大学物理甲

(II)

第九章 真空中的静电场

上学期电场部分的内容:

求解电场强度:

场强叠加原理求解电场强度

矢量

高斯定理求解电场强度

本章的内容:

功和能的角度研究电场的性质　　电势

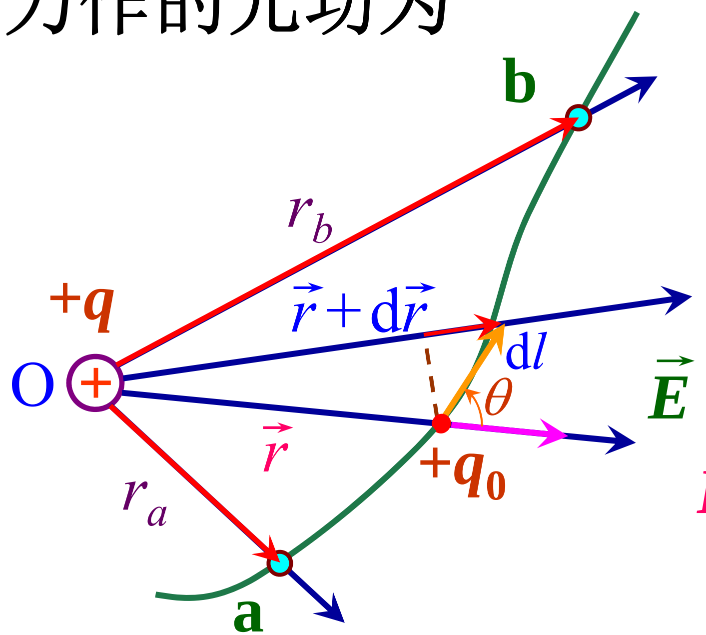
标量

§ 9.6 静电场的环路定理

一、静电场力是保守力

1. 点电荷电场中电场力做功

在位于O点的点电荷$+q$的电场中,试验电荷$+q_0$从 a 移至 b, 在位矢$\vec{r}$到 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$位移元 d$l$ 上,电场力作的元功为

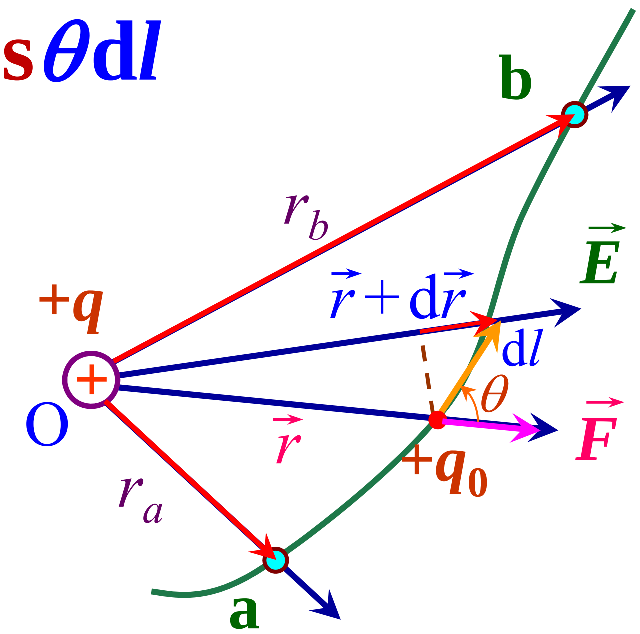


$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}=q_0\vec{E}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \boldsymbol{q_0 E \cos\theta \mathrm{d}l}$$

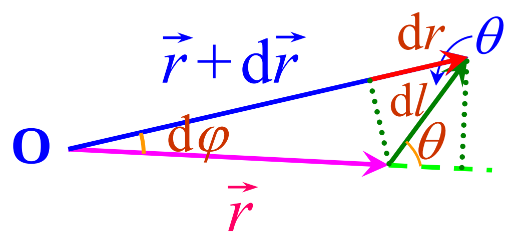
$$= \boldsymbol{q_0 E \mathrm{d}r} = q_0 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r$$



试验电荷从a到b电场力做功为:

$$A_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} q_0 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r$$

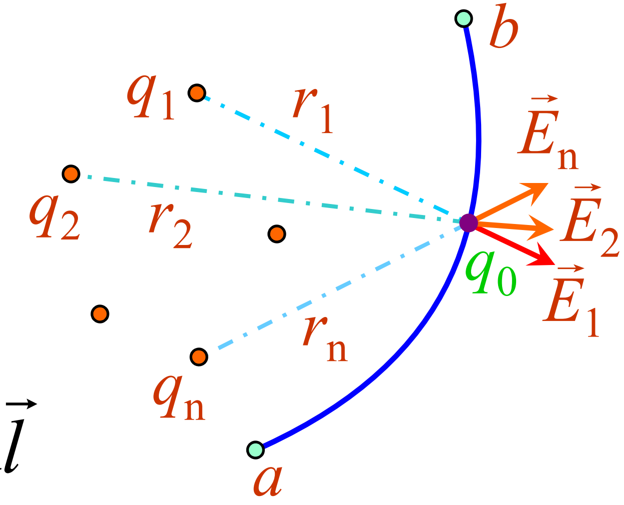
$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$



结果表明: 点电荷电场力所做的功仅与试验电荷电量的大小及**起止位置有关**，与电荷移动的***路径无关***.

2. 任意带电体电场中电场力做功

任意形状的带电体可看作是点电荷的组合，由场强的叠加性可得:



$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_a^b(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots+\vec{E}_n)\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_a^b\vec{E}_1\bullet \mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_a^b\vec{E}_2\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\ldots+q_0\int_a^b\vec{E}_n\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}}-\frac{1}{r_{ib}}\right)$$

与路径无关

如果积分路径为闭合回路呢？

二、静电场的环路定理

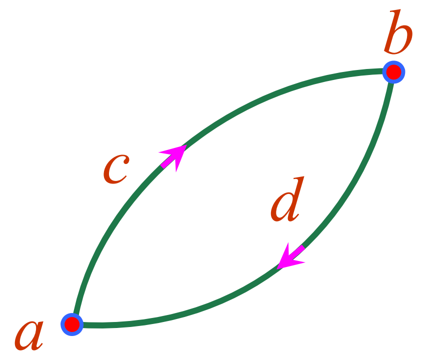
将试验电荷q_0从 ***a*** 点移动到 ***b*** 点,再从 ***b***点移回到***a*** 点.从 ***a*** 到 ***b*** 可以走 ***acb*** 或 ***adb***, 有

$$\oint_L q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=q_0\oint_L\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{a(c)}^{b}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_{b(d)}^{a}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

由于静电场力做功仅与位置有关,与路径无关

$$q_0\int_{a(c)}^{b}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{a(d)}^{b}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

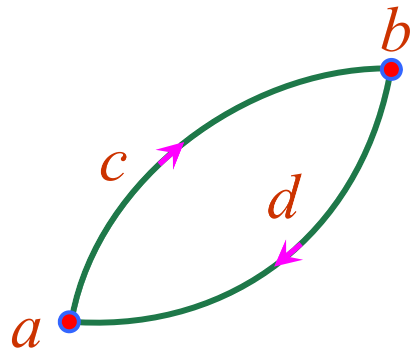
$$=-q_0\int_{b(d)}^{a}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$



所以 $q_0\int_{a(c)}^{b}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_{b(d)}^{a}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0$

$q_0\oint \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0$ 因 $q_0 \neq 0$, 故: $\boxed{\oint \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0}$

$\oint \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的环流



小结: 静电场力做功的特点

(1) 电场力做功仅与位置有关,与路径无关.

→ 静电场力是保守力

(2) 静电场力是保守力 → 静电场是保守场

(3) 静电场力是保守力 →可以引入势能 (电势能)

(4) 静电场的环流为零 → 可以引入势的概念 (电势)

§9.7 电势

电势是从能量的角度来描述电场

一. 电势能

1. 电势能的定义

对于保守场，可引入势能. 点电荷q_0在a点有势能W_a，在b点有势能W_b，q_0从a点移至b点时电场力做的功等于电势能增量的负值.

$$\boxed{A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=-(W_b-W_a)=-\Delta W=W_a-W_b}$$

★ a.势能是相对的→定义了势能的增量.

★ b. 参考零点，需要选择电势能为零的点.

★ c.电势能的单位: 焦耳(J)

2. 电势能零点的选择

a. 理论上: 任意点都可选为电势能为零,

但一般不能为存在电荷的地方.　　理由呢?

b. 一般建场电荷在空间上为有限时,可取

无限远处电荷的电势能为零, $W_\infty = 0$

则电荷q_0从p点移至无限远时电场力所做的功:

$$A_{p\infty} = \int_p^\infty q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -(W_\infty - W_p) = W_p$$

p点的电势能为:

$$W_{p|\infty} = A_{p\infty} = \int_p^\infty q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_p^\infty \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

即电荷q_0在p点的电势能为将q_0从p点移至无限远处时电场力所做的功.

c. 若建场电荷在空间上为无限时, 选除无穷远处以外的p_0处的电势能为零, $W_{p_0}=0$

但不能为存在电荷的地方.

则电荷q_0从p点移至p_0时电场力所做的功:

$$A_{pp_0}=\int_p^{p_0} q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=-(W_{p_0}-W_p)=W_p$$

则p点的电势能为:

$$W_{p|p_0}=A_{pp_0}=\int_p^{p_0} q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_p^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

即电荷q_0在p点的电势能为将q_0从p点移至p_0时电场力所做的功.

例：点电荷q电场中，试验电荷q_0的电势能

解： 点电荷q在空间上某点的电场 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

点电荷q在空间上有限，可取无限远处的电势能为零，$W_\infty=0$

$$W_{p|\infty}=\int_p^\infty q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_p^\infty q_0 E\cos\theta \mathrm{d}l=\int_{r_p}^\infty q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=q_0\int_{r_p}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=q_0\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_p}^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_p}$$

W_p的大小、极性与q_0、q有关，属于q产生的电场和电荷q_0共有，与试验电荷也有关

★ 故电势能无法准确反映电场本身的性质

二. 电势

1. 电势的定义

$$U_p = \frac{W_p}{q_0}$$

当无穷远处为零电势

$$U_{p|\infty} = \frac{W_{p|\infty}}{q_0} = \frac{\int_p^{\infty} q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}}{q_0} = \int_p^{\infty} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}\,,\quad U_{\infty} = 0$$

注意积分限

当p_0点为零电势 $U_{p|p_0} = \int_p^{p_0} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}\,,\quad U_{p_0} = 0$

(1) 只反映了电场的性质，因为除去了q_0.

(2) 求电势, 要求先求出电场E

(3) 电势是标量, 单位:伏特(V)

(4) 电势的相对性, 参考点的选取

★ 电势零点的选取

a. 理论上任意点都可选为电势为零的点.

但一般不能为存在电荷的地方.　理由呢?

b. 一般建立电场的电荷为有限大时,

取无穷远处作为电势为零的点.

也可取大地作为零电势

$$U_{p|\infty}=\int_p^{\infty}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}\ ,\quad U_{\infty}=0$$

c. 建场电荷为无限大时,

不能取无穷远处作为电势为零的点.

选: (1) 除无穷远处外; (2) 不存在电荷的任意点.

$$U_{p|p_0}=\int_p^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}\ ,\quad U_{p_0}=0$$

2. 电势差

任意两点之间的电势之差，也称电压、电平、电位

$$U_{ab}=U_a-U_b$$

$$=\int_a^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}-\int_b^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{b}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

3. 电场力做功、电势能与电势差的关系

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=-\Delta W_{ab}=-(W_b-W_a)=W_a-W_b$$

$$=q_0\cdot\frac{W_a-W_b}{q_0}=q_0(U_a-U_b)=q_0U_{ab}$$

4. ★电势的计算之一 (按定义式)

当p_0点为零电势

已知电场强度时 $U_{p|p_0} = \int_p^{p_0} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$, $U_{p_0} = 0$

例: 计算带电量为q, 半径为R的均匀带电球面电场中的电势分布?

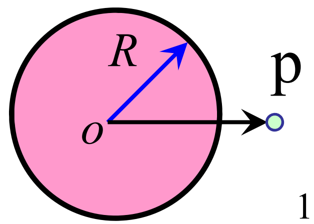
解: 如图所示, 带电球面在空间激发的场强沿半径方向, 大小为:

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

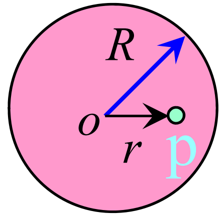
取无穷远处作为电势为零的点.

按定义式: $U_{p|\infty} = \int_{(p)}^{(\infty)} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(p)}^{(\infty)} E\cos\theta \mathrm{d}l = \int_r^{\infty} E\mathrm{d}r$

当r>R 时 $U_{p|\infty} = \int_r^{\infty} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

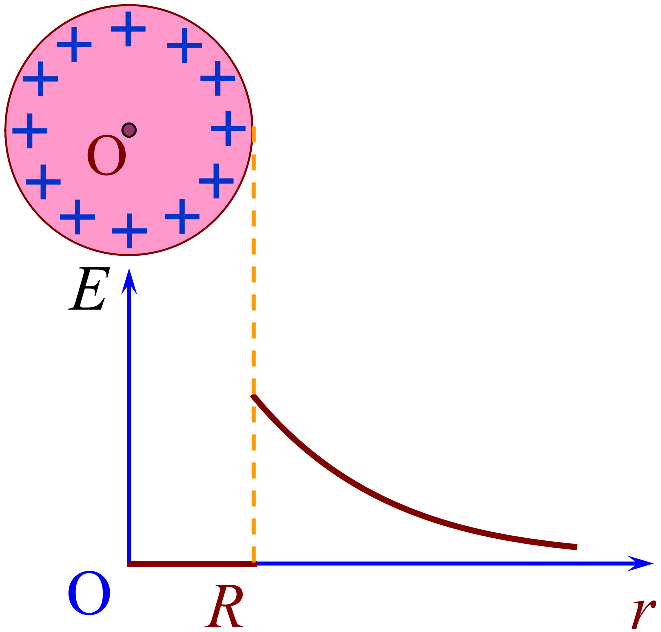


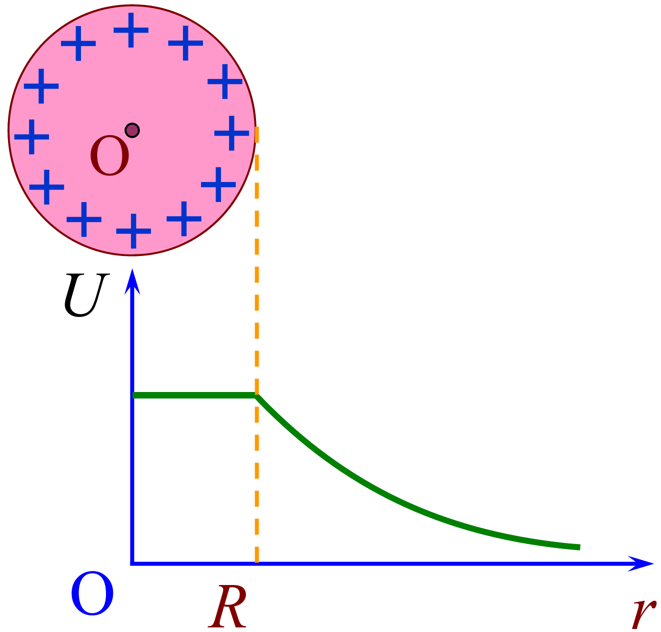
当**r**<***R***时



$$U_{p|\infty}=\int_{(p)}^{(\infty)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_{(r)}^{(R)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\int_{(R)}^{(\infty)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{r}^{R}0\cdot \mathrm{d}r+\int_{R}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



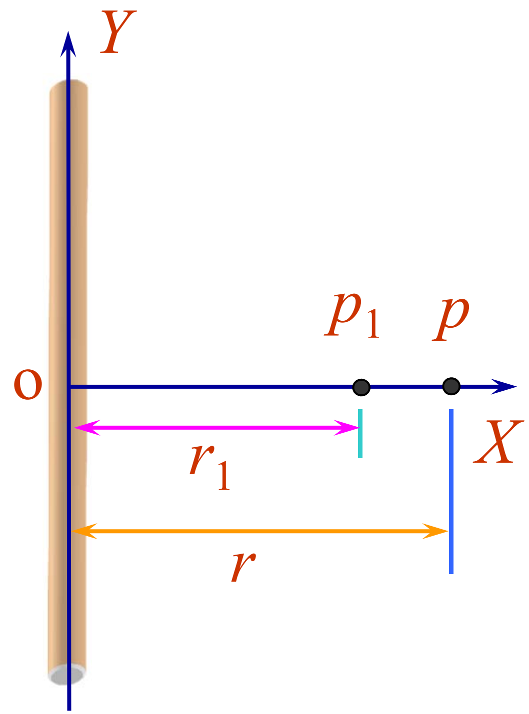


例：计算电荷线密度为λ的无限长均匀带电直线电场的电势分布？

解： 如图所示，计算X 轴线上距直线为r的p点处的电势.

由高斯定理，一无限长均匀带电直线在X轴上的电场为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



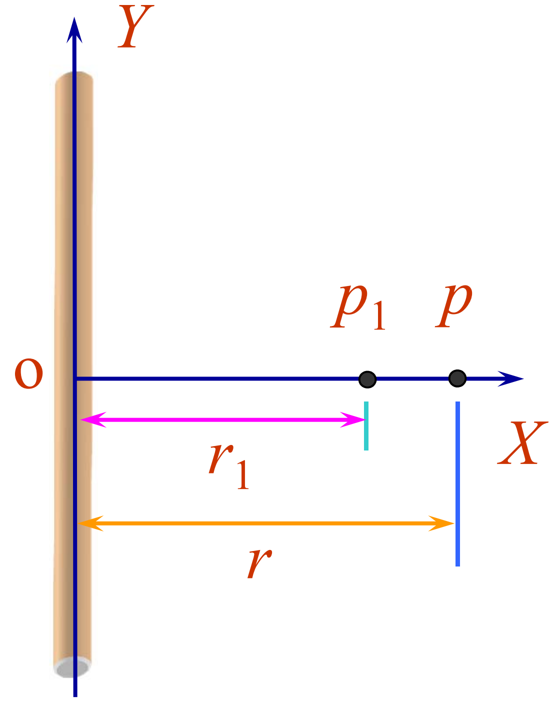
假设p_1点为电势零点，p点电势相当于p与p_1的电势差为：

$$U_{p|p_1}=U_p-U_{p_1}=\int_{(p)}^{(p_1)}\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

$$=\int_{(p)}^{(p_1)}E\cos\theta dl=\int_{(p)}^{(p_1)}Edr$$

$$=\int_{r}^{r_1}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r}$$

由于ln1=0,本题选r_1=1m处作为电势零点, 则p点电势为:



$$U_{p|1} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\{r\}_m$$

上式中 r>1m, U_p为负,

r<1m, U_p为正

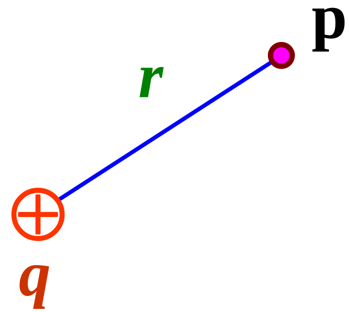
★讨论: 用定义计算电势时必须知道所求点与电势零点之间任意位置的电场强度

问题: 当电场强度无法求出时, 怎样求电势?

三. 电势叠加原理

当电场强度较难求出时

1. 点电荷电场中的电势



★ 选取无穷远处作为零电势

$$U_{p|\infty}=\int_p^\infty \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_p^\infty E\cos\theta \mathrm{d}l$$

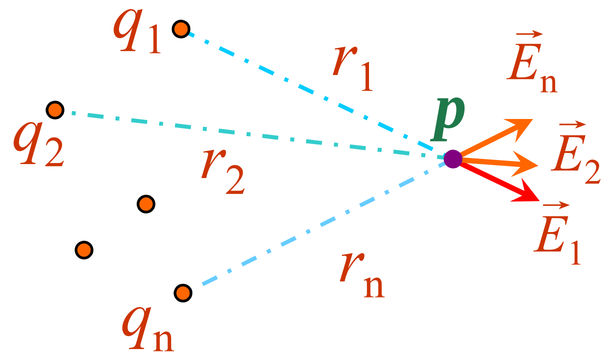
$$=\int_r^\infty E\mathrm{d}r=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

若**q**为正,空间各点电势为正, **r**越大, **q**越远, 电势越低; 若**q**为负, 空间各点电势为负, **r**越大, 离**q**越远,电势越高

思考题: 如果电势零点不选无穷远处,
点电荷电场中的电势?

2. 点电荷系电场中的电势

场源电荷是由点电荷q_1、q_2、…、q_n组成的点电荷系，★选取无穷远处作为零电势时，由电势的定义和场强叠加原理：



$$U_{p|\infty}=\int_p^\infty \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_p^\infty (\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots+\vec{E}_n)\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_p^\infty \vec{E}_1\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\int_p^\infty \vec{E}_2\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\ldots+\int_p^\infty \vec{E}_n\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=U_{p_1|\infty}+U_{p_2|\infty}+\ldots+U_{p_n|\infty}=\sum_{i=1}^{n}U_{pi}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

(1). 物理意义：点电荷系产生的电势等于各建场电荷单独产生电势的代数和

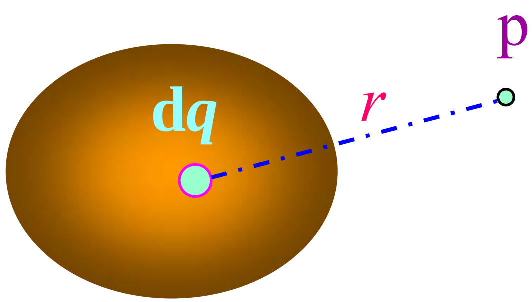
(2). 特点：代数和，标量和，容易计算

3. 电荷连续分布带电体电场中的电势计算思路(★)

(1) 按电势叠加原理计算

在带电体上取一小电荷元**dq**作为点电荷,则

$$\mathrm{d}U_{p|\infty}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U_{p|\infty}=\int \mathrm{d}U_{p|\infty}=\int_{V_{体}}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) 按定义式计算

$$U_{p|\infty}=\int_p^{\infty}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} \quad 或 \quad U_{p|p_0}=\int_p^{P_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

4. ★电势的计算之二 (按电势叠加原理)

例: 计算电偶极子电场中任意一点的电势?

解: ★选取无穷远处作为零电势

如图所示,在电偶极子电场**P**点的电势为:

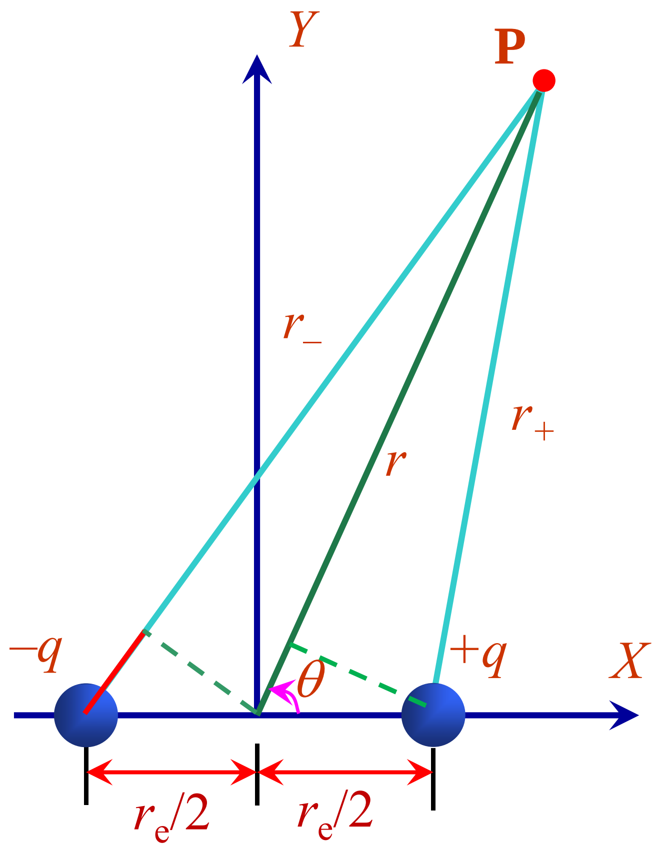
$$U_{P|\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

当$\mathbf{r} >> \mathbf{r_e}$时

$$r_+ \approx r - \frac{r_e}{2}\cos\theta$$

$$r_- \approx r + \frac{r_e}{2}\cos\theta$$

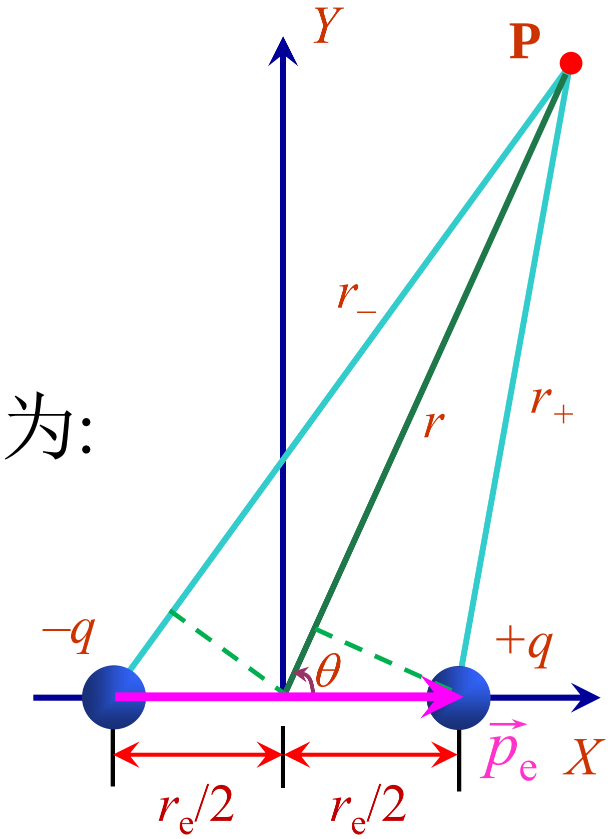


$$U_{P|\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(r+\frac{r_e}{2}\cos\theta)-(r-\frac{r_e}{2}\cos\theta)}{(r-\frac{r_e}{2}\cos\theta)(r+\frac{r_e}{2}\cos\theta)}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_e\cos\theta}{r^2-(\frac{r_e}{2}\cos\theta)^2}$$

由于 $\boldsymbol{r}>>\boldsymbol{r_e}$ 所以P点电势可写为:

$$U_{p|\infty}=\frac{qr_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}_e\bullet\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



例(9-34): 半径为R的非导体薄圆盘均匀带电, 电荷面密度为σ, 试求圆盘边缘处一点P的电势.

解:

★选取无穷远处作为零电势

以圆盘边缘上某点P点为圆心, 任意长r ($r<2R$)为半径处, 作一宽度为dr, 圆心角为dθ的电荷元

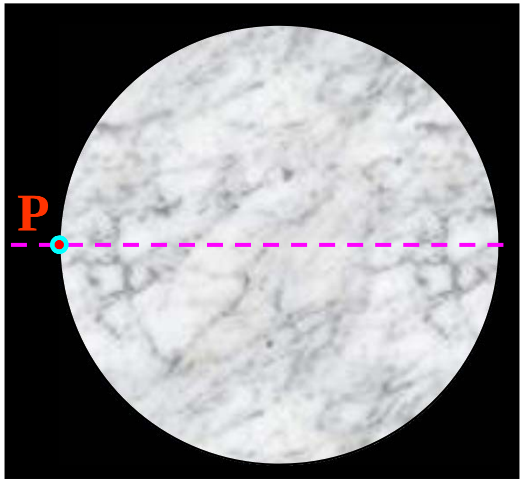
电荷元的面积: $dS = r d\theta dr$

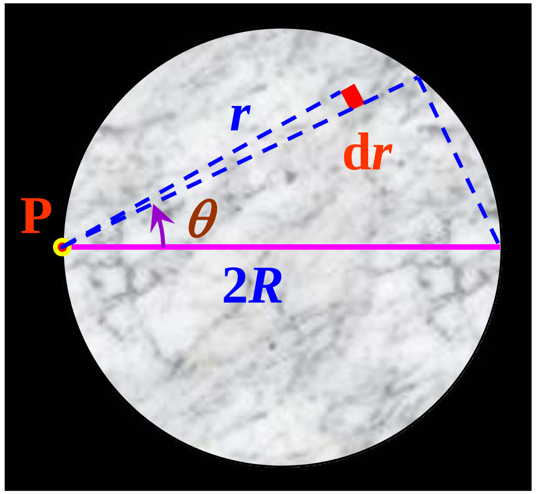
电荷元的带电量为:

$$dq = \sigma dS = \sigma r d\theta dr$$

电荷元在P点产生的电势:

$$dU_{P|\infty} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma d\theta dr}{4\pi\varepsilon_0}$$





圆盘在点P点产生的总电势为:

$$U_{P|\infty}=\iint_S \mathrm{d}U=\iint_S \frac{\sigma \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}\frac{\sigma \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\frac{\sigma 2R\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sigma R\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$