真空中的静电场(2-2)

本课时主要内容:

四、 电场线、电通量

五、 高斯定理及其应用（重点）

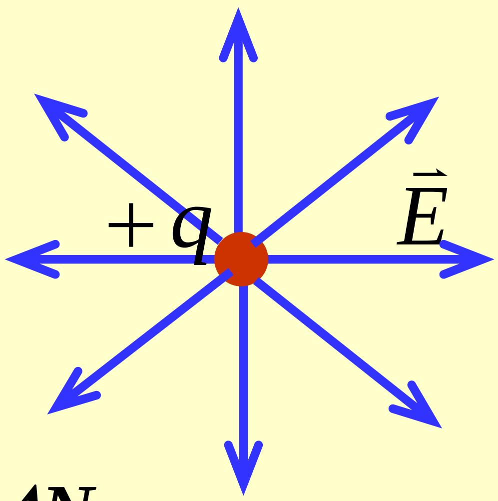
四、电场线　电通量

电场强度 $\vec{E}=\vec{E}(x,y,z)$　矢量场 $\begin{cases}\text{大小}\\\text{方向}\end{cases}$

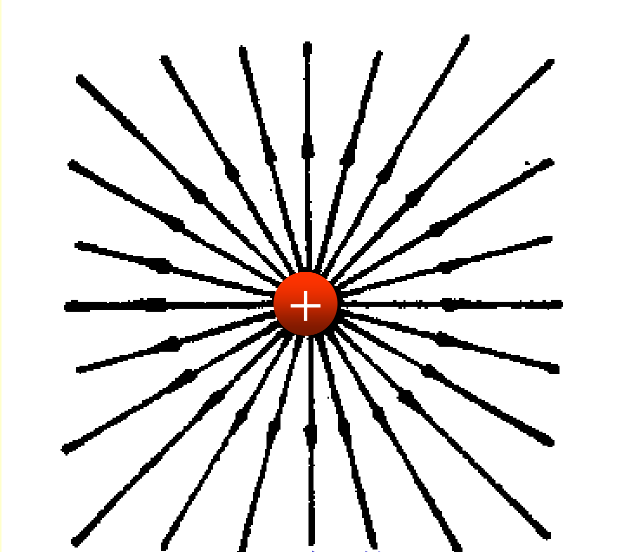
电场的图示法 —— 形象地反映电场的场强分布

1、电场线（电力线）：

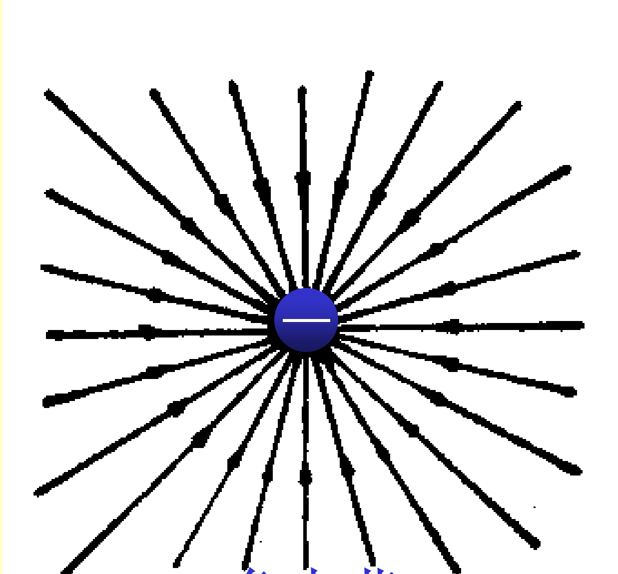
定义：电场线上各点的切线方向表示电场中该点场强的方向，在垂直于电场线的单位面积上的电场线的条数（数密度）等于该点的场强的大小。



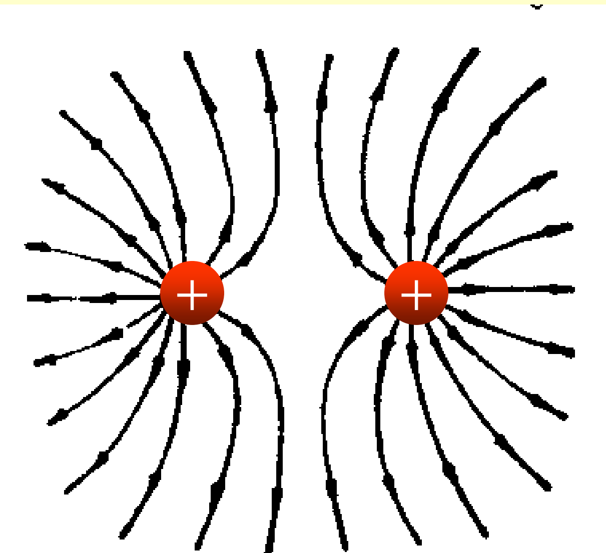
$$E(p)\propto\left(\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}}\right)_p$$



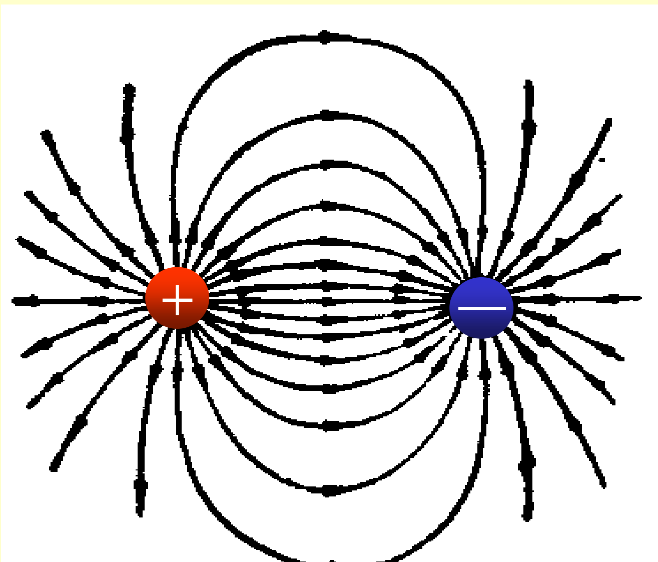
正电荷



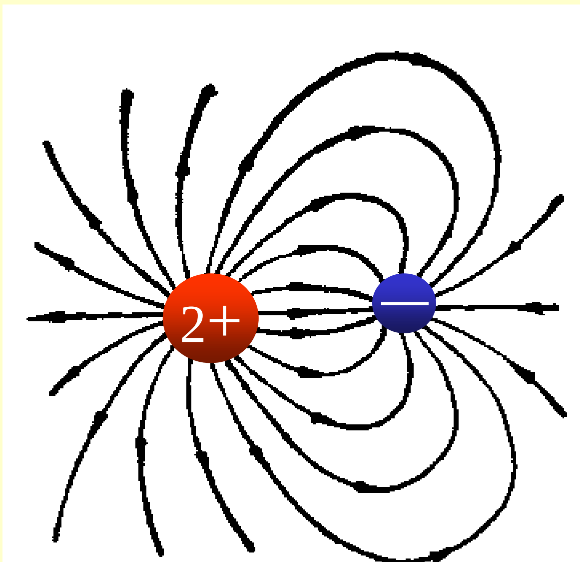
负电荷



两个等值正电荷



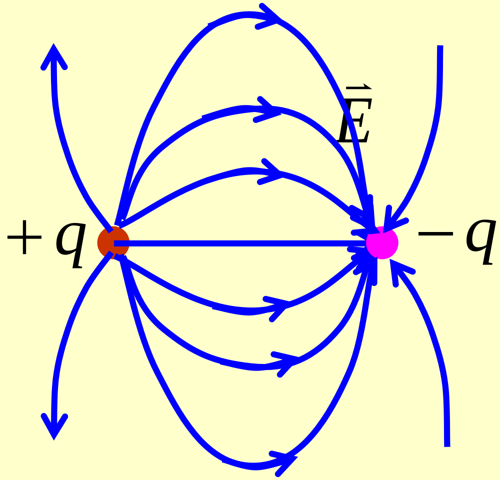
两个等值异号电荷



电荷$2q$与电荷$-q$

几种带电体的电场线的分布

电场线的性质：



✹电场线起始于正电荷终止于负电荷。

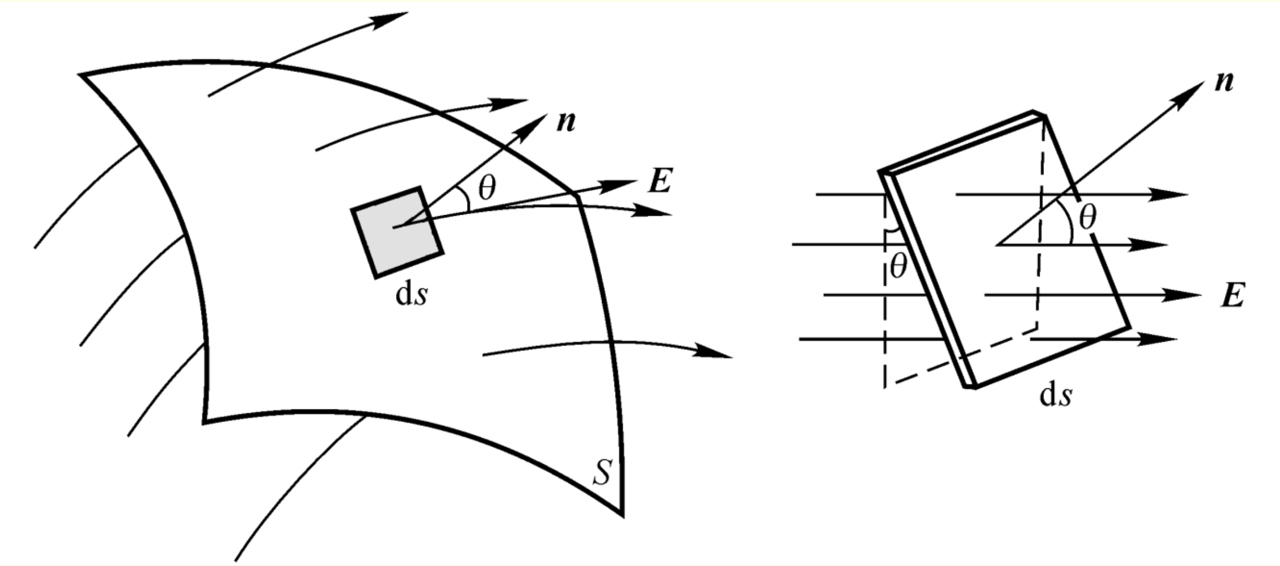
✶电场线不会形成闭合曲线，也不会中断。

✸电场线不会相交。

—— 电场的有源性、连续性、单值性

2、电通量

定义：通过任一面积元的电力线的条数称为通过这一面元的**电通量**。（类比于流速场的定义）。

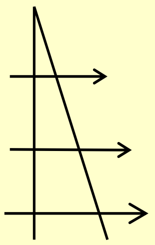


面元的方向和矢量面元：

dS面元在垂直于场强方向的投影是 $dS_{\perp}$，

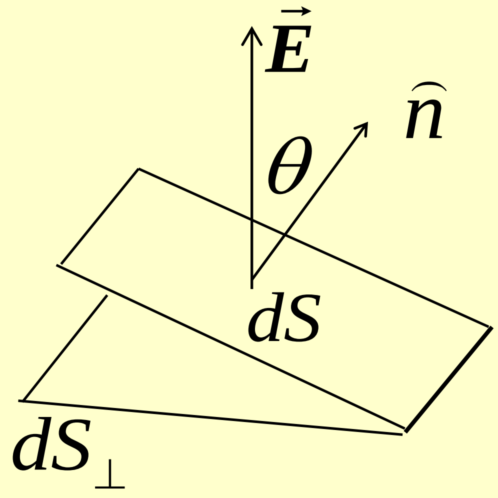
所以通过它的电通量等于面元 $dS_{\perp}$ 的电通量，

又因为 $$dS_{\perp} = dS\cos(\vec{E}\,{}^{\wedge}\,\widehat{n}) = dS\cos\theta$$



$\widehat{n}$是**面元*dS* 的法线方向**，θ是场强 $\vec{E}$ 的方向与面元***dS*** 法向 $\widehat{n}$ 的夹角。所以：

$$d\Phi_e = EdS_{\perp} = EdS\cos\theta$$



定义：矢量面元 $$\boldsymbol{d\vec{S} = dS \cdot \widehat{n}}$$

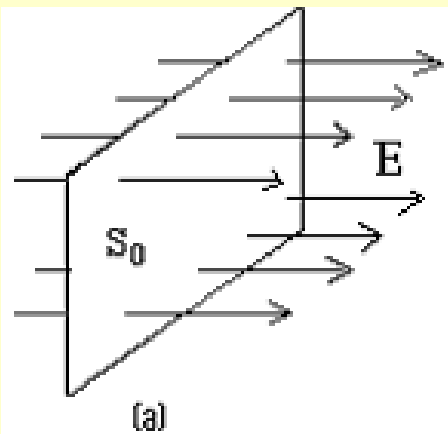
大小等于面元的面积，方向取其法线方向。

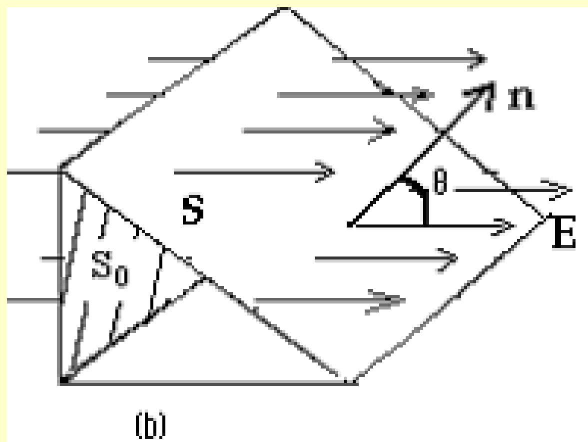
因此电通量：

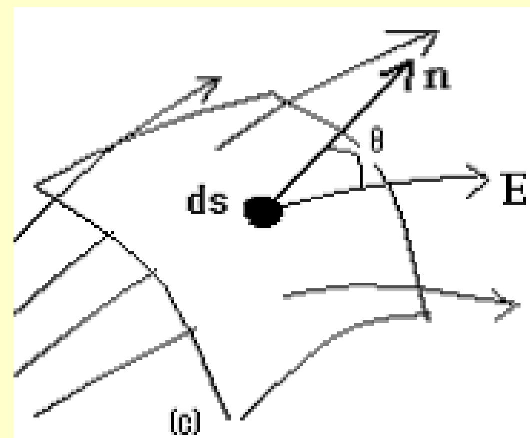
$$d\Phi_e = \vec{E} \bullet d\vec{S} \qquad d\Phi_e\text{有正负号.}$$

任一曲面S： $\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \int_S E\cos\theta \cdot dS$

匀强电场　　　　　　　　　非匀强电场







$$\Phi_e = ES_0$$

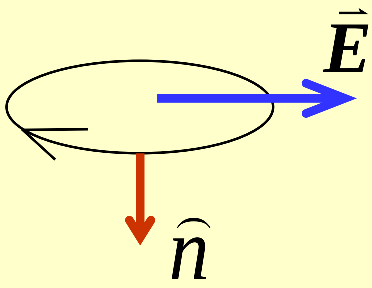
$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES\cos\theta = ES_0$$

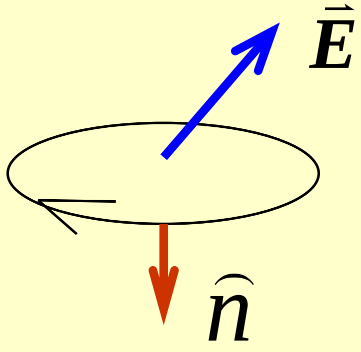
$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\cos\theta\, dS$$

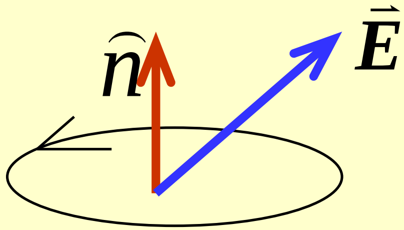
$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

曲面的法线方向:

✸ 非闭合曲面的法线正方向一般可以任意选定







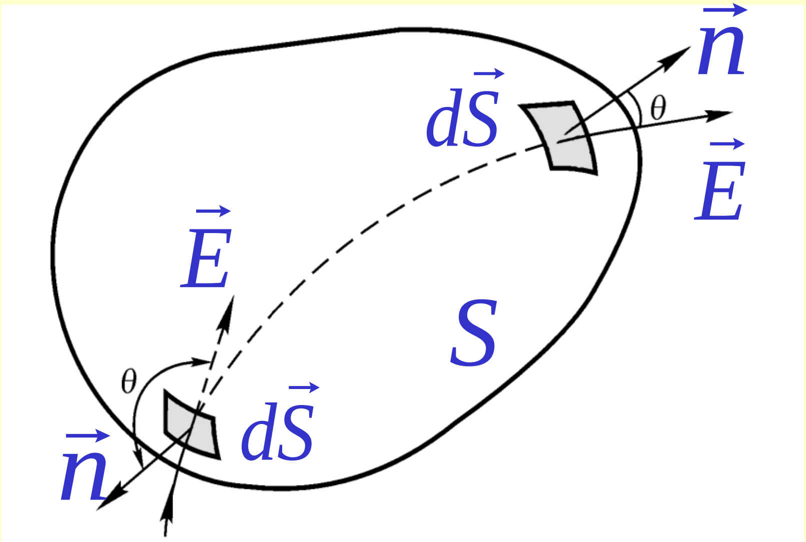
$d\Phi_e = 0$ $\qquad$ $d\Phi_e < 0$ $\qquad$ $d\Phi_e > 0$

曲面的法线方向:

★ 闭合曲面:

$d\vec{S}$: 取外法线方向

(自内向外) 为正



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_S E\cos\theta dS$$

电场线从曲面内向外穿出， $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$， 电通量为正

电场线从曲面外穿入曲面， $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$， 电通量为负

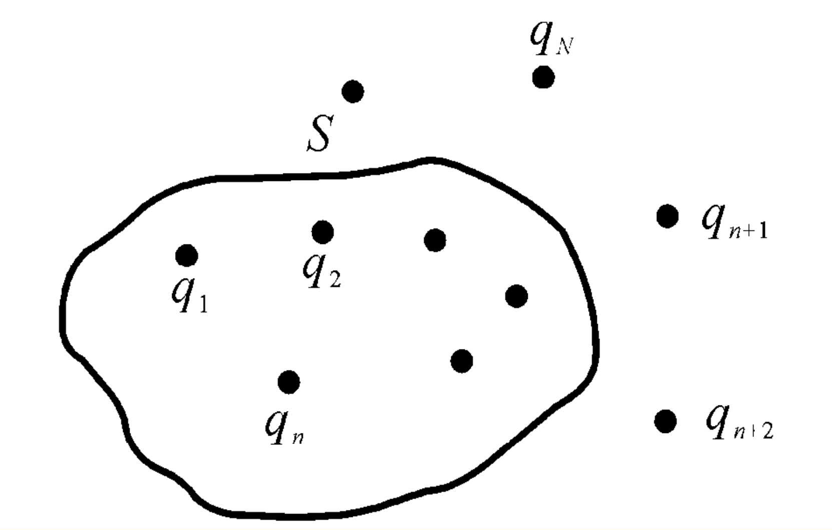
五、高斯定理及其应用

1、高斯定理 （C. F. Gauss 1777 ~ 1855 德国数学家）

—— 通过任一闭合曲面（高斯面）的电通量等于该曲面所包围电荷的代数和除以ε_0。

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}} q_i}$$

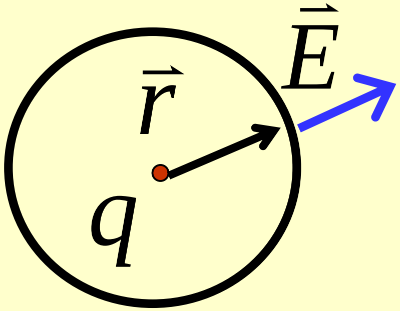
$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq}$$



2、高斯定理的证明

可用库仑定律和叠加原理证明。

(1) 点电荷在球形闭合曲面的中心



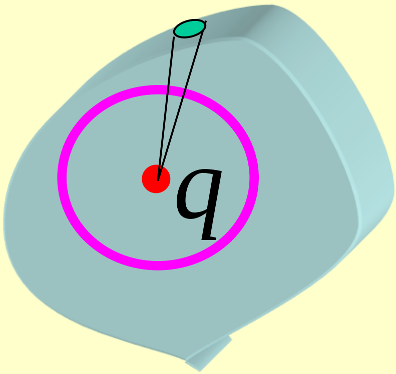
球面上各点的场强方向与其径向相同。
球面上各点的场强大小由库仑定律给出。

$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S} = EdS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dS$$

$$\Phi_e = \oiint_S d\Phi_e = \oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

此结果与球面的半径无关。
换句话说，通过各球面的电力线总条数相等。
从点电荷发出的电力线连续的延伸到无穷远。

(2)点电荷在任意闭合曲面内

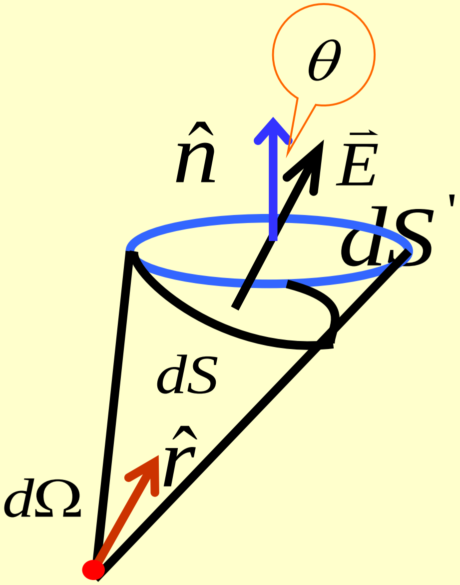


立体角 $d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{dS' \cos\theta}{r^2}$

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}' = E \cdot dS' \cos\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$\therefore \Phi_e = \oiint_S d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

可以证明： $\oiint_S d\Omega = 4\pi$

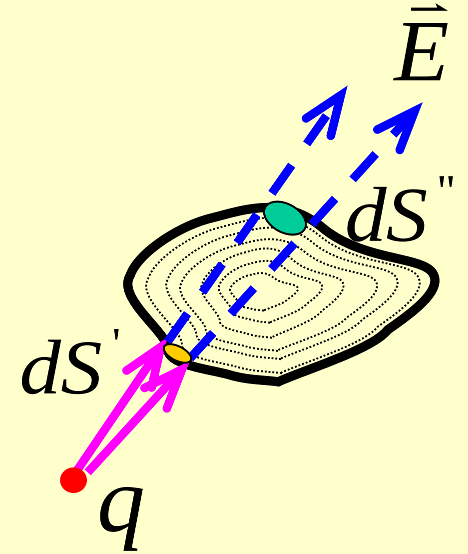


实际上因为电力线不会中断（连续性），所以通过闭合曲面 S' 和 S 的电力线数目是相等的。

(3)点电荷位于闭合面外

由于电力线的连续性可知，穿入与穿出任一闭合曲面的电通量应该相等。所以当闭合曲面无电荷时，电通量为零。

$$\Phi_e = 0$$



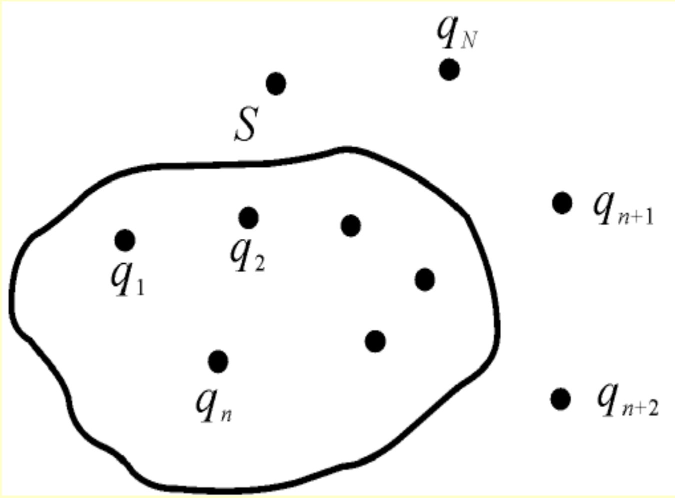
(4)点电荷体系（N个点电荷），n个位于闭合面内

利用场强叠加原理可证。

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_s (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n + \ldots + \vec{E}_N)\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$



$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

两点说明：

✸ 通过闭合曲面的电通量只决定于它所包含的电荷，闭合曲面外的电荷对电通量无贡献。

✶高斯定律中的场强$\vec{E}$是由全部电荷（包括闭合曲面内、外所有的场源电荷）产生的。

2、高斯定律的物理意义：

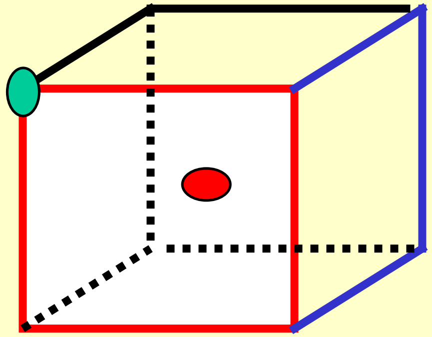
- (1)静电场为有源场。
- (2)库仑定律适用于静电场，高斯定理还适用于非静电场，适用范围更广。

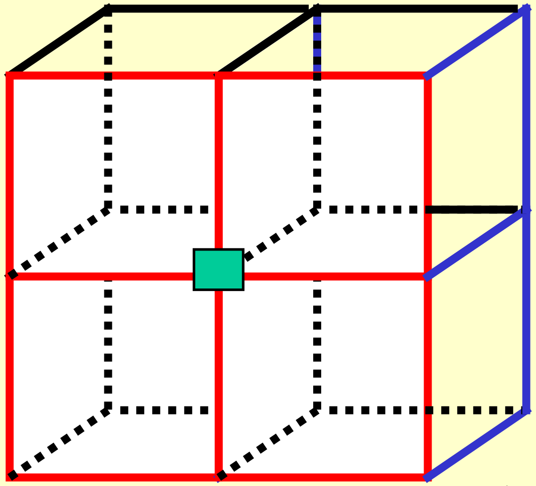
分析思考题：(1) *q*位于立方体中心，求每一面的电通量
(2) *q*位于立方体一顶点，求每一面的电通量

(1) $q/(6\varepsilon_0)$

(2) 0

$q/(24\varepsilon_0)$





3、高斯定理的应用（重点）

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS\cos\theta = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

(1) 当场源电荷的分布具有对称性时，或电场分布(包括大小和方向)具有足够的对称性时，选取适当的高斯面，使曲面积分中的E及$\cos\theta$能以常数形式提出积分号外，即可方便地应用高斯定理求出场强。

(2) 当已知场强分布时，可用高斯定律求出任一区域的电荷分布。

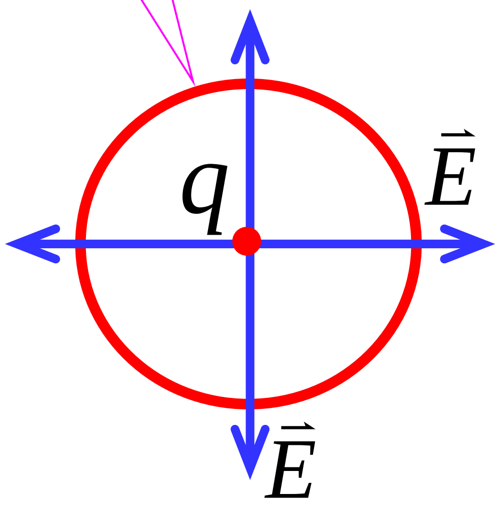
例　用高斯定理求点电荷的场强分布，证明库仑定律

点电荷的场具有一点电荷为中心的球对称性，固选以点电荷为球心，任一长度 r为半径的球面为高斯面。则有：

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS$$

$$= E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



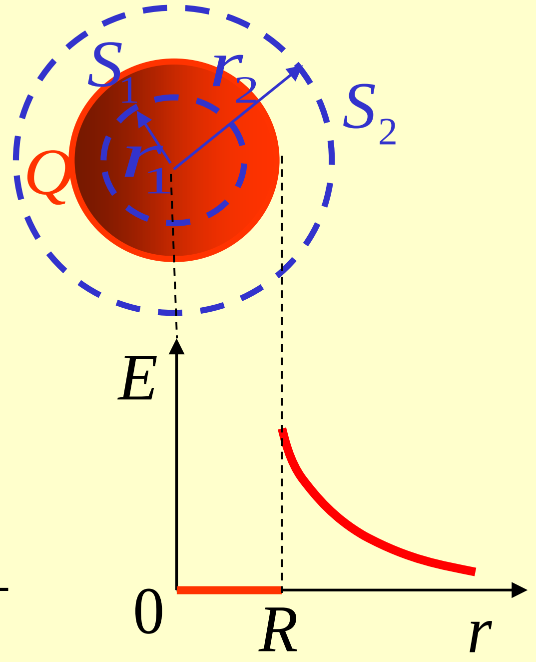
若将另一点电荷 q_0放在离 q 为 r 远的地方,则由场强定义可求出 q_0受到的力:

$$\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

例1：求均匀带电球面的电场，球面半径为R，带电为Q。

解： 场源的对称性决定着场强分布的对称性。

场强具有与场源同心的球对称性，方向沿着径向，且在球面上的场强处处相等。



作同心且半径为r 的高斯球面.

$r>R$时，高斯面包围电荷Q，

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_s E\,dS=E\oint_s dS=E\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r<R$时，高斯面无电荷，

$$4\pi r^2 E=0 \qquad E=0$$

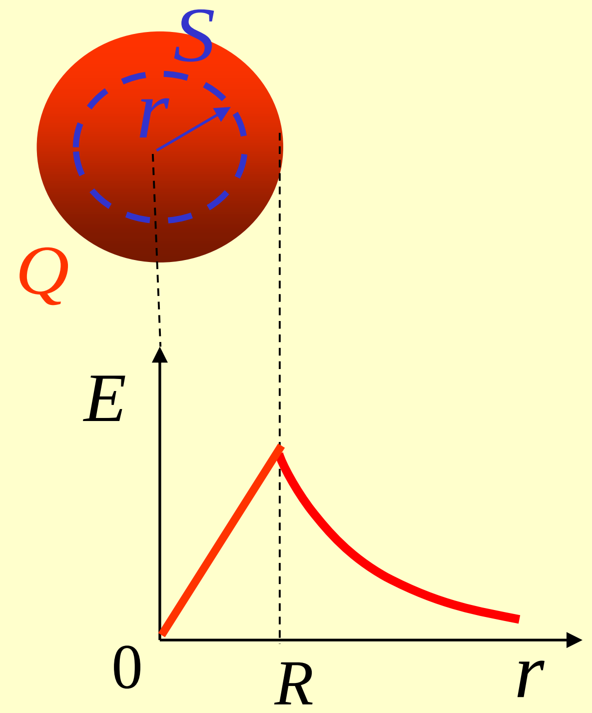
均匀带电球面

$$E=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases}$$

例2：求均匀带电球体的电场（球体半径为R，带电量为Q）

解：

球体外：$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$



球体内：任一点作半径为r的高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oint_S dS = E\,4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = Q\Big/\frac{4}{3}\pi R^3,\quad q' = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$\therefore$ 球体内：$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q'}{r^2} = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

均匀带电球体

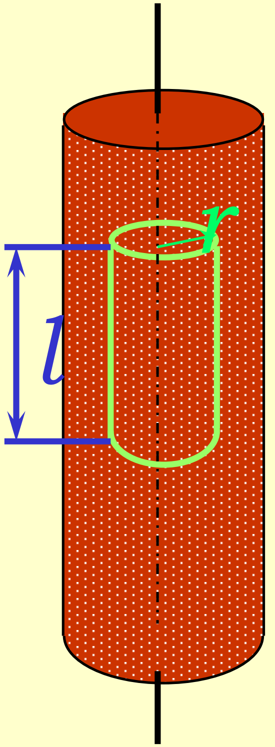
$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r < R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

例3：求无限长均匀带电圆柱面(半径R，电荷线密度λ)的电场。

$\lambda = \sigma \cdot 2\pi R$ (单位长度的电荷密度)

解：电场分布也应有柱对称性，方向沿径向。

作同轴的圆柱形高斯面，高为 l，半径为 r。



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 2\pi r l$$

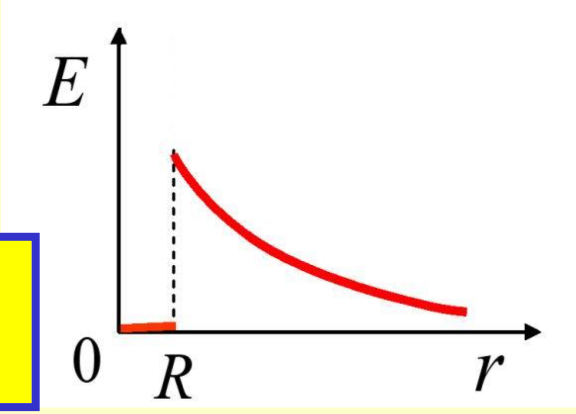
(上、下底面的场强方向与面平行，其电通量为零。)

$r<R$： $\sum q = 0$

$$2\pi r l E = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

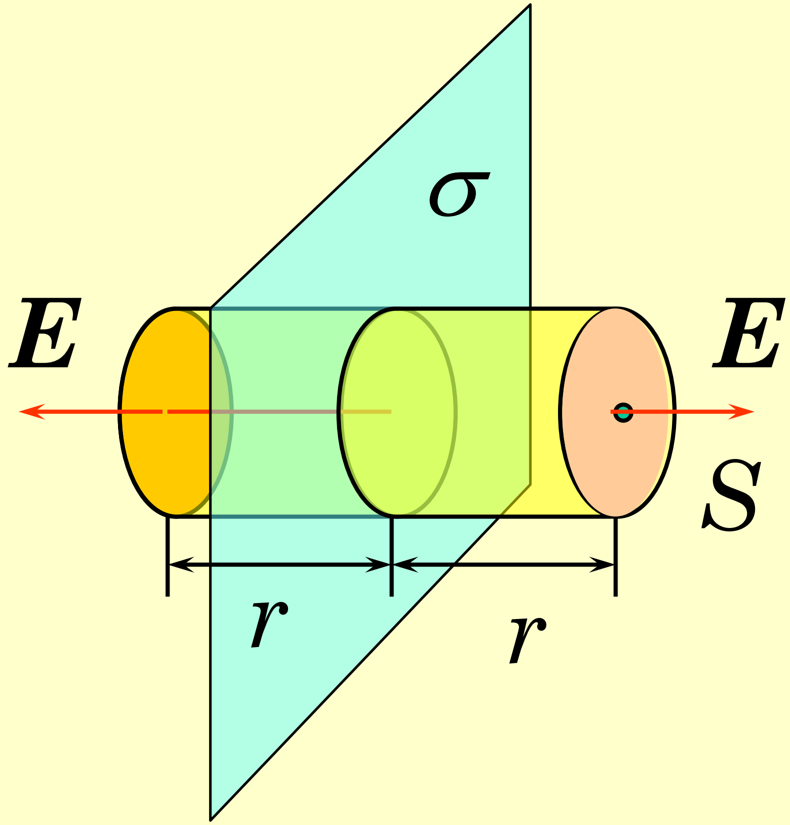
$r>R$： $\sum q = \lambda l$

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



无限长带电直线 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$ (a:到直线的垂直距离)

例4：无限大均匀带电平面，面电荷密度为 σ，求平面附近某点的电场强度。



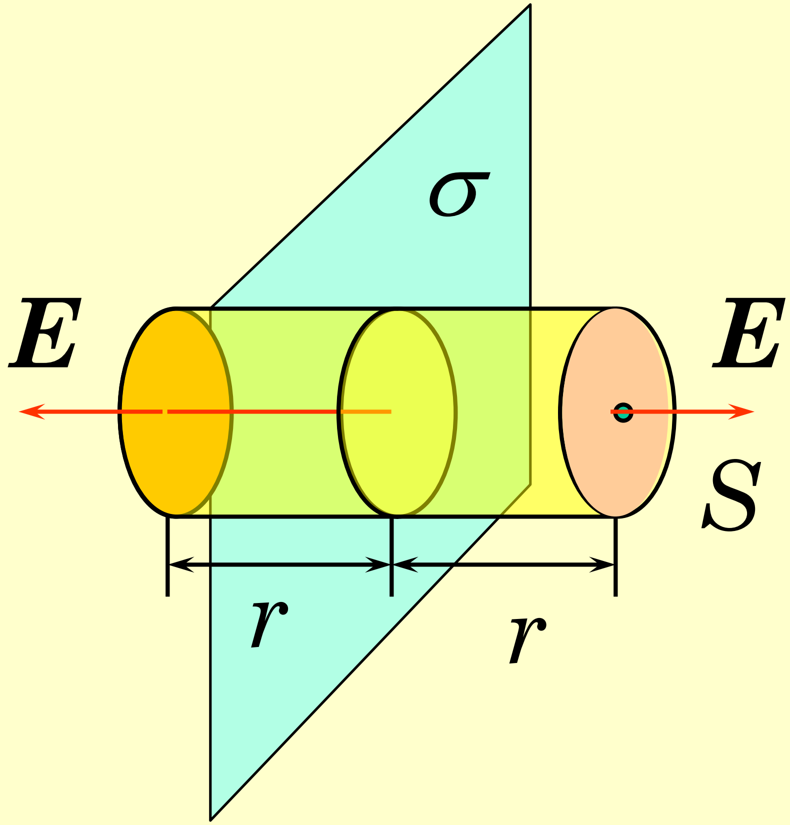
分析：由于电荷分布对于所求场点 $\boldsymbol{p}$ 到平面的垂线 $\boldsymbol{op}$ 是对称的，所以 $\boldsymbol{p}$ 点的场强必然垂直于该平面。

又：因电荷均匀分布在无限大的平面上，所以电场分布对该平面对称。即离平面等远处的场强大小都相等、方向都垂直于平面。

高斯面：作底面积为 S，高为 $2r$ 的闭合圆柱面，带电平面平分此圆柱。

例4：无限大均匀带电平面，面电荷密度为σ，求平面附近某点的电场强度。

解： 作底面积为 S，高为 $2r$ 的闭合圆柱面为高斯面。



$$\Phi_e = \Phi_{左底} + \Phi_{右底} + \Phi_{侧}$$

$$= 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

场强方向垂直于带电平面。

$\sigma > 0$ 场强方向指离平面;

$\sigma < 0$ 场强方向指向平面.

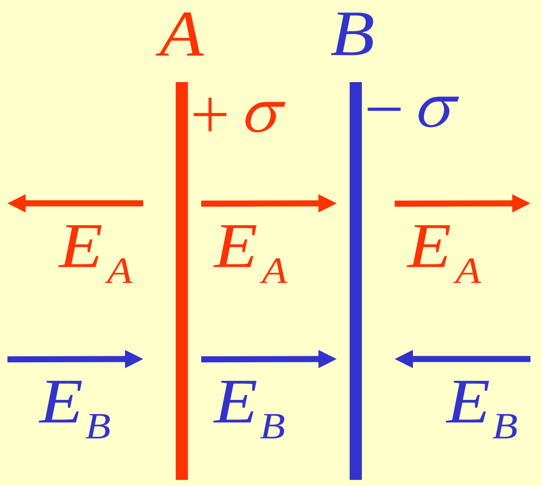
例5：两无限大均匀带电平面（平行板电容器），面电荷密度分别为 +σ 和 -σ，求：电容器内、外的电场强度。

分析：该系统不再具有简单的对称性，不能直接应用高斯定律。

然而每一个带电平面的场强先可用高斯定律求出，然后再用叠加原理求两个带电平面产生的总场强。注意方向！

解：极板左侧

$$E = E_+ - E_- = 0$$



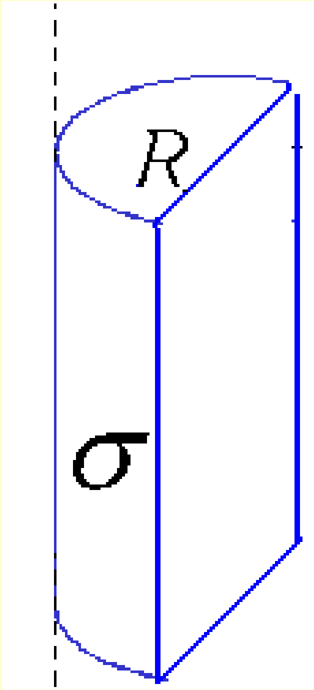
极板右侧

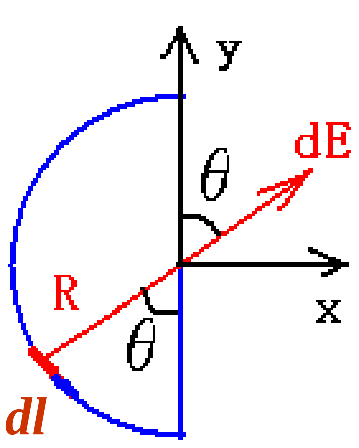
$$E = E_+ - E_- = 0$$

两极板间

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

例6：一半径为R的无限长半圆柱面形薄筒均匀带电，电荷面密度为σ，试求圆柱面轴线上一点的电场强度。





解：

$$dE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R} = \frac{\sigma R d\theta}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dq = \sigma dS = \sigma L\, dl$$

$$\lambda = \frac{dq}{L} = \frac{\sigma L dl}{L} = \sigma dl = \sigma R d\theta$$

$$dE_x = dE\sin\theta = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta d\theta$$

$$E = \int dE_x = \int_0^{\pi}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta d\theta = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\vec{i}$$

高斯面选取的一般原则:

*高斯面必须经过所求场强的点.

*在求E的部分高斯面上,要求该面上各点E的大小处处相等,方向和dS矢量平行.

*在不求E的部分高斯面上,E的方向和dS垂直;或者$E=0$.

*高斯面应选取规则形状,以便计算.

电场强度的计算小结：

1. 场强叠加原理：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \dfrac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$ ， $\vec{E}=\int d\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{dq}{r^2}\hat{r}$

2. 高斯定理（电荷对称分布）：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i\\[2ex] \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int dq\end{cases}$$

$$dq=\begin{cases}\lambda\, dl\\ \sigma\, dS\\ \rho\, dV\end{cases}$$

常见电荷分布的对称性：(均匀带电)

球对称	点电荷	球面	球体
柱对称(无限长)	直线	柱面	柱体
面对称(无限大)		平面	平板

3. 利用已知电荷分布的场强组合叠加（相加法、补偿法）

作业：

9.11	**9.14**	**9.18**
9.19	**9.21**	**9.22**