第二章 质点动力学

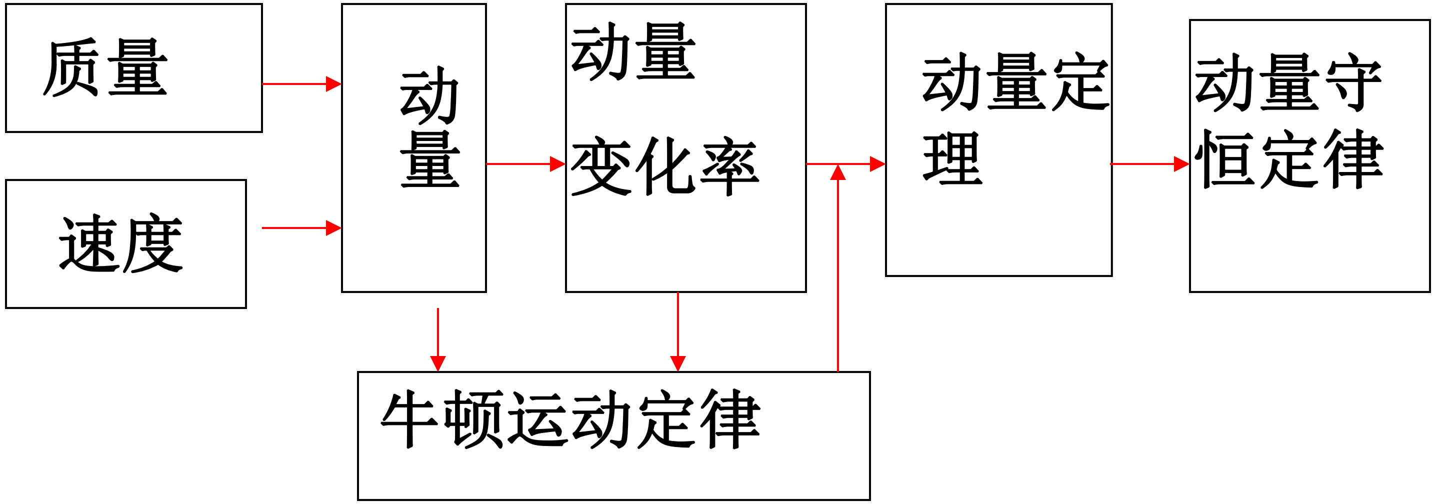
§ 2.4 — § 2.5

§ 2.4 动量定理 动量守恒定律

§ 2.5 质心运动定律

§ 2.4 动量定理 动量守恒定律

一、质点的动量定理



一 质点的动量定理

- 动量 $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

- 冲量 力对时间的积分（矢量） $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t$

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \Delta\vec{P}}$$

质点动量定理 在一段时间内，质点所受合外力的冲量，等于质点在这段时间内动量的增量.

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0=\Delta\vec{P}$$

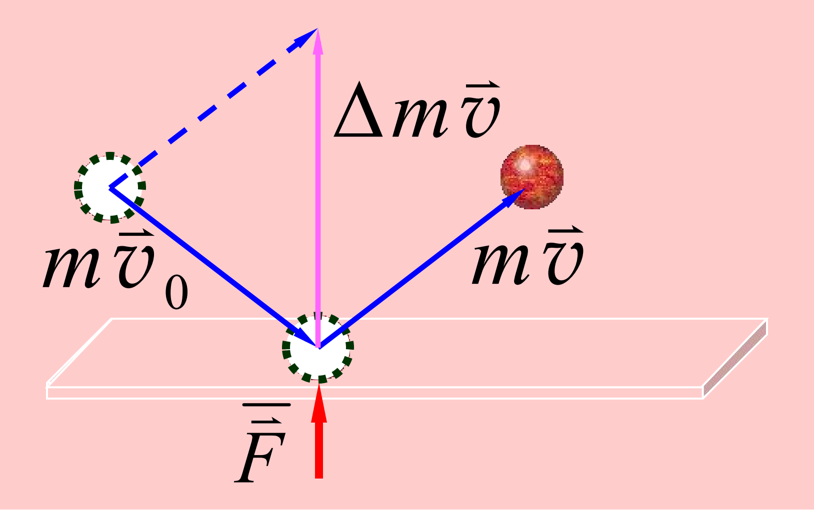
注意：◆ 动量为状态量.

◆ 冲量为过程量，是力的作用对时间的积累。

◆ 分量形式

$$\begin{cases} I_x=\int_{t_0}^{t}F_x\mathrm{d}t=mv_x-mv_{0x} \\ I_y=\int_{t_0}^{t}F_y\mathrm{d}t=mv_y-mv_{0y} \\ I_z=\int_{t_0}^{t}F_z\mathrm{d}t=mv_z-mv_{0z} \end{cases}$$

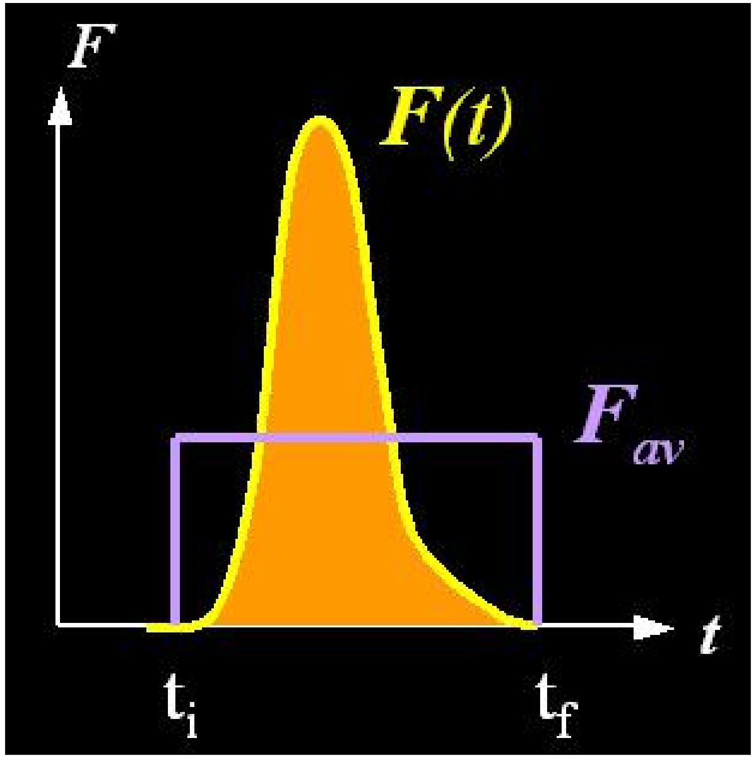
动量定理常应用于碰撞、打击等问题中。



平均冲力：

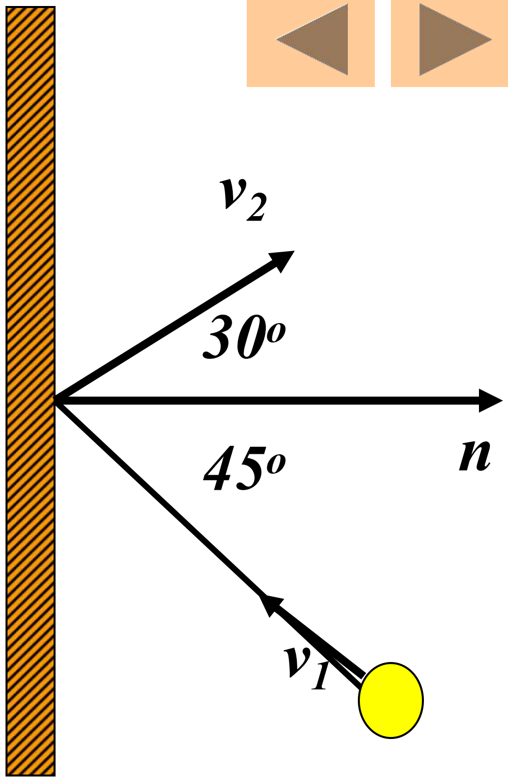
定义：在相同时间内，若有一恒力的冲量与一变力的冲量相等。则这一个恒力称为这一变力的平均冲力。

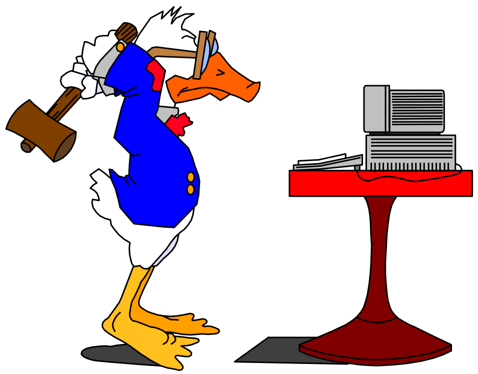
$$\bar{\vec{F}}\Delta t=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)\cdot dt$$



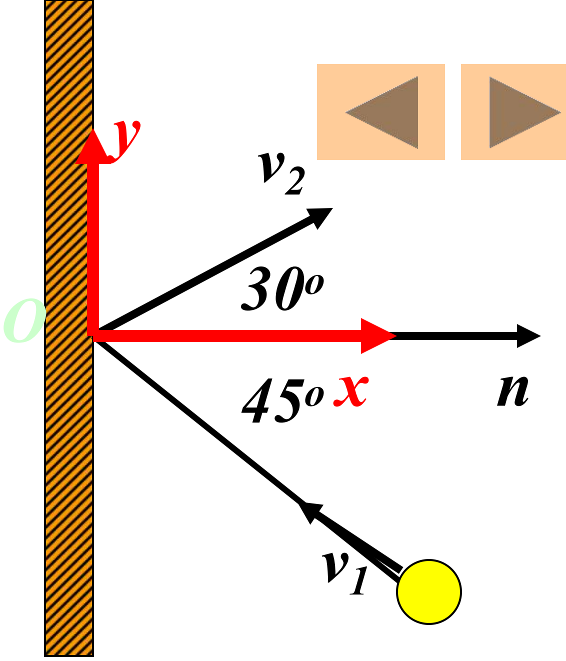
$$\bar{\vec{F}}=\frac{\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)\mathrm{d}t}{\Delta t}=\frac{m\vec{v}-m\vec{v}_0}{t-t_0}$$

例1、质量为2.5g的乒乓球以10m/s的速率飞来，被板推挡后，又以20m/s的速率飞出。设两速度在垂直于板面的同一平面内，且它们与板面法线的夹角分别为45°和30°，求：（1）乒乓球得到的冲量；（2）若撞击时间为0.01s，求板施于球的平均冲力的大小和方向。





解：取挡板和球为研究对象，由于作用时间很短，忽略重力影响。设挡板对球的冲力为 $\vec{F}$



则有： $\vec{I} = \int \vec{F} \cdot dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

取坐标系，将上式投影，有：

$$I_x = \int F_x dt = mv_2 \cos 30^\circ - (-mv_1 \cos 45^\circ) = \overline{F_x} \Delta t$$

$$I_y = \int F_y dt = mv_2 \sin 30^\circ - mv_1 \sin 45^\circ = \overline{F_y} \Delta t$$

$$\Delta t = 0.01\text{s} \quad v_1 = 10\text{m/s} \quad v_2 = 20\text{m/s} \quad m = 2.5\text{g}$$

$$I_x = 0.061\text{N.s} \qquad I_y = 0.007\text{N.s}$$

$$\vec{I} = 0.061\vec{i} + 0.007\vec{j} (N.s)$$

$$\overline{F}_x = 6.1\text{N} \quad \overline{F}_y = 0.7\text{N} \quad \overline{F} = \sqrt{\overline{F}_x^2 + \overline{F}_y^2} = 6.14\text{N}$$

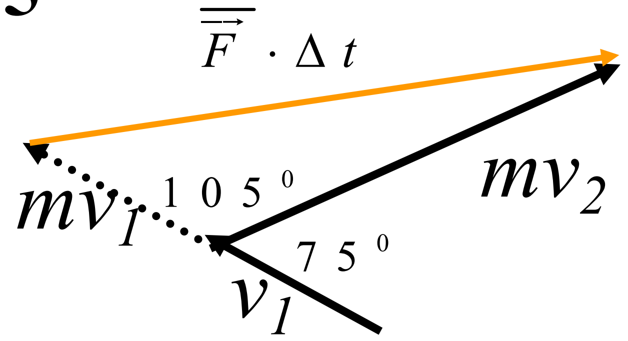
$$\tan\alpha = \overline{F}_y \big/ \overline{F}_x = 0.1148 \qquad \alpha = 6.54^\circ$$

α为 F 与 x 方向的夹角

解法二　　应用余弦定理、正弦定理解三角形

$$|\vec{I}| = |\vec{\overline{F}}\Delta t| = \sqrt{m^2v_1^2 + m^2v_2^2 - 2m^2v_1v_2\cos 105^\circ} = \mathbf{6.14 \times 10^{-2}\,Ns}$$

$$|\vec{\overline{F}}| = \left|\frac{\vec{I}}{\Delta t}\right| = 6.14\text{N} \qquad \frac{mv_2}{\sin\theta} = \frac{\overline{F}\Delta t}{\sin 105^\circ}$$



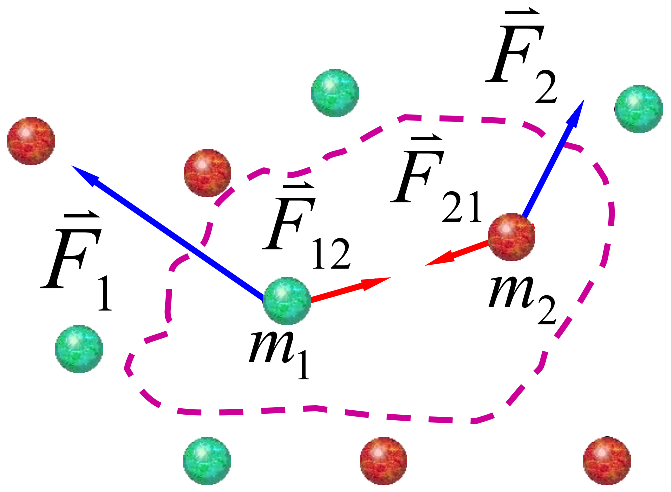
$$\sin\theta = 0.7866 \qquad \theta = 51.54^\circ$$

$$\therefore \alpha = 51.54^\circ - 45^\circ = 6.54^\circ$$

二、质点系的动量定理　动量守恒定律

$$\int_{t_0}^{t}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_0}^{t}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$



因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

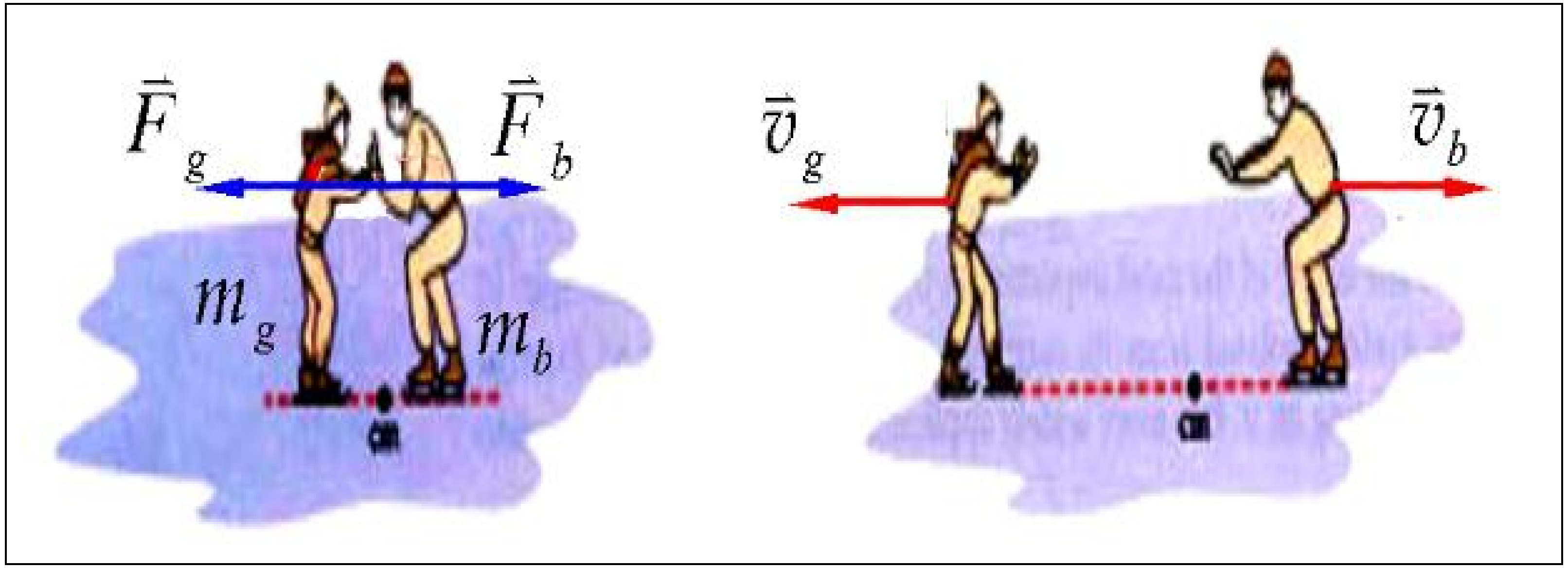
$$\int_{t_0}^{t}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t}\vec{F}\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}}$$

$$\boxed{\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0}$$

◆ **质点系动量定理** 质点系总动量的增量等于合外力的冲量.

注意　内力不改变质点系的动量



初始速度 $v_{g0}=v_{b0}=0$ 　$m_b=2m_g$ 　则 $\vec{p}_0=0$

推开后速度 $v_g=2v_b$ 　且方向相反　则 $\vec{p}=0$

推开前后系统动量不变 $\vec{p}=\vec{p}_0$

三、动量守恒定律

质点系动量定理 $\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i \,\mathrm{d}t=\sum_i \vec{p}_i-\sum_i \vec{p}_{i0}$

动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$ 保持不变 .

1）系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于同一惯性参考系 .

2） 守恒条件　合外力为零　$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

当 $\vec{F} \ll \vec{F}^{\mathrm{in}}$ 时，可 略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒．例如在碰撞，打击，爆炸等问题中．

3） 若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒．

$$\begin{cases} F_x = 0, & p_x = \sum m_i v_{ix} = C_x \\ F_y = 0, & p_y = \sum m_i v_{iy} = C_y \\ F_z = 0, & p_z = \sum m_i v_{iz} = C_z \end{cases}$$

4） 动量守恒定律只在惯性参考系中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一．

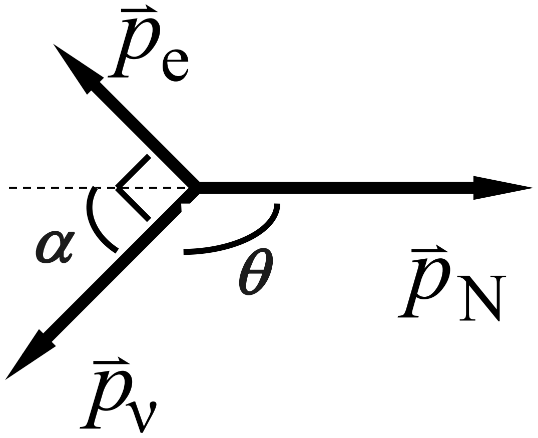
例 2 设有一静止的原子核,衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核. 已知电子和中微子的运动方向互相垂直,且电子动量为1.2×10^{-22} kg·m·s^{-1},中微子的动量为6.4×10^{-23} kg·m·s^{-1} . 问新的原子核的动量的值和方向如何?

解

$$\because F << F^{in}$$

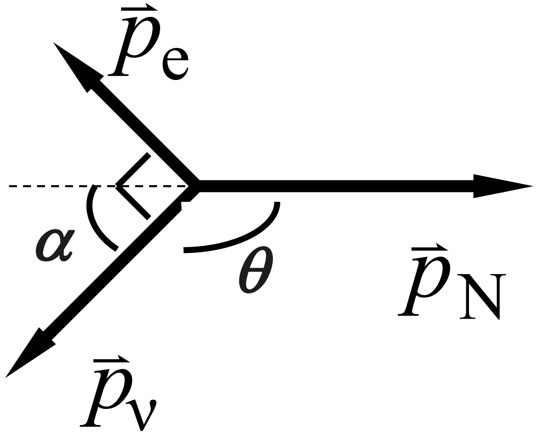
$$\therefore \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

即 $\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_N = 0$



$$p_{\mathrm{e}} = 1.2\times10^{-22}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$p_{\nu} = 6.4\times10^{-23}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$



系统动量守恒，即

$$\vec{p}_{\mathrm{e}} + \vec{p}_{\nu} + \vec{p}_{\mathrm{N}} = 0$$

又因为 $\vec{p}_{\mathrm{e}} \perp \vec{p}_{\nu}$ $\quad \therefore p_{\mathrm{N}} = (p_{\mathrm{e}}^2 + p_{\nu}^2)^{1/2}$

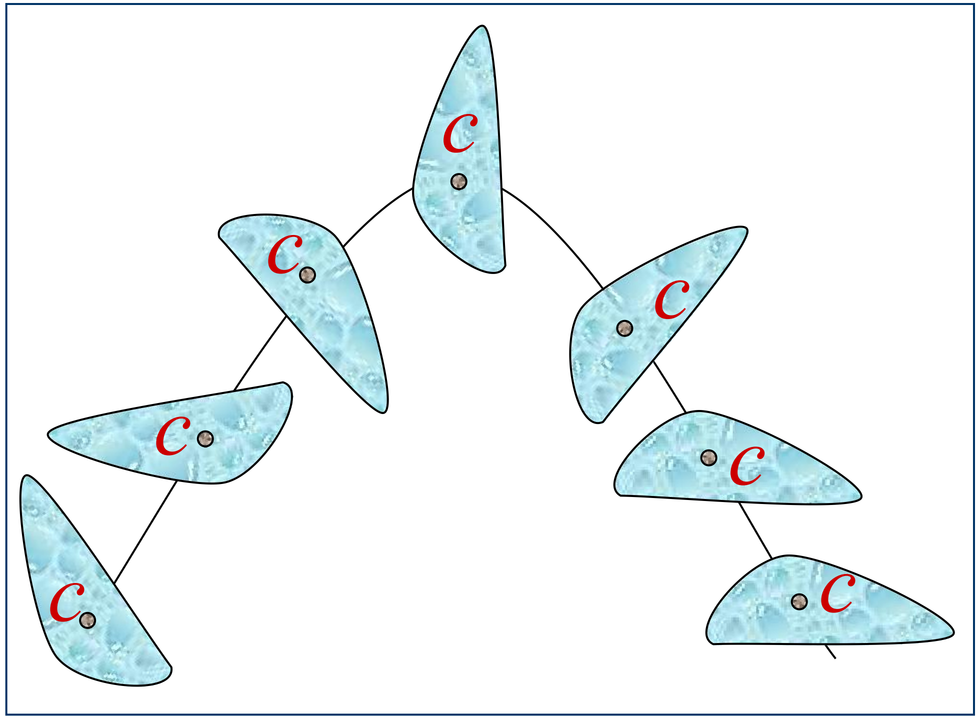
代入数据计算得 $p_{\mathrm{N}} = 1.36\times10^{-22}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$

$$\alpha = \arctan\frac{p_{\mathrm{e}}}{p_{\nu}} = 61.9^{\circ}$$

§ 2.5 质心运动定律

1、质心的概念

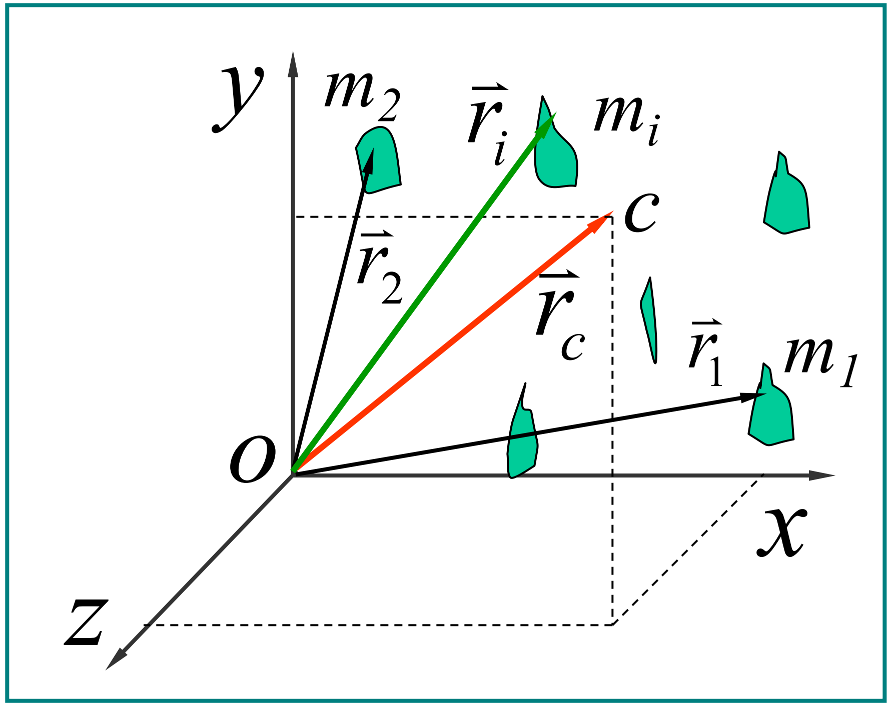
- 质点系的质量中心
- 板上*C*点的运动轨迹是抛物线



- 其余点的运动=随*C*点的平动+绕*C*点的转动

2　质心的位置

由n个质点组成的质点系，其质心的位置：



$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_i\vec{r}_i + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}$$

➢对质量离散分布的质点系：

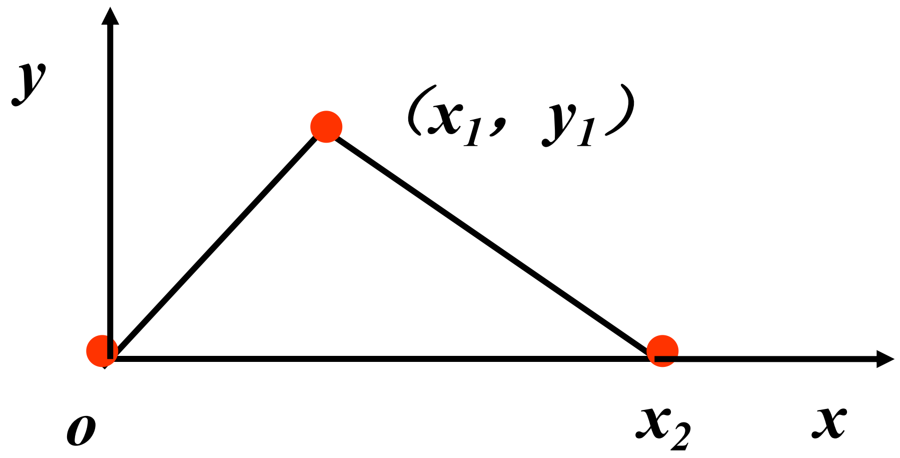
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

➢对质量连续分布的物体：

$$\boldsymbol{x}_C = \frac{1}{m}\int x\mathrm{d}m \qquad \boldsymbol{y}_C = \frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m \qquad z_C = \frac{1}{m}\int z\mathrm{d}m$$

说明 对密度均匀、形状对称的物体，质心在其几何中心.

例：任意三角形的每个顶点有一质量m的小球，求质心位置。



$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

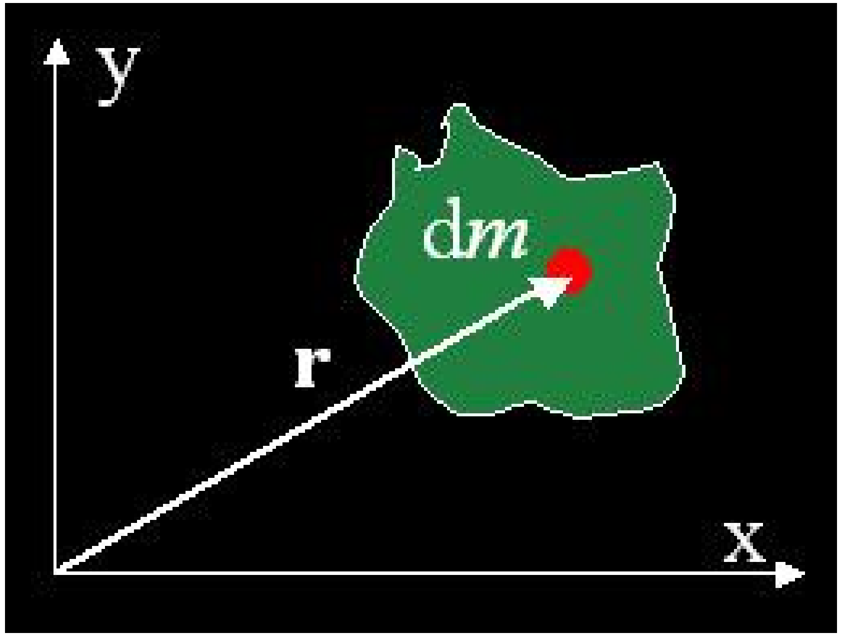
➢对质量连续分布的物体：

$$\boldsymbol{x}_C=\frac{1}{m}\int x\mathrm{d}m \quad \boldsymbol{y}_C=\frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m \quad z_C=\frac{1}{m}\int z\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$

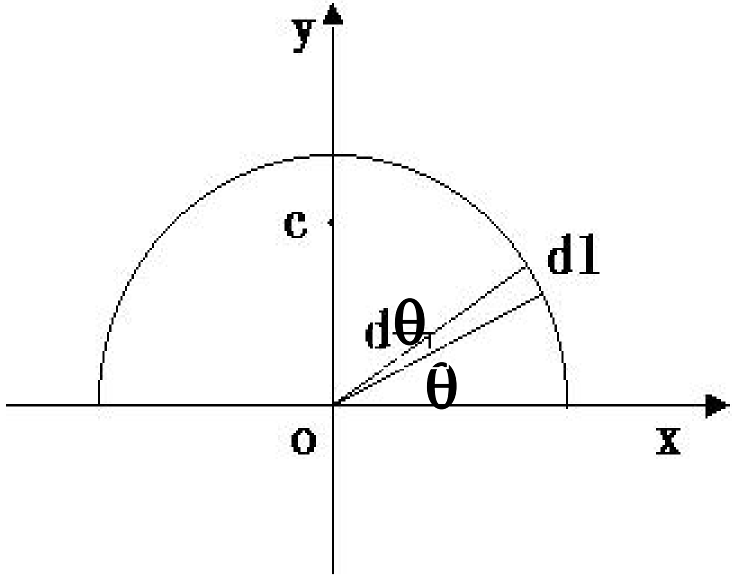
$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}S$

$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l$



$\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ 和λ 分别为体密度、面密度和线密度。

例1：一段均匀铁丝弯成半径为R的半圆形，求此半圆形铁丝的质心。



解：选如图坐标系，取长为*dl*的铁丝，质量为*dm*，以λ表示线密度，*dm=λdl*.

分析得质心应在y轴上。

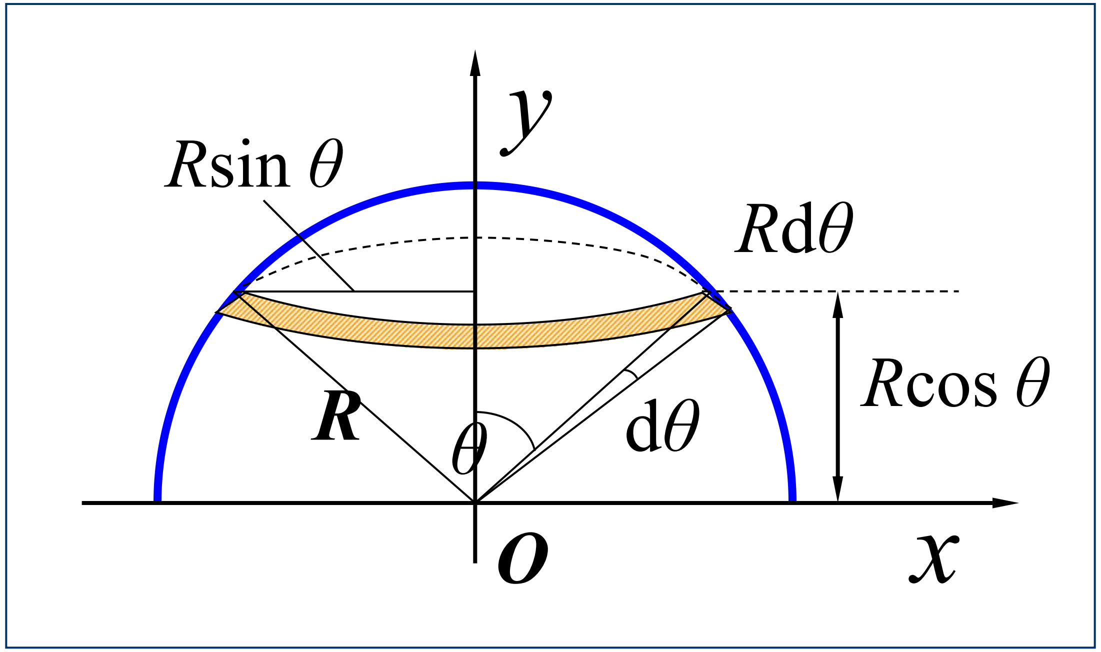
$$\therefore\ y_c = \frac{\int \lambda y dl}{m} \qquad y = R\sin\theta \qquad dl = Rd\theta$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} R\sin\theta\lambda Rd\theta = \frac{1}{m}2\lambda R^2$$

$$\because\ m = \pi R\lambda \qquad \therefore\ y_c = \frac{2}{\pi}R$$

注意：质心不在铁丝上。

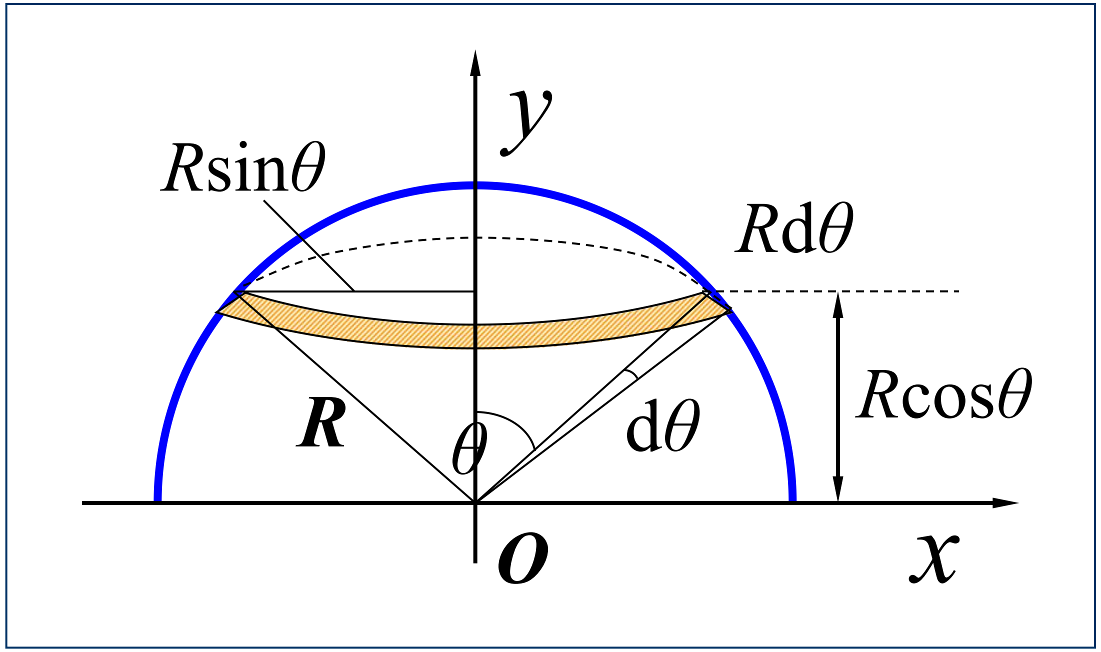
例2　求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心.



解　选如图所示的坐标系.

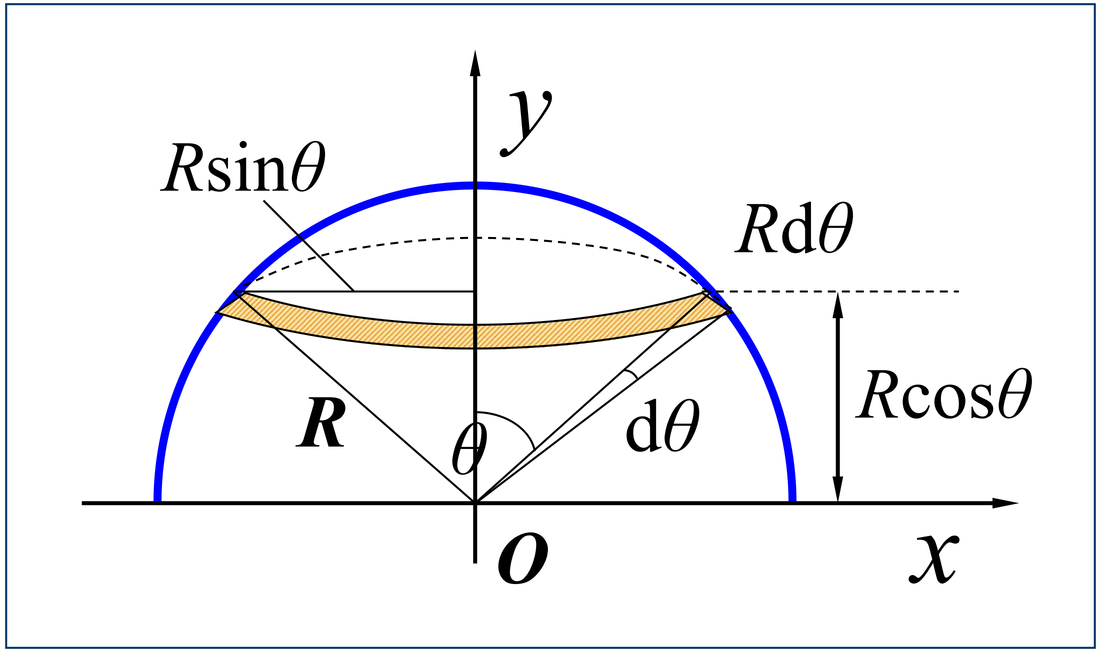
在半球壳上取一如图圆环

- 圆环的面积 $\mathrm{d}s = 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$



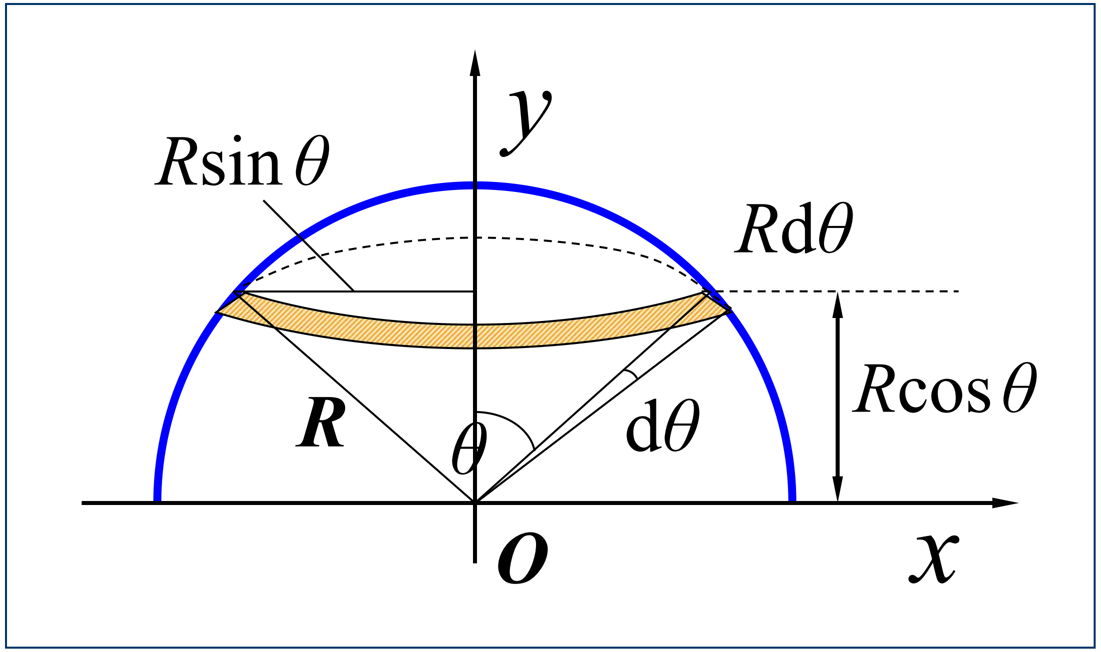
- 圆环的质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

由于球壳关于y轴对称，故$x_c = 0$



$$y_C = \frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m = \frac{\int y\cdot\sigma 2\pi R^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

而 $y = R\cos\theta$



所以 $y_C = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = R/2$

其质心位矢：$\vec{r}_C = R/2\,\vec{j}$

3、质心运动定律

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

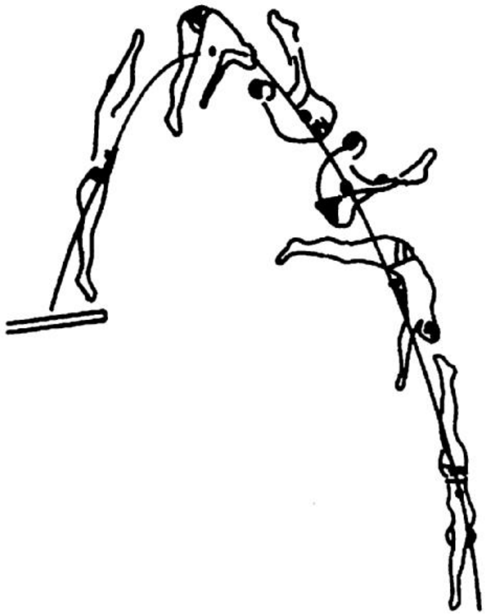
$$\therefore m\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P} \qquad \vec{P} = m\vec{v}_c$$

质点系的总动量等于它的总质量与它的质心的运动速度的乘积。

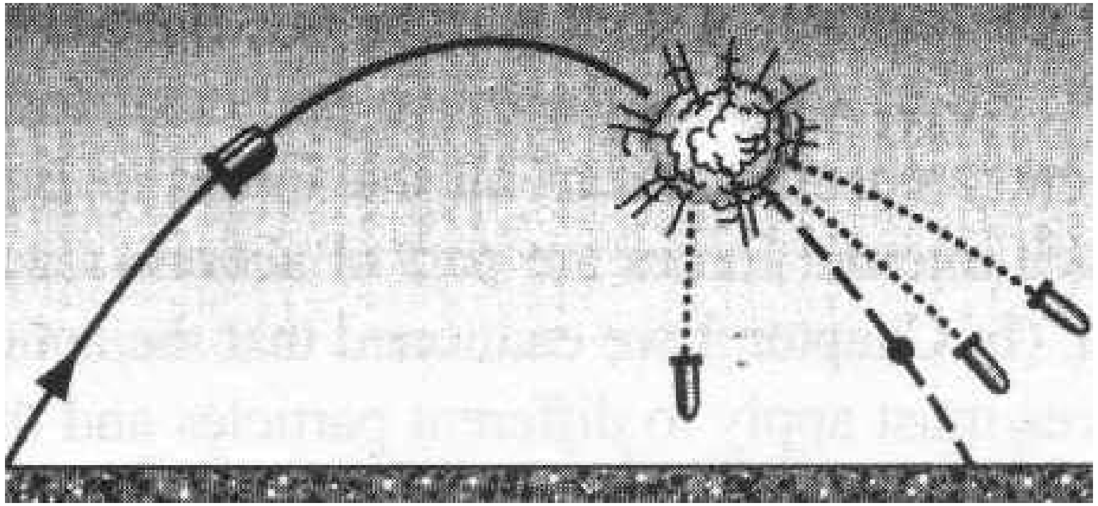
$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = m\vec{a}_c$$

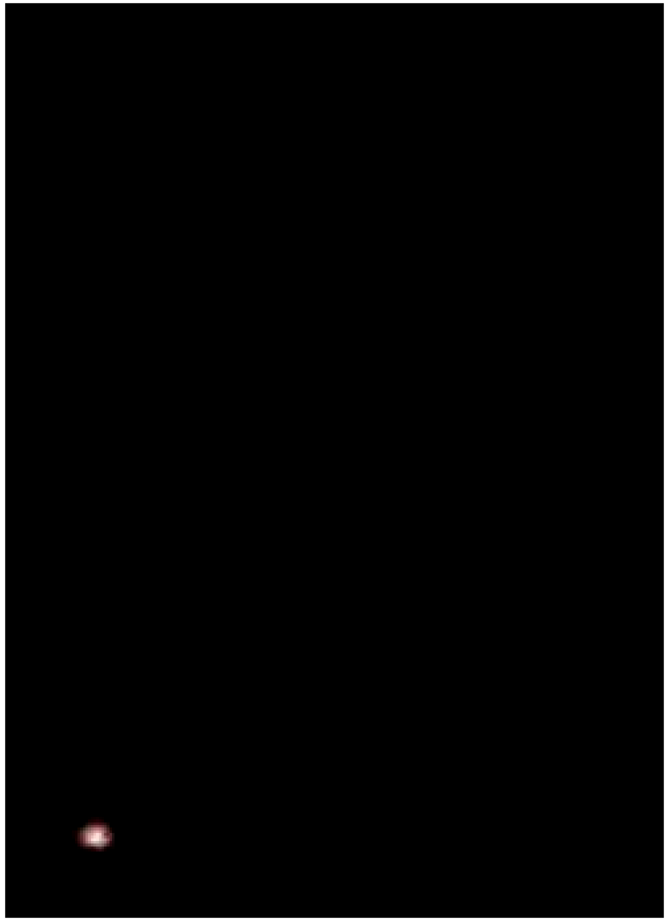
$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

质心运动定律： 作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度

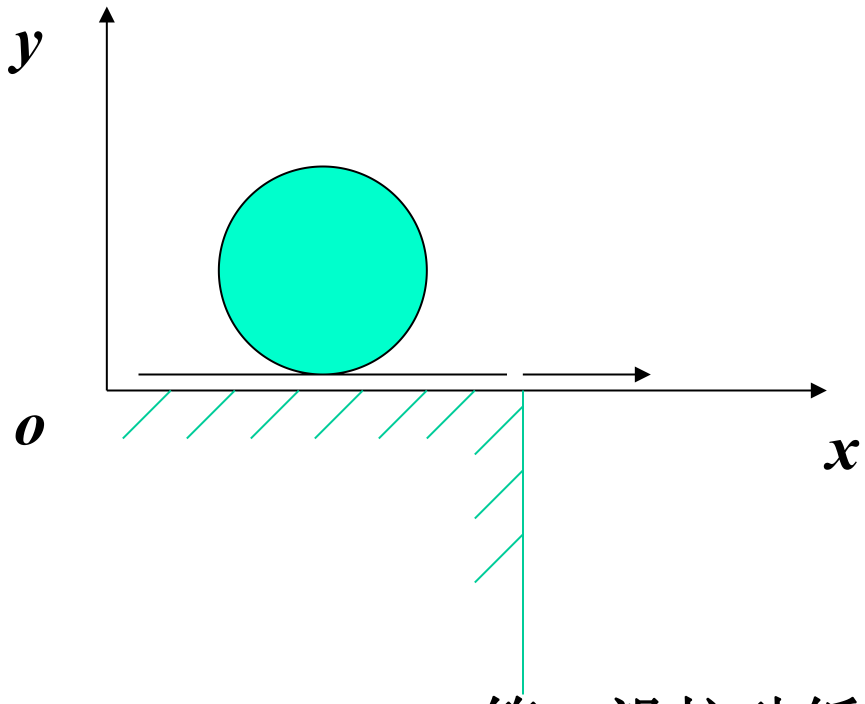


质心运动





例：水平桌面上拉动纸，纸张上有一均匀球，球的质量M，纸被拉动时与球的摩擦力为 F，求：t 秒后球相对桌面移动多少距离？



解：

$$\vec{F} = M\vec{a}_c$$

$$a_c = \frac{F}{M} \qquad x_c = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

答：沿拉动纸的方向移动 $\frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$

作业

2.30　　2.44

2.48　　2.50