第三章 线性微分方程组

3. 1节 微分方程组与线性微分方程组

一、微分方程组的一般概念

讨论含有n个未知函数$x_1,\cdots,x_n$的n个一阶方程构成的

一阶微分方程组，并设已解出导数$\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n)\quad(i=1,\cdots,n).$

这样，所讨论的微分方程组可写为：$\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\qquad(i=1,\ldots,n)\qquad(3.1)$

其中$f_i(i=1,\cdots,n)$是定义在$n+1$维空间$(t,x_1,\cdots,x_n)$的某区域D 内的函数，t是自变量。我们称(3,1)为一阶微分方程组的标准形式

若在区间(α，β)内定义的n 个连续可微函数$x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$ 能使在该区间内

$$\frac{dx_i(t)}{dt}\equiv f_i(t,x_1(t),\cdots,x_n(t))\quad {}_i(i=1,2,\cdots,\ n)$$

则称函数组$x_1(t),\cdots,x_n(t)$,为方程组(3.1)在区间内(a，b)内的一个解。

有时省去"区间(a，b)"

在任意一个已解出最高导数的n阶微方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}) \qquad (3.2)$$ 中，

令：$$x = x_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \qquad (3.3)$$

则(3.2)可化为由n个未知函数$x_1, x_2, \dots, x_n$的n个方程所构成的一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \qquad (3.4)$$

如果$x_i(t)(i = 1, \cdots, n)$是上述方程组的解，则显然$x = x_1(t)$是(3.2)的解；

反之，如果$x = x(t)$是(3.2)的解，则通过(3.3)，可以求得$x_1(t)$，$x_2(t), \cdots$，$x_n(t)$是(3.4)的解。这说明方程(3.2)与方程组(3.4)具有等价性。

同理，对于由已解出一切未知函数的最高阶导数的方程所构成的方程组，可以用上述方法构成一阶微分方程组的标准形式(3.1).

所以讨论一阶微分方程组的标准形式(3.1)具有普遍的意义。

方程组(3.1)的初值条件是

$$x_1(t_0)=x_{10},\cdots,x_n(t_0)=x_{n0}, \qquad (3.5)$$

其中t_0是自变量t的某一个指定的初值，

$x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0}$是未知函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$相应的初值,$(t_0,x_{10},\cdots,x_{n0})\in D$

求满足方程组（3.1）及初条件（3.5）的解的问题为一阶方程组的初值问题。可以证明这个初值问题的解存在且唯一

设 $x_i=\varphi_i(t,c_1,\cdots,c_n) \quad (i=1,\cdots,n) \qquad (3.6)$

是方程组(3.1)的含n个任意常数$c_1,\cdots,c_n$的解，

若对于区域D内任意给定的一点$(t,x_{10},\cdots,x_{n0})$,

总能确定$c_1,\cdots,c_n$的值，使得对应的解(3.6)满足初值条件

$\varphi(t_0,c_1,\cdots,c_n)=x_0 \qquad (i=1,\cdots,n)$,

则称(3.6)为方程组(3.1)在区域D内的通解

如果由函数方程组

$\Phi_i(t,x_1,\cdots,x_n;c_1,\cdots,c_n)=0 \quad (i=1,\cdots,n) \ (3.7)$

所确定的隐函数$x_i=\varphi_i(t,c_1,\cdots,c_n) \quad (i=1,\cdots,n)$

是(3.1)的通解，

则称(3.7)是(3.1)的通积分

二、线性微分方程组的一般概念

如果微分方程组 $\dfrac{dx_i}{dt}=f(t,x_1,\cdots,x_n),(i=1,\cdots,n)$(3.1)

中的每一个函数$f_i(t,x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$

都是变量$x_1,\cdots,x_n$的线性函数，

则称这种微分方程组为线性微分方程组，简称线性方程组。

线性方程组的标准形式是:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+f_i(t),(i=1,\cdots,n) \qquad (3.8)$$

其中$a_{ij}(t)$和$f_i(t)(i,j=1,\cdots,n)$是$t\in(a,b)$的已知函数

前面讲过，已解出最高阶导数的n阶方程可化为一阶方程组作为特例，
对于n阶线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+p_n(t)x=f(t) \qquad (3.9)$$

引入n个新的函数

$$x=x_1,\frac{dx_1}{dt}=x_2,\cdots,\frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n \qquad (3.3)$$

可将它化为形如（3.8）的含 n 个未知函数的线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_3,\\ \cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t}=x_n,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=-p_n(t)x_1-p_{n-1}(t)x_2-\cdots-p_1(t)x_n+f(t)\end{cases} \qquad (3.9)'$$

下面即将看到，线性微分方程组与线性代数之间有着密切的联系，

而线性代数已有一些列完整的理论，从而也使得线性微分方程组的理论和具体解法，解决得比较完善。

为此记：

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix},f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix},\ A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

则(3.8)可写为：$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t).\qquad(3.8)$

若$f(t)\neq 0$,则称（3.8）为非齐次线性方程组。

方程组：$\frac{dx}{dt}=A(t)x\qquad(3.10)$ 称为齐次线性方程组。

对于同一个$A(t)$，称（3.10）为（3.8）对应的齐次线性方程组。

线性方程组（3.8）的解$x(t)$，是一个向量函数。

3.2 节 线性微分方程组解的一般理论

定理3.1 设$A(t)$和$f(t)$在区间(a,b)内连续，

即它们各自对应的每一个元素$a_{ij}(t)$和$f_i(t)$都在区间(a,b)内连续，

则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)+f(t) \qquad (3.8)$$

$$x(t_0)=x_0, t_0\in(a,b)$$

在区间(a,b)内存在唯一的解$x=x(t)$

显然，此解在(a,b)内连续，且有连续一阶导数。

推论 设$A(t)$在(a,b)内连续，则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x, \qquad (3.10)$$

$$x(t_0)=0, t_0\in(a,b) \qquad (3.11)$$

的唯一解是$x(t)\equiv 0$,并称这种解为零解或平凡解

一、齐次线性微分方程组的通解结构

定理3.2 设$x_1(t),\cdots,x_m(t)$是齐次方程组：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x$ (3.10)的m个解，

$c_1,\cdots,c_m$是m个常数，则$x(t)=c_1x_1(t)+\cdots+c_mx_m(t)$ (3.12) 也是(3.10)的解

证明 将(3.10)移至等号一边，并将(3.12)代入，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{m}c_ix_i(t)-A(t)\sum_{i=1}^{m}c_ix_i(t)=\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}-\sum_{i=1}^{m}c_iA(t)x_i(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i[\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}-A(t)x_i(t)] \qquad (3.13)$$

因为$x_i(t)$是(3.10)的解，故有$\dfrac{dx_i(t)}{dt}-A(t)x_i(t)=0(i=1,\cdots,n)$,

于是(3.13)为零，即证得(3.12)是(3.10)的解.

为了考察在何种条件下$c_ix_i(t)+\cdots+c_mx_m(t)$是(3.10)的通解，
我们引入向量函数线性无关、线性相关以及朗斯基行列式的概念

定义3.1　设$x_1(t),\cdots,x_m(t)$是定义在某区间内的m个向量函数,.如果存在不全为零的m个常数$a_1,\cdots,a_m$,使得在该区间内恒等式

$$a_1x_1(t)+\cdots+a_mx_m(t)\equiv 0 \qquad (3.14)$$

成立，

则称这m个向量函数$x_1(t),\cdots,x_m(t)$在该区间内线性相关.

否则，如果以上恒等式仅当$a_1=a_2=\cdots=a_m=0$时此才成立，

则称向量函数$x_1(t),\cdots,x_m(t)$在该区间内线性无关

例1 设$Y_1,\cdots,Y_m$是m个n维非零常向量，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是$m$个各不相同的常数，

则向量$Y_1e^{\lambda_1 t},\cdots,Y_me^{\lambda_m t}$在区间$(-\infty,+\infty)$内线性无关

证明　用反证法. 设$Y_1e^{\lambda_1 t},\cdots,Y_me^{\lambda_m t}$在区间$(-\infty,+\infty)$内线性相关，

则存m个不全为零的常数$a_1,\cdots,a_m$,使

$$a_1Y_1e^{\lambda_1 t}+a_2Y_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+a_mY_me^{\lambda_m t}\equiv 0, t\in(-\infty,+\infty) \qquad (3.15)$$

我们不妨设上式中的$a_1,a_2,\cdots,a_n$都不为零. 事实上，

如果有某些a_i为零，那么在(3.15)中就把这些a_i所对应的项剔除，

剔除后并不改变(3.15)的形式.用$e^{\lambda_1 t}$除(3.15)两边，得

$$a_1Y_1 + a_2Y_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + a_mY_m\mathrm{e}^{\lambda_m t} \equiv 0 \qquad (3.16)$$

两边对 t 求导数，得

$$a_2(\lambda_2-\lambda_1)Y_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + a_m(\lambda_m-\lambda_1)Y_m\mathrm{e}^{(\lambda_m-\lambda_1)t} \equiv 0 \qquad (3.17)$$

注意，由于$\lambda_i(i=1,\cdots,m)$各不相同，从而

$\lambda_i-\lambda_1 \neq 0, \lambda_j-\lambda_1 \neq \lambda_i-\lambda_1(i,j=2,\cdots,m;i\neq j)$

故（3.17）与（3.15）有同样的形式，且满足同样的条件，因此可以按以上法一致进行下去，

直至得到如下形式的恒等式 $\beta_m Y_m e^{\lambda_m t} \equiv 0$

但由假设知，$\beta_m \neq 0$，$Y_m \neq 0$.这与上述恒等式矛盾.

因而证得$Y_1e^{\lambda_1 t},\cdots,Y_m e^{\lambda_m t}$线性无关. 证毕.

定义3.2　设$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是n个向量函数，

以$x_i(t)=\left[x_{1i}(t),x_{2i}(t),\cdots,x_{ni}(t)\right]^T\ (i=1,\cdots,n)$

作为第i列所构成的矩阵记为

$$X(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

则称行列式$\det X(t)$称为向量函数$x_1(t),\cdots,x_n(t)$的朗斯基行列式，

记为

$$W(t)=\det X(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

定理3.3　设$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性方程组(3.10)的n个解，则$x_1(t),\cdots,x_n(t)$在区间(a,b)内线性相关

$\Leftrightarrow$ 它们的朗斯基行列式$W(t)\equiv 0, t\in(a,b)$

$x_1(t),\cdots,x_n(t)$在区间(a,b)内线性无关

$\Leftrightarrow$ 它们的朗斯基行列式$W(t)\neq 0, t\in(a,b)$

推论　设$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性方程组（3. 10）的n个解，则它们的朗斯基行列式在区间(a,b)内或者处处不零，或者处处为零.

证明　先证必要性. 设$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性方程组(3.10)的n个解，

则存在不全为零的n个常数$a_1,\cdots,a_n$,使

$$a_1x_1(t)+\cdots+a_nx_n(t)\equiv 0, t\in(a,b) \qquad (3.19)$$

将向量行数$x_i(t)(i=1,\cdots,n)$用分量写出来，则(3.19)是一个以$a_1,\cdots,a_n$为未知数的齐次线性方程组，它的系数行列式就是$W(t)$.

由于(3.19)有一组不全为零的解$a_1,\cdots,a_n$，故对一切$t\in(a,b)$，该齐次线性代数方程组的系数行列式应等于零，即$W(t)\equiv 0$，$t\in(a,b)$

再证充分性，设$W(t)\equiv 0$，取$t_0\in(a,b)$，于是$W(t_0)\equiv 0$,

则关于未知数$a_1,\cdots,a_n$的齐次线性代数方程组

$a_1x_1(t_0)+\cdots+a_nx_n(t_0)\equiv 0$有不全为零的解$a_1^*,\cdots,a_n^*$.

由定理3.2知$x(t)=\sum_{i=1}^{n}a_1^*x_i(t_0)$是(3.10)的解，

且满足零初值条件$x(t_0)=\sum_{i=1}^{n}a_1^*x_i(t_0)=0$

再由定理3. 1的推论知$x(t)\equiv 0$，即$a_1^*x_1(t)+\cdots+a_n^*x_n(t)\equiv 0$，$t\in(a,b)$

但因$a_1^*,\cdots,a_n^*$不全为零，于是由定义3. 1知，$x_1(t),\cdots,x_n(t)$线性相关. 证毕

定理3.4 （齐次线性方程组通解结构定理）

设$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性方程组（3.10）的n个线性无关的解，

则$x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i x_i(t)$（其中$c_1,\cdots,c_n$是$n$个任意常数） (3.20)是（3.10）的通解。

证明 由定理3.2知，显然（3.20）是$\dfrac{dy}{dt}=A(t)x$的解，

为了证明（3.20）是通解，只要证明，对任意给定的初始条件

$x_1(t_0)=x_{10},\cdots,x_n(t_0)=x_{n0}$ （3.5），总可找到相应的一组常数$c_i^*(i=1,\cdots,n)$，

使当$c_i=c_i^*$时，（3.20）所对应的解满足初始条件 （3.5）.

即证以$c_i\ (i=1,\cdots,n)$为未知数的线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t_0)=x_0 \qquad (3.21)$$

存在解，

因为（3.21）的系数行列式是$W(t_0)$，而根据定理，由线性无关解$x_1(t),\cdots,x_n(t)$构成的朗斯基行列式$W(t)\neq 0$，因此$W(t_0)\neq 0$，故（3.21）有唯一解$c_i=c^*(i=1,\cdots,n)$.

由此构成的$x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^* x_i(t)$满足（3.5）.

定义3.3　设$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性方程组$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$的n个线性无关的解，

则称$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$的一个基本解组；

以这些$x_1(t),\cdots,x_n(t)$为列所构成的矩阵，称为$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$的一个基本解矩阵.

设$X(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$是（3.10）的一个基本解矩阵，

定义$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)=(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t),\cdots,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t))$

则显然有$\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)X(t)$.又如果$c$是一个$n$维的任意常向量，

则$x(t)=X(t)c$ 是$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ 的通解。

由定理3.4可见，为求$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$的通解，

只要先求出它的一个基本解组（基本解矩阵），

再有$x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$或$x(t)=X(t)c$就构成$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$的通解。

下面证明齐次线性方程组$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$的基本解一定存在。

定理3.5 齐次线性方程组$\frac{dx}{dt}=A(t)x$（3.10）必存在且至多只存在n个线性无关的解，因而齐次线性方程组$\frac{dx}{dt}=A(t)x$的基本解组（基本解矩阵）必存在。

证明 考虑初值条件$X(t_0)=e_i$,
这里e_i是一个n维列向量，它的第i个分量是1，其他分量都是零。

对于每一个$i=1,\cdots,n$,齐次方程$\frac{dx}{dt}=A(t)x$分别存在的唯一的解$x_i(t)$满足$x(t_0)=e_i$,

由这n个解$x_1(t),\cdots,x_n(t)$构成的朗斯基行列式在$t=t_0$处的值为

$$W(t_0)=\begin{vmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

故知$x_1(t),\cdots,x_n(t)$线性无关，
它们构成一个基本解组。

再由定理3.4，（3.10）的任意$n+1$个解
必线性相关，故（3.10）有且只有n个线性无关的解。

二、非齐次线性微分方程组的通解结构

定理3.6 (非齐次线性微分方程组的通解结构定理)

设$x^*(t)$是非齐次线性方程组$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$ （3.8）的一个解，

$X(t)c$是（3.8）所对应的齐次线性方程组$\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ （3.10）的通解，

则$x=X(t)+x^*(t)$ 是（3.8）的通解。

即非齐次方程的通解由二部分组成：

它自己的一个特解+对应齐次方程的通解

§3 常系线性微分方程组的解法

设 $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$ （3.8）中

系数矩阵A中的每一元素$a_{ij}(i, j = 1, \cdots, n)$都是常数，

则称 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + f(t) \qquad (3.23)$

为常系数线性微分方程组

一、常系数齐次线性方程组的解法

常系数齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad （3.24）$$

令 $x = ve^{\lambda t} \qquad (3.25)$

来试解，其中v是常向量，λ是常数，二者都待求，

以（3.25）代入（3.24）得

$$v\lambda e^{\lambda t} = Ave^{\lambda t} \qquad (3.26)$$

约去非零因子$e^{\lambda t}$,有$Av=\lambda v$

即有:$(A-\lambda E)v=0$　　　　(3.27)

由线性代数知道，（3. 27）有非零解 v ,(即 v 的各分量不全为零)的充分必要条件是（3. 27）的系数行列式等于零，即

$\det(A-\lambda E)=0$　　　　(3.28)

$$
或，D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0
$$

方程（ 3.28 ）为矩阵 A 的特征方程，它的根为 A 的特征根（或称特征值）。

类似，称（ 3.28 ）和它的根为常系数齐次方微分程组（ 3.24 ）的特征方程和特征根。

如果$\lambda=\lambda_k$是（3. 24）的一个特征根，则将它代入（3. 27），

可求的相应的非零解$v=v_k$,非零向量v_k为矩阵A属于λ_k的特征向量，

从而$x(t)=v_k e^{\lambda_k t}$　　(3.29)　　　是（3.24）是一个解。

下面分别讨论特征根是单根和重根的两种情况

（一）特征根都是单根

设矩阵$A_{n\times n}$的特征根都是单根，即A有n个不同的特征根$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,

又设v_i是属于特征根λ_i的特征向量（$i=1,\cdots,n$），

则方程组$\dfrac{dx}{dt}=Ax$ （3. 24）有n个不同的解：

$$v_1e^{\lambda_1 t},v_2e^{\lambda_2 t},\cdots,v_ne^{\lambda_n t} \qquad (3.30)$$

已经证明，它们在区间（-∞，+∞）内线性无关，
因而它们构成（3. 24）的一个基本解组，

于是$x=\sum_{i=1}^{n}c_iv_ie^{\lambda_i t} \qquad (3.31)$

是（3. 24）的通解，其中$c_i(i=1,\cdots,n)$是n个任意常数

例1 解方程组: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 + x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 \end{cases}$, $\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

解　由特征方程

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4-2\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda+1 & -(\lambda-2)(\lambda-3) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

解出特征根 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -1$，它们都是单根

HIGHER EDUCATION PRESS

目录　上页　下页　返回　结束

设属于$\lambda_1=2$的特征向量是

$$v_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix},\quad \text{它应满足:}(A-2E)v_1=0,\text{即}\begin{pmatrix}-5&4&-2\\1&-2&1\\6&-6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=0,\text{即}\begin{cases}-5\alpha_1+4\beta_1-2\gamma_1=0\\ \alpha_1-2\beta_1+\gamma_1=0\\ 6\alpha_1-6\beta_1+3\gamma_1=0\end{cases}$$

由线性代数知，只要取第一、第二两个方程求解即可

$$\text{即得}\alpha_1:\ \beta_1:\ \gamma_1=\begin{vmatrix}4&-2\\-2&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-2&-5\\1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-5&4\\1&-2\end{vmatrix}=0:3:6$$

$$\text{故可取:}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\text{于是得到原方程的一个解:}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$$

$$\text{或者,}\begin{pmatrix}-5&4&-2\\1&-2&1\\6&-6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\therefore\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$$

类似地可分别求得属于$\lambda_2=1$和$\lambda_3=-1$的特征向量

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

由此可得到原方程相应的两个解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$\therefore$ 原方程的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 = c_2 e^t + c_3 e^{-t} \\ x_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^t \;, c_1, c_2, c_3 \text{任意} \\ x_3 = 2c_1 e^{2t} - e^{-t} \end{cases}$$

如果特征方程：$\det\left|A-\lambda E\right|=0$有复根

如当$\lambda_1=\alpha+i\beta$是一个复特征值，$v_1=p+iq$为属于λ_1的特征向量，

则由共轭性，$\lambda_2=\alpha-i\beta$也是一个复特征值，$v_2=p-iq$为属于λ_2的特征向量，

因此，方程组$\dfrac{dx}{dt}=Ax$有两个复值解：

$$x_1(t)=(p+iq)e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}(p\cos\beta t-q\sin\beta t)+ie^{\alpha}(p\sin\beta t+q\cos\beta t)$$

$$x_2(t)=(p-iq)e^{\alpha-i\beta}=e^{\alpha}(p\cos\beta t-q\sin\beta t)-ie^{\alpha}(p\sin\beta t+q\cos\beta t)$$

取上述解中的实部和虚部：$e^{\alpha}(p\cos\beta t-q\sin\beta t)$和$e^{\alpha}(p\sin\beta t+q\cos\beta t)$

也是$\dfrac{dx}{dt}=Ax$的基本解组。

例，解方程 $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

解，$\det|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$

得到特征值，$\lambda_1 = 2$，$\lambda_{2,3} = 3 \pm i$

求得属于$\lambda_1 = 2$的一个特征向量为$v_1 = [1 \quad 0 \quad 1]^T$ $\therefore$得到原方程一个解：$e^{2t}[1 \quad 0 \quad 1]^T$

设属于$\lambda_2 = 3 + i$的特征向量为$v_2 = [a \quad b \quad c]^T$，

则有：$\begin{bmatrix} -1-i & 1 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 2 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

$$a:b:c = \begin{vmatrix} -i & -1 \\ 2 & -i \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -i & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -i \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1:(1+i):(2-i)$$

$\therefore$得到原方程一个复数解：$e^{(3+i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} \text{cost} \\ \text{cost-sint} \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \text{sint} \\ \text{cost+sint} \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix}e^{3t}$

再取实部，虚部为方程两个解，得到方程组的通解：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix} \text{cost} \\ \text{cost-sint} \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix}e^{3t} + c_3\begin{bmatrix} \text{sint} \\ \text{cost+sint} \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix}e^{3t}$$

二，常系数非齐次方程组的解法

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t) \qquad (1)$$

$(A(t), f(t)$在(a,b)内连续）

如果已经求出对应齐次方程组$\frac{dx}{dt}=A(t)x$的解

$x=X(t)c$ 　　其中c是n维任意常向量

我们利用常数变易法，求(1)的解。

设$x=X(t)c(t)$为（1）的解，则有：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX(t)}{dt}c(t)+\frac{dc(t)}{dt}X(t)=A(t)X(t)c(t)+f(t)$$

$\therefore$有：$X(t)c'(t)=f(t) \qquad (2)$

$$\because \det X(t)\neq 0, \therefore c'(t)=X^{-1}(t)f(t)\Rightarrow c(t)=\int_{t_0}^{t}X^{-1}(u)f(u)d(u)$$

由此，得到(1)的一个解：$x^{*}=X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(u)f(u)d(u)$

$\therefore$ (1)的通解为：$x(t)=X(t)c+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(u)f(u)d(u) \qquad (3)$

对应初值问题：$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \qquad (4)$

的解为：$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(u)f(u)d(u)$

例1，求初值问题：$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t\cos 2t \end{bmatrix} \\ x(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$

解,(1)先求对应齐次方程组的通解

特征方程$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$，得到特征根：$\begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=1+2i \\ \lambda_3=1-2i \end{cases}$

对于$\lambda_1=1$，求得一个特征向量，$v_1=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$

于是得到齐次方程的一个解：$x_1=e^t\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$

对于$\lambda_2=1+2i$，求得一个特征向量，$v_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}^T$

于是得到齐次方程的一个解：$x_2=e^{(1+2i)t}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}^T$

$$=e^t(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}^T=e^t\left[(0,\cos 2t,\sin 2t)+i(0,\sin 2t,-\cos 2t)\right]$$

$\therefore$齐次方程组的基本解矩阵为：$X(t)=e^t\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos 2t & \sin 2t \\ 2 & \sin 2t & -\cos 2t \end{bmatrix}$

(2)求原方程组的解，设解为：$x(t)=X(t)c(t)$

$$\Rightarrow X(t)c'(t)=f(t),\text{即}e^t\begin{bmatrix}2&0&0\\-3&\cos 2t&\sin 2t\\2&\sin 2t&-\cos 2t\end{bmatrix}c'(t)==\begin{bmatrix}0\\0\\e^t\cos 2t\end{bmatrix}$$

$$c'(t)==\begin{bmatrix}0\\\sin 2t\cos 2t\\-\cos 2t\end{bmatrix},\therefore c(t)=c+\int_0^t\begin{bmatrix}0\\\sin 2u\cos 2u\\-\cos 2u\end{bmatrix}du=c+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{8}(1-\cos 4t)\\-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\end{bmatrix}$$

$$\therefore\text{通解：}x(t)=e^t\begin{bmatrix}2&0&0\\-3&\cos 2t&\sin 2t\\2&\sin 2t&-\cos 2t\end{bmatrix}\left[c+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{8}(1-\cos 4t)\\-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\end{bmatrix}\right]$$

由$x(0)=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}^T$，得到：$c=\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}^T$

$\therefore$ 初值问题的解：

$$x(t)=e^t\begin{bmatrix}2&0&0\\-3&\cos 2t&\sin 2t\\2&\sin 2t&-\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{8}(9-\cos 4t)\\-1-\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}0\\\cos 2t-(1+\frac{t}{2})\sin 2t\\(1+\frac{t}{2})\sin 2t+\frac{5}{4}\sin 2t\end{bmatrix}$$

例，求方程组通解：$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + e^t & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y & (2) \end{cases}$

解：由（1）得：$y = \dfrac{1}{2}(\dfrac{dx}{dt} - x - e^t),\qquad (3)$

代入（2）得到：$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} - 5x = -2e^t$

求得通解为：$x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} + \dfrac{1}{4}e^t$

代入（3）得到：$y = 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^t$

$\therefore$ 方程组通解：$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t$

例，求通解：$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+y-t=0 & (1) \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-x-y-2t=0 & (2) \end{cases}$

解，$(1)-(2)$，消去$\dfrac{dy}{dt}$ 得到：$\dfrac{dx}{dt}+x+2y+t=0, \therefore y=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{dx}{dt}+x+t)$，

代入(2)得到：$\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+x=-3t-1 \qquad (3)$

求出(3)通解：$x=c_1e^t+c_2te^t-3t-7$

由此得到：$y=-c_1e^t-c_2(\dfrac{1}{2}+t)e^t+t+5$

$\therefore$原方程组的通解为：$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2te^t-3t-7 \\ y=-c_1e^t-c_2(\dfrac{1}{2}+t)e^t+t+5 \end{cases}$