大学物理甲

(II)

第九章 真空中的静电场

上学期电场部分的内容:

求解电场强度:

场强叠加原理求解电场强度

矢量

高斯定理求解电场强度

本章的内容:

功和能的角度研究电场的性质　　电势

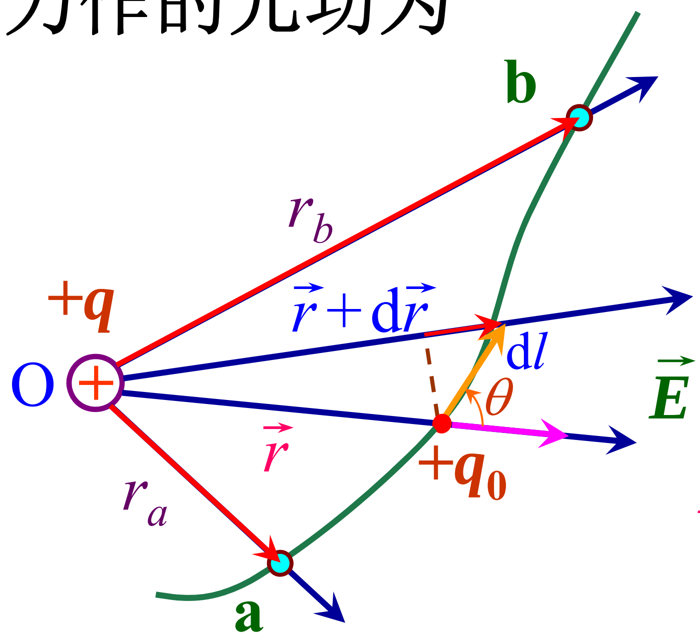
标量

§ 9.6 静电场的环路定理

一、静电场力是保守力

1. 点电荷电场中电场力做功

在位于O点的点电荷$+q$的电场中,试验电荷$+q_0$ 从 a 移至 b, 在位矢$\vec{r}$到 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ 位移元 dl 上,电场力作的元功为

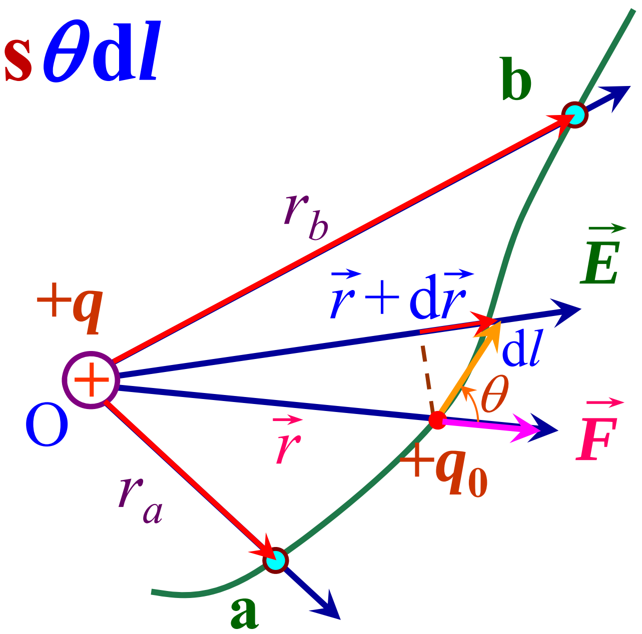


$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}=q_0\vec{E}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \boldsymbol{q_0 E \cos\theta \mathrm{d}l}$$

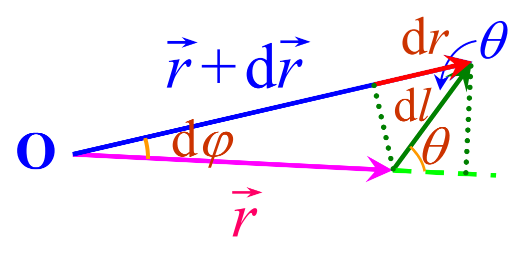
$$= \boldsymbol{q_0 E \mathrm{d}r} = q_0 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r$$



试验电荷从a到b电场力做功为:

$$A_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} q_0 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r$$

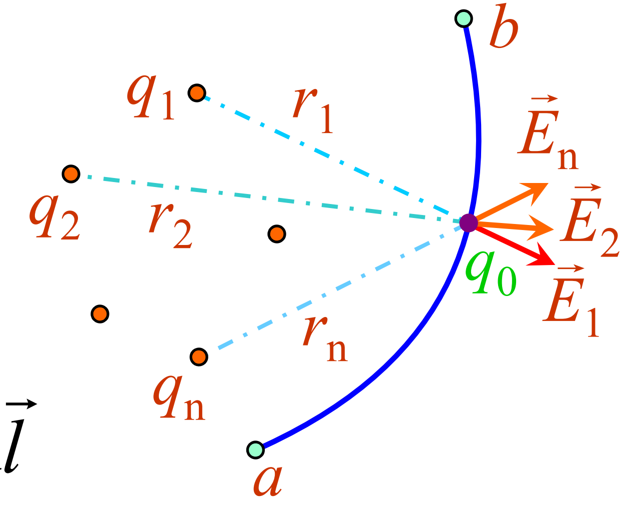
$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$



结果表明: 点电荷电场力所做的功仅与试验电荷电量的大小及**起止位置有关**, 与电荷移动的***路径无关***.

2. 任意带电体电场中电场力做功

任意形状的带电体可看作是点电荷的组合，由场强的叠加性可得:



$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_a^b(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots+\vec{E}_n)\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_a^b \vec{E}_1\bullet \mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_a^b \vec{E}_2\bullet \mathrm{d}\vec{l}+\ldots+q_0\int_a^b \vec{E}_n\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}}-\frac{1}{r_{ib}}\right)$$

与路径无关

如果积分路径为闭合回路呢？

二、静电场的环路定理

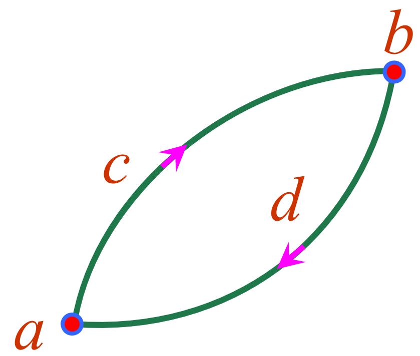
将试验电荷 q_0 从 ***a*** 点移动到 ***b*** 点,再从 ***b*** 点移回到 ***a*** 点.从 ***a*** 到 ***b*** 可以走 ***acb*** 或 ***adb***, 有

$$\oint_L q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \oint_L \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_{a(c)}^{b} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + q_0 \int_{b(d)}^{a} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

由于静电场力做功仅与位置有关,与路径无关

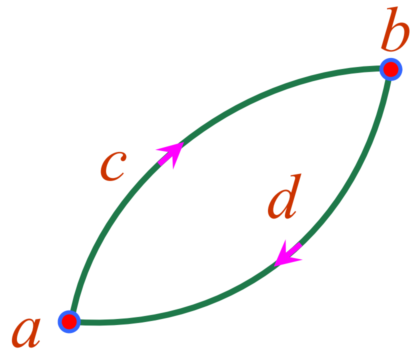
$$q_0 \int_{a(c)}^{b} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_{a(d)}^{b} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -q_0 \int_{b(d)}^{a} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$



所以 $q_0 \int_{a(c)}^{b} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + q_0 \int_{b(d)}^{a} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$q_0\oint \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0$ 因 $\boldsymbol{q_0}\neq\mathbf{0}$, 故: $\boxed{\oint \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0}$



$\oint \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的环流

小结: 静电场力做功的特点

(1) 电场力做功仅与位置有关,与路径无关.

→ 静电场力是保守力

(2) 静电场力是保守力 → 静电场是保守场

(3) 静电场力是保守力 →可以引入势能 (电势能)

(4) 静电场的环流为零 → 可以引入势的概念 (电势)

§9.7 电势

电势是从能量的角度来描述电场

一. 电势能

1. 电势能的定义

对于保守场，可引入势能. 点电荷q_0在a点有势能W_a，在b点有势能W_b，q_0从a点移至b点时电场力做的功等于电势能增量的负值.

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=-(W_b-W_a)=-\Delta W=W_a-W_b$$

★ a.势能是相对的→定义了势能的增量.

★ b. 参考零点, 需要选择电势能为零的点.

★ c.电势能的单位: 焦耳(J)

2. 电势能零点的选择

a. 理论上: 任意点都可选为电势能为零,
但一般不能为存在电荷的地方. 理由呢?

b. 一般建场电荷在空间上为有限时,可取
无限远处电荷的电势能为零, $W_\infty = 0$

则电荷q_0从p点移至无限远时电场力所做的功:

$$A_{p\infty} = \int_p^\infty q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l} = -(W_\infty - W_p) = W_p$$

p点的电势能为:

$$W_{p|\infty} = A_{p\infty} = \int_p^\infty q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l} = q_0 \int_p^\infty \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

即电荷q_0在p点的电势能为将q_0从p点移至无限远处时电场力所做的功.

c. 若建场电荷在空间上为无限时, 选除无穷远处以外的 p_0 处的电势能为零, $W_{p_0}=0$

但不能为存在电荷的地方.

则电荷 q_0 从 p 点移至 p_0 时电场力所做的功:

$$A_{pp_0}=\int_p^{p_0} q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=-(W_{p_0}-W_p)=W_p$$

则 p 点的电势能为:

$$W_{p|p_0}=A_{pp_0}=\int_p^{p_0} q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_p^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

即电荷 q_0 在 p 点的电势能为将 q_0 从 p 点移至 p_0 时电场力所做的功.

例1: 点电荷q电场中，试验电荷q_0的电势能

解: 点电荷q在空间上某点的电场 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

点电荷q在空间上有限，可取无限远处的电势能为零，$W_\infty=0$

$$W_{p|\infty}=\int_p^\infty q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_p^\infty q_0 E\cos\theta \mathrm{d}l=\int_{r_p}^\infty q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=q_0\int_{r_p}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=q_0\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_p}^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_p}$$

W_p的大小、极性与q_0、q有关，属于q产生的电场和电荷q_0共有，与试验电荷也有关

★ 故电势能无法准确反映电场本身的性质

二. 电势

1. 电势的定义

$$\boxed{U_p = \frac{W_p}{q_0}}$$

注意积分限

当无穷远处为零电势

$$U_{p|\infty} = \frac{W_{p|\infty}}{q_0} = \frac{\int_p^\infty q_0 \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}}{q_0} = \int_p^\infty \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}\ , \quad U_\infty = 0$$

当p_0点为零电势 $$U_{p|p_0} = \int_p^{p_0} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}\ , \quad U_{p_0} = 0$$

(1) 只反映了电场的性质，因为除去了q_0.

(2) 求电势, 要求先求出电场E

(3) 电势是标量, 单位:伏特(V)

(4) 电势的相对性, 参考点的选取

★ 电势零点的选取

a. 理论上任意点都可选为电势为零的点.

但一般不能为存在电荷的地方.　　理由呢?

b. 一般建立电场的电荷为有限大时,

取无穷远处作为电势为零的点.

也可取大地作为零电势

$$U_{p|\infty}=\int_p^{\infty}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}\ ,\quad U_{\infty}=0$$

c. 建场电荷为无限大时,

不能取无穷远处作为电势为零的点.

选: (1) 除无穷远处外; (2) 不存在电荷的任意点.

$$U_{p|p_0}=\int_p^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}\ ,\quad U_{p_0}=0$$

电势差

2. 电势差

任意两点之间的电势之差，也称电压、电平、电位

$$U_{ab}=U_a-U_b$$

$$=\int_a^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}-\int_b^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{b}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

3. 电场力做功、电势能与电势差的关系

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=-\Delta W_{ab}=-(W_b-W_a)=W_a-W_b$$

$$=q_0\cdot\frac{W_a-W_b}{q_0}=q_0(U_a-U_b)=q_0U_{ab}$$

4. ★电势的计算之一 (按定义式)

当p_0点为零电势

已知电场强度时

$$U_{p|p_0}=\int_p^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}\ ,\quad U_{p_0}=0$$

例2: 计算带电量为q, 半径为R的均匀带电球面电场中的电势分布?

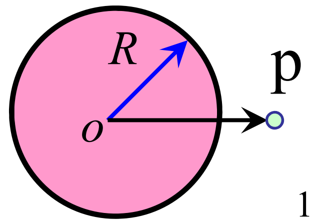
解: 如图所示, 带电球面在空间激发的场强沿半径方向, 大小为:

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\\ 0 & r<R\end{cases}$$

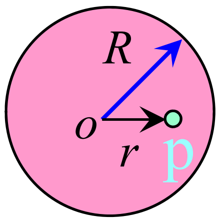
取无穷远处作为电势为零的点.

按定义式: $U_{p|\infty}=\int_{(p)}^{(\infty)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_{(p)}^{(\infty)}E\cos\theta \mathrm{d}l=\int_r^{\infty}E\mathrm{d}r$

当$r>R$时 $U_{p|\infty}=\int_r^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

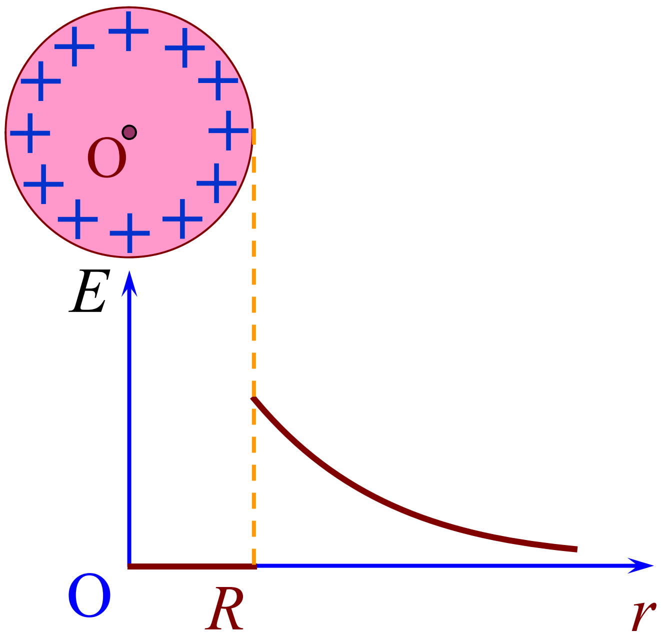


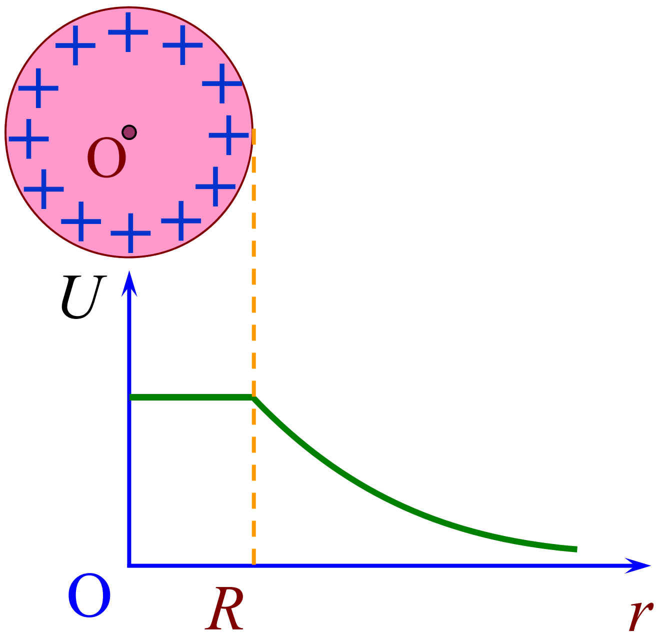
当r<R时



$$U_{p|\infty} = \int_{(p)}^{(\infty)} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(r)}^{(R)} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{(R)}^{(\infty)} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{r}^{R} 0 \cdot \mathrm{d}r + \int_{R}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



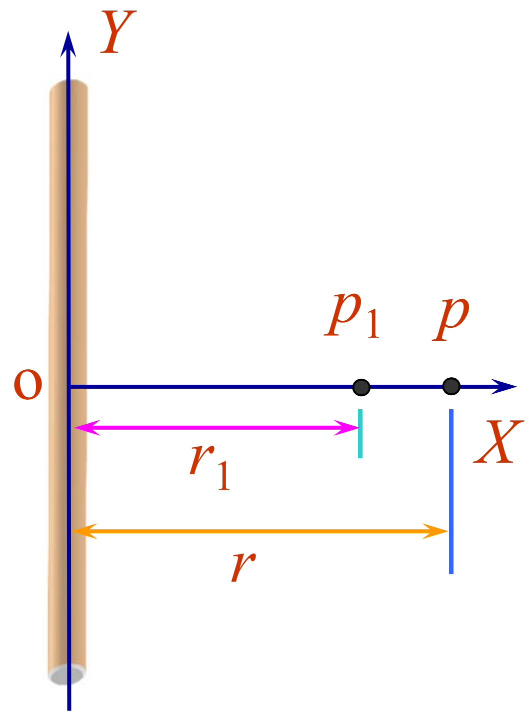


例3: 计算电荷线密度为λ的无限长均匀带电直线电场的电势分布?

解: 如图所示, 计算X 轴线上距直线为r的p点处的电势.

由高斯定理, 一无限长均匀带电直线在X轴上的电场为:

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



假设p_1点为电势零点, p点电势相当于p与p_1的电势差为:

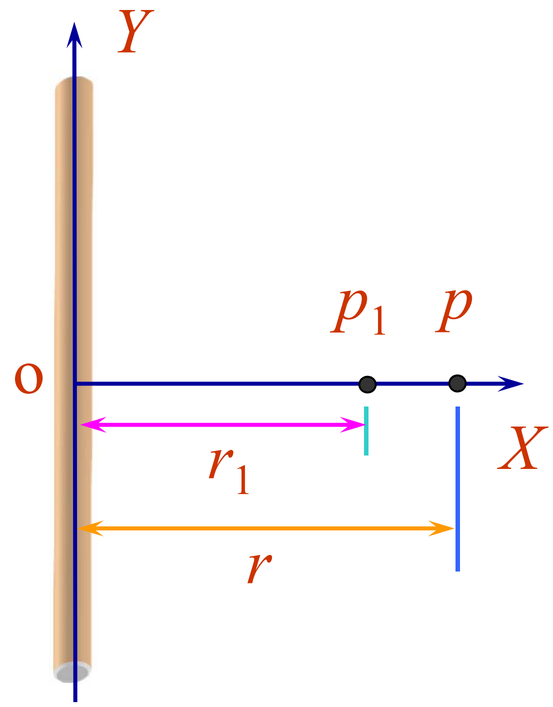
$$U_{p|p_1}=U_p-U_{p_1}=\int_{(p)}^{(p_1)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{(p)}^{(p_1)}E\cos\theta \mathrm{d}l=\int_{(p)}^{(p_1)}E\mathrm{d}r$$

$$=\int_{r}^{r_1}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r}$$

由于ln1＝0,本题选r_1＝1m处作为电势零点, 则**p**点电势为:

$$U_{p|1}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\{r\}_m$$



上式中 **r**>1m, U_p为负,

r<1m, U_p为正

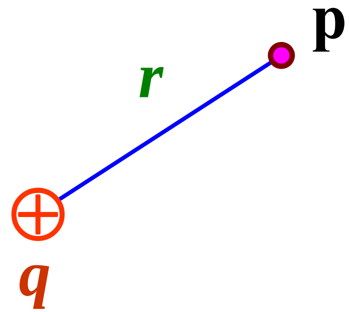
★讨论: 用定义计算电势时必须知道所求点与电势零点之间任意位置的电场强度

问题: 当电场强度无法求出时, 怎样求电势?

三. 电势叠加原理

当电场强度较难求出时

1. 点电荷电场中的电势



★ 选取无穷远处作为零电势

$$U_{p|\infty} = \int_p^\infty \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_p^\infty E\cos\theta \mathrm{d}l$$

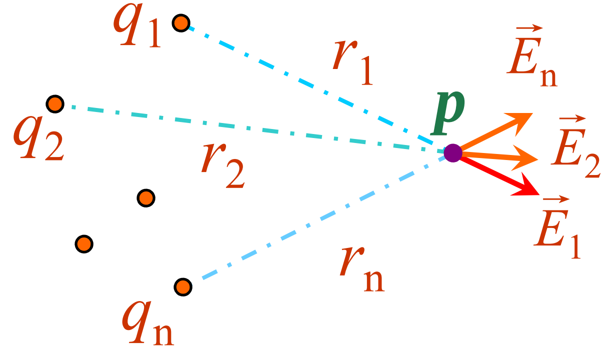
$$= \int_r^\infty E\mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

若**q**为正,空间各点电势为正, **r**越大, **q**越远, 电势越低; 若**q**为负, 空间各点电势为负, **r**越大, 离**q**越远,电势越高

思考题: 如果电势零点不选无穷远处, 点电荷电场中的电势?

2. 点电荷系电场中的电势

场源电荷是由点电荷q_1、q_2、…、q_n组成的点电荷系，★选取无穷远处作为零电势时，由电势的定义和场强叠加原理：



$$U_{p|\infty} = \int_p^\infty \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_p^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n) \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_p^\infty \vec{E}_1 \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_p^\infty \vec{E}_2 \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \ldots + \int_p^\infty \vec{E}_n \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= U_{p_1|\infty} + U_{p_2|\infty} + \ldots + U_{p_n|\infty} = \sum_{i=1}^{n} U_{pi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

(1). 物理意义：点电荷系产生的电势等于各建场电荷单独产生电势的代数和

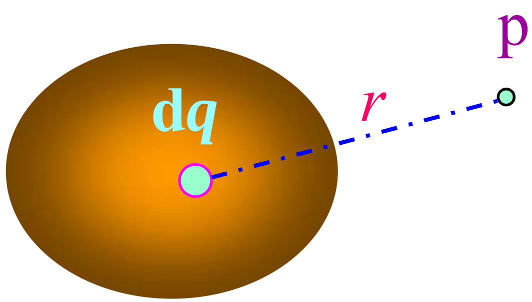
(2). 特点：代数和, 标量和, 容易计算

3. 电荷连续分布带电体电场中的电势计算思路(★)

(1) 按电势叠加原理计算

在带电体上取一小电荷元**dq**作为点电荷,则

$$\mathrm{d}U_{p|\infty}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U_{p|\infty}=\int \mathrm{d}U_{p|\infty}=\int_{V_{体}}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) 按定义式计算

$$U_{p|\infty}=\int_p^{\infty}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} \qquad 或 \qquad U_{p|p_0}=\int_p^{p_0}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

4. ★电势的计算之二 (按电势叠加原理)

例4: 计算电偶极子电场中任意一点的电势?

解: ★选取无穷远处作为零电势

如图所示,在电偶极子电场**P**点的电势为:

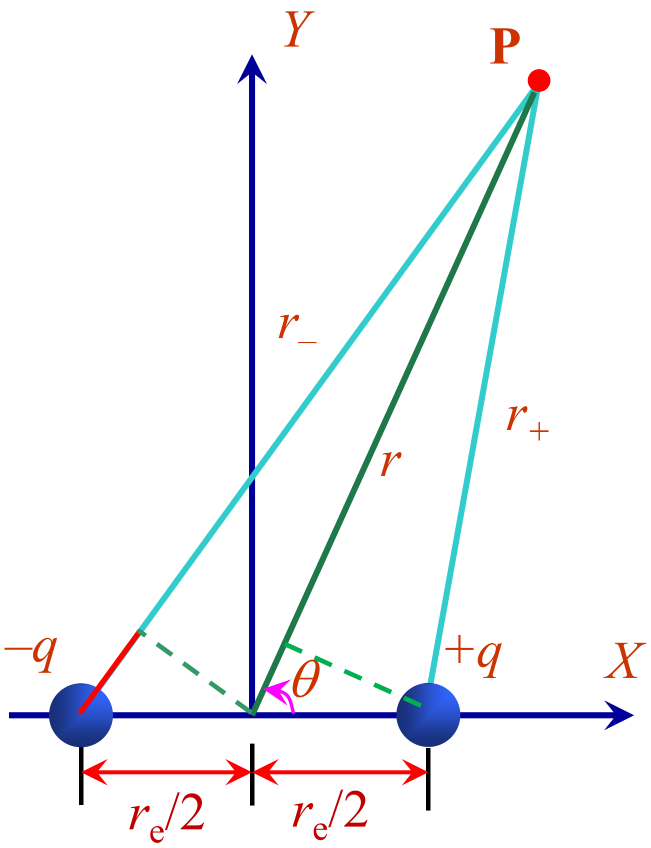
$$U_{P|\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

当$\mathbf{r} >> \mathbf{r_e}$时

$$r_+\approx r-\frac{r_e}{2}\cos\theta$$

$$r_-\approx r+\frac{r_e}{2}\cos\theta$$

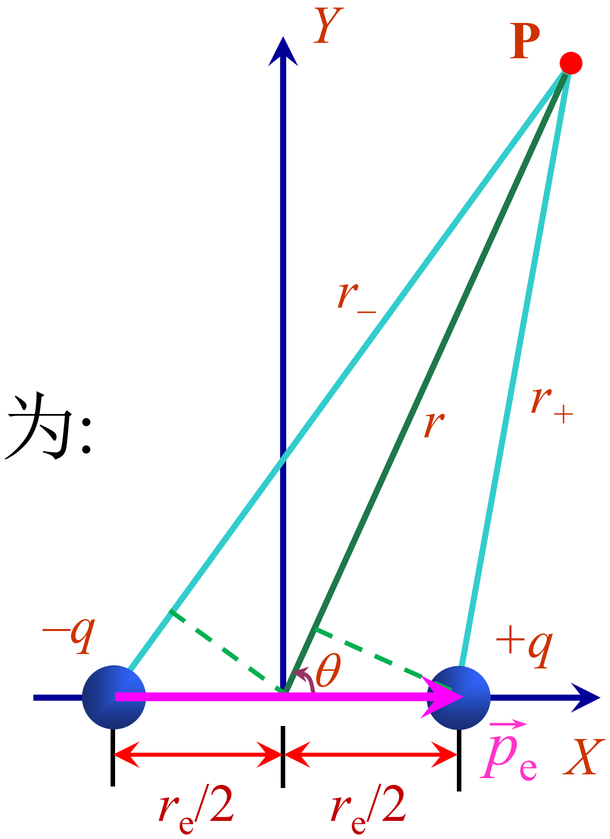


$$U_{P|\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(r+\frac{r_e}{2}\cos\theta)-(r-\frac{r_e}{2}\cos\theta)}{(r-\frac{r_e}{2}\cos\theta)(r+\frac{r_e}{2}\cos\theta)}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_e\cos\theta}{r^2-(\frac{r_e}{2}\cos\theta)^2}$$

由于 $\boldsymbol{r} >> \boldsymbol{r_e}$ 所以P点电势可写为:

$$U_{p|\infty}=\frac{qr_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}_e\bullet\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

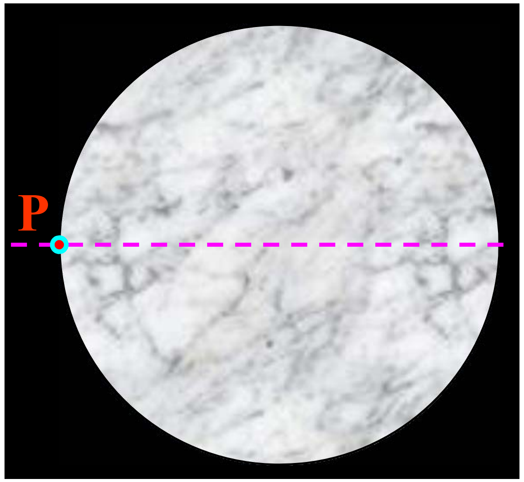


例5(9-34): 半径为R的非导体薄圆盘均匀带电，电荷面密度为σ，试求圆盘边缘处一点P的电势.

解:

★选取无穷远处作为零电势

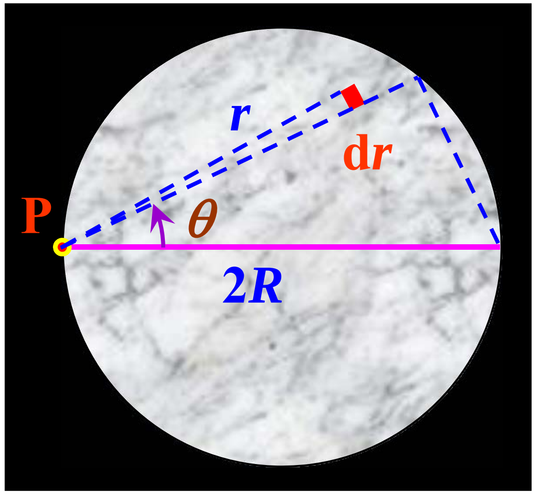
以圆盘边缘上某点P点为圆心，任意长r ($r<2R$)为半径处，作一宽度为dr，圆心角为dθ的电荷元



电荷元的面积： $dS = rd\theta \cdot dr$

电荷元的带电量为：

$$dq = \sigma dS = \sigma r d\theta dr$$



电荷元在P点产生的电势：

$$dU_{P|\infty} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma d\theta dr}{4\pi\varepsilon_0}$$

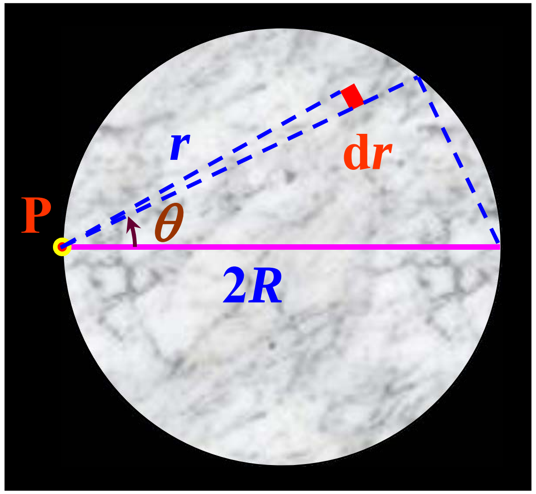
圆盘在点P点产生的总电势为:

$$U_{P|\infty}=\iint_S \mathrm{d}U=\iint_S \frac{\sigma \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}\frac{\sigma \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\frac{\sigma 2R\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sigma R\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$

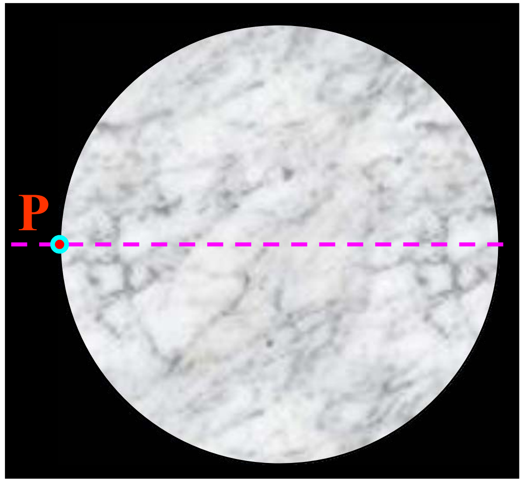


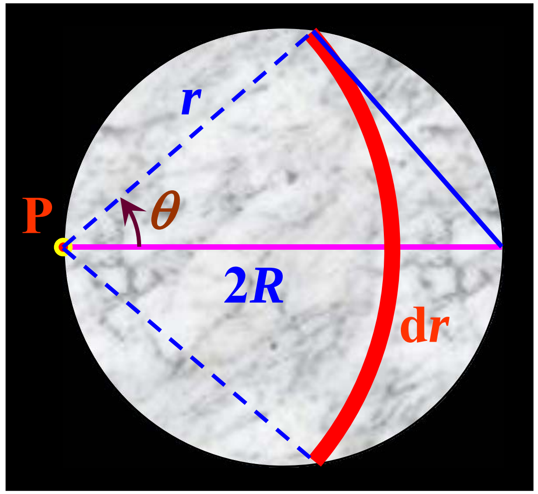
例5(9-34): 半径为R的非导体薄圆盘均匀带电, 电荷面密度为σ, 试求圆盘边缘处一点P的电势.

解:

★选取无穷远处作为零电势

以圆盘边缘上某点P点为圆心, 任意长r ($r<2R$)为半径, 作一宽度为dr的环带.





环带的面积: $dS=r\cdot 2\theta dr$

环带的带电量为:

$$dq=\sigma dS=\sigma 2r\theta dr$$

环带的电荷在P点产生的电势:

$$dU_{P|\infty}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma 2r\theta dr}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma\theta dr}{2\pi\varepsilon_0}$$

$r=2R\cos\theta$ $\qquad$ $dr=-2R\sin\theta d\theta$

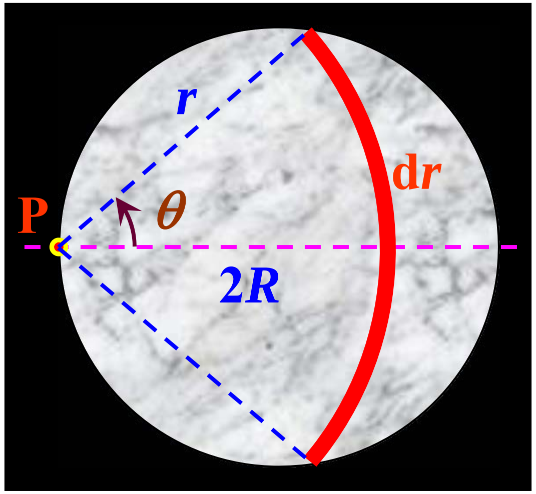
各环带在点P点产生的总电势为：

$$U_{P|\infty}=\int \mathrm{d}U_{P|\infty}=\int_0^{2R}\frac{\sigma\theta\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0}=\int_{\pi/2}^{0}(-\frac{\sigma\theta 2R\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0})$$

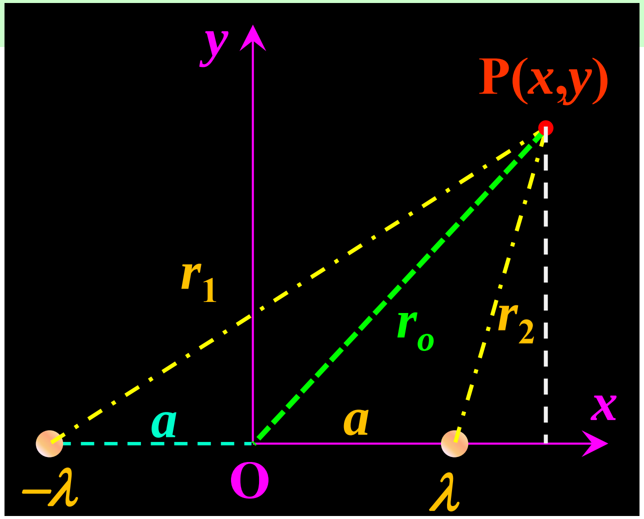
$$=\int_{\pi/2}^{0}(-\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0})\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}(\sin\theta-\theta\cos\theta)\Big|_{\pi/2}^{0}$$

$$=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$



例6: 单位长度上分别带电为 λ 和 $-\lambda$ 的两条无限长平行直导线, 相距为2a, 如图所示. 求任一点P的电势(设两导线间的中点O为电势零点).



带正电

$$U_+ = \int_{(r_2)}^{(a)} \vec{E}_+ \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(r_2)}^{(a)} E_+ \cos\theta \mathrm{d}l$$

r的意义

$$= \int_{r_2}^{a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{a}{r_2}$$

带负电

$$U_- = \int_{(r_1)}^{(a)} \vec{E}_- \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(r_1)}^{(a)} E_- \cos\theta \mathrm{d}l$$

$$= \int_{r_1}^{a} \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{a}{r_1}$$

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

P的电势

$$U_P = U_+ + U_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_1}{r_2}$$

$$U_P = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

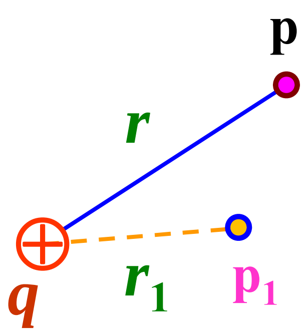
★ 求电势方法小结:

(1) 当电荷分布具有非常好的对称性时,
可先用高斯定理求出电场强度,
然后用电势的定义计算电势.
但有时用电势叠加原理计算可能更为简便

(2) 当电荷分布的对称性并不是特别好时,
用电势叠加原理计算较好
因为这种情况下, 先求电场强度比较困难

(3) 两种方法的结合

(4) 讨论: 若电势零点不选无穷远处,
点电荷电场中的电势?



方法一:

$$U_{p|p_1} = \int_p^{p_1} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^{r_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

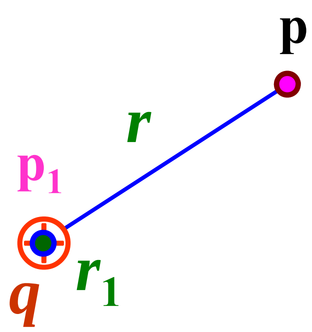
方法二: 先设无穷远处为电势零点

$$U_{p|\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad;\quad U_{p_1|\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

$$U_{p|p_1}=U_{pp_1}=U_{p|\infty}-U_{p_1|\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

如果电势零点选在电荷上

$$U_{p|p_1}=\lim_{r_1\to 0}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\right)\to\infty$$



问题1: 无穷远处不能取为零势能时怎样使用电势叠加原理?

思考题

问题2: 已知电势 ? → 求电场强度

§ 9.8 电场强度与电势的关系

一、等势面

1. 等势面的定义：电势值相等的点连成的曲面

$$U(x,y,z)=C$$

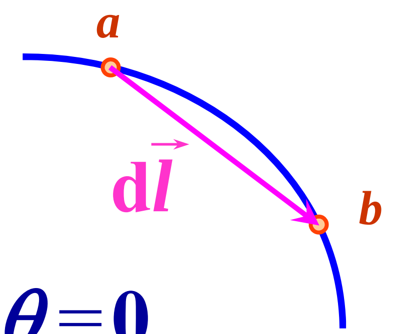
2. 等势面的性质：

(1). 等势面与电场线处处正交

试验电荷q_0在等势面上两点a,b之间移动时，电场力做功为

$$\mathrm{d}A_{ab}=q_0\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=q_0E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

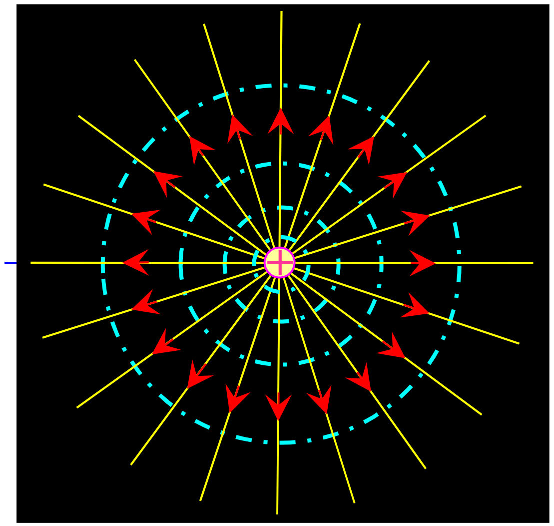
$$=q_0(U_a-U_b)=q_0U_{ab}=0$$



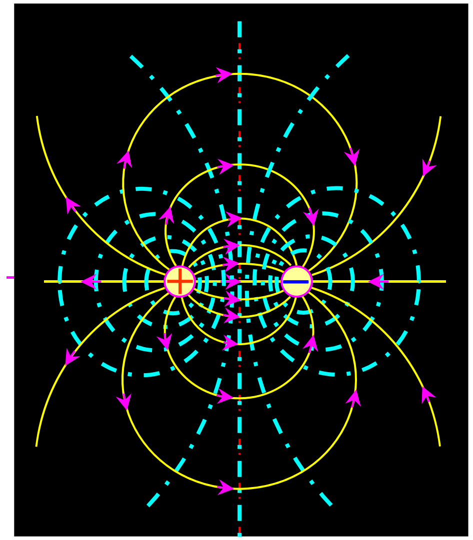
因为q_0、E、$\mathrm{d}l$均不等于零，故$\cos\theta=0$

$\theta=90°$，所以 $E\perp\mathrm{d}l$

(2). 等势面密集的地方场强大, 稀疏处场强小



正点电荷



电偶极子

电场方向指向电势降落的方向

这个特点怎么证明?

二、电场强度与电势梯度的关系

1. 电势与电场强度关系的**积分形式**

$$U = \int_{p}^{p_0} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$ 电势的定义

2. 电势与电场强度关系的**微分形式**

如图,取相邻两等势面1、2, 其电势分别为: U、$U+\mathrm{d}U$, 并设$\mathrm{d}U>0$过P_1点作法线交2于P_2, 法线方向矢量为$\boldsymbol{n}$, $P_1P_2=\mathrm{d}n$, 取2中任一点P_3, $P_1P_3=\mathrm{d}l$, 则电势的空间变化率$\mathrm{d}U/\mathrm{d}l$ 将恒小于$\boldsymbol{n}$方向的电势的空间变化率$\mathrm{d}U/\mathrm{d}n$,即$\mathrm{d}U/\mathrm{d}l \le \mathrm{d}U/\mathrm{d}n$.设$\mathrm{d}l$与$\boldsymbol{n}$之间的夹角为$\theta$,可知,$\mathrm{d}n=\mathrm{d}l\cos\theta$因而

$$dA_{12}=q_0U_{12}=q_0[U-(U+dU)]$$

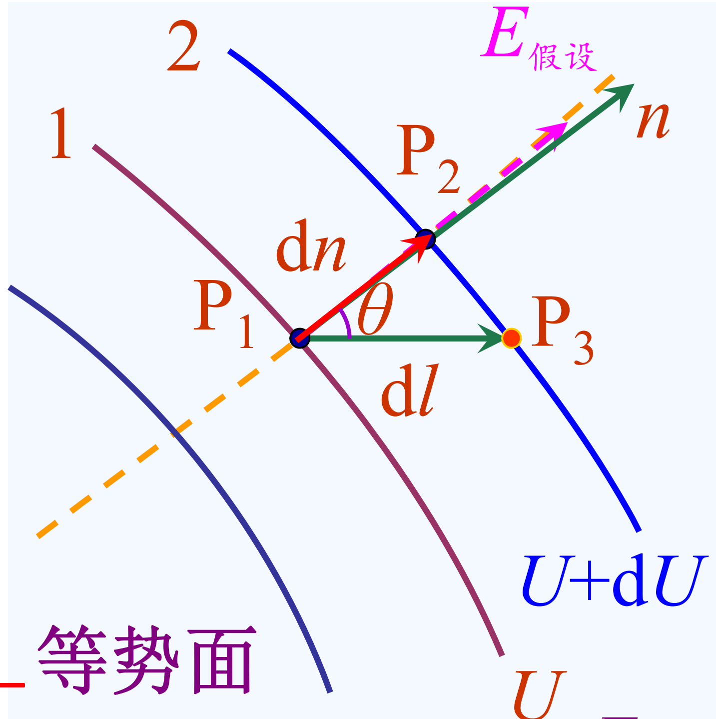
$$=-q_0dU=\vec{F}\bullet d\vec{l}$$

$$=q_0\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

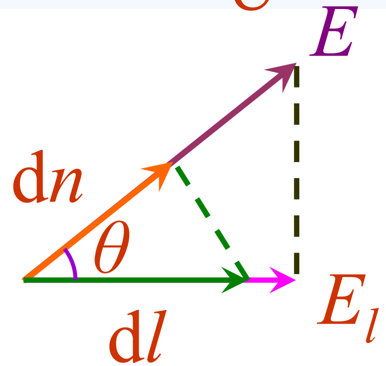
$$=q_0E\cos\theta dl$$

$$-dU=E\cos\theta dl$$

$E\perp$等势面



$$=\begin{cases} Edn,\ 其中dn=\cos\theta dl \\ E_ldl,\ 其中E_l=E\cos\theta \end{cases}$$



dn是dl在E方向上的投影，是dl在E方向上的分量；
而E_l是E在l方向上的投影，是E在l方向上的分量

绝对值最大 ⇒

$$\begin{cases} E = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n} \\ E_l = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} \end{cases}$$

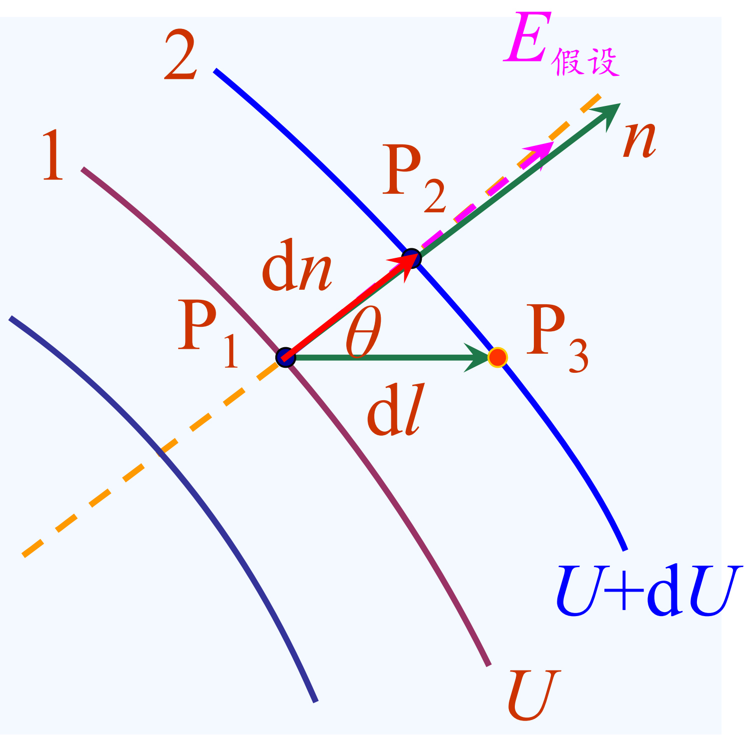
***E*为电势在*n*方向上方向导数的负值,即该方向上电势变化率的负值**

***E*在任意方向d*l*方向上的分量等于电势在该方向上方向导数的负值,即该方向上电势变化率的负值**

其中E_l是 E 在l方向上的分量

在直角坐标系中

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$



$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} + E_z\,\vec{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,U = -\nabla U$$

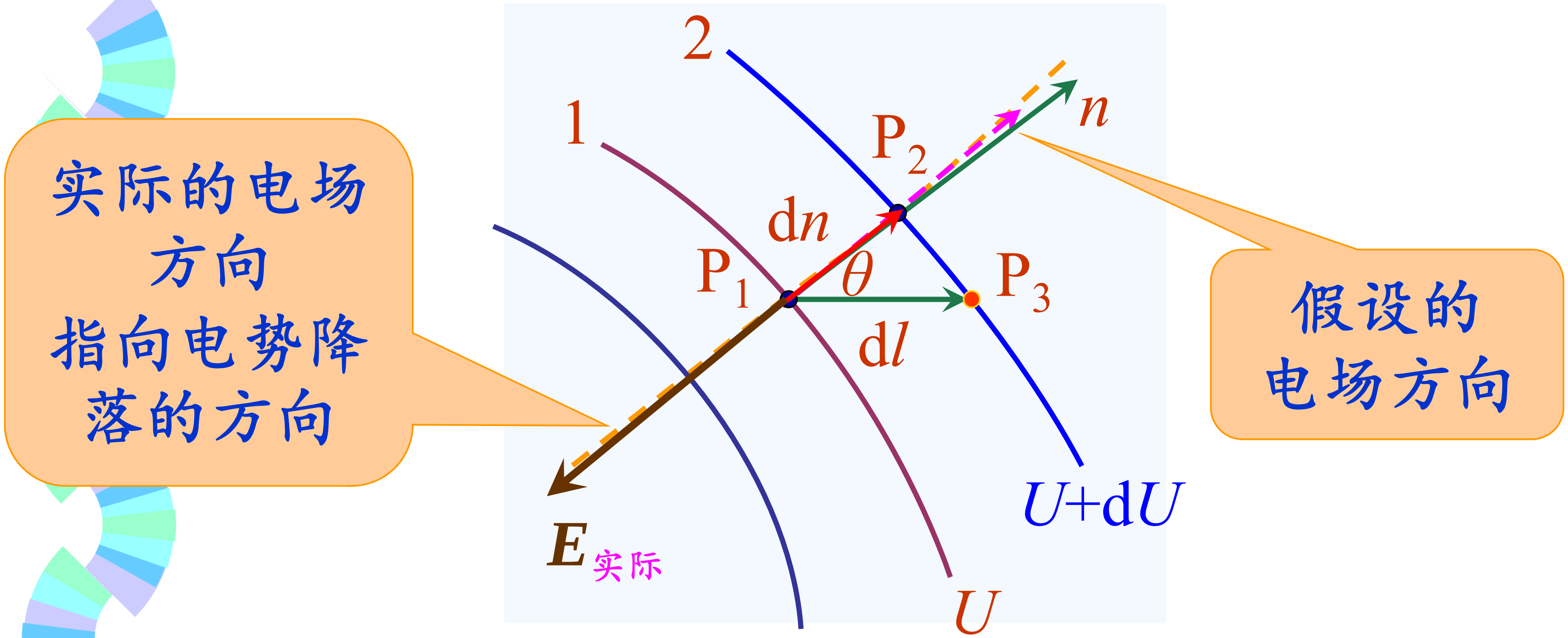
电场中某点电势梯度矢量与电场强度之间的关系

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\hat{n} = -\mathrm{grad}\,U = -\nabla U$$

电场强度与电势梯度的关系: 电场中某点的电场强度矢量,等于该点的电势梯度矢量的负值,负号表示电场强度的方向与电势梯度的方向相反.

(1) 电场强度指向电势降落的方向

(2) 电势梯度大,电场线密集,电场强度大



【思考题】 $E=0$处, U一定为零吗 ?

$U=0$处, E一定为零吗 ?

★讨论： 实际上，电场中某点电势梯度矢量与电场强度之间的关系就是保守力与势能之间的体现

在力学的部分，我们知道保守力与势能有如下的关系： $\vec{F} = -\nabla E_p$

在这里，**F** 就是电场力，**E_p** 就是电势能，故

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = -\nabla E_p = -\nabla W = -\nabla q_0 U = -q_0 \nabla U$$

消去**q_0**后可得： $\vec{E} = -\nabla U$

用场强和电势梯度的关系求电场强度可以避免复杂的矢量运算

电势梯度的单位是V/m，常作为场强的单位

3. 电场强度与电势梯度关系的应用

→求电场强度的新方法

例7: 已知某静电场的电势函数为

$$U=6x-6x^2y-7y^2 \text{ (SI)}$$

由电场与电势梯度的关系式可得点 (1,1,0) 处的电场强度 $\underline{\vec{E}=6\vec{i}+20\vec{j}}$ (SI).

解:

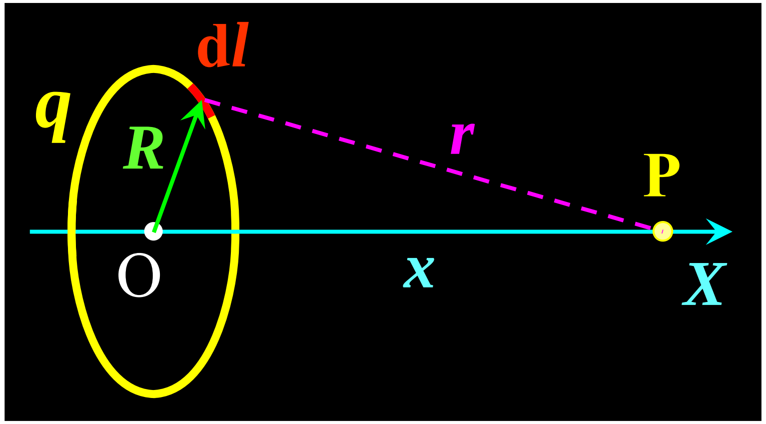
$$\vec{E}=-\nabla U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=-[(6-12xy)\vec{i}+(-6x^2-14y)\vec{j}]$$

将$x=1, y=1, z=0$代入, 得 $\vec{E}=6\vec{i}+20\vec{j}$

例8: 半径为*R*, 电量为*q*的均匀带电圆环在轴线的电势和电场

解: 设线电荷密度λ,轴线上P点离圆心距离x,在圆环上取弧长为dl的圆弧,弧上带电:



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

圆弧dl看成点电荷,在轴线上P点产生的电势(无穷远处为电势零点)

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$U=\int \mathrm{d}U=\int_0^{2\pi R}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

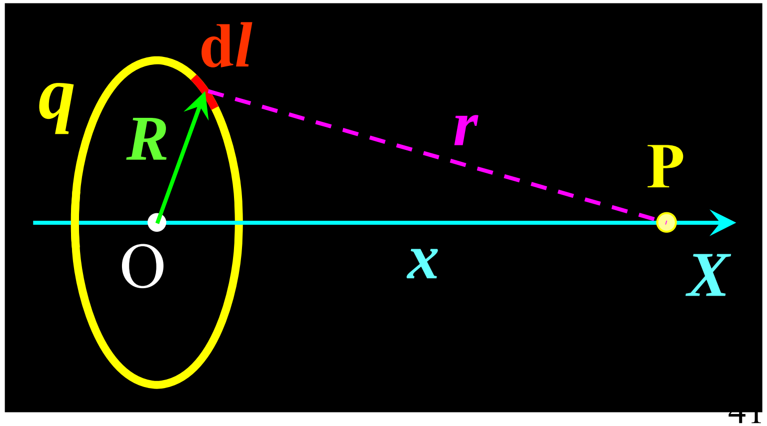
$$=\frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

由**对称性分析**可知，场强方向沿**x**轴，其值为:

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$\boldsymbol{E_y=E_z=0}$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$



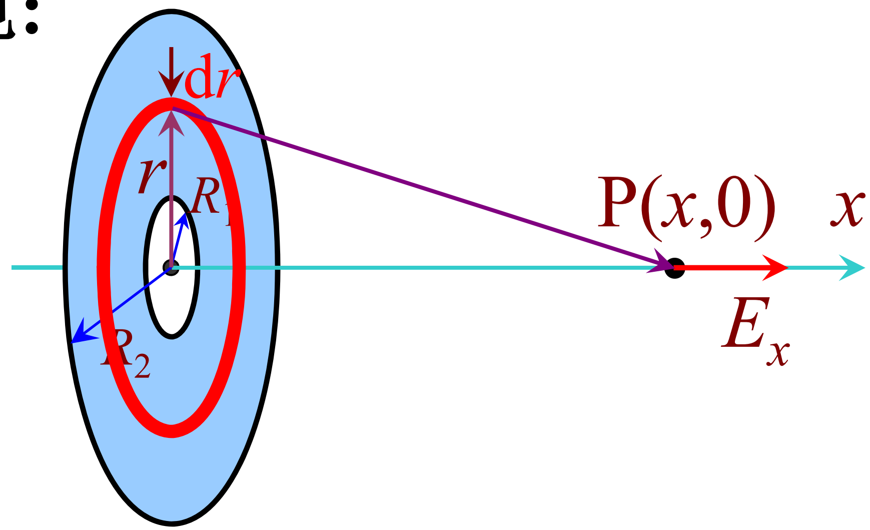
例9: 将半径为R_2的圆盘, 在盘心处挖去半径R_1的小孔, 并使盘均匀带电,试用电势梯度求场强的方法,计算这个中空带电圆盘轴线上任一点P处的场强?

解:

★选取无穷远处作为零电势

设面电荷密度σ,离圆心距离x,在盘面上取半径r,宽为dr的圆环,环上带电:

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$



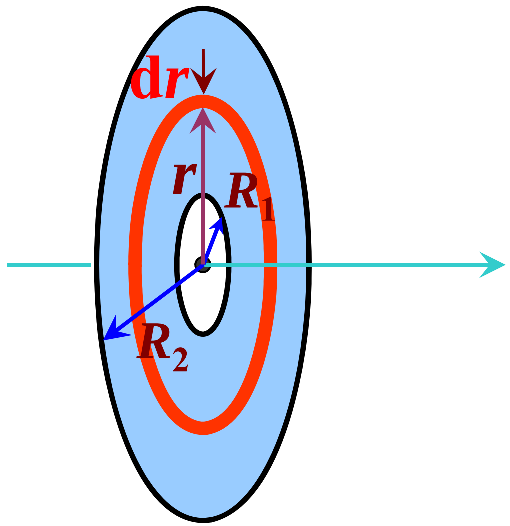
微元dq在P点的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}}$$

整个圆盘在P点的电势为:

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R_2^2+x^2}-\sqrt{R_1^2+x^2})$$



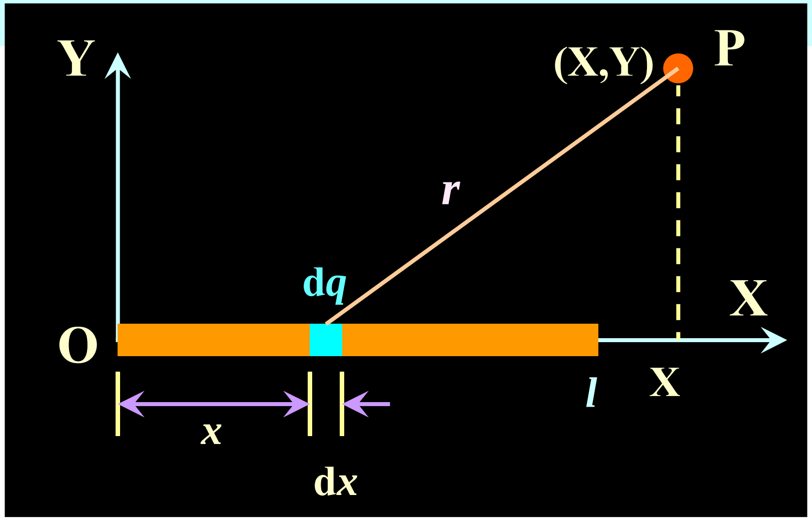
由对称性分析可知, 场强方向沿x轴, 其值为:

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right)$$

$E_y=E_z=0$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right)\vec{i}$$

例10: 如图所示，一沿X轴放置,一端为原点,长为l的均匀带电细棒,单位长度带电量λ,试求X-Y平面上一点的电势和电场强度.



解: (1) 用点电荷电势公式及电势叠加原理求X-Y平面上一点P的电势, P点的坐标为(X,Y)

★选取无穷远处作为零电势

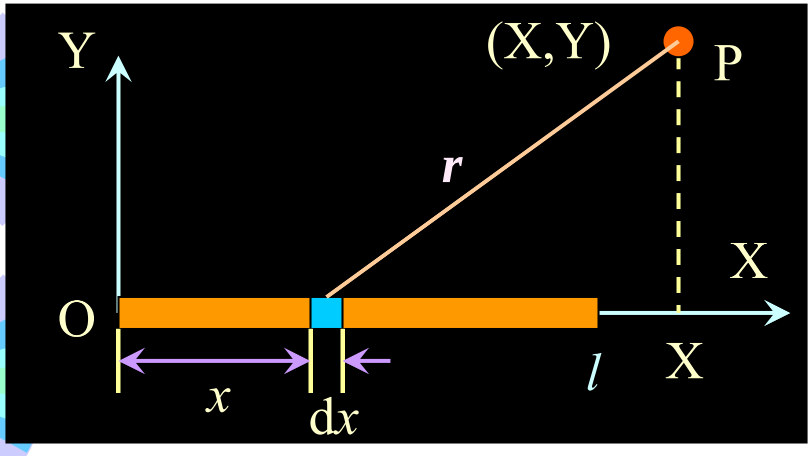
在棒上任取一电荷元dq, 该点电荷在P点的电势为

$$dU_{P|\infty} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0[(X-x)^2+Y^2]^{1/2}}$$

由电势叠加原理

$$U_{P|\infty} = \int \mathrm{d}U_{P|\infty} = \int_0^l \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0[(X-x)^2+Y^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{X+\sqrt{X^2+Y^2}}{X-l+\sqrt{(X-l)^2+Y^2}}$$



相对于积分变量dx, *X*和*Y*是常量

(2)用场强和电势的梯度关系求 **X-Y**平面上一点的场强

什么是变量?

$$\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial X}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial Y}\vec{j}$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial U}{\partial X}\left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{X+\sqrt{X^2+Y^2}}{X-l+\sqrt{(X-l)^2+Y^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(X-l)^2+Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right]$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y}\left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{X+\sqrt{X^2+Y^2}}{X-l+\sqrt{(X-l)^2+Y^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Y}{\sqrt{(X-l)^2+Y^2}[X-l+\sqrt{(X-l)^2+Y^2}]}\right.$$

$$\left.-\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}[X+\sqrt{X^2+Y^2}]}\right]$$

★求场强的方法小结:

(1)场强叠加原理→矢量积分,求解非常复杂,但理论上能求解任何电荷分布的电场强度.

(2)高斯定理→曲面积分,当电荷分布具有很好对称性时求解非常方便,但电荷分布对称性较差时无法求解电场强度.

(3)电势叠加原理→标量积分及求偏微分,由于电势是标量,故求电势所使用的是普通积分,故较为方便.但求电场时必须先求出电势 的,计算步骤较多.但理论上能求解任何电荷分布的电场强度.

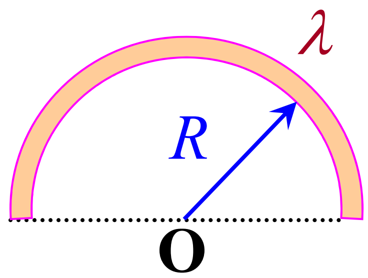
思考题:电荷分布是怎样得到的?

【讨论题一】有一半径为*R*,电荷线密度为λ的均匀带电半圆环,求圆心处的电势.

有一同学先求圆心处的电场强度 $E_O=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$, 再用

$$U_O=\int \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_0^{\pi R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot \mathrm{d}l=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot \pi R=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$



这种做法对不对? 为什么?

【解答】上述做法有两个错误, 一是用圆心的电场强度代替了整个电场分布, 二是积分路径应是圆心到无限远处, 本题用电势的定义解会碰到困难.

正确的解法:选无穷远处为电势零点, 并用电势叠加原理

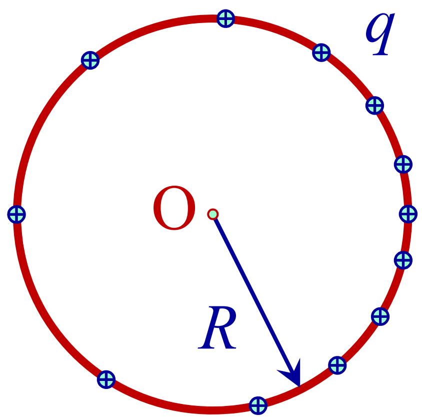
$$U_O=\int \mathrm{d}U=\int_0^q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

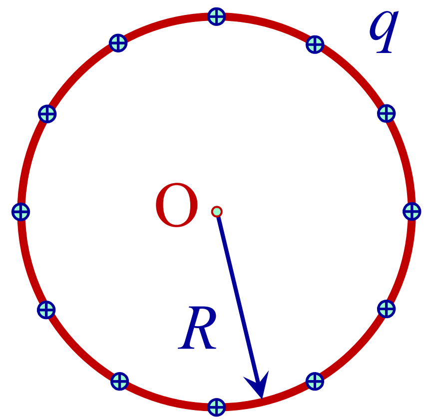
【讨论题二】q、R相同的均匀带电球面和非均匀带电球面,二者球内外的电场强度和电势分布是否相同?(设无限远处的电势为零)

解: (1) 二者球内外的电场强度分布不相同.

(2) 除球心处的电势相同外, 二者其余部分的电势分布也都不相同.

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

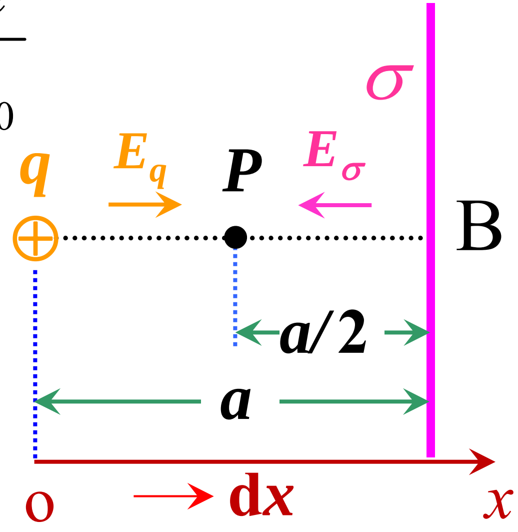




$$U = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

【讨论题三】有一无限大均匀带电平面,电荷面密度为σ,在它的附近有点电荷**q**,如图所示.有人求出**P**的电势为

$$U_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a/2}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot a/2=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}-\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}$$



这种做法对不对？为什么？

本题的错误在于电势零点不统一，

参考解答之一:

选**B**点为统一的电势零点

为什么可以选**B**点为电势零点?

$$U_P=\int_p^B \vec{E}_q\bullet d\vec{x}+\int_p^B \vec{E}_\sigma\bullet d\vec{x}$$

$$=\int_{a/2}^{a}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot\cos 0^\circ\cdot dx+\int_{a/2}^{a}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\cos\pi\cdot dx$$

$$=\int_{a/2}^{a}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot dx+\int_{a/2}^{a}(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0})\cdot dx=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

本章结束！