第7章 级数（五）

§7.4 幂级数的和函数及其性质
§7.5函数的幂级数展开

数学科学学院 卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

幂级数的和函数及其性质

定义 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛域为E，则定义在 E 上的函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ x\in E$$ 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的**和函数**。

定理1 （和函数的连续性）若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为E ，则其和函数$S(x)$ 在E 上连续.

定理2 （幂级数的逐项可积性）若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为E, 则其和函数$S(x)$ 在 E 内

任何有限区间$[a,b]$上均可积，且 $\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b a_n x^n \mathrm{d}x$.

特别，$\forall x\in[a,b]$，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

幂级数的和函数及其性质

定理3 （幂级数的逐项可导性）若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R>0$，其和函数为 $S(x)$， 则在 $(-R, R)$ 内幂级数可逐项求导，即 $\forall x \in (-R, R)$，有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$ 且求导后的幂级数与原幂级数收敛半径相同.

例题

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域与和函数，并证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.$

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数.

(3) 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}$ 的和.

函数的幂级数展开

问题

(1) 给定函数 $f(x)$，是否存在幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ ，使其和函数为 $f(x)$?

(2) 若 $f(x)$ 可以展开成幂级数，如何确定（计算）各系数 $a_n, n=1,2,3,\cdots$?

(3) 展开后的幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 是否收敛（收敛域）？

(4) 展开后的幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在收敛域内是否收敛于$f(x)$?

例

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}，有 \ f^{(n)}(0)=0, \ n=1,2,3,\cdots.$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0, \ n=1,2,3,\cdots.$

函数的幂级数展开

定理 设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内存在任意阶导数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta_n(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\theta_n<1)$ 为泰勒公式的拉格朗日余项.

- 称级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**.

特别，若 $x_0=0$，称级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

常见函数的麦克劳林级数展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

函数的幂级数展开例题及幂级数的应用

例题

(1) 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 分别展开成关于 x 和 $x-2$ 的幂级数.

(2) 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(102)}(0)$.

(3) 分别求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ 的和.

应用

(1) 函数值的近似计算； 例如求 e, $\sqrt{26}$ 的近似值？

(2) 定积分的近似计算； 例如求 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值？

(3) 微分方程的幂级数解． 等等.


谢谢！
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY