第五章 机械振动
(§5.3 - §5.6)

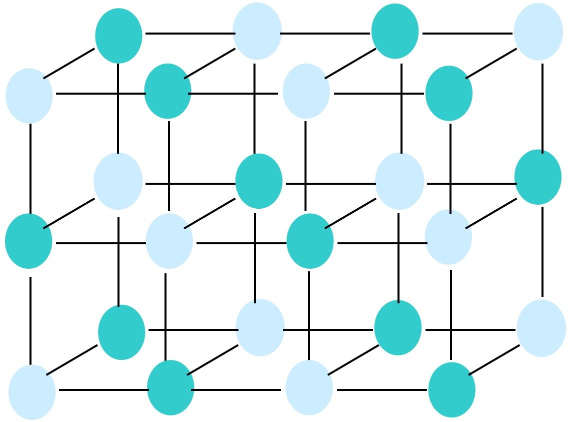
本课时教学基本要求

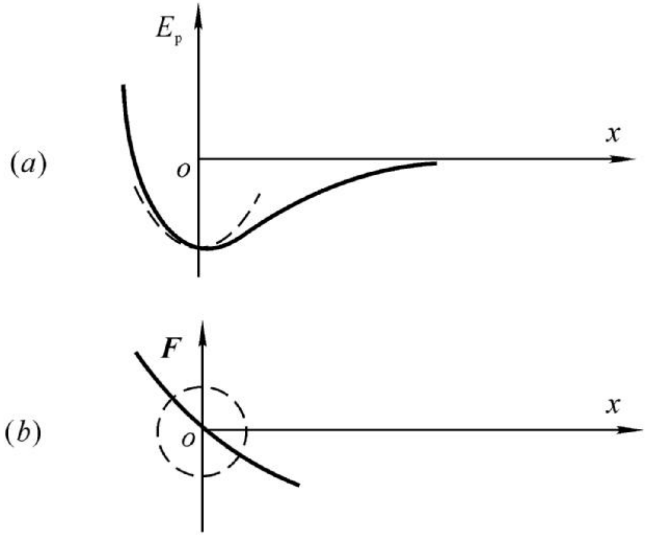
1、理解物体在稳定平衡位置附近的小振动均可近似看作简谐振动。
2、了解阻尼振动和受迫振动的特点；理解什么是共振。
3、掌握两个同方向同频率的简谐振动的合成方法及规律。了解拍和拍频。
4、理解两个互相垂直、同频率简谐振动合成的规律。了解李萨如图的形成。

§ 5.3 稳定平衡位置附近的运动

在没有摩擦阻力的情况下，物体在稳定平衡位置附近的小振动均可近似看作是简谐振动

- 原子的振动





$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

$F(x)$在原点附近作泰勒级数　展开：

$$F(x) = F(0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 x^2 + \cdots$$

$\because x$很小，$\therefore F(x) \approx F(0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x$

$$F(0) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0$$

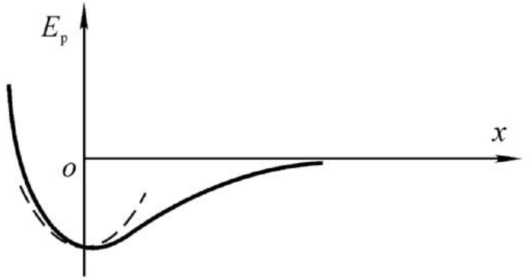
$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 = -\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 = -k \qquad 令\ \frac{d^2E_p}{dx^2} = k$$

$$\therefore F(x) \approx -kx$$

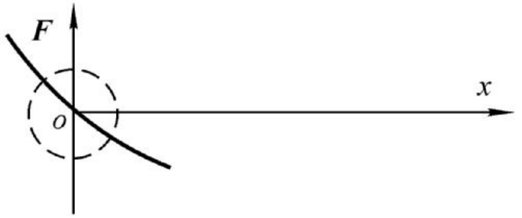
$$\Rightarrow -kx \approx m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x \approx 0$$

$$x \to 0, F(x) = -kx$$

(a)



(b)

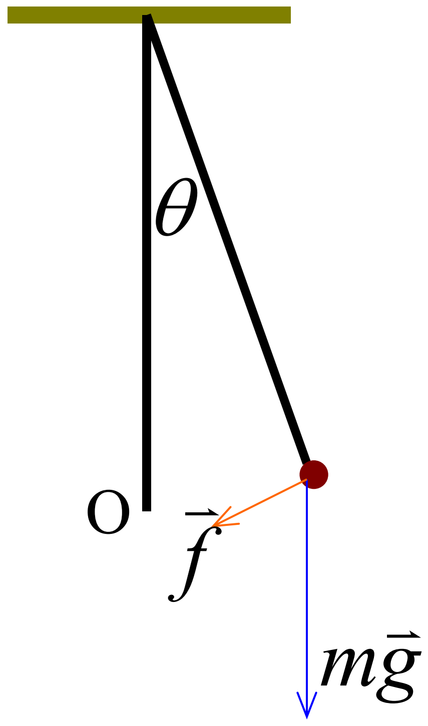


原子在平衡位置附近作简谐振动

- 单摆

$$E_p = mgl(1-\cos\theta)$$

考虑到$dx = ld\theta$



$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{dE_p}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{mg}{l}\cos\theta$$

$$\therefore 当\theta = 0, \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$

O点是稳定的平衡位置

- 单摆

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

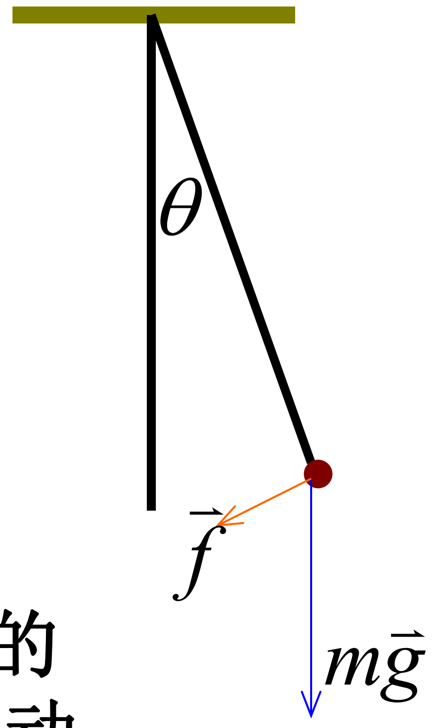
当 $\sin\theta\approx\theta$ 时

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

结论

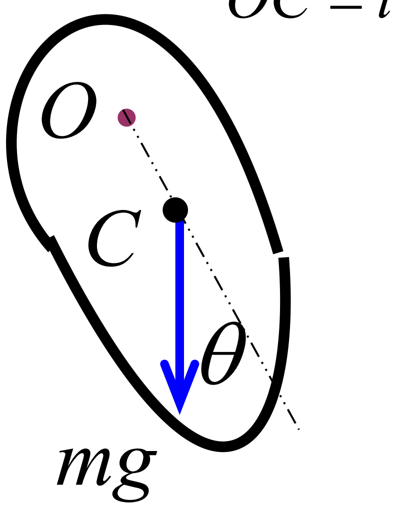
在角位移很小的时候，单摆的振动是简谐振动。角频率,振动的周期分别为：

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



- 复摆（物理摆）

$$-mgl\sin\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



J为m绕O点转动的转动惯量。

当 $\sin\theta \approx \theta$时 $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\theta = 0$$

总结：复摆的振动是简谐振动

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{mgl}}$$

总结： 复摆的角谐振动方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgl}{J}\theta=0 \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{mgl}}$$

单摆的角谐振动方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

振动的角频率、周期完全由振动系统本身来决定。

§ 5. 4 阻尼振动

现象： 振幅随时间减小

原因： 阻尼

比例常数

动力学分析： 阻尼力 $F_\gamma = -bv = -b\dfrac{dx}{dt}$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = ma$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

固有角频率

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ \gamma=b/2m\end{cases}$$

阻尼系数

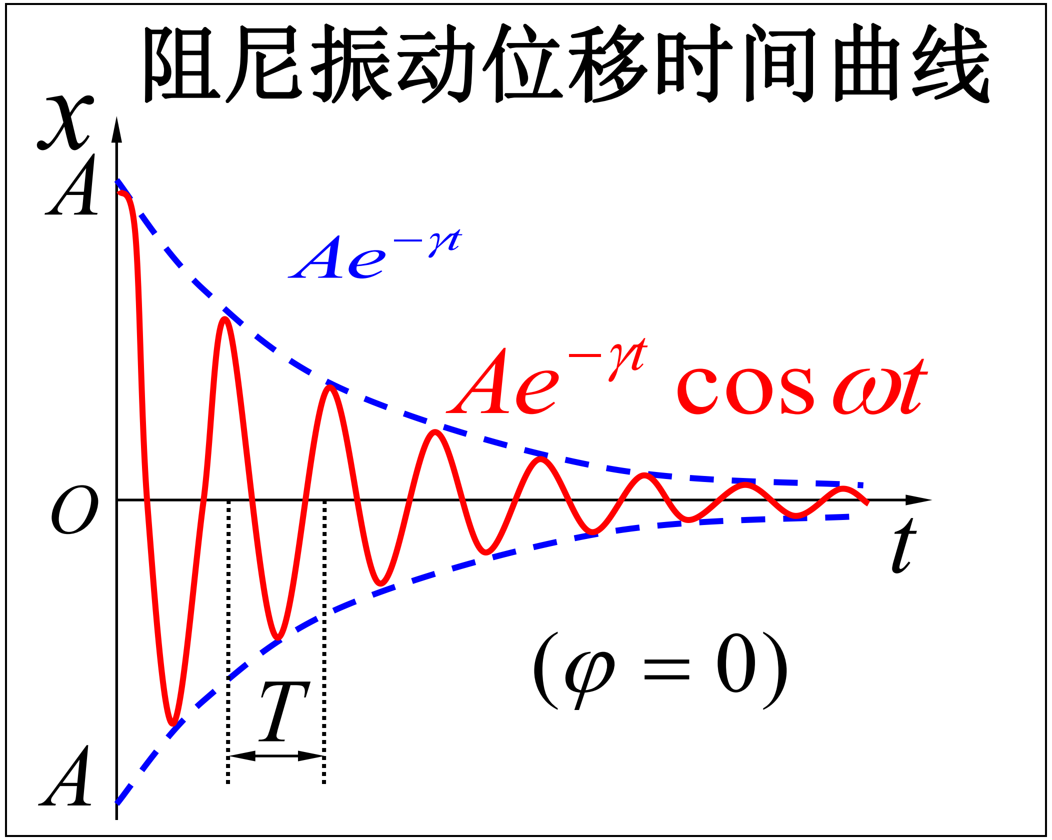
$$x=\boxed{Ae^{-\gamma t}}\cos(\boxed{\omega}t+\varphi)$$

振幅　　角频率

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

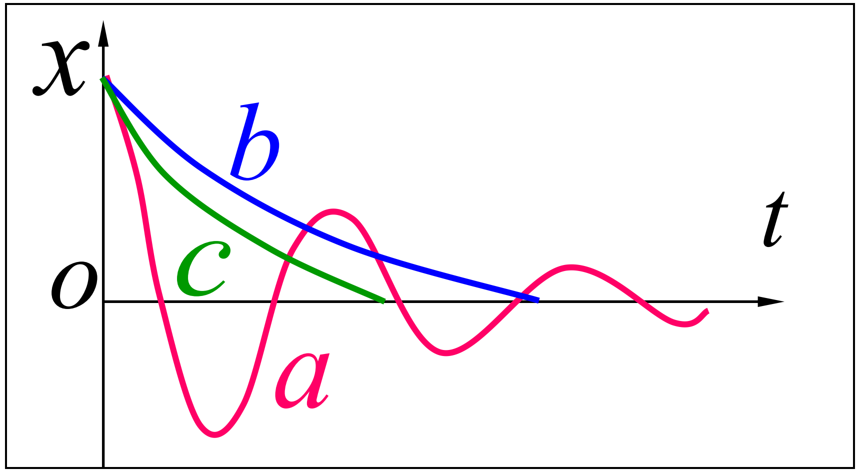


三种阻尼的比较

(a) 弱阻尼 $\omega_0^2 > \gamma^2$

(b) 过阻尼 $\omega_0^2 < \gamma^2$

(c) 临界阻尼 $\omega_0^2 = \gamma^2$



§ 5.5 受迫振动 共振

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F_0\cos\omega t$$

驱动力

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\gamma=b/m$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

驱动力的角频率

$$x = \cancel{A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_z t+\psi)} + A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi=\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

共振

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

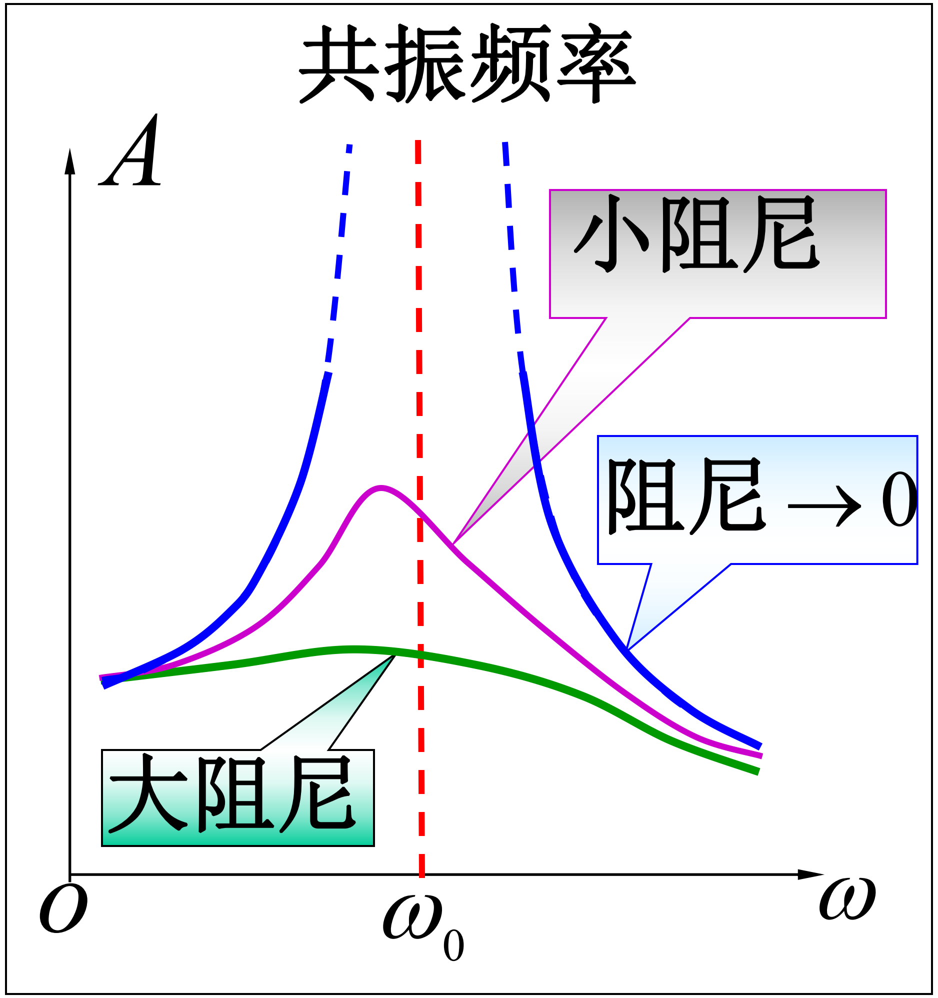
共振频率

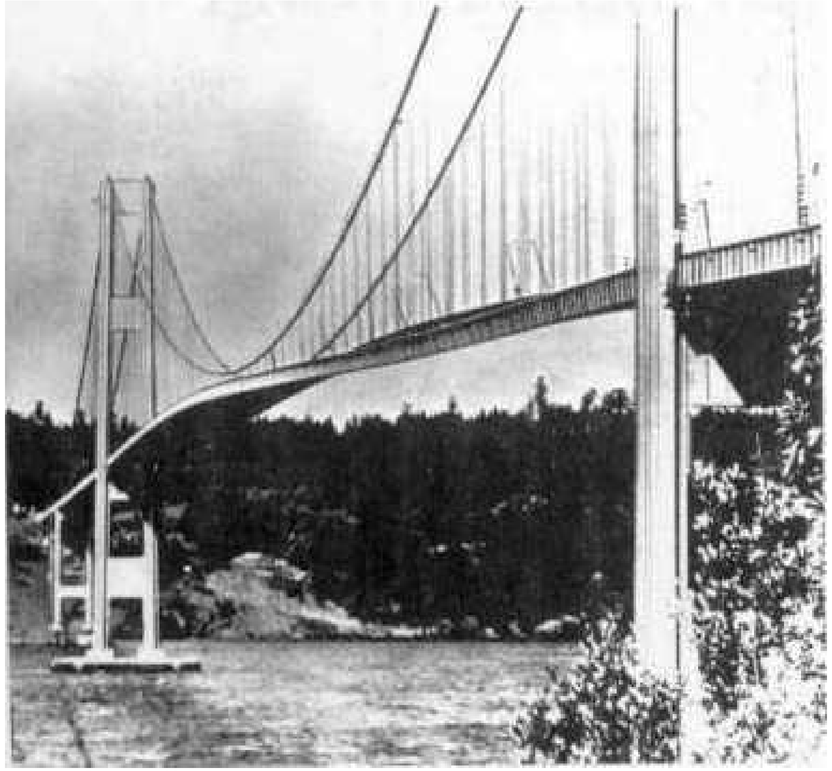
$$\omega_{共振} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

共振振幅

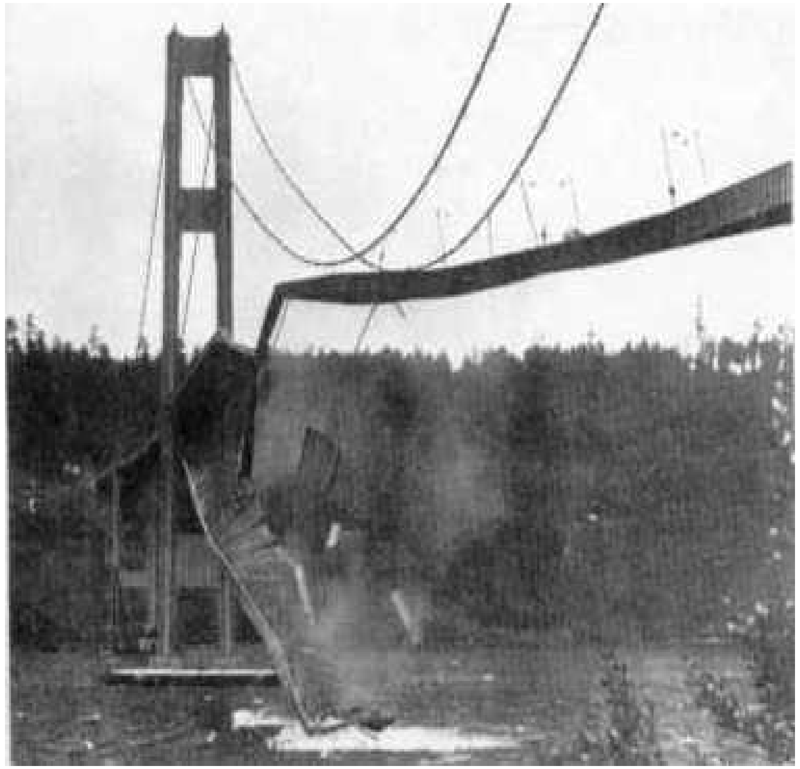
$$A_{共振} = \frac{F_0 / m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

共 振 现 象 及 应 用





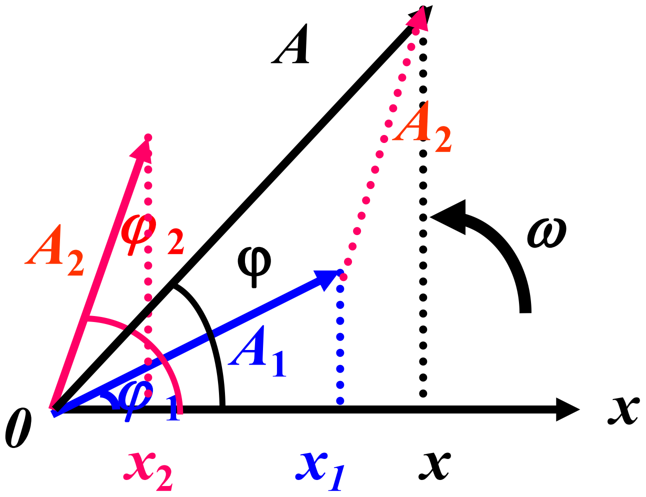
1940年华盛顿的塔科曼大桥建成



同年7月的一场大风引起桥的共振使桥摧毁

§ 5.6 振动的合成

一. 同方向同频率的简谐振动合成



1.分振动：

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

2.合振动：$x=x_1+x_2$　　$x=A\cos(\omega t+\varphi)$　　矢量合成

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\qquad \mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

3.两种特殊情况

1) 两分振动同相　　$A=A_1+A_2$，加强　　*两矢量平行*

2) 两分振动反相　　$A=|A_1-A_2|$，减弱　　$A_1=A_2$，$A=0$

两矢量反平行

例：三个同方向同频率的简谐振动，求:1）合振动的表达式；2）合振动由初始位置运动到 $x=A$（A为合振动振幅）所需的最短时间。

$$x_1 = 0.08\cos(314t + \pi/6)$$

$$x_2 = 0.08\cos(314t + \pi/2)$$

$$x_3 = 0.08\cos(314t + 5\pi/6)$$

解：1）利用旋转矢量图

$$\omega = 314s^{-1}$$

$$A = A_1/2 + A_2 + A_3/2 \ = 0.16\text{m}$$

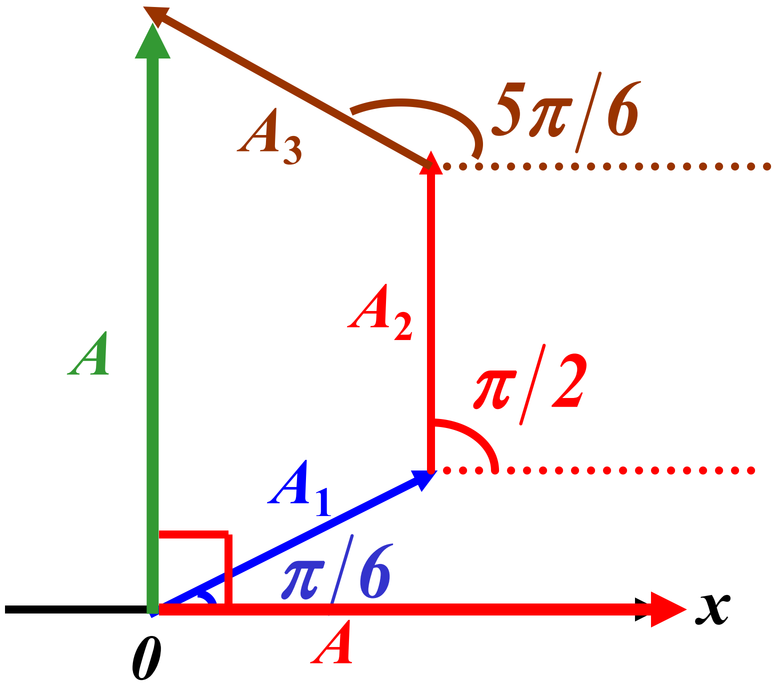
$$\varphi = \pi/2$$

$$x = 0.16\cos(314t + \pi/2)$$

2） 转动的角度

$$\Delta\varphi = 3\pi/2$$

$$\Delta t = \Delta\varphi/\omega = 0.015\text{s}$$



二. 同方向不同频率的简谐振动的合成

1. 分振动　　$x_1 = A\cos\omega_1 t$　　$x_2 = A\cos\omega_2 t$

2. 合振动　　$x = x_1 + x_2$　　合振动不是简谐振动

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t$$

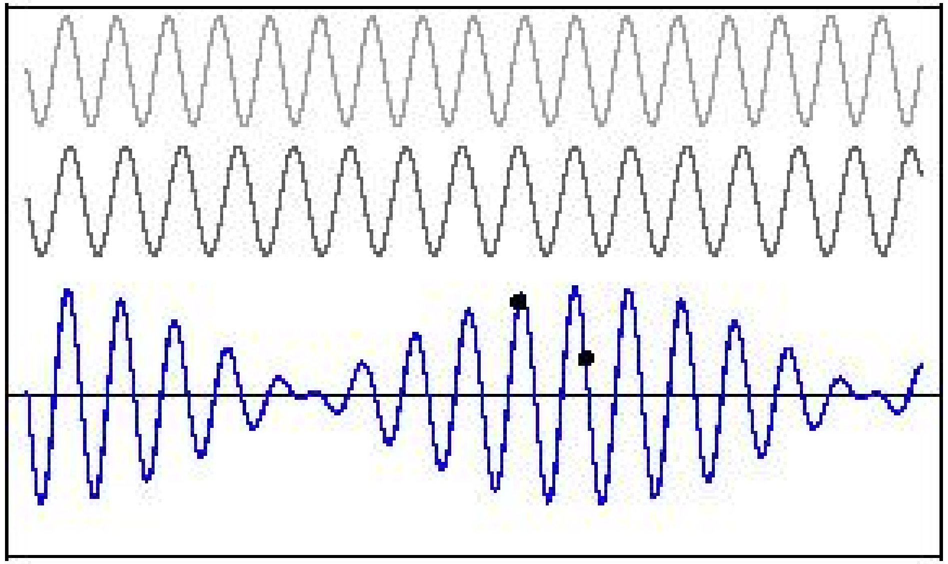
3. 拍　　合振动忽强忽弱的现象

当$\omega_2 \sim \omega_1$　　$\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$　　$x = A(t)\cos\bar{\omega}t$

$$A(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t$$　　随 t 缓变

$$\cos\bar{\omega}t = \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$　　随 t 快变

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t\cdot\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2})t$$



这种**振幅周期随时间缓慢变化**的现象称为**拍**。

振动频率 $\omega = (\omega_1+\omega_2)/2$

振幅 $A = \left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$

$$\begin{cases} A_{\max} = 2A \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}T = \pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

拍频：单位时间内强弱变化的次数 $\omega = \omega_2 - \omega_1$

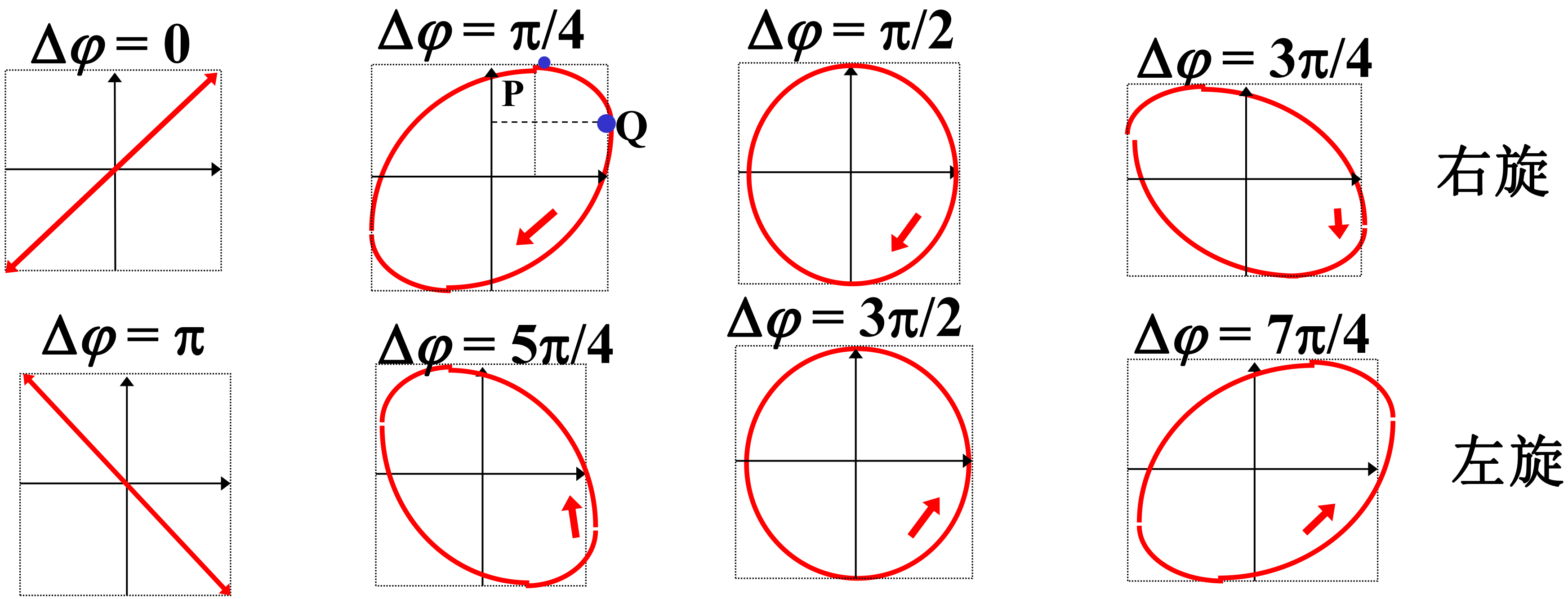
三.垂直方向同频率简谐振动的合成

1.分振动 $x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

2. 合运动 $x^2/A_1^2+y^2/A_2^2-2(xy/A_1A_2)\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$

(1) 合运动的轨迹一般是椭圆

(2) 椭圆的方位、左右旋主要决定于$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$



四.垂直方向不同频率简谐振动的合成

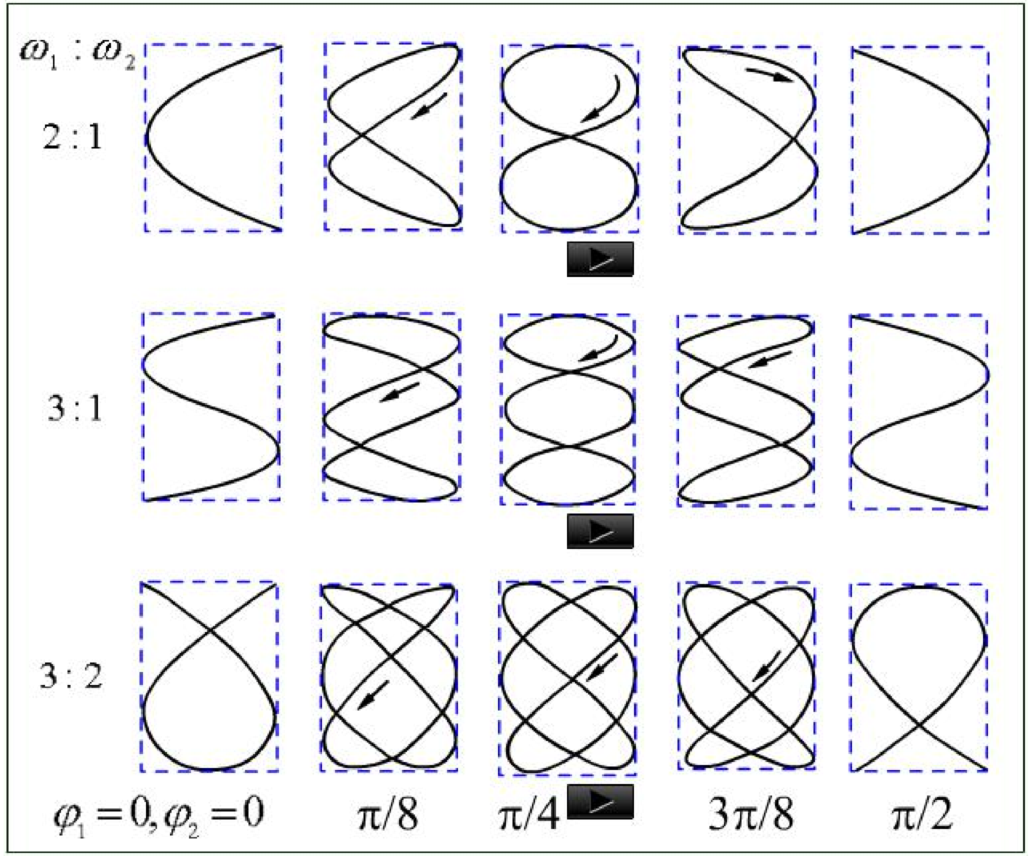
两振动的频率成整数比 轨迹称为李萨如图形

四.相互垂直的不同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

如果 $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m}{n}$,整数比

李 萨 如 图 形



$\varphi_1 = 0$

$$\varphi_2 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{n_y}{n_x} = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{T_y}{T_x}$$

n_x为曲线与一水平线的最 多切点数或最大交点数

n_y为曲线与一垂直线的最 多切点数或最大交点数

作业：

5.24

5.47

5.51

5.53

[附]同方向的N个同频率简谐振动的合成（用振幅矢量合成法）

设它们的振幅相等，初相位依次差一个恒量。其表达式为：

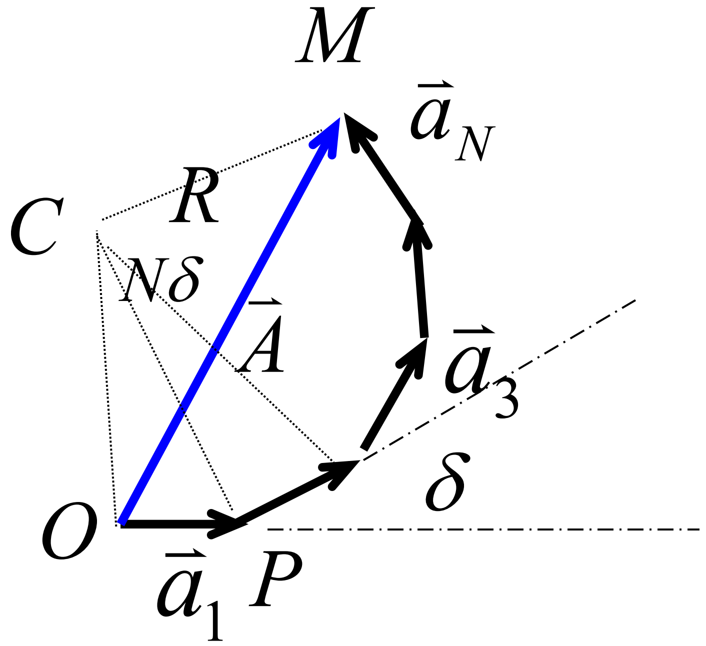
$$x_1(t) = a\cos\omega t$$

$$x_2(t) = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$x_3(t) = a\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

$$x_N(t) = a\cos(\omega t + N\delta)$$



$$A = 2R\sin(N\delta/2)$$

在ΔOCP中：

$$a = 2R\sin(\delta/2)$$

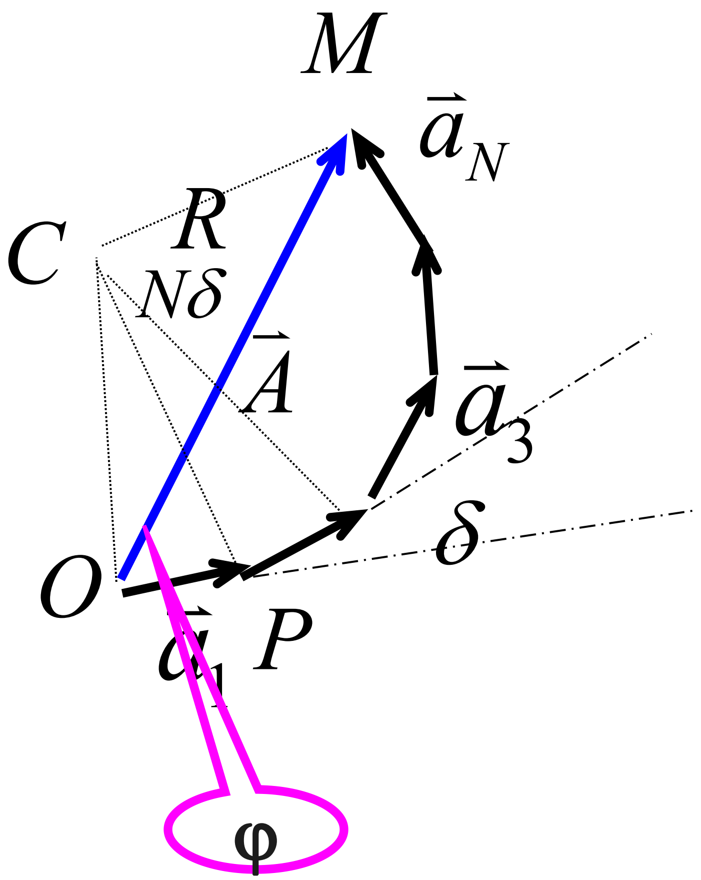
上两式相除得

$$A = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin\delta/2}$$

$$\because \angle COM = (\pi - N\delta)/2$$

$$\because \angle COP = (\pi - \delta)/2$$

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\delta$$



所以，合振动的表达式

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)$$

讨论1：

当 $\delta = 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$A = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = Na$$

即各分振动同相位时，合振动的振幅最大。

讨论2：
$$x(t)=a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos(\omega t+\frac{N-1}{2}\delta)$$

当 $\delta=2k'\pi/N$ 且 $k'\neq kN$

$$A=a\frac{\sin(k'\pi)}{\sin(k'\pi/N)}=0$$

即：$N\delta=2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 这时各分振动矢量依次相接，构成闭合的正多边形，合振动的振幅为零。

以上讨论的多个分振动的合成在说明光的干涉和衍射规律时有重要的应用。