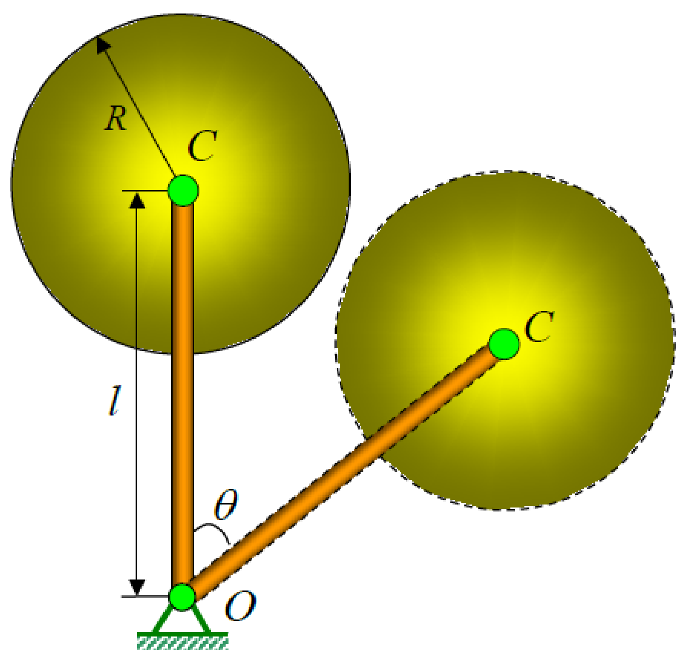
## 例题

图(a)均质轮与均质杆铰结于轮心$C$。已知$R$，$l$=2$R$，质量均为$m$。由静止铅垂位置倒落。试求 $\theta=90^\circ$ 时，铰$O$处约束力。




图($a$)

解8 由对质心的动量矩定理，

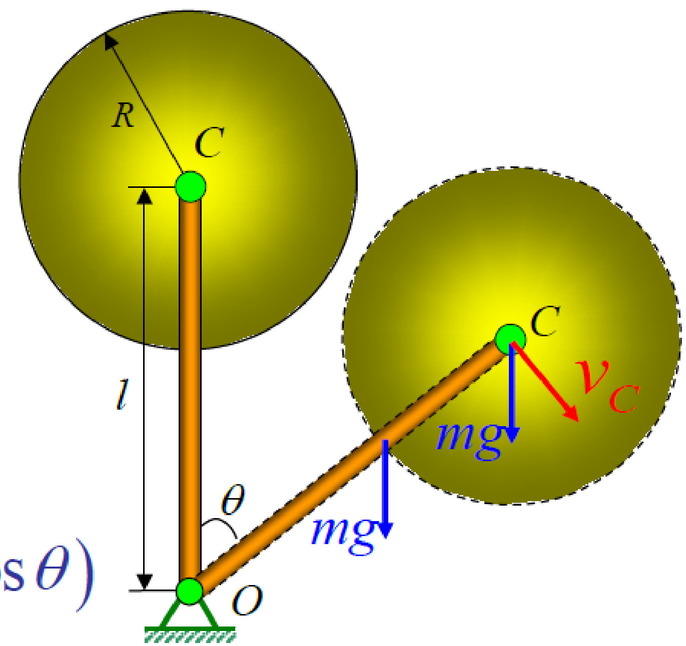
$$\alpha_C = 0 \ , \omega_C = 0$$

运动至图(b)任意$\theta$位置时，

由 $T - T_0 = \sum W$

$$\frac{1}{2} m v_C{}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} m (2R)^2 \dot{\theta}^2$$

$$= mg(2R - 2R\cos\theta) + mgR(1-\cos\theta)$$



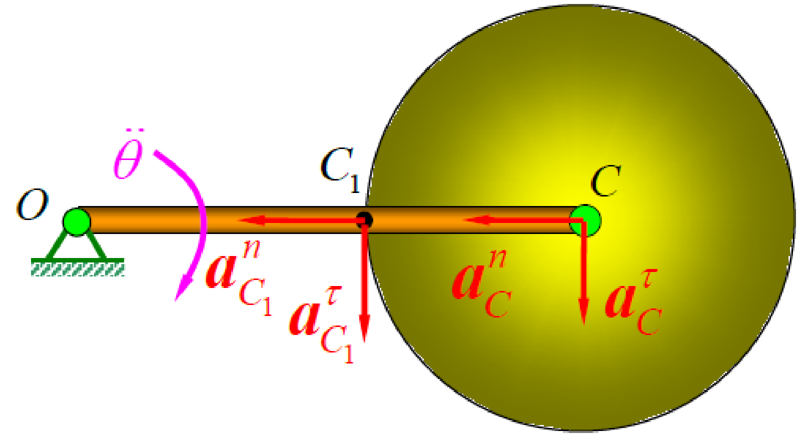

图$(b)$

而 $v_C = 2R\dot{\theta}$，代入上式，得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{9g}{8R}(1-\cos\theta) \qquad \text{(a)}$$

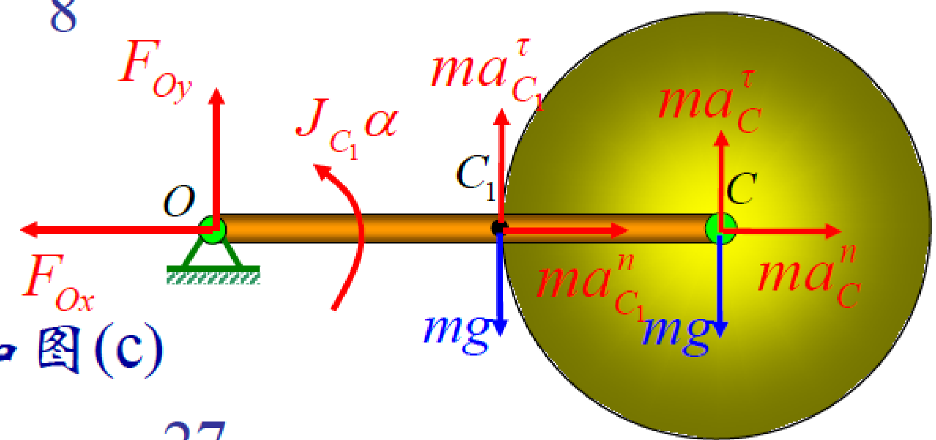
式(a)对$t$求导，得 $\ddot{\theta} = \alpha = \dfrac{9g}{16R}\sin\theta$

$\theta = 90^\circ$ 时，$\alpha = \dfrac{9g}{16R}, \omega^2 = \dfrac{9g}{8R}$




$a_C^\tau = \dfrac{9}{8}g$，$a_C^n = \dfrac{9}{4}g$　　　(b)

$a_{C_1}^\tau = R\alpha = \dfrac{9}{16}g$，$a_{C_1}^n = R\dot{\theta}^2 = \dfrac{9}{8}g$　(c)




研究整体，加惯性力受力如图(c)

由 $\sum F_x = 0,\ F_{Ox} = ma_{C_1}^n + ma_C^n = \dfrac{27}{8}mg$

$\sum F_y = 0,\ F_{Oy} = 2mg - ma_{C_1}^\tau - ma_C^\tau = \dfrac{5}{32}mg$

图 (c)

# 补充说明

- 本题建议彻底用达朗贝尔原理求解（用力矩方程求角加速度）
- 本题亦可用（对固定轴的）动量矩定理求角加速度

$$\frac{1}{3}m(2R)^2\alpha + m(2R)^2\alpha = mgR + mg2R$$

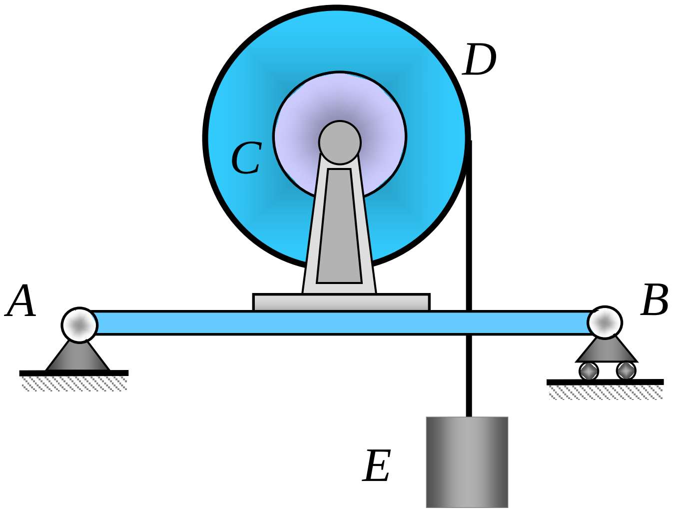
由此可见动量矩定理的好处：可用于求任意位置的角加速度（哪怕是特殊位置）；对体系用动量矩定理可规避约束力。

平动圆球对定点0的动量矩：

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$$

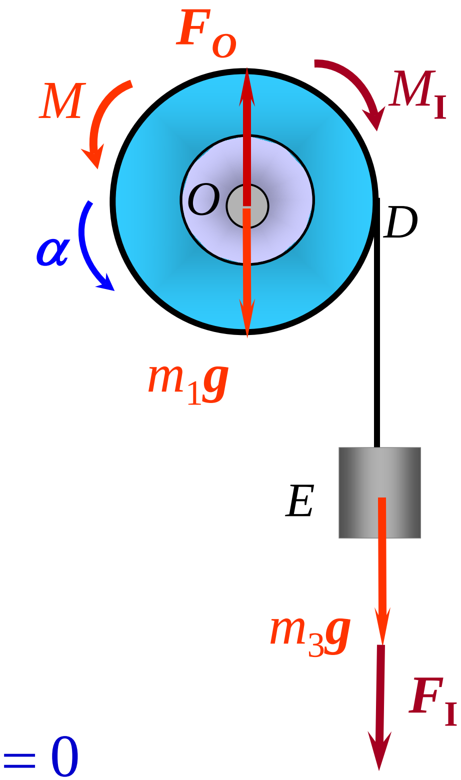
# §13-3 动静法的应用

**例题** 起重装置由半径为$r$=0.2 m，质量为$m_1$=40 kg的均质鼓轮$D$及长$l$=0.8 m，质量为$m_2=m_1$=40 kg 的均质梁$AB$组成。鼓轮通过电机$C$（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物$E$质量$m_2=m_1/4$ 。电机通电后的驱动力矩为$M$=22 N·m，试求重物$E$上升的加速度$\boldsymbol{a}$及支座$A$、$B$的约束力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{NA}}$及$\boldsymbol{F}_{\mathrm{NB}}$。



**解：（1）求加速度*a*。**

考虑鼓轮*D*、重物*E*及与鼓轮固结的电机转子所组成的系统，*M*为电机定子作用在转子的驱动力矩。加惯性力后受力分析如图b所示。其中



(b)

$$F_I = m_3 a\ ,\ M_I = m_1 r^2 \alpha / 2$$

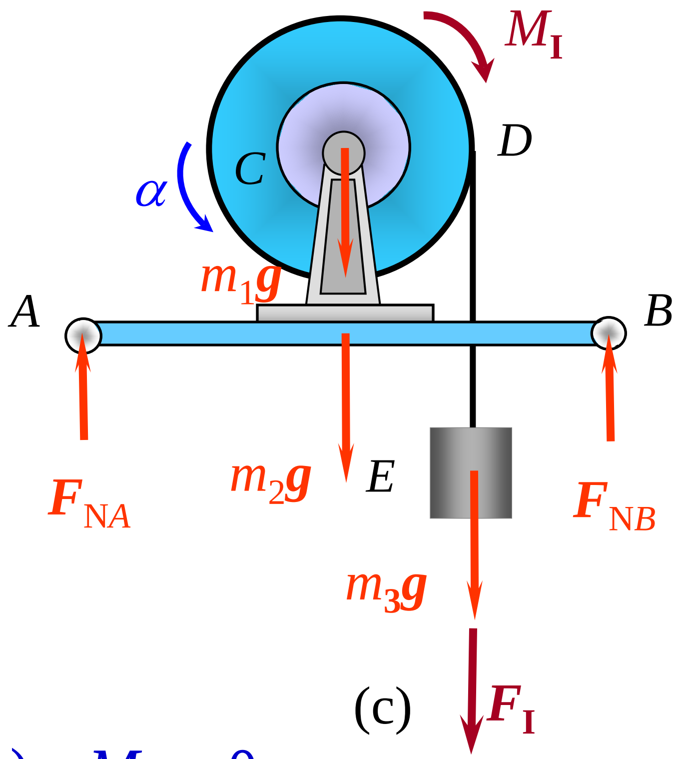
写出动态平衡方程有

$$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M - M_I - (m_3 g + F_I) r = 0$$

解得 $$a = \frac{4M/r - m_1 g}{3m_1} = 0.4\ \text{m/s}^2$$

**（2）求约束力。**

考虑整个系统，注意驱动力矩为$M$（系统内力）。加惯性力后受力分析如图c所示。



(c)

写出动态平衡方程有

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,$$

$$F_{\mathrm{NA}}l-(m_1g+m_2g)\times\frac{l}{2}-(m_3g+F_\mathrm{I})(\frac{l}{2}-r)+M_\mathrm{I}=0$$

解得 $F_{\mathrm{NA}}=\dfrac{17}{16}m_1g-\dfrac{1}{16}m_1a=415.5\ \mathrm{N}$

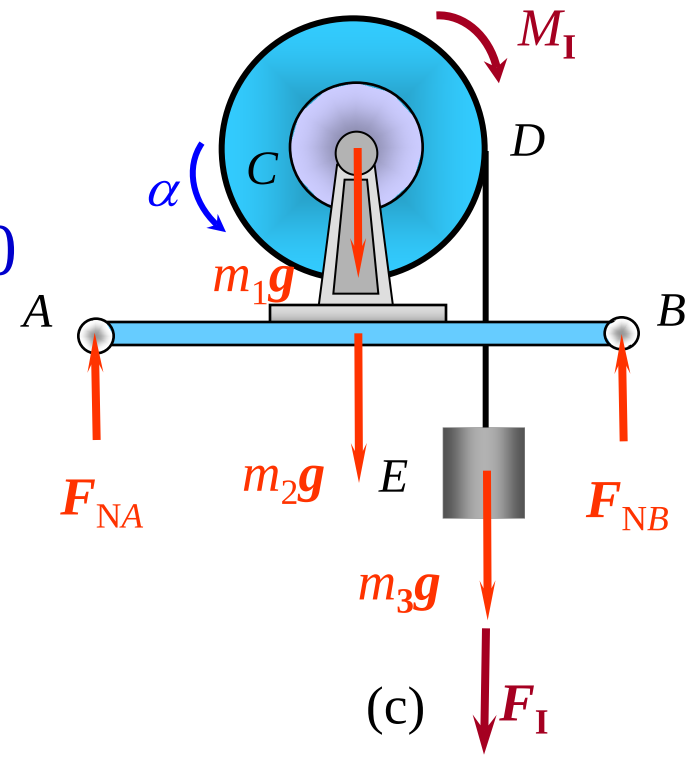
# § 14-3 动静法的应用

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{NA} + F_{NB} - m_1 g - m_2 g - m_2 g - F_I = 0$$

解得

$$F_{NB} = \frac{19}{16} m_1 g + \frac{5}{16} m_1 a = 470.5\ \text{N}$$



(c)

我们以前所用的转动惯量，均为**对轴的**转动惯量，用标量表示；对**点**的转动惯量，需要用**张量**表示。

## 转动惯量张量的引入——刚体的动能

刚体一般运动分解为平动和定点转动的组合。下面的讨论围绕定点运动展开。

刚体作定点转动，定点为O。刚体中第α个质点的质量为$m_\alpha$，相对于O点的位矢为$\boldsymbol{r}_\alpha$，则刚体的转动动能为：

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)^2$$

注意到矢量运算法则$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2 = A^2B^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$,转动动能可改写为

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left[\omega^2 r_\alpha^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_\alpha)^2\right]$$

记刚体角速度和本体位矢（即在动系中的位矢）的某分量分别为$\omega_i$和$r_i$ ($i$=1, 2, 3)，则上式可写成：

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left(\sum_i \omega_i^2 \sum_k r_{\alpha,k}^2 - \sum_i \omega_i\, r_{\alpha,i} \sum_j \omega_j\, r_{\alpha,j}\right)$$

$j, k$=1, 2, 3

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} \omega_i\omega_j \sum_\alpha m_\alpha\left(\delta_{ij} \sum_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}\right)$$

克罗内克（Kronecker）δ函数

定义转动惯量张量为

$$J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha\left(\delta_{ij}\sum_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}\right)$$

则有

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\, \omega_i\omega_j$$

$$T_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$$

当刚体可以看作以质量密度$\rho = \rho(\boldsymbol{r})$连续分布时，其转动惯量可表示为

$$J_{ij} = \int_V \rho(r)\left(\delta_{ij}\sum_k r_k^2 - r_i r_j\right) dV$$

其中$dV = dxdydz$是矢量$\boldsymbol{r}$所确定的位置处的体积元，而$V$是刚体的体积

$J_{ij}$的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \sum_\alpha m_\alpha(y_\alpha^2+z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha(z_\alpha^2+x_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha(x_\alpha^2+y_\alpha^2) \end{bmatrix}$$

其中对角元$J_{11}$、$J_{22}$和$J_{33}$分别是$x$、$y$、$z$轴的转动惯量，而非对角元称为惯量积，上式表明惯量张量具有对称性

$$J_{ij}=J_{ji}$$

所以$J$的9个分量中仅6个独立

张量的数学表征是基于**并矢**的**张量基**。对于两个不同的非零矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，我们可以作它们的并矢运算$\boldsymbol{ab}$或$\boldsymbol{ba}$，它们与原来的两矢量虽有联系却不再是矢量，且$\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$ 。

标量：零阶张量；矢量：一阶张量；两矢量的并矢构成一个二阶张量

在有了二阶张量在一坐标系下的张量基后，就可以将质点系关于其坐标系原点O的转动惯性特性来采用所谓的转动惯性张量来表征，记为$\boldsymbol{J_O}$。

$$\boldsymbol{J_O} = J_{xx}\boldsymbol{ii} - J_{xy}\boldsymbol{ij} - J_{xz}\boldsymbol{ik} - J_{yx}\boldsymbol{ji} + J_{yy}\boldsymbol{jj} - J_{yz}\boldsymbol{jk} - J_{zx}\boldsymbol{ki} - J_{zy}\boldsymbol{kj} + J_{zz}\boldsymbol{kk}$$

还可以用矩阵算法来表示，即

$$\boldsymbol{J_O} = [\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

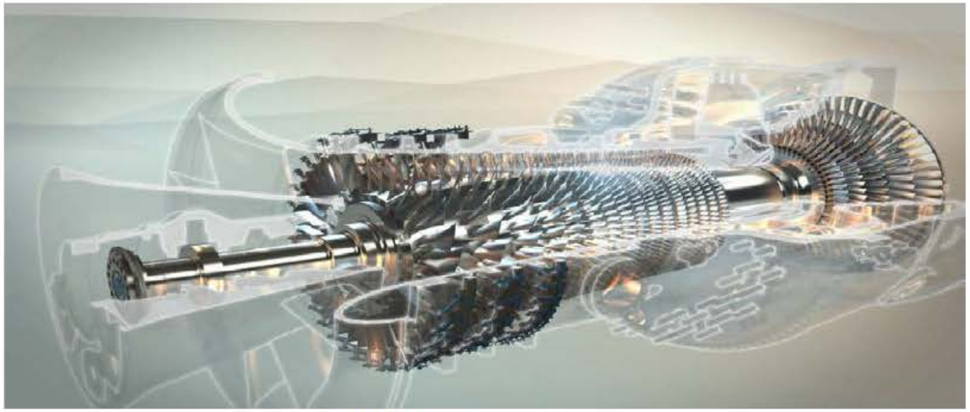
# 13-4 定轴转动刚体的动约束力

静约束力与动约束力

定轴转动刚体的轴承动约束力

动约束力效应及消除方法

# 高速转子的实际应用



水轮机


矢量发动机

武装直升机 (Apache)

磁盘

大量定轴转动的刚体：电动机、柴油机、车床主轴等

# 静约束力与动约束力

## 1. 静约束力与动约束力的概念

1) 静约束力 ——与主动力平衡

2) 动约束力 ——与惯性力平衡

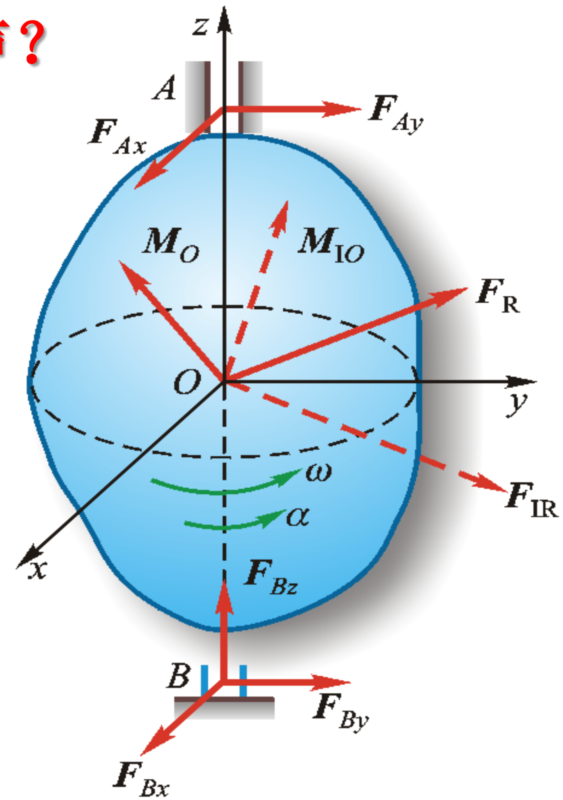
## 2. 动约束力求解方法

1) 动量定理与动量矩定理

2) 动静法

# § 13-4　绕定轴转动刚体的轴承动约束力

如何在机械转动时不产生破坏、振动和噪声？




$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Rx} + F_{\mathrm{I}x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} + F_{Ry} + F_{\mathrm{I}y} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Bz} + F_{Rz} = 0$$

注意：$F_{\mathrm{IR}}$没有沿z方向的分量

$$\sum M_x = 0 \quad F_{By}OB - F_{Ay}OA + M_x + M_{\mathrm{I}x} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad F_{Ax}OA - F_{Bx}OB + M_y + M_{\mathrm{I}y} = 0$$

解得 $$F_{Ax}=-\frac{1}{AB}\left[\left(M_y+F_{Rx}OB\right)+\left(M_{Iy}+F_{Ix}OB\right)\right]$$

$$F_{Ay}=\frac{1}{AB}\left[\left(M_x-F_{Ry}OB\right)+\left(M_{Ix}-F_{Iy}OB\right)\right]$$

$$F_{Bx}=\frac{1}{AB}\left[\left(M_y-F_{Rx}OA\right)+\left(M_{Iy}-F_{Ix}OA\right)\right]$$

$$F_{By}=-\frac{1}{AB}\left[\left(M_x+F_{Ry}OA\right)+\left(M_{Ix}+F_{Iy}OA\right)\right]$$

$$F_{Bz}=-F_{Rz}$$

由于惯性力没有沿z方向的分量，所以止推轴承沿z方向的约束力与惯性力无关

由 $\vec{F}_{IR}, \vec{M}_{IO}$ 引起的轴承约束力称动约束力

动约束力为零的条件为: $F_{Ix} = F_{Iy} = 0, \quad M_{Ix} = M_{Iy} = 0$

即：
$$F_{Ix} = -ma_{Cx} = 0$$
$$F_{Iy} = -ma_{Cy} = 0$$
$$M_{Ix} = J_{xz}\alpha - J_{yz}\omega^2 = 0$$
$$M_{Iy} = J_{yz}\alpha + J_{xz}\omega^2 = 0$$

必有
$$\vec{a}_C = 0$$
$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$J_{xz}$和$J_{yz}$称为刚体对z轴的惯性积

避免出现轴承动约束力的条件:转轴通过质心，刚体对转轴的惯性积等于零。

称满足 $J_{xz} = J_{yz} = 0$ 的轴z为惯性主轴

通过质心的惯性主轴称为中心惯性主轴

找惯性主轴：矩阵对角化，找特征方向（对于转动惯量$J_O$，在三维空间中一定存在三个正交坐标轴为其特征方向）

消除惯性力——使惯性力系自成平衡

避免出现轴承动约束力的条件亦可表述为:刚体的转轴应是刚体的中心惯性主轴.

**静平衡：**刚体的转轴通过质心，刚体除重力外，没有受到其他主动力作用，则刚体在任意位置可以静止不动。

**动平衡：**当刚体的转轴通过质心且为惯性主轴时，刚体转动不出现动约束力。

**二者关系：**能够实现静平衡的刚体未必能实现动平衡；能够实现动平衡的刚体一定能实现静平衡；

**转轴偏离中心惯性主轴：**材料不均匀或是制造、安装误差

**静、动平衡实验：**在刚体的适当位置附加一些质量或去掉一些质量，使其达到静、动平衡

**静平衡试验机：**可以调整质心在转轴上或尽可能在转轴上

**动平衡试验机：**调整刚体对转轴的惯性积，使其对转轴的惯性积为零或尽可能为零。

# 反其道而用之：故意制造出偏心距

**蛤蟆夯**

$$M_{Ix}=\sum m_i r_i \alpha \cos\theta_i z_i+\sum(-m_i r_i \omega^2 \sin\theta_i z_i)$$

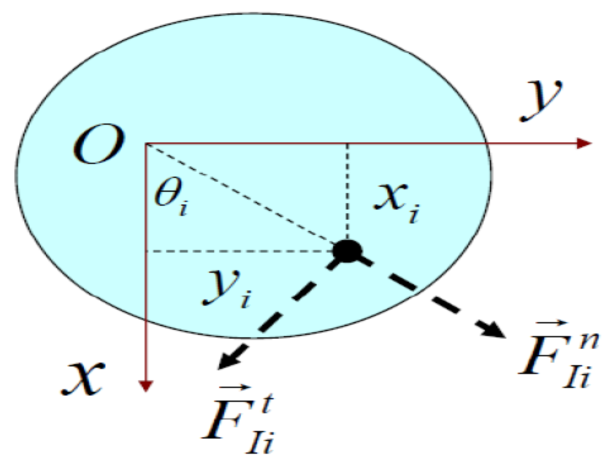
$$\cos\theta_i=\frac{x_i}{r_i},\quad \sin\theta_i=\frac{y_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow M_{Ix}=\alpha\sum m_i x_i z_i-\omega^2\sum m_i y_i z_i$$

$$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i$$

$$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$$

——对于$z$轴的惯性积.




$$\Rightarrow \boxed{M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2}$$

同理 $\boxed{M_{Iy}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2}$

返回