无 穷 级 数

从18世纪以来，无穷级数就被认为是微积分的一个不可缺少的部分，是高等数学的重要内容，同时也是有力的数学工具，在表示函数、研究函数性质等方面有巨大作用，在自然科学和工程技术领域有着广泛的应用

本章主要内容包括常数项级数和两类重要的函数项级数——幂级数和三角级数，主要围绕三个问题展开讨论：①级数的收敛性判定问题，②把已知函数表示成级数问题，③级数求和问题。

重点

级数的敛散性，常数项级数审敛法，幂级数的收敛域，函数的幂级数展开式，函数的Fourier 展开式；

难点

常数项级数审敛法，函数展开成幂级数的直接法和间接法， Fourier 展开，级数求和；

基本要求

①掌握级数敛散性概念和性质

②掌握正项级数的比较审敛法、检比法、检根法

③掌握交错级数的Leibniz审敛法

④掌握绝对收敛和条件收敛概念

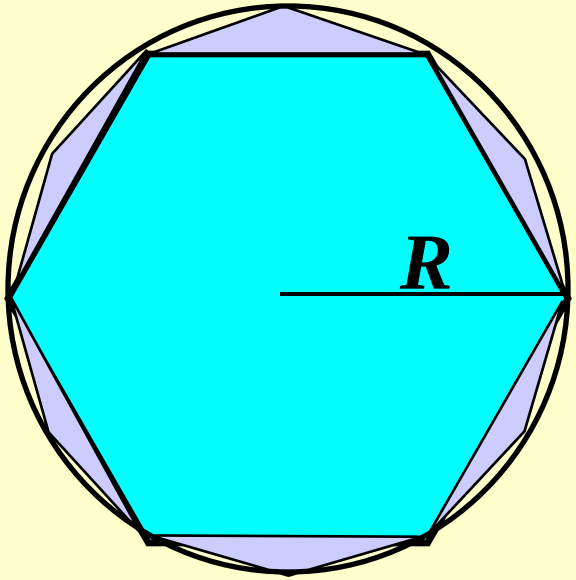
⑤掌握幂级数及主要性质，会求收敛半径和收敛区间，会求简单的幂级数的和函数

⑥熟记五个基本初等函数的 **Taylor** 级数展开式及其收敛半径

⑦掌握 **Fourier** 级数概念，会熟练地求出各种形式的**Fourier** 系数

⑧掌握奇、偶函数的 **Fourier** 级数的特点及如何将函数展开成正弦级数或余弦级数

一、问题的提出



1. 计算圆的面积

正六边形的面积 a_1

正十二边形的面积 $a_1 + a_2$

正 3×2^n 形的面积 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

即 $A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

2. $\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1000} + \cdots + \dfrac{3}{10^n} + \cdots$

二、级数的概念

1. 级数的定义：

一般项

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

(常数项)无穷级数

级数的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

部分和数列

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

2. 级数的收敛与发散:

当n无限增大时, 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列s_n有极限s, 即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 这时极限s叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的和. 并写成$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_3 + \cdots$

如果s_n没有极限, 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

即　常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在(不存在)

余项 $r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$

即　$s_n \approx s$　　误差为$|r_n|$　$(\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0)$

无穷级数收敛性举例：Koch雪花.

做法：先给定一个正三角形，然后在每条边上对称的产生边长为原边长的1/3的小正三角形．如此类推在每条凸边上都做类似的操作，我们就得到了面积有限而周长无限的图形——“Koch雪花”．

观察雪花分形过程

设三角形

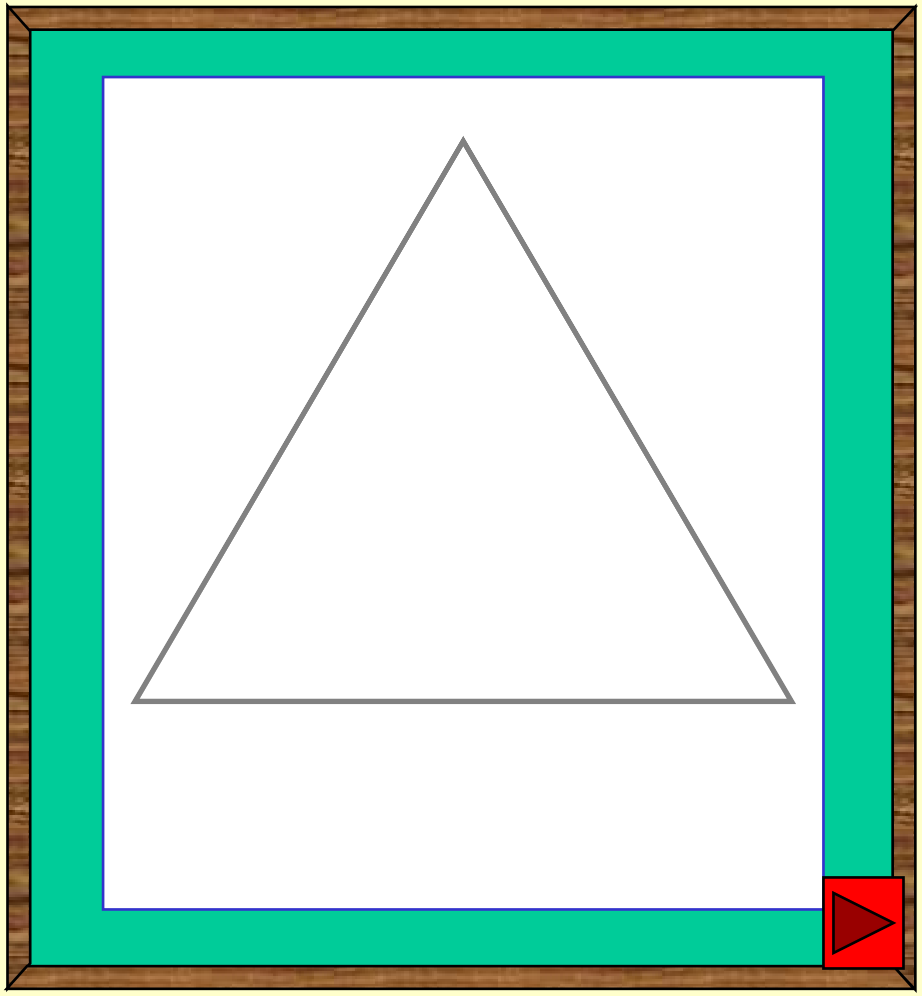
周长为 $P_1 = 3,$

面积为 $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4};$

第一次分叉:

周长为 $P_2 = \frac{4}{3} P_1,$

面积为 $A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_1;$ 依次类推



第 n 次分叉:

周长为 $P_n=(\frac{4}{3})^{n-1}P_1 \quad n=1,2,\cdots$

面积为

$$A_n=A_{n-1}+3\{4^{n-2}[(\frac{1}{9})^{n-1}A_1]\}$$

$$=A_1+3\cdot\frac{1}{9}A_1+3\cdot 4\cdot(\frac{1}{9})^2A_1+\cdots+3\cdot 4^{n-2}\cdot(\frac{1}{9})^{n-1}A_1$$

$$=A_1\{1+[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{4}{9})+\frac{1}{3}(\frac{4}{9})^2+\cdots+\frac{1}{3}(\frac{4}{9})^{n-2}]\}$$

$n=2,3,\cdots$

于是有

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_1\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}\right) = A_1\left(1+\frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

雪花的面积存在极限（收敛）.

结论：雪花的周长是无界的，而面积有界.

例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解 如果$q \neq 1$时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q| < 1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q| > 1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ $\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

如果$|q|=1$时

当$q=1$时, $s_n = na \to \infty$ 发散

当$q=-1$时, 级数变为$a-a+a-a+\cdots$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n$不存在 发散

综上 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时, 收敛 \\ 当|q|\geq 1时, 发散 \end{cases}$

例 2 判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$$ 的收敛性.

解 $\because \quad u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right),$

$$\therefore \ s_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 级数收敛，和为 $\dfrac{1}{2}$.

三、基本性质

性质 1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$亦收敛.

结论：级数的每一项同乘一个不为零的常数，敛散性不变.

性质 2 设两收敛级数$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛，其和为$s \pm \sigma$.

结论：收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

性质 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 也收敛 $(k \geq 1)$. 且其逆亦真.

证明 $u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}$$

$$= s_{n+k} - s_k ,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k} - \lim\limits_{n\to\infty} s_k$

类似地可以证明在级数前面加上有限项不影响级数的敛散性.

性质 4 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证明 $(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$

$$\sigma_1=s_2,\quad \sigma_2=s_5,\quad \sigma_3=s_9,$$

$$\cdots,\sigma_m=s_n,$$

则 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s.$

注意 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

事实上，对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意加括号

$$(u_1 + \cdots + u_{p_1}) + (u_{p_1+1} + \cdots + u_{p_2}) + \cdots$$

$$+ (u_{p_{k-1}+1} + \cdots + u_{p_k}) + \cdots$$

若记 $b_k = u_{p_{k-1}+1} + \cdots + u_{p_k}$

则加括号后级数成为 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 的部分和记为 σ_k

则 $\sigma_k = s_{p_k}$ 由数列和子数列的关系知

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，$\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$ 必定存在

$\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$ 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 未必存在

推论 如果加括弧后所成的级数发散, 则原来级数也发散.

四、收敛的必要条件

级数收敛的必要条件:

当n无限增大时, 它的一般项 u_n趋于零, 即

级数收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

证明 $\because \quad s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 则 $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

注意

1. 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散;

例如 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

2. 必要条件不充分.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数是否收敛?

讨论

$$\because \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

假设调和级数收敛，其和为s.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = s - s = 0,$

便有 $0 \geq \frac{1}{2}$ $(n \to \infty)$ 这是不可能的.

$\therefore$ 级数发散.

$$\overbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)}^{2项}+\overbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}^{2项}+\overbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}^{4项}+\overbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}^{8项}$$

$$+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right)}_{2^m项}+\cdots$$

每项均大于$\frac{1}{2}$

即前$m+1$项大于$(m+1)\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad$ 级数发散.

由性质4推论, 调和级数发散.

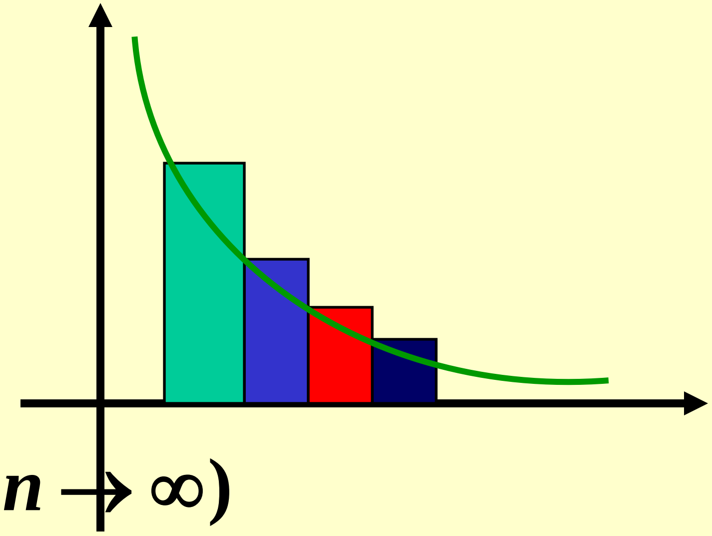
调和级数的部分和 $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

把每一项看成是以 $\frac{1}{n}$ 为高 以 1 为底的的矩形面积

s_n 就是图中 n 个矩形的面积之和

由定积分的几何意义 这块面积显然大于定积分

$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$ 即



$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \to \infty, \quad (n \to \infty)$$

故调和级数发散

五、小结

常数项级数的基本概念

基本审敛法

1. 由定义, 若$s_n \to s$, 则级数收敛;

2. 当$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散;

3. 按基本性质.

思考题

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$b_n \le a_n \le c_n$

$(n = 1,2,\cdots)$，能否推出$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛?

思考题解答

能.　由柯西审敛原理即知.

观察雪花分形过程

设三角形

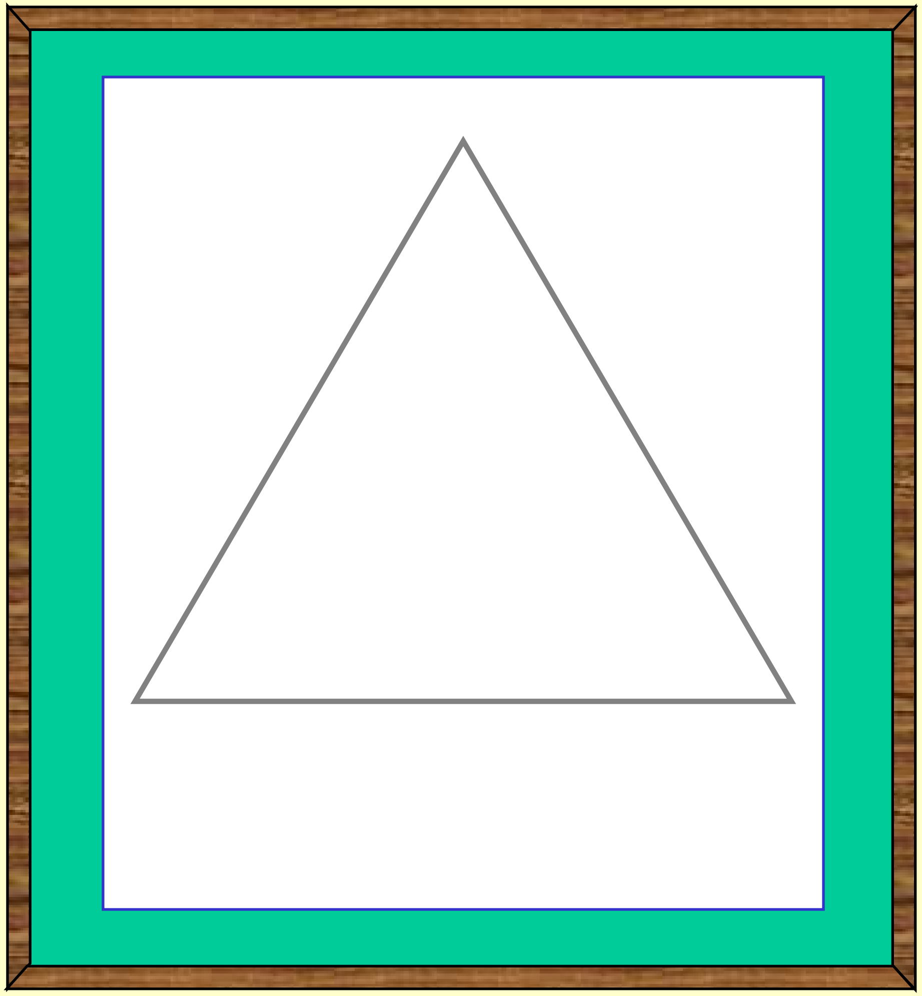
周长为 $P_1 = 3,$

面积为 $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4};$

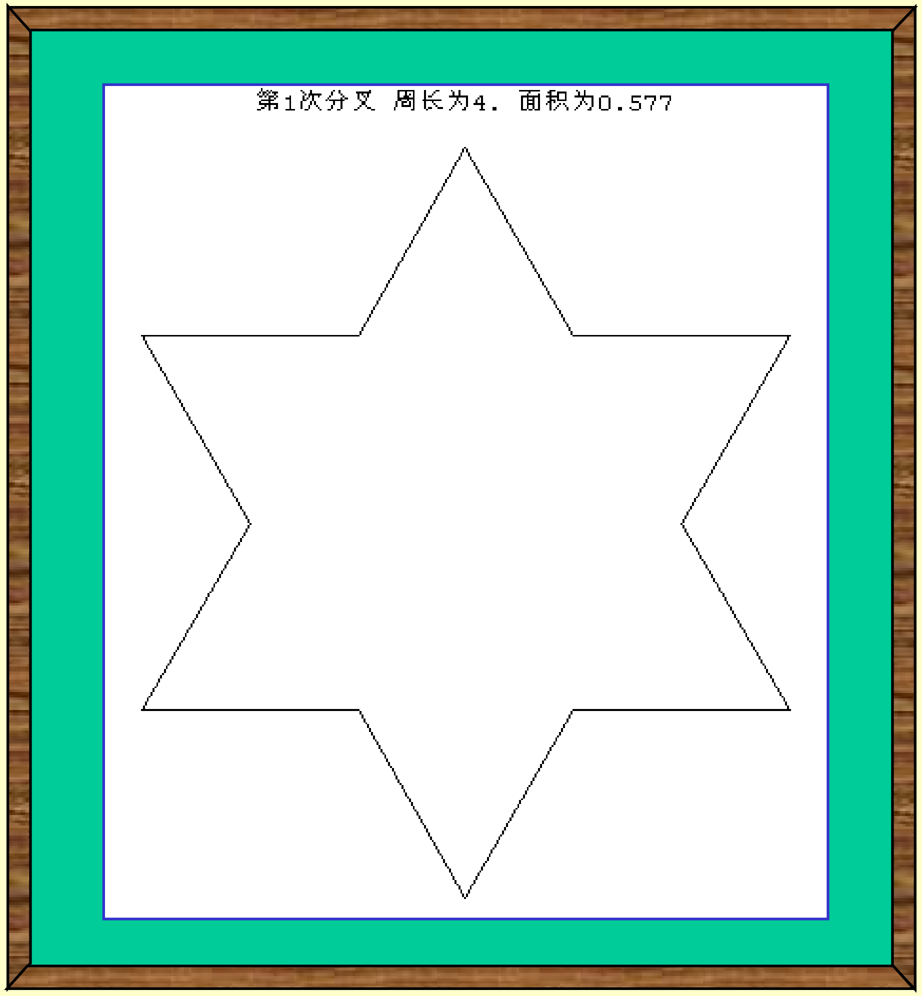
第一次分叉:

周长为 $P_2 = \frac{4}{3}P_1,$

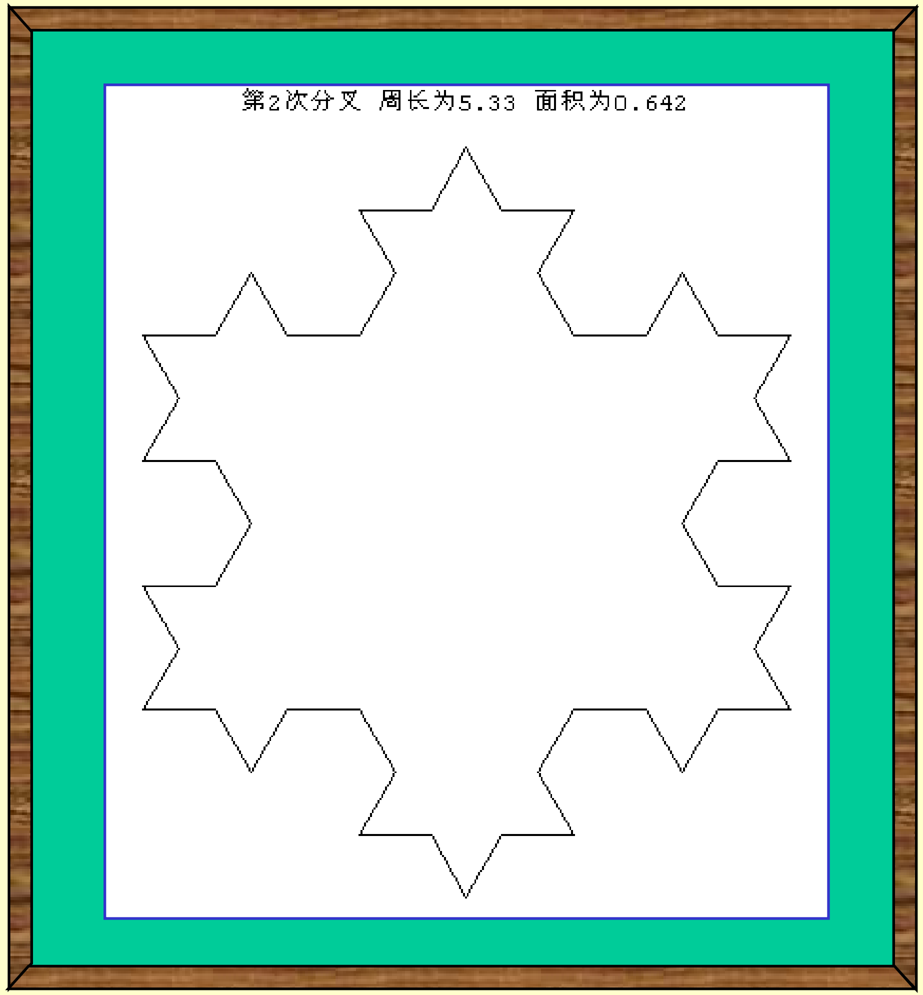
面积为 $A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_1;$ 依次类推



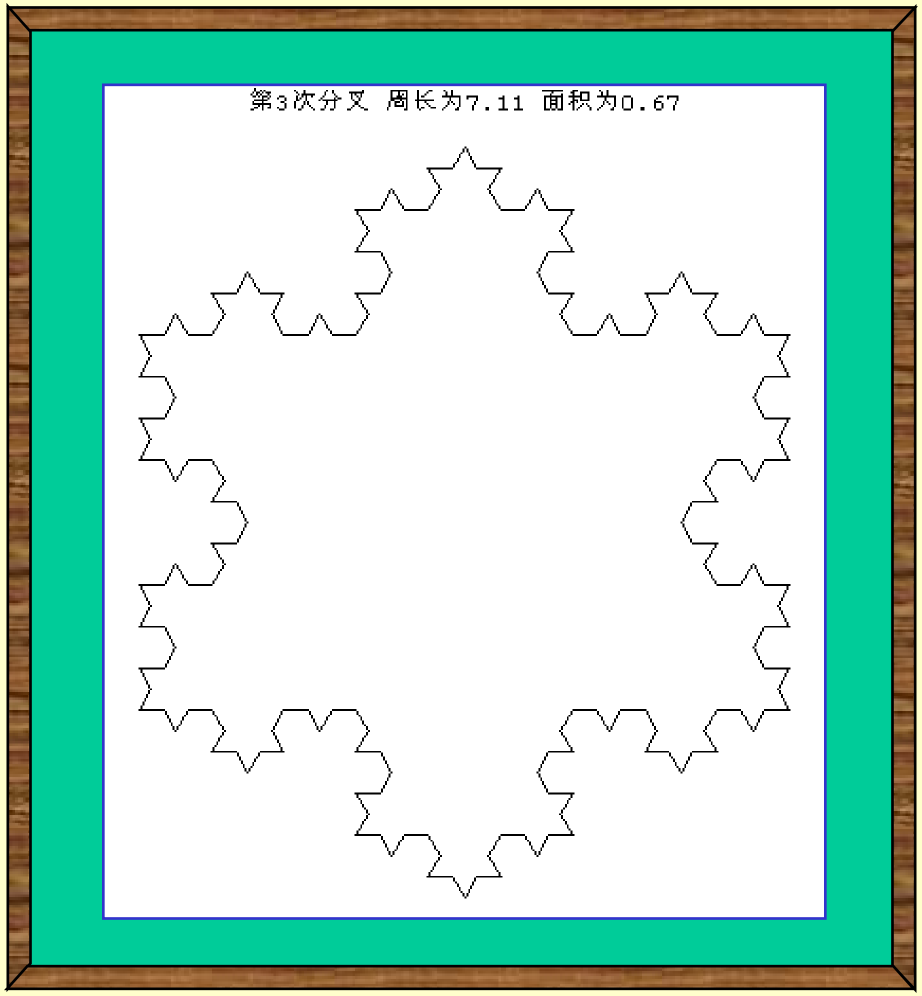
1



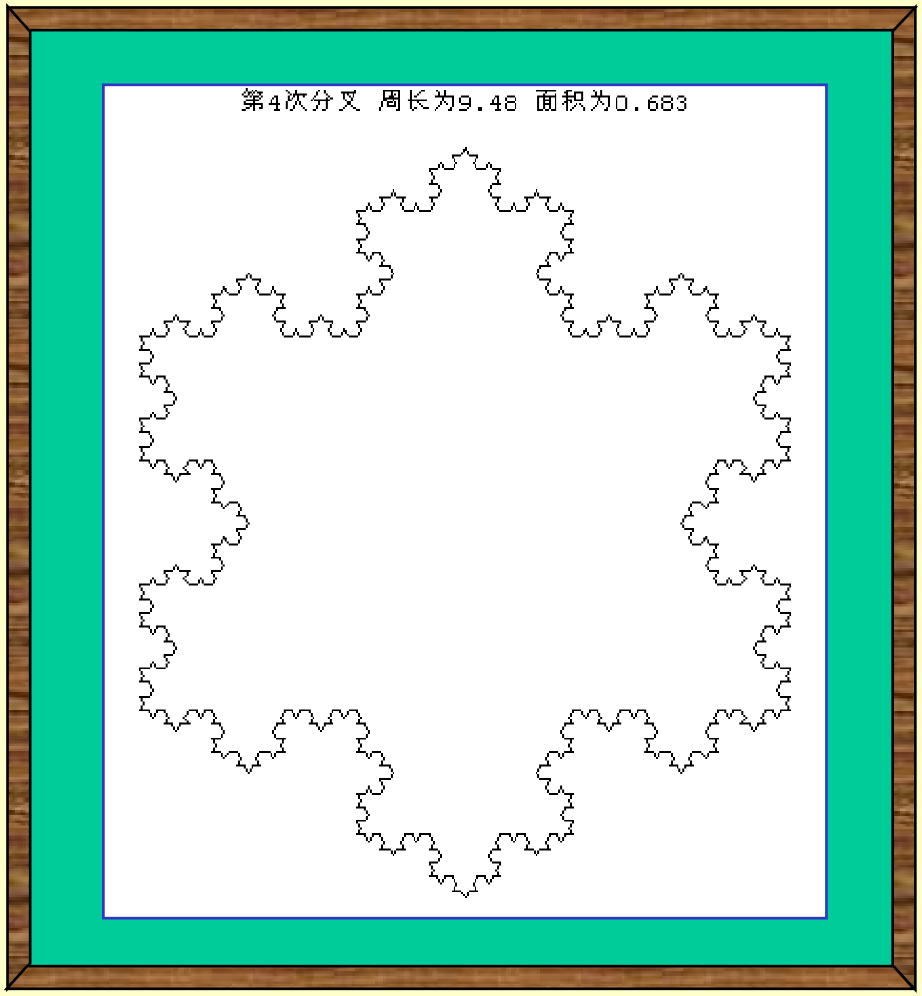
2



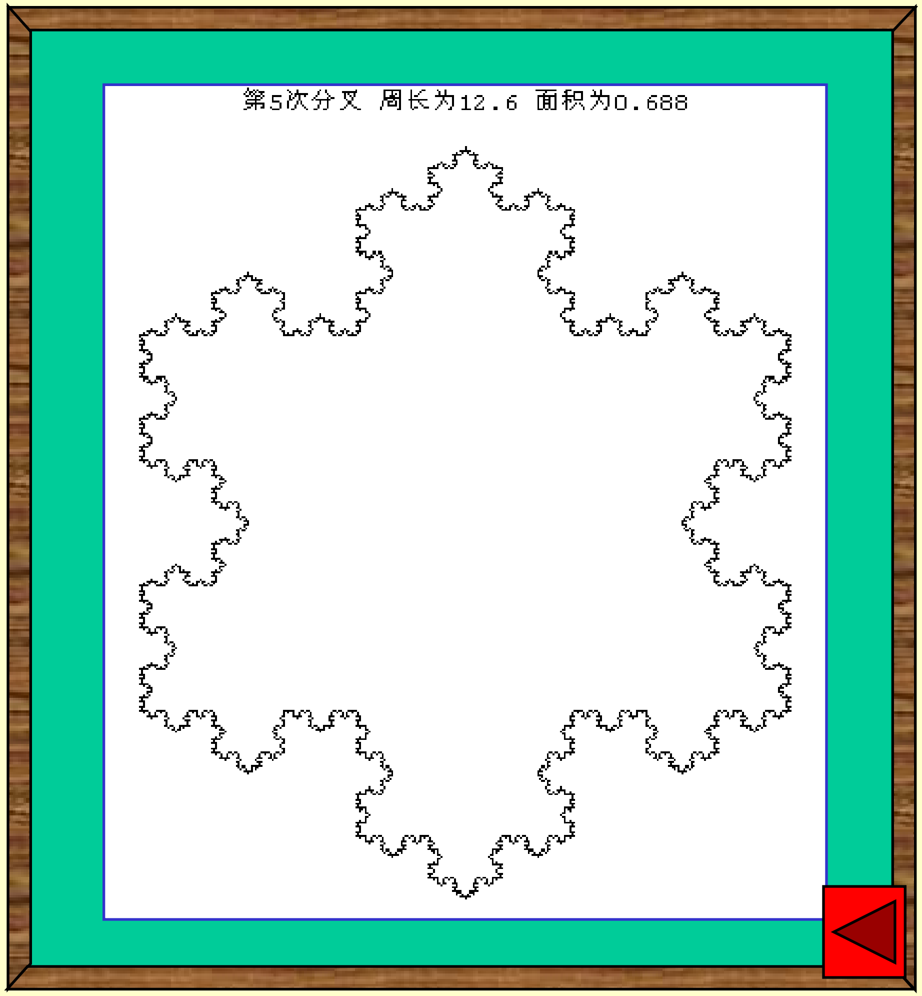
3



4



5



练习题

一、填空题:

1、若$a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$, 则$\sum\limits_{n=1}^{5}a_n=$______________;

2、若$a_n=\dfrac{n!}{n^n}$, 则$\sum\limits_{n=1}^{5}a_n=$________________________;

3、若级数为$\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{x}{2\cdot 4}+\dfrac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$则$a_n=$________;

4、若级数为$\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^3}{5}+\dfrac{a^4}{7}-\dfrac{a^5}{9}+\cdots$则$a_n=$_________;

5、若级数为$1+\dfrac{1}{2}+3+\dfrac{1}{4}+5+\dfrac{1}{6}+\cdots$ 则当$n=$______时$a_n=$______; 当$n=$_______时$a_n=$_________;

6、等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$, 当_____时收敛; 当____时发散 .

三、由定义判别级数

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$的收敛性.

四、判别下列级数的收敛性:

1、$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots;$

2、$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots;$

3、$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots$.

五、利用柯西收敛原理判别级数

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$的敛散性 .

练习题答案

一、1、$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$;

2、$\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}$;

3、$\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$;　　4、$(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$;

5、$2k-1.2k-1,2k,\frac{1}{2k}$;　　6、$|q|<1,|q|\geq 1.$

三、收敛.　　四、1、发散;　　2、收敛;

3、发散、[$s_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{10k})$].

五、发散. [取 $p=2n$]