boldsymbol{\alpha}，\boldsymbol{\alpha}_3)=0$ 可得 $x+y+z=0$，解之 得属于特征值 2 的标准正交特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

正交线性替换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

（2）

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

(3) 上面所求的二次型是唯一的。

如果还有一个正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{Y}$，使得$f=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$。这里$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{\eta}_1\quad\boldsymbol{\eta}_2\quad\boldsymbol{\eta}_3]$，其中$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$是属于特征值 2 的标准正交的特征向量，$\boldsymbol{\eta}_3$是属于特征值$-1$的标准特征向量。则

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{21}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\eta}_2=k_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\eta}_3=k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{\eta}_1\quad\boldsymbol{\eta}_2\quad\boldsymbol{\eta}_3]$$

$$=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{21} & 0\\ k_{12} & k_{22} & 0\\ 0 & 0 & k_{33}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$$

这里$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & 0 \\ 0 & k_{33} \end{bmatrix}$，由于$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{Q}$都是正交矩阵，所以$\boldsymbol{S}$也是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_2，\ k_{33}^2=1$$

由

$f(x_1，\ x_2，\ x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{R}\boldsymbol{Y}$

$=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$

推得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & 0 \\ 0 & k_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\boldsymbol{E}_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & k_{33} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 2\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & -k_{33}^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 2\boldsymbol{E}_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{T}=\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

因此二次型$f(x_1，\ x_2，\ x_3)$是唯一的。

09-10 秋冬期末 A 卷

设$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$是正定矩阵，其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别是$m$阶和$n$阶实对称矩阵，$\boldsymbol{C}$是$m\times n$矩阵。

（1）计算$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$其中$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$；

（2）利用(1)的结果判断矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是否为正定矩阵，并证明你的结论。

解

（1）$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$$

（2）矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是正定矩阵。

由于$\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$合同，所以$\boldsymbol{M}$正定。因为对$m$维列向量$\boldsymbol{X}=\underbrace{[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]}_{m}^{\mathrm{T}}$和任意的$n$维非零实列向量$\boldsymbol{Y}=\underbrace{[y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n]}_{n}^{\mathrm{T}}$，令$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{Z}\neq 0$，且$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}>0$，所以$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$正定。

09-10 秋冬期末 A 卷

设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵，如果对任何n维非零向量$\boldsymbol{X}$，都有$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$，求证：$|\boldsymbol{A}|>0$。

证明 因为对于任意的n维非零列向量$\boldsymbol{X}$，有$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$。

（1）如果λ_0是$\boldsymbol{A}$的一个实特征值，$\boldsymbol{X}_0 \neq 0$是对应的一个实特征向量，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \lambda_0\boldsymbol{X}_0$，由此可得$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \lambda_0\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0 > 0$，而$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0 > 0$，所以$\lambda_0 > 0$。

（2）如果λ_0是$\boldsymbol{A}$的一个虚特征值$a + bi$，a，b是实数，$b \neq 0$，由于虚根成对出现，所以$a - bi$也是$\boldsymbol{A}$的一个特征值，所以$(a + bi)(a - bi) > 0$。

由（1）和（2）知$|\boldsymbol{A}| > 0$。