静电场习题课

主要掌握电场强度计算的两种方法：

1.点电荷或电荷元产生场强的叠加；

2.电荷对称分布时可用高斯定理求解。

《1》叠加法求场强：

其电场看成由许多点电荷或电荷元产生电场的叠加

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{\vec{r}}_i$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}}, \qquad r\text{为}dq\text{到}p\text{点的距离}$$

《1》叠加法求场强：

具体的解题步骤：

①、画出示意图，建立坐标系，选取适当的电荷元；$\mathrm{d}q \Rightarrow \mathrm{d}\vec{E}$

②、将电荷元的电场强度分解；$\mathrm{d}\vec{E}\begin{cases}\mathrm{d}E_y \\ \mathrm{d}E_x\end{cases}$

③、确定积分的上下限，积分后合成。

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x \qquad E_y = \int \mathrm{d}E_y$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \quad 或 \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad \mathrm{tg}\theta = \frac{E_y}{E_x}$$

《2》、用高斯定理求场强:

A）分析电荷分布的对称性:　i)球对称（中心对称）

ii)柱对称（轴对称）　iii)面对称（镜面对称）

B）过要计算的点做高斯面，应与对称性一致，

C）计算电通量可有形式，

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\cos\theta \oint_S dS$$

D）计算高斯面内的电荷代数和

$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i(内)} \quad or \quad \Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq_{内}$$

线$dq = \lambda dl$；面$dq = \sigma dS$；体$dq = \rho dV$

高斯定理的具体应用方法：

——（记住三种对称性，七种基本情形）

〈1〉球对称性带电体（均匀带电球体、球面）：过所求点作同球心的高斯球面，有

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot E = \frac{\sum Q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

〈2〉轴对称性带电体（“无限长”均匀带电直导线、圆柱体、圆柱面）：过所求点作同轴封闭小圆柱面，有

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \cdot E = \frac{\sum Q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

〈3〉面对称性带电体（“无限大”均匀带电平面、平板）：过所求点作垂直平面封闭小圆柱面，有

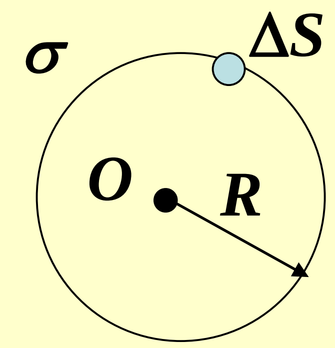
$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\Delta S \cdot E = \frac{\sum Q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

《3》、相加法、补偿法

（利用已知电荷分布的场强组合叠加）

【例题】有一半径为 R 的均匀带电球面，带电量为Q，现在球面挖去面积为 ΔS 的一小块（可视为点电荷），设挖去后电荷分布保持不变，求球心的电场强度的大小和方向。

分析：补偿法　　$E_1 = 0$



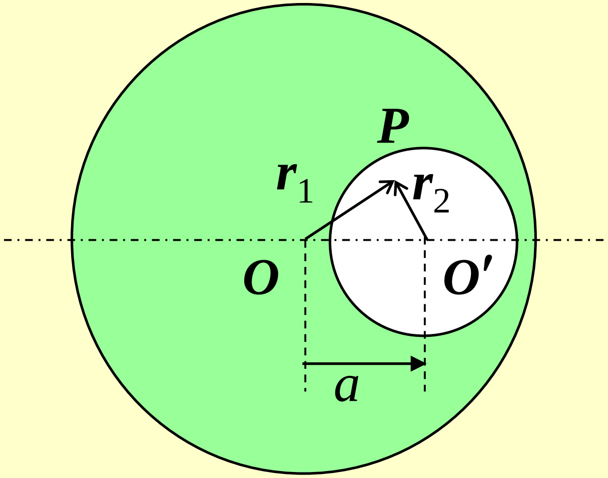
$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma \Delta S}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

$$E_O = E_1 + E_2 = \frac{Q\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

方向：？　由圆心指向缺口

习题9.20:

球体内: $E=\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

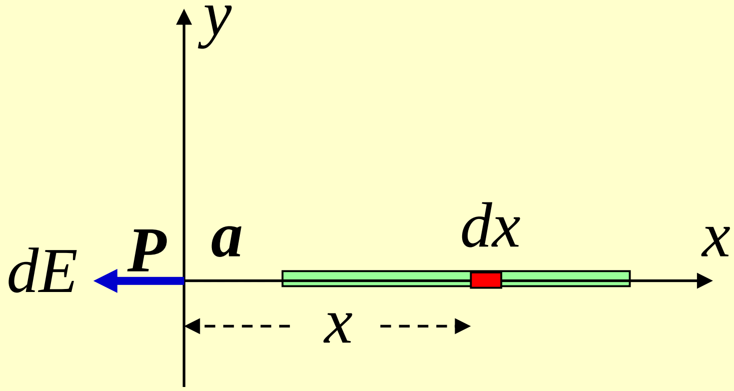


$$\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

$$\vec{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 \qquad \vec{E}_2=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

【例题】一长为L的均匀带电细棒，带电量为q，设棒的延长线上一点P离棒端点的距离为a，如图所示。求P点的场强。



解: 电荷元 $dq = \lambda dx = \dfrac{q}{L} dx$

$$dE = dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x^2}$$

方向: ？ 沿 - x 轴

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)$$

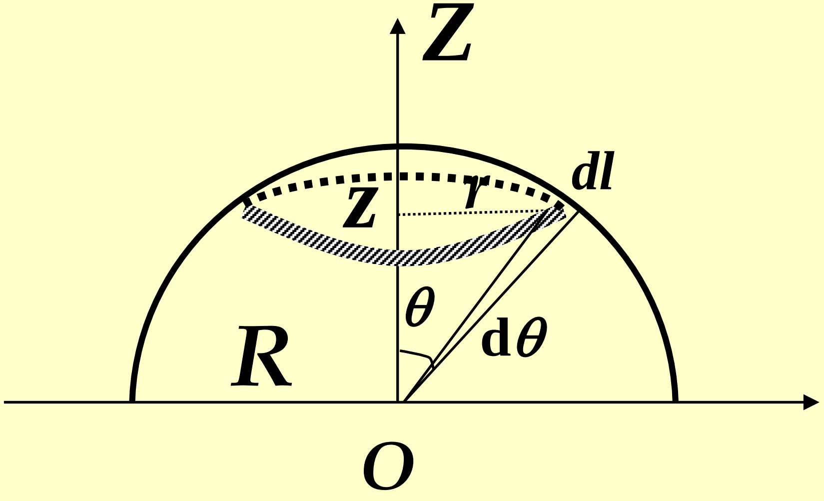
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right)\vec{i}$$

或: $dE = dE_x = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{x^2} = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dx}{x^2}$

$$E = \int dE = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right) \qquad \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right)\vec{i}$$

习题9.8

将半球面分割成许多极窄的三维圆环，其带电量及圆环在球心所产生的场强为：



$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dl$$

$$dl = R d\theta \qquad r = R\sin\theta$$

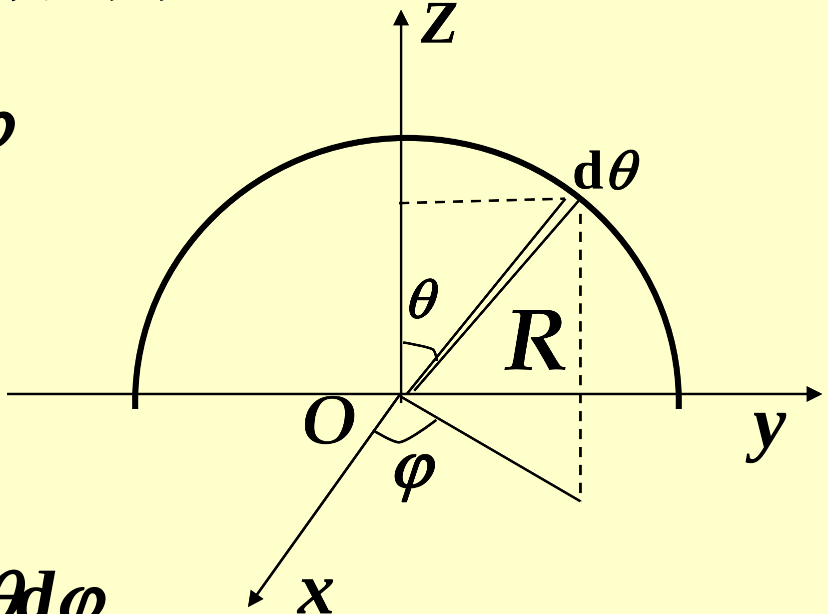
$$dq = \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z \cdot dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\sigma \sin\theta \cos\theta d\theta}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$ 方向沿 $-z$ 轴

习题9.8

另解：将半球面在球坐标中分割成无限多个面元，其带电量以及在球心所产生的场强为：



$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot Rd\theta \cdot R\sin\theta d\varphi$$

$$= \sigma \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

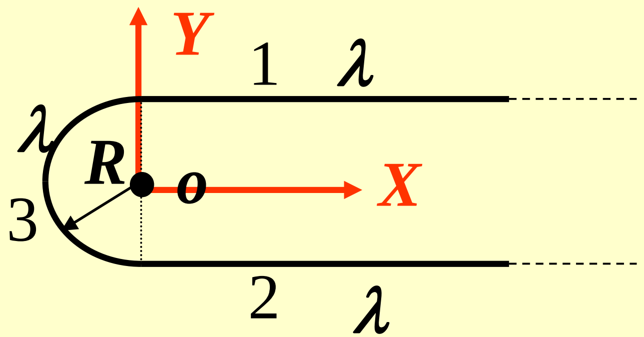
$$\mathrm{d}E = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{d}E_z = dE\cos\theta = \frac{\sigma \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$ 方向沿 $-\mathbf{z}$ 轴

习题9.9 电荷线密度为λ的无限长均匀带电细线，弯成如图所示的形状，若圆弧半径为R，求图中O点的电场强度.

分析：…



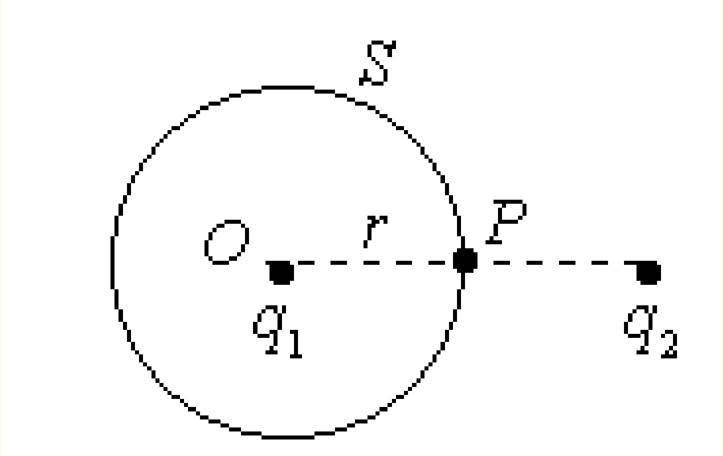
1.2. $$E_{x1}=E_{x2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$ 向左

3. $$E_{x3}=\int dE_{x3}=\int_0^{\pi}\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta=\int_0^{\pi}\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$ 向右

或 $$E_{x3}=\int dE_{x3}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\therefore \vec{E}_{合}=E_{x1}+E_{x2}+E_{x3}=0$$

【例题】如图所示，真空中两个点电荷 q_1、q_2，相距为 $2r$ ，q_1位于球心，以 r 为半径作高斯面，若$q_1=q_2$ ，则通过高斯面S的电通量为__________；高斯面S上的P点的电场强度为____。

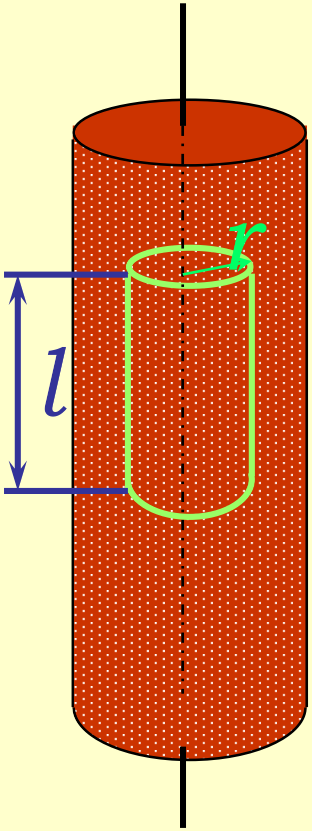


$$\Phi_e = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_P = 0$$

习题9.23 设气体放电形成的等离子体在圆柱内的电荷分布可用下式表示 $\rho(r)=\rho_0\Big/\left(1+r^2/a^2\right)^2$，式中 r 是到轴线的距离，ρ_0是轴线上的电荷密度，a是常数。试计算场强分布。

解： 电场分布也应有柱对称性，作如图所示高斯面。



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$2\pi rlE=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{\rho_0}{\left(1+r'^2/a^2\right)^2}\cdot l\cdot 2\pi r'\cdot dr'$$

$$=\frac{\rho_0\pi l}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{1+r^2/a^2}=\frac{\rho_0\pi l}{\varepsilon_0}\frac{a^2r^2}{a^2+r^2}$$

$$\therefore E=\frac{\rho_0a^2r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)} \quad \text{(圆柱内)}$$

【思考题】分析书上P45 思考题9.5

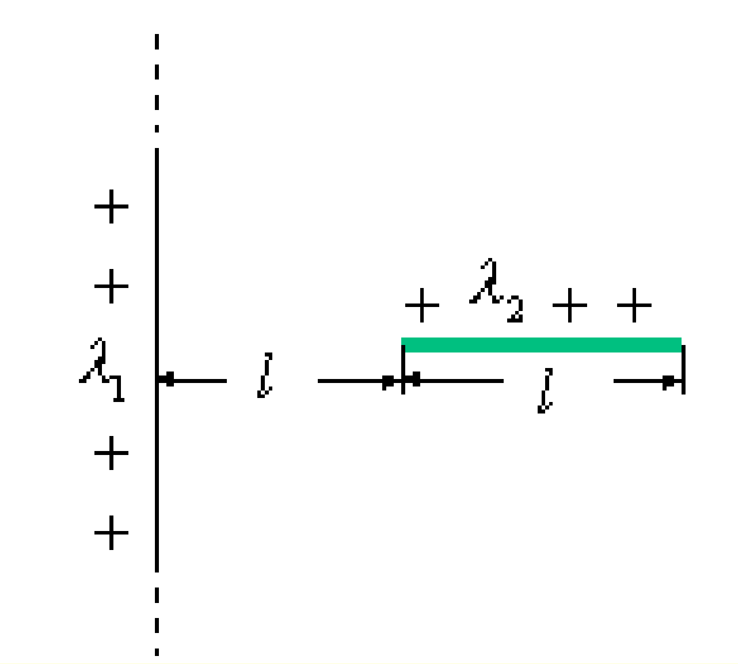
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow F = E\int dq = qE = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

【例题】如图所示，一无限长均匀带电细线，电荷线密度为λ_1。另有一均匀带电细棒，长为 l，电荷线密度为λ_2，同无限长细线共面并垂直放置。棒的一端距细线也为 l。求：

①无限长带电细线产生的电场分布；

②细棒所受的静电场力。

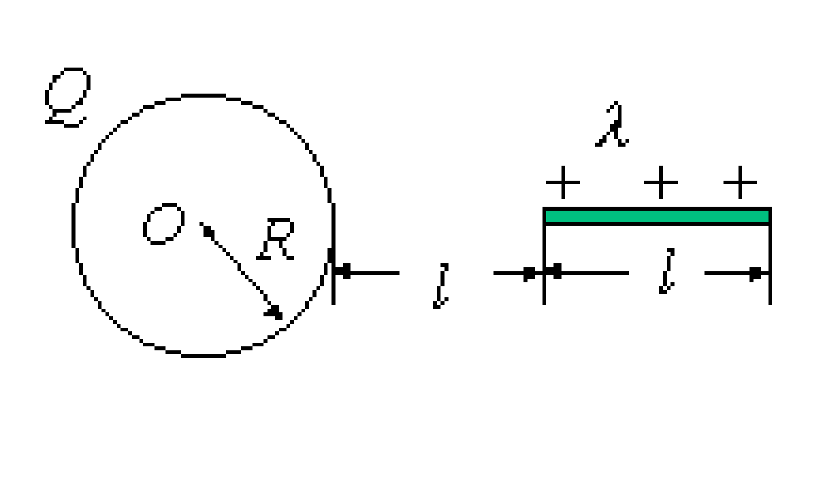


$$E=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$dF=E\cdot dq$$

$$F=\int_l^{2l}\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\lambda_2 dr=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

【例题】如图所示，一均匀带电球面，总电量为Q。另有一均匀带电细棒，长为 l，电荷线密度为λ，棒在球直径的延长线上，棒的一端距球面距离为 l。求：
①均匀带电球面产生的电场分布；
②细棒所受的静电场力。



$$E=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\\ 0 & r<R\end{cases}$$

$$\mathrm{d}F=E\cdot\mathrm{d}q$$

$$F=\int_{l+R}^{2l+R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\lambda\mathrm{d}r=\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{(l+R)(2l+R)}$$

小结：

场强叠加法、高斯定理法、

相加法、补偿法、

求静电力

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}} \qquad \Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq_{内}$$

注意：*dq*的选取！

线$dq = \lambda dl$；面$dq = \sigma dS$；体$dq = \rho dV$

直线	$dq = \lambda(x)dx$
圆弧:	$dq = \lambda dl = \lambda(\theta)\cdot \underline{Rd\theta}$
圆平/曲面:	$dq = \sigma(r)\cdot \underline{2\pi r\cdot dr\,/\,2\pi r\cdot dl}$
圆柱体:	$dq = \rho(r)\cdot \underline{l\cdot 2\pi r\cdot dr}$
球体:	$dq = \rho(r)\cdot \underline{4\pi r^2\cdot dr}$

复习巩固　例题、作业题