第7章 级数（一）

§7.1 级数的敛散性与及基本性质

数学科学学院 卢兴江

级数的概念

定义 将数列 $\{a_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 作形式上的加法

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

称为**无穷级数**，简称**级数**。

称 a_n 为级数的**通项**，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} a_k$ 为级数的**部分和**，$n = 1, 2, 3, \cdots$.

定义 设 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列，若 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，并称

$S \triangleq \lim_{n\to\infty} S_n$ 为级数的**和**。记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. 若 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**。

级数的概念

几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \text{发散}, & |q|\geq 1 \end{cases}$$

其部分和数列 $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$，所以当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$； 当 $|q|\geq 1$ 时，$\{S_n\}$ 发散.

p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots = \begin{cases} \text{收敛}, & p>1 \\ \text{发散}, & p\leq 1 \end{cases}$$

特别，当 $p=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ (发散) 称为**调和级数** .

级数的性质

（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 S，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 收敛于 kS (k为常数)； 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 发散($c \neq 0$).

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S_1，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于 S_2，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S_1 \pm S_2$.

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (级数收敛的必要条件)

（3）改变级数的有限项不影响级数的收敛性 .

（4）若级数**收敛**，则将其各项**按顺序**并项后得到的新级数亦收敛且和相同 .

（5）级数的**柯西收敛准则**：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$为柯西列.

即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in Z^+$，使对一切 $n > N$，及任意正整数 p，有

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$


谢谢！
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY