第10章（四）
三重积分的概念及计算

浙江大学数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

三重积分的定义及其意义

设物体V的密度为 $f(x,y,z)$，如何求此物体的质量？

（1）**分割**：把 V 分成 n 个小立体 $\Delta V_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，记其体积亦为 ΔV_i .

（2）**取近似**：取介点 $(\xi_i,\eta_i,\mu_i)\in\Delta V_i\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$，则小立体的质量

$$m_i=f(\xi_i,\eta_i,\mu_i)\Delta V_i\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$$

（3）**作和**：物体的质量 $M\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\mu_i)\Delta V_i$.

（4）**求极限**：记 $d(\Delta V_i)=\underset{P、Q\in\Delta V_i}{Sup}\{|PQ|\}$ 为 ΔV_i 的“直径”，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d(\Delta V_i)\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\mu_i)\Delta V_i$ 存在，则定义此极限为物体的质量，即 $V=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

三重积分的定义及其意义

定 义 设 $f(x,y,z)$ 是有界闭区域 V 上的有界函数，将 V 分成任意 n 个小闭区域 $\Delta V_1,\cdots\Delta V_n$ ，记 λ 为各小闭区直径中的最大值. 如果存在 $I\in\mathrm{R}$，对于任意的 $\varepsilon>0$ ，总存在 $\delta>0$，使得对于任何满足 $\lambda\le\delta$ 的分割和任意选取的介点集 (ξ_i,η_i,μ_i)，都成立 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\mu_i)\Delta V_i - I\right|<\varepsilon$ ，则称 f 在 V 上可积，称 I 为 f 在 V 上的三重积分，记作 $\iiint_V f(x,y,z)dV$ 或 $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$,

其中 $f(x,y,z)$ 为**被积函数**，$dV=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为**体积元**，x,y,z 为**积分变量**，V 为**积分区域**，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\mu_i)\Delta V_i$ 称为**积分和(或黎曼和)**.

三重积分在直角坐标系下的计算

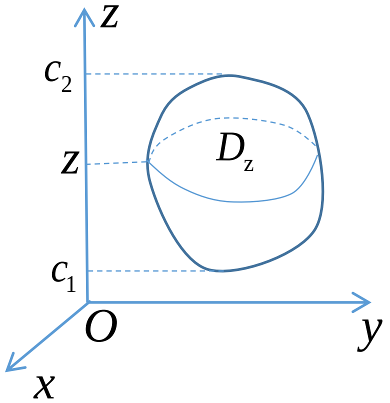
定理 设$V \subset \mathbb{R}^3$是有界闭集，$f: V \to \mathbb{R}$ 是连续函数，D_{xy} 为V 在 xoy 平面内的投影区域.

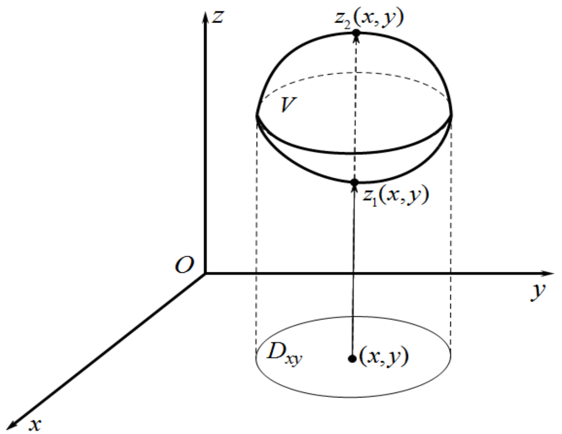
(1) 如果 $V = \left\{(x,y,z) \middle| (x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\right\}$，其中 $z_1(x,y), z_2(x,y)$ 为 D_{xy} 上的连续函数，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 如果V 在 z 轴上的投影为区间$[c_1, c_2]$，且对每个 $z \in [c_1, c_2]$，z-截面集 $D_z = \left\{(x,y) \middle| (x,y,z) \in V\right\}$为可求面积，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z.$$





三重积分在直角坐标系下的计算

若将 D_{xy} 和 D_z 上的二重积分化作累次积分，则三重积分就化为由三个定积分组成的累次积分：

(1) 设 $D_{xy}=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$，则有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 设 $D_z=\{(x,y)\mid \alpha_1(z)\le y\le\alpha_2(z),\ \beta_1(y,z)\le x\le\beta_2(y,z)\}$，则有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2}\left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\int_{\alpha_1(z)}^{\alpha_2(z)}\mathrm{d}y\int_{\beta_1(y,z)}^{\beta_2(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

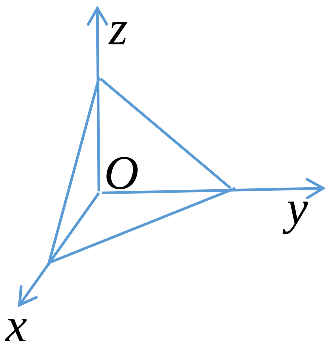
特别，当被积函数只是关于 z 的函数时，有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2}\left(\iint\limits_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2} f(z)\left(\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2} f(z)A(D_z)\mathrm{d}z.$$

同理可得其他次序，的累次积分表达式或 x-截面和 y-截面的累次积分表达式。

三重积分在直角坐标系下的计算

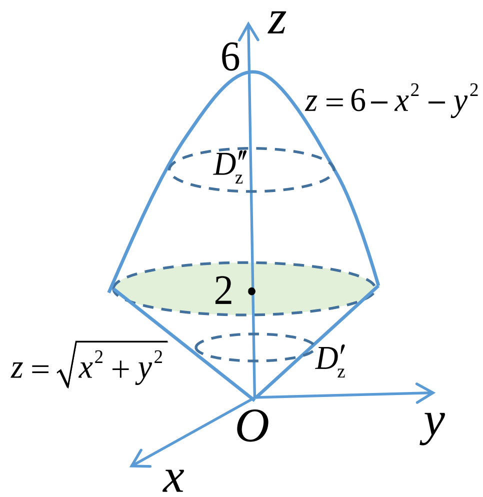
例1 计算$\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$由 $x=0, y=0, z=0$ 与 $x+y+z=1$围成.



解： 将 V 投影到 xoy 平面得 $D_{xy}=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$，所以有

$$\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

例2 计算$\iiint\limits_V \sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$由 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.



解： 因为被积函数只是关于一个变量 z 的函数，所以适合使用 z−截面法.

V 的图形如图所示，它由一个圆锥面与一个旋转抛物面围成，所以

$$\iiint\limits_V \sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2\sqrt{z}\left(\iint\limits_{D_z'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z+\int_2^6\sqrt{z}\left(\iint\limits_{D_z''}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2\sqrt{z}A(D_z')\mathrm{d}z+\int_2^6\sqrt{z}A(D_z'')\mathrm{d}z=\int_0^2\sqrt{z}\cdot\pi z^2\mathrm{d}z+\int_2^6\sqrt{z}\cdot\pi(6-z)\mathrm{d}z=16\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{7}+\frac{3\sqrt{3}-2}{5}\right).$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY


谢谢！
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY