第三章 刚体力学基础 流体力学简介

(§3.1 - §3.3)

前两章给出了质点运动状态变化的有关规律，本章介绍具有一定形状和大小物体的机械运动规律。

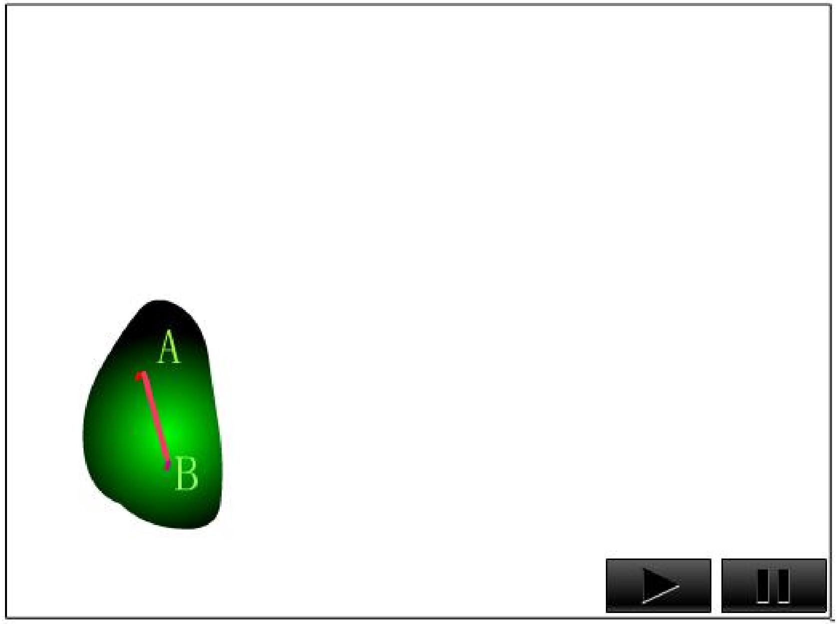
刚体：实际固体的理想化模型，即在受力后其形状、大小和内部各点相对位置都保持不变的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点系）。

既然刚体可看成是特殊的质点系，那么前面理论在本章中依然有效。

§ 3.1 刚体运动的描述

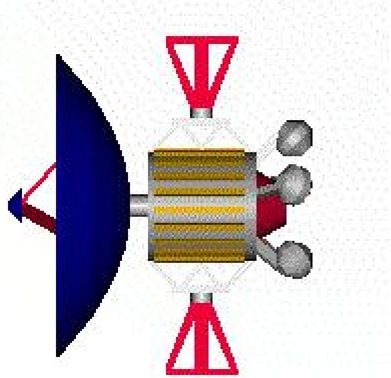
- 刚体运动
  - 平动
  - 转动
    - 定轴转动
    - 定点转动

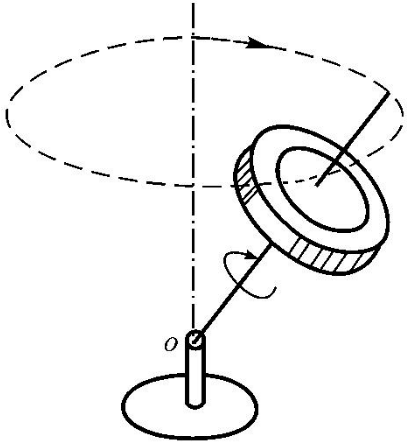
平动：如果在运动过程中，刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体上任意两点的连线始终保持平行.



刚体平动⟶质点运动

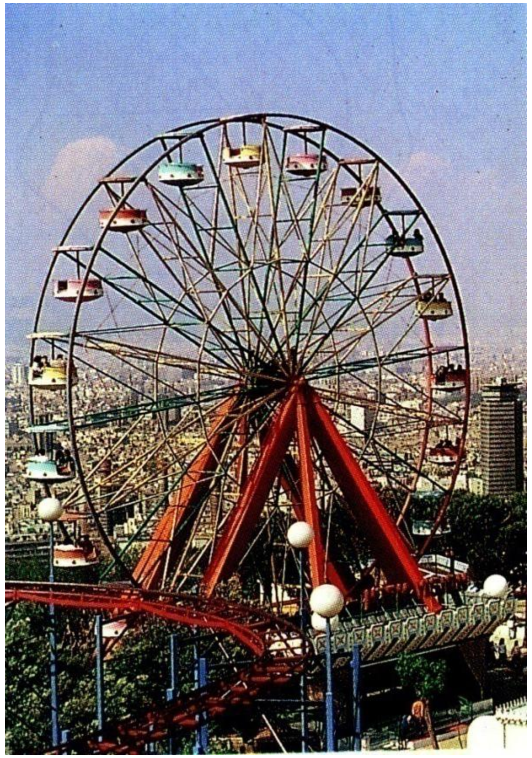
转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动. 转动又分定轴转动和定点转动 .





定轴转动 转轴固定的转动

特征：刚体上各点都绕同一转轴作不同半径的圆周运动，它们具有相同的角位移、角速度、角加速度。



定轴转动的描述

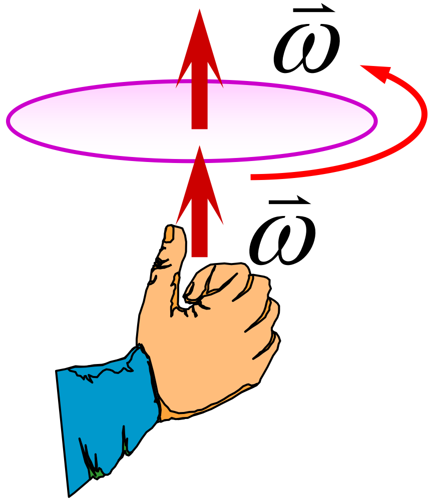
特征：刚体中所有的质点具有相同的角位移、角速度、角加速度

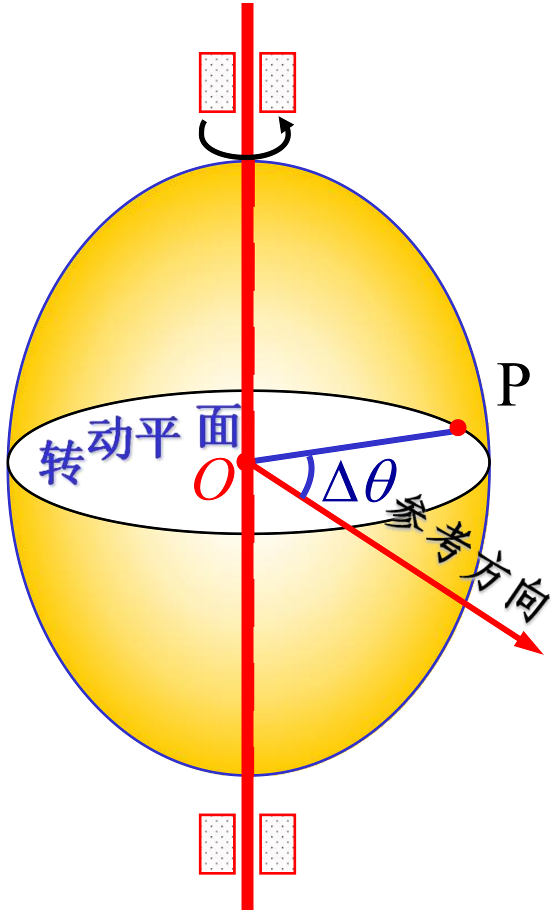
- 角位移$\Delta\theta$

- 角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

- 角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$





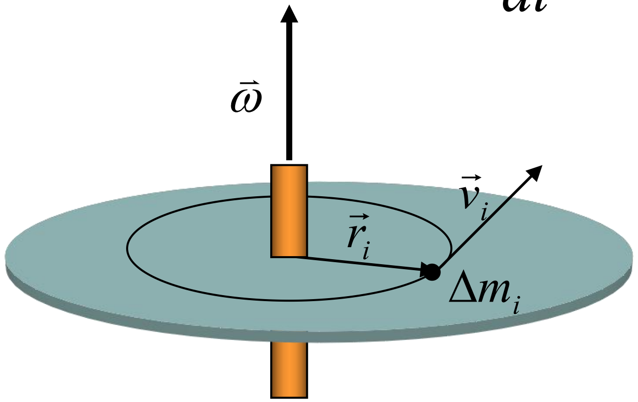


图4-3线速度和角速度之间的矢量关系

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$v_i = \omega r_i \quad a_t = \beta r_i \quad a_n = \omega^2 r_i$$

定轴转动 ⟹ 质点圆周运动

平动和转动，可以描述所有质元（质点）的运动。

§ 3.2 刚体定轴转动的转动定律

1、对轴的力矩

力$\vec{F}$作用在刚体上点 ***P***，且在转动平面内

$\vec{F}$ 对转轴 Z 的力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

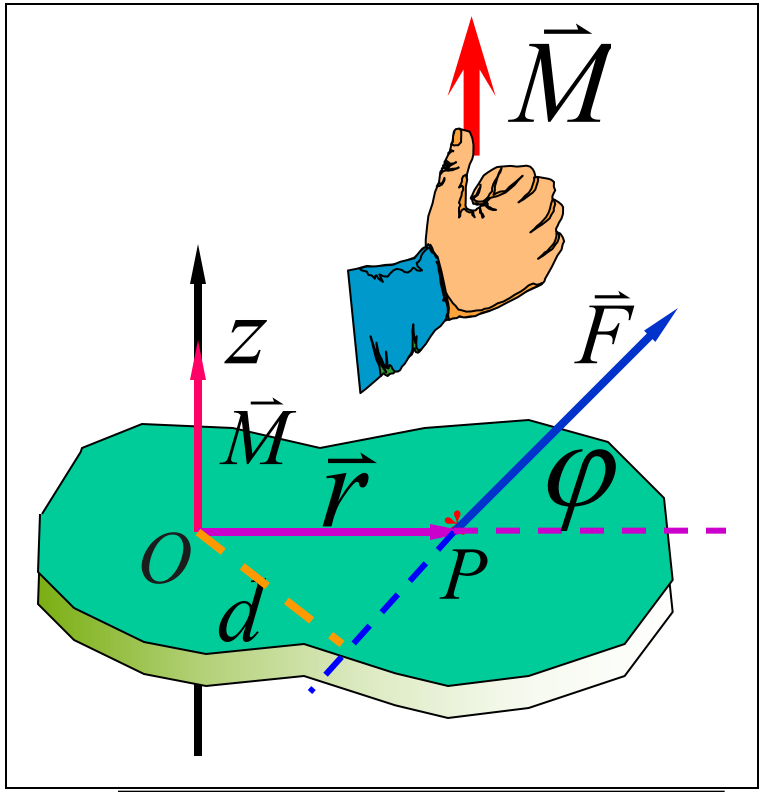
$$M = Fr\sin\varphi = F_t r = Fd$$

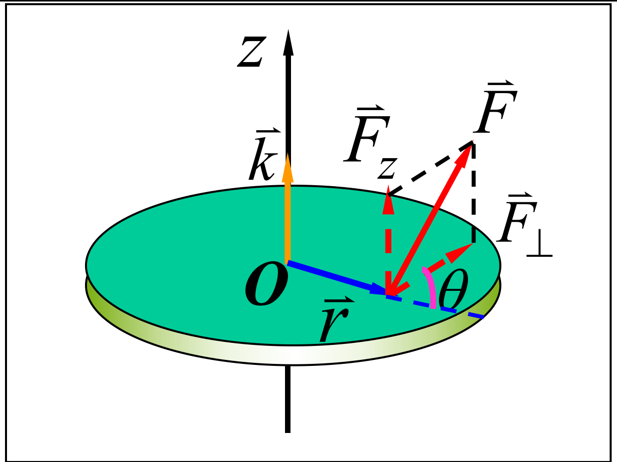
若力$\vec{F}$不在转动平面内

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$





2、定轴转动的转动定律

对m_i用牛顿第二定律：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$$

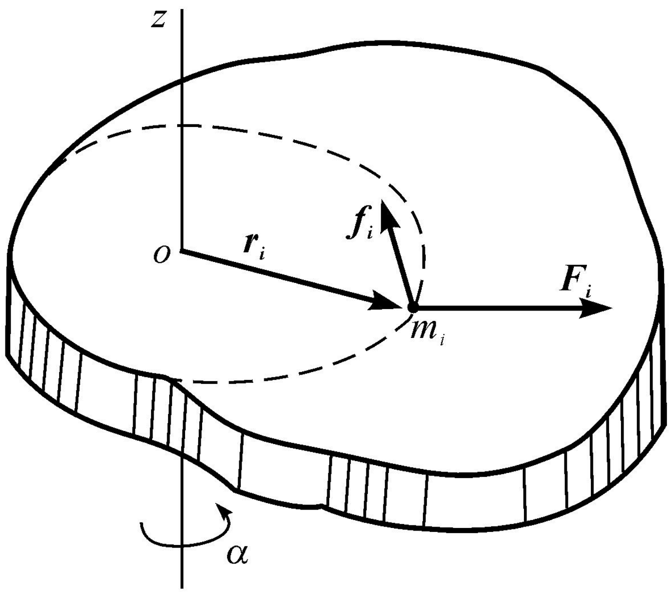
切向分量式为：

$$F_{it} + f_{it} = m_i a_{it} = m_i r_i \beta$$

切向分力与圆的半径及转轴三者互相垂直

两边乘以r_i，有：

$$\underbrace{F_{it} r_i}_{\text{外力矩}} + \underbrace{f_{it} r_i}_{\text{内力矩}} = m_i r_i^2 \beta$$



对所有质点的同样的式子求和：

$$\sum F_{it} r_i + \sum f_{it} r_i = \sum m_i r_i^2 \beta$$

一对内力的力矩之和为零，所以有

$$\sum F_{it} r_i = \left(\sum m_i r_i^2\right) \beta$$

令$J = \sum m_i r_i^2$　J为刚体对于转轴的**转动惯量**

用M表示$\sum F_{it} r_i$（**合外力矩**）

则有 $M = J\beta$

即 **刚体定轴转动的转动定律**

§ 3.3 转动惯量

1、转动惯量的物理意义

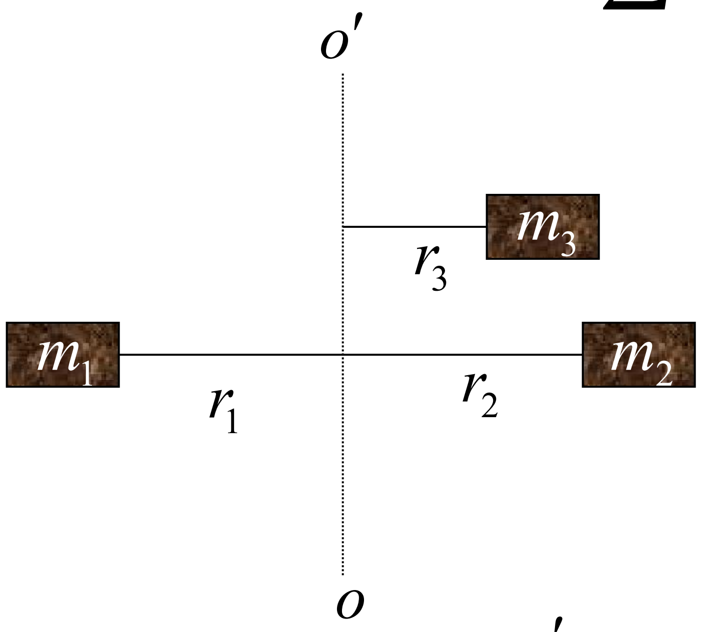
$$M = J\beta$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

J是刚体转动惯性大小的量度。

2、转动惯量的计算

$$J = \sum m_i r_i^2$$



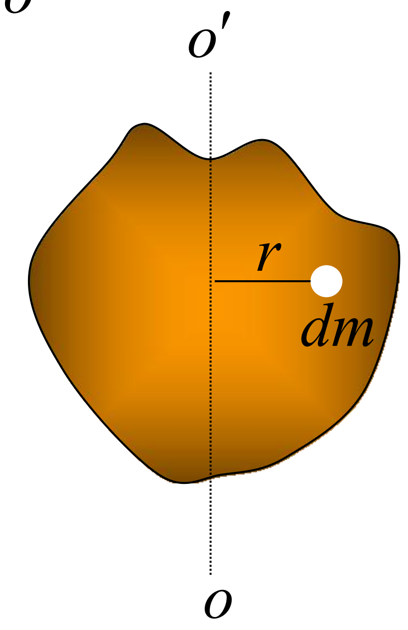
1 刚体由分离质点组成：

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

2 组成刚体的质点为连续分布：

小质元 dm $\qquad$ $dJ = r^2 dm$

则 $\qquad J = \int r^2 dm$



r 为质元到转轴之间的垂直距离

取决于三个因素：

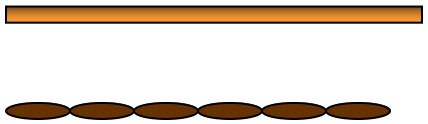
1.m的大小；2.m的分布；3.转轴位置

$$J=\sum_i m_i r_i^2 \quad \text{若质量连续分布} \quad J=\int r^2 dm$$

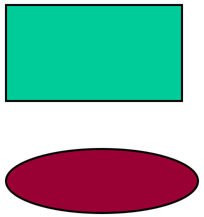
dm为质量元，简称质元。其计算方法如下：

- 质量为线分布 $dm = \lambda dl$
- 质量为面分布 $dm = \sigma ds$
- 质量为体分布 $dm = \rho dV$

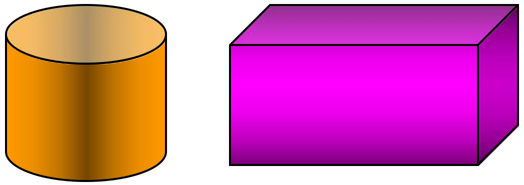
其中λ、σ、ρ分别为质量的线密度、面密度和体密度。



线分布



面分布



体分布

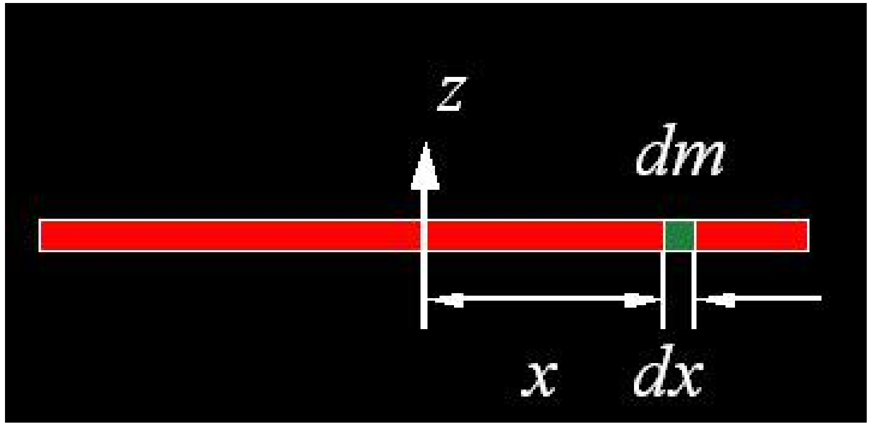
例1：一细棒质量为M, 长为 L。棒绕 z 轴(过质心)转动，求J=?

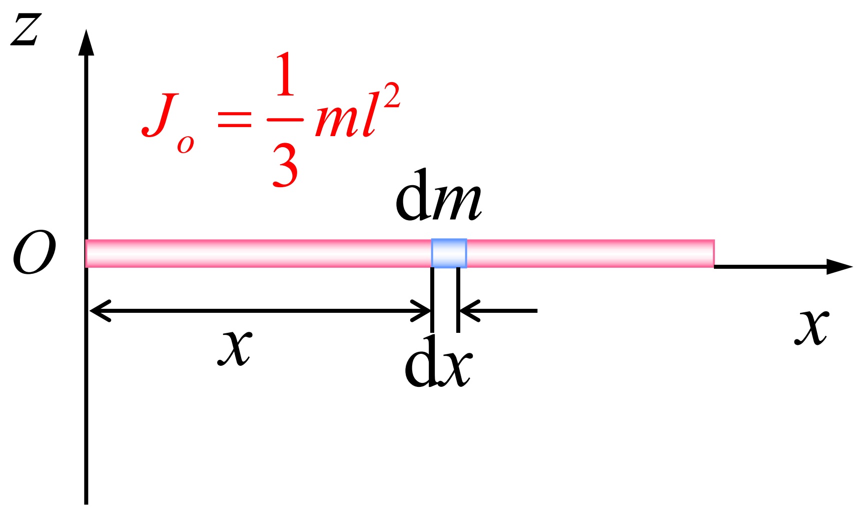
$$J_c=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\mathrm{d}m=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\lambda\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{M}{L}\frac{1}{3}[(\frac{L}{2})^3-(-\frac{L}{2})^3]$$

$$=\frac{1}{12}ML^2$$

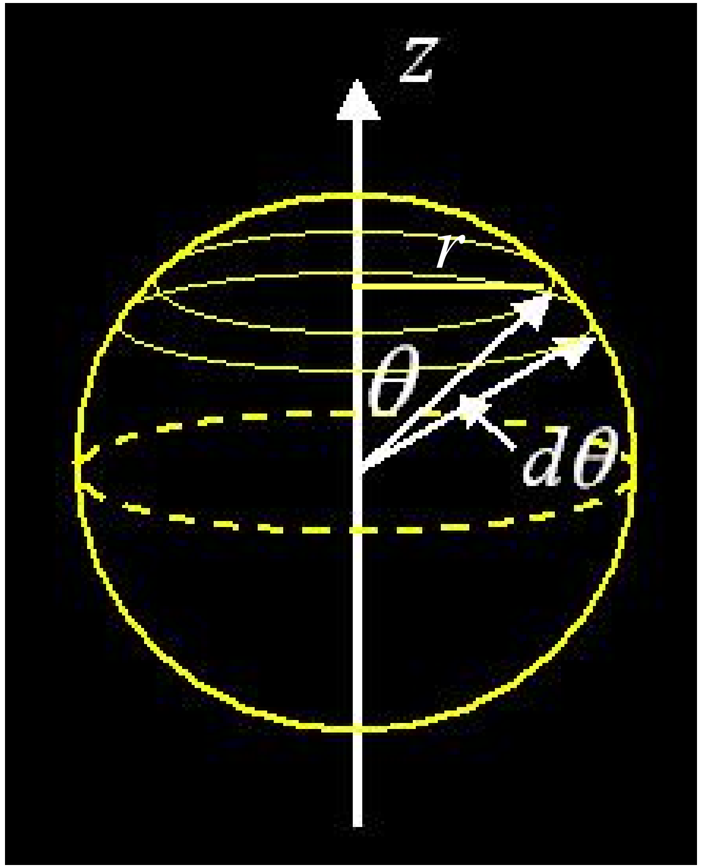




$$I = \int_0^L x^2 \mathrm{d}m = \int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{M}{L} \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

例2、求质量为M、半径为R的均匀球壳的转动惯量。轴通过球心。



$$I=\int r^2 \mathrm{d}m=\int r^2 \sigma \mathrm{d}S$$

$$=\int_0^{\pi}(R\sin\theta)^2\frac{M}{4\pi R^2}2\pi R\sin\theta R\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}MR^2$$

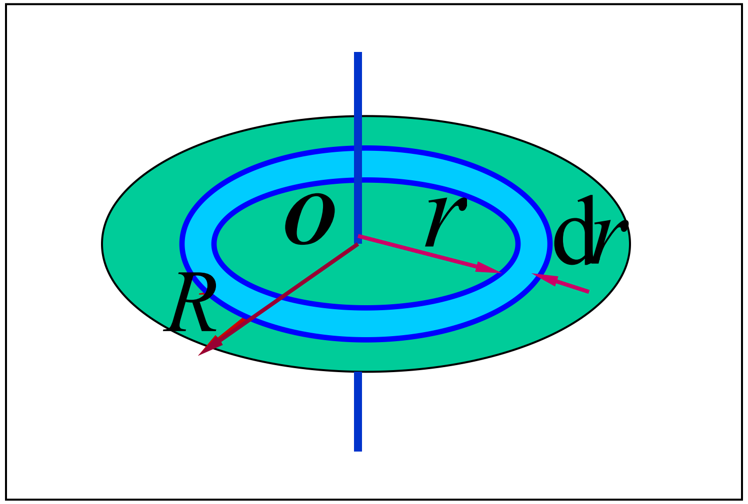
例3 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 .

圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$

圆环对轴的转动惯量

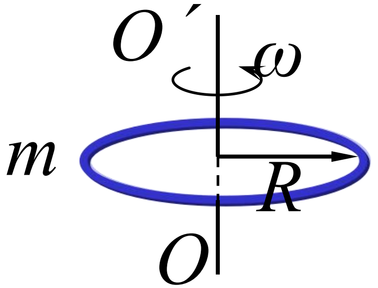
$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi \sigma r^3 \mathrm{d}r$$

$$J = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 \mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

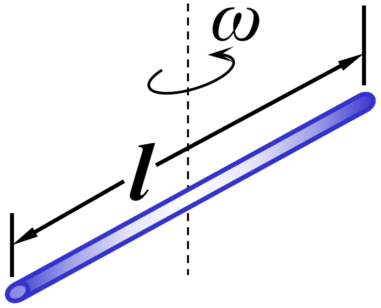


$$\sigma = m / \pi R^2$$

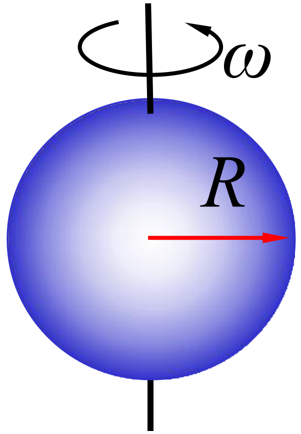
熟记常用的几个 *J* 课本表3.1



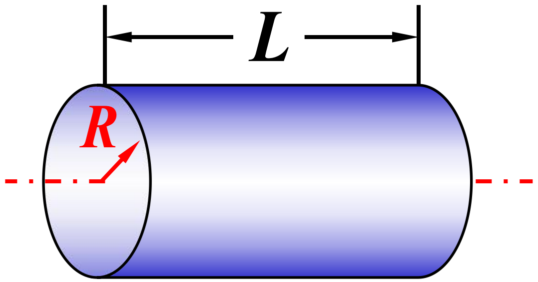
圆环 $J=mR^2$



细圆棒 $J=\frac{1}{12}ml^2$

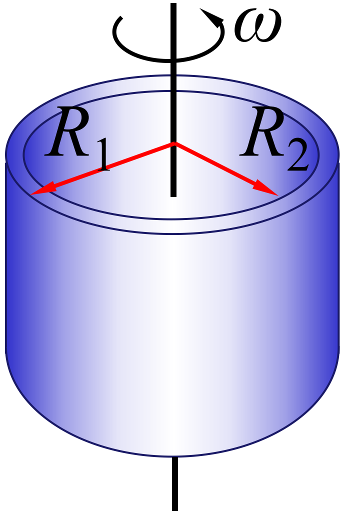


圆球 $J=\frac{2}{5}mR^2$



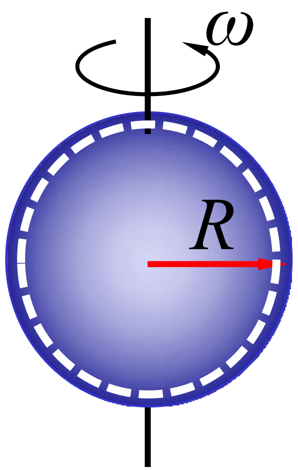
圆柱

$J=\frac{1}{2}mR^2$



圆筒

$J=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$



球壳

$I=\frac{2}{3}mR^2$

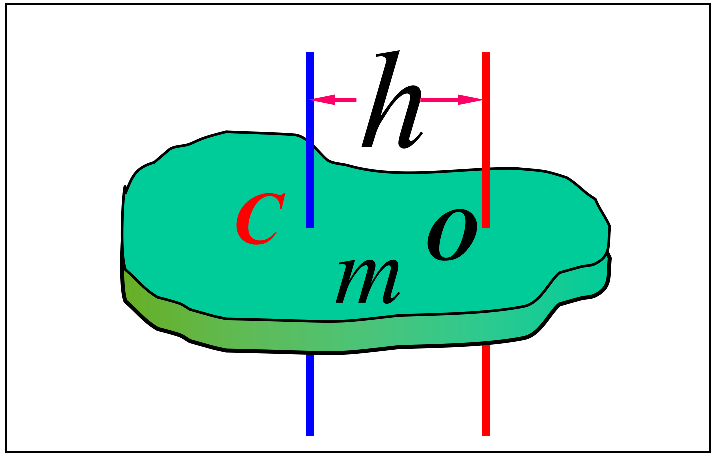
计算 J 的两个定理

1. 平行轴定理

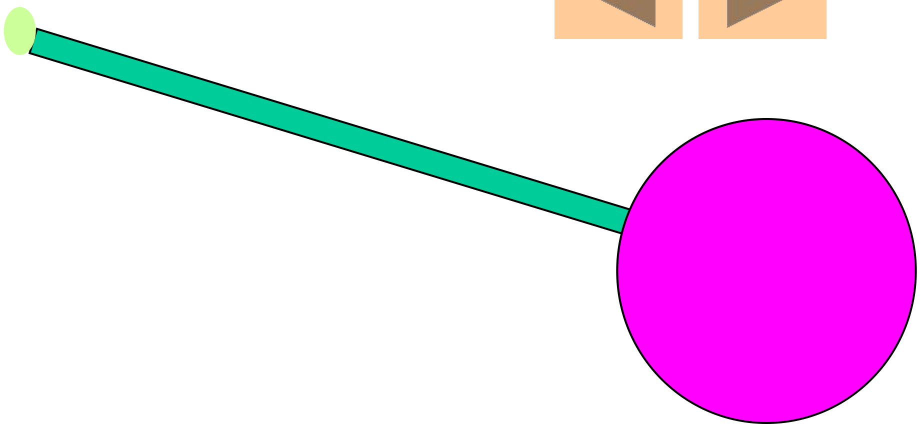
质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为 h 的转轴的转动惯量：

$$J = J_C + mh^2。$$

$$\therefore J_c = J_{\min}$$



右图所示刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量如何计算？(棒长为L、质量m_L、圆柱体质量m_0、半径为R)

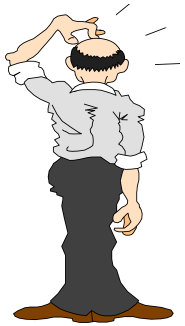


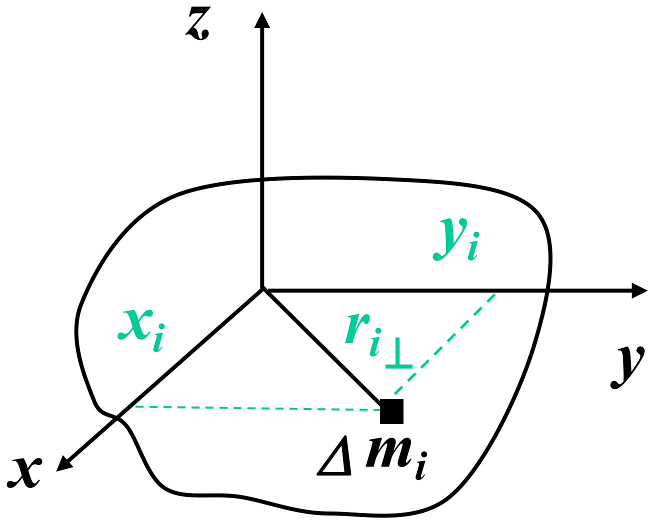
$$J_{L1}=\frac{1}{3}m_L L^2$$

$$J_o=\frac{1}{2}m_o R^2$$

$$J_{L2}=J_0+m_0h^2$$

$$J=\frac{1}{3}m_L L^2+\frac{1}{2}m_o R^2+m_o(L+R)^2$$



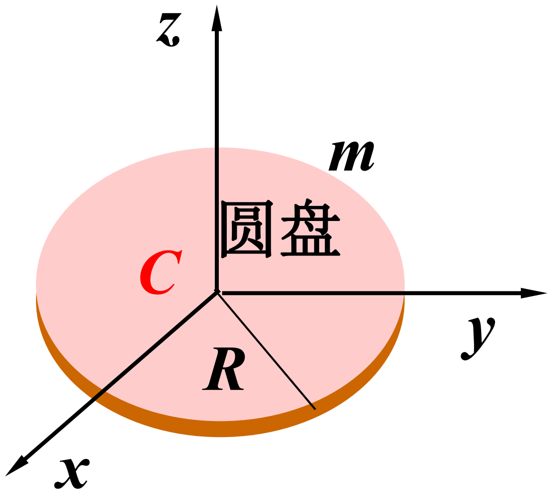


2. 刚体薄板的垂直轴定理

即 $\boxed{J_z = J_x + J_y}$

例：已知圆盘 $J_z = \frac{1}{2} mR^2$

求对圆盘的一条直径的J_x（或 J_y）。

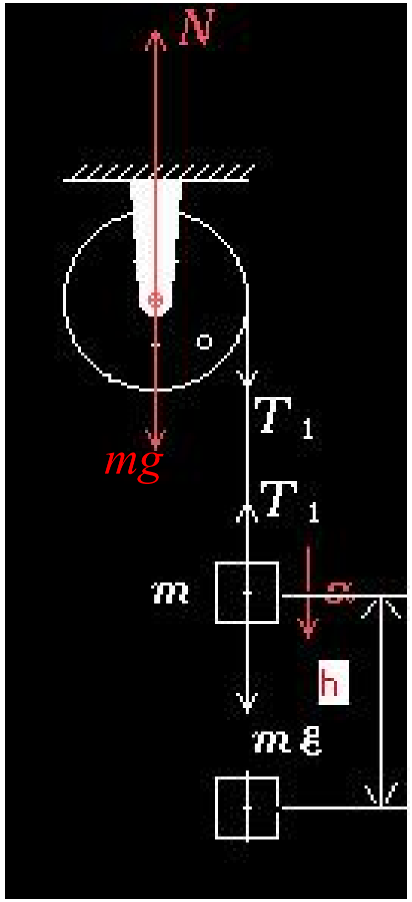


由 $\begin{cases} J_z = J_y + J_x \\ J_x = J_y \end{cases}$

$\therefore \quad J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2$

刚体定轴转动转动定律的应用

例4、一个质量为M、半径为R的定滑轮（当作均匀圆盘）上面绕有细绳，绳的一端固定在滑轮边上，另一端挂一质量为m的物体而下垂。忽略轴处摩擦，求物体m由静止下落高度h时的速度和此时滑轮的角速度。



解：

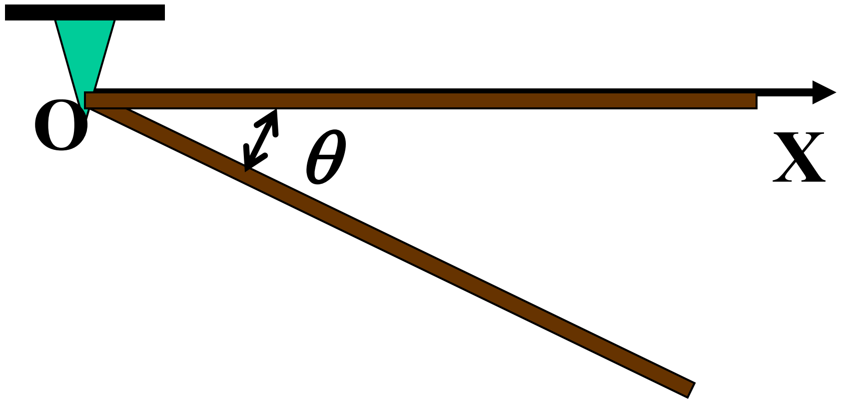
对M：$M'=T_1R=J\beta$　　$J=\dfrac{1}{2}MR^2$

对m：$mg-T_1=ma$　　$a=R\beta$

解方程得： $a=\dfrac{m}{m+M/2}g$

$$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}\qquad \omega=\frac{v}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

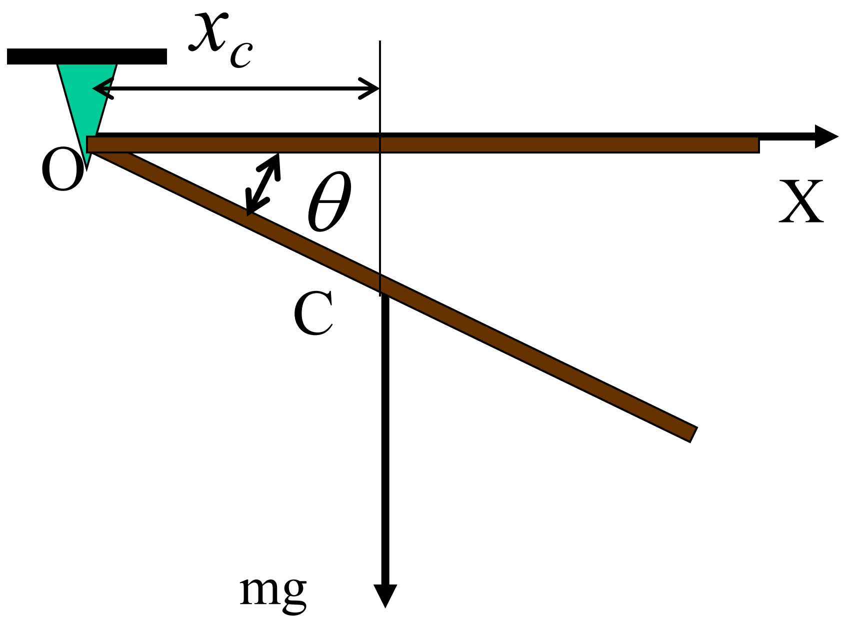
例5、一根长为l、质量为m的均匀细直棒，其一端有一固定的光滑水平轴，因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置，求它由此下摆θ角时的角加速度和角速度。



解：棒下摆为加速过程，外力矩为重力对O的力矩。则重力矩为：

$$\therefore M = mgx_C$$

$$\therefore M = mgx_C$$



$$x_c = \frac{1}{2} l \cos\theta$$

$$M = \frac{1}{2} mgl \cos\theta$$

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2} mgl \cos\theta}{\frac{1}{3} ml^2} = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$M = J\beta = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = J\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

$$Md\theta = J\omega d\omega$$

代入 $M = \frac{1}{2}mgl\ \cos\ \theta$

$$\frac{1}{2}mgl\ \cos\ \theta d\theta = J\omega d\omega$$

$$\int_0^\theta \frac{1}{2}mgl\ \cos\ \theta d\theta = \int_0^\omega J\omega d\omega$$

$$\frac{1}{2}mgl\ \sin\ \theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

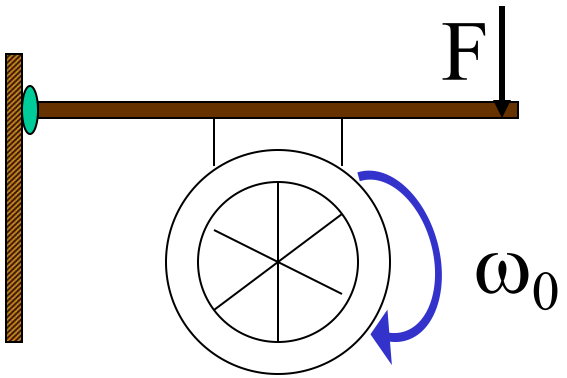
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl\sin\theta}{J}} = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

作业：

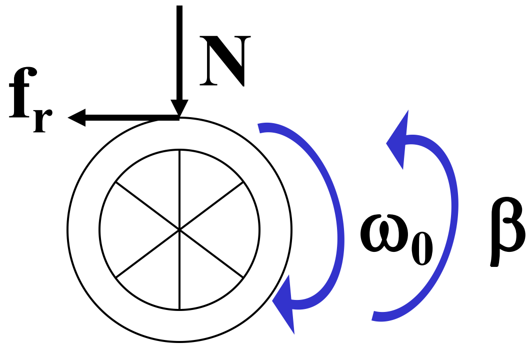
3.1　3.5

3.6　3.15

例7、一个飞轮的质量为69kg，半径为0.25m,正在以每分1000转的转速转动。现在要制动飞轮，要求在5.0秒内使它均匀减速而最后停下来。求闸瓦对轮子的压力N为多大（闸瓦和轮子之间的摩擦系数为μ）？



解：飞轮制动时有角加速度



$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\omega_0 = 1000\mathrm{r/min} = 104.7\mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 0 \quad t = 5\mathrm{s} \therefore \beta = 20.9\mathrm{rad/s^2}$$

$$M = f_r R = \mu N R = J\beta = mR^2\beta$$

$$\mu N R = mR^2\beta \qquad N = \frac{mR\beta}{\mu} = 784\,\mathrm{N}$$