浙江大学 2009-2010 学年春夏学期《线性代数》期末试卷

一、解答题（本大题共 6 题，合计 85 分。本题必须写出必要的解题步骤，只写答案不给分）

1．（本题 10 分）计算排列$43218765\cdots(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)$的逆序数。

解 逆序数为$\overbrace{(3+2+1)+(3+2+1)+\cdots+(3+2+1)}^{n个(3+2+1)}=6n$。

2．（本题 15 分）4 阶行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{vmatrix}$，求

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{A}_{jk}$$

解

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{A}_{jk}=(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{31}+\boldsymbol{A}_{41})+(\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{32}+\boldsymbol{A}_{42})$$

$$+(\boldsymbol{A}_{13}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{33}+\boldsymbol{A}_{43})+(\boldsymbol{A}_{14}+\boldsymbol{A}_{24}+\boldsymbol{A}_{34}+\boldsymbol{A}_{44})$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&4&1&2\\1&3&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&3&4\\4&1&2&3\\3&1&1&2\\2&1&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&1&4\\4&1&1&3\\3&4&1&2\\2&3&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3&1\\4&1&2&1\\3&4&1&1\\2&3&4&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&4&1&2\\1&3&4&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&3&4\\1&4&2&3\\1&3&1&2\\1&2&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&1&4\\4&1&1&3\\3&4&1&2\\2&3&1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2&1&3\\4&1&1&2\\3&4&1&1\\2&3&1&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&3&4\\1&-3&2&3\\1&1&1&2\\1&1&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&1&1\\4&1&1&1\\3&4&1&1\\2&3&1&-3\end{vmatrix}=-32-32=-64$$

3.（本题 15 分）设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{X}$都是 4 阶矩阵，且满足$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}$，求矩 阵$\boldsymbol{X}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{E}$是 4 阶单位矩阵。

解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\Rightarrow\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$，

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}5&-1&-1&-1\\-1&5&-1&-1\\-1&-1&5&-1\\-1&-1&-1&5\end{bmatrix}$$

4．（本题 15 分）设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a\\2\\10\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\b\\c\end{bmatrix}$$

问：当a，b，c满足什么条件时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法不唯一？并求出一般表达式。

解 设有数k_1，k_2，k_3，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&1&1&b\\0&-2-\dfrac{a}{2}&-1-\dfrac{a}{2}&1-\dfrac{ab}{2}\\0&0&-1&c-5b\end{bmatrix}$$

(1) 当$-2-\frac{a}{2}\neq 0$时 即$a\neq-4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法唯一。

(2) 当$-2-\frac{a}{2}=0$时，即$a=-4$时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2&1&0&-b-1\\0&0&1&1+2b\\0&0&0&1-3b+c\end{bmatrix}$$

当$3b-c\neq 1$时，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解，所以$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

(3) 当$a=-4$，且$3b-c=1$时 即$a=4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，则方程有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法不唯一。解得$k_1=t$，$k_2=-2t-b-1$，$k_3=1+2b$，其中$t$为任意常数。因此有

$$\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(1+2b)\boldsymbol{\alpha}_3$$

5. (本题 15 分) 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}$

(1) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$($\boldsymbol{\Lambda}$是 3 阶对角矩阵)，并写出对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$；

(2) 求$\boldsymbol{A}^{10}$。

解

(1) $\boldsymbol{A}$的特征多项式$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-2&\lambda-1&-1\\1&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$。

特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$。

属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

属于特征值$\lambda_3=-3$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$

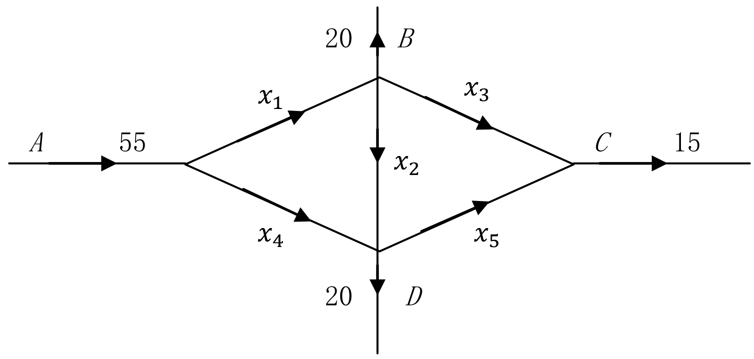
(2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{10}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2\times 3^9 & 3^9 & 3^9\\ 3^9 & 2\times 3^9 & -3^9\\ 3^9 & -3^9 & 2\times 3^9\end{bmatrix}$

6．(本题 15 分)下图是某地区的灌溉渠道网，各节点流出总量平衡，流量和流向均已在图上标明。

(1) 确定各段的流量x_1，x_2，x_3，x_4，x_5；

(2) 如果BC段渠道关闭，那么AD段的流量保持在什么范围内，才能使所有段的流量不超过 30？



解 (1)根据图示，可以列出方程

$$\begin{cases}x_1 \qquad\qquad +x_4 \qquad =55\\ x_1-x_2-x_3 \qquad\quad =20\\ \qquad\qquad x_3 \qquad +x_5=15\\ \qquad x_2 \qquad +x_4-x_5=20\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=55-t_1\\ x_2=20-t_1+t_2\\ x_3=15 \qquad -t_2\\ x_4= \qquad t_1\\ x_5= \qquad\qquad t_2\end{cases}\quad 其中\begin{cases}0\le t_1\le 55\\ 0\le t_2\le 15\\ t_1-t_2\le 20\end{cases}$$

(2) 关闭了BC段渠道，则$x_3=0\Longrightarrow x_4=t_2=15$。

由于各段的流量不超过 30，所以$55-t_1\le 30\Longrightarrow t_1\ge 25$，故$25\le t_1\le 30$。

二、证明题（本大题共 2 题，合计 15 分。第 1 小题 10 分，第 2 小题 5 分，本题必须写出必要的证明步骤）

1．(本题 10 分)设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶矩阵，$\boldsymbol{A}$可逆，且存在一个常数λ，满足矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$，求证：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

证明 由$A=(A-\lambda E)B$可得：$A=AB-\lambda B$，$AB=A+\lambda B$。
因为A可逆，则由$A=(A-\lambda E)B$可得：$E=A^{-1}(A-\lambda E)B=(E-\lambda A^{-1})B$。
由此可知$(E-\lambda A^{-1})$可逆，逆矩阵为B，所以$B(E-\lambda A^{-1})=E$。由此可得：$BA=A+\lambda B$
因此$AB=BA$。

2．(本题 5 分)设$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，如果存在非零列向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$，则$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值大于零。

证一 （用反证法证）因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，则存在正交矩阵$\boldsymbol{U}$使得$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AU}=\mathrm{diag}[\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_n]$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots$，$\lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的特征值，经过正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{UY}$后二次型$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$。若结论不成立，则$\boldsymbol{A}$的特征值全部小于或等于零，则对于任何的向量$\boldsymbol{X}$，都有$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\le 0$，与题设矛盾，所以矩阵$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值大于零。