期末复习题四

2019年12月19日 星期四　　上午9:01

一、计算行列式 $\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$

二、已知矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，而且$A^{-1}+E$可逆，如果矩阵$X$满足$A^{-1}XA+XA+2E=0$，求矩阵$X$

三、解线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$

四、(1)设n阶矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$，求矩阵$C=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$的特征值

(2)已知$\sum_{k=1}^{n}a_k=0$，求n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{pmatrix}$的特征值

五、已知$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$为实可逆矩阵，其中$A_1,A_2$分别为$p\times n$，$(n-p)\times n$矩阵，

(1)求二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^T(A_1^TA_1-A_2^TA_2)X$的正惯性系数和负惯性系数

(2)求证$A_1^TA-A_2^TA_2$可逆

六、设$R[x]$是实系数多项式全体，定义其上的内积函数如下：

六，设$R[x]$是实系数多项式全体，定义其上的内积函数如下：

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)g(x)\,dx,\quad \forall f(x),g(x)\in R[x]$$

(1) 请将$1,x,x^2,x^3$改造成为正交多项式组

(2) 请将多项式$4x^3+3x^2+2x+1$用上述正交多项式组线性表示

七、设A是n阶实矩阵，如果对于任意实n维向量，都有$\|Ax\|=\|x\|$，则A是正交矩阵。

八．设E_r,E_s分别是r阶和s阶单位矩阵，a为非零常数，A,B分别为$r\times s$和$s\times r$矩阵。

(1) 试求矩阵U,W,X,Y使得

$$\begin{pmatrix}E_r & O\\ X & E_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}aE_r & A\\ B & E_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aE_r & A\\ O & Y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}E_r & W\\ O & E_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}aE_r & A\\ B & E_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U & O\\ B & E_s\end{pmatrix}$$

(2) 等式$a^s|aE_r-AB|=a^r|aE_s-BA|$是否成立？请尽量详细地说明理由