第7章 级数（三）

§7.3 一般项级数的敛散性判别

数学科学学院 卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

交错级数及其收敛性判别

定义 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ，$a_n>0$，$n=1,2,3,\cdots$ 为**交错级数**。

莱布尼兹定理 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足

(1) $a_n \geq a_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$； (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且

$|S_n - S| \leq a_{n+1}$, S_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的部分和，S 为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的和.

例题 判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n-1}}}$$

级数的绝对收敛与条件收敛

定义 (1) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为**绝对收敛**；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为**条件收敛**.

例如，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛的；而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛的.

定理 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛。

例题 判别下列级数是绝对收敛？条件收敛？还是发散？

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛级数的性质

定理 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则任意改变各项次序所得的新级数仍为绝对收敛且和不变。

条件收敛级数调整次序后有可能不收敛，即使收敛也有可能收敛到不同的值。

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 为条件收敛的，设收敛值为 S .

现按次序“取一个正项接着两个负项”调整为 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$，

那么有
$$
\begin{aligned}
S_{3k}&=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\to\frac{1}{2}S\quad(k\to\infty).
\end{aligned}
$$

而 $k\to\infty$ 时，$S_{3k+1}=S_{3k}+\frac{1}{2k+1}\to\frac{1}{2}S$ ； $S_{3k+2}=S_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\to\frac{1}{2}S$，所以级数收敛于 $\frac{1}{2}S$.

谢谢！

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY