期末复习题八答案

2020年1月4日 星期六　　上午3:24

1. 解:
$$\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1\\ 1&3&1&1&1\\ 1&1&4&1&1\\ 1&1&1&5&1\\ 1&1&1&1&6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4-R_1\\ R_5-R_1}]{\substack{R_2-R_1\\ R_3-R_1}} \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1\\ -1&2&0&0&0\\ -1&0&3&0&0\\ -1&0&0&4&0\\ -1&0&0&0&5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1+\frac{1}{4}C_4\\ C_1+\frac{1}{5}C_5}]{\substack{C_1+\frac{1}{2}C_2\\ C_1+\frac{1}{3}C_3}} \begin{vmatrix} 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}&1&1&1&1\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&3&0&0\\ 0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&5 \end{vmatrix}$$

$$=5!\times\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=394$$

2. (1) 因为 $A^3+A+E=(A+2E)(A^2-2A+5E)-9E=0$

$\Rightarrow (A+2E)(A^2-2A+5E)=9E$

$\Rightarrow (A+2E)\cdot\left[\frac{1}{9}(A^2-2A+5E)\right]=E$

$\Rightarrow A+2E$ 可逆且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{9}(A^2-2A+5E)$

(2) 因为 $|A|=10$，故 A 可逆，又由于 $AA^*=|A|E$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&c&c\\1&c&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&c&c\\0&c-2&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&c&c\\0&0&-(c-1)^2&-(c-1)^2\end{pmatrix}$$

由于系数矩阵的秩为2 $\Rightarrow c-1=0\Rightarrow c=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3\\ x_2=-x_3-x_4\end{cases}$$

故基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,1,0)^T$，$\alpha_2=(0,-1,0,1)^T$

通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 其中 k_1,k_2 为任意常数

4. (1) $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

则过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\delta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3})^T$

(3) 根据观察 $\varepsilon=(1,0,0)^T$

在 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 和 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 下坐标均为 $(1,0,0)^T$

故 $\varepsilon=(1,0,0)^T$ 符合条件

5. 因为A的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1+a & -a \\ -b & \lambda-1+b \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-1+a+b)$

特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1-a-b$

$\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=1-a-b$ 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ $P^{-1}=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$, $A^n=P\Lambda^n P^{-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} A^n=P(\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda^n)P^{-1}=P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}\right)P$

$$= P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b&a\\b&a\end{pmatrix}$$

6. 证明:(1) $\forall A,B\in S(R^{n\times n})$,则 A,B是对称的实矩阵,我们有

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B \quad , \quad (CA)^T=c(A^T)=cA$$

即 $S(R^{n\times n})$关于矩阵的加法及数乘运算封闭,它是$R^{n\times n}$的一个子空间

因此,它关于矩阵的加法和数乘构成R上的线性空间

(2) $\dim S(R^{n\times n})=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

基可取为 $E_{ii}(1\le i\le n)$, $E_{ij}+E_{ji}(1\le i<j\le n)$

对于$\forall A\in S(R^{n\times n})$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\cdot E_{ii}+\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}\cdot(E_{ij}+E_{ji})$$

故原命题得证

(3) 该函数是$S(R^{n\times n})$上的内积函数,因为它具备

对称性: $\forall A,B\in S(R^{n\times n})$, $(A,B)=tr(AB)=tr(BA)=(B,A)$

线性性: $\forall A,B,C\in S(R^{n\times n})$, $\forall K\in R$

$$\begin{aligned}(A+KB,C)&=tr((A+KB)C)\\&=tr(AC)+tr(KBC)\\&=tr(A,C)+K\,tr(BC)\\&=(A,C)+K\cdot(B,C)\end{aligned}$$

正定性: $\forall A\in S(R^{n\times n})$, $tr(A^2)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}^2=0$

且 $(A,A)=0\Rightarrow \forall i,j,\ a_{ij}=0\Rightarrow A=0$

故这是内积运算

(4) $$A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_{ii}+\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}(E_{ij}+E_{ji})$$

$$B=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}E_{ii}+\sum_{1\le i<j\le n}b_{ij}\cdot(E_{ij}+E_{ji})$$

$$B=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}E_{ii}+\sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}\cdot(E_{ij}+E_{ji})$$

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii}+\sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}b_{ij}$$

综上 $(A,B)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii}+2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}b_{ij}$

7. 由于 A为正定, B为正定

$\exists$可逆矩阵 P, $A=PP^T$, $B=QQ^T$, $D=P^{-1}B(P^T)^{-1}=P^{-1}QQ^T(P^T)^{-1}=(P^{-1}Q)\cdot(P^{-1}Q)^T \Rightarrow D$为正定

$|A+B|=|PP^T+B|=|P|\cdot|E+D|\cdot|P^T|=|A|\cdot|E+D|$

而 $|B|=|A|\cdot|D|$, 且D为正定, 设D的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$

故 $|E+D|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\geq 1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|E|+|D|$

则 $|A+B|=|A|\cdot|E+D|\geq|A|\cdot(|E|+|D|)=|A|+|B|$ 得证