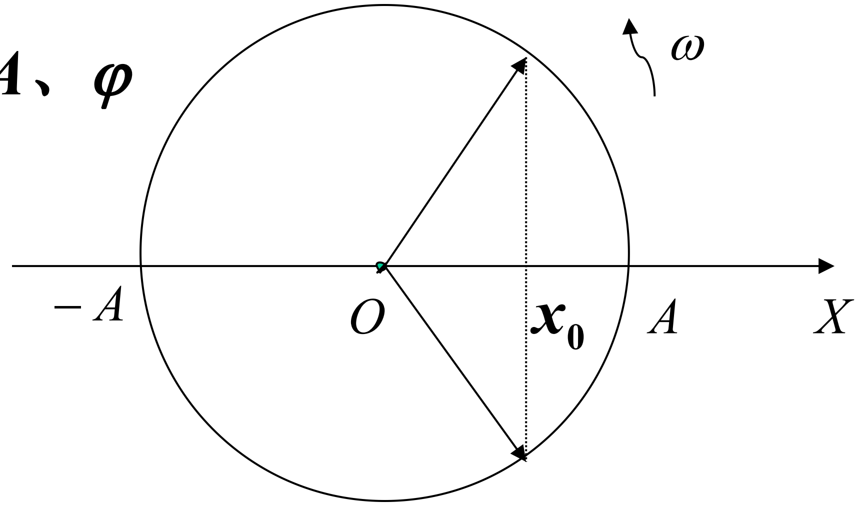
机械振动和机械波习题课

一、简谐振动的表达式及确定方法：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

然后确定三个特征量：ω、A、φ

旋转矢量法确定φ：
先在X轴上找到相应x_0，有两个旋转矢量，由v_0的正负来确定其中的一个



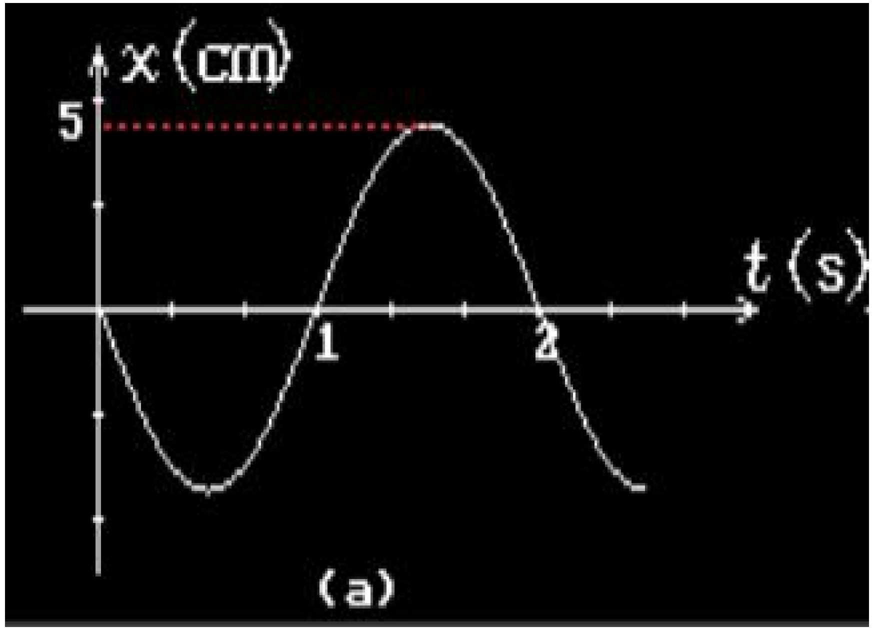
$$v_0 < 0, \text{上半圆}, 0 < \varphi < \pi$$

$$v_0 > 0, \text{下半圆}，\ \pi < \varphi < 2\pi \text{或} -\pi < \varphi < 0$$

$$v_0 = 0, x_0 = A, \varphi = 0, x_0 = -A, \varphi = \pi$$

机械振动和机械波习题课

【例题1】如图所示，写出(a)、(b)图振动曲线对应的振动方程



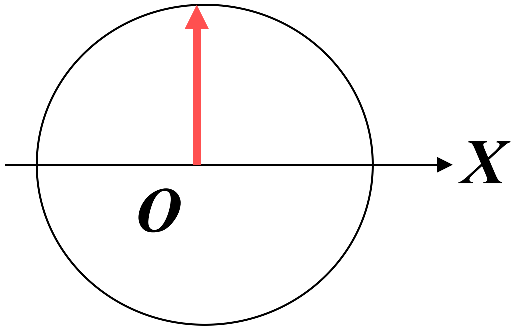
解：由图上的各量可得

$(a)\ \ A = 0.05\text{m} \ \ T = 2\text{s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

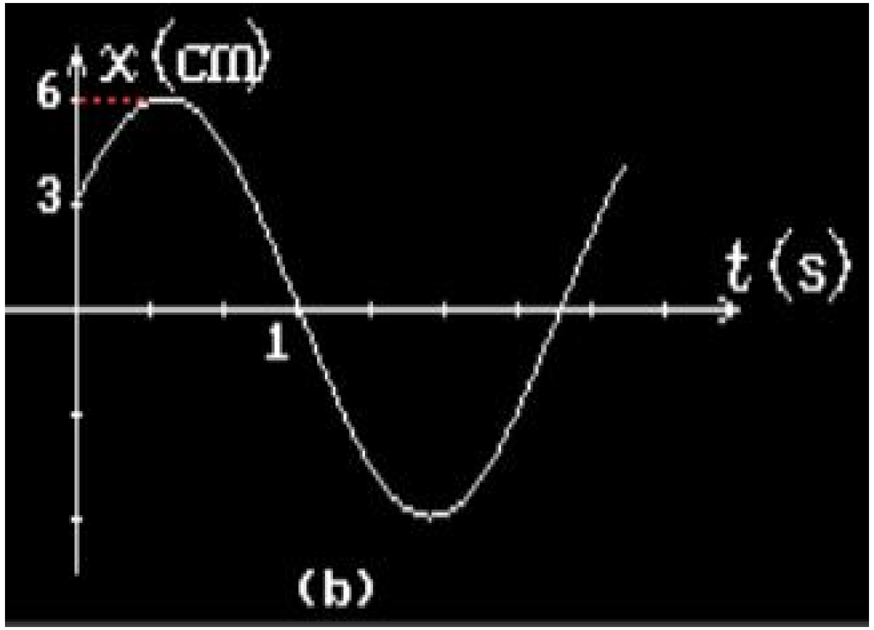
$$x_0 = 0 \quad v_0 < 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 0.05\cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) \ \ (\text{m})$$



机械振动和机械波习题课

【例题2】如图所示，写出(b)图振动曲线对应的振动方程



解：由图可知

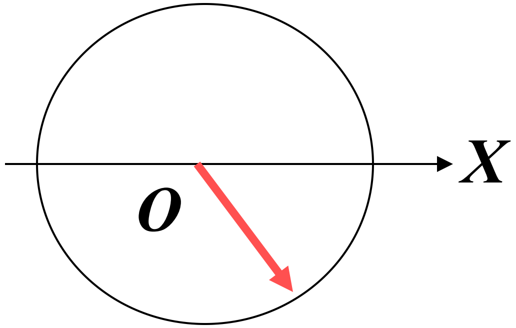
$(b)\quad A = 0.06\text{m}$

$t = 0 \quad x_0 = \dfrac{A}{2} \quad v_0 > 0 \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

$t = 1\text{s} \quad x_1 = 0 \quad v_1 < 0 \quad \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$

$\varphi_1 = \omega t_1 + \varphi \qquad \omega = \dfrac{5}{6}\pi$

$$x = 0.06\cos(\frac{5}{6}\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad (\text{m})$$



机械振动和机械波习题课

二、简谐振动的判定：

$$(1).F=-kx \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$

$$(2).\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\mathbf{const.} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

分析步骤：

1、找到平衡位置*O*，建立坐标系；

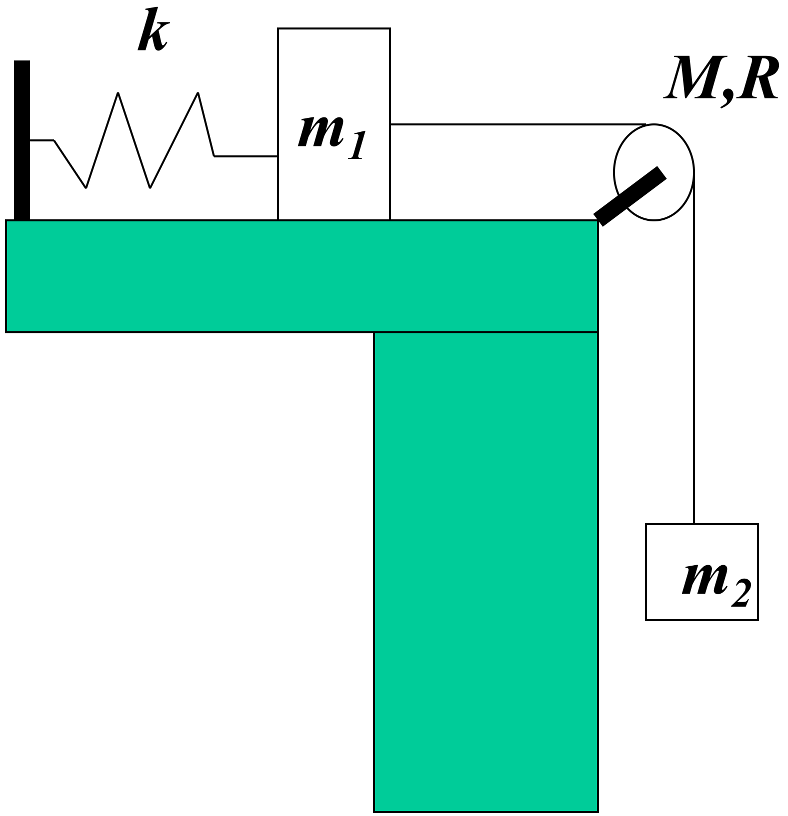
2、受力分析；

2、沿*X*轴正方向移动一小位移*x*；

3、证明 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

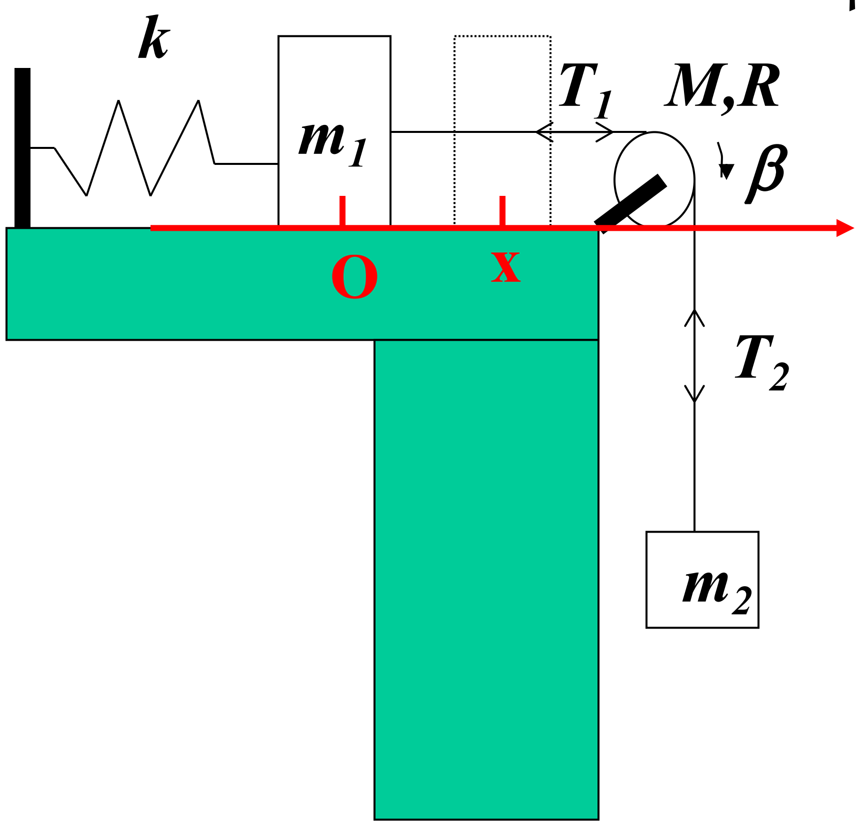
机械振动和机械波习题课

例3. 如图所示：已知m_1　m_2　k　$\mu=0$. 圆柱型定滑轮：M,R,纯滚动. 试证明m_1作简谐振动,并求出ω.



机械振动和机械波习题课

解:动力学法.



受力分析如图，取m_1平衡位置为坐标原点o

$$kx_0 = m_2 g$$

$$m_1: T_1 - k(x + x_0) = m_1 \frac{d^2x}{d^2t}$$

$$m_2: m_2 g - T_2 = m_2 \frac{d^2x}{d^2t}$$

$$M: (T_2 - T_1)R = \frac{1}{2} MR^2 \beta$$

$$\frac{d^2x}{d^2t} = \beta R$$

机械振动和机械波习题课

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{d^2t}+\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}x=0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}}}$$

机械振动和机械波习题课

解:能量法(系统机械能守恒).

$$\frac{1}{2}k(x+x_0)^2+\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}m_2V^2-m_2gx=Const.$$

$$\text{其中}: m_2g=kx_0,\quad \omega=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}},\quad \mathrm{J}=\frac{1}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2+\frac{1}{2}M)(\frac{dx}{dt})^2=Const+C'.$$

$$\Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}}$$

三、简谐振动的能量：

动能E_k　势能E_P

总能量为

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

机械振动和机械波习题课

四、简谐振动的合成：

1、同方向、同频率的两个简谐振动的合成：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

2、同方向、不同频率的两个简谐振动的合成：

$$A_{合}=2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$$

拍频 $\nu_{\mathrm{b}}=|\nu_2-\nu_1|$

机械振动和机械波习题课

3、了解互相垂直的两种简谐振动的合成（掌握合振动旋转方向的判断）！

五、一维简谐波的波动表达式及确定方法：

①先写出标准表达式

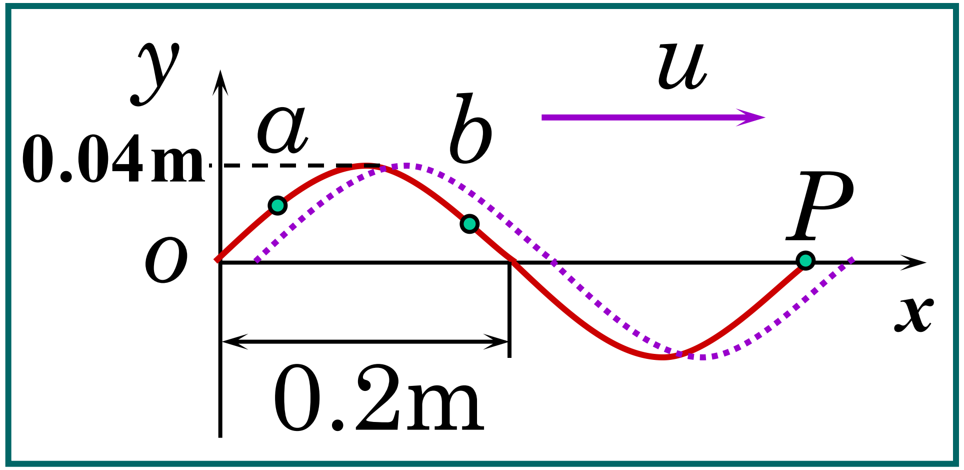
$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

②代入已知点，比较确定标准表达式中的各物理量即可

或先求出原点的振动方程，再将t换成 t±x/u即可；

或先求出x_1处的振动方程，再将t换成 t±(x-x_1)/u即可。

例4： 如图为t=0时刻的波形，平面简谐波向右移动速度 $u=0.08$ m/s，**求：** ① 原点处的振动方程；② 波函数；③ P 点的振动方程；④ a、b 两点振动方向。



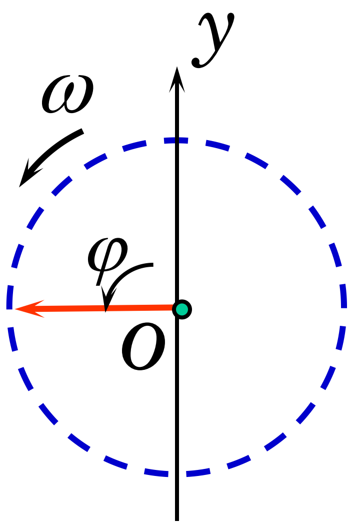
解： ① 设原点处质点的振动方程为：$y_0 = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\lambda = 2\times 0.2 = 0.4\text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi u}{\lambda}$$

$$= 2\pi\times 0.08/0.4 = \frac{2\pi}{5}$$

$$\boxed{\varphi = \pi/2}$$



由波形图知： $t=0$ 时， $y_0=0$, $v_0<0$

原点的振动方程为：$y_0 = 0.04\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t+\dfrac{\pi}{2}\right)m$

原点的振动方程为： $y_0 = 0.04\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)m$

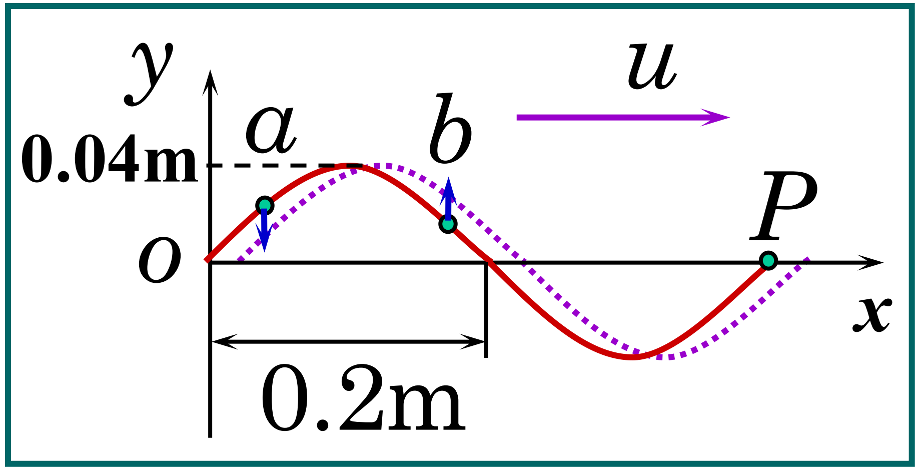
② 波函数 $y = 0.04\cos\left[\frac{2\pi}{5}\left(t - \frac{x}{0.08}\right) + \frac{\pi}{2}\right]m$

③ P 点的振动方程

$x_P = \lambda = 0.4\text{m}$

$$y = 0.04\cos\left[\frac{2\pi}{5}\left(t - \frac{0.4}{0.08}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 0.04\cos\left[\frac{2\pi}{5}(t-5) + \frac{\pi}{2}\right]$$

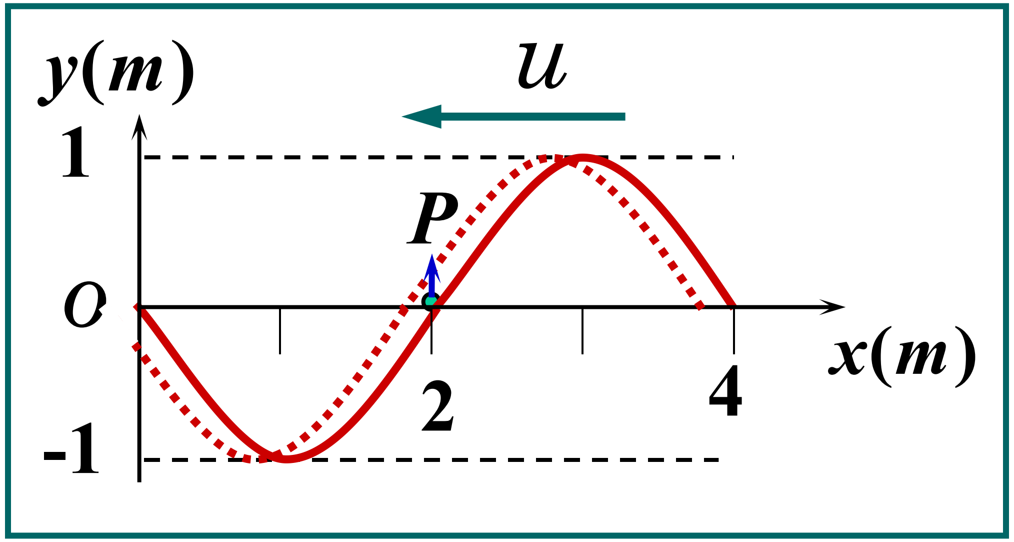


④ a、b 振动方向，作出Δt 后的波形图，如图所示。

例5： 如图为一平面简谐波在 $t = 0.5\ s$ 时刻的波形，此时P点的振动速度 $v_P = +4\pi\ m/s$，**求：** 波函数。

解： 由波形图知：

$\lambda = 4m\ ,\quad A = 1m$



因为P点在平衡位置，

$\therefore \upsilon_P = \upsilon_{\max} = 4\pi\ m/s$

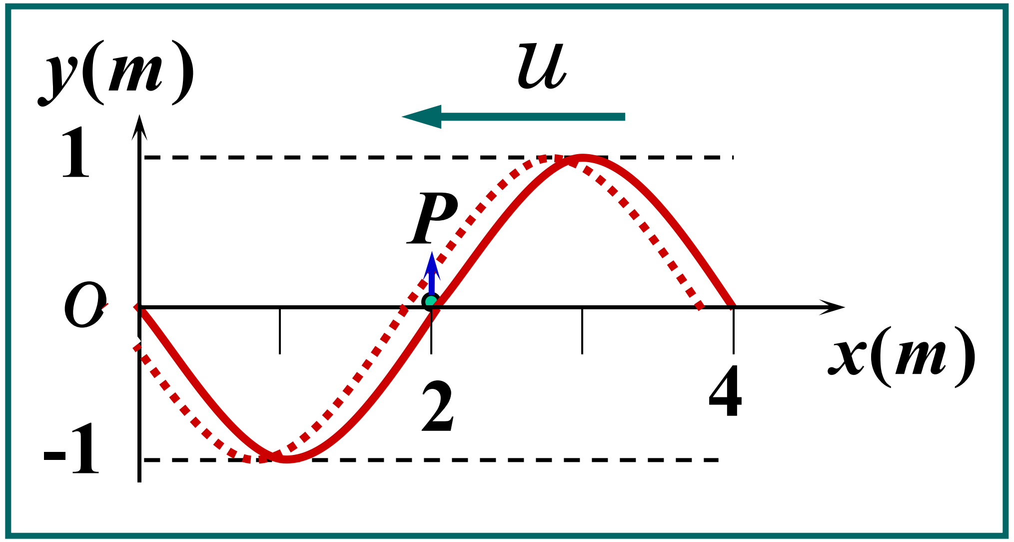
$\because \upsilon_{\max} = A\omega$

$\therefore \omega = \dfrac{\upsilon_P}{A} = 4\pi(rad/s)$ 　波速 $u = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\lambda\omega}{2\pi} = 8m/s$

又 $\because \upsilon_P > 0$ 　所以波沿 x 轴负向传播。

设波函数为： $y = A\cos[\omega(t + \dfrac{x}{u}) + \varphi]$

例5：如图为一平面简谐波在 $t = 0.5$ s 时刻的波形，此时P点的振动速度 $v_P = +4\pi$ m/s，求：波动方程。



设波动方程为：

$$y = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

由波形图知：$t = 0.5$s 时，$x = 0$ 处质点的 $y_0 = 0$, $v_0 < 0$。

$x = 0$ 处的质点在 $t = 0.5s$ 时的相位 $\varphi' = \omega\times 0.5+\varphi$

由旋转矢量可知：$\varphi' = \frac{\pi}{2}(+2\pi)$

$$\therefore \omega\times 0.5+\varphi = 4\pi\times 0.5+\varphi = \frac{\pi}{2}+2\pi$$

可得：$\varphi = \frac{\pi}{2}$　　波函数为：$y = 1\cos[4\pi(t+\frac{x}{8})+\frac{\pi}{2}]\,m$

机械振动和机械波习题课

六、机械波的能量：

平衡位置：　　动能和势能同时达到最大值；

最大位移处：　　动能和势能同时为零！

平均能量密度　$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

平均能流密度（波的强度）：$I=\frac{\bar{p}}{\Delta S}=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

机械振动和机械波习题课

七、机械波的干涉：

<u>相干条件：</u>

①频率相同 ②振动方向相同 ③相位差恒定

干涉相长和干涉相消的条件：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi(r_2-r_1)/\lambda=\begin{cases}2k\pi & \text{干涉相长}\\(2k+1)\pi & \text{干涉相消}\end{cases}$$

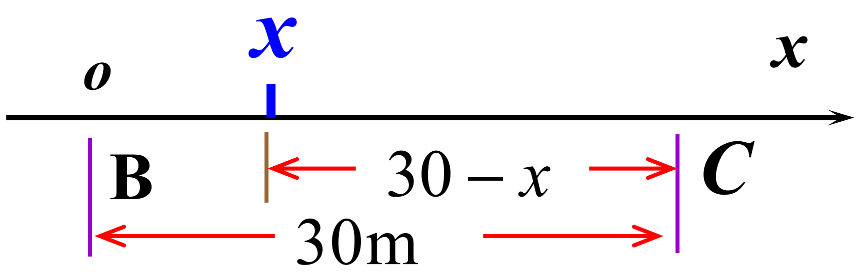
若$\varphi_2=\varphi_1$

$$\delta=r_1-r_2=\begin{cases}k\lambda & \text{干涉相长}\\(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉相消}\end{cases},$$

例6：位于B、C 两点的两个波源，振幅相等，频率都是100赫兹，相位差为 π，其 B、C 相距30m，波速为400m/s，**求：** B C 连线之间因干涉而静止的各点的位置。

解： 如图所示取B点为坐标原点，B C连线为x轴，

设 B 波源的振动方程：



$$y_B = A\cos(\omega t + 0)$$

则 C 波源的振动方程：

$$y_C = A\cos(\omega t + \pi)$$

B 源发出的行波方程：$y_B = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda})$

C 源发出的行波方程：$y_C = A\cos[\omega t + \pi - \dfrac{2\pi(30 - x)}{\lambda}]$

$$y_B = A\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}) \quad y_C = A\cos[\omega t + \pi - \frac{2\pi(30-x)}{\lambda}]$$

因为两波同频率，同振幅，同方向振动，

所以相干为静止的点满足：

$$\Delta\varphi = \omega t + \pi - \frac{2\pi(30-x)}{\lambda} - \omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\pi \qquad \boldsymbol{k} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

相干相消的点需满足： $-30 + 2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k\lambda}$

因为： $\lambda = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{\nu}} = 4\text{m}$

$$\boldsymbol{x} = 15 + 2\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{k} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

在*BC*连线上因干涉而静止的点的坐标为：

$$\boldsymbol{x} = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots 25, 27, 29\text{m}$$

机械振动和机械波习题课

八、驻波： $y = y_1 + y_2 = [2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}]\cos 2\pi \frac{t}{T}$

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \begin{cases} \pm k\pi & \text{波腹} \rightarrow x = \pm k\frac{\lambda}{2} \\ \pm(2k+1)\frac{\pi}{2} & \text{波节} \rightarrow x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \end{cases}$$

相邻波节或波腹间距为 $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

半波损失

波疏介质 $\longrightarrow$ 波密介质 有半波损失

分界面反射点形成波节

波密介质 $\longrightarrow$ 波疏介质 无半波损失

分界面反射点形成波腹。

机械振动和机械波习题课

九、反射波表达式的确定：

1、反射波方程在坐标原点的振动方程；

2、波疏到波密反射波相位有 π 变；

3、反射波相位沿 X 轴负向依此落后。

十、多普勒效应：

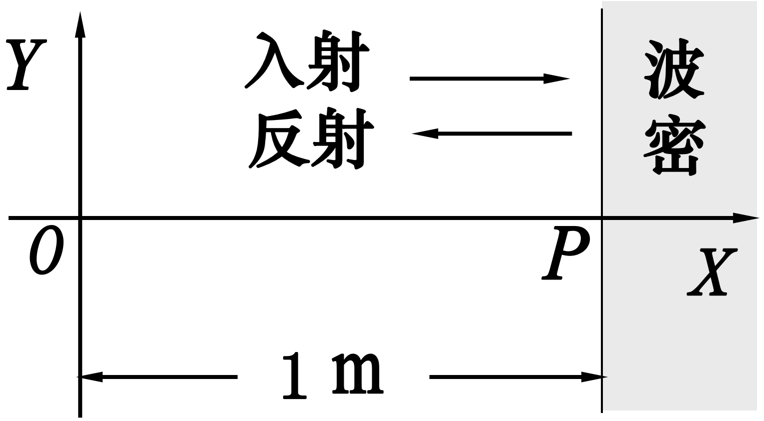
$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S$$

例 已知

在下图坐标系中，

垂直波密界面的入射波

$$y_{入} = 0.2\cos\pi(t - 4x) \quad (\mathrm{m})$$



求

- 反射波方程
- 两波形成的驻波方程

解法提要

由 $y_{入}$ 知 $\omega = \pi$, $u = 1/4\ (\mathrm{m/s})$, $\varphi = 0$

- 1、 反射波方程在坐标原点的振动方程；
  2、 波疏到波密反射波相位有 π 变；
  3、 反射波相位沿 X 轴负向依此落后。

可直接写出 $y_{反}$ ：

$$y_{反} = 0.2\cos\left[\pi\left(t - \frac{2\overline{OP}}{u} + 4x\right) + \pi\right]$$

$$= 0.2\cos\left[\pi t - 8\pi + 4x\pi + \pi\right]$$

$$= 0.2\cos\left[\pi(t + 4x) + \pi\right]$$

- $y = y_{入} + y_{反}$

$$= 0.4\cos\left(4\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0.4\sin 4\pi x \sin \pi t$$

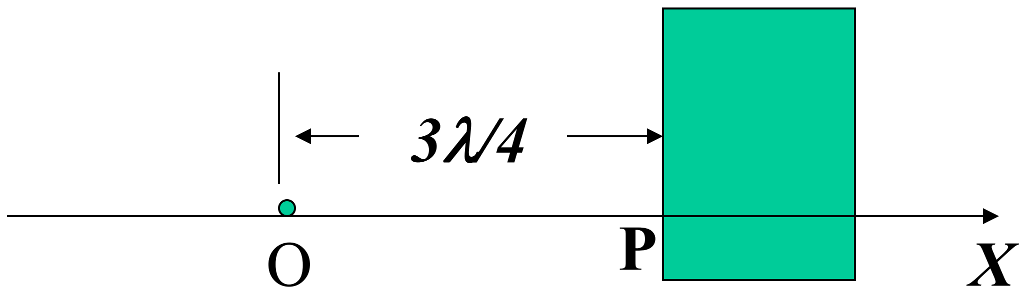
机械振动和机械波习题课

5. 一平面简谐波沿X轴正向向一反射面入射，如图. 入射波：$A,T,\lambda,t=0$ 时刻，在原点O处的质元由平衡位置向位移为正的方向运动. 设反射波的振幅等于入射波振幅，而且反射点为波节. 试求：

(1) 入射波的波函数.

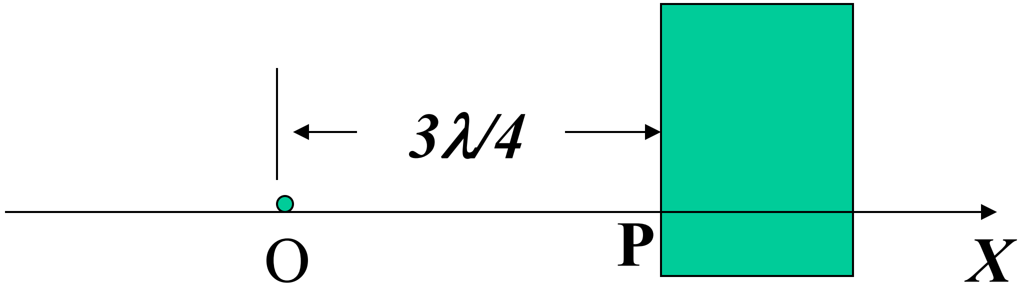
(2) 反射波的波函数.

(3) 合成波的波函数，并标出叠加后的静止点坐标.



机械振动和机械波习题课

解:



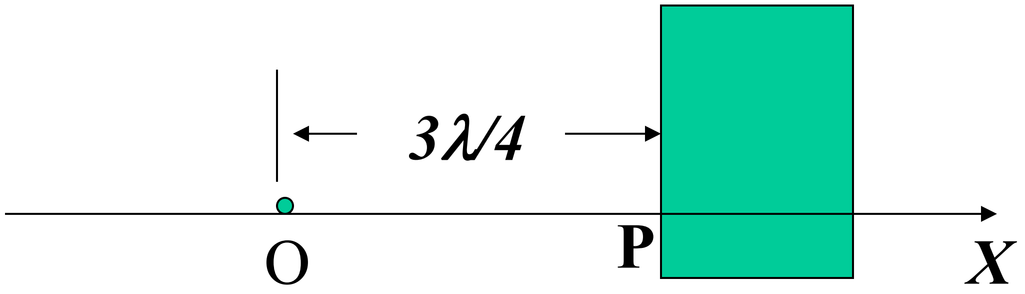
$$y_{(0,t)} = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y_{入(x,t)} = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y_{反(x,t)} = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2\ell - x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2} - \pi\right]$$

$$其中\ell = \frac{3\lambda}{4}$$

机械振动和机械波习题课



$$y_{合(x,t)} = y_{入(x,t)} + y_{反(x,t)}$$

$$y_{合(x,t)} = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\cos(2\pi\frac{t}{T} - \pi)$$

静止点坐标 ：$x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$,

其中 $k = 1,0\text{-}1,\text{-}2,\ldots\ldots$