浙江大学 2005-2006 学年秋冬学期

《线性代数》课程期末考试试卷

一、计算题（每小题６分，共 36 分）

1. 行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$，（１）求Ｄ的值；（２）若记$M_{ij},A_{ij}$分别为Ｄ中元素$a_{ij}$的余子式和代数余子式，计算$2A_{11}+3M_{12}+2M_{13}-A_{14}$。

解：　（１）$D=-16$

（２）　$2A_{11}+3M_{12}+2M_{13}-A_{14}$＝$2A_{11}-3A_{12}+2A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}2&-3&2&-1\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=4$$

2. 设Ａ，Ｂ，Ｃ为三阶可逆矩阵，

（１）化简等式$(BC^T-E)^T\cdot(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$；

（２）当$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$时，求出上式结果。

解：（１）　$(BC^T-E)^T\cdot(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$

$$=[AB^{-1}(BC^T-E)]^T+[(BA^{-1})^{-1}]^T$$

$$=[AC^T-AB^{-1}]^T+[AB^{-1}]^T=CA^T$$

（２）　上式$=CA^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&1&4\\1&2&2\end{pmatrix}$

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，$A^*$为其伴随矩阵，已知$r(A^*)=1$，求$a$。

解：由于$r(A^*)=1$，因此有$r(A)=n-1=2$。

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-a-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$\therefore\begin{cases} 2-a-a^2=0 \\ a-1\neq 0 \end{cases}\quad\Rightarrow a=-2$。

4. 设α,β为n维欧氏空间中两个向量，且模$\|\alpha\|=2,\|\beta\|=4$，求内积

$(4\alpha-3\beta,4\alpha+3\beta)$。

解：$(4\alpha-3\beta,4\alpha+3\beta)=(4\alpha,4\alpha)+(4\alpha,3\beta)+(-3\beta,4\alpha)+(-3\beta,3\beta)$

$=16(\alpha,\alpha)-9(\beta,\beta)$＝-80

5. 设二阶矩阵A有特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2$，求行列式$|A^2-3A+4E|$的值；

解：　$f(A)=A^2-3A+4E$的特征值为$f(1)=(1)^2-3(1)+4=2$，

$f(1)=(2)^2-3(2)+4=2$。　因此　$|A^2-3A+4E|$＝4。

6. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，已知$\lambda=2$是A的二重特征根，且A有三个线性无关的特征向量，求实数x， y。

解：因为$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+5=10$，所以$\lambda_3=6$。由于A有三个线性无关的特征向量，所以当$\lambda=2$时，$\dim(W_\lambda)=2$，而$\dim(W_\lambda)=3-r(2E-A)$。

由于$2E-A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

于是　$x-2=0,x+y=0\Rightarrow x=2,y=-2$

二、 （12 分）设非齐次线性方程组ＡＸ＝Ｂ的增广矩阵$\overline{A}$经初等行变换化为

$\overline{A}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a+1&a+1&b-2\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$,讨论当$a,b$取何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解；当有无穷多解时，求出其通解。

解：

１）当$a+1\neq 0$时，方程组有惟一解；

２）当$a+1=0,\text{and } b-2\neq 0$时，方程组无解；

３）当$a+1=0,\text{and } b-2=0$时，$r(A)=r(\overline{A})=2<4$,方程组有无穷多解。

此时

$$\overline{A}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

转化为方程组

$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$ 令$t_1=x_3,t_2=x_4$,则

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

三、 （10 分）求向量组$\alpha_1=(1,0,5,2)^T,\alpha_2=(3,-2,3,-4)^T,\alpha_3=(-1,1,1,3)^T$的秩，极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示。

解： $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&1\\2&-4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&-12&6\\0&-10&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此向量组的秩为 2，极大线性无关组为α_1,α_3（其中一组）。

则 $\alpha_2=\alpha_1-2\alpha_3$。

四、 （12 分）设在向量空间R^3中有两组基：

（Ⅰ）$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(1,1,0)^T,\varepsilon_3=(1,1,1)^T$

（ⅠⅠ）$\eta_1=\varepsilon_2,\eta_2=\varepsilon_3-\varepsilon_1,\eta_3=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$，

求 （1）基（Ⅰ）到基（ⅠⅠ）的过渡矩阵M；

（2）若α在基（Ⅰ）下的坐标为$X=(1,0,2)^T$,求α在基（ⅠⅠ）下的坐标Y；

（3）求在上述两组基下具有相同坐标的向量。

解：（1）$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_2,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，

则过渡矩阵为$M=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$。

（2） $X=MY \quad \Rightarrow Y=M^{-1}X$

$$(M,X)=\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\1&0&-1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&2&3\\1&0&-1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

所以 $Y=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)^T$。

(3) $X=MX \quad \Rightarrow (M-E)X=0$

$$M-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，则 $X=k(1,0,1)^T$。

于是得到在上述两组基下有相同坐标的向量为

$$\beta=k(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=k(2,1,1)^T$$。

五、(14 分) 设有三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+6x_1x_2+6x_1x_3+x_2{}^2+x_3{}^2+6x_2x_3$，

(1) 写出 f 的矩阵 A；

(2) 用正交变换化 f 为标准形，写出所用的正交变换阵和标准形。

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&3\\3&3&1\end{pmatrix}$$ 特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-2,\lambda_3=7$

正交变换阵为 $$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

标准形 $-2y_1{}^2-2y_2{}^2+7y_3{}^2$。

六、(12 分) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&5\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

问：(1) t 取值范围如何时，A 是正定矩阵？

（２） ｔ取何值时，Ａ与Ｂ等价？

（３） ｔ取何值时，Ａ与Ｃ相似？

（４） ｔ取值范围如何时，Ａ与Ｄ在实数域合同？并分别简单说明理由。

解：（１）因为Ａ是正定阵，所以Ａ的顺序主子式均大于零。

由此可以推出 $t>0$。

（２）Ａ与Ｂ等价，推出Ａ，Ｂ的秩相同。经过计算可知

ｒ（Ａ）＝ｒ（Ｂ）＝２。推出ｔ＝ 0。

（３）Ａ与Ｃ相似, 推出迹相同。推出ｔ＝５。

（４）Ａ与Ｄ在实数域合同，推出有相同的秩和正惯性指数。

$$\left|\lambda E-D\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-2\lambda-1]=(\lambda-2)[(\lambda-1)^2-2]$$

$\Rightarrow \lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{2},\lambda_3=1-\sqrt{2}$。 即知 $r(D)=3,p=2$。

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-t\end{vmatrix}=(\lambda-t)[(\lambda-2)^2-1]$$

$\Rightarrow \lambda_1=t,\lambda_2=1,\lambda_3=3$

由于 $r(A)=3,p=2$，因此 $t<0$。

七、(4分)设α,β为ｎ维单位正交列向量,矩阵$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$,求证$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$都是A的特征向量，并分别求出它们对应的特征值。

证明：因为α,β为ｎ维单位正交列向量，所以$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0$，$\alpha^T\alpha=\beta^T\beta=1$。

$$A(\alpha+\beta)=\left(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right)(\alpha+\beta)$$

$$=\left(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right)\alpha+\left(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right)\beta$$

$$=\left(\alpha\beta^T\alpha+\beta\alpha^T\alpha\right)+\left(\alpha\beta^T\beta+\beta\alpha^T\beta\right)$$

$$=\beta+\alpha$$

因此　$\beta+\alpha$是Ａ的属于特征值１的特征向量。类似地

$$A(\alpha-\beta)=\left(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right)(\alpha-\beta)$$

$$=\left(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right)\alpha-\left(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right)\beta$$

$$=\left(\alpha\beta^T\alpha+\beta\alpha^T\alpha\right)-\left(\alpha\beta^T\beta+\beta\alpha^T\beta\right)=\beta-\alpha$$

因此　$\alpha-\beta$是Ａ的属于特征值－１的特征向量。