

# 第 13 章

# 达朗贝尔原理 与动静法

修鹏 副教授 博导  
浙大航空航天学院应用力学研究所  
邮箱: [xiupeng2011@zju.edu.cn](mailto:xiupeng2011@zju.edu.cn)



# 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理提供了研究动力学问题的一个新的普遍方法，即用静力学中研究平衡问题的方法来研究动力学问题，因此又称为动静法。

- 达朗贝尔 (d'Alembert, 1717-1783, FR)

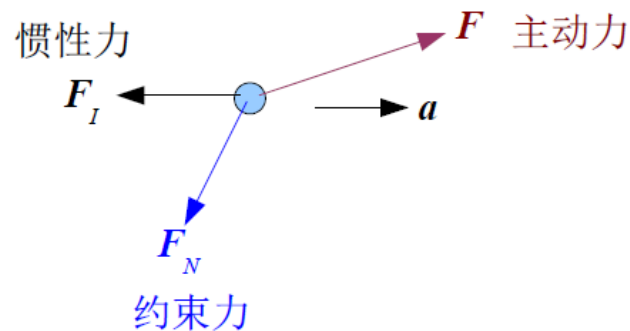


- 惯性力的引入

$$F_I \longleftarrow \bullet \longrightarrow a$$

$$F_I = -ma$$

- 达朗贝尔原理 (动静法)



$$F_I + F + F_N = 0$$

达朗贝尔原理从形式上将动力学问题转化为静力学问题

力学专著《动力学》为拉格朗日构建分析力学作理论准备

第一次将动力学和静力学按统一的观点来处理。



# 达朗贝尔：投身启蒙运动的科学家

- 达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert, 1717~1783），法国力学家、数学家，哲学家。又译达朗伯。他是圣让勒隆教堂附近的一个弃婴，被一位玻璃匠收养。故取名让·勒隆，后自己取姓为达朗贝尔。
- 从小在教会学校受教育，打下了坚实的数理基础。
- 投身启蒙运动：1746年，达朗贝尔与当时著名哲学家狄德罗一起编纂了法国《百科全书》，并负责撰写数学与自然科学条目，是法国百科全书派的主要首领。在百科全书的序言中，达朗贝尔表达了自己坚持唯物主义观点、正确分析科学问题的思想。在这一段时间之内，达朗贝尔还在心理学、哲学、音乐、法学和宗教文学等方面都发表了一些作品。
- 在其名著《动力学》中严厉批判莫培督、欧拉所表现出的神学和目的论色彩；其思想影响了其后的拉格朗日。
- 临终时，却因教会的阻挠没有举行任何形式的葬礼。



# 第13章 达朗贝尔原理与动静法

§ 13-1 达朗贝尔原理

§ 13-2 惯性力系的简化

§ 13-3 动静法的应用

§ 13-4 定轴转动刚体的轴承动约束力



# 达朗贝尔原理

## 引言

- 达朗贝尔原理为解决非自由质点系的动力学问题提供了有别于动力学普遍定理的另外一类方法。
- 引进惯性力的概念，将动力学系统的二阶运动量表示为惯性力，进而应用静力学方法研究动力学问题 —— 达朗贝尔原理。
- 达朗贝尔原理在工程上应用广泛一方面广泛应用于刚体动力学求解动约束力；另一方面又普遍应用于弹性杆件求解动应力。
- 达朗贝尔原理为解决非自由质点系的动力学问题提供了一种普遍而有效的方法



# § 13-1 达朗贝尔原理

- 质点达朗贝尔原理
- 质点系达朗贝尔原理



## § 13-1 达朗贝尔原理

### 1. 质点达朗贝尔原理

设质量为 $m$ 的非自由质点 $D$ ，在主动  
力 $F$ 和约束力 $F_N$ 作用下沿曲线运动，

该质点的动力学基本方程为

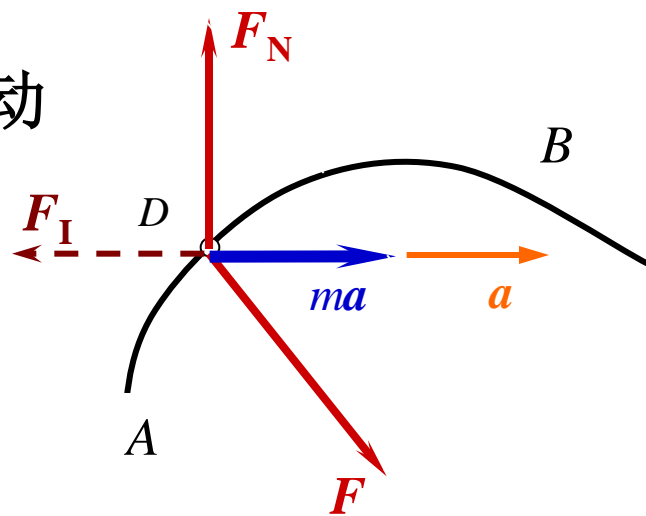
$$ma = F + F_N$$

或 
$$F + F_N + (-ma) = 0$$

引入质点的惯性力 $F_I = -ma$ 这一概念，于是上式可改写成

$$F + F_N + F_I = 0 \quad (14-1)$$

上式表明，在质点运动的每一瞬时，作用于质点的主动  
力、约束力和质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。这就是  
质点的达朗贝尔原理。





## § 13-1 达朗贝尔原理

### 2. 质点系达朗贝尔原理

上述质点的达朗贝尔原理可以直接推广到质点系。将达朗贝尔原理应用于每个质点，得到 $n$ 个矢量平衡方程。

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni} + \mathbf{F}_{Ii} = \mathbf{0} \quad (14-2)$$

这表明，在质点系运动的任一瞬时，作用于每一质点上的主动力、约束力和该质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。

这就是质点系的达朗贝尔原理。



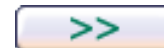
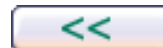
## § 13-1 达朗贝尔原理

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni} + \mathbf{F}_{Ii} = \mathbf{0} \quad (14-2)$$

对于所讨论的质点系，有 $n$ 个形式如（14-2）的平衡方程，即有 $n$ 个形式上的平衡力系。将其中任何几个平衡力系合在一起，所构成的任意力系仍然是平衡力系。根据静力学中空间任意力系的平衡条件，有

$$\sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{F}_{Ni} + \sum \mathbf{F}_{Ii} = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{Ni}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{Ii}) = \mathbf{0} \quad (14-3)$$



## § 13-1 达朗贝尔原理

$$\sum F_i + \sum F_{Ni} + \sum F_{Ii} = 0 \quad (14-3)$$

$$\sum M_O(F_i) + \sum M_O(F_{Ni}) + \sum M_O(F_{Ii}) = 0$$

上式表明，在任意瞬时，作用于质点系的主动动力、约束力和该点的惯性力所构成力系的主矢等于零，该力系对任一点  $O$  的主矩也等于零。

考虑到式 (14-3) 中的求和可以对质点系中任何一部分进行，而不限于对整个质点系，同时注意，若对系统求和，在求和过程中所有内力都将自动消去。

达朗贝尔原理提供了按静力学平衡方程的形式给出质点系动力学方程的方法，这种方法称为动静法。这些方程也称为动态平衡方程。



## § 13-2 惯性力系的简化



## § 13-2 惯性力系的简化

### 1. 惯性力系的简化

对于作任意运动的质点系，把实际所受的力和虚加惯性力各自向任意点 $O$ 简化后所得的主矢、主矩分别记作 $F_R$ 、 $M_O$ 和 $F_{IR}$ 、 $M_{IO}$ 。于是，由力系平衡条件，可得

$$F_R + F_{IR} = 0, \quad M_O + M_{IO} = 0$$

#### (1) 惯性力系的主矢

由质心运动定理有  $F_R = m_R a_C$ ，得

$$F_{IR} = -m_R a_C \quad (14-4)$$

即，质点系惯性力的主矢恒等于质点系总质量与质心加速度的乘积，而取相反方向。



## § 13-2 惯性力系的简化

### (2) 惯性力系的主矩

- 对任意固定点

由对任意固定点 $O$ 的动量矩定理有  $M_O = \frac{dL_O}{dt}$

代入  $M_O + M_{IO} = 0$  得  $M_{IO} = -\frac{dL_O}{dt}$  (14-5)

- 对固定轴

现将上式两端投影到任一固定轴 $Oz$ 上, 得

$$M_{Iz} = -\frac{dL_z}{dt} \quad (14-6)$$

上式表明: 质点系的惯性力对于任一固定点 (或固定轴) 的主矩, 等于质点系对于该点 (或该轴) 的动量矩对时间的导数, 并冠以负号。

## § 13-2 惯性力系的简化

### ● 对质心点

利用相对于质心的动量矩定理，可以得到质点系的惯性力对质心 $C$ 的主矩表达式

$$\boldsymbol{M}_{IC} = -\frac{d\boldsymbol{L}_C^r}{dt} \quad (14-7)$$

### ● 对质心轴

上式对通过质心 $C$ 的某一平移轴 $Cz'$ 上的投影表达式为

$$M_{Iz'} = -\frac{dL_{z'}^r}{dt} \quad (14-8)$$

上式表明：**质点系的惯性力对质心（或通过质心的平移轴）的主矩，等于质点系对质心（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。**

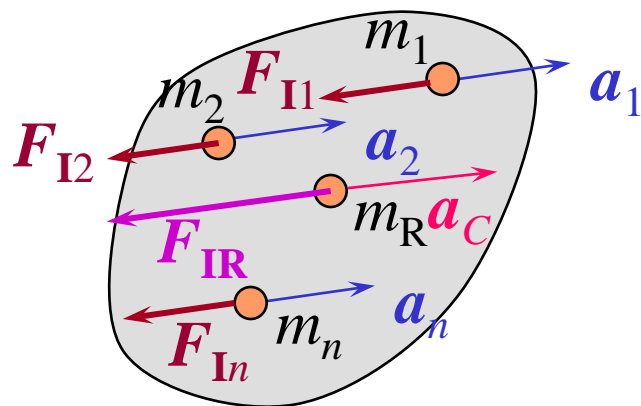


## § 13-2 惯性力系的简化

### 2. 刚体在各种常见运动情况下惯性力主矢和主矩的表达式

(1) 刚体作平移      刚体平移时，惯性力系向质心简化

● 主矢



$$F_{IR} = \sum (-ma)$$

$$= \sum (-m a_C) = -m_R a_C$$

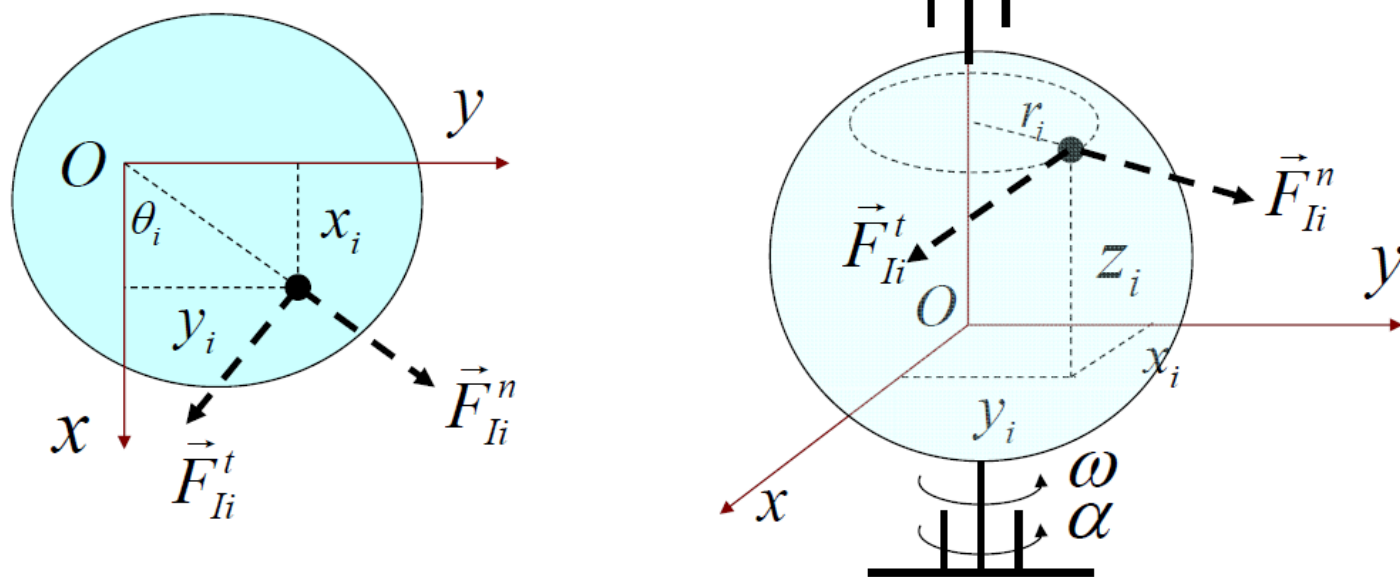
● 主矩  $M_{IC} = 0$

刚体平移时，惯性力系简化为通过刚体质心的合力。

注：刚体平移时，惯性力对任意点的主矩一般不为0；若选质心为简化中心，则主矩为0

(惯性) 力系的简化是向一点简化；刚体定轴转动时，由前面的动量矩定理，只给出了刚体定轴转动时对转轴的动量矩，并没有给出对点的动量矩

## 2. 刚体定轴转动



$$F_{Li}^t = m_i a_i^t = m_i r_i \alpha \quad F_{Li}^n = m_i a_i^n = m_i r_i \omega^2$$

$$\begin{aligned} M_{Ix} &= \sum M_x(\bar{F}_{Li}) = \sum M_x(\bar{F}_{Li}^t) + \sum M_x(\bar{F}_{Li}^n) \\ &= \sum m_i r_i \alpha \cos \theta_i z_i + \sum (-m_i r_i \omega^2 \sin \theta_i z_i) \end{aligned}$$



$$M_{I_x} = \sum m_i r_i \alpha \cos \theta_i z_i + \sum (-m_i r_i \omega^2 \sin \theta_i z_i)$$

$$\cos \theta_i = \frac{x_i}{r_i}, \quad \sin \theta_i = \frac{y_i}{r_i}$$



$$M_{I_x} = \alpha \sum m_i x_i z_i - \omega^2 \sum m_i y_i z_i$$

$$J_{yz} = \sum m_i y_i z_i$$

$$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i$$

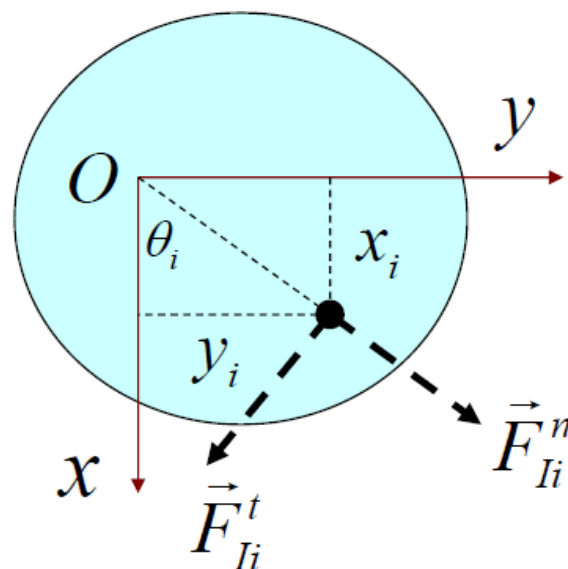
——对于  $z$  轴的惯性积.



$$M_{I_x} = J_{xz} \alpha - J_{yz} \omega^2$$

同理

$$M_{I_y} = J_{yz} \alpha + J_{xz} \omega^2$$



$$M_{Iz} = \sum M_z(\bar{F}_{Ii}^t) + \sum M_z(\bar{F}_{Ii}^n) = \sum -m_i r_{iz} \alpha r_i$$

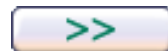
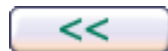
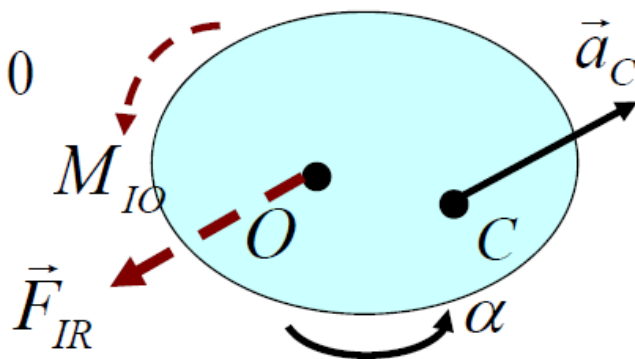
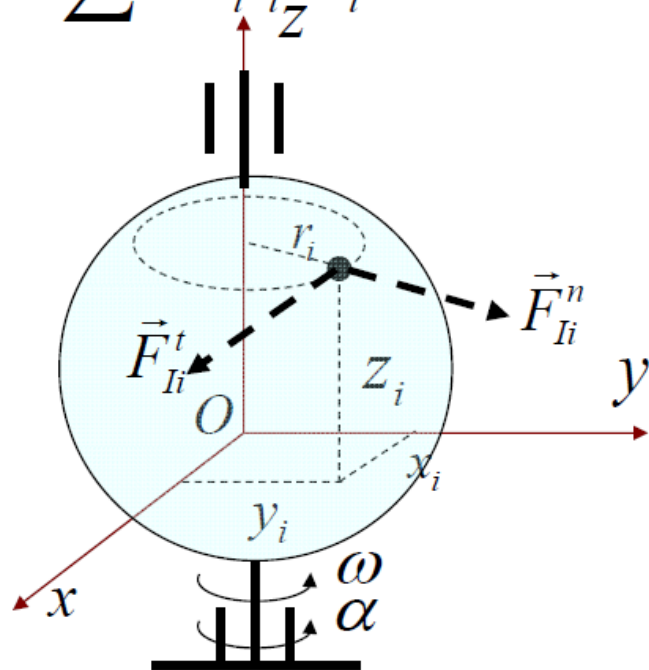
$$= -\left(\sum m_i r_i^2\right) \alpha = -J_z \alpha$$

$$\vec{M}_{IO} = M_{Ix} \vec{i} + M_{Iy} \vec{j} + M_{Iz} \vec{k}$$

如果刚体有质量对称面且  
该面与转动轴垂直, 简化中心取  
此平面与转轴的交点, 则

$$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0, \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$$

$$M_{IO} = M_{Iz} = -J_z \alpha$$



$I_{ij}$ 的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha}(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}z_{\alpha}x_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha}(z_{\alpha}^2 + x_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha}z_{\alpha}x_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{bmatrix}$$

其中对角元 $I_{11}$ 、 $I_{22}$ 和 $I_{33}$ 分别是 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 轴的转动惯量，而非对角元称为惯量积，上式表明惯量张量具有对称性

$$I_{ij} = I_{ji}$$

所以 $I$ 的9个分量中仅6个独立

## § 13-2 惯性力系的简化

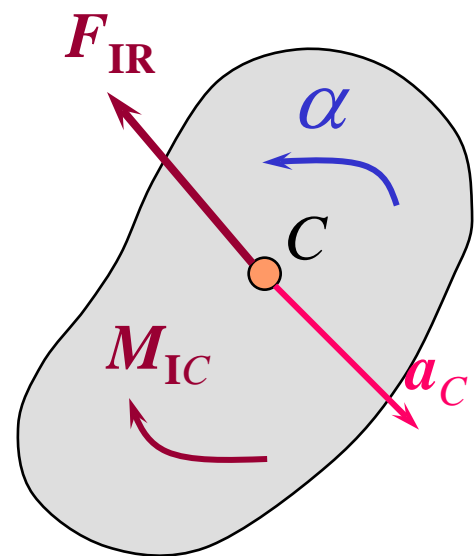
### (3) 刚体作平面运动

若取质心 $C$ 为基点，则刚体的平面运动可以分解为随质心 $C$ 的平移和绕质心（通过质心且垂直于运动平面的轴）的转动。

刚体上各质点的加速度及相应的惯性力也可以分解为随质心的平移和绕质心轴的转动两部分。

于是，此刚体的牵连平移惯性力可合成为作用线通过质心、且在对称面内的一个力 $F_{IR}$ 。

因质心 $C$ 在相对运动的转轴上，故刚体的相对转动的惯性力合成为一力偶。



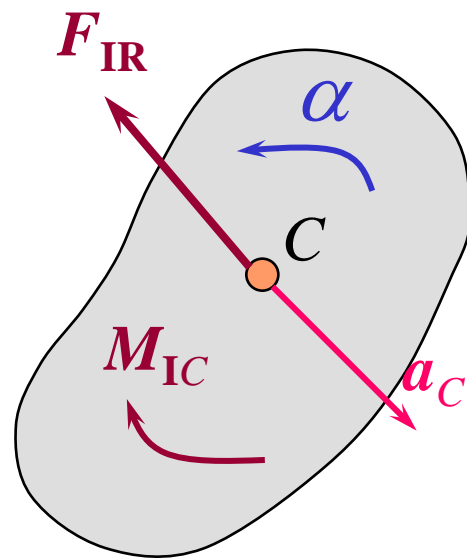
## § 13-2 惯性力系的简化

具有质量对称平面的刚体作平面运动，并且运动平面与质量对称平面互相平行。这种情形下，惯性力系向质心简化的结果得到一个合力和一个合力偶，两者都位于质量对称平面内。

- 主矢

合力的矢量即为惯性力系的主矢，其大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反

$$\mathbf{F}_{IR} = -m_R \mathbf{a}_C$$



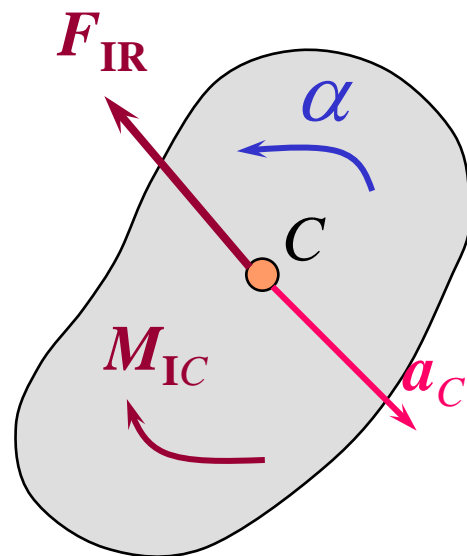


## § 13-2 惯性力系的简化

### ● 主矩

合力偶的力偶矩即为惯性力系的主矩，其大小等于刚体对通过质心的转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反

$$M_{IC} = -J_{Cz'}\alpha$$



## § 13-2 惯性力系的简化

综上所述:

(1) 刚体作平移

向质心简化

● 主矢  $\mathbf{F}_{IR} = \sum (-m_i \mathbf{a}_i) = -m_R \mathbf{a}_C$       ● 主矩  $M_{IC} = 0$

(2) 刚体做定轴转动  
(有质量对称平面)

向固定轴与质量对称平面的交点O  
简化 (亦可向质心简化, 见下页)

● 主矢  $\mathbf{F}_{IR} = -m_R \mathbf{a}_C = -m_R (\mathbf{a}_C^t + \mathbf{a}_C^n)$

● 对交点O的主矩  $M_{IO} = M_{Iz} = -J_z \alpha$

(3) 刚体作平面运动 (平行于质量对称面)

向质心简化

● 主矢  $\mathbf{F}_{IR} = -m_R \mathbf{a}_C$       ● 主矩  $M_{IC} = -J_{Cz'} \alpha$



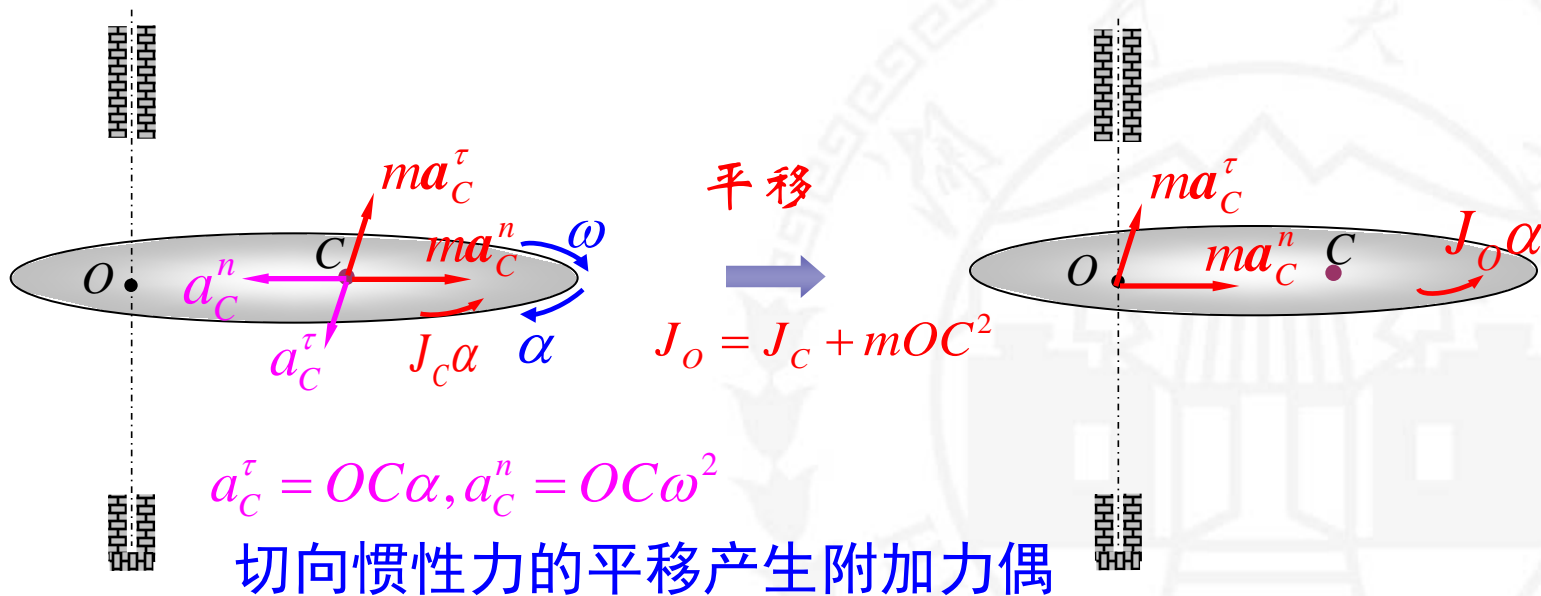


## 3. 定轴转动: (可视为平面运动特例)

若转轴  $\perp$  质量对称面, 即主轴

$$M_{IC} = -J_C \alpha$$

先向对称面简化, 再向质心  $C$  简化。





## 刚体惯性力系的简化

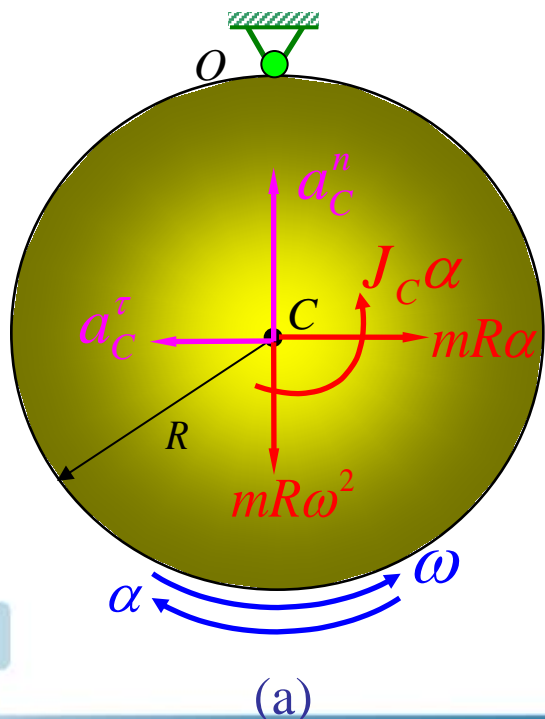


思考

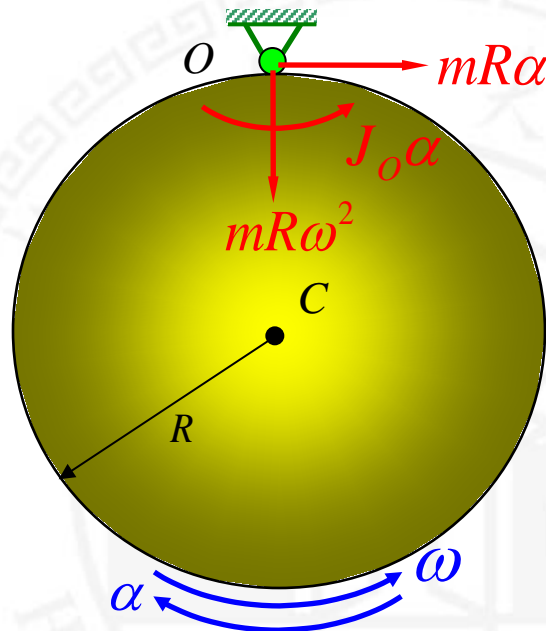
1. 给图(a), (b), (c)中三个均质圆轮(图为其质量对称面)分别加惯性力(已知 $m, R, \omega, \alpha$ )。



答 8 图(a)圆轮定轴转动, 向质心简化:



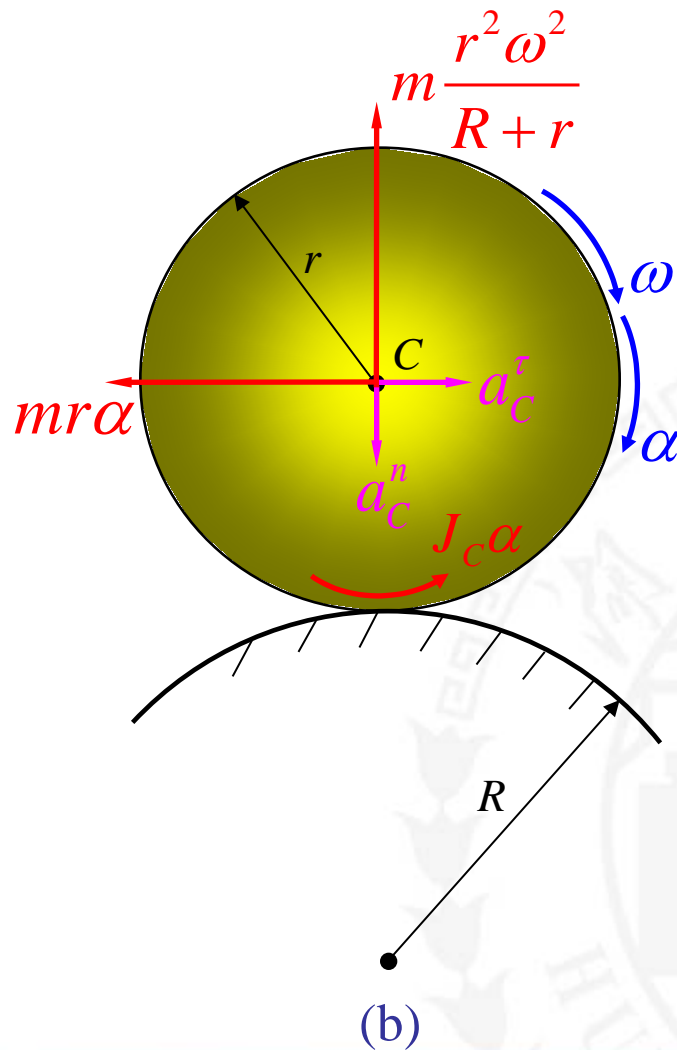
向轴O简化:





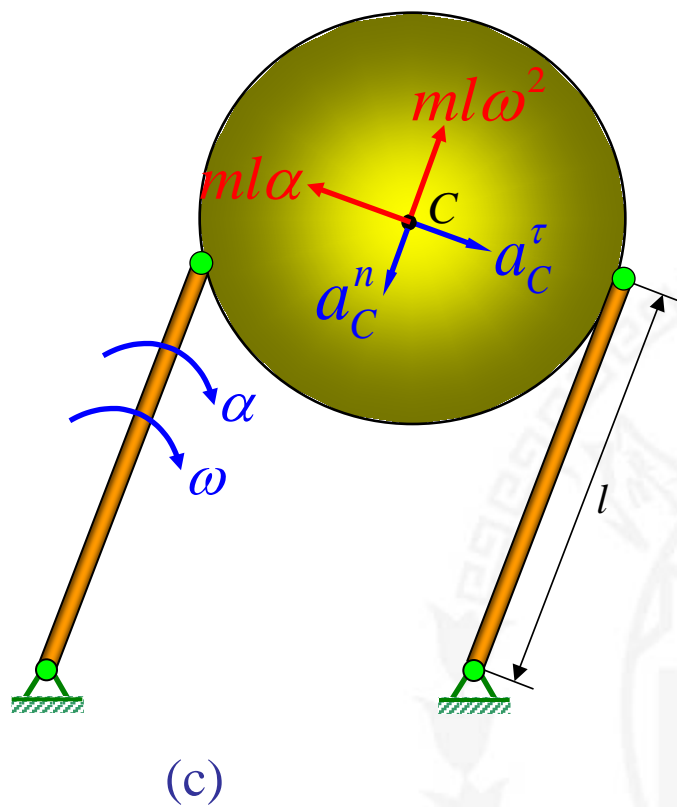
## 刚体惯性力系的简化

图(b)圆轮作平面运动，向质心简化



## >>>> 7-2-2 刚体惯性力系的简化

圆轮平移,  $\omega_C = \alpha_C = 0$ , 向质心简化, 惯性力如图。



## § 14-3 动静法的应用







## 动静法的特点

1.动静方程数学上与动量定理与动量矩定理微分式等价，且应用更为方便。

(如不必考虑矩心的条件等)

2.对系统加上惯性力和全部外力后，可完全应用静力学方法与技巧。

(如矩心与投影轴选取)

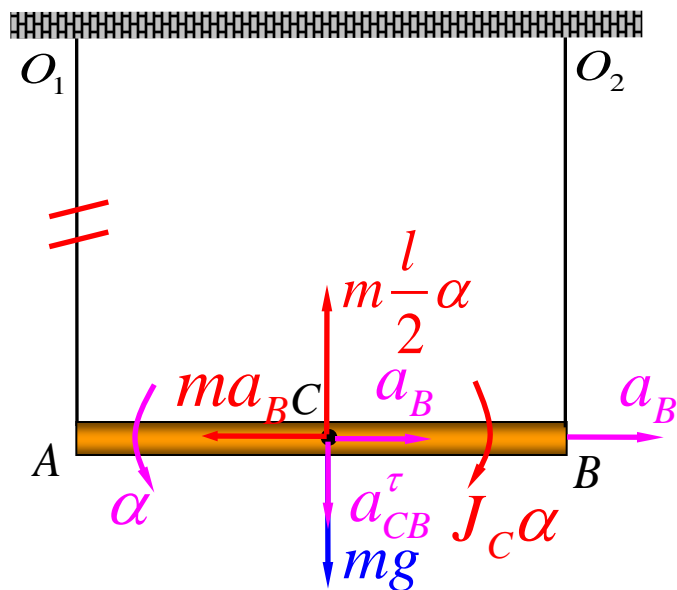
3.常与动能定理结合，求解复杂动力状态问题。

(非稳态问题)



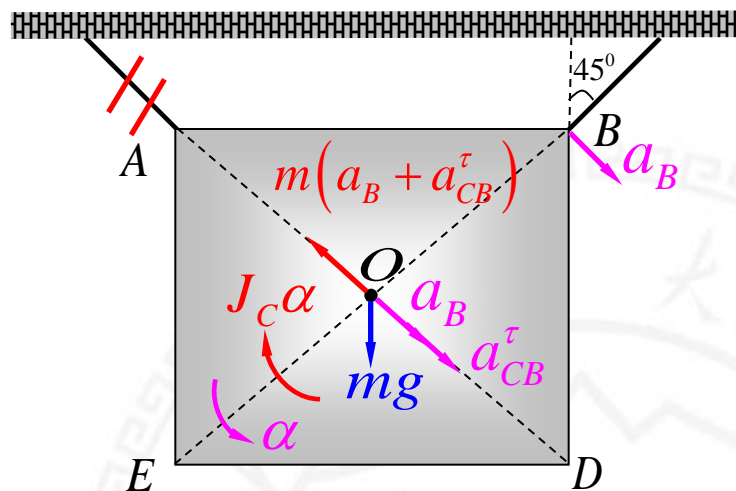


当绳A剪断后的瞬时，绳B的拉力如何变化？



均质杆

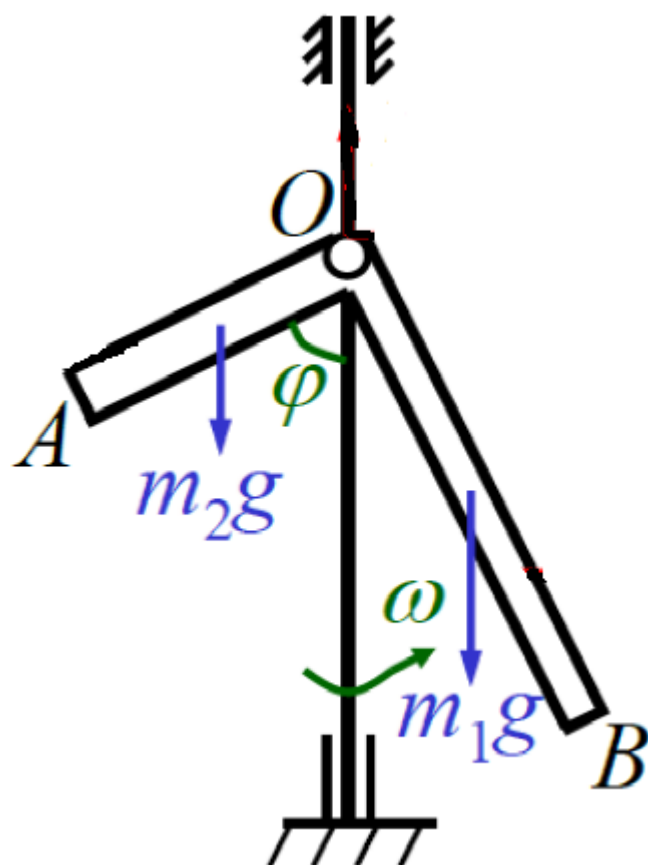
减小



正方形均质板

不变

例1. 直角均质杆,  $OA=a$ ,  $OB=b$ , 匀角速 $\omega$ .  
求 偏角 $\varphi$ 与 $\omega$ 的关系。



例1. 直角均质杆,  $OA=a$ ,  $OB=b$ , 匀角速 $\omega$ .  
求 偏角 $\varphi$ 与 $\omega$ 的关系。

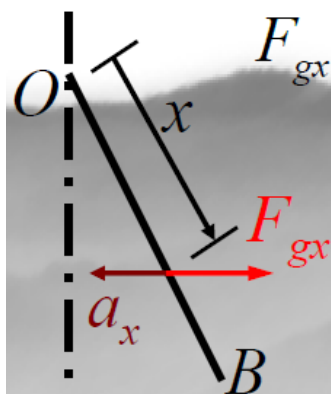
解: 杆, 受力如图

定轴转动——但无对称面

杆OB: 微段  $dm=\rho dx$

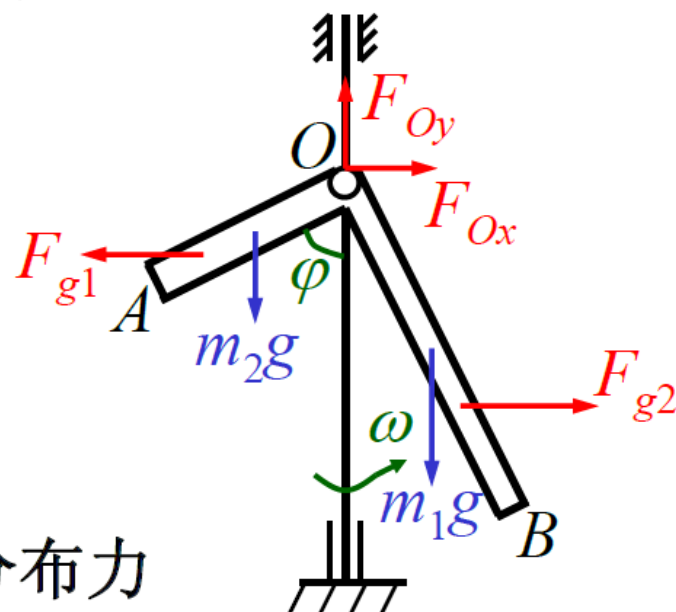
$$a_x = x \cos \varphi \cdot \omega^2$$

$$F_{gx} = \rho \omega^2 \cos \varphi \cdot x dx \quad \text{—线性分布力}$$



等效力  $F_{g2} = \frac{1}{2} b \cdot \rho b \omega^2 \cos \varphi$ , 距点O于  $\frac{2}{3} b$

类似地  $F_{g1} = \frac{1}{2} a \cdot \rho a \omega^2 \sin \varphi$ , 距点O于  $\frac{2}{3} a$

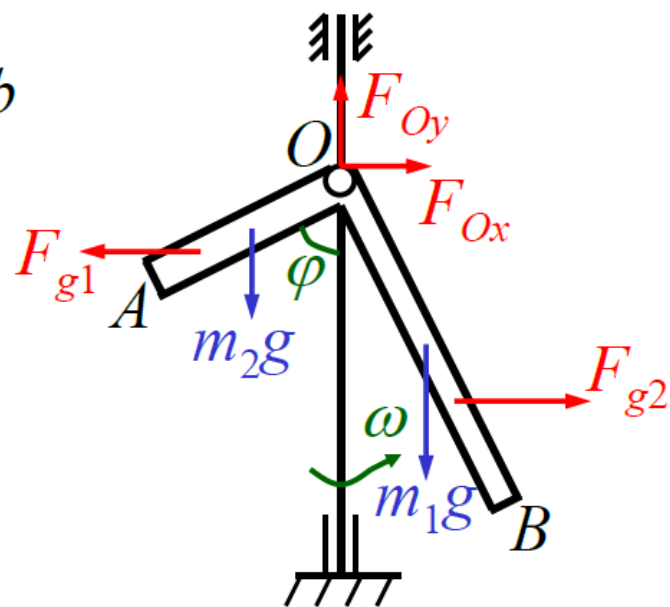


达朗贝尔原理  $m_1 = \rho a$ ,  $m_2 = \rho b$

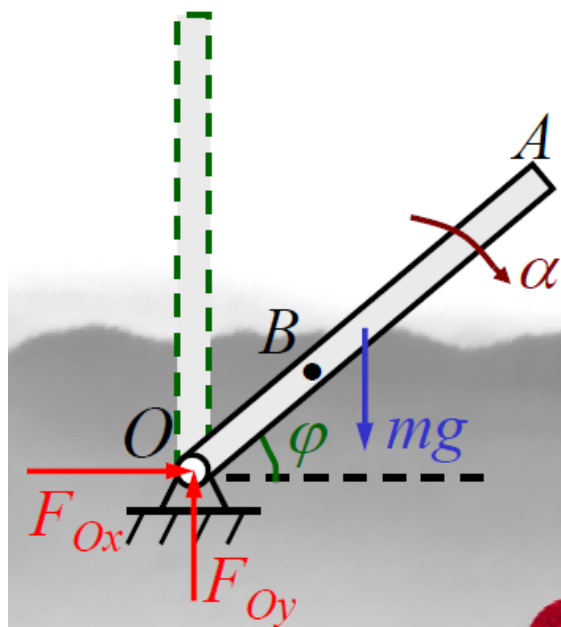
$$\Sigma M_O = F_{g2} \cdot \frac{2}{3}b \sin \varphi - F_{g1} \cdot \frac{2}{3}a \cos \varphi$$

$$+ m_1 g \cdot \frac{a}{2} \sin \varphi - m_2 g \cdot \frac{b}{2} \cos \varphi = 0$$

解得  $\omega = \sqrt{3g \frac{b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}}$



均质杆 $l$ ，从铅直位置自由倒下， $AB=a$ 。  
求  $a$  多大时  $B$  处约束力偶最大。



解：(1) 杆，受力如图

定轴转动—方程

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{1}{3} ml^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

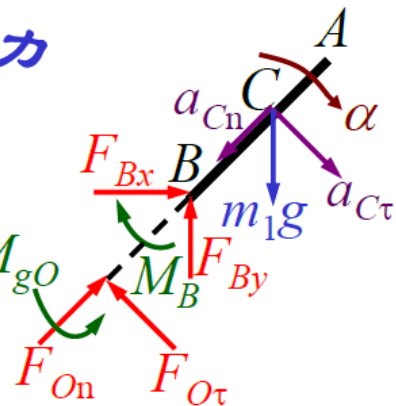


## (2) 部分杆AB, 受力如图 定轴转动, 惯性力

$$F_{On} = m_1 a_{Cn}, \quad F_{O\tau} = m_1 a_{C\tau}, \quad M_{gO} = J_O \alpha$$

$$m_1 = \rho a, \quad a_{Cn} = (l - a/2) \omega^2, \quad a_{C\tau} = (l - a/2) \alpha, \quad M_{gO}$$

$$J_O = \frac{1}{12} m_1 a^2 + m_1 (l - a/2)^2$$



**达朗贝尔原理** 问：是否可向质心C简化？

$$\sum M_B = M_{gO} - F_{O\tau} \cdot (l - a) - M_B - m_1 g \cdot \frac{a}{2} \cos \varphi = 0$$

解得  $M_B = (1 - \frac{a}{l})(\frac{a}{l})^2 \cdot \frac{1}{4} mgl \cos \varphi$

$$\frac{dM_B}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}l, \quad \text{此时} \quad \frac{d^2 M_B}{da^2} < 0$$

$$a = \frac{2}{3}l \text{ 时, 反力偶矩最大 } M_B = \frac{1}{27} mgl \cos \varphi$$

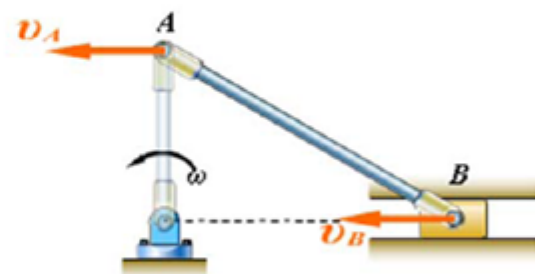
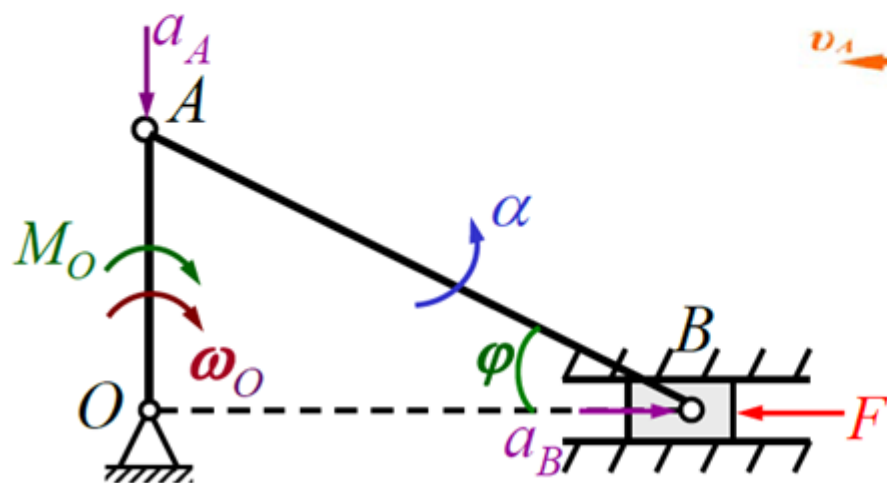
内力最大值 → 危险截面 → 危险点

对烟囱根部定向爆破时, 烟囱倒塌过程中的第二次断裂现象

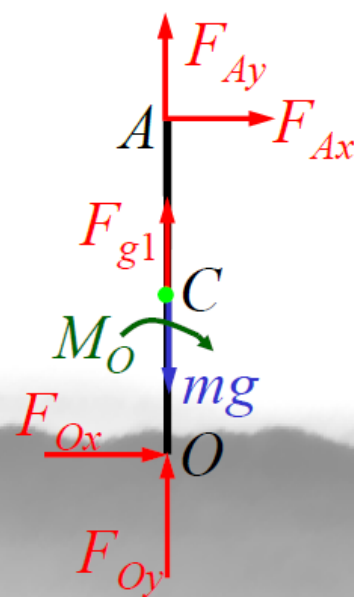
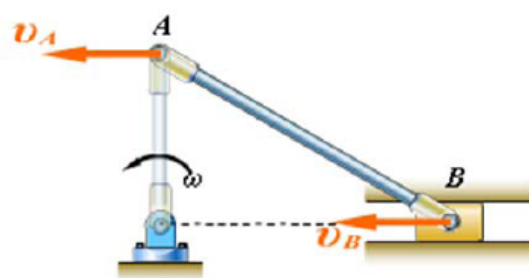
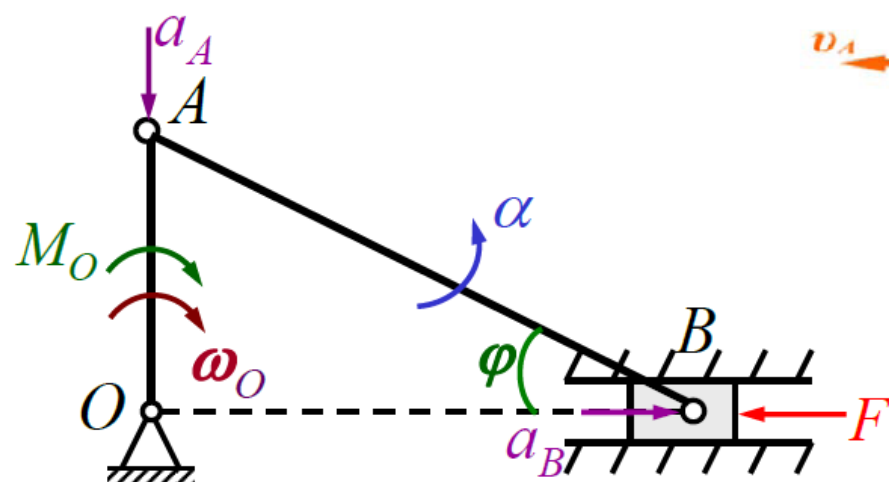




例3. 铅直面内曲柄连杆滑块机构，均质杆 $OA=r$ ， $m$ ， $AB=2r$ ， $2m$ ，滑块 $m$ ， $OA$ 匀速转动 $\omega_0$ ， $\varphi=30^\circ$ ，阻力 $F$ 。求 滑道约束力与驱动力偶 $M_O$ 。



**例3.** 铅直面内曲柄连杆滑块机构，均质杆  $OA=r$ ,  $m$ ,  $AB=2r$ ,  $2m$ , 滑块  $m$ ,  $OA$  匀速转动  $\omega_0$ ,  $\varphi=30^\circ$ , 阻力  $F$ 。求 滑道约束力与驱动力偶  $M_O$ 。

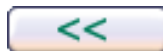


解：(1) 杆  $OA$ ：受力如图，转动

$$a_C = \frac{1}{2} r \omega_0^2, \quad F_{g1} = m a_C$$

达朗贝尔原理

$$\sum M_O = -M_O - F_{Ax} r = 0$$



(2) 杆AB: 受力如图, **瞬时平动**

平动和瞬时平动的区别?

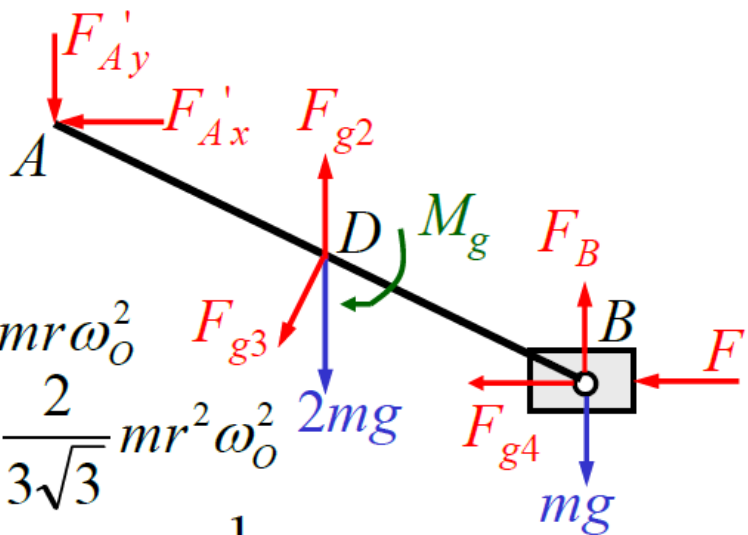
$$a_A = r\omega_O^2,$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\tau} \quad a_{By} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_O^2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}^{\tau}, \quad F_{g2} = 2ma_A = 2mr\omega_O^2$$

$$F_{g3} = 2ma_{DA}^{\tau} = \frac{2}{\sqrt{3}}mr\omega_O^2, \quad M_g = J_D\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}mr^2\omega_O^2$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\tau}, \quad a_B = \frac{r\omega_O^2}{\sqrt{3}}, \quad F_{g4} = ma_B = \frac{1}{\sqrt{3}}mr\omega_O^2$$



**达朗贝尔原理**

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= (F_B - mg) \cdot 2r \cos \varphi - (F_{g4} + F) \cdot 2r \sin \varphi \\ &\quad - F_{g3} \cdot r + (F_{g2} - 2mg) \cdot r \cos \varphi - M_g = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = -F_{Ax} - F_{g3} \sin \varphi - F_{g4} - F = 0$$

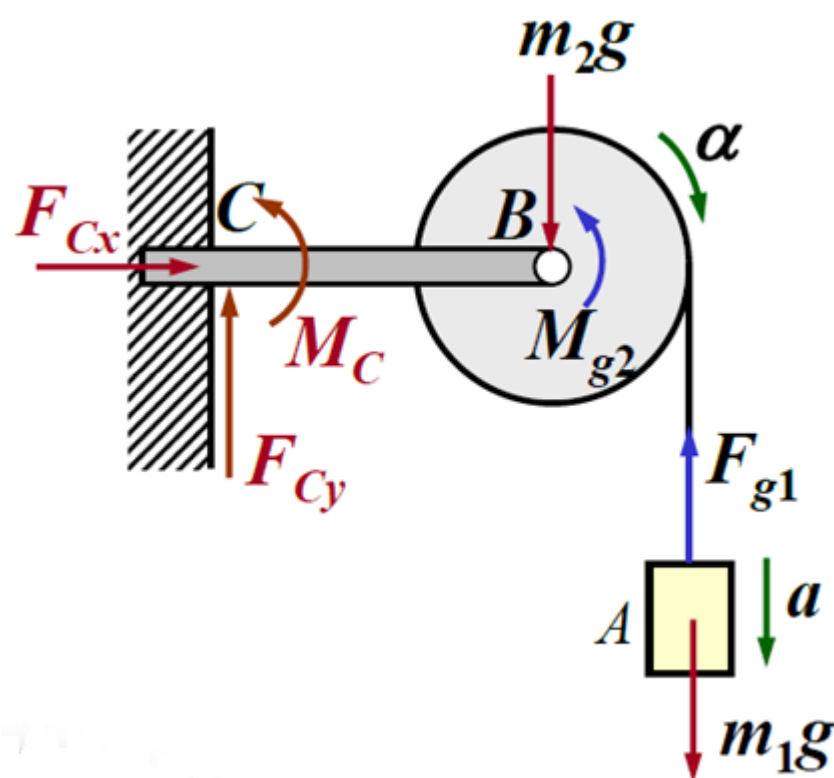
解得

$$F_B = 2mg + \frac{F}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9}mr\omega_O^2$$

$$M_O = Fr + \frac{2}{\sqrt{3}}mr\omega_O^2$$

**动约束力**

**例4.** 杆、轮和物系统，杆 $BC$ 水平， $BC=b$ 。均质圆轮 $B$ ， $R$ ， $m_2$ ，位于铅直平面内。物 $A$ ， $m_1$ ，通过绕在轮 $B$ 上的绳子悬挂，绳与杆的重量不计。物 $A$ 下落时，带动轮 $B$ 转动。求：固定端 $C$ 的约束力。



**例4.** 杆、轮和物系统，杆 $BC$ 水平， $BC=b$ 。均质圆轮 $B$ ， $R$ ， $m_2$ ，位于铅直平面内。物 $A$ ， $m_1$ ，通过绕在轮 $B$ 上的绳子悬挂，绳与杆的重量不计。物 $A$ 下落时，带动轮 $B$ 转动。求：固定端 $C$ 的约束力。

**解：** 物 $A$ 与轮 $B$ 组成的子系统，受力如图。轮 $B$ 定轴转动，

**惯性力**

$$M_{g2} = J_B \alpha = \frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha$$

物 $A$ 的**惯性力**

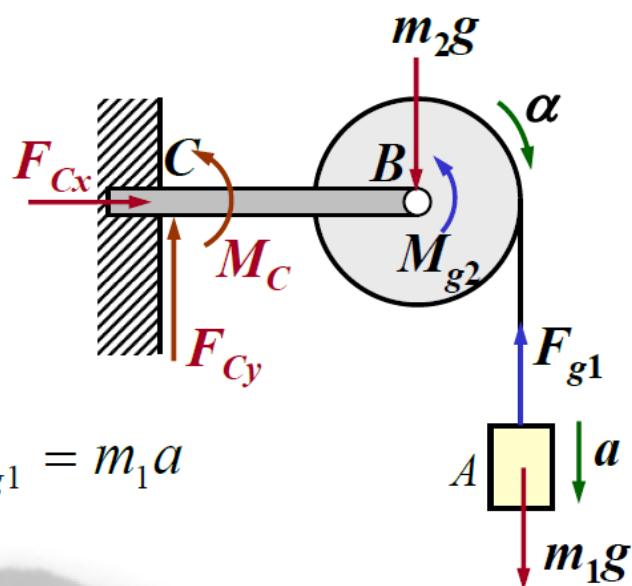
$$F_{g1} = m_1 a$$

**达朗贝尔原理**

$$\sum M_B = M_{g2} + F_{g1} R - m_1 g R = 0$$

**解得** ( $a = R\alpha$ )

$$a = \frac{2m_1 g}{2m_1 + m_2}$$





$$M_{g2} = J_B \alpha = \frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha \quad F_{g1} = m_1 a$$

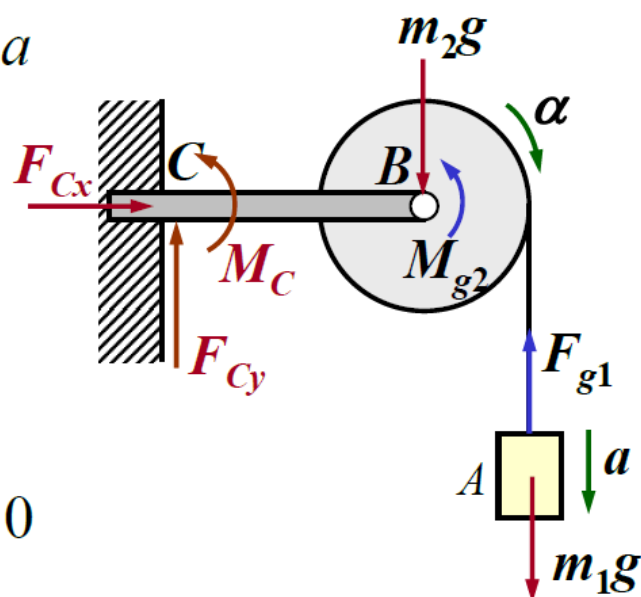
再分析整个系统，受力如图

达朗贝尔原理

$$\sum F_x = F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = F_{Cy} + F_{g1} - m_1 g - m_2 g = 0$$

$$\sum M_C = M_C + M_{g2} + F_{g1}(b + R) - m_1 g(b + R) - m_2 g b = 0$$



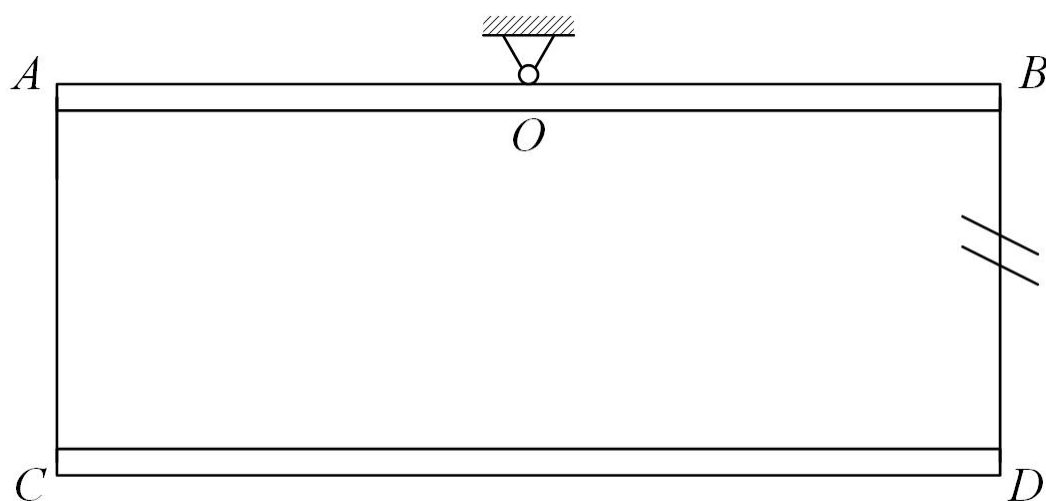
解得

$$F_{Cx} = 0$$

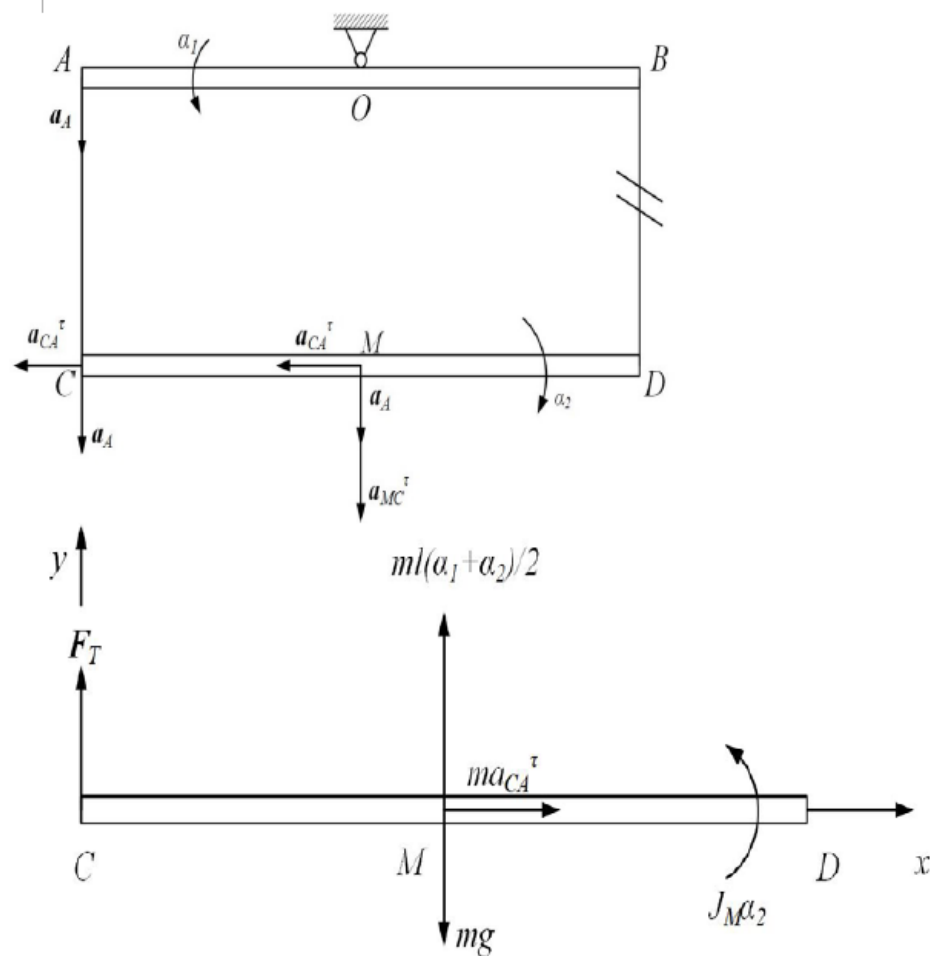
$$F_{Cy} = \frac{3m_1 + m_2}{2m_1 + m_2} m_2 g$$

$$M_C = \frac{3m_1 + m_2}{2m_1 + m_2} m_2 g b$$

- 如图a所示，两匀质杆用细绳相连，水平悬挂，已知两杆的质量与长度分别为 $m$ 与 $l$ ， $AO=OB$ ，求绳BD断时，铰O处的约束力。







解：绳断瞬时，加速度如图a所示，其中

$$a_A = \frac{l}{2} \alpha_1$$

$$a_{MC}^{\tau} = \frac{l}{2} \alpha_2$$

先研究CD杆，加惯性力，受力如图b所示

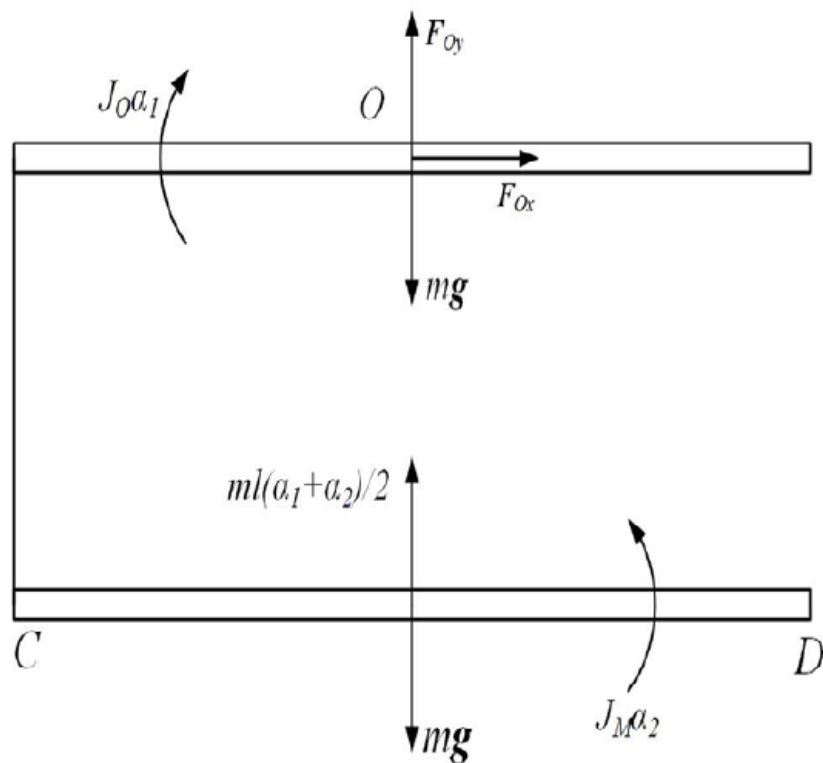
由  $\sum F_x = 0$ , 得

$$ma_{CA}^{\tau} = 0, \quad a_{CA}^{\tau} = 0$$

由  $\sum M_C = 0$ , 得

$$J_M \alpha_2 + m \frac{l}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{l}{2} = mg \frac{l}{2}$$





再研究整体，加惯性力，受力如图c所示， $J_O = J_M = \frac{1}{12}ml^2$ 。

由 $\sum F_x = 0$ ,得

$$F_{Ox} = 0$$

由 $\sum M_O = 0$ ,得

$$J_M \alpha_2 = J_O \alpha_1$$

故

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

代入得

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{6g}{7l}$$

由 $\sum F_y = 0$ ,并带入得

$$F_{Oy} = \frac{8}{7}mg$$

