第15章

电磁场与电磁波

第15章 电磁场与电磁波

变化的磁场 → 激发电场 (法拉第电磁感应定律)

变化的电场 ?→ 激发磁场

本章内容比较抽象, 但却与日常生活密切相关

麦克斯韦

(Maxwell, James Clerk)

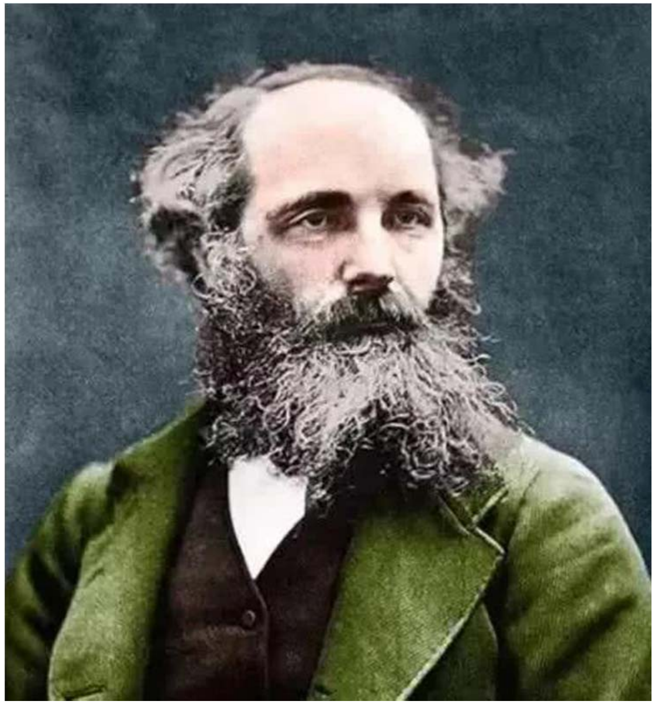
1831-1879

天文学、数学和物理学家

主要科学成就:

将统计学的方法引入气体分子运动论.

发展了光的电磁波理论, 将磁学、电学、光学的所有现象统一起来, 并预言了电磁波的存在



§ 15-1 位移电流

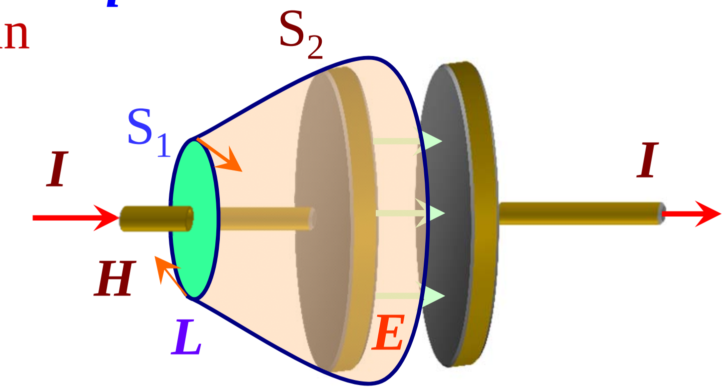
一. 位移电流

1. 稳恒电流安培环路定理的失效

在稳恒电流的磁场中电流和它所激发的磁场之间遵守安培环路定理, 对非稳恒电流, 环路定理是否成立?

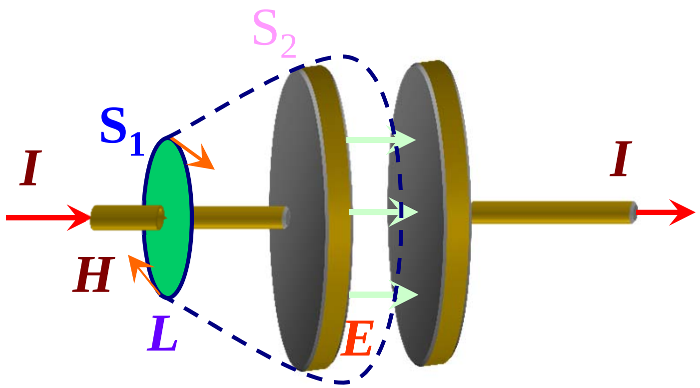
$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum_{in} I_i$$

讨论电流中平行板电容器的充电过程. 如图 S_1,S_2组成闭合曲面, 对此二曲面分别作环路积分:



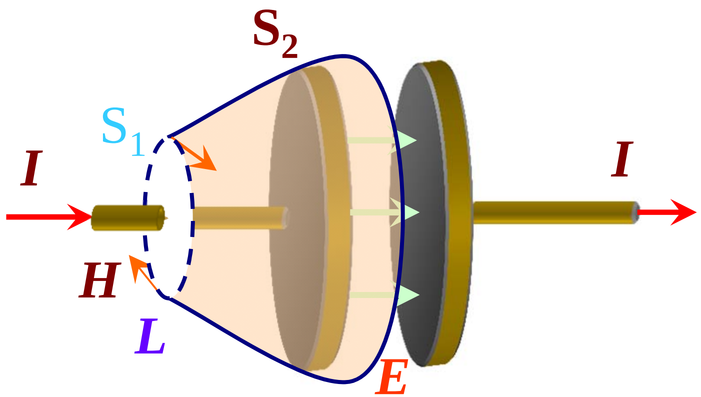
对曲面S_1:

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = I$$



对曲面S_2:

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = 0$$



以上表明，安培环路定理只适用于稳恒电流，而在不稳定条件下，安培环路定理不适用.

其原因是不稳定条件下，传导电流不连续.

引入位移电流的概念

2. 均匀电场中位移电流的引入

在电容器充(放)电时，充电电流 I 在极板上被截断，但是从电荷量变化的角度考虑，极板上的电量发生变化.

导体中流过的电荷量 = 极板上电量的增量

(1) 导体中流过电荷, 电荷量q随时间变化

$\rightarrow$面密度σ随充放电而变化

充电,电荷面密度$\sigma\uparrow$

放电,电荷面密度$\sigma\downarrow$

极板上电荷变化的角度

(2) 极板上电荷量q随时间变化

极板间电场变化的角度

$\rightarrow$ 极板间的电势差随时间变化 (电容不变)

$\rightarrow$ 极板间的电场强度E随时间变化

$\rightarrow$ 极板间的电位移D随时间改变

$\rightarrow$ 电位移通量$\Phi_D=SD$也随时间而改变

则电容器充放电时:

$$I=\frac{\mathrm{d}q_{导体中}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q_{极板上}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sigma S)}{\mathrm{d}t}=S\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

若忽略边缘效应，平板电容器内部为均匀电场，故

$$q_{极板上}=CU=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}\cdot U=\varepsilon_0\varepsilon_r SE$$

$$\frac{q_{极板上}}{S}=\sigma=\varepsilon_0\varepsilon_r E=D$$

即: $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\sigma}$

于是:

$$I=S\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(DS)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

$\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$ 无论充放电都与电流大小相同，量纲一样

Maxwell提出: 变化的电场也可以看作是一种电流 → 位移电流

$$I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

假想的电流

3. 位移电流密度

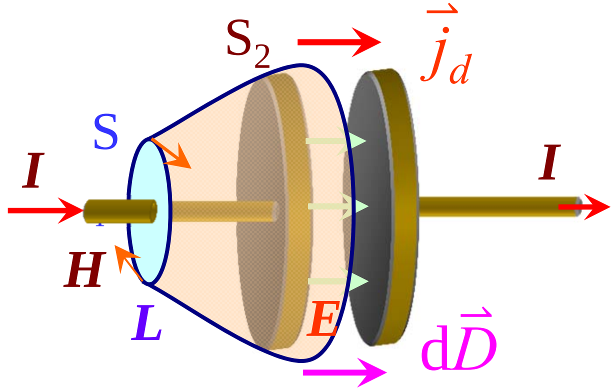
a. 位移电流密度的大小

$$j_d = \frac{I_d}{S} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}(DS)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

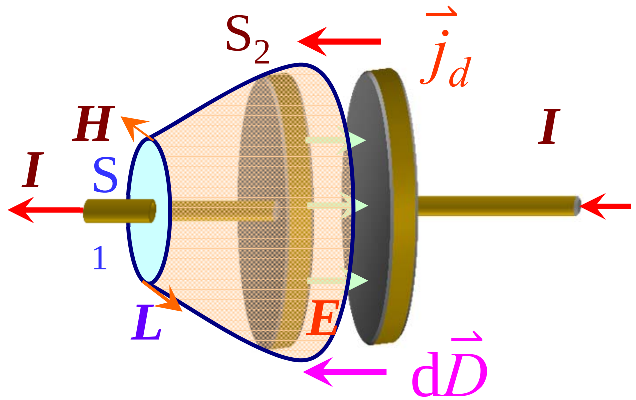
b. 位移电流密度的方向

$\mathrm{d}\vec{D}$ 的方向

(I) 在充电时, 电场增加, 与电场方向一致,与位移电流密度方向一致.



(II) 放电时, 电场减小, 故与电场方向相反, 也与位移电流密度方向一致.

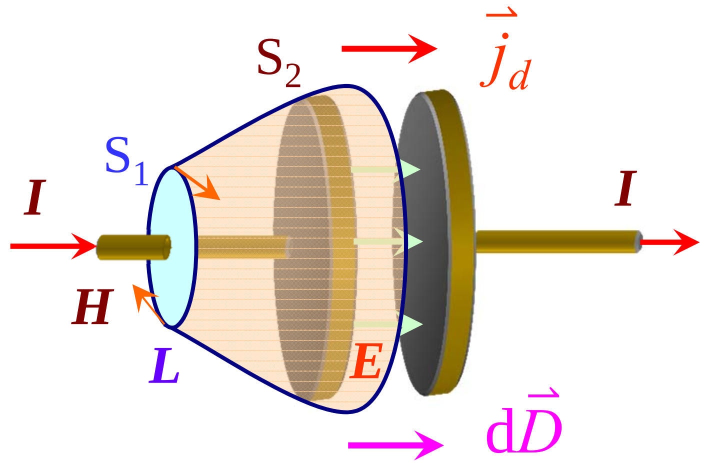


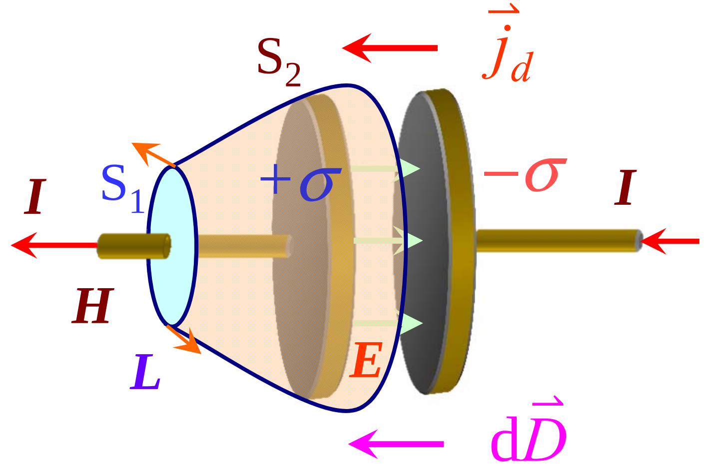
c. 位移电流密度矢量

$$\vec{j}_d = \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$$

电场中某点的位移电流密度等于该点电位移矢量的时间变化率.

通过电场中某截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率.





非均匀电场中?

4. 非匀强电场的位移电流

★推广到非匀强电场, 电位移矢量不是恒量

位移电流密度 $\vec{j}_d = \dfrac{d\vec{D}}{dt}$

也不是恒量

★ 若曲面S不随时间变化, 位移电流可表达为:

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\bullet d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_d \bullet d\vec{S}$$

引入全电流

二. 全电流 全电流安培环路定理

1. 全电流的引入

在充电电路中, 可引进全电流的概念:

$$I_{全} = \sum I + I_d$$

导体中载流子定向运动形成的传导电流(包括运流电流)

介质中电场的变化而形成的的位移电流

全电流在任何情况下总是连续的.

2. 全电流安培环路定理 (重点)

非稳恒情况下:

$$\oint_L \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = I_{全} = \sum I + \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t} = \sum I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

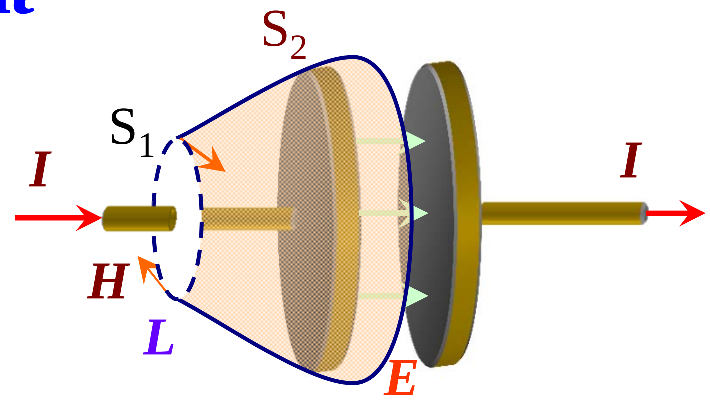
三. 平行板充电器矛盾的解决

在充电回路中, S_2面内应用全电流环路定律:

$$\oint_L \vec{H}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\sum I+I_d=I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

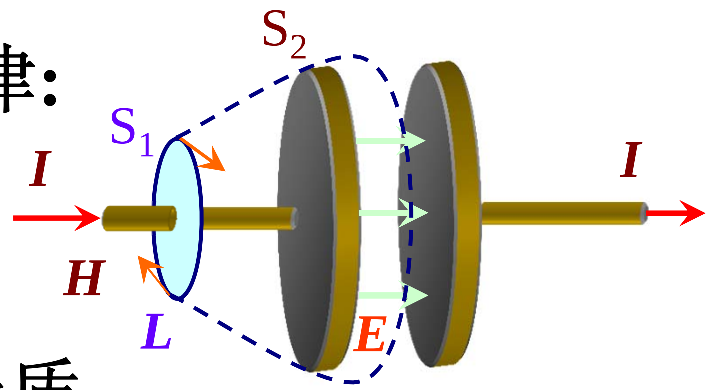
而: $$\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=I$$

$$\oint_L \vec{H}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=I$$



在S_1面内应用全电流环路定律:

$$\oint_L \vec{H}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\sum I+I_d=I$$



以上两式相等, 解决了前述矛盾.

四. 位移电流的特性

1. 变化的磁场 → 激发涡旋电场,

变化的电场 → 位移电流 → 激发涡旋磁场,

两者相互联系, 形成统一的电磁场.

传导电流为0时:

$$\oint_L \vec{H}_d \bullet d\vec{l} = I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

2. 位移电流可在导体、真空、介质中存在

导体中以传导电流为主

介质中以位移电流为主

在高频电流的场合, 两者均不能忽视.

3. 位移电流与传导电流的异同点:

a. 传导电流与位移电流的相同点:

传导电流与位移电流都能激发磁场

b. 传导电流与位移电流的**不同点**:

激发磁场的**机理不同**.

★传导电流→由载流子定向运动激发的

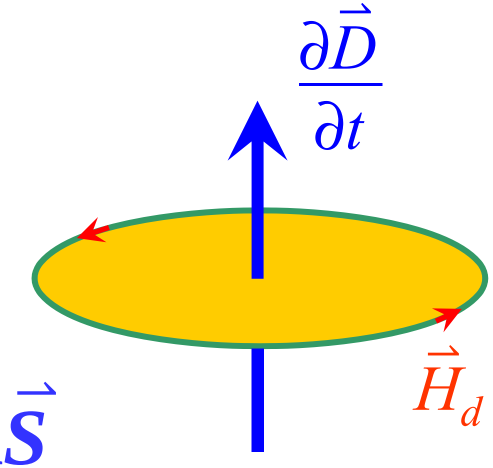
★位移电流 → 特殊的电流

并不是由载流子定向运动形成的,

是由**变化的电场**而激发的 → **假想的电流**

4. 位移电流的其它性质

① 位移电流所激发的磁场与变化电场成右手螺旋关系



$$\oint_L \vec{H}_d \bullet d\vec{l} = I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

因为前面没有负号

② 电介质中位移电流的热效应

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

微波炉的加热原理

位移电流密度为:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

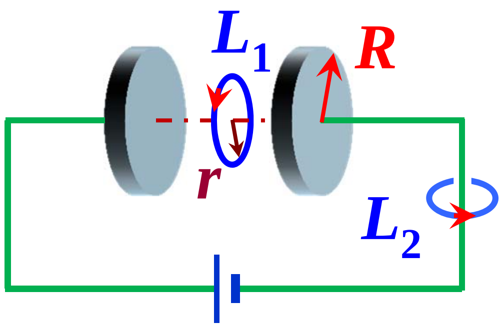
纯位移电流
不产生热量

与极化电荷运动
有关,要产生热量
但非焦耳热

五. 全电流安培环路定理的应用(重点)

例: 如图所示, 圆形极板半径为R的平行板电容器 (忽略其边缘效应)充电时，瞬间电流为I_0. 圆形环路L_1和L_2的半径均为r ($r<R$),其磁场强度H的环流分别为__________和__________.

解:



由全电流环路定理

$$\oint_{L_1} \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \sum I + I_d = I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \cdot \pi r^2 = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \cdot \pi r^2 = \frac{\mathrm{d}q}{\pi R^2 \mathrm{d}t} \cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

$$\oint_{L_2} \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \sum I + I_d = \sum I = -I_0$$

例: 给电容为C的平行板电容器充电, 电流$i=0.2e^{-t}$ (SI), $t=0$时电容器极板上无电荷. 求:

(1) 极板间电压U随时间t而变化的关系$U(t)$;

(2) t时刻极板间总的位移电流I_d(忽略边缘效应).

解: (1)极板间电压U随时间t而变化的关系$U(t)$

$U=\dfrac{q}{C}$ 先求极板上的q, 由电流定义 $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

$\mathrm{d}t$时间内流过导体的电荷 $\mathrm{d}q=i\mathrm{d}t$

$$\int_0^q \mathrm{d}q=\int_0^t i\mathrm{d}t=\int_0^t 0.2e^{-t}\mathrm{d}t$$

t时间内流过导体的电荷 $q=0.2(1-e^{-t})$

极板的电荷 $q=0.2(1-e^{-t})$

极板间电压U $U=\dfrac{q}{C}=\dfrac{0.2}{C}(1-e^{-t})$

(2) t时刻极板间总的位移电流I_d

方法一： 利用电场的特点: $D = \varepsilon E$

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(DS) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_0 ES)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot Ed) = \frac{\mathrm{d}(CU)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0.2\mathrm{e}^{-t}$$

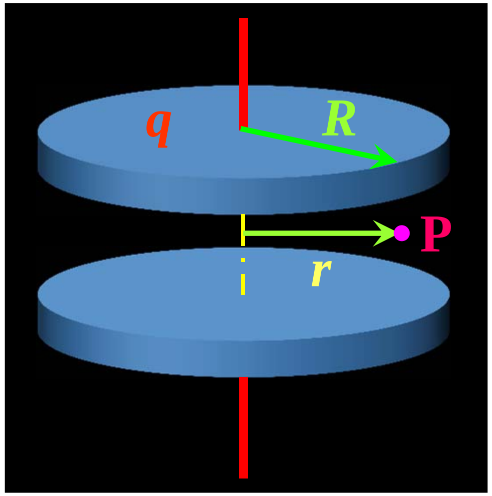
方法二： 利用自由电荷与电场关系: $D = \sigma$

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(DS) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma S) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i = 0.2\mathrm{e}^{-t}$$

方法三： 利用全电流总是连续的:

$$I_d = i = 0.2\mathrm{e}^{-t}$$

例: 一平行板电容器, 极板是半径为R的圆形金属板, 两极板与一交变电源相接, 极板上带电量随时间的变化规律为$q = q_0 \sin \omega t$, 极板间为真空, 忽略边缘效应. 求:



(1)两极板间位移电流密度和位移电流的大小

(2)求在两极板间,离中心轴线距离为 r ($r<R$)处磁感应强度B的大小.

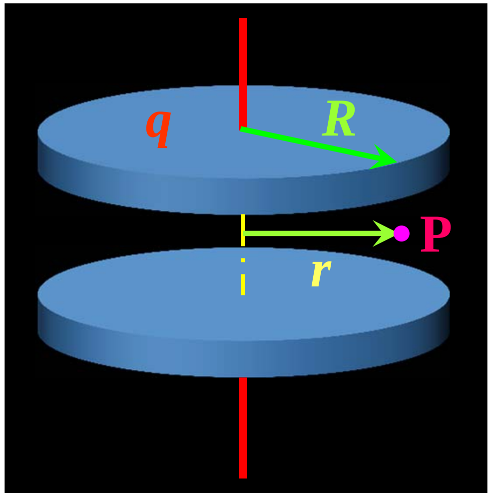
(3) 当$\omega t = \pi/4$时, P点的电磁场能量密度.

解：(1)两极板间位移电流密度和位移电流的大小

为了求位移电流密度，先求D

方法一：利用自由电荷与电场关系：

$D=\sigma$ 求D



对平行板电容器有

$$D=\sigma=\frac{q}{S}=\frac{q_0\sin\omega t}{\pi R^2}$$

位移电流密度j_d
$$j_d=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{q_0\omega}{\pi R^2}\cos\omega t$$

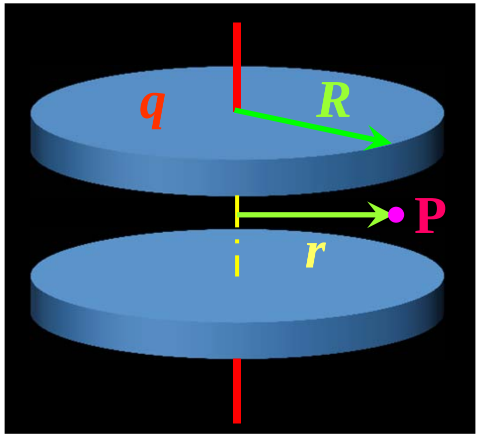
$$\Phi_D=\iint_S\vec{D}\bullet d\vec{S}=DS=\sigma S=q=q_0\sin\omega t$$

位移电流I_d
$$I_d=\frac{d\Phi_D}{dt}=q_0\omega\cos\omega t$$

方法二：利用电场的特点：$D=\varepsilon E$ 求 D

$\varepsilon_r=1$

$$U=\frac{q}{C}=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S/d}=\frac{qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$



匀强电场 $$E=\frac{U}{d}=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$D=\varepsilon E=\varepsilon_0\varepsilon_r E \qquad q=q_0\sin\omega t$$

$$j_d=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{S}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{q_0\omega}{\pi R^2}\cos\omega t$$

$$I_d=\iint_S \vec{j}_d\bullet \mathrm{d}\vec{S}=j_d S=q_0\omega\cos\omega t$$

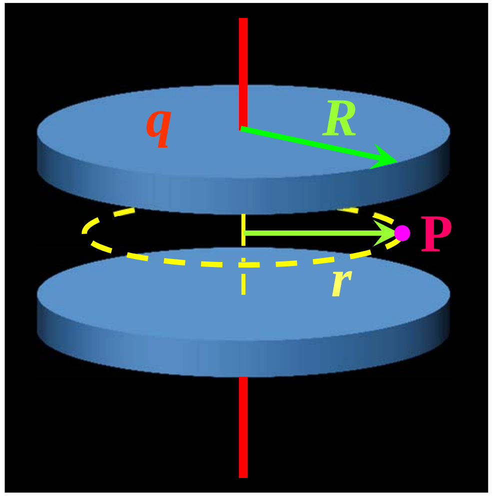
方法三：利用全电流总是连续的，求位移电流

$$I_d=I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=q_0\omega\cos\omega t \qquad j_d=\frac{I_d}{S}=\frac{q_0\omega}{\pi R^2}\cos\omega t$$

(2) 求在两极板间,离中心轴线距离为r ($r<R$)处磁感应强度B的大小.

由于传导电流和位移电流的分布具有非常好的对称性，故先用全电流安培环路定理求P点的磁场强度H.

(a) 现以两极板中心连线为对称轴,在平行于极板的平面内, 以该平面与中心交点为圆心, 以r为半径作圆形回路, 根据对称性, L上各点的H值相等, 方向沿切线方向, 现选回路L的方向与H的方向一致.



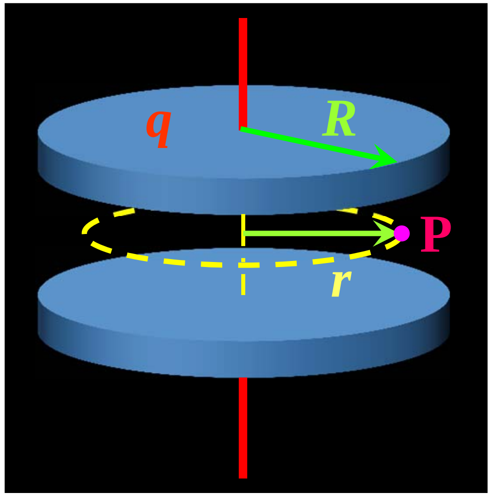
(b) 因电容器两极板间的传导电流为0, 根据电磁场中全电流安培环路定理, 则有

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum I + I_d = 0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_d \bullet d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \iint_S \vec{j}_d \bullet d\vec{S} = \iint_S j_d dS = j_d \pi r^2$$

$$H \cdot 2\pi r = j_d \pi r^2$$

由于 $$j_d = \frac{q_0 \omega}{\pi R^2} \cos \omega t$$



$$H = \frac{j_d r}{2} = \frac{q_0 \omega r}{2\pi R^2} \cos \omega t$$

$$B_P = \mu_0 H = \frac{\mu_0 q_0 \omega r}{2\pi R^2} \cos \omega t$$

(3) 当 $\omega t = \pi/4$ 时, P点的电磁场能量密度

P点的电磁能密度

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

圆板内电场

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{q_0 \cos\omega t}{\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{q_0 \cos(\pi/4)}{\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{\sqrt{2} q_0}{2\varepsilon_0 \pi R^2}$$

P点的磁场 $H = \dfrac{q_0 \omega r \cos\omega t}{2\pi R^2} = \dfrac{\sqrt{2} q_0 \omega r}{4\pi R^2}$

P点的电磁能密度

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\sqrt{2} q_0}{2\varepsilon_0 \pi R^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\sqrt{2} q_0 \omega r}{4\pi R^2}\right)^2 = \frac{q_0^2}{4\varepsilon_0 \pi^2 R^4} + \frac{\mu_0 q_0^2 \omega^2 r^2}{16\pi^2 R^4}$$

§15-2 电磁场 Maxwell方程组

Maxwell电磁场理论的主要内容:

(1) 除静止电荷激发无旋电场外, 变化的磁场将激发涡旋电场;

(2) 变化的电场和传导电流一样将激发涡旋磁场

一. Maxwell方程组的积分形式

介质中的高斯定理

1. 电场的性质

$$\oiint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{in} q_0 = \iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

在任何电场中, 通过任何封闭曲面的电位移通量等于闭合面内自由电荷的总量.

任何电场, 包括静电场和涡旋电场

2. 磁场的性质

$$\oiint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

磁场中的高斯定理

任何磁场中,通过封闭曲面的磁通量总是为零

任何磁场, 包括由电荷定向运动激发的磁场和由变化的电场激发的磁场

3. 变化的电场和磁场的联系

$$\oint_L \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = I + I_d = \iint_S \vec{j} \bullet \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

全电流安培环路定理

任何磁场中, 磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以此闭合曲线为边界的任意曲面的全电流.

4. 变化磁场和电场的联系

法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

任何电场中, 电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过此曲线所包围面积的磁通量的时间变化率的负值.

任何电场, 包括静电场和涡旋电场

二. Maxwell方程组的微分形式

电场 $\nabla \bullet \vec{D} = \rho$ $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

磁场 $\nabla \bullet \vec{B} = 0$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

散度 旋度

矢量微分算符
哈密顿算符
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Maxwell方程组的微分形式能反映电磁空间任一点的情况.

三. ★讨论

(a) 电场包括静电场和涡旋电场

(b) 磁场包括传导电流和位移电流激发的磁场

(c) 在应用**Maxwell**方程解决实际问题时, 常与表征介质特性的物理量介电常数ε, 磁导率μ, 电导率γ发生联系, 因此加三个介质方程

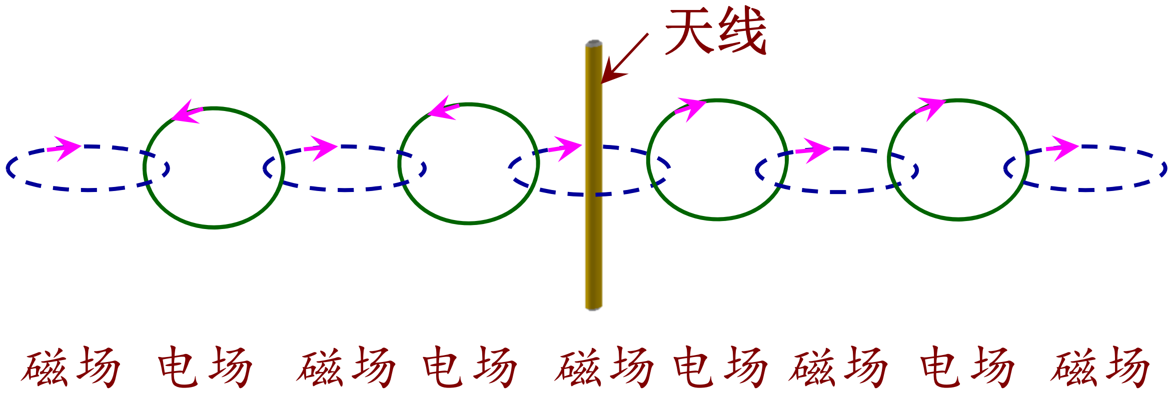
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}\ , \quad \vec{B} = \mu \vec{H}\ , \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

(d) **Maxwell**方程组的七个方程, 理论上可以解决所有电磁学的问题.

(e) **Maxwell**方程在高速领域中仍然适用, 但在微观领域中不完全适用, 为此发展了量子电动力学.

§ 15-3 电磁波

变化的电场和变化的磁场传播示意图:

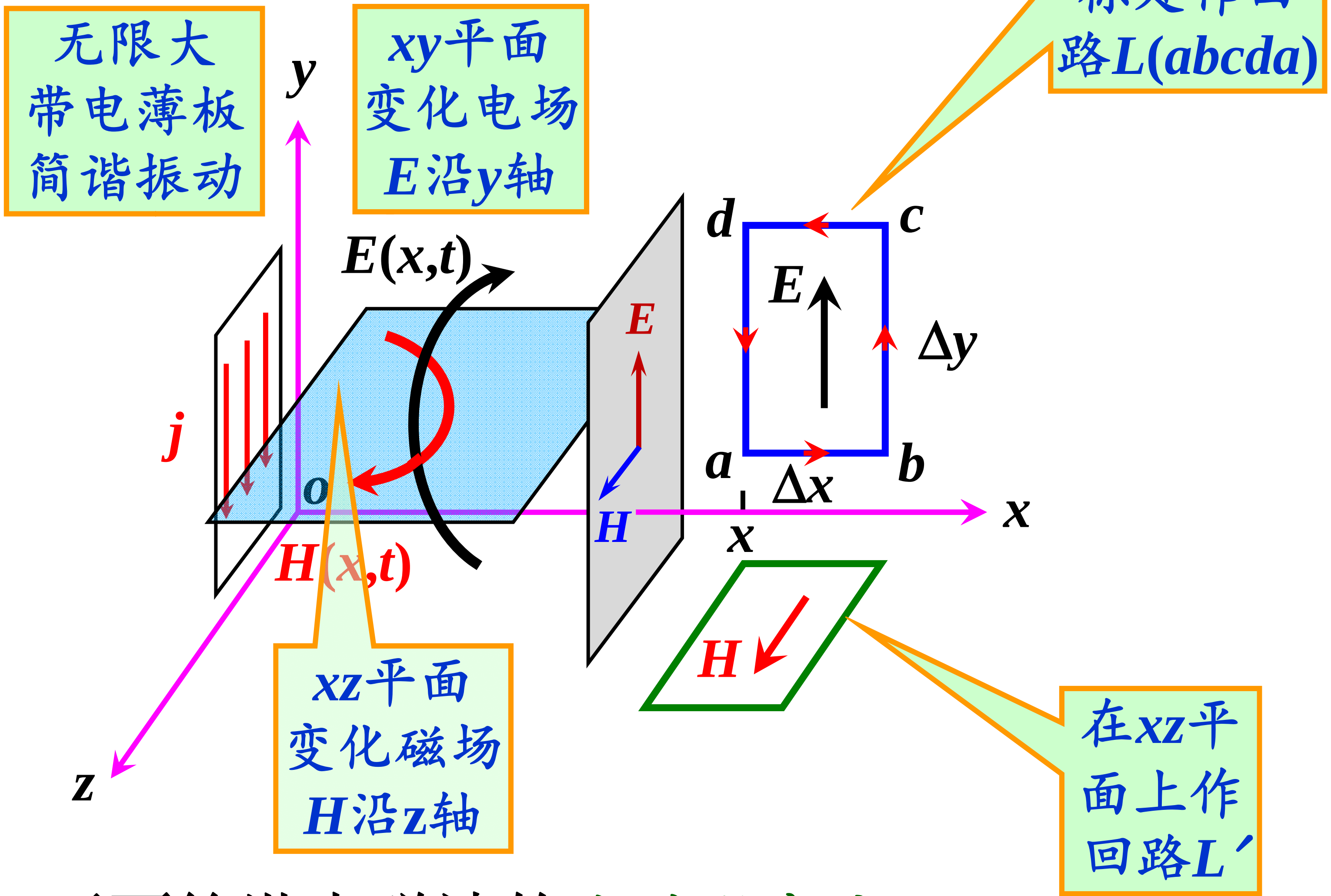


Maxwell电磁场理论的最大成就

→ 预言了电磁波的存在.

一. 电磁波的波动方程

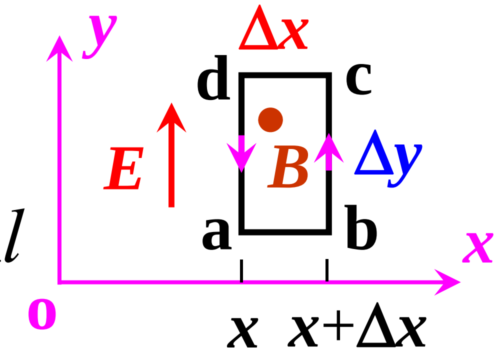
平面简谐电磁波的传播



1. 平面简谐电磁波的波动微分方程

对xy平面上回路应用法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$



$$\oint_L \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_b^c E\cdot\cos 0°\cdot \mathrm{d}l + \int_d^a E\cdot\cos\pi\cdot \mathrm{d}l$$

$$= E(x+\Delta x,t)\Delta y - E(x,t)\Delta y$$

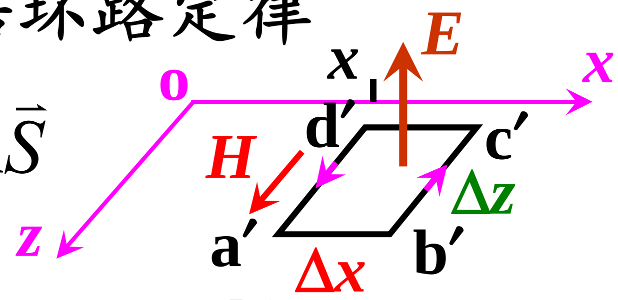
$$= \frac{E(x+\Delta x,t)-E(x,t)}{\Delta x}\Delta x\Delta y = \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\Delta x\Delta y$$

由 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{E(x+\Delta x,t)-E(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\Delta S) = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\Delta x\Delta y$$

得 $$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = -\mu\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}$$

对xz平面上回路应用全电流安培环路定律



$$\oint_{L'} \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S'} \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_{L'} \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{b'}^{c'} H \cdot \cos\pi \cdot \mathrm{d}l + \int_{d'}^{a'} H \cdot \cos 0° \cdot \mathrm{d}l$$

$$= -H(x+\Delta x,t)\Delta z + H(x,t)\Delta z$$

$$= -\frac{H(x+\Delta x,t) - H(x,t)}{\Delta x}\Delta x\Delta z = -\frac{\partial H(x,t)}{\partial x}\Delta x\Delta z$$

由 $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{H(x+\Delta x,t) - H(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial H(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S'} \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\Delta S') = \frac{\partial D(x,t)}{\partial t}\Delta x\Delta z$$

得 $$-\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}$$

得到
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial H(x,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H(x,t)}{\partial x} = -\varepsilon \dfrac{\partial E(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

消去*H*

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = -\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

得

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

与一维平面简谐机械波波动微分方程比较

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

同样由
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial H(x,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H(x,t)}{\partial x} = -\varepsilon \dfrac{\partial E(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

消去*E*
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) = -\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$
得
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

与一维平面简谐机械波波动微分方程比较

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

电磁波传播速度 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$

真空 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.998\times10^8\,\mathrm{m/s}$

2. 平面简谐电磁波的波动方程 (波函数)

$$E = E_0\cos[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi]$$

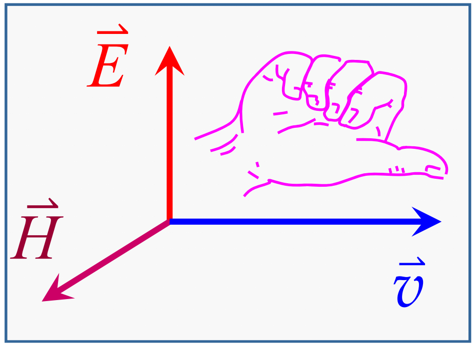
$$H = H_0\cos[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi]$$

性质

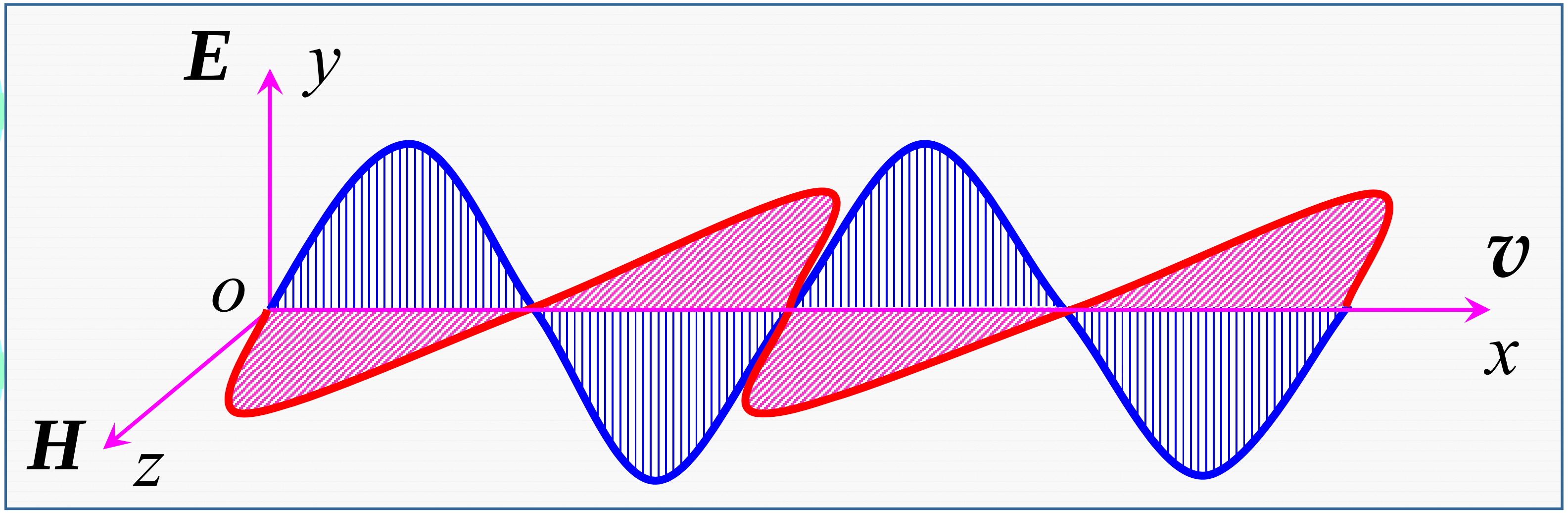
二. 电磁波的性质

1. 电磁波是横波

$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{v}$、 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$、 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$为$\boldsymbol{v}$方向，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{v}$成右手螺旋关系



2. 电磁波具有偏振性



3. E和H同相位, E和H数值成比例

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E=\sqrt{\mu}\,H}$$

4. 电磁波的传播速度

真空中 $$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

介质中 $$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

介质折射率 $$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

三. 电磁波的能量

1. 电磁场的总能量密度*w*

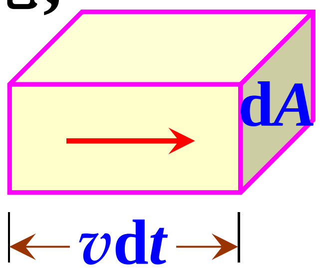
$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

2. 辐射能:

电磁波的传播是电磁能的传递. 以电磁波的形式传播出去的能量称为辐射能.

3. 电磁波的能流密度*S*

单位时间垂直通过单位面积的辐射能, 是矢量, 方向为波传播的方向.



$$\mathrm{d}W_{flux} = w\mathrm{d}V = wv\mathrm{d}t\mathrm{d}A$$

$$S = \frac{\mathrm{d}W_{flux}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A} = \frac{wv\mathrm{d}t\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A} = wv = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

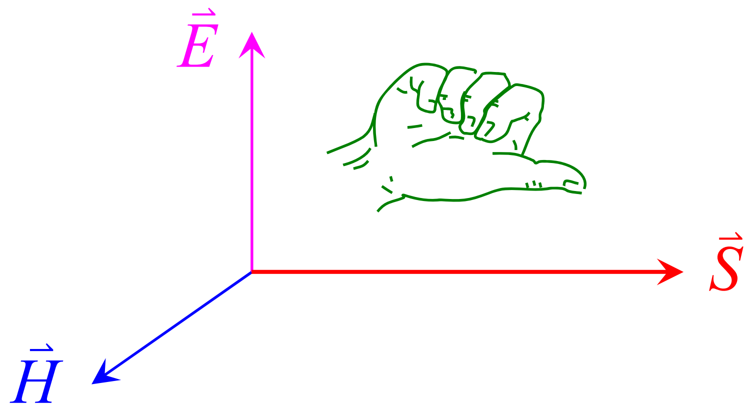
利用关系 $\boxed{\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H}$

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2 \qquad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu}} E = H$$

$$S = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu}} E^2 = EH$$

坡印廷矢量

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$$



(1) 电磁波的能流密度也称坡印亭矢量,

(2) *E*、*H*、*S*成右螺旋关系

4. 特例: 平面简谐波的能流密度

$$E = E_0 \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi]$$

$$H = H_0 \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi]$$

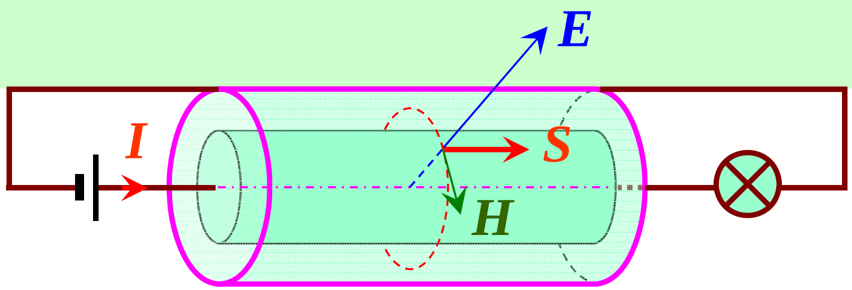
$$S = EH = E_0 H_0 \cos^2[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi]$$

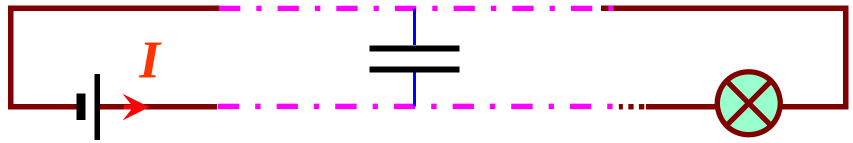
平均能流密度

$$\overline{S} = \frac{1}{T}\int_0^T E_0 H_0 \cos^2[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi]\mathrm{d}t = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

例. 用玻印亭矢量分析直流电源经同轴电缆向负载传送能量的过程.

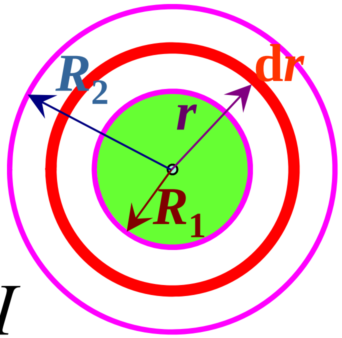
解: (1) 两圆筒相当于负载的一个并联的电容





两圆筒间: $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}\qquad E=\frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}\qquad H=\frac{I}{2\pi r}$$

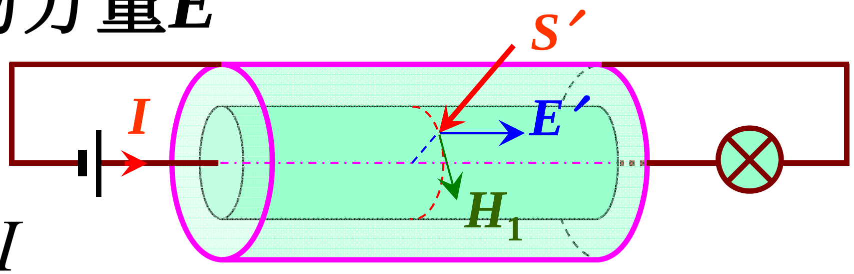


$$S=EH\sin 90^\circ=\frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}\cdot\frac{I}{2\pi r}=\frac{UI}{2\pi r^2\ln(R_2/R_1)}$$

S与r有关, 单位时间内通过电缆横截面的总能量为:

$$P=\iint S\mathrm{d}A=\int_{R_1}^{R_2}\frac{UI}{2\pi r^2\ln(R_2/R_1)}\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{UI}{\ln(R_2/R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=UI$$

(2) 若内导体内部的电阻不能忽略, 则在导体内部还存在沿电流方向的电场分量E'



欧姆定律: $j=\gamma E'=E'/\rho$

$$E'=\rho\cdot j=\frac{\pi R_1^2}{L}R\cdot\frac{I}{\pi R_1^2}=\frac{RI}{L}$$

$$R=\rho\frac{L}{\pi R_1^2}\qquad \rho=\frac{\pi R_1^2}{L}R\qquad j=\frac{I}{\pi R_1^2}$$

导体表面的磁场强度:

$$H_1=\frac{I}{2\pi R_1}$$

$$S'=E'H_1\sin 90^\circ=\frac{RI}{L}\cdot\frac{I}{2\pi R_1}=\frac{I^2R}{2\pi R_1L}$$

玻印亭矢量为常量, 玻印亭矢量对整个导体侧面的积分即为导体侧面的能量传输功率:

$$P'=\iint_S S'\mathrm{d}A=\iint_S E'H\mathrm{d}A=\frac{I^2R}{2\pi R_1L}\cdot 2\pi R_1L=I^2R$$

第十五章结束