第三章 刚体力学基础 流体力学简介

(§3.4 - §3.5)

本课时教学基本要求

1、掌握刚体的动能和重力势能的计算，并能在有刚体转动等问题中正确地应用动能定理和机械能守恒定律。
2、理解刚体绕定轴转动的角动量和角动量守恒定律。
3、掌握上述定理和定律的应用。

$$M = J\beta = J\frac{d\omega}{dt}$$

讨论：

（1） M 一定，$J\uparrow \longrightarrow \beta\downarrow$

转动惯量是转动惯性大小的量度；

（2）问:J 的大小与哪些因素有关?

转轴位置，质量分布

（3）M 的符号：使刚体向规定的转动正方向加速的力矩为正；

转动定律的应用：

对刚体的动力学问题

$M = J\beta$ 与 $F = ma$ 联合起来运用

【解题步骤】：

（1） 确定研究对象，进行受力分析，画出隔离体受力图；

（2） 建立坐标系，列方程。注意a、β的方向。

（3） 对质点的平动用牛顿第二定律，对刚体的转动用转动定律，列联立方程；

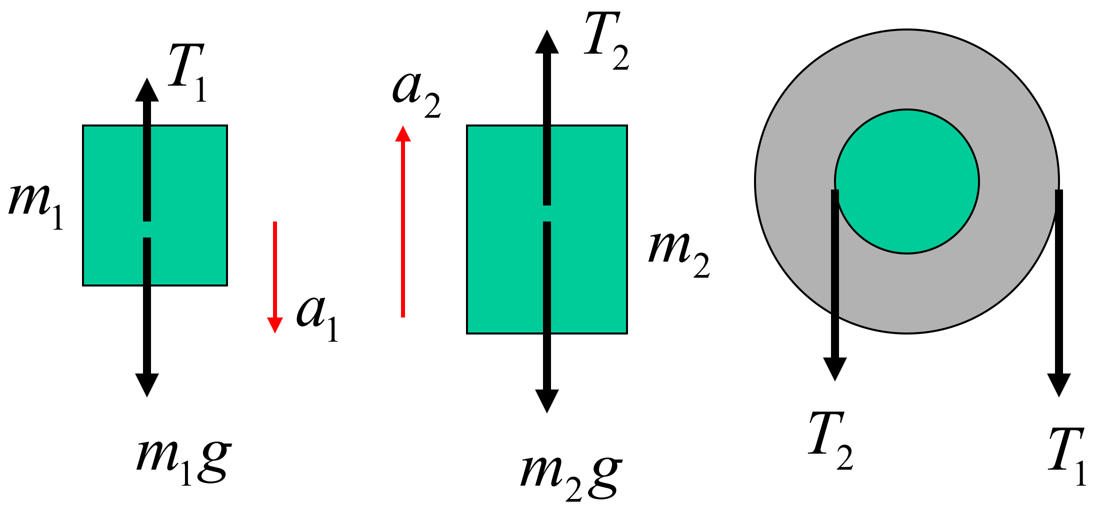
（4） 由物体之间的连接关系及角量与线量的对应关系，列出补充方程；

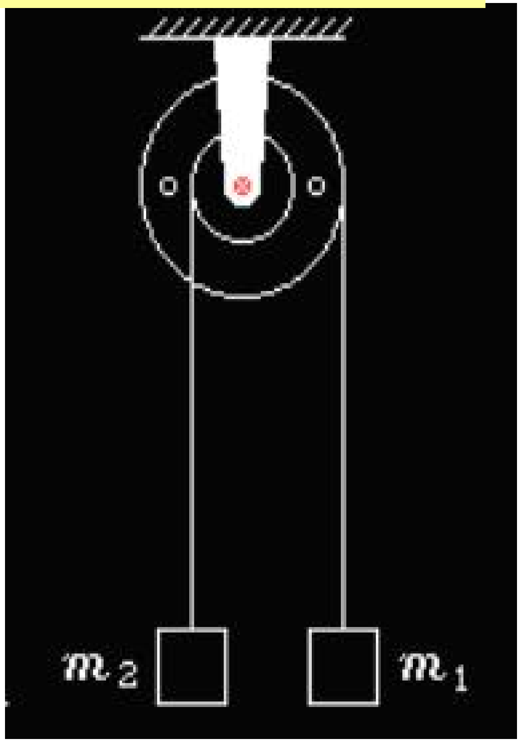
（5） 求解方程，并分析结果的合理性与物理意义。

【例题】　如图所示，一个组合轮由两个匀质的圆盘固接而成，大盘质量 M_1=6kg，半径 R=0.10m，小盘的质量 M_2=4kg，半径r=0.05m。两盘边缘上分别绕有细绳，细绳的下端各悬挂质量为 $m_1=m_2$=2kg 的物体，试求：

①两物体 m_1、m_2 的加速度大小；

②两绳子中的张力。

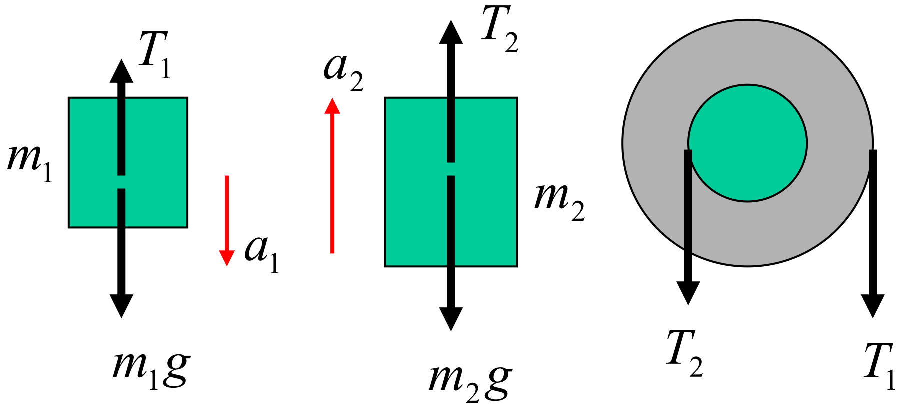




$$m_1g - T_1 = m_1a_1 ---(1)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2 ---(2)$$

$$T_1R - T_2r = J\beta ---(3)$$



$$J = \frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2r^2 ---(4)$$

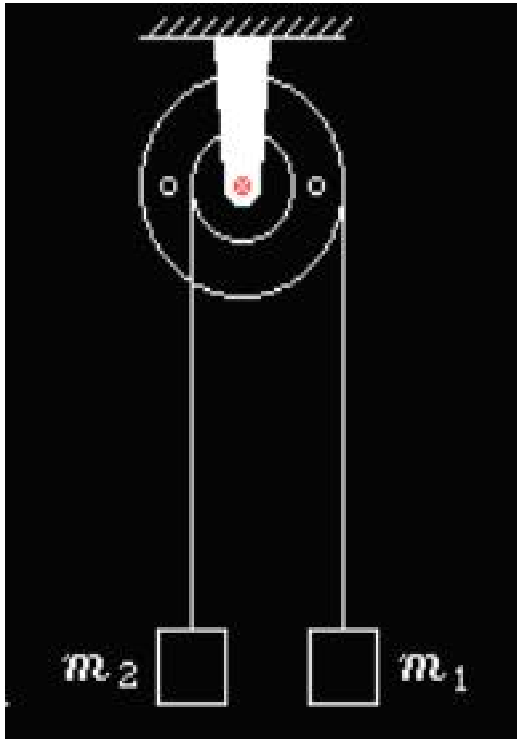
$$a_1 = R\beta ---(5)$$

$$a_2 = r\beta ---(6)$$

解上述联立方程可得

$$a_1 = 1.63\ m \cdot s^{-2}, a_2 = 0.82\ m \cdot s^{-2}$$

$$T_1 = 16.3\ N, T_2 = 21.2\ N$$



§ 3.4 刚体定轴转动的动能定理

一、 刚体定轴转动中的功和能

1. 力矩作功

角位移$\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$，元路程$\mathbf{ds}$，元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$

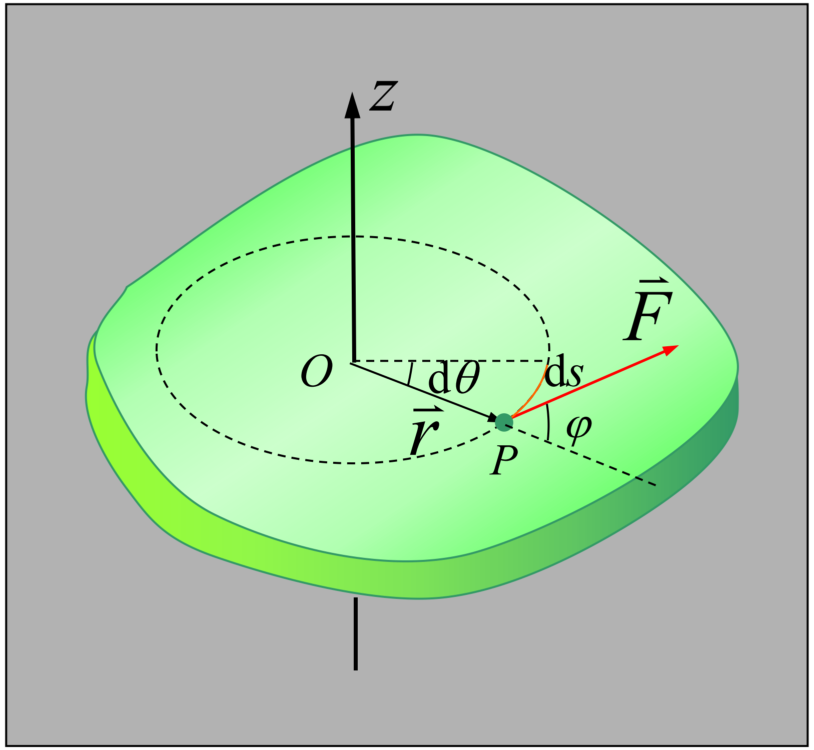
力 $\vec{F}$ 在元路程$\mathrm{d}s$上的元功

$$\mathbf{d}A=\vec{F}\cdot\mathbf{d}\vec{r}\quad=F_{\tau}\mathbf{d}s$$

$$=F_{\tau}r\mathrm{d}\theta$$

$$M=F_{\tau}r$$

$$=M\mathrm{d}\theta$$



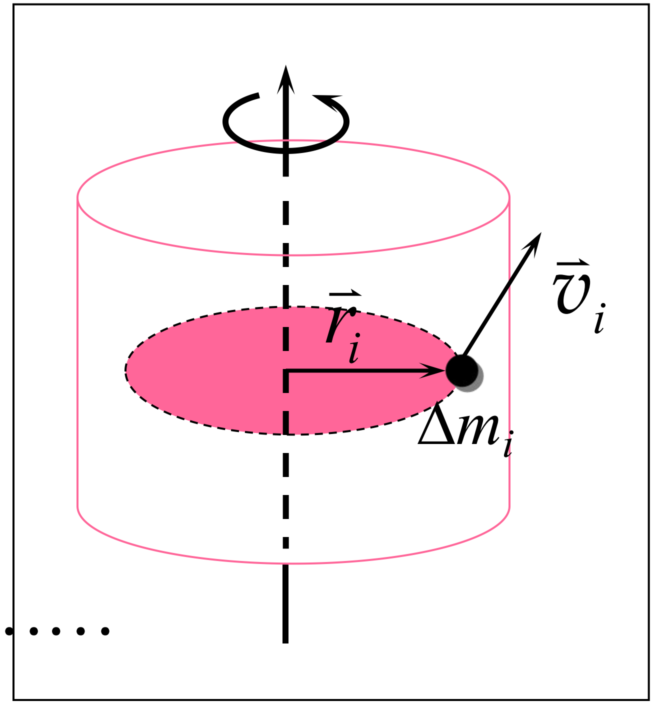
力矩对刚体所作的功：

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta$$

2. 刚体定轴转动的动能

第 i 个质元的动能：

$$\Delta E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^{2}=\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^{2}\omega^2 \qquad v=r\omega$$



整个刚体的转动动能：

$$E_k=\frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^{2}+\frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^{2}+\frac{1}{2}\Delta m_3 v_3^{2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\Delta m_1 r_1^{2}\omega^2+\frac{1}{2}\Delta m_2 r_2^{2}\omega^2+\frac{1}{2}\Delta m_3 r_3^{2}\omega^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 \quad =\frac{1}{2}J\omega^2$$

二、刚体定轴转动的动能定理

$$\boxed{M = J\beta = J\frac{d\omega}{dt}} \qquad \boxed{Md\theta = J\frac{d\omega}{dt}d\theta = J\omega d\omega}$$

$$A = \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

在定轴转动中，合外力矩作功等于刚体转动动能的增量

含刚体的功能原理
(质点系＋刚体）

$$\boxed{\begin{gathered} A_{外} + A_{非内} = E - E_0 \\ (E = E_{k平} + E_{k转} + E_p) \end{gathered}}$$

含刚体的机械能守恒定律
(质点系＋刚体）

$$\boxed{\begin{gathered} A_{外} = 0, A_{非内} = 0, \\ E = E_0 \end{gathered}}$$

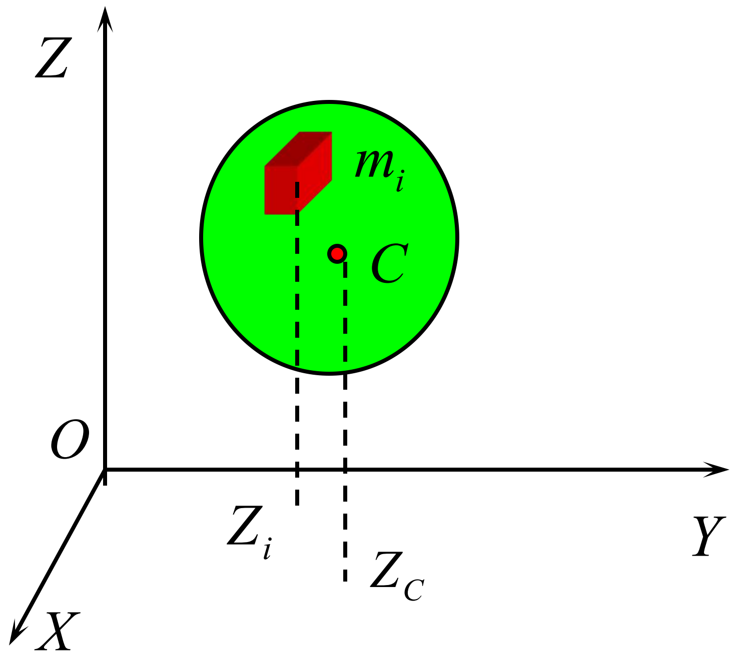
3. 刚体的重力势能

$$E_p = \sum m_i g z_i$$

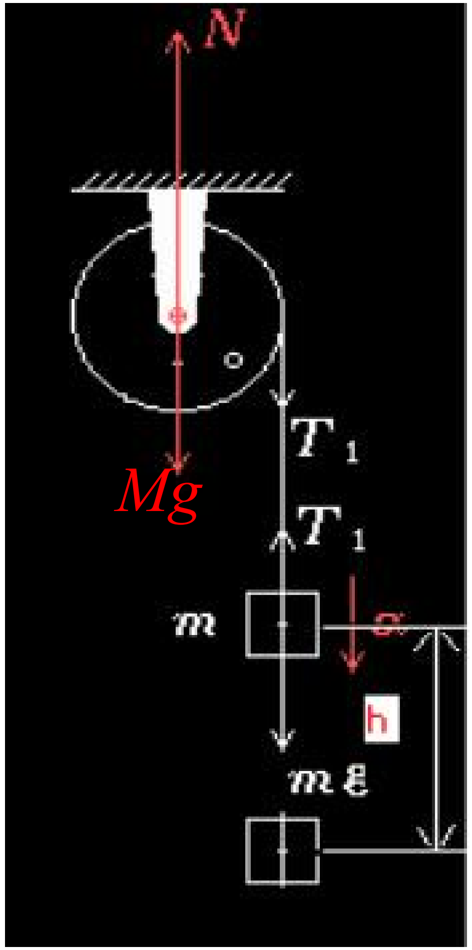
$$= mg\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

$$= mgz_C$$

刚体有一质量中心，刚体的重力势能为其质量集中于质心点的重力势能



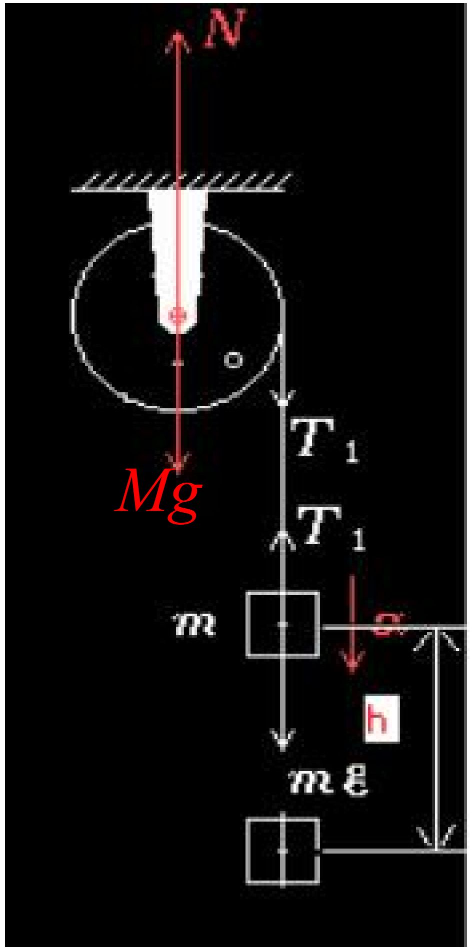
例1. 一个质量为M、半径为R的定滑轮（当作均匀圆盘）上面绕有细绳，绳的一端固定在滑轮边上，另一端挂一质量为m的物体而下垂。忽略轴处摩擦，求物体m由静止下落高度h时的速度和此时滑轮的角速度。



解法一：用动力学方法先计算物体和圆盘的加速度和角加速度，然后用运动学方法计算速度（略）。

解法二：用动能定理来解

$$对M:\int_0^{\Delta\theta}\mathrm{T}_1Rd\theta = T_1R\Delta\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad J=\frac{1}{2}MR^2$$



$$对m：(mg-T_1)h=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{相互关系: h=R\Delta\theta \quad v=R\omega}$$

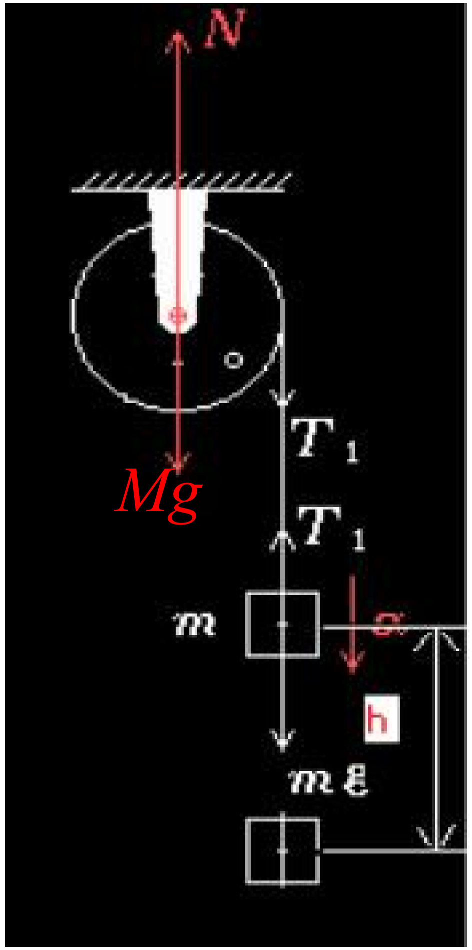
$$v=\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} \qquad \omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

解法三：用机械能守恒定律来解

以滑轮、绳、物体和地球为系统，只有重力（保守内力）作功，系统机械能守恒。

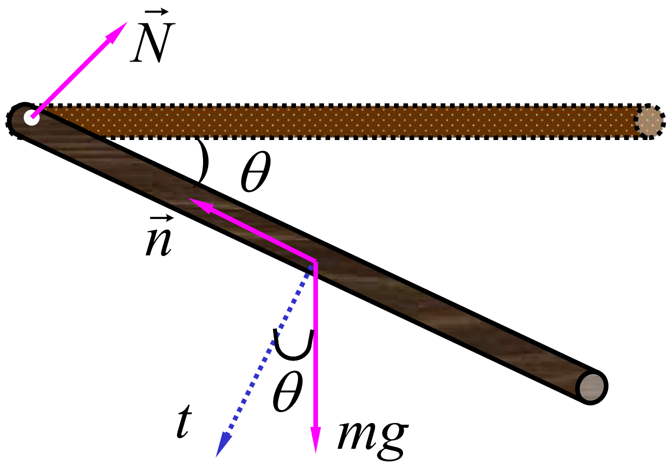
$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2\text{-}mgh=0 \quad \text{其中} J=\frac{1}{2}MR^2 \\ v=\omega R \end{cases}$$

$$v=\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} \qquad \omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$



例2：已知杆质量m，长l，绕一端点转动，初水平静止，求位于任意角θ时，ω、β为多少？

解法2：用刚体定轴转动的动能定理



力矩作功：$A=\int_0^{\theta} M d\theta$

$$=\int_0^{\theta}\frac{mgl}{2}\cos\theta d\theta=\frac{mgl}{2}\sin\theta$$

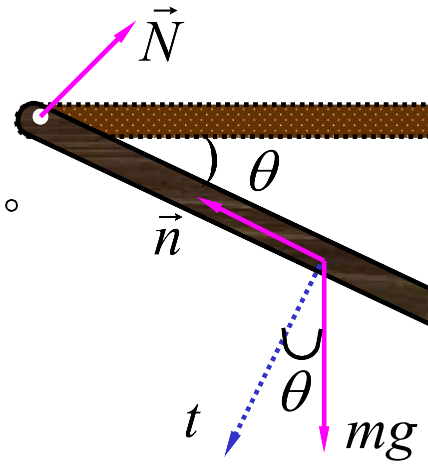
动能增量：$\frac{1}{2}J\omega^2-0=\frac{mgl}{2}\sin\theta$

$$\omega^2=\frac{3g}{l}\sin\theta \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta}$$

对上式求全微分 $2\cancel{\omega}\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g}{l}\cos\theta\cancel{\frac{d\theta}{dt}}$ $\quad\left(\frac{d\theta}{dt}=\omega\right)$

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

解法3：用机械能守恒求解



研究对象：棒和地组成的系统。

在转动过程中，只有保守内力（重力）作功。

水平状态机械能 $\quad E_{初}=0$

θ角时机械能 $\quad E_{末}=\dfrac{J}{2}\omega^2-mg\dfrac{l}{2}\sin\theta$

由机械能守恒可求得 $\quad \dfrac{J}{2}\omega^2-mg\dfrac{l}{2}\sin\theta=0$

$$\omega^2=\frac{3g}{l}\sin\theta \;\Rightarrow\; \omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta}$$

对上式求全微分 $\quad 2\cancel{\omega}\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{3g}{l}\cos\theta\cancel{\dfrac{d\theta}{dt}} \qquad \left(\dfrac{d\theta}{dt}=\omega\right)$

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

§ 3.5 定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

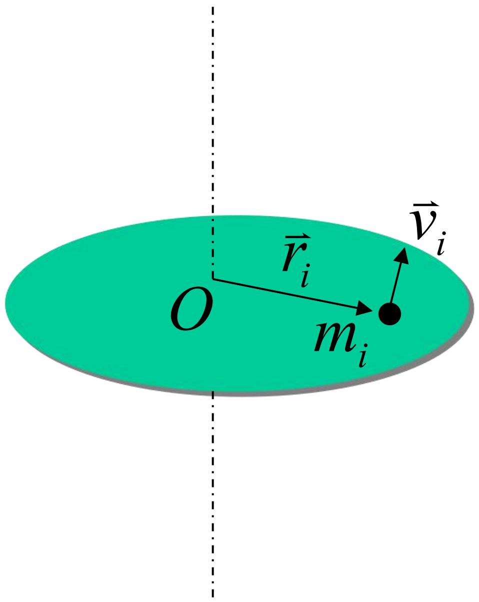
一、刚体对转轴的角动量：

刚体可看成许多的质点组成，其角动量如何表示？

对每一质点有：

$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$，故 $L_i = m_i v_i r_i$

$$L = \sum_i L_i = \omega \left(\sum_i m_i r_i^2\right) = J\omega$$



$$\boxed{L = J\omega}$$

二、刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

$$M=\frac{d(J\omega)}{dt}=\frac{dL}{dt}$$

$$\int_0^t M\mathrm{d}t=L-L_0=J\omega-J_0\omega_0$$

$$M=0 \qquad L=J\omega=\text{恒量}$$

刚体所受的合外力矩等于零时，刚体的角动量保持守恒。

讨论：

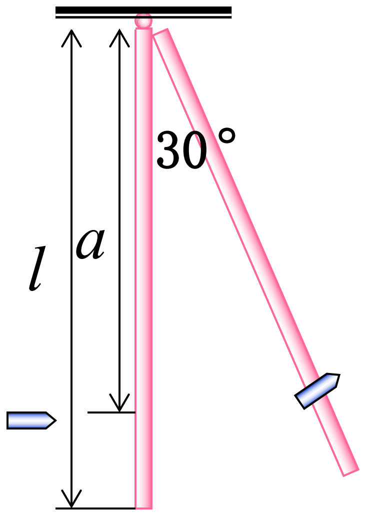
1.对于一个定轴转动的刚体，转动惯量J一定，角动量守恒表现为角速度ω保持不变。

2. 非刚体，则有$J\uparrow$，$\omega\downarrow$或者$J\downarrow$，$\omega\uparrow$，但$J_1\omega_1=J_2\omega_2$

生活中的例子：芭蕾舞、滑冰、跳水

角动量守

例3　一长为l，质量为m_0的杆可绕支点O自由转动。一质量为m，速度为v的子弹射入距支点为a的棒内。若棒偏转角为30° 。问子弹的初速度为多少。



解：角动量守恒：

$$mva = \left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega^2 = mga(1-\cos 30°) + m_0 g\frac{l}{2}(1-\cos 30°)$$

$$v = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)(m_0 l + 2ma)\left(m_0 l^2 + 3ma^2\right)}$$

当质点与定轴刚体碰撞时，一般动量不守恒，角动量守恒。

碰撞瞬间，m与M系统所受外力：

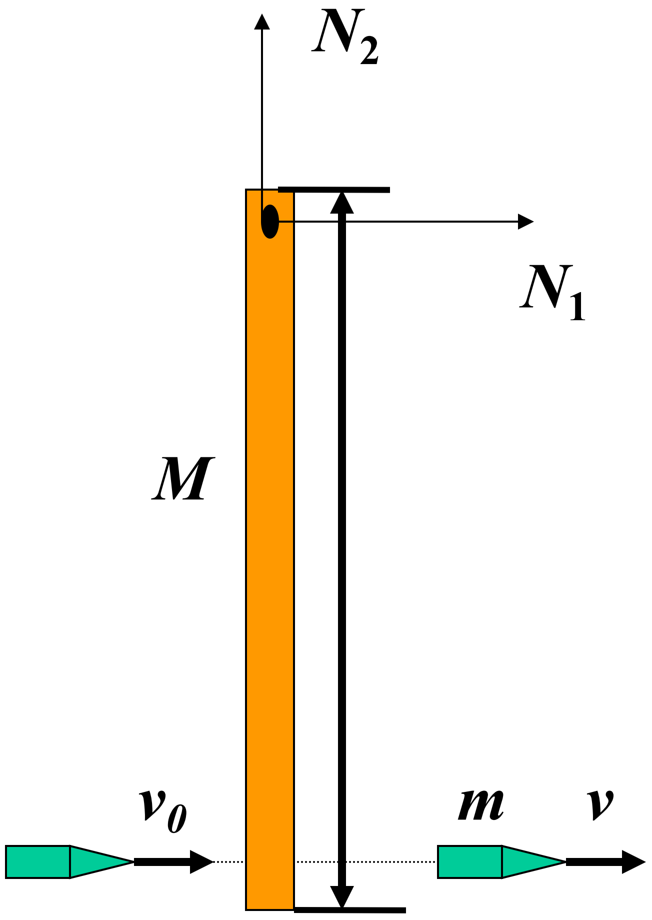
$N_2 > (m+M)g,\ N_1 \neq 0$

$\therefore$系统碰撞过程中动量不守恒，

动量的水平分量也不守恒。

但这些力都通过转轴，对轴的$\Sigma M = 0$.

$\therefore$对轴的角动量守恒。



例：细棒m_1，l静止放在摩擦系数为μ的水平桌上，可绕O旋转，$J=\dfrac{1}{3}m_1l^2$.

小球以$\vec{v}_1$垂直击另一端，并以$\vec{v}_2$反向弹回。

求：（1）碰后棒角速度；（2）开始转动到停止所需时间。

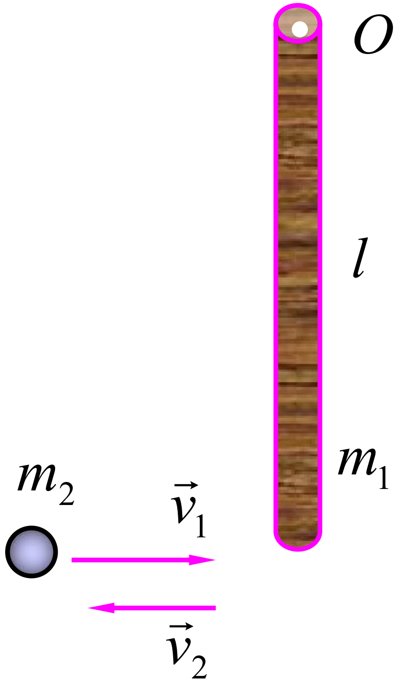
解：(1)碰撞过程中，角动量守恒（向外为转轴正向）

$$m_2v_1l=-m_2v_2l+J\omega$$

$$\omega=\frac{3m_2(v_1+v_2)}{m_1l}$$

(2)对棒，用角动量定理（设摩擦力矩M_r）

$$\int_0^t M_r dt=0-J\omega=-\frac{1}{3}m_1l^2\omega$$



摩擦力矩 $M_r=-\mu m_1g\dfrac{l}{2}$(相当于 m_1集中于 $\dfrac{l}{2}$处)

解得 $$t=2m_2\frac{v_1+v_2}{\mu m_1g}$$

关于摩擦力矩

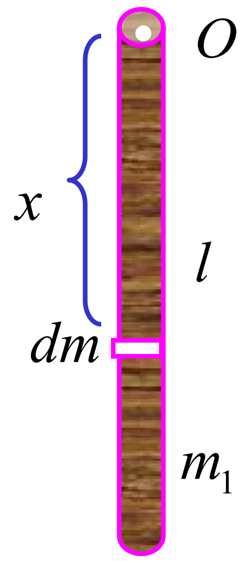
$$\text{在}x\text{处取}dm\text{，}\quad dm=\frac{m_1}{l}dx$$

$$\text{元摩擦力}\qquad df=-\mu dmg$$

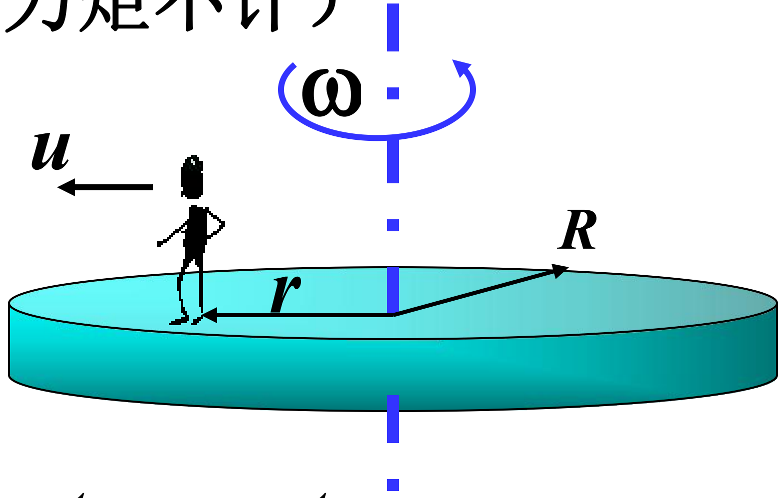
$$\text{元摩擦力矩}\qquad dM_r=df\cdot x=-\mu dmg\cdot x$$

总摩擦力矩

$$M_r=\int dM_r=\int_0^l-\mu\frac{m_1}{l}gxdx=-\mu\frac{m_1g}{l}\frac{l^2}{2}=-\mu m_1g\frac{l}{2}$$



例．如图，质量为 M 半径为 R 的转台初始角速度为 ω_0，有一质量为m 的人站在转台的中心，若他相对于转台以恒定的速度 u 沿半径向边缘走去，求人走了t 时间后，转台转过的角度。（竖直轴所受摩擦阻力矩不计）



解：设 t 时刻人走到距转台中心 $r=ut$ 处，转台的角速度为ω．

人与转台系统对轴角动量守恒

$$\frac{M}{2}R^2\omega_0=(\frac{M}{2}R^2+mu^2t^2)\omega$$

$$\omega=\frac{\omega_0}{1+\frac{2mu^2t^2}{MR^2}}$$

$$\because\quad \omega=d\theta/dt$$

$$\therefore\quad \theta=\int_0^\theta d\theta=\int_0^t\omega dt=\int_0^t\frac{\omega_0}{1+\frac{2mu^2t^2}{MR^2}}dt$$

$$\theta=\frac{R\omega_0}{u(\frac{2m}{M})^{1/2}}\arctan[\frac{ut(\frac{2m}{M})^{1/2}}{R}]$$

质点运动和刚体定轴转动的比较（详见表3.2)

质点的运动		刚体的定轴转动	
位移	$\Delta \boldsymbol{r}$	角位移	$\Delta\theta$
速度	$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	角速度	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$
加速度	$\boldsymbol{a}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$	角加速度	$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}$
力	$\boldsymbol{F}$	力矩	$M=Fr\sin\varphi$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2 dm$
运动定律	$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$	转动定律	$M=J\beta$
动量	$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$	角动量	$L=J\omega$
动量定理	$\int_{t}^{t}\boldsymbol{F}dt=m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0$	角动量定理	$\int_{t_0}^{t}Mdt=J\omega-J\omega_0$
动量守恒	$\Sigma m_i\boldsymbol{v}_i=$常矢量	角动量守恒	$\Sigma J\omega=$常量
动能	$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_k=\dfrac{1}{2}J\omega^2$
力的功	$A_{AB}=\int_{r_A}^{r_B}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$	力矩的功	$A_{AB}=\int_{\theta_A}^{\theta_B}Md\theta$
动能定理	$A=\Delta E_k$	动能定理	$A=\Delta E_k$
机械能守恒	$E=E_k+E_p=$常量	机械能守恒	$E=E_k+E_p=$常量（此时 $\dfrac{1}{2}J\omega^2$ 只是 E_k 的一个组成部分）

作业：

3.25

3.29

3.39

3.41