斯托克斯公式

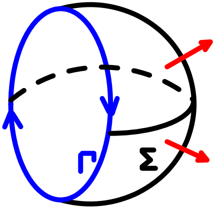
浙江大学数学科学学院　　薛儒英

★ 斯托克斯公式：

★ 斯托克斯公式：联系定侧曲面Σ上的第二类曲面积分与曲面Σ的边界闭曲线Γ上的第二类曲线积分之间的关系；

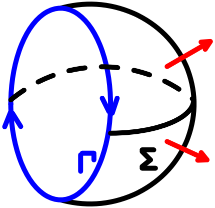
★ 斯托克斯公式：联系定侧曲面Σ上的第二类曲面积分与曲面Σ的边界闭曲线Γ上的第二类曲线积分之间的关系；

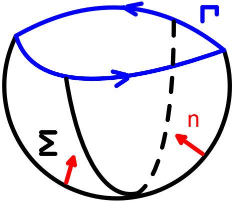
★ 定侧曲面Σ的指定侧与边界闭曲线Γ的正向：右手法则；



★ 斯托克斯公式：联系定侧曲面Σ上的第二类曲面积分与曲面Σ的边界闭曲线Γ上的第二类曲线积分之间的关系；

★ 定侧曲面Σ的指定侧与边界闭曲线Γ的正向：右手法则；





斯托克斯公式

定理： 设Γ是分片光滑曲面Σ的边界闭曲线，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在曲面Σ上有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_{\Gamma} pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

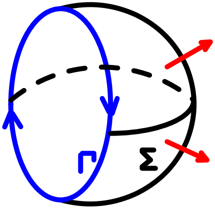
其中Γ的正向与Σ的定侧满足右手法则。

定理： 设Γ是分片光滑曲面Σ的边界闭曲线，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在曲面Σ上有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_{\Gamma} pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

其中Γ的正向与Σ的定侧满足右手法则。

证明省略。

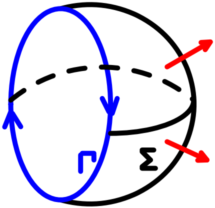


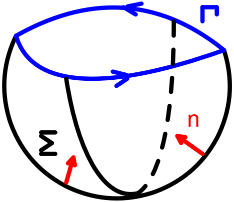
定理： 设Γ是分片光滑曲面Σ的边界闭曲线，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在曲面Σ上有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_{\Gamma} pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

其中Γ的正向与Σ的定侧满足右手法则。

证明省略。





例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, (其中$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C (z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz=2S.$$

例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, (其中$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C (z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz=2S.$$

解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，

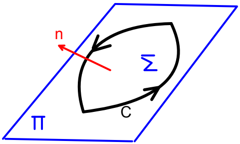
例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, (其中$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C (z\cos\beta - y\cos\gamma)dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)dz = 2S.$$

解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, (其中$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

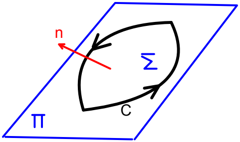
$$\oint_C (z\cos\beta - y\cos\gamma)dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)dz = 2S.$$



解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, (其中$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C (z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz=2S.$$



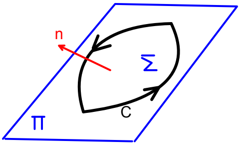
解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,

由斯托克斯公式, 原式等于

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z\cos\beta-y\cos\gamma) & (x\cos\gamma-z\cos\alpha) & (y\cos\alpha-x\cos\beta) \end{vmatrix}$$

例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, (其中$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C (z\cos\beta - y\cos\gamma)dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)dz = 2S.$$



解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

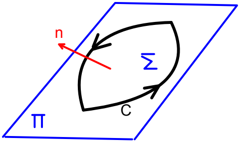
由斯托克斯公式, 原式等于

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z\cos\beta - y\cos\gamma) & (x\cos\gamma - z\cos\alpha) & (y\cos\alpha - x\cos\beta) \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma 2\cos\alpha\, dydz + 2\cos\beta\, dzdx + 2\cos\gamma\, dxdy$$

例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, (其中$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C (z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz=2S.$$



解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,

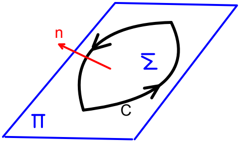
由斯托克斯公式, 原式等于

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z\cos\beta-y\cos\gamma) & (x\cos\gamma-z\cos\alpha) & (y\cos\alpha-x\cos\beta) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_\Sigma 2\cos\alpha dydz+2\cos\beta dzdx+2\cos\gamma dxdy \\ &= 2\iint_\Sigma \left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)dS \end{aligned}$$

例1. C位于平面Π： $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, (其中$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为平面的法向量的方向余弦)上并包围面积为$S$的闭曲线（正向），证明

$$\oint_C(z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz=2S.$$



解：记Σ为平面Π上由闭曲线C所围的曲面，$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,

由斯托克斯公式, 原式等于

$$\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z\cos\beta-y\cos\gamma) & (x\cos\gamma-z\cos\alpha) & (y\cos\alpha-x\cos\beta)\end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma 2\cos\alpha dydz+2\cos\beta dzdx+2\cos\gamma dxdy$$

$$=2\iint_\Sigma\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)dS=2\iint_\Sigma dS=2S.$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

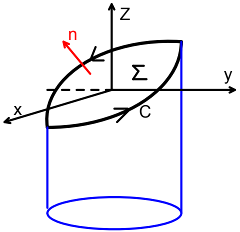
$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?

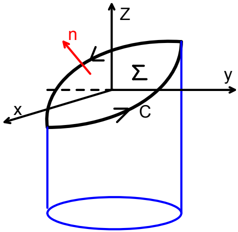


例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



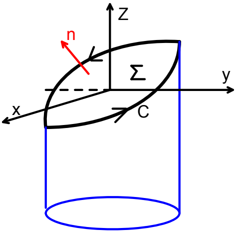
解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为Σ,

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



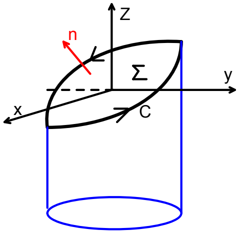
解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为$\Sigma$,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$;

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0(a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆

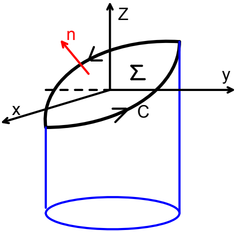
柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为Σ,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$；由斯托克斯公式,

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0(a>0,h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为$\Sigma$,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$；由斯托克斯公式,

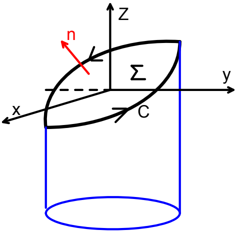
$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \end{vmatrix}$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为$\Sigma$,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$；由斯托克斯公式,

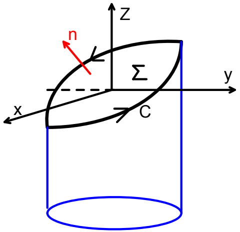
$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为Σ,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$；由斯托克斯公式,

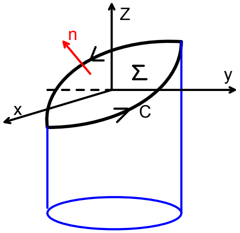
$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y-z) & (z-x) & (x-y) \end{vmatrix}$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0(a>0,h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为Σ,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$；由斯托克斯公式,

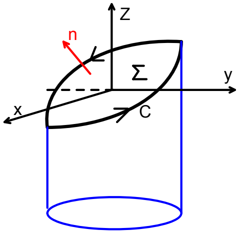
$$
\begin{aligned}
I &= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y-z) & (z-x) & (x-y) \end{vmatrix} \\
&= \iint_\Sigma -2dydz-2dzdx-2dxdy
\end{aligned}
$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0(a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?

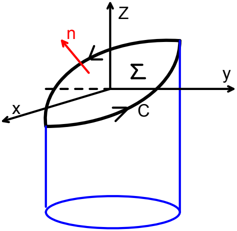


解法1：在平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0$上由椭圆

柱$x^2+y^2=a^2$所围的曲面为Σ,指定为上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{h,0,a\}}{\sqrt{a^2+h^2}}$；由斯托克斯公式,

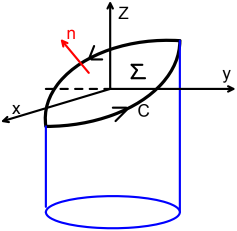
$$
\begin{aligned}
I &= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y-z) & (z-x) & (x-y) \end{vmatrix} \\
&= \iint_\Sigma -2dydz-2dzdx-2dxdy = \iint_\Sigma \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS
\end{aligned}
$$

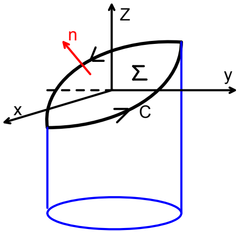
$$I = \iint_{\Sigma} \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}} dS;$$



$$I=\iint_{\Sigma}\frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS;$$

$$\Sigma: z=\frac{h}{a}x,\ x^2+y^2\le a^2,$$

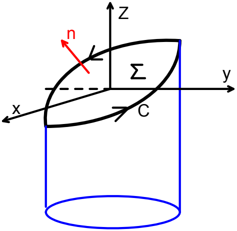




$$I=\iint_{\Sigma}\frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS;$$

$$\Sigma: z=\frac{h}{a}x,\ x^2+y^2\le a^2,$$

$$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy.$$

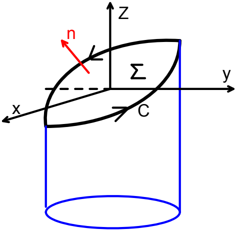


$I=\iint_\Sigma \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS;$

$\Sigma: z=\frac{h}{a}x,\ x^2+y^2\le a^2,$

$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy.$

$$I = \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_\Sigma dS$$

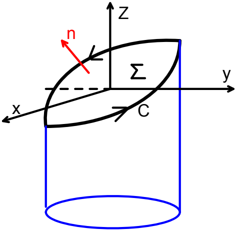


$I=\iint_\Sigma \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS;$

$\Sigma: z=\frac{h}{a}x,\ x^2+y^2\le a^2,$

$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy.$

$$I = \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_\Sigma dS=\frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy$$

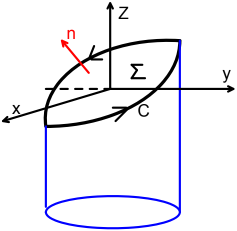


$I=\iint_\Sigma \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS;$

$\Sigma: z=\frac{h}{a}x,\ x^2+y^2\le a^2,$

$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy.$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_\Sigma dS=\frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy \\ &= \frac{-2a-2h}{a}\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy \end{aligned}$$



$I=\iint_\Sigma \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS;$

$\Sigma: z=\frac{h}{a}x,\ x^2+y^2\le a^2,$

$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy.$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_\Sigma dS=\frac{-2a-2h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}dxdy \\ &= \frac{-2a-2h}{a}\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=\frac{-2a-2h}{a}\bullet\pi a^2 \\ &= -2\pi a(h+a). \end{aligned}$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

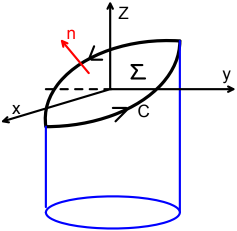
$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?

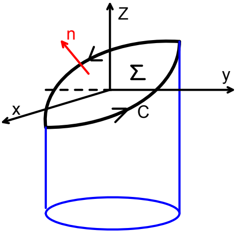


例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



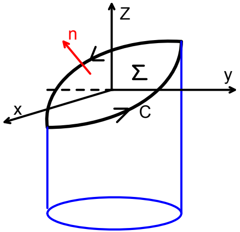
blue解法2：

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



blue解法2：引进参数方程C：

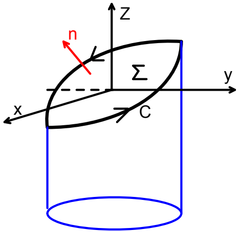
$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=-h\cos\theta,$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



blue解法2：引进参数方程C：

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=-h\cos\theta,$$

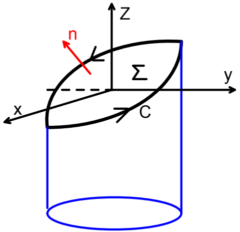
起点$\theta=0$终点$\theta=2\pi$;

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0 (a>0, h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



blue解法2：引进参数方程C：

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=-h\cos\theta,$$

起点$\theta=0$终点$\theta=2\pi$;

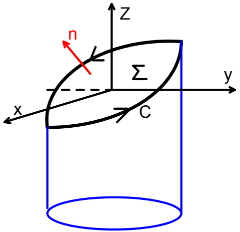
$$I = \oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

例2. 设闭曲线C为椭圆线

$x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=0(a>0,h>0)$

从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$?



blue解法2：引进参数方程C：

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=-h\cos\theta,$$

起点$\theta=0$终点$\theta=2\pi$;

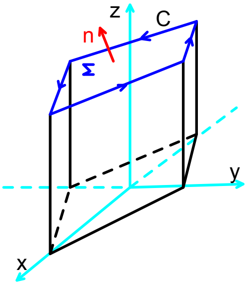
$$\begin{aligned} I &= \oint_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \\ &= \int_0^{2\pi}-a(a+h)d\theta=-2\pi a(a+h). \end{aligned}$$

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面$\Pi: x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx$$
$$+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$

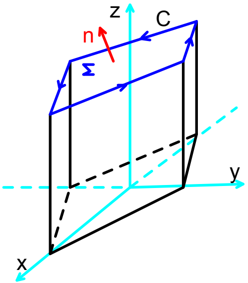
例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面Π：$x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$



例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面Π: $x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

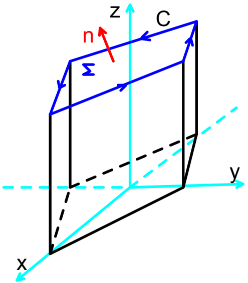
$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx$$
$$+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$



解:

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面$\Pi: x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

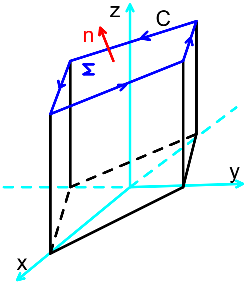
$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx$$
$$+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$



解：在平面$\Pi: x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面$\Pi: x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

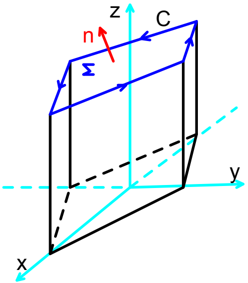
$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx \\ +(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$



解：在平面$\Pi: x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,指定为red上侧，

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面Π: $x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

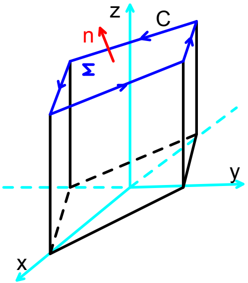
$$I=\oint_C(y^2-z^2)dx$$
$$+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$



解：在平面Π: $x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,指定为red上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{1,1,1\}}{\sqrt{3}}$;

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面Π：$x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$

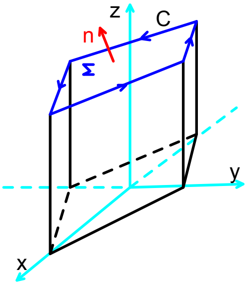


解：在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,指定为red上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{1,1,1\}}{\sqrt{3}}$；由斯托克斯公式

$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2-z^2) & (2z^2-x^2) & (3x^2-y^2) \end{vmatrix}$$

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面Π：$x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx$$
$$+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz?$$



解：在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,指定为red上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{1,1,1\}}{\sqrt{3}}$；由斯托克斯公式

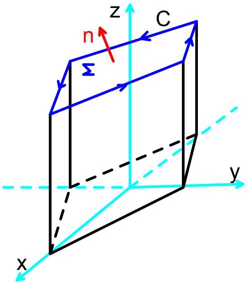
$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2-z^2) & (2z^2-x^2) & (3x^2-y^2) \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma (-2y-4z)dydz+(-6x-2z)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

例3. 设闭曲线C为柱面$|x|+|y|=1$与平面Π：$x+y+z=2$的交线，从x轴正向看它为逆时针方向，求

$I=\oint_C(y^2-z^2)dx$

$\qquad +(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$?

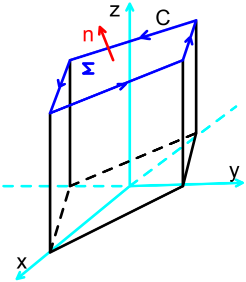


解：在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,指定为red上侧，其上侧的单位法向量为$n=\frac{\{1,1,1\}}{\sqrt{3}}$；由斯托克斯公式

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2-z^2) & (2z^2-x^2) & (3x^2-y^2) \end{vmatrix} \\
&= \iint_\Sigma (-2y-4z)dydz+(-6x-2z)dzdx+(-2x-2y)dxdy \\
&= \iint_\Sigma \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS
\end{aligned}
$$

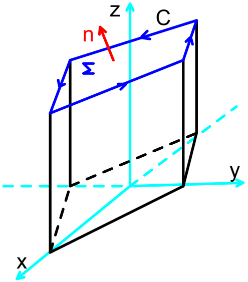
$$I=\iint_{\Sigma}\frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS;$$

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS;$$

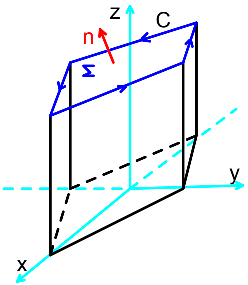


$$I = \iint_{\Sigma} \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}} dS;$$

在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,



$I = \iint_{\Sigma} \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}} dS;$



在平面Π: $x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,

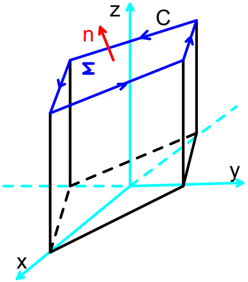
$$\Sigma: z = 2-x-y, |x|+|y| \leq 1,$$

$I=\iint_{\Sigma}\frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS;$

在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,

$\Sigma: z=2-x-y, |x|+|y|\le 1,$

$dS=\sqrt{3}dxdy.$



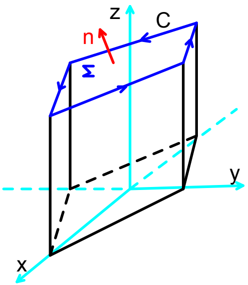
$I=\iint_\Sigma \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS;$

在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,

$\Sigma: z=2-x-y, |x|+|y|\le 1,$

$dS=\sqrt{3}dxdy.$

$I=\iint_\Sigma \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS$



$I = \iint_{\Sigma} \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}} dS;$

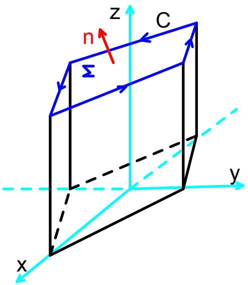
在平面Π : $x + y + z = 2$上由柱面$|x| + |y| = 1$所围的曲面为Σ,

$\Sigma : z = 2 - x - y, |x| + |y| \le 1,$

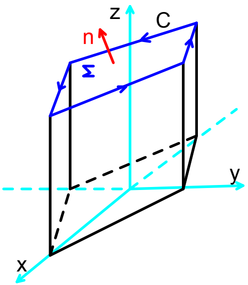
$dS = \sqrt{3} dxdy.$

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}} dS$$

$$= \iint_{|x|+|y|\le 1} (2y - 2x - 12) dxdy$$



$I=\iint_\Sigma \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS;$



在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,

$\Sigma: z=2-x-y, |x|+|y|\leq 1,$

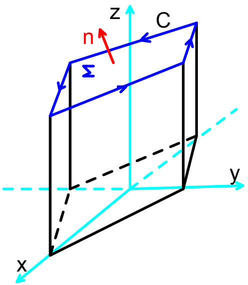
$dS=\sqrt{3}dxdy.$

$$I=\iint_\Sigma \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS$$

$$=\iint_{|x|+|y|\leq 1}(2y-2x-12)dxdy$$

注意到$\{|x|+|y|\leq 1\}$关于原点是对称的，$2y-2x$关于原点是反对称的，

$I=\iint_{\Sigma}\frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS;$



在平面Π：$x+y+z=2$上由柱面$|x|+|y|=1$所围的曲面为Σ,

$\Sigma: z=2-x-y, |x|+|y|\le 1,$

$dS=\sqrt{3}dxdy.$

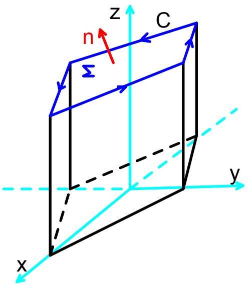
$I=\iint_{\Sigma}\frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}}dS$

$=\iint_{|x|+|y|\le 1}(2y-2x-12)dxdy$

注意到$\{|x|+|y|\le 1\}$关于原点是对称的，$2y-2x$关于原点是反对称的，

$$I=\iint_{|x|+|y|\le 1}(2y-2x-12)dxdy$$

$I = \iint_{\Sigma} \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}} dS;$



在平面Π：$x + y + z = 2$上由柱面$|x| + |y| = 1$所围的曲面为Σ,

$\Sigma : z = 2 - x - y, |x| + |y| \leq 1,$

$dS = \sqrt{3} dxdy.$

$I = \iint_{\Sigma} \frac{-8x-4y-6z}{\sqrt{3}} dS$

$= \iint_{|x|+|y|\leq 1} (2y - 2x - 12) dxdy$

注意到$\{|x| + |y| \leq 1\}$关于原点是对称的，$2y - 2x$关于原点是反对称的，

$$I = \iint_{|x|+|y|\leq 1} (2y - 2x - 12) dxdy$$

$$= \iint_{|x|+|y|\leq 1} -12 dxdy = -12 \bullet 2 = -24.$$

空间曲线积分与路径无关

定义： 空间线单连通区域Ω：

定义：空间线单连通区域Ω：对于区域Ω中的任何闭曲线L，可以完全在Ω内收缩为Ω内的一点。

定义：空间线单连通区域Ω：对于区域Ω中的任何闭曲线L，可以完全在Ω内收缩为Ω内的一点。

★ 直观上，一座山内有一山洞，如果该山洞还没有贯通，则这座山是线单连通区域；如果该山洞还已经贯通，则这座山不是线单连通区域；

定理： 设Ω是线单连通区域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在Ω内有一阶连续的偏导数，则下列四条件等价：

定理： 设Ω是线单连通区域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在Ω内有一阶连续的偏导数，则下列四条件等价：

(1). Ω是内任一闭曲线Γ, 有$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

定理： 设Ω是线单连通区域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在Ω内有一阶连续的偏导数，则下列四条件等价：

(1). Ω是内任一闭曲线Γ, 有$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

(2). Ω是内任一有向曲线L, 积分$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关；

定理： 设Ω是线单连通区域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在Ω内有一阶连续的偏导数，则下列四条件等价：

(1). Ω是内任一闭曲线Γ, 有$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=0$;

(2). Ω是内任一有向曲线L, 积分$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关；

(3).$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$是全微分，即存在三元函数$u(x,y,z)$使得

$$du=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz;$$

定理： 设Ω是线单连通区域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在Ω内有一阶连续的偏导数，则下列四条件等价：

(1). Ω是内任一闭曲线Γ, 有$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

(2). Ω是内任一有向曲线L, 积分$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关；

(3).$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$是全微分，即存在三元函数$u(x,y,z)$使得

$$du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz;$$

(4). 在Ω是内$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$,

定理： 设Ω是线单连通区域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在Ω内有一阶连续的偏导数，则下列四条件等价：

(1). Ω是内任一闭曲线Γ, 有$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=0$;

(2). Ω是内任一有向曲线L, 积分$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关；

(3).$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$是全微分，即存在三元函数$u(x,y,z)$使得

$$du=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz;$$

(4). 在Ω是内$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$,$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$,即

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

证明省略。

如何求原函数$u(x, y, z)$?

如何求原函数$u(x,y,z)$?

如果在线单连通区域Ω内

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

积分$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关

如何求原函数$u(x, y, z)$?

如果在线单连通区域Ω内

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

积分$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关。从而

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

如何求原函数$u(x,y,z)$?

如果在线单连通区域Ω内

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

积分$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$仅与有向曲线L的起点与终点有关，而与具体的路径无关。从而

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

特别取折线$A(x_0,y_0,z_0)B(x,y_0,z_0)$，$B(x,y_0,z_0)$，$C(x,y,z_0)$，$D(x,y,z)$得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz.$$

牛顿—莱布尼兹公式

在线单连通区域Ω内

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

在线单连通区域Ω内

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

设存在原函数$u(x,y,z)$使得$du=Pdx+Qdy+Rdz$,

在线单连通区域Ω内

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

设存在原函数$u(x,y,z)$使得$du=Pdx+Qdy+Rdz$, 记有向曲线L的起点(x_0,y_0,z_0)与终点(x_1,y_1,z_1), 则

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)}Pdx+Qdy+Rdz=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0).$$

例4. 求u使得

$$du(x,y,z) = 2xyz^2dx+(x^2z^2+y^2)dy+(2x^2yz+\varphi(y))dz,\ \varphi(0)=1;$$

试求函数$\varphi(y)$?

例4. 求u使得

$$du(x,y,z)=2xyz^2dx+(x^2z^2+y^2)dy+(2x^2yz+\varphi(y))dz,\ \varphi(0)=1;$$

试求函数$\varphi(y)$?
解： 由斯托克斯公式,

例4. 求u使得

$$du(x,y,z)=2xyz^2dx+(x^2z^2+y^2)dy+(2x^2yz+\varphi(y))dz,\ \varphi(0)=1;$$

试求函数$\varphi(y)$?

解： 由斯托克斯公式，

$$\vec{0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2+y^2 & 2x^2yz+\varphi(z) \end{vmatrix}=\varphi'(y)\vec{i},$$

例4. 求u使得

$$du(x,y,z)=2xyz^2dx+(x^2z^2+y^2)dy+(2x^2yz+\varphi(y))dz,\ \varphi(0)=1;$$

试求函数$\varphi(y)$?
解： 由斯托克斯公式，

$$\vec{0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2+y^2 & 2x^2yz+\varphi(z) \end{vmatrix}=\varphi'(y)\vec{i},$$

得$\varphi'(y)=0$且$\varphi(0)=1$,

例4. 求u使得

$$du(x,y,z)=2xyz^2dx+(x^2z^2+y^2)dy+(2x^2yz+\varphi(y))dz,\ \varphi(0)=1;$$

试求函数$\varphi(y)$?

解：　由斯托克斯公式，

$$\vec{0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2+y^2 & 2x^2yz+\varphi(z) \end{vmatrix}=\varphi'(y)\vec{i},$$

得$\varphi'(y)=0$且$\varphi(0)=1$, 解得$\varphi(y)=1$.

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法1：

例5. 求u使得$du = (x^2-2yz)dx + (y^2-2xz)dy + (z^2-2xy)dz$及计算

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2-2yz)dx + (y^2-2xz)dy + (z^2-2xy)dz?$$

解法1: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2-2yz) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy) \end{vmatrix} = \vec{0},$

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法1: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2-2yz) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy) \end{vmatrix}=\vec{0},$

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法1：$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2-2yz) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy) \end{vmatrix}=\vec{0}$,

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz$$

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法1: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2-2yz) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy) \end{vmatrix}=\vec{0},$

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)dz$$

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法1: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2-2yz) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy) \end{vmatrix}=\vec{0},$

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)dz=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz.$$

例5. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$及计算

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法1: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2-2yz) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy) \end{vmatrix}=\vec{0},$

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)dz=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz.$$

$$I=u|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}=-1.$$

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2:

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2：u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2： u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

由第一个方程得$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-2xyz+\varphi(y,z)$,

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2： u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\ \frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\ \frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

由第一个方程得$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-2xyz+\varphi(y,z)$,代入第二个方程得

$$y^2-2xz=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}$$

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2： u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

由第一个方程得$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-2xyz+\varphi(y,z)$,代入第二个方程得

$$y^2-2xz=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}$$

得$\varphi(y,z)=\frac{1}{3}y^3+\psi(z)$,

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2：u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

由第一个方程得$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-2xyz+\varphi(y,z)$,代入第二个方程得

$$y^2-2xz=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

得$\varphi(y,z)=\frac{1}{3}y^3+\psi(z)$,代入第三个方程得

$$z^2-2xy=\frac{\partial u}{\partial z}=-2xy+\frac{d\psi(z)}{dz},$$

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2：u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

由第一个方程得$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-2xyz+\varphi(y,z)$,代入第二个方程得

$$y^2-2xz=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}$$

得$\varphi(y,z)=\frac{1}{3}y^3+\psi(z)$,代入第三个方程得

$$z^2-2xy=\frac{\partial u}{\partial z}=-2xy+\frac{d\psi(z)}{dz},$$

得$\psi(z)=\frac{1}{3}z^3+C$,

例6. 求u使得$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$以及求

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz?$$

解法2：u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz,\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz,\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2xy,$$

由第一个方程得$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-2xyz+\varphi(y,z)$,代入第二个方程得

$$y^2-2xz=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}$$

得$\varphi(y,z)=\frac{1}{3}y^3+\psi(z)$,代入第三个方程得

$$z^2-2xy=\frac{\partial u}{\partial z}=-2xy+\frac{d\psi(z)}{dz},$$

得$\psi(z)=\frac{1}{3}z^3+C$,

$$u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz+C.$$

旋度

旋度

给定向量场$\vec{v} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

旋度

给定向量场$\vec{v} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

旋度

给定向量场$\vec{v}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

$$rot\ \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

给定向量场$\vec{v} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

斯托克斯公式:

旋度

给定向量场$\vec{v}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

$$rot\ \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

斯托克斯公式: 设Γ是分片光滑曲面Σ的边界闭曲线，则

$$\oint_{\Gamma}\vec{v}\bullet\vec{T}ds=\iint_{\Sigma}rot\ \vec{v}\bullet d\vec{S}$$

给定向量场$\vec{v}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

$$rot\ \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

斯托克斯公式： 设Γ是分片光滑曲面Σ的边界闭曲线，则

$$\oint_{\Gamma}\vec{v}\bullet\vec{T}ds=\iint_{\Sigma}rot\ \vec{v}\bullet d\vec{S}$$

其中Γ的正向与Σ的定侧满足右手法则。

给定向量场$\vec{v} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, 它的旋度为

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

斯托克斯公式： 设Γ是分片光滑曲面Σ的边界闭曲线，则

$$\oint_\Gamma \vec{v} \bullet \vec{T} ds = \iint_\Sigma rot\ \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

其中Γ的正向与Σ的定侧满足右手法则。

- 当向量场$\vec{v}$的旋度$rot\ \vec{v} = \vec{0}$时，称向量场$\vec{v}$是**无旋场**;

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v}=grad\ u$）.

必要性：

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的，由斯托克斯公式知：

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的, 由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du = Pdx + Qdy + Rdz$,

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的, 由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du = Pdx + Qdy + Rdz$, 即

$$\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的, 由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du = Pdx + Qdy + Rdz$, 即

$$\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\ u;$$

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v}=grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$是无旋场的, 由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du=Pdx+Qdy+Rdz$, 即

$$\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=grad\ u;$$

充分性：

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的，由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du = Pdx + Qdy + Rdz$，即

$$\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\ u;$$

充分性： 若向量场$\vec{v}$是一个梯度场，即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$,

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的，由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du = Pdx + Qdy + Rdz$，即

$$\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\ u;$$

充分性： 若向量场$\vec{v}$是一个梯度场，即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\ u$，则

$$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$$

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\, u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$是无旋场的，由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du = Pdx + Qdy + Rdz$，即

$$\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\, u;$$

充分性： 若向量场$\vec{v}$是一个梯度场，即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v} = grad\, u$，则

$$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$$

计算得

例7. Ω是线单连通区域，$\vec{v}$是定义在Ω上的向量场。求证：向量场$\vec{v}$是无旋场的充分必要条件为：向量场$\vec{v}$是一个梯度场（即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v}=grad\ u$）.

必要性： 若向量场$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$是无旋场的，由斯托克斯公式知：存在原函数$u(x,y,z)$使得$du=Pdx+Qdy+Rdz$，即

$$\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=grad\ u;$$

充分性： 若向量场$\vec{v}$是一个梯度场，即存在函数$u(x,y,z)$使得$\vec{v}=grad\ u$，则

$$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$$

计算得

$$rot\ \vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0};$$