

静力学专题

物体系的平衡问题

1. 几个概念

物体系 —— 由若干个物体通过约束组成的系统。

外力 —— 物体系以外任何物体作用于该系统的力。

内力 —— 物体系内部各物体间互相作用的力。

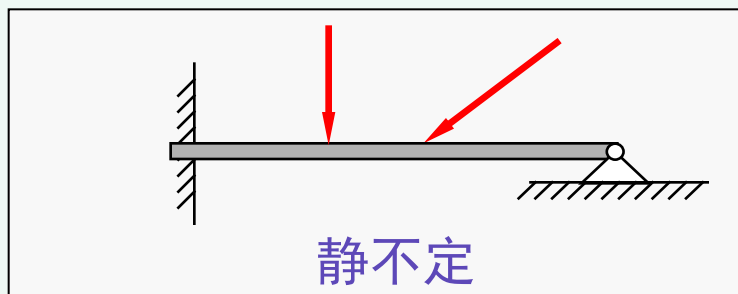
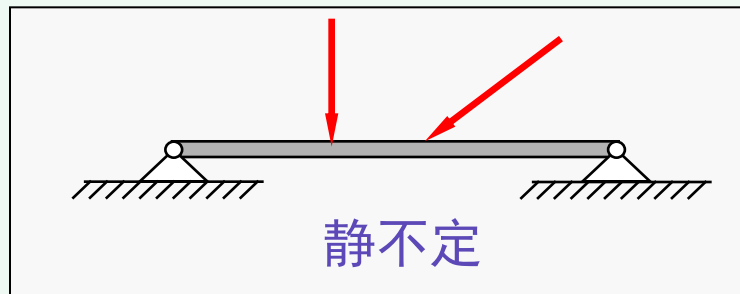
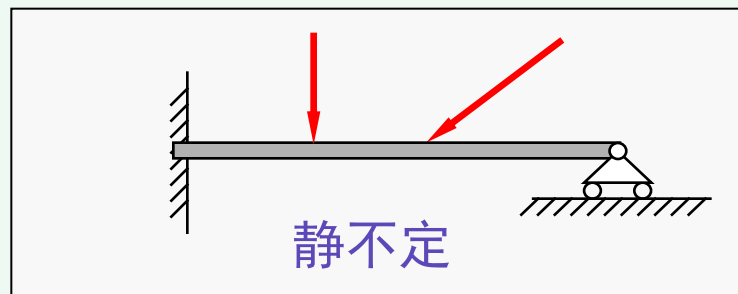
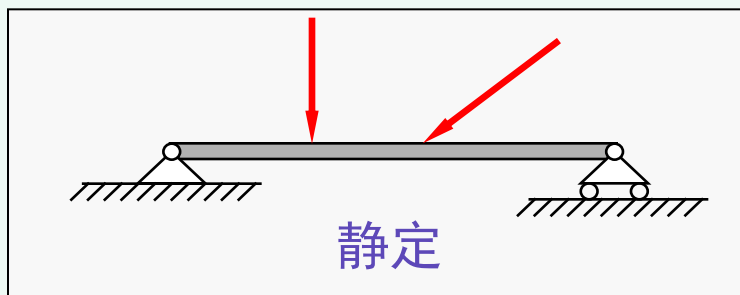
● 物体系平衡方程的数目

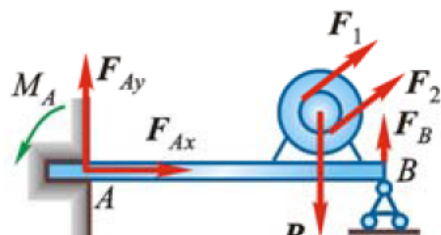
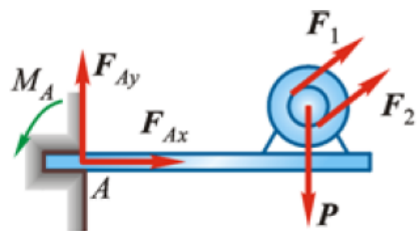
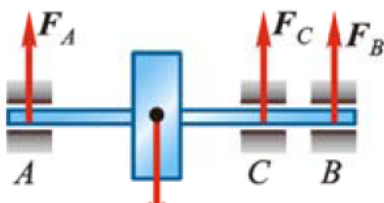
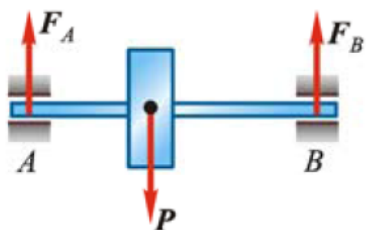
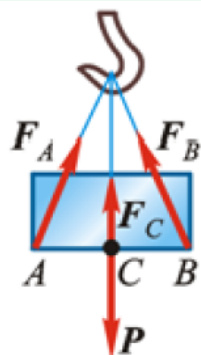
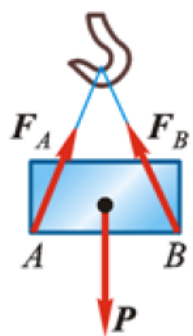
由 n 个物体组成的物体系，每个物体受**平面任意力系**作用，总共有不多于 $3n$ 个独立的平衡方程。

2. 静定与静不定

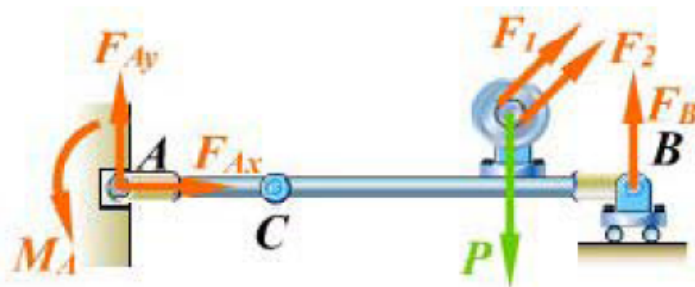
静定问题 ——当系统中未知量数目等于或少于独立平衡方程数目时的问题。

静不定问题 ——当系统中未知量数目多于独立平衡方程数目时，不能求出全部未知量的问题。





平面汇交力系、平行力系，均只有两个独立的平衡方程



平衡方程要点:

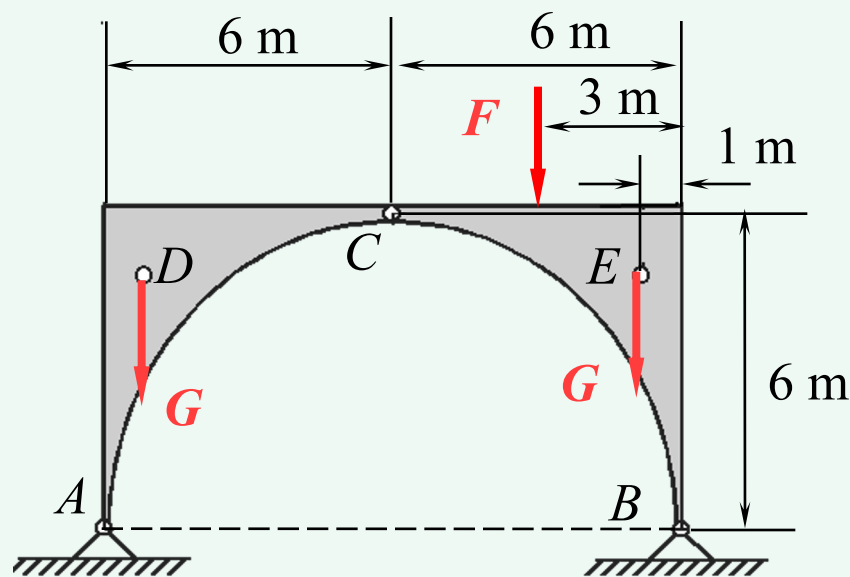
(1) 力系平衡时, 对任意轴 x , 有 $\sum F_x = 0$, $\sum M_x = 0$

(2) 各类力系独立平衡方程数

| | 一般 | 平行 | 汇交 | 力偶 |
|----|----|----|----|----|
| 空间 | 6 | 3 | 3 | 3 |
| 平面 | 3 | 2 | 2 | 1 |

可用于判断问题是否可解!

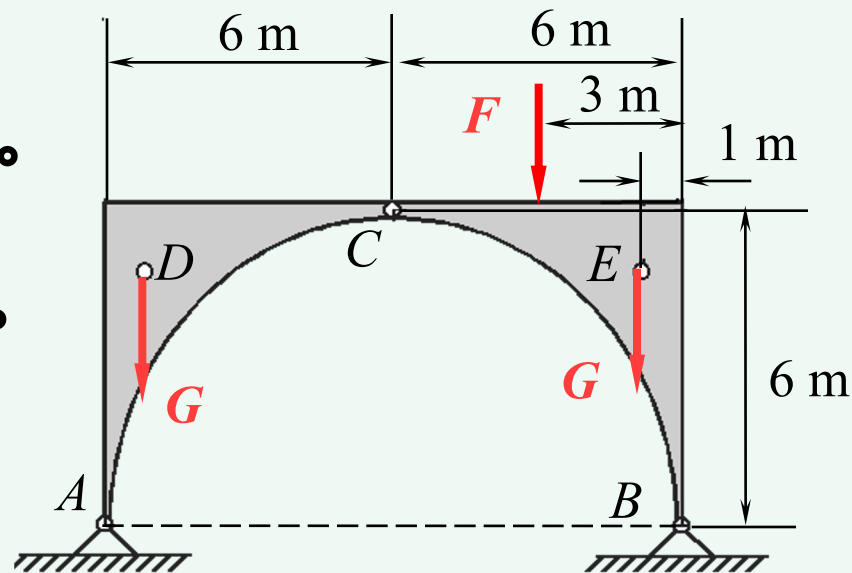
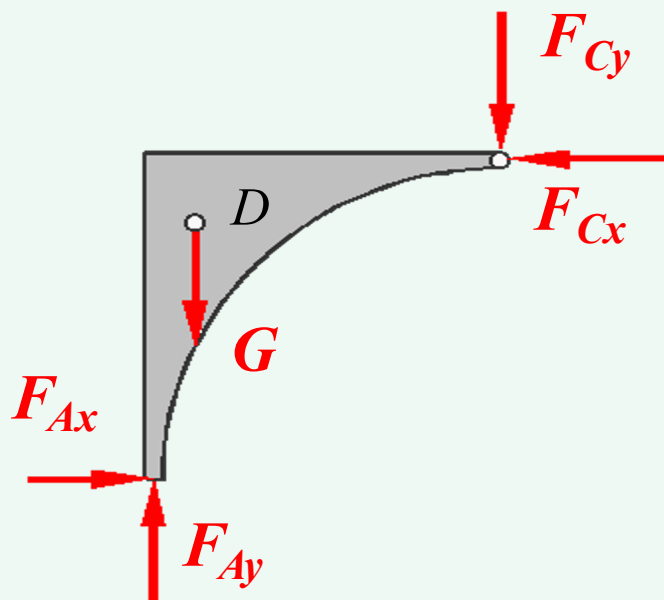
例-1 三铰拱桥如图所示，由左右两段借铰链 C 连接起来，又用铰链 A 、 B 与基础相连接。已知每段重 $G = 40 \text{ kN}$ ，重心分别在 D 、 E 处，且桥面受一集中载荷 $F = 10 \text{ kN}$ 。设各铰链都是光滑的，试求平衡时各铰链的约束力。尺寸如图所示。

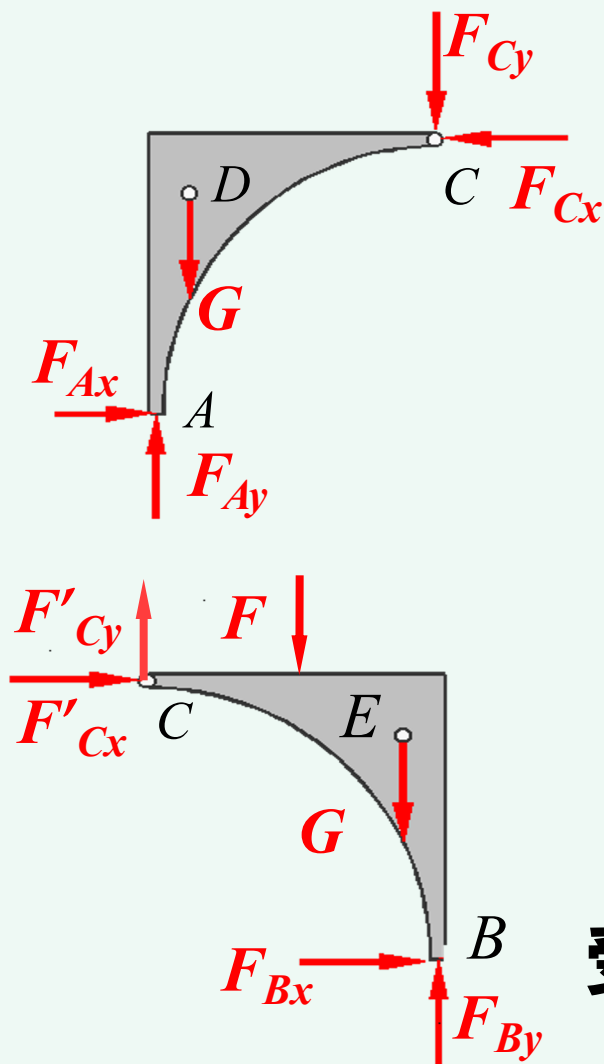


解：

(1) 取 AC 段为研究对象。

(2) 受力分析如图所示。





(3) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_{Cy} - G = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$F_{Ax} \times 6 \text{ m} - F_{Ay} \times 6 \text{ m} + G \times 5 \text{ m} = 0$$

(4) 再取BC段为研究对象，

受力分析如图所示。

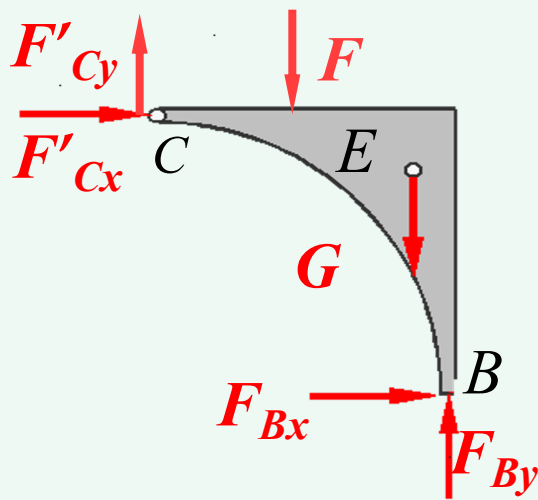
(5) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F'_{Cx} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F'_{Cy} + F_{By} - F - G = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$-F \times 3 \text{ m} - G \times 5 \text{ m} + F_{By} \times 6 \text{ m} + F_{Bx} \times 6 \text{ m} = 0$$



(6) 联立求解。

$$F_{Ax} = -F_{Bx} = F_{Cx} = 9.2 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 42.5 \text{ kN}, \quad F_{By} = 47.5 \text{ kN}, \quad F_{Cy} = 2.5 \text{ kN}$$



讨论

(1) 取整体为研究对象，受力分析如图所示。

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$-G \times 11 \text{ m} - F \times 9 \text{ m} - G \times 1 \text{ m} + F_{By} \times 12 \text{ m} = 0$$

$$F_{By} = 47.5 \text{ kN}$$

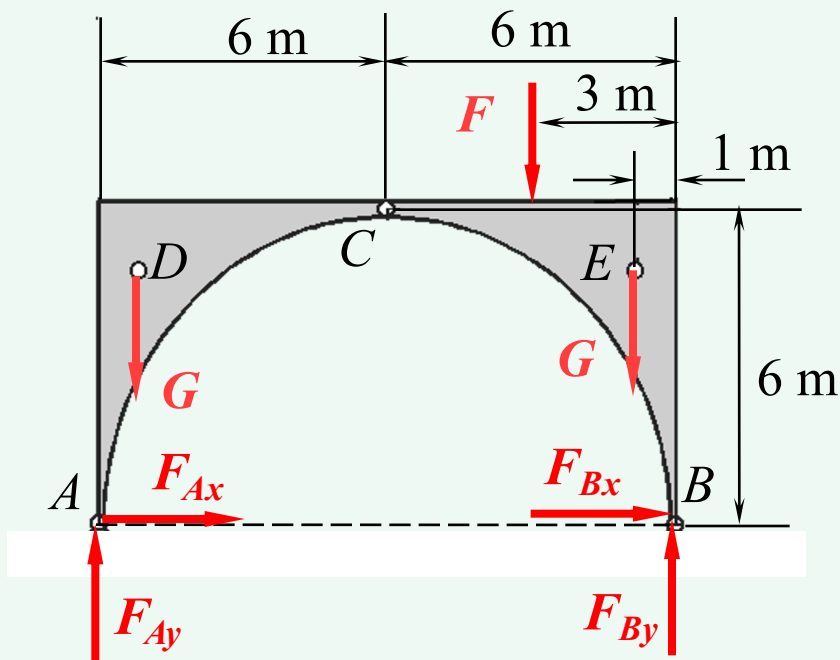
$$\sum M_B(F) = 0$$

$$G \times 11 \text{ m} + F \times 3 \text{ m} + G \times 1 \text{ m} - F_{Ay} \times 12 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ay} = 42.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$



§ 4-2 物体系平衡问题分析举例

$$F_{Ay} = 42.5 \text{ kN}, \quad F_{By} = 47.5 \text{ kN}, \quad F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

(2) 取AC段为研究对象，受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum M_C(F) = 0,$$

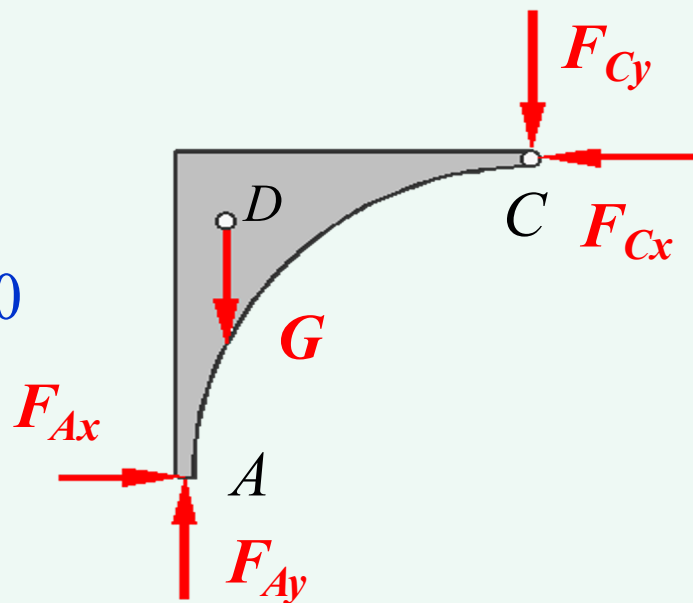
$$F_{Ax} \times 6 \text{ m} - F_{Ay} \times 6 \text{ m} + G \times 5 \text{ m} = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{Cx} = 0$$

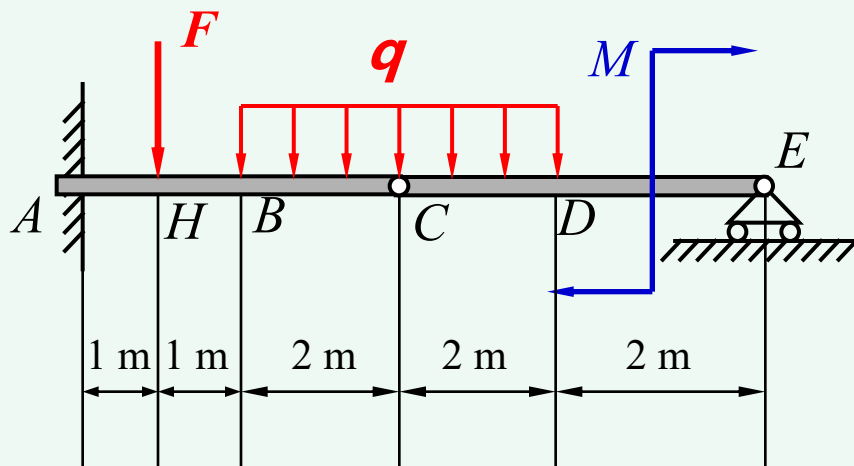
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_{Cy} - G = 0$$

解得

$$F_{Ax} = 9.2 \text{ kN}, \quad F_{Cx} = 9.2 \text{ kN}, \quad F_{Cy} = 2.5 \text{ kN}$$



例-2 组合梁 AC 和 CE 用铰链 C 相连， A 端为固定端， E 端为活动铰链支座。受力如图所示。已知： $F=5\text{ kN}$ ，均布载荷集度 $q=2.5\text{ kN/m}$ ，力偶矩的大小 $M=5\text{ kN}\cdot\text{m}$ ，试求固端 A 、铰链 C 和支座 E 的反力。



解 (1) 取 CE 段为研究对象，受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_C - F_1 + F_E = 0$$

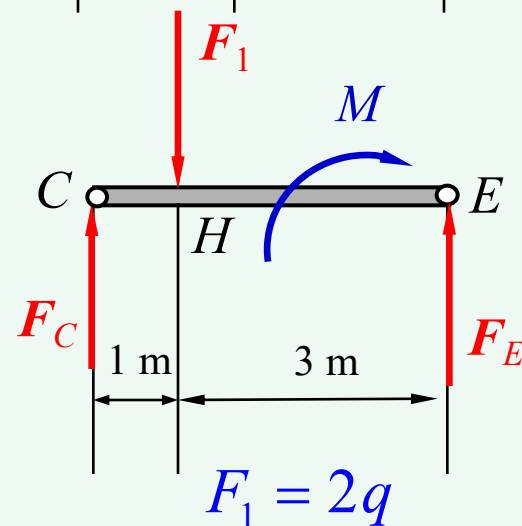
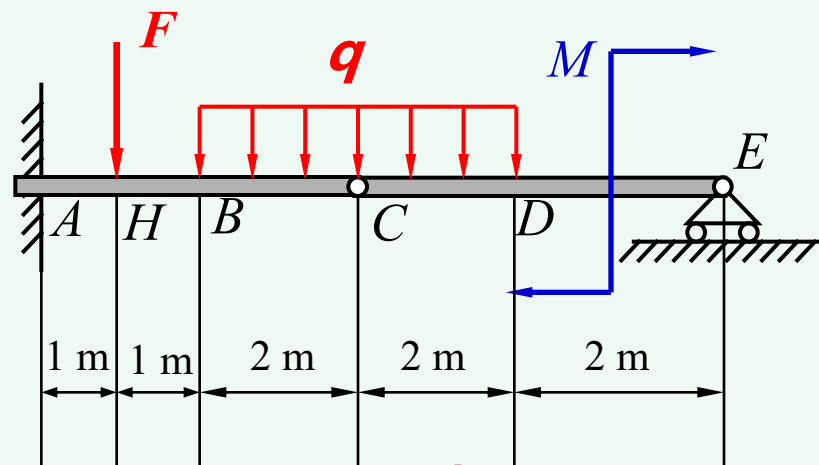
$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$-F_1 \times 1\text{ m} - M + F_E \times 4\text{ m} = 0$$

联立求解, 可得

$$F_E = 2.5\text{ kN} \quad (\text{向上})$$

$$F_C = 2.5\text{ kN} \quad (\text{向上})$$



(2) 取AC段为研究对象，受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_y = 0 ,$$

$$F_A - F'_C - F - F_2 = 0$$

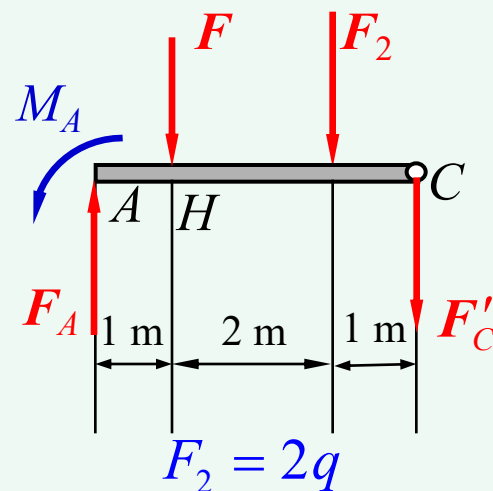
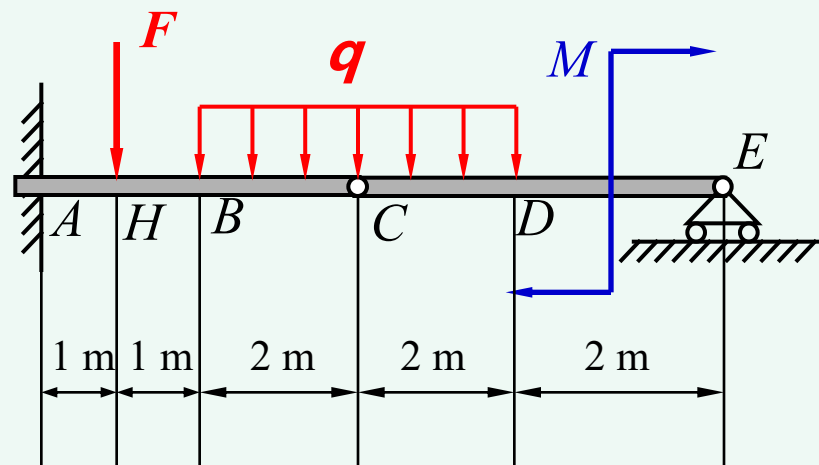
$$\sum M_A(F) = 0 ,$$

$$M_A - F \times 1 \text{ m} - F_2 \times 3 \text{ m} - F'_C \times 4 \text{ m} = 0$$

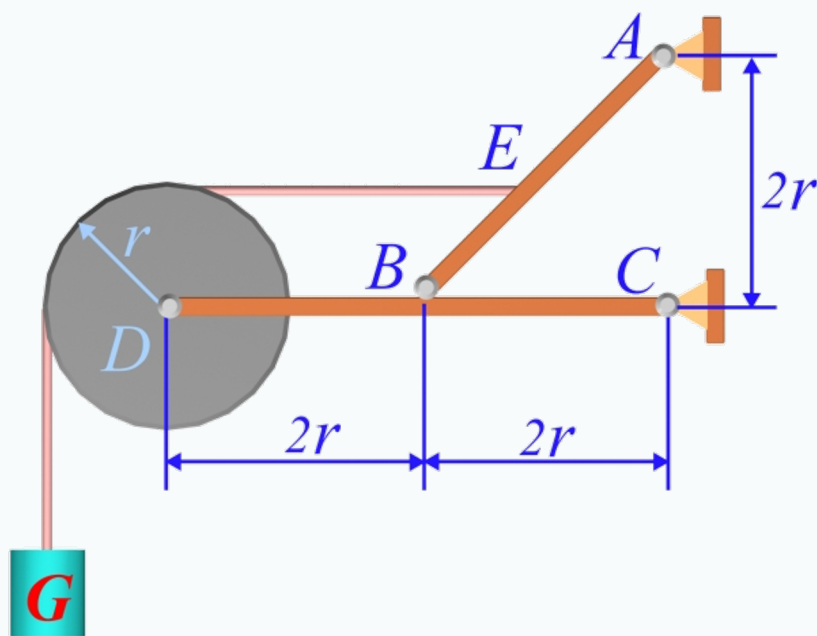
求解可得

$$M_A = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_A = -12.5 \text{ kN}$$



例-3 A 、 B 、 C 、 D 处均为光滑铰链，物块重为 G ，通过绳子绕过理想滑轮水平地连接于杆 AB 的 E 点，各构件自重不计，试求 B 处的约束力。



解：(1) 取整体为研究对象。

(2) 受力分析如图所示。

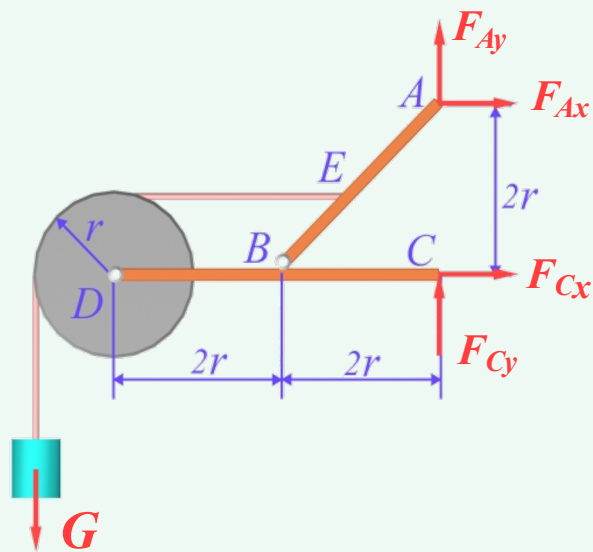
(3) 列平衡方程。

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$5r \times G - 2r \times F_{Ax} = 0$$

解得

$$F_{Ax} = 2.5G$$



(4) 取杆 AB 为研究对象，受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

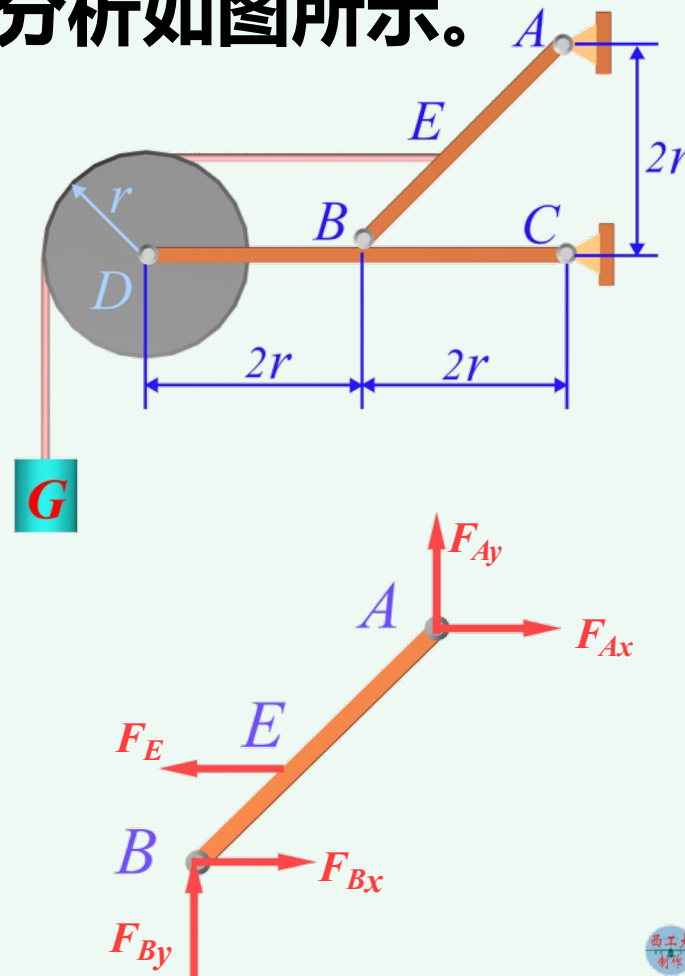
$$F_{Ax} + F_{Bx} - F_E = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,$$

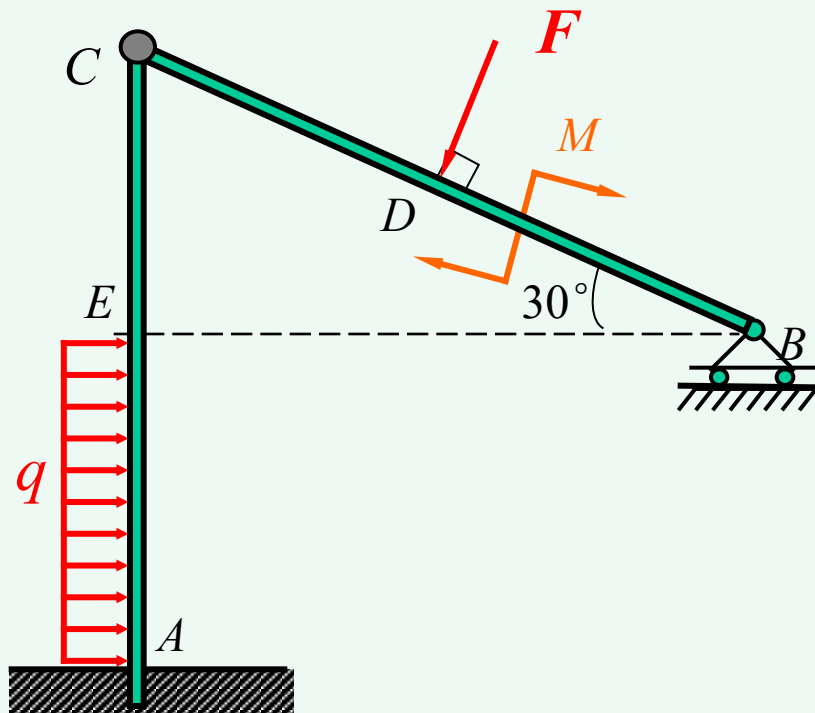
$$2r \times F_{Bx} - 2r \times F_{By} - rF_E = 0$$

联立求解可得 $F_{Bx} = -1.5G$

$$F_{By} = -2G$$



**例-4 如图，已知 $q=3 \text{ kN/m}$ ， $F=4 \text{ kN}$ ， $M=2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。
 $CD=BD$ ， $BC=4 \text{ m}$ ， $CE=EA=2 \text{ m}$ 。各杆件自重不计，
试求 A 和 B 处的支座约束力。**

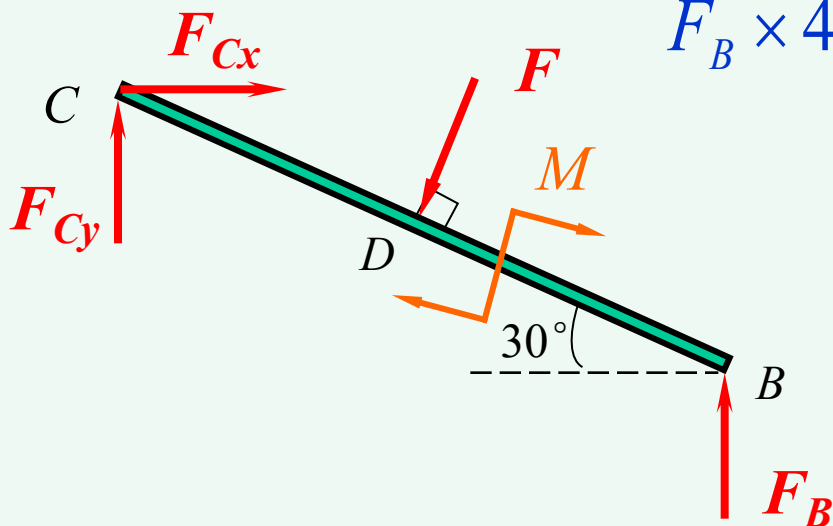


解：（1）取 BC 为研究对象，受力分析如图所示。

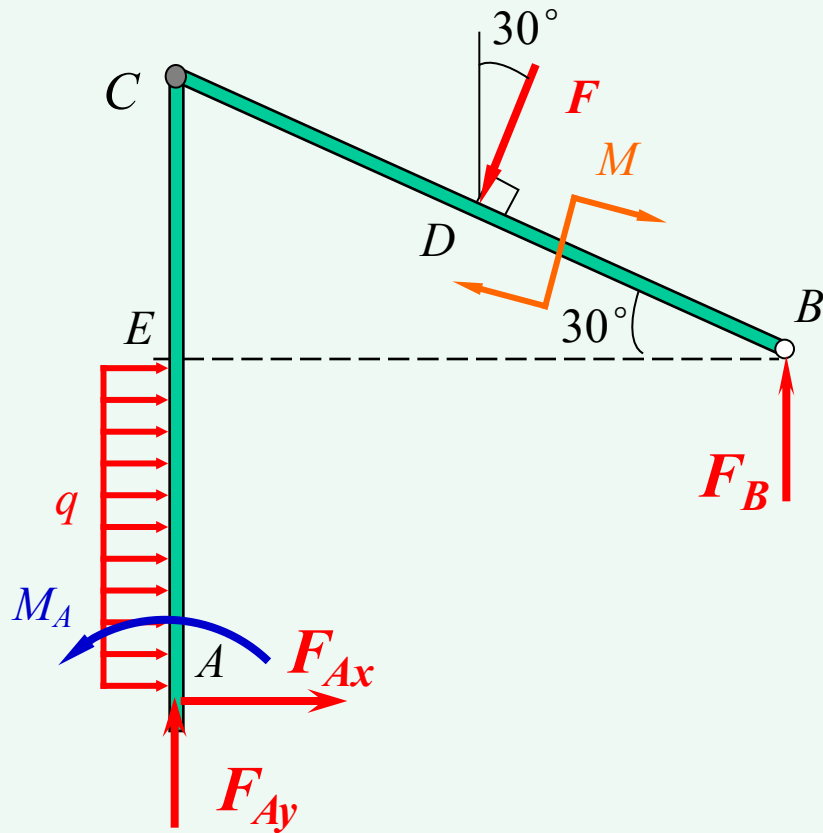
$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$F_B \times 4 \text{ m} \times \cos 30^\circ - F \times 2 \text{ m} - M = 0$$

$$F_B = 2.89 \text{ kN}$$



(2) 取整体为研究对象，受力分析如图所示。



$$\sum F_x = 0 ,$$

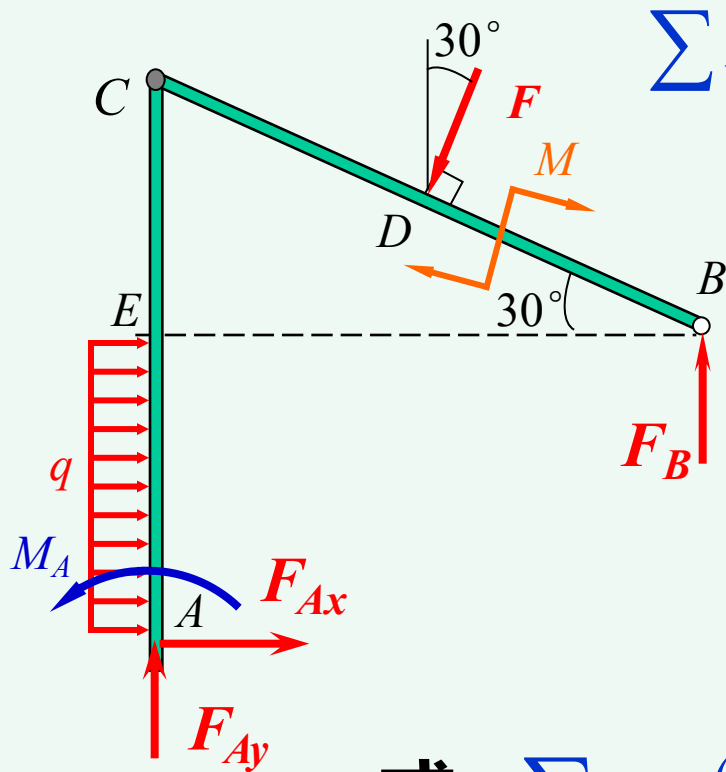
$$-F \cos 60^\circ + 2q + F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = 47.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 ,$$

$$-F \sin 60^\circ + F_B + F_{Ay} = 0$$

$$F_{Ay} = 0.58 \text{ kN}$$



$$\sum M_A(F) = 0,$$

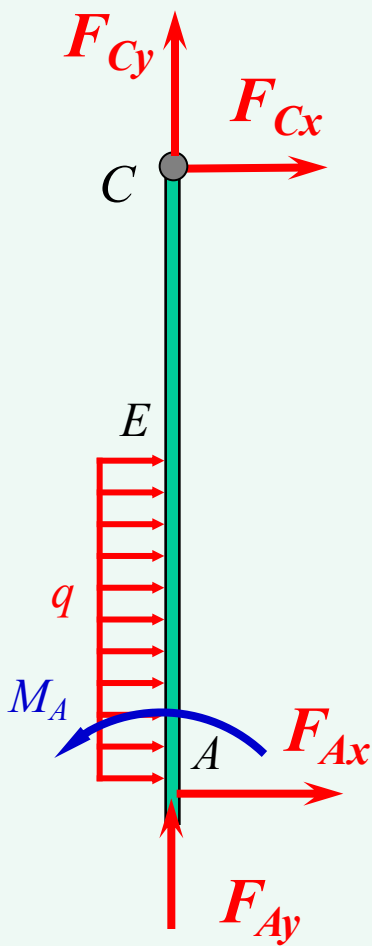
$$M_A - M - q \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m} + F_B \times 4 \text{ m} \times \cos 30^\circ + F \sin 30^\circ (2 \text{ m} + 2 \text{ m} \times \sin 30^\circ) - F \cos 30^\circ \times 2 \text{ m} \times \cos 30^\circ = 0$$

解得

$$M_A = -2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

或 $\sum M_C(F) = 0,$

$$M_A - M + F_{Ax} \times 4 \text{ m} + q \times 2 \text{ m} \times 3 \text{ m} + F_B \times 4 \text{ m} \times \cos 30^\circ - F \times 2 \text{ m} = 0$$



也可以取杆为 AC 研究对象。

$$\sum M_C(F) = 0$$

$$M_A + F_{Ax} \times 4 \text{ m} + q \times 2 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 0$$

解得

$$M_A = -2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

作业： 2-34, 2-38

谢谢

