第七章　矩阵特征值计算

物理、力学和工程技术中的许多问题在数学上都归结为求矩阵的特征值和特征向量问题。

- **计算方阵 A 的特征值，即求特征多项式方程：**

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$$

或 $$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

的根。求出特征值 λ 后，再求相应的齐次线性方程组：

$$(A-\lambda I)x=0$$

的非零解，即是**对应于 λ 的特征向量**。

对于阶数较小的矩阵是可以的，但对于阶数较大的矩阵来说，求解是十分困难，所以用这种方法求矩阵的特征值是不切实际的。

- **如果矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征值。**

因此希望**在相似变换下，把 A 化为最简单的形式。**一般矩阵的最简单的形式是**约当（Jordan）标准形**。由于在一般情况下，用相似变换把矩阵 A 化为约当标准形是很困难的，所以设法对矩阵 A 依次进行相似变换，使其逐步趋向于一个约当标准形，从而求出 A 的特征值。

下面主要介绍**求绝对值最大、最小特征值和特征向量的幂法、反幂法**，**求实对称矩阵全部特征值和特征向量的雅可比（Jacobi)方法**。

§1 幂法与反幂法

一、幂法

- **幂法：是一种求任意矩阵 A 的绝对值最大特征值及对应特征向量的迭代算法。**

该方法最大的优点是计算简单，容易在计算机上实现，对稀疏矩阵较为合适，但有时收敛速度很慢。

假设：

(1) n 阶方阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 按绝对值大小排列

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$$

(2) X_i 是对应于特征值 λ_i 的特征向量 $(i=1,2,\cdots,n)$；

(3) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关。

任取一个非零初始向量 V_0，由矩阵 A 构造一个**向量序列**

$$V_k=AV_{k-1},\ k=1,2,\cdots$$

称为**迭代向量**。

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关，构成 n 维向量空间的一组基，所以，**初始向量 V_0 可唯一表示成：**

$$V_0=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n$$

于是

$$\begin{aligned}V_k&=AV_{k-1}=A^2V_{k-2}=\cdots=A^kV_0\\&=A^k(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)\\&=\alpha_1\lambda_1^kX_1+\alpha_2\lambda_2^kX_2+\cdots+\alpha_n\lambda_n^kX_n\end{aligned}$$

$$=\lambda_1^k[\alpha_1 X_1+\alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k X_2+\cdots+\alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k X_n]$$

因为 $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|<1\ (i=2,3,\cdots,n)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_k}{\lambda_1^k}=\alpha_1 X_1$$

当 k 充分大时，有：$V_k\approx\alpha_1\lambda_1^k X_1$

从而：$V_{k+1}\approx\alpha_1\lambda_1^{k+1}X_1$

说明：当 k 充分大时，两个相邻迭代向量 V_{k+1} 与 V_k 近似地相差一个倍数，这个倍数便是矩阵 A 绝对值最大的特征值 λ_1。若用 $(V_k)_i$ 表示向量 V_k 的第 i 个分量，则

$$\lambda_1=\frac{(V_{k+1})_i}{(V_k)_i}$$

即**两个相邻迭代向量对应分量的比值近似地为矩阵 A 绝对值最大的特征值。**

因为 $V_{k+1}\approx\lambda_1 V_k$, $V_{k+1}=AV_k$，所以有 $AV_k\approx\lambda_1 V_k$，因此**向量 V_k 可近似地作为对应于 λ_1 的特征向量**。

幂法的收敛速度取决于比值 $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 的大小。比值越小，收敛越快，但当比值$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 接近于1时，收敛十分缓慢。

用幂法进行计算时，若 $|\lambda_1|>1$，则迭代向量 V_k 的各个不为零的分量将随着 k 无限增大而趋于无穷。反之，若 $|\lambda_1|<1$，则 V_k 的各分量将趋于零。这样在有限字长的计算机上计算时就可能溢出停机。为此，常采用把每步迭代的向量 V_k 进行**规范化**，

即用 V_k 乘以一个常数，使得其分量的模最大为1。

- **幂法算法（改进幂法）：**

$\forall$ 取 $V_0 = U_0 \neq 0$ $(\alpha_1 \neq 0)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{V_0 = U_0 \neq 0} \quad (\boldsymbol{\alpha_1 \neq 0}) \\ \boldsymbol{V_k = AU_{k-1}} \\ \boldsymbol{U_k = \dfrac{V_k}{\max\{V_k\}}} \end{cases} \qquad (\boldsymbol{k = 1, 2, \cdots})$$

其中：$\max\{V_k\}$ 表示 V_k 绝对值最大的第一个分量，保证了 $\|U_k\|_\infty = 1$ 。

则：（1）$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} U_k = \dfrac{X_1}{\max\{X_1\}}}$

（2）$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \max\{V_k\} = \lambda_1}$ 。

例 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

用幂法求其模为最大的特征值及其相应的特征向量(精确到小数点后三位)。

解 取 $x_0 = (1,1,1)^T$ ，计算结果如下表所示。

k	V_k^T			m_k	U_k^T		
1	1	0	1	1	1	0	1
2	2	-2	2	2	1	-1	1
3	3	-4	3	-4	-0.75	1	-0.75

4	-2.5	3.5	-2.5	3.5	-0.714	1	-0.714
5	-2.428	3.428	-2.428	3.428	-0.708	1	-0.708
6	-2.416	3.416	-2.416	3.416	-0.707	1	-0.707
7	-2.414	3.414	-2.414	3.414	-0.707	1	-0.707

当 $k=7$ 时，U_k 已经稳定，于是得到：

$$\lambda_1 \approx m_7 = 3.414$$

及其相应的特征向量 X_1 为：

$$X_1 \approx U_7 = (-0.707, 1, -0.707)^T。$$

- **应用幂法时，应注意以下两点：**

（1）应用幂法时，困难在于事先不知道特征值是否满足 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$，以及方阵 A 是否有 n 个线性无关的特征向量。克服上述困难的方法是：**先用幂法进行计算，在计算过程中检查是否出现了预期的结果。**如果出现了预期的结果，就得到特征值及其相应特征向量的近似值；否则，只能用其它方法来求特征值及其相应的特征向量。

（2）需避免初始向量 V_0 选择不当，而导致公式

$$V_0 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

中 X_1 的系数 $\alpha_1 = 0$。所以，若收敛很慢，应改换初始向量。

(*) 二、原点平移法

幂法的收敛速度取决于比值 $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 的大小。当比值接近于1时，收敛可能很慢，一个改进的方法是采用**原点平移法**。

设矩阵

$$B = A - pI$$

其中 p 为要选择的常数。

- **A 与 B 除了对角线元素外，其它元素都相同，而 A 的特征值 λ_i 与 B 的特征值 μ_i 之间有关系 $\mu_i = \lambda_i - p$，并且相应的特征向量相同。**

这样，要计算 A 的绝对值最大特征值，就是**适当选择参数 p，使得 $\lambda_1 - p$ 仍然是 B 的绝对值最大特征值，且使**

$$\max_{2\le k\le n}\left|\frac{\lambda_k - p}{\lambda_1 - p}\right| < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

对 B 应用幂法，使得在计算 B 的绝对值最大特征值 $\lambda_1 - p$ 的过程中得到加速，这种方法称为**原点平移法**。

原点平移的加速方法，是一种矩阵变换方法。这种变换容易计算，又不破坏 A 的稀疏性，但**参数 p 的选择依赖于对 A 的特征值的分布有大致了解。**

三、反幂法

- **反幂法：用于求矩阵 A 的绝对值最小特征值和对应的特征向量。**

设 n 阶方阵 A 的特征值按绝对值大小排列为：

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$$

相应的特征向量为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$。则 A^{-1} **的特征值为：**

$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| \le \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \le \cdots \le \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| < \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$$

对应的特征向量仍然为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$。因此，计算矩阵 A 的绝对值最小特征值，就是计算 A^{-1} 的绝对值最大特征值。

- **反幂法的基本思想：把幂法用到 A^{-1} 上。**

任取一个非零的初始向量 x_0，由矩阵 A^{-1} 构造向量序列：

$$x_k = A^{-1}x_{k-1}\,,\quad k = 1, 2, \cdots$$

计算向量序列 $\{x_k\}$ 时，首先要计算逆矩阵 A^{-1}。由于计算 A^{-1} 时，一方面计算麻烦，另一方面当 A 为稀疏阵时，A^{-1} 不一定是稀疏阵，所以利用 A^{-1} 进行计算会造成困难。

- **在实际计算时，常采用解线性方程组的方法求 x_k：**

$$Ax_k = x_{k-1}\,,\quad k = 1, 2, \cdots$$

为了防止溢出，**计算公式即反幂法算法：**

$$\begin{cases} Ay_k = x_{k-1} \\ m_k = \max(y_k) \quad (k = 1, 2, \cdots) \\ x_k = y_k / m_k \end{cases}$$

相应地取

$$\begin{cases} \lambda_n \approx \dfrac{1}{m_k} \\ v_n \approx y_k \ \ (\text{或 } x_k) \end{cases}$$

反幂法也是一种迭代算法，每一步都要解一个系数矩阵相同的线性方程组。

§2　雅可比方法

- **雅可比(Jacobi)方法：用来计算实对称矩阵A的全部特征值及其相应特征向量的一种变换方法。**

一、预备知识

(1) 如果n阶方阵A满足：

$$A^T A = I \ (\text{即} A^{-1} = A)$$

则称A为**正交矩阵**。

(2) 设A是n阶实对称矩阵，则A的特征值都是实数，并且有互相正交的n个特征向量。

(3) 相似矩阵具有相同的特征值。

(4) 设A是n阶实对称矩阵，Q为n阶正交矩阵，则

$B = Q^T AQ$也是对称矩阵。

(5) n阶正交矩阵的乘积是正交矩阵。

(6) 设A是n阶实对称矩阵，则必有正交矩阵Q，使

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

其中Λ的对角线元素的是A的n个特征值，正交阵Q的第i列是A的对应于特征值λ_i的特征向量。

- **雅可比方法的理论基础：对于任意的n阶实对称矩阵A，只要能求得一个正交矩阵Q，使$Q^T AQ = \Lambda$（Λ为对角阵），则可得到A的全部特征值及其相应的特征向量。**

二、旋转变换

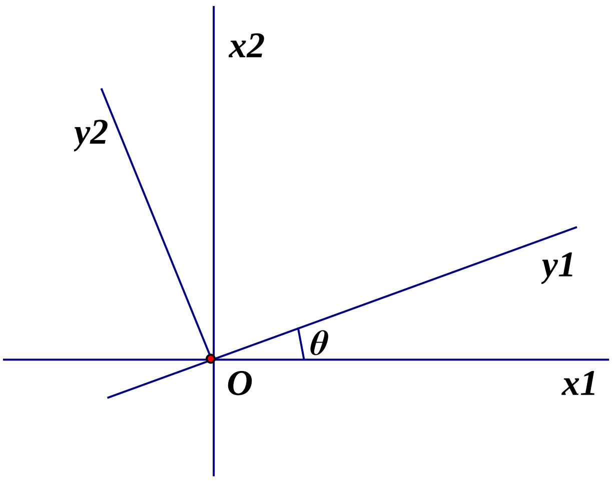
设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

为二阶实对称矩阵，即 $a_{12}=a_{21}$。实对称矩阵与二次型是一一对应的，设 A 对应的二次型为

$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

由解析几何知识知道，方程 $f(x_1,x_2)=C$ 表示在 x_1,x_2 平面上的一条二次曲线。如果将坐标轴 Ox_1,Ox_2 旋转一个角度 θ，使得旋转后的坐标轴 Oy_1,Oy_2 与该二次曲线的主轴重合，如图所示。



则在新的坐标系中，二次曲线的方程就化成：

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2=C$$

这个变换就是：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

把坐标轴进行旋转，所以称为**旋转变换**。其中

$$Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

称为**平面旋转矩阵**。显然有 $Q^TQ=I$，所以 Q **是正交矩阵**。上面的变换过程即

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$$

由于

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}a_{11}\cos^2\theta+a_{22}\sin^2\theta+a_{12}\sin2\theta & 0.5(a_{22}-a_{11})\sin2\theta+a_{12}\cos2\theta\\ 0.5(a_{22}-a_{11})\sin2\theta+a_{12}\cos2\theta & a_{11}sin^2\theta+a_{22}\cos^2\theta-a_{12}\sin2\theta\end{pmatrix}$$

所以只要选择 θ 满足：

$$0.5(a_{22}-a_{11})\sin2\theta+a_{12}\cos2\theta=0$$

即：

$$\tan2\theta=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

（当 $a_{11}=a_{22}$ 时，可选取 $\theta=\frac{\pi}{4}$）

Q^TAQ **就成对角阵，这时 A 的特征值为：**

$$\begin{cases}\lambda_1=a_{11}\cos^2\theta+a_{22}\sin^2\theta+a_{12}\sin2\theta\\ \lambda_2=a_{11}\sin^2\theta+a_{22}\cos^2\theta-a_{12}\sin2\theta\end{cases}$$

相应的特征向量为：

$$v_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

三、雅可比方法

- **雅可比方法的基本思想：**通过一系列由平面旋转矩阵构成的正交变换（也是相似变换）将实对称矩阵逐步化为对角阵，从而得到A的全部特征值及其相应的特征向量。

首先引进R^n中的平面旋转变换：

$$\begin{cases} x_i = y_i\cos\theta - y_j\sin\theta \\ x_j = y_i\sin\theta + y_j\cos\theta \\ x_k = y_k \quad k \neq i, j \end{cases}$$

记为$x = Q_{ij}y$，其中$\boldsymbol{Q_{ij}}$即为教材中的$\boldsymbol{P(i,j,\theta)}$：

$$Q_{ij} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad i \quad\quad\quad j & \end{array}$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$
$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

则称$x = Q_{ij}y$为R^n中x_i, x_j平面内的一个**平面旋转变换**，Q_{ij}称为x_i, x_j平面内的**平面旋转矩阵**。

- Q_{ij} **具有如下简单性质：**

①Q_{ij}为正交矩阵。

②Q_{ij}的主对角线元素中除第i个与第j个元素为$\cos\theta$外，其它元素均为1；非对角线元素中除第i行第j列元素为$-\sin\theta$，第j行第i列元素为$\sin\theta$外，其它元素均为零。

③$Q_{ij}^T A$只改变A的第i行与第j行元素，AQ_{ij}^T只改变A的第i列与第j列元素，所以$Q_{ij}^T AQ_{ij}^T$只改变A的第i行、第j行、第i列、第j列元素。

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ $(n\geq 3)$为n阶实对称矩阵，$a_{ij}=a_{ji}\neq 0$为一对非对角线元素。令

$$A_1=Q_{ij}^T AQ_{ij}^T=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$$

则 **A_1为实对称矩阵，且A_1与A有相同的特征值。**通过直接计算知：

$$\begin{cases}a_{ii}^{(1)}=a_{ii}\cos^2\theta+a_{jj}\sin^2\theta+a_{ij}\sin 2\theta\\ a_{jj}^{(1)}=a_{ii}\sin^2\theta+a_{jj}\cos^2\theta-a_{ij}\sin 2\theta\\ a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=\dfrac{1}{2}(a_{jj}-a_{ii})\sin 2\theta+a_{ij}\cos 2\theta\\ a_{ik}^{(1)}=a_{ki}^{(1)}=a_{ik}\cos\theta+a_{jk}\sin 2\theta \qquad k\neq i,j\\ a_{jk}^{(1)}=a_{kj}^{(1)}=-a_{jk}\sin\theta+a_{jk}\cos 2\theta \quad k\neq i,j\\ a_{kl}^{(1)}=a_{kl} \qquad k,l\neq i,j\end{cases}$$

当取θ满足关系式：

$$\tan 2\theta=\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}} \quad （当 a_{ii}=a_{jj} 时，可选取 \theta=\frac{\pi}{4}）$$

时，$a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)} = 0$，且

$$\begin{cases} (a_{ik}^{(1)})^2 + (a_{jk}^{(1)})^2 = a_{ik}^2 + a_{jk}^2\,, \quad k \neq i, j \\ (a_{ii}^{(1)})^2 + (a_{jj}^{(1)})^2 = a_{ii}^2 + a_{jj}^2 + 2a_{ij}^2 \\ (a_{kl}^{(1)})^2 = a_{kl}^2\,, \quad k, l \neq i, j \end{cases}$$

由于在正交相似变换下，矩阵元素的平方和不变，所以若用 $D(A)$ 表示矩阵 A 的对角线元素平方和，用 $S(A)$ 表示 A 的非对角线元素平方和，则有：

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A) + 2a_{ij}^2 \\ S(A_1) = S(A) - 2a_{ij}^2 \end{cases}$$

这说明：用 Q_{ij} 对 A 作正交相似变换化为 A_1 后，A_1 的对角线元素平方和比 A 的对角线元素平方和增加了 $2a_{ij}^2$；A_1 的非对角线元素平方和比 A_1 的非对角线元素平方和减少了 $2a_{ij}^2$，且将事先选定的非对角线元素消去了(即 $a_{ij}^{(1)} = 0$)。因此，**只要逐次地用这种变换，就可以使得矩阵 A 的非对角线元素平方和趋于零，也即使得矩阵 A 逐步化为对角阵。**

这里需要说明一点：并不是对矩阵 A 的每一对非对角线非零元素进行一次这样的变换就能得到对角阵。因为在用变换消去 a_{ij} 的时候，只有第 i 行、第 j 行、第 i 列、第 j 列元素在变化，如果 a_{ik} 或 Q_{kj} 为零，经变换后又往往不是零了。

雅可比方法：就是逐步对矩阵 A 进行正交相似变换，消去非对角线上的非零元素，直到将 A 的非对角线元素化为接近于零为止，从而求得 A 的全部特征值，把逐次正交相似变换矩阵

乘起来，便是所要求的特征向量。

定理1、定理2　见教材 p. 176～177。

- **雅可比方法的计算步骤归纳如下：**

第一步 在矩阵 A 的非对角线元素中选取一个非零元素 a_{ij} 。一般说来，取绝对值最大的非对角线元素；

第二步 由公式 $\tan 2\theta = \dfrac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$ 求出 θ，从而得平面旋转矩阵 $Q_1 = Q_{ij}$ ；

第三步 $A_1 = Q_1^T A Q_1$；

第四步 以 A_1 代替 A，重复第一、二、三步求出 A_2 及 P_2，继续重复这一过程，直到 A_m 的非对角线元素全化为充分小(即小于允许误差)时为止；

第五步 A_m 的对角线元素为 A 的全部特征值的近似值，$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$ 的第 j 列为对应于特征值 λ_j (λ_j 为 A_m 的对角线上第 j 个元素)的特征向量。

例　用雅可比方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解　首先取 $i = 1, j = 2$ ，由于 $a_{11} = a_{22} = 2$，故取

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$Q_1=Q_{12}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_1=Q_1^TAQ_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 3 & -1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}$$

再取 $i=1, j=3$，由

$$\tan 2\theta=\frac{2\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{1-2}=\sqrt{2}$$

得

$$\sin\theta\approx 0.45969,\quad \cos\theta\approx 0.88808$$

所以

$$Q_1=\begin{bmatrix}0.88808 & 0 & -0.45969\\ 0 & 1 & 0\\ 0.45969 & 0 & 0.88808\end{bmatrix}$$

$$A_2=Q_2^TAQ_2=\begin{bmatrix}0.63398 & -0.32505 & 0\\ -0.32505 & 3 & -0.62797\\ 0 & -0.62797 & 2.36603\end{bmatrix}$$

继续做下去，直到非对角线元素趋于零，进行九次变换后，得

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0.58758 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 2.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 3.41421 \end{bmatrix}$$

A_9 **的对角线元素就是** A **的特征值**，即

$$\lambda_1 \approx 0.58758,\ \lambda_2 \approx 2.00000,\ \lambda_3 \approx 3.41421$$

相应的特征向量为

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.50000 \\ 0.70710 \\ 0.50000 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 0.70710 \\ 0.00000 \\ -0.70710 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 0.50000 \\ -0.70710 \\ 0.50000 \end{bmatrix}$$

相应的特征值的精确值

$$\lambda_1 = 2-\sqrt{2},\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2+\sqrt{2}$$

相应的特征向量为

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

由此可见，雅可比方法变换九次的结果已经相当精确了。

- **雅可比方法特点：计算实对称矩阵的全部特征值及其对应特征向量的一种变换方法。优点：**但精度高、收敛快，舍入误差稳定；**缺点：**计算量较大，另外当矩阵是稀疏矩阵时，进行正交相似变换后并不能保证其稀疏的性质，所以对阶数较高的矩阵不宜采用这种方法。