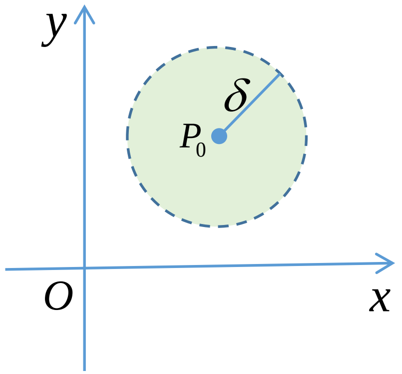
第9章（一）多元函数及其极限与连续

n 维欧氏空间

定义 称集合 $\mathrm{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in R,i=1,2,3,\cdots,n\}$ 为 n 维**欧氏空间**，其中 R^n 中两点 $P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $P_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$P_1P_2=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$



- P_0 点的 δ **邻域**： $U(P_0,\delta)=\{P\in R^n\,|P_0P<\delta\}$

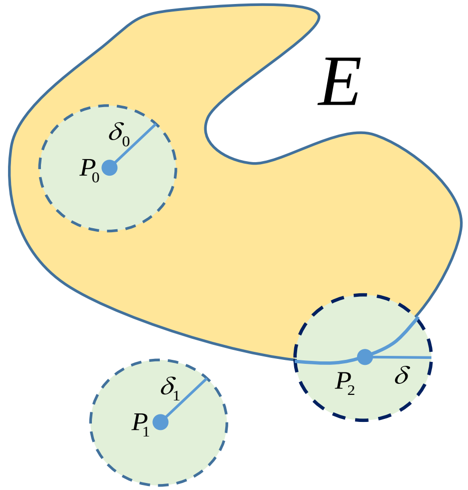
  P_0 点的 δ **去心邻域**： $U^0(P_0,\delta)=\{P\in R^n\,|\,0<P_0P<\delta\}$

- 例如二维的情形：$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\in R^2\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$

$$U^0(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\in R^2\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

n 维欧氏空间

- **内点**：$P_0\in E\subset \mathrm{R}^n$, 若 $\exists U(P_0,\delta_0)\subset E$, 则称 P_0 为 E 的**内点**.
- **外点**：$P_1\in E\subset \mathrm{R}^n$, 若 $\exists U(P_1,\delta_1)\cap E=\phi$, 则称 P_1 为 E 的**外点**.
- **边界点**：$P_2\in E\subset \mathrm{R}^n$, 若 $\forall U(P_2,\delta)$，既 $\exists P'\in U(P_2,\delta), P'\in E$, 也 $\exists P''\in U(P_2,\delta), P''\notin E$, 则称 P_2 为 E 的**边界点**.



- E 的**内部** E^0：所有 E 的内点的集合.
- E 的**外部**：所有 E 的外点的集合.
- E 的**边界** ∂E：所有 E 的边界点的集合.

- **开集**：若 $E=E^0$，则称 E 为**开集**.
- **闭集**：若 R^n-E 为开集，则称 E 为**闭集**.
- **有界集和无界集**：若 $\exists U^0(O,\delta)\supset E$，则称 E 为**有界集**；否则称为**无界集**.

多元函数的概念

定义 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，若存在对应法则 f，对任意 $P \in D$ 均有唯一的实数 z 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的 n **元函数**.

记作 $z = f(P),\ P \in D.$ 或 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$

- n 元函数也可表示为 $f: R^n \supset D \to R$ 称为 n **元数量场**.
- D 为 f 的**定义域**，集合 $R_f = \{z \mid z = f(P),\ P \in D\}$ 为 f 的**值域**.
- 二元函数 $y = f(x,y),\ (x,y) \in D$ 的图像可看作为三维空间中的一张曲面.

例： 二元函数 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的定义域是 $D = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.
其图像在 R^3 中表示半径为 2 的上半球面.

多元函数的极限

定义 设 $z=f(P)$ 在 $U^0(P_0,\delta_0)\subseteq R^n$ 有定义，若存在常数 A，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $P\in U^0(P_0,\delta)\subset U^0(P_0,\delta_0)$ 时，有 $|f(P)-A|<\varepsilon$. 则称 A 为函数 $f(P)$ 当 P 趋向于 P_0 时的极限. 记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A,\ \ P\to P_0 .$$

- 特别，对二元函数 $z=f(x,y)$，若在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限为 A, 则也可记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \iff$ P 沿着任意“路径”趋向于 P_0 时极限皆存在且相等.

多元函数极限例题

例 1 求证：$\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

证明： 由 $|xy|\le\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，有 $\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}|y|$，那么对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，

当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有 $\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$. 得证.

例 2 求证：$\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to3}} xy=6.$

证明： 限制 $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}<1$，有$1<x<3$，$2<y<4$. 又因为

$|xy-6|\le|xy-2y+2y-6|\le|y|\cdot|x-2|+2|y-3|\le8\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$，所以

对$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(1,\ \dfrac{\varepsilon}{8}\right)$，当$0<\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}<\delta$时有 $|xy-6|<\varepsilon$. 得证.

多元函数极限例题

例 3 分别讨论下列极限的存在性： (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x+y}$

解： (1) 当点 (x,y) 沿直线 $y=kx\to 0$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$.

所以当 k 不同时，极限值不同，因此原极限不存在.

(2) 当点 (x,y) 沿直线 $y=x\to 0$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}}\dfrac{x^2y}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x}=0.$

当点 (x,y) 沿曲线 $y=-x+x^3\to 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{y=-x+x^3\\ x\to 0}}\dfrac{x^2y}{x+y}=\lim\limits_{\substack{y=-x+x^3\\ x\to 0}}\dfrac{x^2(-x+x^3)}{x^3}=-1\neq 0.$

因此原极限不存在.

多元函数的连续性

定义 设 f 在 $U(P_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称 f 在点 P_0 **连续**.

特别，对二元函数 $z=f(x,y)$，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,\ y_0)$ **连续**.

- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续 $\Rightarrow$ $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 连续； $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 连续. 但反之不然.
- 若记 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，我们称

  $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 f 在 (x_0,y_0) 处的**全增量**.

  $\Delta_x z=f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=f(x+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 为 f 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的**偏增量**.

  $\Delta_y z=f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0,y+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 f 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的**偏增量**.
- **初等多元函数在其定义区域内连续.**

多元函数的极限与连续性质

- **注意：** 二元函数的二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 与

  二次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 没有必然的关系.

考察 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$ 和 $g(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, y\neq 0\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0\end{cases}$

- 在有界闭区域上连续的多元函数有与一元函数类似的性质，例如

  有界性、可取到最大最小值的性质、介值性（零点存在性）等.

谢谢！

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY