$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \sim \frac{|f''(0)|}{2!}\frac{1}{n^2}(n \to \infty)$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

(2) 若 $f''(0)=0$，则 $f\left(\frac{1}{n}\right)=0\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty)$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=0$$

比较判别法的极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right|$ 收敛，总之 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

12. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在二阶导数，且 $f(0)=1$，试证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

证 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在导数，且 $f(x)$ 是偶函数，有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$$

则 $f'(0)=0$. 由带有皮亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)(x\to0)$$

或

$$f(x)-1=\frac{f''(0)}{2!}x_2+0(x_2)(x\to0)$$

把 $x=\frac{1}{n}$ 代入上式，有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to0),$$

与第 11 题证法二讨论相同，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛。

13. 求下列幂级数的收敛域及和函数：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$;

解法一 $\sin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+3}$,

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+2}=1-\frac{\sin x}{x}, x\neq0.$

两边求导，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+1}=-\frac{1}{x^2}(x\cos x-\sin x), x\neq0,$$

即

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n}=\frac{1}{2x^2}(\sin x-x\cos x)x\neq 0.$$

$x=0$ 时, $S(0)=\dfrac{1\cdot(-1)^0}{3!}=6,$

因此

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^3}(\sin x-x\cos x), & x\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{6}, & x=0.\end{cases}$$

解法二 $S(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+3)-1}{(2n+3)!}(-1)^n x^{2n}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n}$$

$$=\frac{1}{2x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n+2}-\frac{1}{2x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$=\frac{1}{2x^2}(1-\cos x)-\frac{1}{2x^3}(x-\sin x)$$

且 $S(0)=\dfrac{1}{6}$ 则

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^3}(\sin x-x\cos x), & x\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{6}, & x=0\end{cases}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

解 设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,有

$$S(x)+S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}=e^x,\ S(x)-S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=e^{-x},$$

从而

$$S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^{2n}$

解 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+e^{\frac{x}{2}}=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=x\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)'+e^{\frac{x}{2}}=x\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}\right)+e^{\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{x}{2}}, x \in (-\infty, +\infty)$$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)x^n}$;

解 设 $y = \frac{1}{x}$,则

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(n+1)-2]^2}{n+1} y^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} y^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n$$

而

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1}\right)' = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{y}\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\right) dy = \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{1-y} dy = -\frac{\ln(1-y)}{y},$$

从而

$$S(y) = \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{4}{1-y} - \frac{4\ln(1-y)}{y}, 0 < |y| < 1.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)x^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{4}{1-\frac{1}{x}} - \frac{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{4x-3x^2}{(x-1)^2} - 4x\ln\frac{x-1}{x}, |x| > 1.$$

(5) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$;

解法一 熟悉二项级数的读者不难看出和函数为 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

解法二 设 $S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$,则

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!n}{(2n)!!} x^{n-1}, \tag{1}$$

$$xS'(x) = \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!n}{(2n)!!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!n}{(2n+2)!!} x^n \tag{2}$$

又(1)式可写成

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!(n+1)}{(2n+2)!!} \tag{3}$$

(3) − (2)得

$$S'(x) - xS'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)!!(n+1)}{(2n+2)!!} - \frac{(2n-1)!!n(2n+2)}{(2n+2)!!}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{2}S(x),$$

得 $(1-x)S'=\frac{1}{2}S$，即 $(1-x)\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}s(x)$，有 $\frac{ds}{s(x)}=\frac{1}{2(1-x)}dx$，

有 $\ln S=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\ln c$，$S=\frac{c}{\sqrt{1-x}}$ 由 $S(0)=1$，得 $C=1$，故

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ -1<x<1$$

14. 把下列函数展成克麦劳林级数：

(1) $f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$；(2) $f(x)=e^x\cos x$；(3) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$；

(4) $f(x)=(1+x^2)\arctan x$；(5) $f(x)=(\arctan x)^2$

解 (1) 设 $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{6+x}$，由待定系数法得 $A=1,B=6$

故

$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+\frac{x}{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{6}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6}\right]x^n,\ |x|<1.$$

解 (2) 由 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部，由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{2}{n}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{2}{n}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{2}{n}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,$$

比较上式两端的实部，得 $e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{2}{n}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$，$|x|<+\infty$。

(3) 由 $f'(x)=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$，

$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$f(0)=1$，$f'(0)=0$

于是

$$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(x)dx=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2x}dx\right]=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)},\ |x|<1.$$

(4) 解 $f(x)=(1+x^2)\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=(1+x^2)\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]dx$
$$=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]x^{2n+1}$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{4n^2-1}x^{2n+1}=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1},\ |x|\leqslant 1$$

(5) 解 由 $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，于是
$$f(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2n}+\cdots+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{2n}\right]x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^n}{n},\ |x|\leqslant 1.$$

15. 设 $f(x)$ 幂级数的和，$|x|<R$，又 $g(x)=f(x^2)$，证明：
$$g^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}f^{\left(\frac{n}{2}\right)}(0), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

证 由 $f(x)$ 是幂级数的和，则由函数展开唯一性定理
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ |x|<R$$
$$g(x)=f(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^{2m},$$
且 $\frac{g^{(n)}(0)}{n!}=a_n$，由 $a_{2m+1}=0,a_{2m}=\frac{f^{(m)}(0)}{m!},m=0,1,2,\cdots$，则
$$\frac{g^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=a_{2m+1}=0,\text{有 } g^{(2m+1)}(0)=0$$
$$\frac{g^{(2m)}(0)}{(2m)!}=a_{2m}=\frac{f^{(m)}(0)}{m!},\text{有 } g^{(2m)}(0)=(2m)!\frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$
由 $n=2m,m=\frac{n}{2},g^{(n)}(0)=\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}f^{\left(\frac{n}{2}\right)}(0)$，$n$ 为偶数，$g^{(n)}(0)=0$，n 为奇

数。

16. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}$ 的和

解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\mathrm{e}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+2\mathrm{e}+\mathrm{e}=5\mathrm{e}.$$

17. 证明：当 $|x|<1$ 时，$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$，利用上述公式近似计算 $\sqrt[3]{9}$，并估计误差.

(1) **解** 当 $|x|<1$ 时

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{z!}x^3+\cdots,$$

故

$$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$$

(2) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}+2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}\approx 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8^2}\right)=2.0798,$

从第二项起，展开式

$2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}=2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2\cdot 5\cdots(3n-4)}{n!3^n}\left(\frac{1}{8}\right)^n\right]$ 是交错及数

设 $a_n=\dfrac{2.5\cdots(3n-4)}{n!3^n}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3n-1}{24(n+1)}<1$，即 $a_{n+1}<a_n$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{8}<1$，由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，符合莱布尼兹判别法，故 $|R_3|<2\cdot\dfrac{2,5}{3!3^3}\left(\dfrac{1}{8}\right)^3\approx 0.0002.$