热学习题课

一、理想气体状态方程：（平衡态下）

$$pV = \frac{M}{\mu} RT \quad \text{或} \quad p = nkT$$

$$R = 8.31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$$

二、压强的统计意义：

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_t \qquad \bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2} kT$$

$\bar{\varepsilon}_t$ ---平均平动动能

热学习题课

三、能量均分原理：

每个自由度的平均能量为 $\frac{1}{2}kT$

一个气体分子的平均能量 $\bar{\varepsilon}=\frac{i}{2}kT$

理想气体的内能

$$E=\nu\frac{i}{2}RT=\frac{i}{2}PV$$

i为理想气体的自由度， 常温下

单原子分子 $i=3$

双原子分子 $i=5$

多原子分子 $i=6$

理想气体内能的改变

$$\Delta E=\nu\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=\frac{i}{2}(P_2V_2-P_1V_1)$$

热学习题课

四、速率分布函数：

1、定义：$\boldsymbol{f(v)=\dfrac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}}$　　$\boldsymbol{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v=1}$

2、MAXWELL速率分布及相应的三种特征速率：

$$f(v)=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\mathrm{e}^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}$$

$$\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}=0\qquad v_P=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

热学习题课

3、与速率分布有关物理 量的统计平均值

$$\bar{\xi} = \int_0^\infty \xi f(v) \cdot \mathrm{d}v \qquad \bar{\xi} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} \xi f(v) \cdot \mathrm{d}v}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot \mathrm{d}v}$$

五、玻尔兹曼分布：

重力场中

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\frac{\mu g h}{kT}} = n_0 \mathrm{e}^{-\frac{M g h}{RT}}$$

六、平均碰撞频率和平均自由程：

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

热学习题课

七、范德瓦尔斯方程：

1mol实际气体的方程

$$(p+\frac{a}{V_m^2})(V_m-b)=RT$$

八、热力学第一定律：

$$\Delta E = Q + A$$

$$\boxed{A=\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V}$$

$\boxed{Q=\nu C(T_2-T_1)\quad C\text{为气体摩尔热容}}$

$$C_V=\frac{i}{2}R,\quad C_p=\frac{i+2}{2}R=C_V+R\quad \gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{i+2}{i}$$

对四个特殊过程有关计算应熟练掌握！

热学习题课

九、循环：

1、正循环：$\eta = \dfrac{A}{Q_{吸}} = \dfrac{Q_{吸} - Q_{放}}{Q_{吸}} = 1 - \dfrac{Q_{放}}{Q_{吸}}$

2、逆循环：

$$\mathrm{e} = \frac{Q_{吸}}{A} = \frac{Q_{吸}}{Q_{放} - Q_{吸}}$$

3、卡诺循环：

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad e_C = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

热学习题课

十、熵及其计算：

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\mathrm{d}Q}{T}\text{（任意可逆过程）}$$

热学习题课

【例】容器内某理想气体的温度为0°C，压强p=1.00×10⁻³atm，密度为1.25g/m³。求：
①气体分子的方均根速率；
②气体的摩尔质量，是何种气体？
③气体分子的平均平动动能和转动动能；
④单位体积内气体分子的总平动动能；
⑤设气体为0.3摩尔，求气体的内能。

解：先统一单位 $T = 273\text{K}$，$p = 101.3\text{p}_\text{a}$，$\rho = 1.25\times10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

$$1.\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 493\text{m/s} \quad 2.M = \frac{\rho RT}{p} = 0.028\text{kg/mol}$$

$$3.\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2}kT = 5.65\times10^{-21}\,\text{J}，\ \bar{\varepsilon}_r = kT = 3.77\times10^{-21}\,\text{J}$$

热学习题课

【例】容器内某理想气体的温度为0℃，压强p=1.00×10-3atm，密度为1.25g/m3。求：

①气体分子的方均根速率；
②气体的摩尔质量，是何种气体？
③气体分子的平均平动动能和转动动能；
④单位体积内气体分子的总平动动能；
⑤设气体为0.3摩尔，求气体的内能。

$$4.\overline{E}=n\overline{\varepsilon}_t=\frac{p}{kT}\cdot\frac{3}{2}kT=1.52\times10^2\ \mathrm{J/m^3}$$

$$5.E=\nu\frac{i}{2}RT=1.70\times10^3\ \mathrm{J}$$

请说明下列各量的物理意义：

1） $f(v)dv$

5) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$

2） $Nf(v)dv$

6) $\int_0^{\infty} f(v)dv$

3） $nf(v)dv$

7) $\int_0^{\infty} v^2 f(v)dv$

4) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$

请说明下列各量的物理意义：

$$f(v)dv = \frac{dN}{N}$$

—— 分布在速率 v 附近 $v \sim v + dv$ 速率区间内的分子数占总分子数的比率。

$$Nf(v)dv = dN$$

——分布在速率 v 附近 $v \sim v + dv$ 速率区间内的分子数。

$$nf(v)dv = \frac{N}{V} \cdot \frac{dN}{N} = \frac{dN}{V}$$

—— 单位体积内分子速率分布在速率 v 附近 $v \sim v +$ dv 速率区间内的分子数。

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \int_{N(v_1)}^{N(v_2)} \frac{dN}{N} = \frac{\Delta N}{N}$$

—— 分布在有限速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数占总分子数的比率。

$$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{N(v_1)}^{N(v_2)} dN$$

—— 分布在有限速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数。

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

—— 分布在 $0 \sim \infty$ 速率区间内的分子数占总分子数的比率。（归一化条件）

$$\int_0^{\infty} v^2 f(v)dv = \overline{v^2}$$

—— v^2 的平均值。

求： 速率在 $v_1 \sim v_2$ 之间的分子的平均速率。

$$\cancel{\bar{v}_{v_1 \sim v_2} = \int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}$$

$$\bar{v}_{v_1 \sim v_2} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$$

哪一种解法对？

$$\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\mathrm{d}v = \int_{v_1}^{v_2} v\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}\mathrm{d}v = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}N}{N} \neq \bar{v}_{v_1 - v_2};$$

例： 已知分子数 N，分子质量 m，分布函数 $f(v)$

求： 1）速率在 $v_p \sim \overline{v}$ 间的分子数；

2）速率在 $v_p \sim \infty$ 间所有分子动能之和。

速率在 $v \to v + \mathrm{d}v$ 间的分子数 $\boxed{\mathrm{d}N = Nf(v)\mathrm{d}v}$

1） $$\int_{v_p}^{\overline{v}} Nf(v)\,\mathrm{d}v$$

2） $$\int_{v_p}^{\infty} \frac{1}{2} m v^2 Nf(v)\,\mathrm{d}v$$

热学习题课

例.某系统由两种理想气体A、B组成，其分子数分别为N_A、N_B。若在某一温度下，A、B两气体各自的速率分布函数为$f_A(v)$、$f_B(v)$，则在同一温度下，由A、B气体组成系统的速率分布函数如何确定？

在$v \sim v + \mathrm{d}v$之间

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}N_A + \mathrm{d}N_B = N_A f_A(v) \cdot \mathrm{d}v + N_B f_B(v) \cdot \mathrm{d}v$$

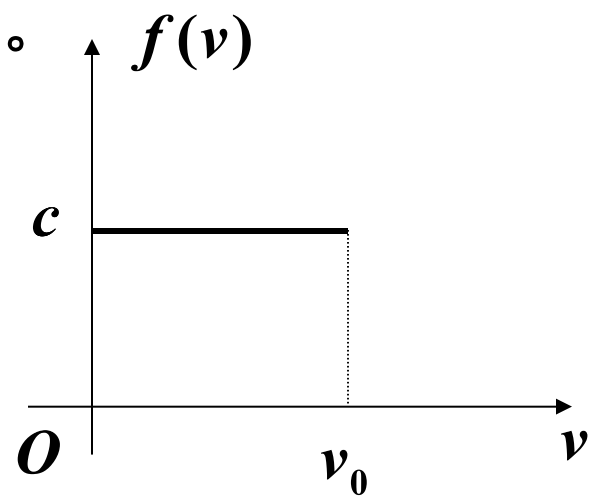
$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N}{N \cdot \mathrm{d}v} = \frac{N_A f_A(v) + N_B f_B(v)}{N_A + N_B}$$

热学习题课

【例】有N个粒子，其速率分布函数为：

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}=\begin{cases} c & (0<v<v_0) \\ 0 & (v>v_0) \end{cases}$$

①作速率分布曲线；②由N和v_0求常数c；③求粒子的平均速率；④求粒子的方均根速率。



2.由归一化条件

$$\int_0^\infty f(v)\cdot \mathrm{d}v=\int_0^{v_0} c\mathrm{d}v=cv_0=1,$$

$$c=\frac{1}{v_0}$$

$$3.\ \bar{v}=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}v_0$$

$$4.\ \sqrt{\overline{v^2}}=\left[\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right]^{1/2}=\frac{v_0}{\sqrt{3}}$$

热学习题课

【例】双原子理想气体的始态压强为1.0×10^5pa，体积为1.0×10^{-3}m³。先等压加热，使体积增大一倍，再等体放热，使压强降为0.7×10^5pa，最后绝热膨胀到初始温度，求：①画出过程曲线；②系统内能的增量；③系统对外界所做的功。

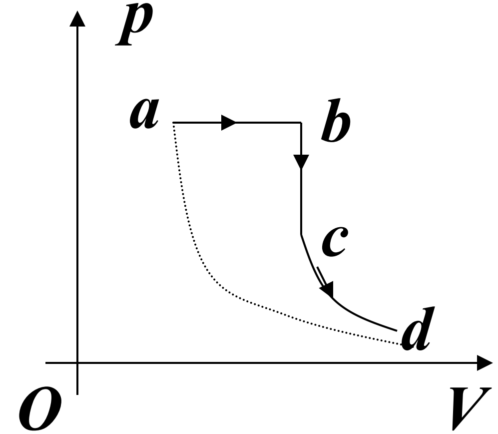
$$2.\Delta E = 0$$

$$3.A = Q = Q_{ab} + Q_{bc}$$

$$= \nu\frac{7}{2}R(T_b - T_a) + \nu\frac{5}{2}R(T_c - T_b)$$

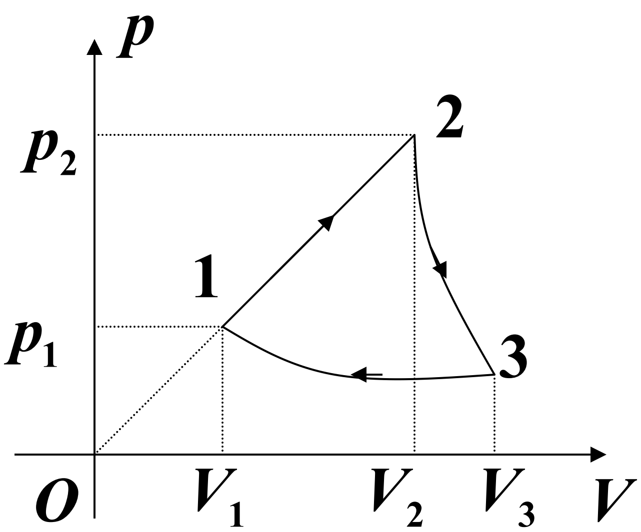
$$= \frac{7}{2}(p_bV_b - p_aV_a) + \frac{5}{2}(p_cV_c - p_bV_b)$$

$$= 200\text{J}$$



热学习题课

【例】1.0mol双原子理想气体作如图所示的可逆循环，其中1-2为直线，2-3为绝热过程，3-1为等温线。已知$T_2=2T_1$，$V_3=8V_1$，试求：
①各分过程的功、内能增量和热量；（用T_1和R表示）②此循环的效率。



$$12:\Delta E_1=\frac{5}{2}RT_1,\ \ A_1=-\frac{1}{2}RT_1,\ \ Q_1=3RT_1;$$

$$23:\Delta E_2=-\frac{5}{2}RT_1,\ \ A_2=-\frac{5}{2}RT_1,\ \ Q_2=0;$$

$$31:\Delta E_3=0,\ \ A_3=2.08RT_1,\ \ Q_3=-2.08RT_1$$

$$\eta=30.7\%$$

【例】一致冷机用理想气体为工作物质进行如图所示的循环过程，其中ab, cd分别是温度为T_2, T_1的等温过程，bc, da为等压过程，试求该致冷机的致冷系数。

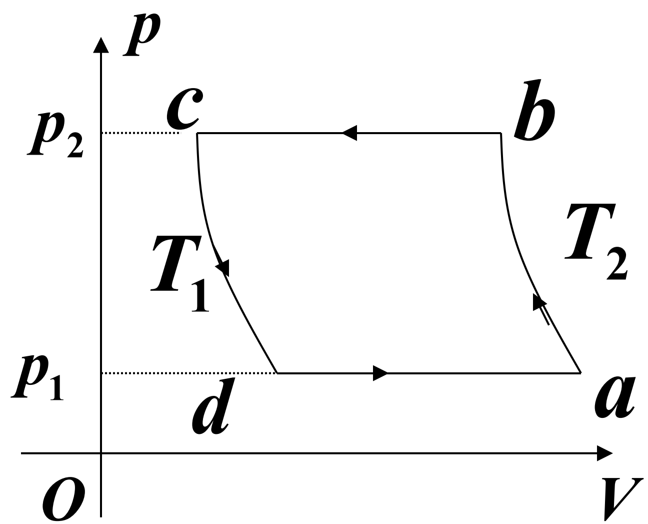
$$\mathrm{e}=\frac{Q_{吸}}{A}=\frac{Q_{吸}}{Q_{放}-Q_{吸}}$$

吸：$Q_{cd}=\nu RT_1\ln\frac{p_2}{p_1}$

吸：$Q_{da}=\nu C_p(T_2-T_1)$

放:$\left|Q_{ab}\right|=\left|\nu RT_2\ln\frac{p_2}{p_1}\right|$

放:$\left|Q_{bc}\right|=\left|\nu C_p(T_2-T_1)\right|$



$$e=\frac{T_1}{T_2-T_1}$$

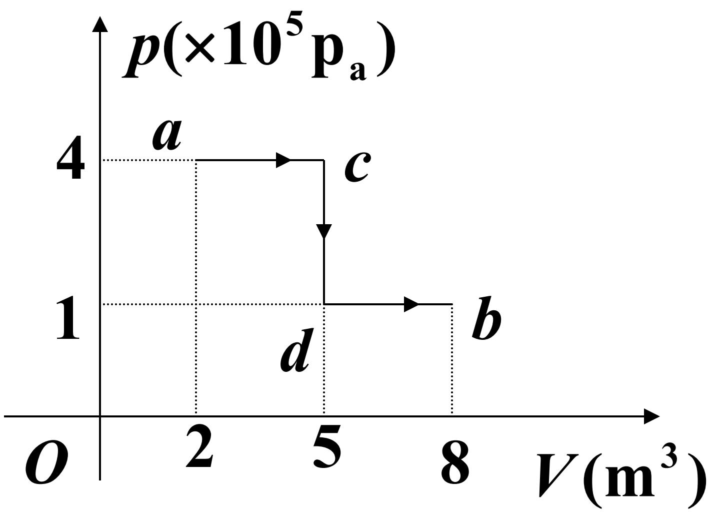
热学习题课

【例】一定量的理想气体从a态出发经如图所示的过程到达b态，试求：
①该过程中气体吸收的净热量；②1.0mol这种理想气体在该过程中的熵变。

1.从图知 $T_a = T_b$， $\Delta E = 0$

$$Q = A = p_a(V_c - V_a) + p_b(V_b - V_d)$$

$$= 1.5 \times 10^6 \text{ J}$$

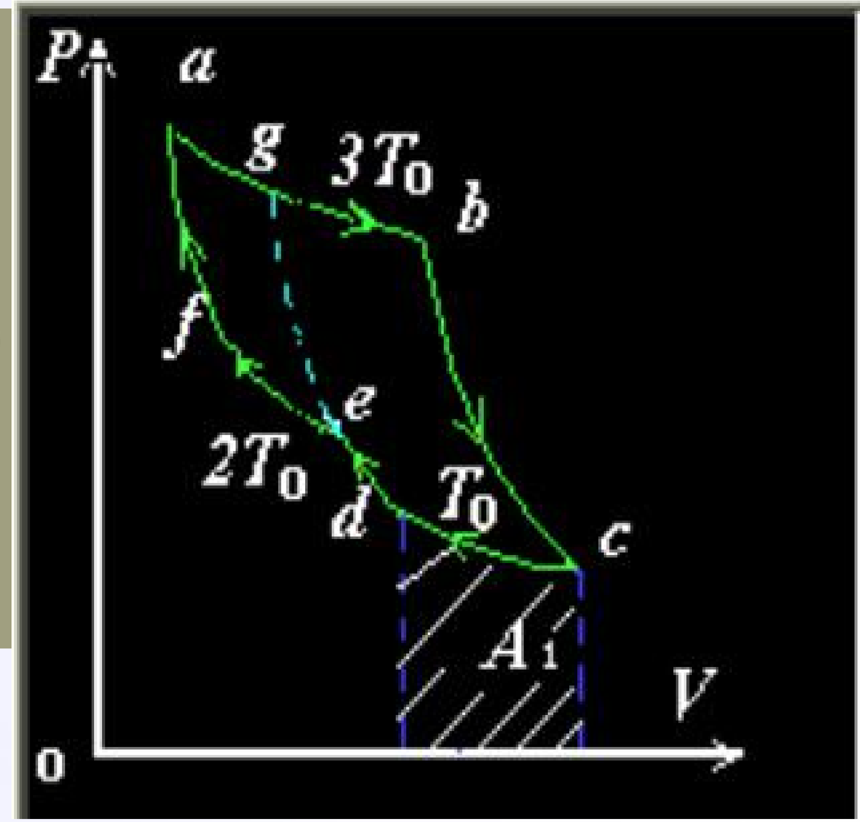


2.构造一个 $a \to b$ 的可逆等温过程

$$\Delta S = \int_a^b \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{Q}{T} = \nu R \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$= R \ln 4 = 11.6 \text{J/K}$$

如图循环过程$abcdefa$中，$a\to b$、$c\to d$、$e\to f$均为等温过程，其相应的温度分别为$3T_0$，T_0，$2T_0$（T_0为已知）$b\to c$ $d\to e$ ，$f\to a$均为绝热过程，已知$c\to d$过程曲线下的面积为A_1 ，循环曲线（绿色）包围的面积为A_2 ，求循环效率.



假设：$A_2=6A_1$, 求：状态c与状态a之间的熵变S_c-S_a=?

整个循环熵变为零：$Q_{ab}/3T_0-Q_{cd}/T_0-Q_{ef}/2T_0=0$

由第一定律： $Q_{ab}-Q_{cd}-Q_{ef}=6A_1$

由题知： $Q_{cd}=A_1$

解得：$Q_{ab}=15A_1$， $S_c-S_a=Q_{ab}/3T_0=5A_1/T_0$

作业：

8.15

8.19

8.28