# 浙江大学 2007-2008 学年春夏学期《线性代数》期末试卷答案

一、　填空题（每空 3 分）

1．设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，则$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}x & a_{11}x+a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}x & a_{21}x+a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32}x & a_{31}x+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$（$(1-x^2)a$）。

2．设 4 阶矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则$(A^*)^* =$（ 25A ）。

3．设$V$是实数域$\Re$上的全体$4\times 4$反对称矩阵所构成的线性空间，即

$$V = \{A = (a_{ij})_{4\times 4} \mid A^T = -A, a_{ij} \in \Re\}\text{。}$$

写出$V$的一组基（$e_{12}-e_{21}, e_{13}-e_{31}, e_{14}-e_{41}, e_{23}-e_{32}, e_{24}-e_{42}, e_{34}-e_{43}$）。

$V$的维数是（ 6 ）。设 4 阶矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，写出$A$在上面这组基下的坐标（$(2,3,1,4,-2,-2)^T$）。

4. 设$A$是 3 阶矩阵，且$|A| = 0, A_{11} = 1, A_{22} = 2, A_{33} = -4$，则$A^*$的特征值是$\lambda_1 =$（ 0 ），$\lambda_2 =$（ 0 ），$\lambda_3 =$（ -1 ）。

**解** 因为$|A| = 0$，则$r(A^*) \le 1$。又因为 $A_{11} = 1 \ne 0$，所以$r(A^*) = 1$，且$|A^*| = 0$。可见 $\lambda_1 = 0$是$A^*$的特征值，且至少是$3 - r(A^*) = 2$重根。从而$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。又因为$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} = -1$，则$\lambda_3 = -1$。

二、　计算题。

1．计算行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 2^5-2 & 2^4-2 & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^5-3 & 3^4-3 & 3^3-3 & 3^2-3 \\ 4^5-4 & 4^4-4 & 4^3-4 & 4^2-4 \\ 5^5-5 & 5^4-5 & 5^3-5 & 5^2-5 \end{vmatrix}$（12 分）。

**解** $D_4=\begin{vmatrix}2^5-2 & 2^4-2 & 2^3-2 & 2^2-2\\ 3^5-3 & 3^4-3 & 3^3-3 & 3^2-3\\ 4^5-4 & 4^4-4 & 4^3-4 & 4^2-4\\ 5^5-5 & 5^4-5 & 5^3-5 & 5^2-5\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[C_3-C_4]{\substack{C_1-C_2\\ C_2-C_3}}\begin{vmatrix}2^4 & 2^3 & 2^2 & 2\\ 2\cdot 3^4 & 2\cdot 3^3 & 2\cdot 3^2 & 2\cdot 3\\ 3\cdot 4^4 & 3\cdot 4^3 & 3\cdot 4^2 & 3\cdot 4\\ 4\cdot 5^4 & 4\cdot 5^3 & 4\cdot 5^2 & 4\cdot 5\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}2^3 & 2^2 & 2 & 1\\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1\\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1\\ 5^3 & 5^2 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[C_{23}]{C_{14}}2880\begin{vmatrix}1 & 2 & 2^2 & 2^3\\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3\\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3\\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3\end{vmatrix}$$

$=2880\cdot(5-4)\cdot(5-3)\cdot(5-2)\cdot(4-3)\cdot(4-2)\cdot(3-2)$
$=34560$

2. 已知齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ ax_1+bx_2+cx_3=0\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0\end{cases}$

问(1) a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解。（答：两两互异。具体略）
(2) a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多解，并用基础解系表示他的全部解。（要分四种情况讨论，具体略）

3. 已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\-1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 有相同的秩，且 $\beta_3$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 求 $a,b$ 的值，并写出 $\beta_3$ 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的一个表达式。（答：a=15,b=5。具体略）

4. 设 A, B 都是 3 阶实可逆矩阵，A 的特征值是 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}$，这里 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是互不相同的正整数，若 B 的特征值是-5，1，7，$B=(A^{-1})^2-6A$，求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，并分别写

出与 $A, A^{-1}, B$ 相似的对角形矩阵。

解：因为 A 的特征值是 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$，$B=(A^{-1})^2-6A$，所以 $A^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，$B$ 的特征值为 $\lambda_1^2-\frac{6}{\lambda_1}, \lambda_2^2-\frac{6}{\lambda_2}, \lambda_3^2-\frac{6}{\lambda_3}$。因为 B 的特征值是-5，1，7，所以可令 $\lambda_1^2-\frac{6}{\lambda_1}=-5, \lambda_2^2-\frac{6}{\lambda_2}=1, \lambda_3^2-\frac{6}{\lambda_3}=7$。因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是互不相同的正整数，解 $\lambda_1^2-\frac{6}{\lambda_1}=-5, \lambda_2^2-\frac{6}{\lambda_2}=1, \lambda_3^2-\frac{6}{\lambda_3}=7$ 得 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$。所以 与 $A, A^{-1}, B$ 相似的对角形矩阵分别为…。

5．已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$。

（1） 写出二次型的矩阵。

（2） 用正交线性替换 $X=QY$ 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形。

（3） 求实对称矩阵 B 使得 $A=B^3$。

解 （1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$。

（2）使用实对称矩阵对角化的方法，具体略。

（3）因为 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$，令 $H=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，则有

$A=Q\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}Q^T=QH^3Q^T=(QHQ^T)(QHQ^T)(QHQ^T)$。令 $B=QHQ^T=(?)$，则 $A=B^3$ 且 B 为实对称矩阵。

**三、证明题**

1．设$A$是实对称矩阵，$B$是正定矩阵。求证$AB$的特征值全是实数。

**证：**因为$B$是正定矩阵，所以存在可逆矩阵$C$使得$B=C^{\mathrm{T}}C$。所以$AB$与矩阵$C(AB)C^{-1}=CAC^{\mathrm{T}}$相似。因为$A$是实对称矩阵，所以$CAC^{\mathrm{T}}$是实对称矩阵，所以$CAC^{\mathrm{T}}$的特征值全是实数，从而$AB$的特征值全是实数。

2. 设$A$是$m\times n$矩阵，$B$是$n\times t$矩阵，$r(B)=t$。令$C=(A,B)_{m\times(n+t)}$，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$\cdots$，$X^{(r)}$为齐次线性方程组$CX=0$的一个基础解系，设$X^{(i)}=\begin{pmatrix}X_0^{(i)}\\X_1^{(i)}\end{pmatrix}$，这里 $X_0^{(i)}$为$X_1^{(i)}$的前$n$个元素。求证$X_0^{(1)}$，$X_0^{(2)}$，$\cdots$，$X_0^{(r)}$线性无关。

**证二：**

因为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$\cdots$，$X^{(r)}$为齐次线性方程组$CX=0$的一个基础解系，

所以$CX^{(i)}=(A,B)X^{(i)}=0$，即$(A,B)X^{(i)}=(A,B)\begin{pmatrix}X_0^{(i)}\\X_1^{(i)}\end{pmatrix}=AX_0^{(i)}+BX_1^{(i)}=0$。从而有

$$AX_0^{(i)}=-BX_1^{(i)}$$

若

$$k_1X_0^{(1)}+k_2X_0^{(2)}+\cdots+k_rX_0^{(r)}=0\quad(*)$$

则$k_1AX_0^{(1)}+k_2AX_0^{(2)}+\cdots+k_rAX_0^{(r)}=0$。而

$$k_1AX_0^{(1)}+k_2AX_0^{(2)}+\cdots+k_rAX_0^{(r)}=-k_1BX_1^{(1)}-k_2BX_1^{(2)}-\cdots-k_rBX_1^{(r)}$$

则$-k_1BX_1^{(1)}-k_2BX_1^{(2)}-\cdots-k_rBX_1^{(r)}=0$，即

$$B\left(k_1X_1^{(1)}+k_2X_1^{(2)}+\cdots+k_rX_1^{(r)}\right)=0$$

因为$r(B)=t$，则齐次线性方程组$BX=0$只有零解，即

$$k_1X_1^{(1)}+k_2X_1^{(2)}+\cdots+k_rX_1^{(r)}=0$$

结合$(*)$式可得

$$k_1\begin{pmatrix}X_0^{(1)}\\X_1^{(1)}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}X_0^{(2)}\\X_1^{(2)}\end{pmatrix}+\cdots+k_r\begin{pmatrix}X_0^{(r)}\\X_1^{(r)}\end{pmatrix}=0$$

即

$$k_1X^{(1)}+k_2X^{(2)}+\cdots+k_rX^{(r)}=0$$

由于$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$\cdots$，$X^{(r)}$是$CX=0$的一个基础解系，则$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$\cdots$，$X^{(r)}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，因此$X_0^{(1)}$，$X_0^{(2)}$，$\cdots$，$X_0^{(r)}$线性无关。