§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

- 广义坐标
- 广义虚位移
- 广义力
- 广义形式的虚位移原理

<< >> ↵ ■

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

1. 广义坐标

定 义　用以确定质点系位形的一组独立参变数称为广义坐标。

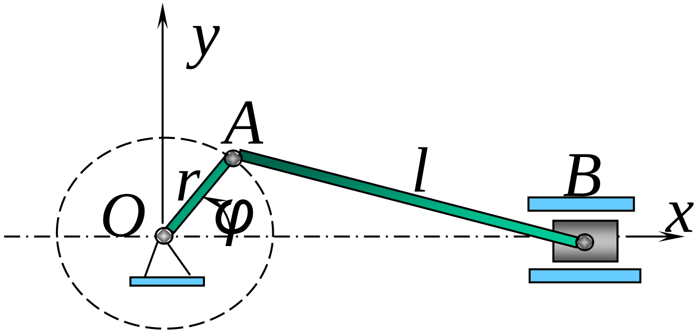
注 意　在具体问题中，广义坐标的选取要视问题的性质和方便而定。

例 子　例如在图中，选为φ广义坐标，则有

$$x_A = r\cos\varphi \qquad y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

$$y_B = 0$$



广义坐标可以是具有明确意义的物理坐标，也可以不具有明确物理意义。广义坐标 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 相互独立，可用于表示系统的位置，如点 $x_i=x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), y_i=y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

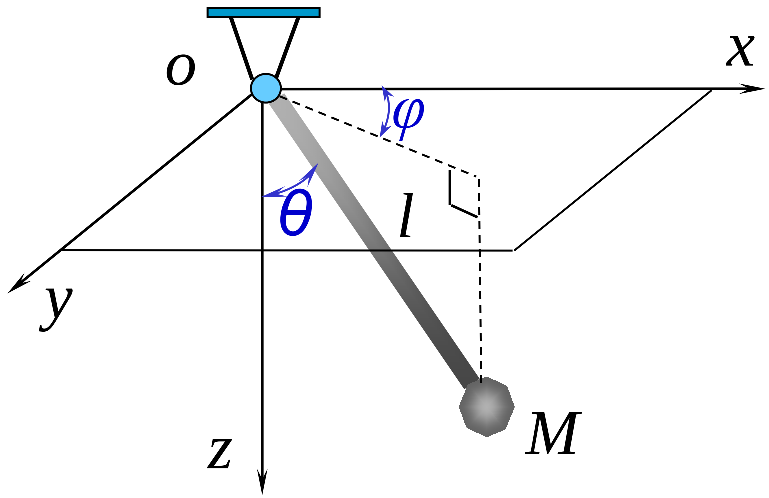
例如图中的**球面摆**。

选为θ、 φ为广义坐标，则有

$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = l\sin\theta\,\mathrm{con}\,\varphi$$

$$z = l\cos\varphi$$



可以选任意合适的变量作为广义坐标。

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

2. 广义虚位移

定 义　广义坐标的等时变分称为广义虚位移，记为δq_j。

虚位移间的广义坐标变换式

一般情况下，由n个质点A_1、A_2、… 、A_n组成的系统，受到s个约束（即有s个独立的约束方程）时，总可以选取k=3n－s个广义坐标q_1、q_2、…、q_k来确定它的位形。于是，质点系内任一点A_i的矢径可表示成广义坐标的函数，即

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_k;\ t) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

例如

取变分，可得虚位移间的广义坐标变换式

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

一个结论

对于完整系统，独立的广义坐标变分数目（即广义虚位移数）等于系统的独立的虚位移的个数，因而也等于系统的自由度。

广义坐标——确定物体系统位置的独立参数，**对于完整约束，其数目等于自由度数**

质点系的位形描述(n个质点)

(1) 直角坐标形式

$3n$ 个直角坐标， $x_i, y_i, z_i \left(i=1,2\ldots n\right)$

(2) 广义坐标形式

k个参数， $\left(q_1, q_2, \ldots q_k\right)$

k维位形空间：一个点与一个位形对应。

$$\boxed{\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1, q_2 \ldots q_k ; t\right)}$$

<< >>

3. 广义力

定义 将前面所得虚位移间的广义坐标变换式 $\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$

代入虚位移原理 $\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

令 $$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

则上式为 $$\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = 0$$

式中的 $Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ 称为**相应于广义坐标q_j**的**广义力**。

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

广义力 Q_j 的解析表达式

如果用直角坐标，将A_i的坐标x_i、y_i、z_i用广义坐标表示成

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k; t)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k; t)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_k; t)$$

由于 $\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$

故有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_j}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_j}\boldsymbol{k}$

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}$$

又因为 $\boldsymbol{F}_i = F_{ix}\boldsymbol{i} + F_{iy}\boldsymbol{j} + F_{iz}\boldsymbol{k}$

所以广义力Q_j的表达式可写成解析式

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

广义力

$$\boxed{Q_j=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}\qquad Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

说明：

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

1）广义力是“约化后（相对于原来的3n维）的高维（k维）空间”中的量，与q_j一一对应，不与受力物体i一一对应（注意公式中对所有质点i求$\sum$）。

2) 广义力Q_j的物理意义：它是所有外力（主动力）在由x_i，y_i，z_i（i=1，2…n）构成的3n维空间中由q_1，q_2…q_k所构成的k维超曲面上在q_j方向的“投影”。若q_j为线位移量，则所对应的广义力就具有力的量纲；如果q_j为角位移量，则所对应的广义力Q_j就具有力偶的量纲

4. 广义坐标形式的虚位移原理

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0$$

Δq_i任意，且对于完整系统，系统的各个广义变分δq_i都是独立的，故得

$$Q_j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

即受双面、定常、理想、完整约束的质点系，其平衡的必要和充分的条件是，系统的所有广义力都等于零。

上式表示一组方程，是彼此独立的，其数目等于广义坐标的数目，也恰好等于系统的自由度。

5. 求广义力的方法

- 应用广义力定义

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

- 应用虚功 $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0}$

特别指出，求广义力时并不一定要从定义出发。在解决具体问题时，从虚功出发直接求广义力往往更为方便。

注意到各广义坐标q_1、 q_2、 …、 q_k是彼此独立的，因此为求某个广义力Q_t，可以取一组特殊的虚位移，只令 $\delta q_t \neq 0$，而其余的$\delta q_j = 0$ $(j \neq \mathrm{t})$ ，从而写成

$$\left[\sum \delta W\right]_{\mathrm{t}} = Q_{\mathrm{t}}\delta q_{\mathrm{t}}$$

<< >>

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0}$$

令 $\delta q_{\mathrm{t}}\neq 0$，$\delta q_j=0\ (j\neq \mathrm{t})$ ，

$$\left[\sum\delta W\right]_{\mathrm{t}}=Q_{\mathrm{t}}\delta q_{\mathrm{t}}$$

式中 $\left[\sum\delta W\right]_t$ 表示仅虚位移δq_t非零时系统上主动力的虚功之和。于是，求得对应广义坐标q_t的广义力

$$Q_{\mathrm{t}}=\frac{\left[\sum\delta W\right]_{\mathrm{t}}}{\delta q_{\mathrm{t}}}\qquad (t=1,2,\dots,\ k)$$

6. 主动力均为有势力的情形下的广义力

广义力Q_j有更简明的表达形式。

系统有势能函数

$$V=V(x_1,\ y_1,z_1,\ x_2,\ \ldots,\ z_n)=V(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_k)$$

主动力在坐标轴上的投影分别为

$$F_{ix}=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad F_{iy}=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\qquad F_{iz}=-\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

由

$$Q_j=\sum_{t=1}^{n}(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})$$

则广义力表达式可写成

$$Q_j=-\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})$$

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

或简写为 $$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad j = (1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

即，当主动力有势时，对应于每个广义坐标的广义力等于势能函数对该坐标的偏导数冠以负号。

故当主动力有势时，质点系的平衡条件可写为

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

即，在势力场中，具有理想约束的质点系平衡条件为：质点系势能对于每个广义坐标之偏导数分别为零。

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

故当主动力有势时，质点系主动力的虚功和为

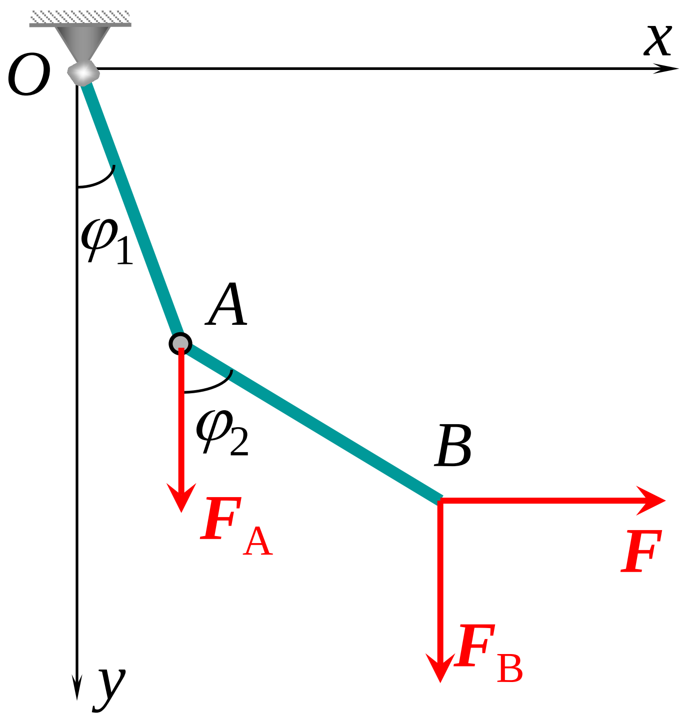
$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=\sum_{j=1}^{k}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j=-\delta V$$

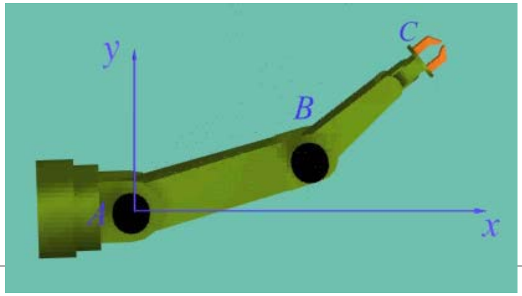
故质点系的平衡条件亦可写成

$$\boxed{\delta V=0}$$

即，在势力场中，具有理想约束的质点系平衡条件为：质点系势能在平衡位置处一阶变分为零，即平衡位置上保守系统的势能取极值。（平衡位置：q_j张成的高维空间里）

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理



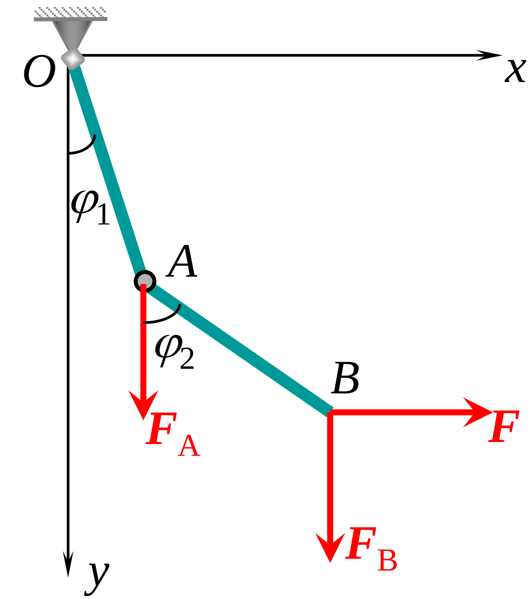


例题15-5 杆OA和AB以铰链连接，O端悬挂于圆柱铰链上，如图所示。杆长$OA=a$， $AB=b$, 杆重和铰链的摩擦都忽略不计。今在点A和B分别作用向下的铅垂力$\boldsymbol{F}_A$和$\boldsymbol{F}_B$，又在点B作用一水平力$\boldsymbol{F}$。试求图示位置时广义力，及平衡时φ_1、φ_2与$\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 、$\boldsymbol{F}$之间的关系。

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

解：

杆OA和AB的位置可由点A和B的四个坐标x_A、y_A和x_B、y_B完全确定，由于OA和AB杆的长度一定，可列出两个约束方程



$$x_A^2 + y_A^2 = a^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = b^2$$

因此系统有两个自由度。现选择φ_1和φ_2为系统的两个广义坐标，计算其对应的广义力Q_1和Q_2。

（1）用第一种方法计算。

应用广义力定义

$$Q_j = \sum_{t=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

<< >>

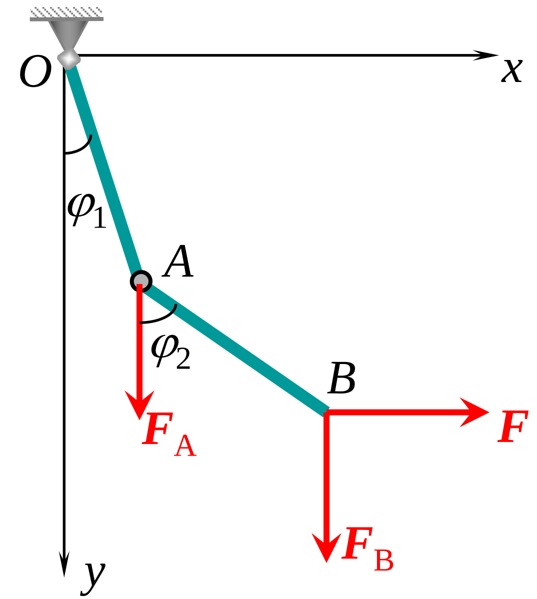
§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

$$\boxed{Q_j=\sum_{t=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)}$$

$$Q_1=F_A\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1}+F_B\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1}+F\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1}$$

$$Q_2=F_A\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2}+F_B\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2}+F\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2}$$

(a)



A、B点坐标 $y_A=a\cos\varphi_1$

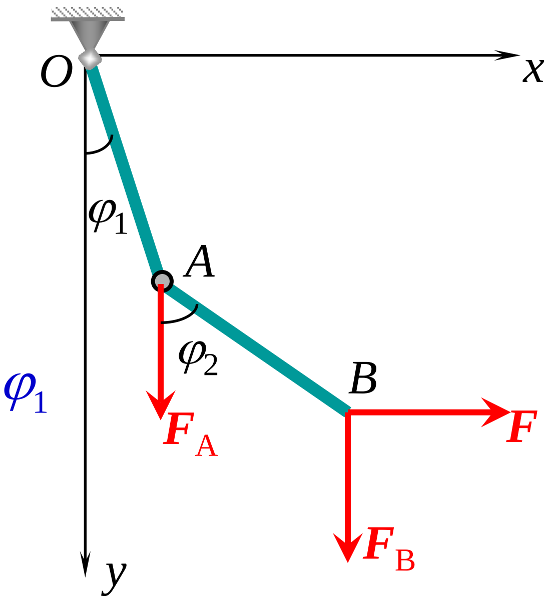
$$y_B=a\cos\varphi_1+b\cos\varphi_2$$

(b)

$$x_B=a\sin\varphi_1+b\sin\varphi_2$$

§14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理

$$y_A = a\cos\varphi_1$$
$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2 \qquad \text{(b)}$$
$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$



故

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} = -a\sin\varphi_1, \quad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} = -a\sin\varphi_1, \quad \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} = a\cos\varphi_1$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} = -b\sin\varphi_2\,, \quad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} = b\cos\varphi_2$$

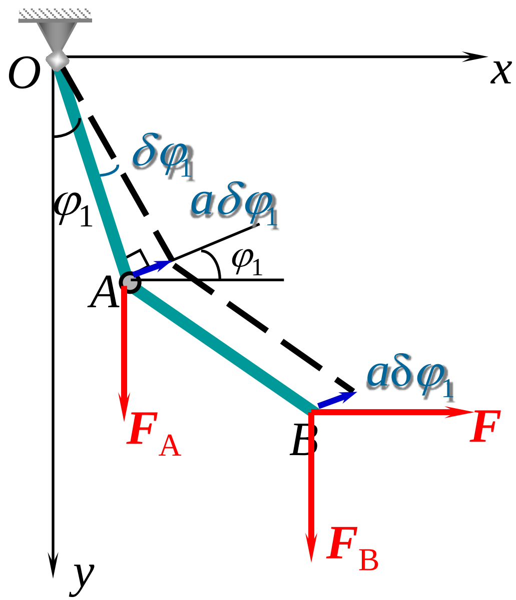
代入式（a），系统平衡时应有

$$Q_1 = -(F_A + F_B)a\sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1 = 0 \qquad \text{(c)}$$
$$Q_2 = -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2 = 0$$

解出

$$\tan\varphi_1 = \frac{F}{F_A + F_B}, \qquad \tan\varphi_2 = \frac{F}{F_B} \qquad \text{(d)}$$

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理



$$y_A = a\cos\varphi_1$$
$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$
$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$
（b）

（2）用第二种方法计算。

应用虚功 $Q_t = \dfrac{\left[\sum \delta W\right]_t}{\delta q_t}$

由式（b）的变分可得一组虚位移

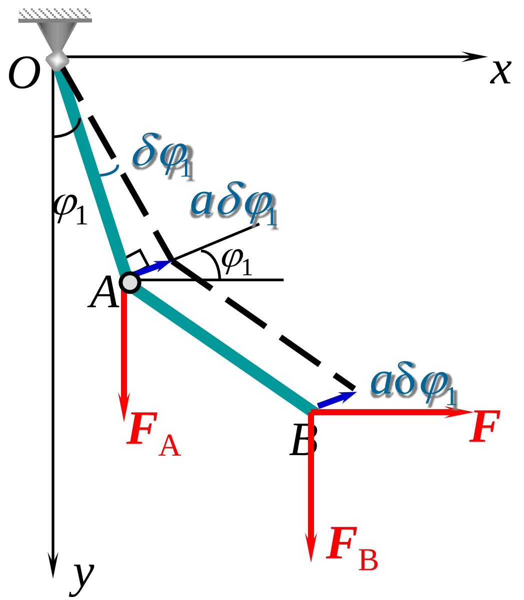
$$\delta y_A = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$
$$\delta y_B = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - b\sin\varphi_2\delta\varphi_2$$
$$\delta x_B = a\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + b\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$

● 保持φ_2不变，只有$\delta\varphi_1$时，即

$\delta\varphi_1 \neq 0$，$\delta\varphi_2 = 0$ 时

$$\left.\begin{aligned}\delta y_A &= -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1\\ \delta y_B &= -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1\\ \delta x_B &= a\cos\varphi_1\delta\varphi_1\end{aligned}\right\} \quad \text{(e)}$$

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理



$$y_A = a\cos\ \varphi_1$$

$$y_B = a\cos\ \varphi_1 + b\cos\ \varphi_2$$

$$x_B = a\sin\ \varphi_1 + b\sin\ \varphi_2$$

（b）

$$\delta y_A = \delta y_B = -a\sin\ \varphi_1\delta\varphi_1$$

$$\delta x_B = a\cos\varphi_1\delta\varphi_1 \qquad \text{(e)}$$

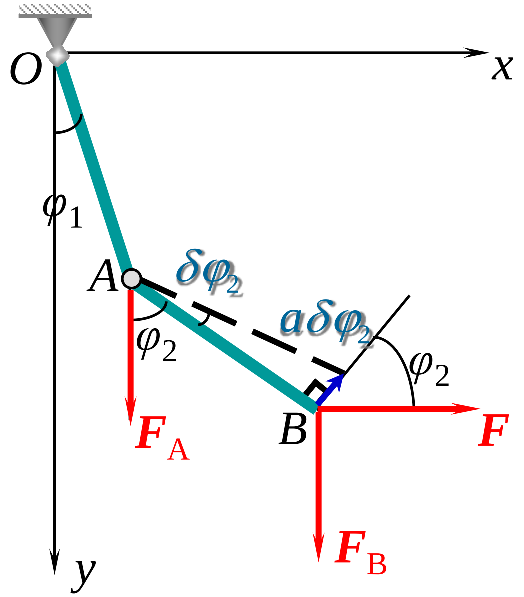
则对应于φ_1的广义力为

$$Q_1 = \frac{\sum\delta W_1}{\delta\varphi_1} = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_1}$$

将式（e）代入上式，得

$$Q_1 = -(F_A + F_B)a\sin\ \varphi_1 + Fa\cos\ \varphi_1$$

§ 14-4 广义坐标•广义坐标形式的虚位移原理



$$y_A = a\cos\varphi_1$$
$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$
$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$

（b）

- 保持φ_1不变，只有$\delta\varphi_2$时，即

$$\delta\varphi_1 = 0, \quad \delta\varphi_2 \neq 0$$

由式（b）的变分可得一组虚位移

$$\delta y_A = 0, \quad \delta y_B = -b\sin\varphi_2\delta\varphi_2$$

$$\delta x_B = b\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$

代入对应于φ_2的广义力表达式，得

$$Q_2 = \frac{\sum \delta W_2}{\delta\varphi_2} = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_2}$$

$$= -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2$$

两种方法所得的广义力是相同的，显然应得到与式(d) 相同的结果。

用虚位移原理确定液滴和固体表面的接触角

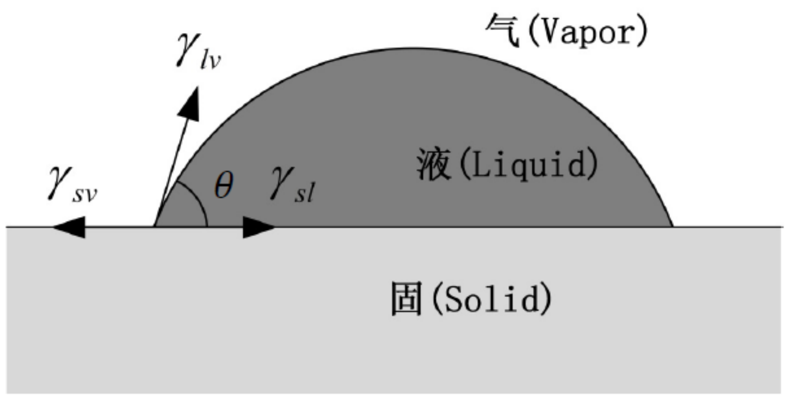
解：1805年，英国物理学家托马斯·杨（Thomas Young）针对图(a)所示的液滴和固体表面的接触问题确定了其平衡接触角，因而被广泛地称为杨接触角。考虑“固-气-液”三相接触线三个界面张力在水平方向力的平衡：

$$\gamma_{sv}=\gamma_{sl}+\gamma_{lv}cos\theta$$

从而杨接触角可以方便地表示为如下杨方程（Young’s equation）：

$$cos\theta=\frac{\gamma_{sv}-\gamma_{sl}}{\gamma_{lv}} \qquad (1)$$

式中，γ_{sv}、γ_{sl}和γ_{lv}分别为固-气、固-液和液-气界面张力，这三个量的量纲均为单位长度的力。

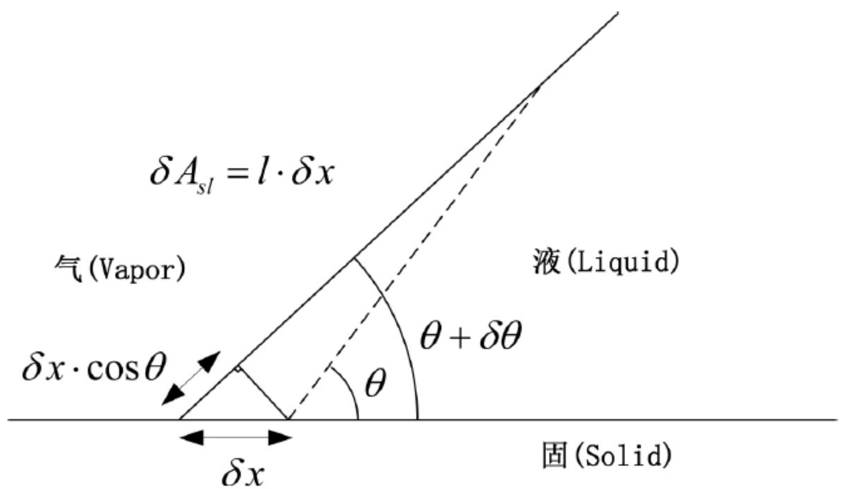


(a)

下面用虚位移原理推导杨方程。如图（b）所示，假定液滴的接触线移行的虚位移为δx,则液滴移行的虚面积为：$\delta A_{sl} = 2\pi r \cdot \delta x$,这里$r$为液滴的铺展半径。在液-气界面张力的作用下，液面运动的虚面积为：$\delta A_{lv} = \delta A_{sl} cos\theta = 2\pi r\delta x cos\theta$.则三个界面张力所做的虚功之和为

$$(\gamma_{sl} - \gamma_{sv})\delta A_{sl} + \gamma_{lv}\delta A_{lv} = (\gamma_{sl} - \gamma_{sv})2\pi r\delta x + \gamma_{lv}2\pi r\delta x cos\theta = 0$$

由上式可直接得到杨方程。



(b)

作业

- 14-13, 15, 16