浙江大学 2006-2007 秋冬 线性代数

一、填空题（20 分）

1. 设 A，B，C 是 n 阶矩阵，且 $AB = BC = CA = E$，则 $A^2 + B^2 + C^2 =$____________。

解 因为 $AB = BC = E$，则 $A = B^{-1}$，$C = B^{-1}$，从而 $A = C$。又因为 $AC = E$，则 $A^2 = E$。同理可得 $B^2 = C^2 = E$，因此 $A^2 + B^2 + C^2 = 3E$

2. 设 n 阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, n), b_j \neq 0, (j = 1, 2, \cdots, n)$，

则 $r(B) =$____________。

解 $B = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]$，因为 $a_i \neq 0$，$b_i \neq 0$，$(i = 1，2，\cdots，n)$，

则 $r\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = r([b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]) = 1$，且 $r(B) \geq 1$。又因为 $r(B) \leq r\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = 1$，所以 $r(B) = 1$。

说明 此时不必要求 $a_i \neq 0$，$b_i \neq 0$，$(i = 1，2，\cdots，n)$，只要 $a_1，a_2，\cdots，a_n$ 中至少有一个不为零，并且 $b_1，b_2，\cdots，b_n$ 中也至少有一个不为零即可。

记住这个结论，经常要用到这个结论。

3. 设 A 是 n 阶矩阵，且 $A^2 + 2A - 4E = 0$, 则 $(A - E)^{-1} =$__________________。

4. 设 $\alpha_1 = (1, 0, -1, 2)^T, \alpha_2 = (2, -1, -2, 6)^T, \alpha_3 = (3, 1, a, 4)^T, \beta = (4, -1, -5, 10)^T$，已知 β 不能由

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则 $a =$__________________。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$，则当 C=_________时，$C^TAC = B$。

解 记$X=[x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$，$Y=[y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$，矩阵 A所对应的二次型为$f(x_1, x_2, x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2$，令

$$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_3 \\ x_3=y_2 \end{cases}$$

即$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y=CY$，则$f(x_1, x_2, x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACY=a_1y_1^2+a_3y_2^2+a_2y_3^2=Y^{\mathrm{T}}BY$

因此$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$。

二、解答题

1. （10 分）设$\alpha=(1,0,2,4)^T, \beta=(2,-1,3,-1)^T$， $A=\alpha\beta^T$，计算$|2E-A|$。

解 因为$\beta\alpha=2$，$A\alpha=(\alpha\beta)\alpha=\alpha(\beta\alpha)=4\alpha$，所以 4 是$A$的特征值。又因为$r(A)=1$，则$|A|=0$，由此可知 0 是$A$的特征值，且所对应的齐次线性方程组$-AX=0$的基础解系向量个数为 4-1=3，这说明 0 是$A$的特征多项式的三重根。所以$2E-A$特征值分别为：

$\lambda_1=2-4=-2$

$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2-0=2$

因此$|2E-A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=-16$

2. （10 分）设 3 阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且适合$2A^*B-AB=2E+A$，求矩阵 B。

3. （15 分）问 k 为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$有唯一解、无解、无穷多解？在有解的情况下，求出其全部解。

4. （15 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$。

   （1）写出该二次型的矩阵；（2）该二次型是否是正定二次型；（3）用非退化线性替换$X=CY$化该二次型为标准型，并写出所用的线性替换。

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，特征值$1,-1,-1$，属于特征值1的特征向量为$\beta=(1,0,-1)^T$，求

   （1） 属于特征值-1的所有特征向量；（2）矩阵 A。 （3） 求A^{10}。

三、证明题：

1. （7 分）设 A 是 n 阶矩阵，满足$|A|\neq 0$，求证：（1）$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，（2）$\left(A^*\right)^*=\left|A\right|^{n-2}A$。

2. （8 分）设矩阵 A 与对角阵$diag(1,2,4)$相似，$B=(A-E)(A-2E)(A-4E)$，求证 B＝0。