浙江大学 20 17 -20 18 学年 秋冬 学期

《微积分(甲)I》课程期末考试试卷

课程号: 821T0010, 开课学院: 数学科学学院

考试试卷: A卷、B卷(请在选定项上打 ✓) 任课教师: ______________ .

考试形式: 闭、开卷(请在选定项上打 ✓), 允许带 笔 入场

考试日期: 2018 年 1 月 22 日, 考试时间: 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名: ______________ 学号: ______________ 所属院系: ______________

题序	一 (1 ~ 3)	二 (4 ~ 5)	三 (6 ~ 7)	四 (8 ~ 9)	五 (10 ~ 11)	六 (12 ~ 13)	七 (14 ~ 14)	总分
得分								
评卷人								

1. (8分)设 a, b 为实常数, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2017+x)^x + b, & x \geq 0; \\ a(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导,试求 a, b 的值.

2. (7分)计算极限值: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}\right)$.

3. (5分)设 $f(x)=\arctan x$ ，试求 $f^{(2018)}(0)$ 的值.

4. (5分)用 $\varepsilon - N$ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n^2+4} = \dfrac{2}{3}$.

5. (5分)设 $f(t) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{t}\ , & t \neq 0; \\ 1 \quad\ , & t = 0. \end{cases}$,又设$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, 试求 $F'(0)$ 的值.

6. (10分)设可导函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x^y+y^x=2$，试求 $dy\Big|_{x=1}$.

7. (10分)设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t\ , & t\in(0,1); \\ y=1-\cos t\ , & t\in(0,1). \end{cases}$ 决定, 试求 $y'(x), y''(x)$.

8. (7分)求不定积分 $\int \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}dx, x\in(-1,1)$.

9. (8分)求函数 $y=x^3-3|x|+1$ 的极值.

10. (8分)计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ 的值.

11. (7分)从半径为 $r > 0$ 的圆形铁皮中剪去一个顶点在圆心的扇形, 使卷起所得的漏斗具有最大的容积, 问此时应剪去的扇形的中心角为多少?

12. (5分)设 $c < d$ 是两个实数, f 是开区间 (c, d) 上的二阶可导函数, 且 $\forall x \in (c, d), f''(x) > 0$, 试证明: $\forall x_1, x_2 \in (c, d)$, 且$x_1 < x_2$ 有

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

13. (7分)(1) 证明: $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$, 证明: $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2,$ 有$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$;

(3) 证明: $\forall n \in \mathbb{Z}^+, I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

(4) 证明 Wallis 公式: $\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$.

14. (8分)(1) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 令$a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, 试证明正数数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 从而由单调有界数列必有极限得数列 $\{a_n\}$ 收敛, 记其极限为 α ;

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 令$b_n = a_n e^{-\frac{1}{4n}}$, 试证明数列 $\{b_n\}$ 单调递增. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$, 由此可得 $\alpha > 0$;

(3) 利用 Wallis 公式证明 $\alpha = \sqrt{2\pi}$;

(4) 证明最简形式的 Stirling 公式: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n (n \to \infty)$.