第9章（五）
多元函数微分学的应用

浙江大学数学科学学院　卢兴江

向量函数及其应用

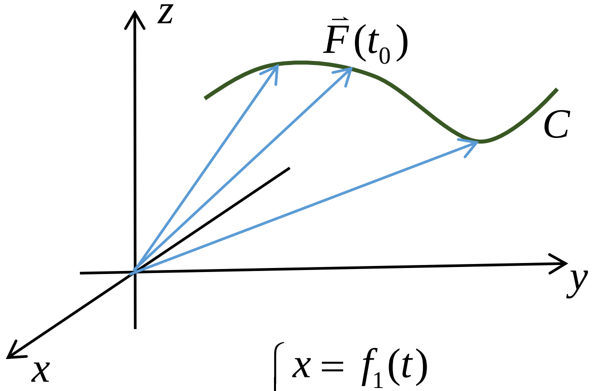
定义 $F=(f_1, f_2, \cdots, f_n):\ R\supset D\to R^n\ (n>1)$ 称为 n 维**向量函数**.

$f_i:\ R\supset D\to R\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 F 的**分量函数**.

- 特别，当 $n=3$ 时，向量函数

$$\vec{F}=\left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)=f_1(t)\,\vec{i}+f_2(t)\,\vec{j}+f_3(t)\,\vec{k}$$

表示三维空间中的曲线，也称为**矢端曲线**.



$$C:\ \begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \quad t\in[a,b] \\ z=f_3(t) \end{cases}$$

向量函数的极限

设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)=\left(f_1(t),\ f_2(t),\cdots,\ f_n(t)\right)$ 在 $U^0(t_0)$ 内有定义，如果

存在常数 a_i 使得 $\lim\limits_{t\to t_0} f_i(t)=a_i\ \ (i=1,2,\cdots,n)$，则称当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{F}(t)$ 极限存在为

$\boldsymbol{A}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$.　　记作 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{A}$.

向量函数及其应用

向量函数的连续

若 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}(t_0)$ ，则称 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $t=t_0$ **连续**.

显然，$\boldsymbol{F}(t)$ 在 $t=t_0$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f_i(t)$ 在 $t=t_0$ 连续. 其中 $\boldsymbol{F}(t)=\big(f_1(t), f_2(t),\cdots, f_n(t)\big)$.

向量函数的导数

设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)=\big(f_1(t), f_2(t),\cdots, f_n(t)\big)$ 在 $U(t_0)$ 内有定义，如果

极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}$ 存在且为 d_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $t=t_0$ 处**可导**,

向量 $\vec{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $t=t_0$ 处的**导数**(**导向量**). 记作 $\boldsymbol{F}'(t_0)$ 或 $\left.\dfrac{dF}{dt}\right|_{t_0}$.

向量函数导数的几何意义

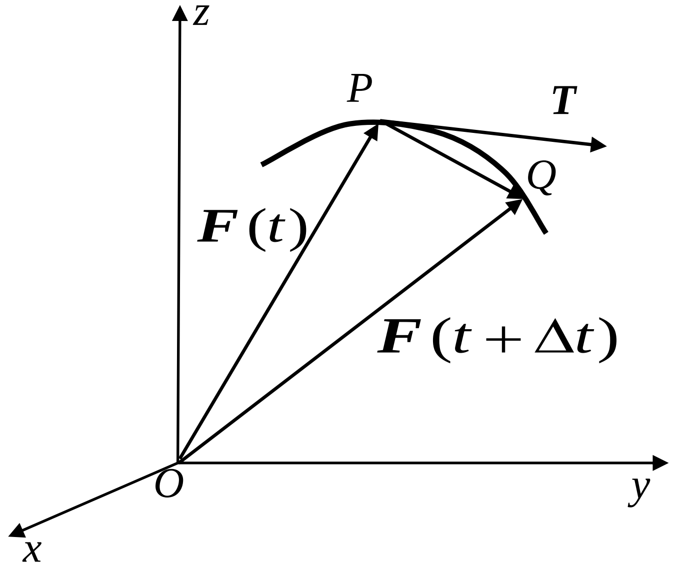
因为 $\boldsymbol{F}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)}{\Delta t}$，所以 $\boldsymbol{F}'(t)$ 即为当点 Q 沿曲线趋向于点 P 时，向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的极限 $\boldsymbol{T}$ 就是曲线在点 P 处的**切向量**. 其方向指向参数 t 增加的方向.

特别，当 $n=3$ 时，曲线

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad t\in[a,b] \quad \text{在 } t=t_0 \text{ 处的切向量为}$$

$$\vec{\tau}=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}.$$

（如图）



向量函数导数的性质

设 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}:\ R\supset D\to R^n,\quad u:\ R\supset D\to R$, 则

(1) $(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})'=\boldsymbol{F}'\pm\boldsymbol{G}'$

(2) $(u\boldsymbol{F})'=u'\boldsymbol{F}+u\boldsymbol{F}'$

(3) $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'=\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}'$

(4) $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'=\boldsymbol{F}'\times\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}'\quad(n=3)$

(5) 设 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}\circ u$, 则 $\boldsymbol{H}'(t)=\boldsymbol{F}'(u(t))\cdot u'(t)$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}=f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+\cdots+f_n(t)g_n(t)$$

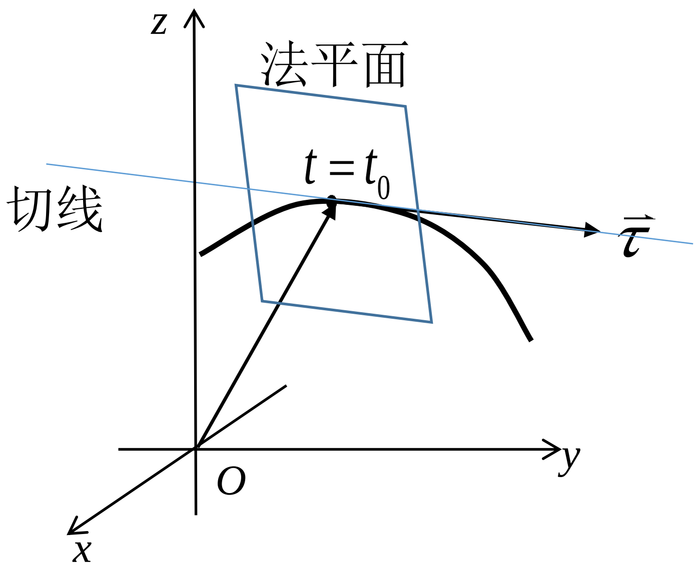
$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ f_1(t)&f_2(t)&f_3(t)\\ g_1(t)&g_2(t)&g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=\big(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)\big)$$

$$\boldsymbol{G}=\big(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t)\big)$$

空间曲线的切线与法平面

设曲线为 $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \quad t \in [a, b] \quad 在\ t = t_0\ 处, \\ z = f_3(t) \end{cases}$



切向量为 $\vec{\tau} = \left(f_1'(t_0),\ f_2'(t_0),\ f_3'(t_0) \right).$

切线方程为 $$\frac{x - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{y - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = \frac{z - f_3(t_0)}{f_3'(t_0)}.$$

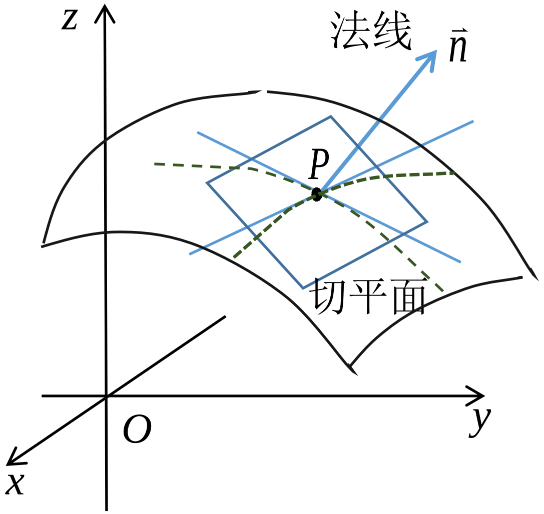
法平面方程为 $$f_1'(t_0)\left(x - f_1(t_0)\right) + f_2'(t_0)\left(y - f_2(t_0)\right) + f_3'(t_0)\left(z - f_3(t_0)\right) = 0.$$

例 1 (1) 求曲线 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ 在 $t = \dfrac{3\pi}{4}$ 处的切线和法平面方程.

(2) 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases}$ 在 $(1, -1, 2)$ 处的切线和法平面方程.

曲面的切平面与法线

定义 若曲面 S 上任一过点 P 的光滑曲线在 P 点的切线落在同一个平面 π 内，则称 π 为 S 在 P 点的**切平面**.
过 P 点且垂直于 π 的直线称为曲面 S 在 P 点的**法线**.



设曲面 S： $F(x,y,z)=0$，对过 $P(x,y,z)$ 点任意光滑曲线 C：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，

$C\subset S$，有 $F\big(x(t),\,y(t),\,z(t)\big)=0$， 那么对 t 求导得

$$F_1'\cdot x'(t)+F_2'\cdot y'(t)+F_3'\cdot z'(t)=0,\quad \text{即}\quad \left(F_1',F_2',F_3'\right)\perp\left(x'(t),\,y'(t),\,z'(t)\right).$$

而 $\vec{\tau}=\big(x'(t),\,y'(t),\,z'(t)\big)$ 为曲线 C 的切向量，所以由 C 的任意性知向量 $\vec{n}=\left(F_1'(t),\,F_2'(t),\,F_3'(t)\right)$ 为曲面在点的切平面的法向量，因此 S 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的

切平面方程为： $F_1'\big|_{P_0}\cdot(x-x_0)+F_2'\big|_{P_0}\cdot(y-y_0)+F_3'\big|_{P_0}\cdot(z-z_0)=0.$ **法线方程**为： $\dfrac{x-x_0}{F_1'\big|_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{F_2'\big|_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{F_3'\big|_{P_0}}.$

例题

例 2 (1) 求曲面 $z=x^2+\frac{y^2}{4}+3$ 上与 $2x+y+z=0$ 平行的切平面方程.

(2) 求 $\begin{cases} x^2+2y^2=z^2 \\ x+y-2z+3=0 \end{cases}$ 在点 $(1,2,3)$ 的切线方程.

解 (1) 曲面上点 (x,y,z) 的切平面法向为 $\vec{n}=(-2x,-\frac{y}{2},1)$，由 $\vec{n}$ 平行于已知平面法向 $(2,1,1)$ 得

切点为 $(-1,-2,1)$，所以切平面方程为： $2(x+1)+(y+2)+(z-1)=0$, 即 $2x+y+z+3=0$.

(2) 椭圆锥面 $x^2+2y^2=z^2$ 在点 $(1,2,3)$ 的切平面法向为 $\vec{n}_1=(2,8,-6)$,

平面 $x+y-2z+3=0$ 的法向为 $\vec{n}_2=(1,1,-2)$,

所以所求切线方向为 $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-10,-2,-6)$, 因此所求切线方程为 $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$.

另解： $x^2+2y^2=z^2$ 在点 $(1,2,3)$ 的切平面为 $(x-1)+4(y-2)-3(z-3)=0$,

所以所求切线方程为 $\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ x+y-2z+3=0 \end{cases}$.

向量场

定义 $\vec{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m): R^n \supset D \to R^m \ (m>1,\ n>1)$ 称为**向量场**.

其中 $f_i: R^n \supset D \to R \ (i=1,2,\cdots,m)$ 为 $\vec{f}$ 的**分量函数**.

- 例如，流速场、磁力场等皆为当 $m=n=3$ 时的向量场.

  即 $\vec{v}=\big(v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)\big)$, $(x,y,z)\in V \subset R^3$. 等等.

向量场极限 设 $P_0 \in R^n$，则 $\lim\limits_{P\to P_0} \vec{f} = \left(\lim\limits_{P\to P_0} f_1(P), \lim\limits_{P\to P_0} f_2(P), \cdots, \lim\limits_{P\to P_0} f_m(P)\right)$.

向量场连续 $\vec{f}$ 在 $P_0 \in R^n$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0} \vec{f} = (f_1(P_0), f_2(P_0), \cdots, f_m(P_0))$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0} f_i(P) = f_i(P_0)$, $i=1,2,3,\cdots,m$. $\Leftrightarrow$ f_i 在 P_0 连续， $i=1,2,3,\cdots,m$.

向量场

向量场导数

若 $D_i f_j = \left.\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{P_0}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ \ j=1,2,\cdots,m)$ 存在，则称 $\vec{f}=(f_1,\ f_2,\cdots,\ f_m)$

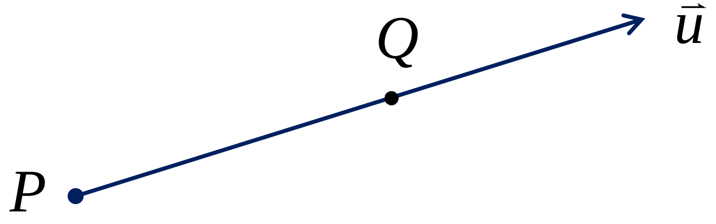
在 P_0 可导，且称 $\left[D\vec{f}(P_0)\right]=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n}$ 为 $\vec{f}$ 在 P_0 的**雅可比(Jacobi)矩阵**.

方向导数

- 设数量场 $f: \quad R^n \supset D \to R$, 则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C$（常数）为 f 的**水平集**.

当 $n=3$ 时称为**等值面**，例如 $x^2+y^2+z^2=R^2$； 当 $n=2$ 时有著名的**等高线.**

定义 设 $f: \quad R^n \supset D \to R, \quad P \in D$, 对过 P 沿方向 $\bar{u}$ 的射线 L 上一点 Q，若 $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{f(Q)-f(P)}{|PQ|}$ 存在为 I，则称 f 在点 P 沿 $\bar{u}$ 的**方向导数**存在，I 即为其方向导数。记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_P$ 或 $f'(P, \bar{u})$.



方向导数即为数量场在某个方向上的导数（变化率）

方向导数

- 若数量场 $f:\ R^3 \supset D \to R$ 沿 x 轴方向的方向导数存在，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 是否存在?

例1 求 $f=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在原点沿任意方向的方向导数.

定理 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则 f 在点 M_0 处沿任何方向 $\bar{u}$ 的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial u}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta+f_z'(M_0)\cos\gamma.$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\bar{u}$ 的方向余弦.

方向导数

- 特别地，对二元函数 $f(x,y)$，若在点 $P(x_0,y_0)$ 处可微，则 f 在点 P 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 的方向导数为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=f_x'(P_0)\cos\alpha+f_y'(P_0)\sin\alpha.$

例2 数量场 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点 $M(1,-2,2)$ 沿哪个方向的方向导数最大？

解： $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\Rightarrow\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_M=f_x'(M)=-\dfrac{1}{27}$. 同理可得 $f_y'(M)=\dfrac{2}{27}$， $f_z'(M)=-\dfrac{2}{27}$.

设 $\vec{u}^0=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$，则有 $\dfrac{\partial f}{\partial u}=f_x'(M)\cos\alpha+f_y'(M)\cos\beta+f_z'(M)\cos\gamma$

$$=\left(f_x'(M),\ f_y'(M),\ f_z'(M)\right)\cdot\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)=\left|\left(f_x'(M),\ f_y'(M),\ f_z'(M)\right)\right|\cos\theta.$$

其中 θ 为 $\vec{N}=\left(f_x'(M),\ f_y'(M),\ f_z'(M)\right)$ 与 $\vec{u}^0$ 的夹角.

所以 f 沿着 $\vec{N}$ 方向的方向导数最大，最大值为 $\left|\vec{N}\right|=\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+2^2}{27^2}}=\dfrac{1}{9}$.

梯　度

定义 设 f： $R^3 \supset D \to R$ 偏导数存在，则称 $\left(f_x', f_y', f_z'\right)$ 为 f 在 $P(x,y,z)$ 处的梯度，记为

$\mathrm{grad}\ f(P)$ 或 $\nabla f(P)$. 即 $\mathrm{grad}\ f(P) = \nabla f(P) = \left(f_x'(x,y,z),\ f_y'(x,y,z),\ f_z'(x,y,z)\right)$.

- 对数量场 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其梯度 $\nabla f = \left(f_1', f_2', \cdots, f_n'\right)$.
- 梯度是一个向量场，我们称之为梯度场.
- 数量场 f 在 P 点沿梯度方向的方向导数最大，其最大值为梯度的模.
- 等值面 $F(x,y,z) = C$ 在 P 点的梯度方向即为曲面的法向.

性质 设 u, v 为具有连续偏导的数量场，f 为可微的一元函数，α, β 为常数，则

(1) $\nabla\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha\,\nabla u + \beta\,\nabla v$

(2) $\nabla\left(uv\right) = v\,\nabla u + u\,\nabla v$

(3) $\nabla f\left(u\right) = f'(u)\cdot\nabla u$

电位场 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 的梯度 $\nabla\varphi = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r^3} = \vec{E}$（电场强度）.

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\vec{r} = (x,y,z)$.

谢谢！

浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY