电路分析与电子技术基础

动态电路的暂态分析

（7.1～7.5）

n 暂态分析

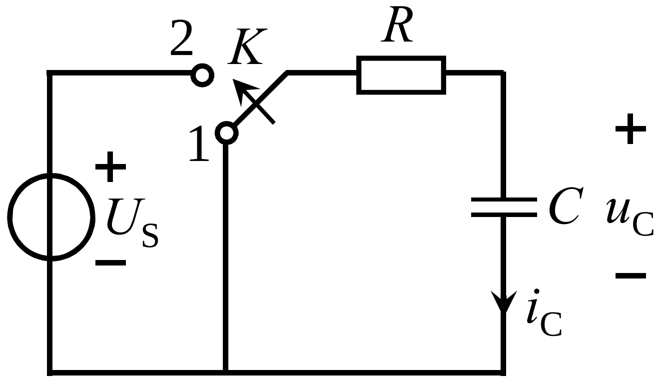
ü 针对含有储能元件 L 、C 的动态电路，分析换路过程中的过渡现象。

- v 动态电路（7.1.1）
- v 动态电路分析（换路定则）（7.1.2 ~ 7.1.3）
- v 一阶动态电路（7.2 ~ 7.3）

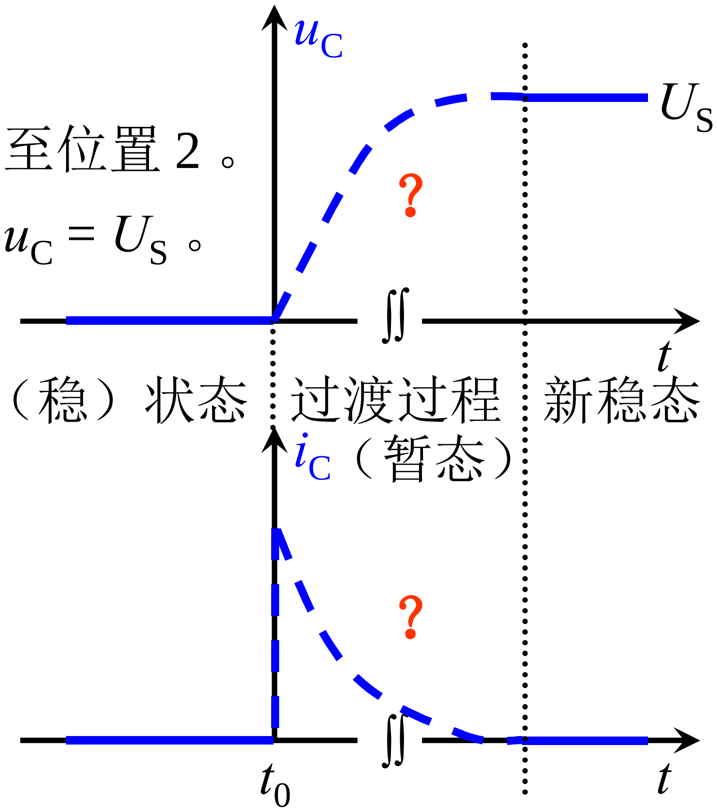
  零输入响应、零状态响应、全响应（三要素法）
- v 二阶动态电路（7.4）
- v 单位阶跃响应（7.5.1）

v 动态电路

Ø 动态电路（例）



- 右图所示电路。
- 定义 $t = t_0$ 时刻之前，开关 K 处于位置 1 。
  此时：$i_C = 0$， $u_C = 0$ 。
- 定义 $t = t_0$ 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。
  那么，经过足够长的时间后： $i_C = 0$， $u_C = U_S$ 。
- 中间的一段时间？



Ø 动态电路

- ü 动态电路：含有动态（储能）元件（L、C）的电路。

- ü 换路：电路状态的改变，包括开关动作、电路结构或参数变化、激励的骤然变化等。

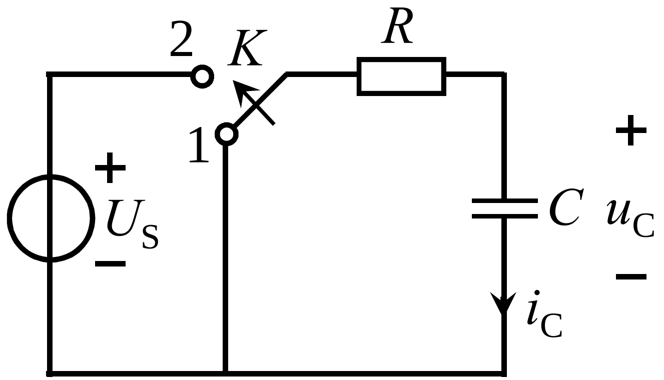
  换路时刻 t_0 、换路前瞬间 t_{0-} 、换路后瞬间 t_{0+} 。

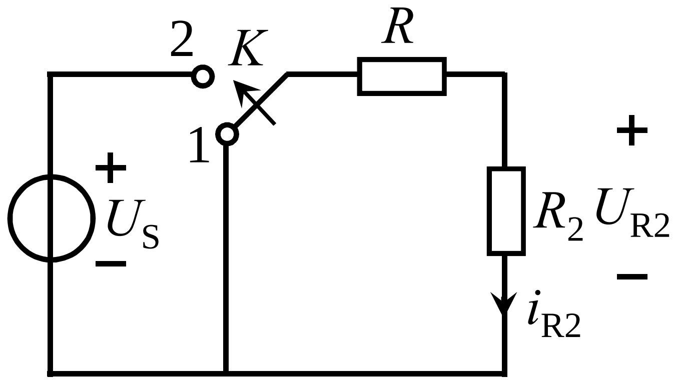
- ü 动态电路换路后，需要经历一个变化（过渡、瞬态）过程才能达到新的稳态。

Ø 动态电路（过渡过程）

- ü 描述过渡过程的电路方程：微分方程。

  （纯电阻电路，没有过渡过程，用代数方程即可）





微分方程：$U_S = RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C$　　代数方程：$U_S = (R + R_2) \cdot i_{R2}$

- ü 过渡过程的产生原因：电路内部含有储能元件。

  （能量的储存和释放都需要一定的时间来完成）

  （能量的突变意味着无穷大功率：$p = \dfrac{dw}{dt} \to \infty$）

Ø 动态电路（分析过程）

- ü 激励：外界对电路的输入，即输入（信号）。

- ü 响应：电路在激励作用下所产生的电流或电压，即输出（信号）。

- ü 强制（强迫）状态：一个稳定电路系统在激励作用下，经过相当长时间后所建立的状态，其对应的响应称为强制（强迫）响应。

- ü 稳定状态（稳态）：激励是恒定（直流）的，或随时间作周期性变化（如正弦交流）时的强制状态，其对应的响应称为稳态响应。

- ü 过渡过程（瞬态）：由于换路，动态电路从初始状态到强制状态期间，电压、电流的变化过程。

Ø 动态电路（分析过程）

- ü 稳态：描述换路发生相当长时间后的强制状态（恒定或周期性激励）。
- ü 瞬态：描述换路后的所有变化过程（任意激励）
- ü 描述过渡过程（瞬态）的电路方程：微分方程。
- ü 微分方程的特解：稳态；
  微分方程的全解：瞬态。

- 动态电路分析

Ø 换路定则

ü 定义换路时刻： $t = 0$ 。

ü 独立初始条件：电容电压 u_C 和电感电流 i_L 的初始值 $u_C(0+)$ 、$i_L(0+)$ 。
（非独立的初始条件 ... ）

ü 换路时，独立初始条件服从换路定则。

Ø 换路定则（电容元件）

ü 换路瞬间（从 0- 到 0+）：

若电容电流 i_C 为有限值，则电容电压 u_C（电容电荷 q_C）不能突变。

$$u_C(0+) = u_C(0-)，\ q_C(0+) = q_C(0-)$$

ü 简单证明

由于：$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(t)dt$$

在 0+ 时刻，

$$u_C(0+) = u_C(0-) + \frac{1}{C}\int_{0-}^{0+} i_C(t)dt$$

当电容电流 i_C 为有限值时，上式中的积分为零：$\frac{1}{C}\int_{0-}^{0+} i_C(t)dt = 0$

所以：$$u_C(0+) = u_C(0-)$$

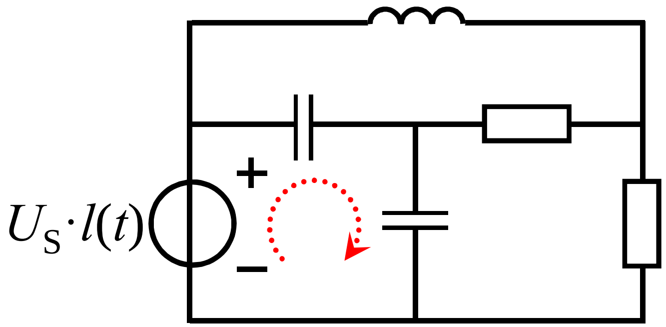
同理：$$q_C(0+) = q_C(0-)$$ （电荷守恒）

Ø 换路定则（电容元件）

ü 电容电流 i_C 的有限值判断：

如果电路中没有：
（1）纯电容回路；
（2）电容、电压源组成的回路；
（3）无穷大电源。

则电容电压不会突变。



Ø 换路定则（电感元件）

ü 换路瞬间（从 0- 到 0+）：

若电感电压 u_{L} 为有限值，则电感电流 i_{L}（电感磁链 Ψ_{L}）不能突变。

$$i_{\mathrm{L}}(0+) = i_{\mathrm{L}}(0-),\quad \psi_{\mathrm{L}}(0+) = \psi_{\mathrm{L}}(0-)$$

ü 简单证明

由于：

$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_{\mathrm{L}}(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_{\mathrm{L}}(t)dt$$

在 0+ 时刻，

$$i_{\mathrm{L}}(0+) = i_{\mathrm{L}}(0-) + \frac{1}{L}\int_{0-}^{0+} u_{\mathrm{L}}(t)dt$$

当电感电压 u_{L} 为有限值时，上式中的积分为零：$\frac{1}{L}\int_{0-}^{0+} u_{\mathrm{L}}(t)dt = 0$

所以：$i_{\mathrm{L}}(0+) = i_{\mathrm{L}}(0-)$

同理：$\psi_{\mathrm{L}}(0+) = \psi_{\mathrm{L}}(0-)$（磁链守恒）

Ø 换路定则（电感元件）

ü 电感电压 u_L 的有限值判断：

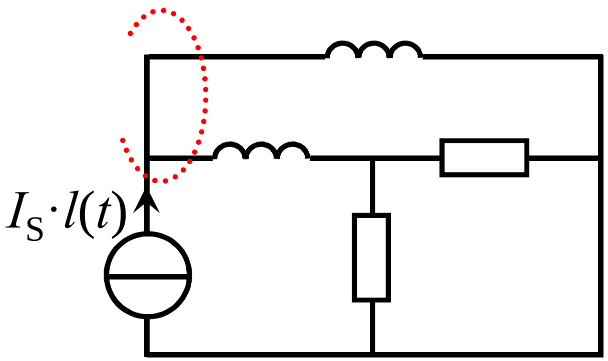
如果电路中没有：

（1）纯电感割集；

（2）电感、电流源组成的割集；

（3）无穷大电源。

则电感电流不会突变。



Ø 换路定则（参数计算）

ü 独立初值：$u_C(0+)$、$i_L(0+)$

（1）根据 0- 时刻电路，计算得 $u_C(0-)$、$i_L(0-)$；

（2）根据换路定则， $u_C(0+) = u_C(0-)$、$i_L(0+) = i_L(0-)$ 。

ü 第一类非独立初值：

除 $u_C(0+)$、$i_L(0+)$ 以外的电压、电流初值，以及$\frac{du_C}{dt}(0+)$、$\frac{di_L}{dt}(0+)$

根据 0+ 时刻电路，利用独立初值求解。

（电容用电压为 $u_C(0+)$ 的电压源，电感用电流为 $i_L(0+)$ 的电流源代替）

ü 第二类非独立初值：

除上述独立初值、第一类非独立初值外的其他初值。

根据 0+ 时刻后电路，通过建立微分方程求解。

【例6.1】

右图所示电路。

已知：$U_S = 6\text{V}$，$R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 5\Omega$，
$L = 1\text{H}$，$C = 1\mu\text{F}$。

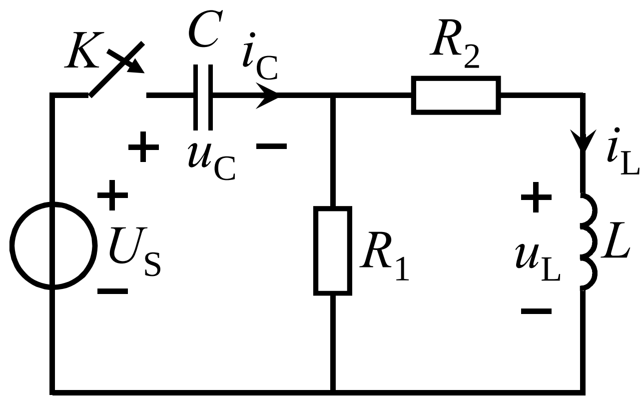
求：① $u_C(0+)$，$i_L(0+)$；

② $i_C(0+)$，$u_L(0+)$，

$\dfrac{du_C}{dt}(0+)$，$\dfrac{di_L}{dt}(0+)$；

③ $\dfrac{di_C}{dt}(0+)$，$\dfrac{du_L}{dt}(0+)$，

$\dfrac{d^2 i_L}{dt^2}(0+)$，$\dfrac{d^2 i_C}{dt^2}(0+)$。

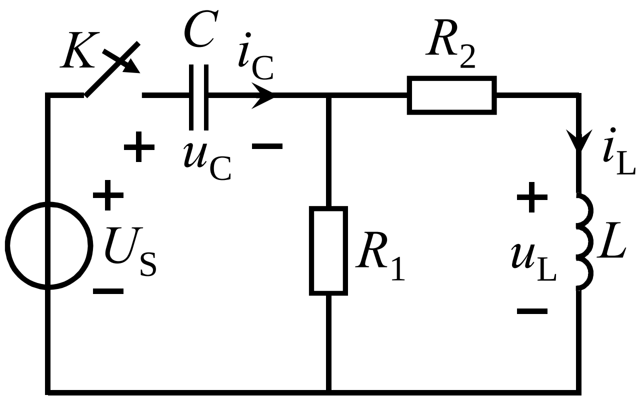


解：（1）独立初值

（2）第一类非独立初值

（3）第二类非独立初值

解：（1）独立初值 $u_C(0+)$，$i_L(0+)$



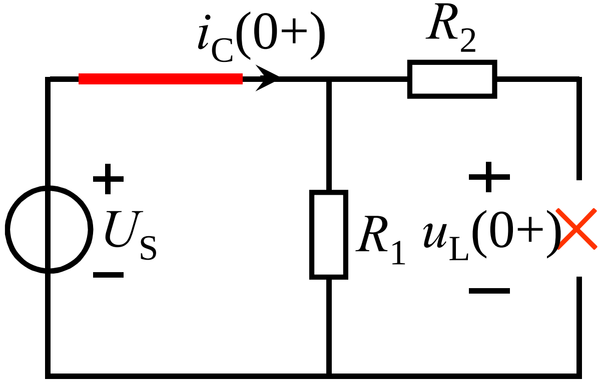
$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0\text{V}$$
$$i_L(0+) = i_L(0-) = 0\text{A}$$

（2）第一类非独立初值

$$i_C(0+)，\ u_L(0+)，\ \frac{du_C}{dt}(0+)，\ \frac{di_L}{dt}(0+)$$

（根据 0+ 时刻电路，利用独立初值求解）

（$u_C(0+)$ 电压源、 $i_L(0+)$ 电流源 ...）



$$i_C(0+) = \frac{U_S}{R_1} = \frac{6}{10} = 0.6\text{A}$$

$$u_L(0+) = U_S = 6\text{V}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = \frac{0.6}{1\mu} = 6\times10^5\ \text{V}/\text{s}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

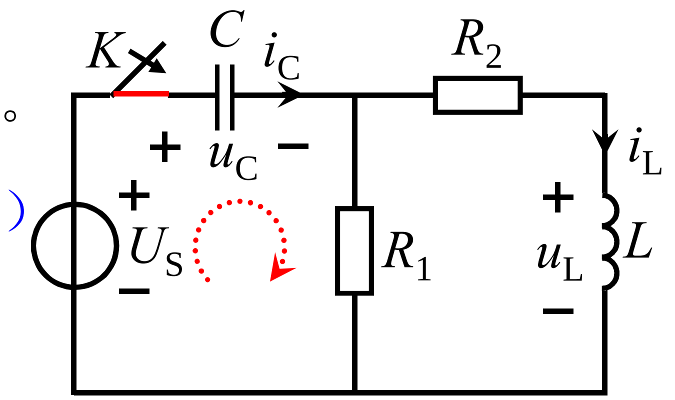
$$\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = \frac{6}{1} = 6\ \text{A}/\text{s}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

解：（3）第二类非独立初值

$\dfrac{di_C}{dt}(0+)$，$\dfrac{du_L}{dt}(0+)$，$\dfrac{d^2 i_L}{dt^2}(0+)$，$\dfrac{d^2 i_C}{dt^2}(0+)$。

（根据 0+ 时刻后电路，通过微分方程求解）



由电路图，得：$u_C + (i_C - i_L)R_1 = U_S$

$u_C(0+)$，$i_L(0+)$

$i_C(0+)$，$u_L(0+)$，$\dfrac{du_C}{dt}(0+)$，$\dfrac{di_L}{dt}(0+)$

求导：$\dfrac{du_C}{dt} + (\dfrac{di_C}{dt} - \dfrac{di_L}{dt})R_1 = 0$

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{du_C}{dt}$$

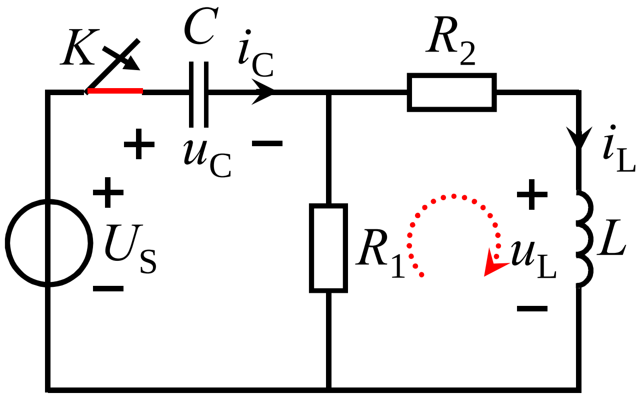
所以：$\dfrac{di_C}{dt}(0+) = \dfrac{di_L}{dt}(0+) - \dfrac{1}{R_1}\cdot\dfrac{du_C}{dt}(0+)$

$$= 6 - \frac{1}{10}\times 6\times 10^5 \approx -6\times 10^4 \ \mathrm{A/s}$$

根据电容回路 KVL 方程

解：（3）第二类非独立初值

$\frac{di_C}{dt}(0+)$，$\frac{du_L}{dt}(0+)$，$\frac{d^2 i_L}{dt^2}(0+)$，$\frac{d^2 i_C}{dt^2}(0+)$。



（根据 0+ 时刻后电路，通过微分方程求解）

由电路图，得：$i_L R_2 + u_L - (i_C - i_L)R_1 = 0$

$u_C(0+)$，$i_L(0+)$

整理并求导：$i_L(R_1 + R_2) - i_C R_1 + u_L = 0$

$i_C(0+)$，$u_L(0+)$，$\frac{du_C}{dt}(0+)$，$\frac{di_L}{dt}(0+)$

$$\frac{di_L}{dt}(R_1 + R_2) - \frac{di_C}{dt}R_1 + \frac{du_L}{dt} = 0$$

所以：$\frac{du_L}{dt}(0+) = -(R_1 + R_2)\cdot\frac{di_L}{dt}(0+) + R_1\cdot\frac{di_C}{dt}(0+)$

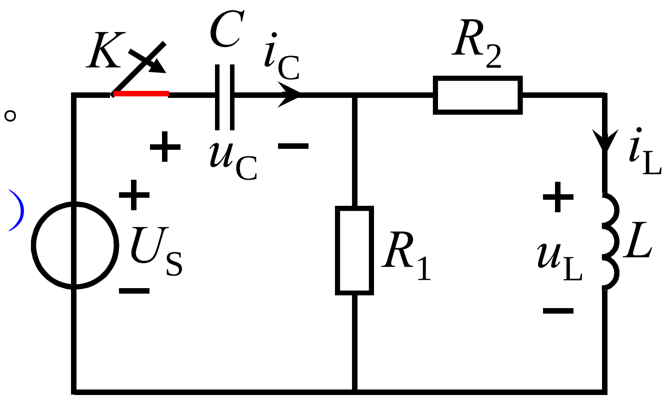
$$\approx -6\times 10^5\ \mathrm{V}/\mathrm{s}$$

根据电感回路 KVL 方程

解：（3）第二类非独立初值

$\frac{di_C}{dt}(0+)$，$\frac{du_L}{dt}(0+)$，$\frac{d^2i_L}{dt^2}(0+)$，$\frac{d^2i_C}{dt^2}(0+)$。

（根据 0+ 时刻后电路，通过微分方程求解）



$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

根据：$\frac{d^2i_L}{dt^2} = \frac{1}{L}\cdot\frac{du_L}{dt}$

得：$\frac{d^2i_L}{dt^2}(0+) = \frac{1}{L}\cdot\frac{du_L}{dt}(0+) \approx -6\times10^5\ \mathrm{A}/\mathrm{s}^2$

根据：$\frac{di_C}{dt} = \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{du_C}{dt}$ ，$\frac{d^2u_C}{dt^2} = \frac{1}{C}\cdot\frac{di_C}{dt}$

得：$\frac{d^2i_C}{dt^2}(0+) = \frac{d^2i_L}{dt^2}(0+) - \frac{1}{R_1C}\cdot\frac{di_C}{dt}(0+)$

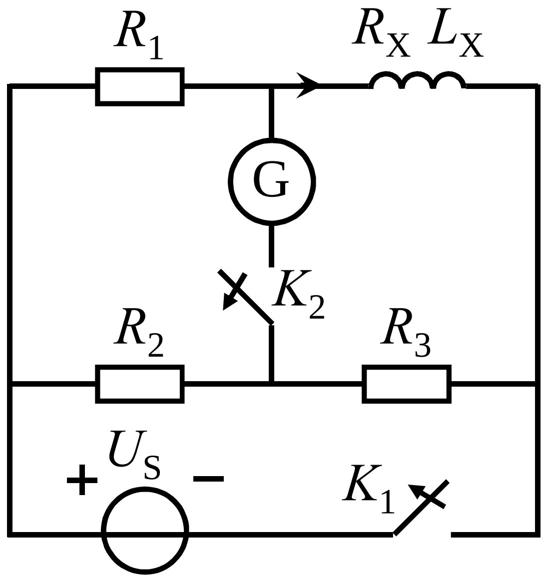
$$\approx 6\times10^9\ \mathrm{A}/\mathrm{s}^2$$

【例6.2】

右图所示电路。

已知：$U_S = 3V$，检流计内阻 $R_G = 200\Omega$，
$R_1 = 12\Omega$，$R_2 = 150\Omega$，$R_3 = 200\Omega$；
当电桥平衡时测得 $R_X = R_1R_3 / R_2$ 。

问：测完后应如何操作 K_1K_2 ，
才能保证瞬时检流计 G 不超过量程？
（最大量程为50μA ）



解：根据电桥平衡：$R_X = \dfrac{R_1R_3}{R_2} = \dfrac{12\times200}{150} = 16\Omega$

所以：

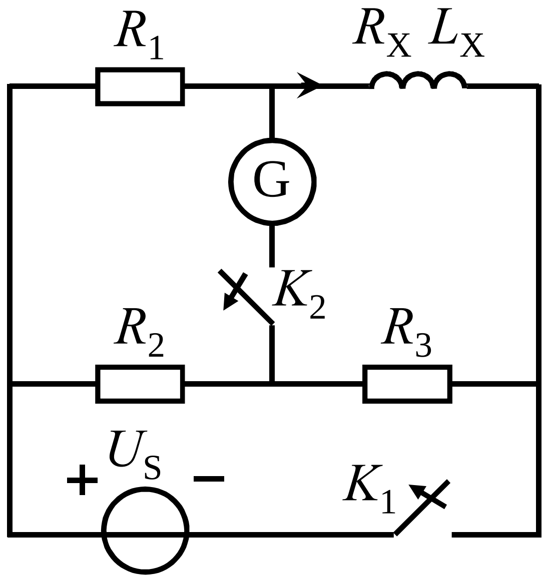
$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{U_S}{R_1 + R_X} = \frac{3}{12+16} = 0.107A$$

解：若先断 K_1 再断 K_2 （右下图）

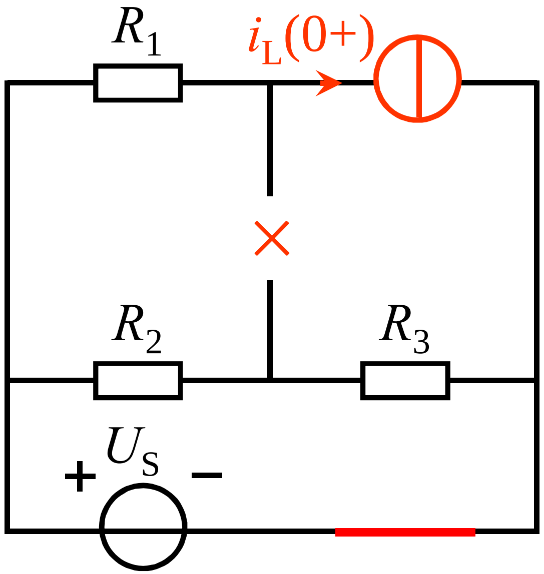
$$i_G(0+) = i_L(0+)\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_G}$$

$$= 0.107\times\frac{12+150}{12+150+200}$$

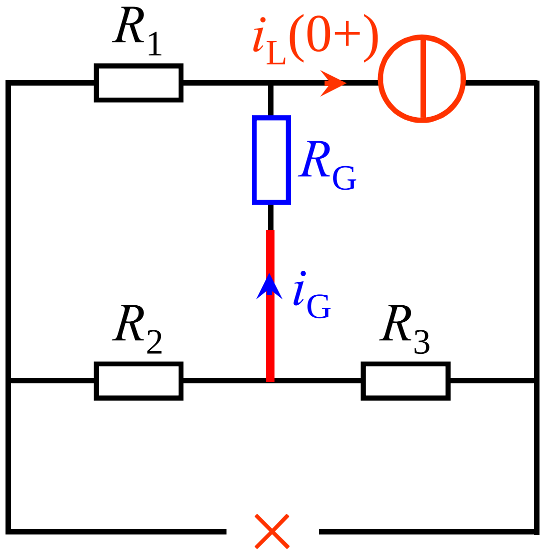
$$\approx 47884\,\mu\text{A}$$



若先断 K_2 再断 K_1（下图）

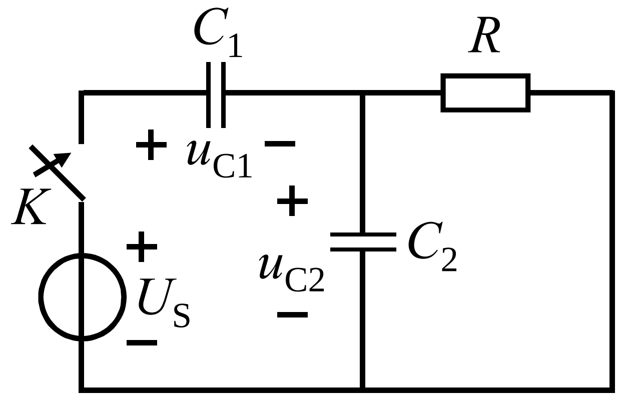


（安全）



（不安全）

Ø 一阶奇异电路（电容电压突变）



ü 电容电流 i_C 非有限值时：
（1）纯电容回路；
（2）电容、电压源组成的回路；
（3）无穷大电源。
则电容电压会突变。

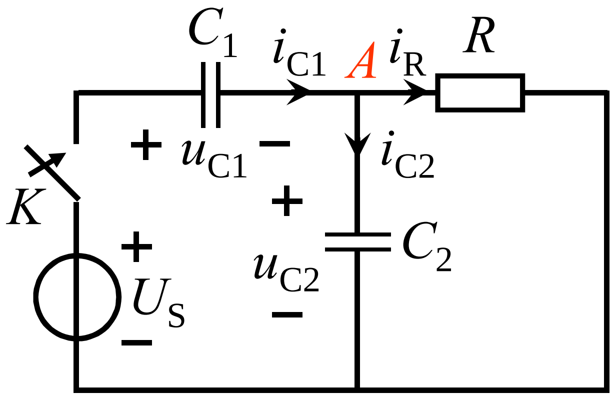
ü 右上图所示电路。
定义 $t = 0$ 时刻合上开关 K，且电容电压初值分别为 $u_{C1}(0\text{-})$、$u_{C2}(0\text{-})$。
根据 0+ 时刻电路（并依据原换路定则），有：

$$u_{C1}(0+) + u_{C2}(0+) = u_{C1}(0-) + u_{C2}(0-) = U_S$$

ü 问题：上（后半）式一定能永远成立吗？
结论：否，$u_{C1}(0\text{-})$、$u_{C2}(0\text{-})$ 与 U_S 是独立的。

所以，电容电压将发生突变。

Ø 一阶奇异电路（求解突变电容电压）



ü 针对节点 A，有： $-i_{C1}+i_{C2}=-i_R$

可推导获得：
$$-\frac{dq_1}{dt}+\frac{dq_2}{dt}=-i_R$$
$$\int_{0-}^{0+}\frac{d}{dt}(-q_1+q_2)dt=\int_{0-}^{0+}-i_R\,dt$$
$$[-q_1(0+)+q_2(0+)]-[-q_1(0-)+q_2(0-)]=0$$

ü 说明：从 0- 至 0+，节点电荷守恒（电荷代数和在换路前后恒定）。

$$\sum q_n(0+)=\sum q_n(0-) \quad 或 \quad \sum C_n u_{Cn}(0+)=\sum C_n u_{Cn}(0-)$$

（若与节点相连的是电容正极板，则电荷为正，否则取负）

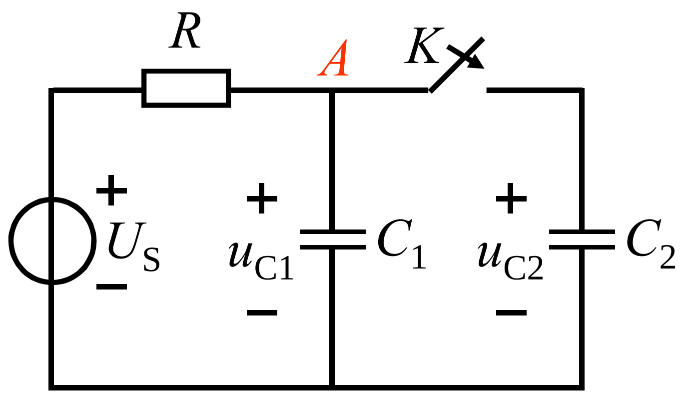
ü 求解思路：
$$\begin{cases}-C_1u_{C1}(0+)+C_2u_{C2}(0+)=-C_1u_{C1}(0-)+C_2u_{C2}(0-)\\ u_{C1}(0+)+u_{C2}(0+)=U_S\end{cases}$$

【例6.3】

右下图所示电路。

已知：$U_S = 1\text{V}$，$R = 1\Omega$，$C_1 = 0.25\mu\text{F}$，$C_2 = 0.5\mu\text{F}$ 。

求：$t = 0$ 时刻闭合 K 后瞬间的 $u_{C1}(0+)$ 、$u_{C2}(0+)$。



解：闭合 K 前的电容电压分别为：

$$u_{C1}(0-) = U_S = 1\text{V}，\ u_{C2}(0-) = 0\text{V}$$

闭合 K 后的电容电压为：

$$u_{C1}(0+) = u_{C2}(0+) = u_C(0+)$$

根据（A 点）：$\begin{cases} C_1 u_{C1}(0+) + C_2 u_{C2}(0+) = C_1 u_{C1}(0-) + C_2 u_{C2}(0-) \\ u_{C1}(0+) = u_{C2}(0+) = u_C(0+) \end{cases}$

可解得：$u_C(0+) = \dfrac{1}{3}\text{V}$

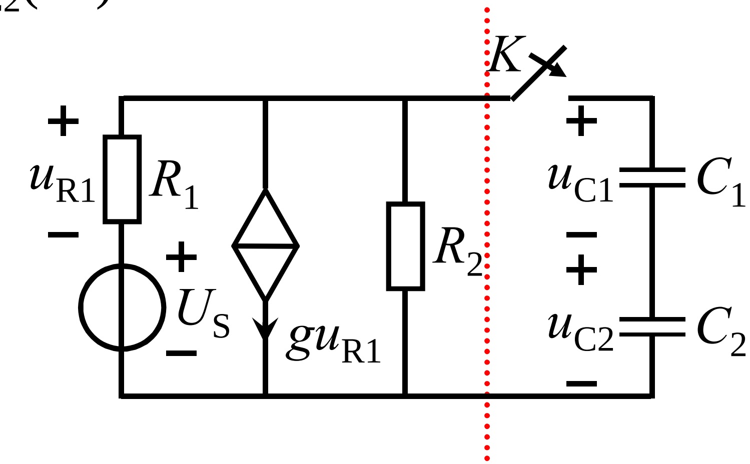
即：$u_{C1}(0+) = u_{C2}(0+) = \dfrac{1}{3}\text{V}$

【例6.4】

右下图所示电路。

已知电路各器件参数（电容原初始电压为零）。

求：$t = 0$ 时刻闭合 K 后瞬间的 $u_{C1}(0+)$ 、$u_{C2}(0+)$。

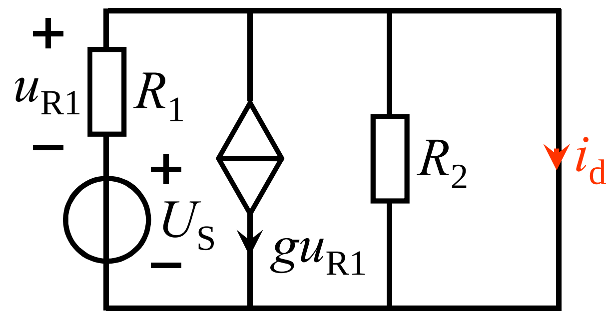


解：首先对电路作戴维宁等效。

由电路，得：$u_{R1} + U_S = R_2(-\dfrac{u_{R1}}{R_1} - gu_{R1})$

（戴维宁）开路电压为：$u_d = u_{R1} + U_S$

右示求解（戴维宁）短路电流的电路图。



由电路，得：$u_{R1} + U_S = 0$

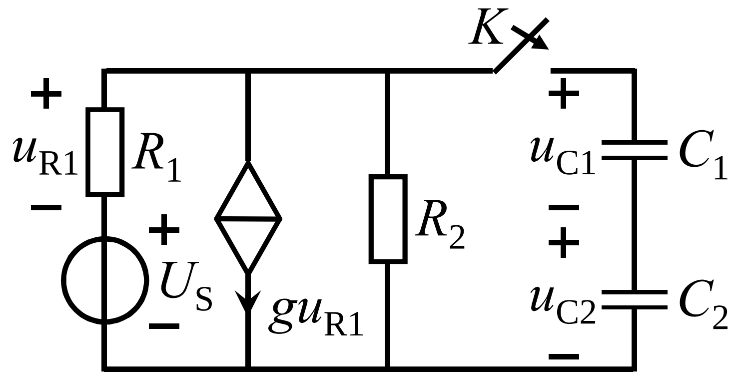
（戴维宁）短路电流为：$i_d = -\dfrac{u_{R1}}{R_1} - gu_{R1}$

（戴维宁）等效电阻：$R_d = \dfrac{u_d}{i_d} = \mathbf{L}$

右下图所示电路。

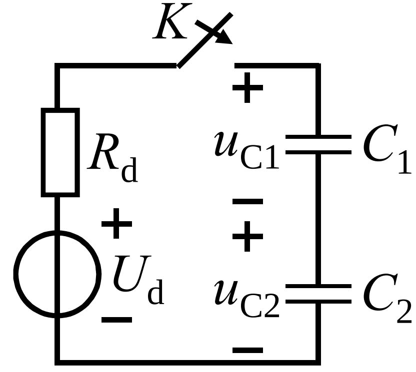
已知电路各器件参数（电容原初始电压为零）。

求：$t = 0$ 时刻闭合 K 后瞬间的 $u_{C1}(0+)$、$u_{C2}(0+)$。



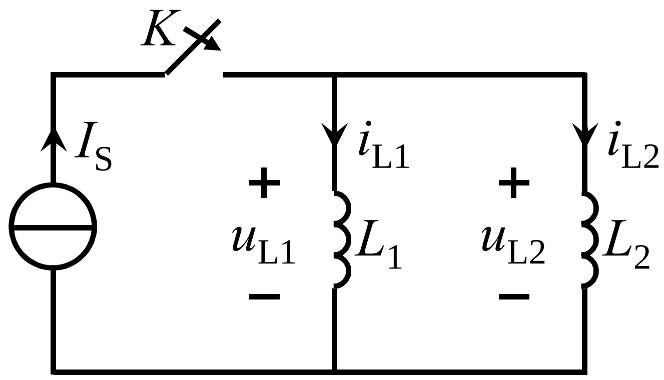
解：戴维宁等效电路如右下所示。

$$\begin{cases} u_{C1}(0+) = u_{C1}(0-) = 0\text{V} \\ u_{C2}(0+) = u_{C2}(0-) = 0\text{V} \end{cases}$$



Ø 一阶奇异电路（电感电流突变）

ü 电感电压 u_L 非有限值时：
（1）纯电感割集；
（2）电感、电流源组成的割集；
（3）无穷大电源。
则电感电流会突变。



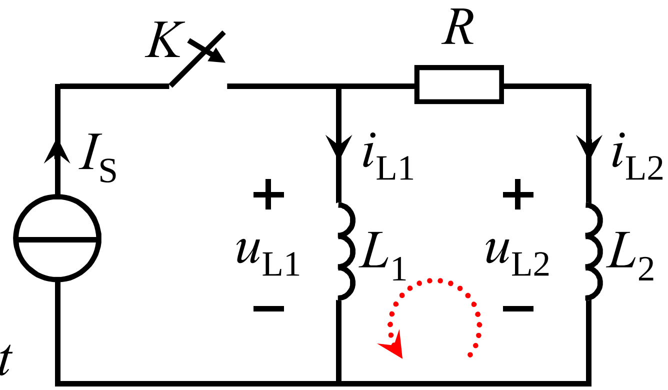
ü 右上图所示电路。
定义 $t = 0$ 时刻合上开关 K，且电感电流初值分别为 $i_{L1}(0\text{-})$、$i_{L2}(0\text{-})$。
根据 0+ 时刻电路（并依据原换路定则），有：

$$i_{L1}(0+) + i_{L2}(0+) = i_{L1}(0-) + i_{L2}(0-) = I_S$$

ü 问题：上（后半）式一定能永远成立吗？
结论：否，$i_{L1}(0\text{-})$、$i_{L2}(0\text{-})$ 与 I_S 是独立的。

所以，电感电流将发生突变。

Ø 一阶奇异电路（求解突变电感电流）



ü 针对回路，有：$u_{L1}-u_{L2}=Ri_{L2}$

可推导获得：$\dfrac{d\psi_1}{dt}-\dfrac{d\psi_2}{dt}=Ri_{L2}$

$$\int_{0-}^{0+}\frac{d}{dt}(\psi_1+\psi_2)dt=\int_{0-}^{0+}Ri_{L2}dt$$

$$[\psi_1(0+)-\psi_2(0+)]-[\psi_1(0-)-\psi_2(0-)]=0$$

ü 说明：从 0- 至 0+，回路磁链守恒（磁链代数和在换路前后恒定）。

$$\sum\psi_n(0+)=\sum\psi_n(0-)\quad \text{或} \quad \sum L_n i_{Ln}(0+)=\sum L_n i_{Ln}(0-)$$

（若回路与电流方向一致时，则磁链为正，否则取负）

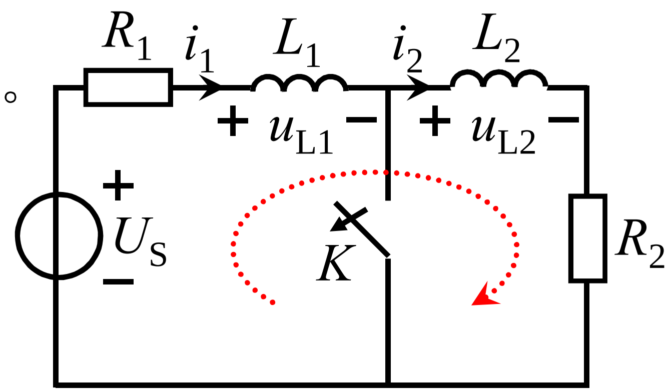
ü 求解思路：$\begin{cases}L_1i_{L1}(0+)-L_2i_{L2}(0+)=L_1i_{L1}(0-)-L_2i_{L2}(0-)\\ i_{L1}(0+)+i_{L2}(0+)=I_S\end{cases}$

【例6.5】

右下图所示电路。

已知电路各器件参数。

求：$t = 0$ 时刻打开 K 后瞬间的 $i_1(0+)$ 、$i_2(0+)$。



解：开关 K 闭合时：$i_1(0-) = \dfrac{U_S}{R_1}$，$i_2(0-) = 0$

开关 K 打开后，电感电流将发生突变。

根据（回路）：$\begin{cases} L_1 i_1(0+) + L_2 i_2(0+) = L_1 i_1(0-) + L_2 i_2(0-) \\ i_1(0+) = i_2(0+) = i(0+) \end{cases}$

可解得：$i(0+)$

v 一阶动态电路的零输入响应

- ü 一阶动态电路：

  从电路看：含有一个独立储能元件；

  从方程看：建立的 KCL、KVL 微分方程是一阶微分方程。

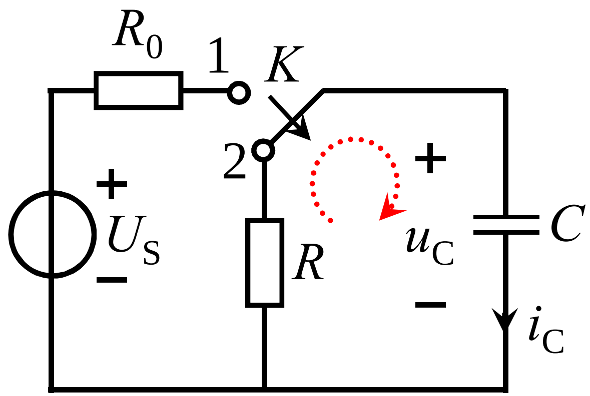
- ü 零输入：

  没有输入（激励），依靠储能元件储存的初始能量维持过渡过程。

- ü 零输入响应：

  动态电路在无外加输入（激励）作用下产生的响应。

Ø 零输入响应（*RC* 短接电路）



- 定义开关的初始位置为 1（稳态）。

- $t = 0$ 时刻，开关从 1 切换至 2（换路）。

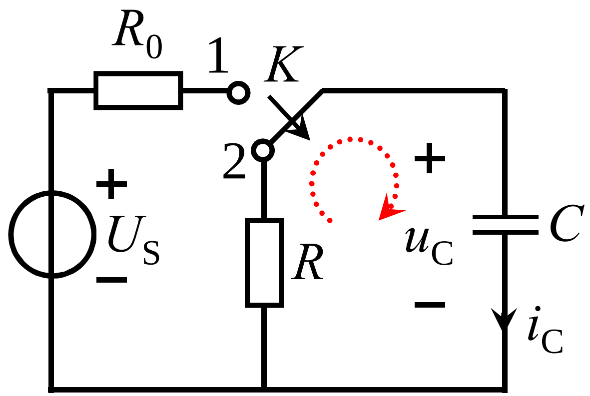
  $u_C(0+) = u_C(0-) = U_S$，$i_C(0-) = 0$，$i_C(0+) = -\dfrac{U_S}{R}$

- 根据换路后的电路回路，有：$Ri_C + u_C = 0$，即：$RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

  （一阶线性常系数齐次微分方程）

- 特征方程：$RCs + 1 = 0$（特征根 $s = -\dfrac{1}{RC}$）

Ø 零输入响应（电路参数解）



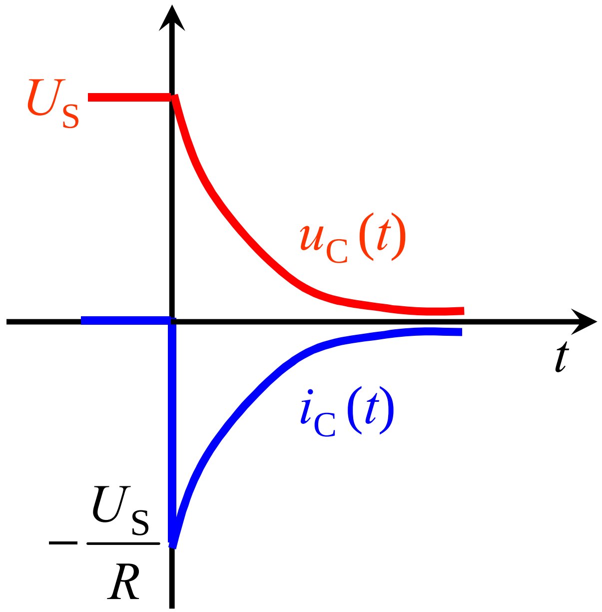
- ü 特征方程：$RCs+1=0$（特征根 $s=-\dfrac{1}{RC}$）
- ü 强制分量（特解）：$u_{Cp}(t)=0$

  自由分量（齐次解）：$u_{Ch}(t)=Ae^{st}=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

  全解：$u_C(t)=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$
- ü 系数 A 可由初值确定：$u_C(0+)=A=U_S$
- ü 信号：$u_C(t)=U_Se^{-\frac{1}{RC}t}$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{U_S}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

（从初值开始，按指数规律下降）



Ø 零输入响应（线性性质）

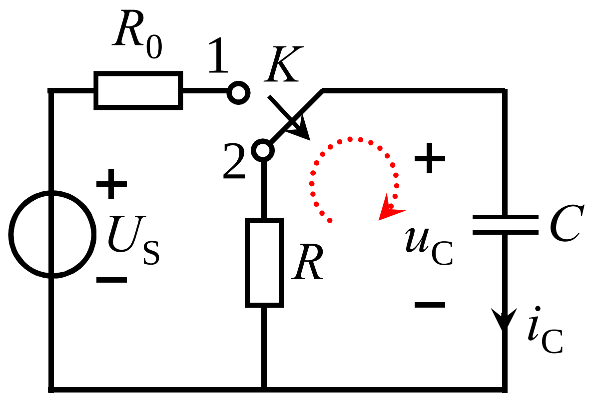
ü 零输入响应的线性性质：

零输入响应是初始值的线性函数，零输入响应与初始值成正比。

$$u_C(t) = U_S e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_S}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Ø 零输入响应（能量关系）



- ü 能量关系：

  电容不断释放电场能量供电阻消耗。
  （最终，全部释放完毕）

$$u_C(0+)=U_S，\ u_C(\infty)=0$$

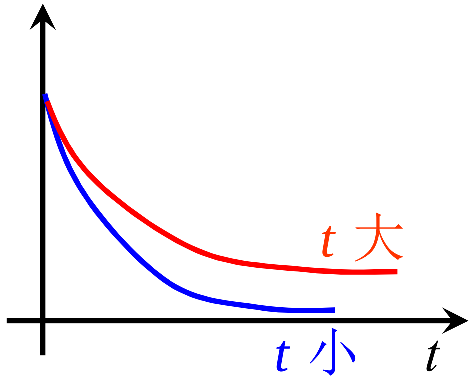
- ü 电容放出（提供）能量：$W_C=W_C(0+)-W_C(\infty)=\frac{1}{2}CU_S^2$

- ü 电阻吸收（消耗）能量：$W_R=\int_0^\infty R\,i_C^2 dt=\int_0^\infty R\,(-\frac{U_S}{R}e^{-\frac{1}{RC}t})^2=\frac{1}{2}CU_S^2$

Ø 零输入响应（时间常数）

ü 一阶 RC 电路的时间常数：$t = RC = (-\frac{1}{s})$

单位：$欧\times法 \rightarrow 欧\times\frac{库}{伏} \rightarrow 欧\times\frac{安\times秒}{伏} \rightarrow 秒$



ü t 只与电路结构及参数有关，与外界激励无关；

ü t 的大小反映了电路过渡过程时间的长短。

（表示过渡过程每衰减 e^{-1} 所需要的时间）

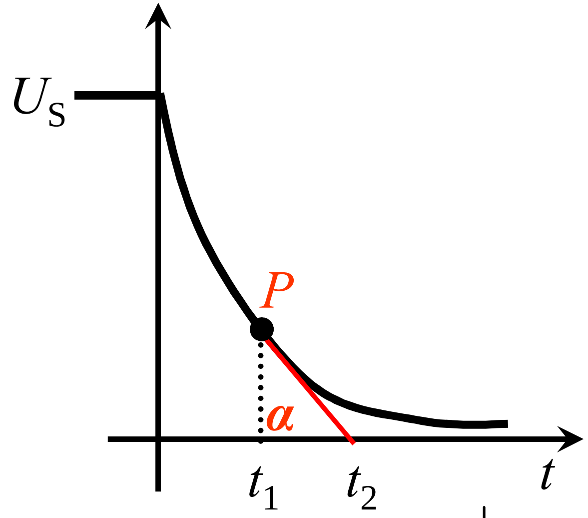
（t 越大，曲线越平坦，衰减越慢；反之，曲线越陡峭，衰减越快）

（在电容电压初值确定的情况下：电容值约大，储能量越多；电阻值越大，放电功率越小；最终都导致放电过程变长）

ü 表7.2.1（教材 P310）描述了衰减的进程。

（工程上认为，经过 $3t \sim 5t$，过渡过程结束）

Ø 零输入响应（求解时间常数）



ü 时间常数t的求解

定义原函数（如图）： $u_C(t) = U_S e^{-\frac{t}{t}}$

对应 P 点（曲线上任意一点）斜率：$k = \left.\frac{du_C}{dt}\right|_P = \left.\frac{d(U_S e^{-\frac{t}{t}})}{dt}\right|_{t=t1} = -\frac{U_S}{t} e^{-\frac{t_1}{t}}$

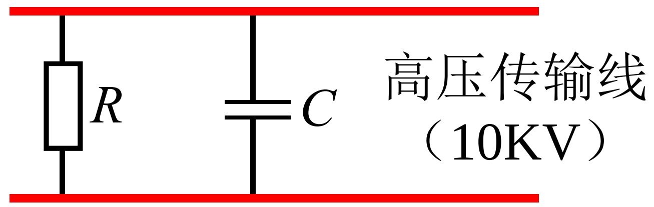
经过 P 点的切线方程：$f(t) = k(t - t_2) = -\frac{U_S}{t} e^{-\frac{t_1}{t}} (t - t_2)$

由于当 $t = t_1$ 时，$u_C(t_1) = f(t_1)$

因此，可求得：$t = t_2 - t_1$

Ø 零输入响应（例）

ü 发电厂 10KV 高压传输线（电缆）。



ü 检修电缆时，首先断开外部电源。

然后等 n 分钟后，方可检修。

ü 电缆间等效电路（右上）

C：线间电容（1 μF）；R：线间绝缘电阻（100 MΩ）

ü 等 5 分钟够吗？

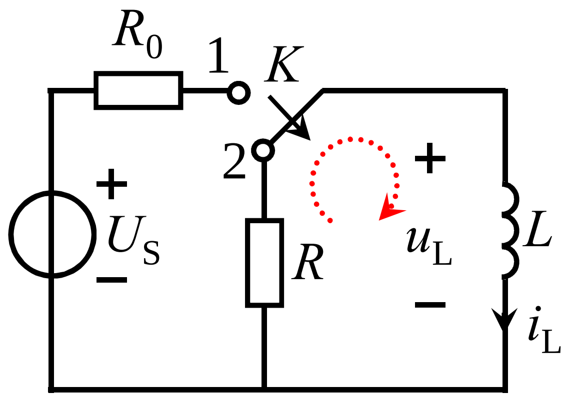
不够，高压触电。

原因：$\boldsymbol{\tau} = RC = 100$秒，5分钟（300秒）相当于 $3\boldsymbol{\tau}$;

此时的残余电压约为：5%*10KV = 500 V 。

补救措施：减小时间常数，或通常用一个铁棒短路。

Ø 零输入响应（RL 短接电路）

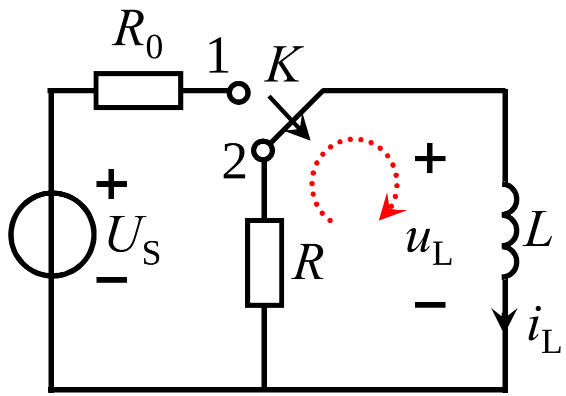


- ü 定义开关的初始位置为 1（稳态）。
- ü $t = 0$ 时刻，开关从 1 切换至 2（换路）。

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{U_S}{R_0}，\quad u_L(0-) = 0，\quad u_L(0+) = -\frac{U_S}{R_0}R$$

- ü 根据换路后的电路回路，有：$u_L + Ri_L = 0$，即：$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$
  （一阶线性常系数齐次微分方程）
- ü 特征方程：$Ls + R = 0$（特征根 $s = -\frac{R}{L}$ ）

Ø 零输入响应（电路参数解）



- 特征方程： $Ls+R=0$ （特征根 $s=-\dfrac{R}{L}$ ）
- 强制分量（特解）： $i_{Lp}(t)=0$

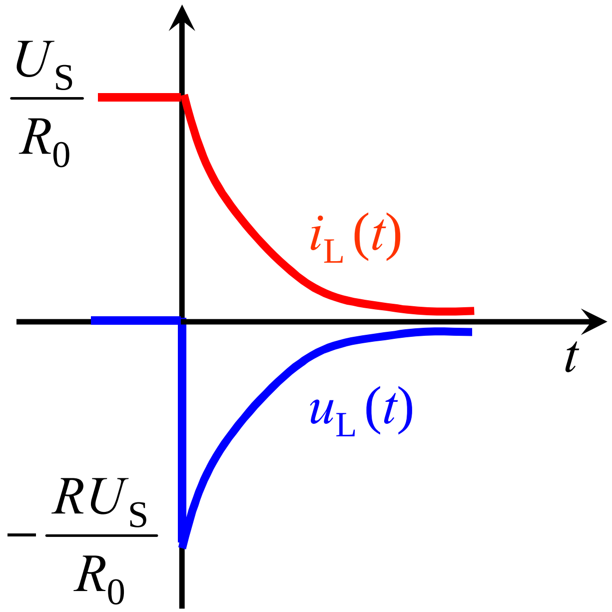
  自由分量（齐次解）： $i_{Lh}(t)=Ae^{st}=Ae^{-\frac{R}{L}t}$

  全解： $i_L(t)=i_{Lp}(t)+i_{Lh}(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}$

- 系数 A 可由初值确定： $i_L(0+)=A=\dfrac{U_S}{R_0}$
- 信号： $i_L(t)=\dfrac{U_S}{R_0}e^{-\frac{R}{L}t}$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-\frac{RU_S}{R_0}e^{-\frac{R}{L}t}$$

（从初值开始，按指数规律下降）



Ø 零输入响应（线性性质）

ü 零输入响应的线性性质：

零输入响应是初始值的线性函数，零输入响应与初始值成正比。

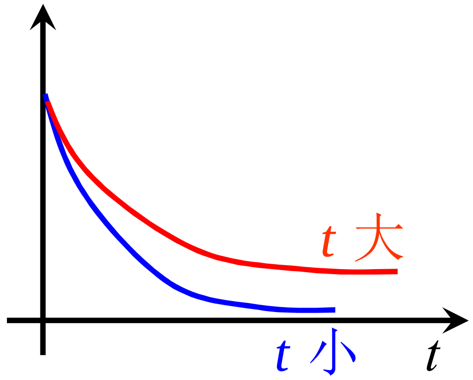
$$i_L(t) = \frac{U_S}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -\frac{RU_S}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Ø 零输入响应（时间常数）

ü 一阶 RL 电路的时间常数：$t = \frac{L}{R} = (-\frac{1}{s})$

单位：$\frac{\text{亨}}{\text{欧}} \to \frac{\text{韦}}{\text{安}\times\text{欧}} \to \frac{\text{伏}\times\text{秒}}{\text{安}\times\text{欧}} \to \text{秒}$



ü t 只与电路结构及参数有关，与外界激励无关；

ü t 的大小反映了电路过渡过程时间的长短。

（表示过渡过程每衰减 e^{-1} 所需要的时间）

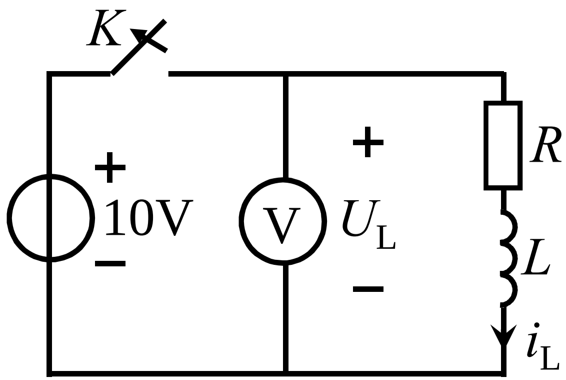
（t 越大，曲线越平坦，衰减越慢；反之，曲线越陡峭，衰减越快）

（在电感电流初值确定的情况下：电感值约大，储能量越多；电阻值越小，放电功率越小；最终都导致放电过程变长）

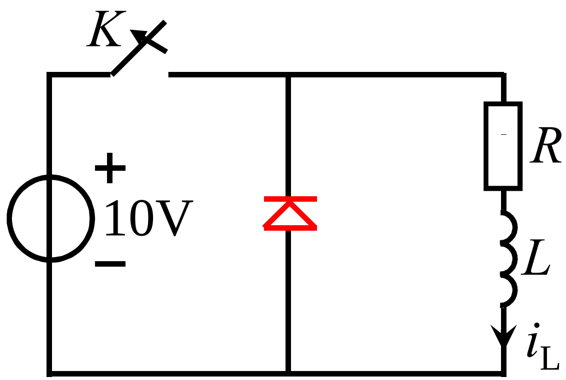
Ø 零输入响应（例）

ü 右图所示电路。

定义：$R = 10\Omega$，$L = 40\text{mH}$，
电压表量程 50kV， 内阻 $R_V = 10\ \text{k}\Omega$。



ü 断开开关 K 后：$i_L(0+) = i_L(0-) = 1\text{A}$



$$t = \frac{L}{R + R_V} \approx 4\times10^{-6}\text{s}$$

$$i_L(t) = e^{-250000t}$$

$$u_V(t) = R_V i_L(t) = -10000\,e^{-250000t}$$

所以：$u_V(0+) = -10000\text{V}$

补救措施：采用续流二极管。

Ø 零输入响应（小结）

ü 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应；
响应规律：由初值开始，按指数规律衰减为零。

$$y(t)=y(0+)e^{-\frac{t}{t}}$$

ü 衰减速率取决于时间常数 t 。

（RC 电路：$t = RC$ ，RL 电路：$t = L/R$ ）

ü 同一电路中，所有响应具有相同的时间常数。

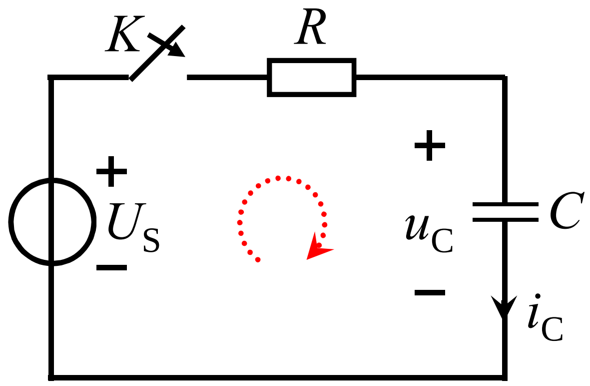
ü 一阶电路的零输入响应和初值成正比（零输入线性）。

v 一阶动态电路的零状态响应

- ü 零状态响应：

  储能元件初始能量为零的动态电路在外加激励作用下产生的响应。

Ø 零状态响应（RC 电路）

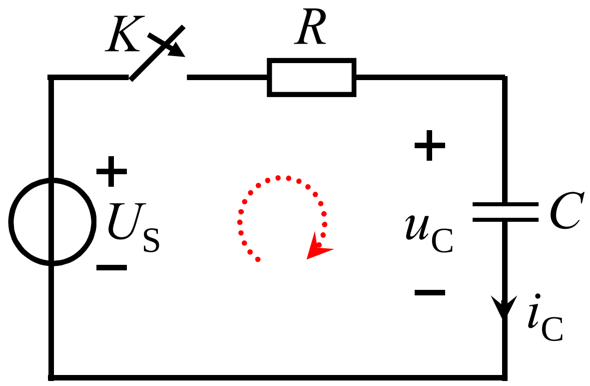


ü $t=0$ 时刻，合上开关。
（电容初始电压为零）

ü 根据回路，有：$Ri_C+u_C=U_S$，即：$RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S$
（一阶线性常系数非齐次微分方程）

ü 特征方程：$RCs+1=0$（特征根 $s=-\dfrac{1}{RC}$）

Ø 零状态响应（电路参数解）



- 特征方程：$RCs+1=0$（特征根 $s=-\dfrac{1}{RC}$）

- 强制分量（特解）：$u_{Cp}(t)=U_S$
  特解与输入激励的变化规律有关；
  当激励为恒定或周期性变化时，特解为电路的稳态解（稳态分量）。

- 自由分量（齐次解）：$u_{Ch}(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$
  齐次方程的通解；
  变化规律由电路参数和结构决定，与激励无关（暂态分量）。

- 全解：$u_C(t)=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$

- 系数 A 可由初值确定：$u_C(0+)=U_S+A \quad \Rightarrow A=-U_S$

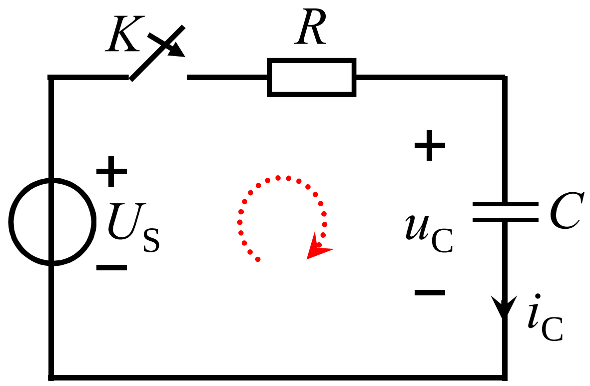
Ø 零状态响应（波形与特性）

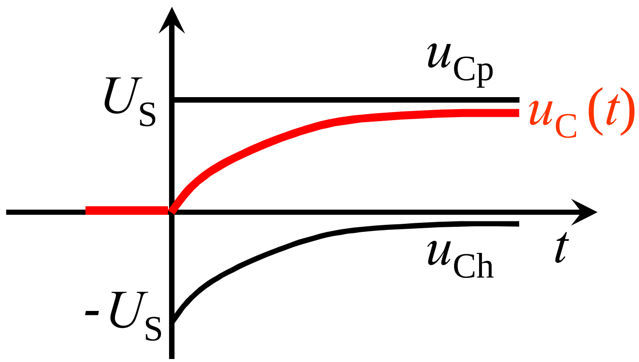
ü 信号： $u_C(t) = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}}$

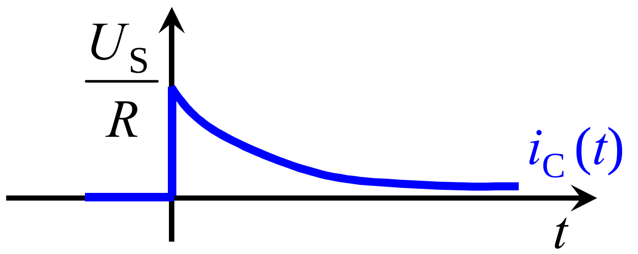
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

波形图如右下所示。

（从初值开始，按指数规律变化）



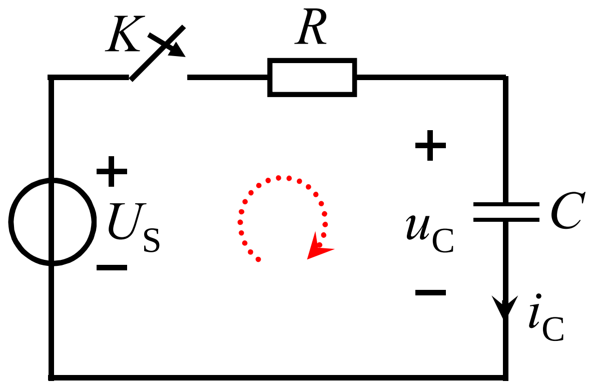




ü 零状态响应的线性性质：

如果电路中只有一个激励，则零状态响应与激励成正比。

Ø 零状态响应（能量关系）



- ü 能量关系：

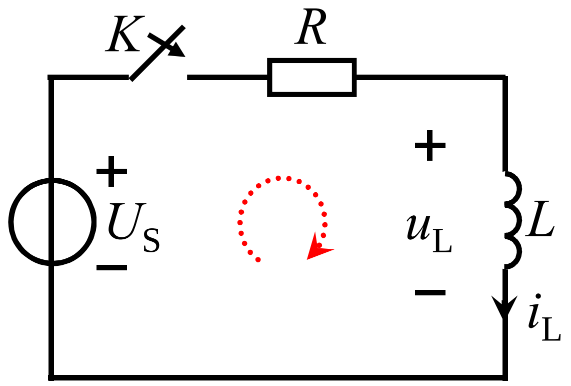
  电源提供的能量，被电容存储和电阻消耗。

- ü 电源提供的能量：$W_U = \int_0^{\infty} U_S i_C dt = \int_0^{\infty} (U_S \cdot \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}})dt = CU_S^2$

- ü 电容储存的能量：$W_C = W_C(\infty) - W_C(0+) = \frac{1}{2} CU_S^2$

- ü 电阻消耗的能量：$W_R = \int_0^{\infty} R i_C^2 dt = \int_0^{\infty} R (\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}})^2 dt = \frac{1}{2} CU_S^2$

零状态响应（RL 电路）

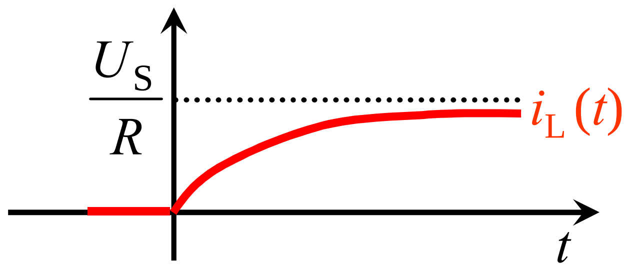


- $t=0$ 时刻，合上开关。
  （电感初始电流为零）

- 根据回路，有：$Ri_L+u_L=U_S$，即：$Ri_L+L\dfrac{di_L}{dt}=U_S$
  （一阶线性常系数非齐次微分方程）

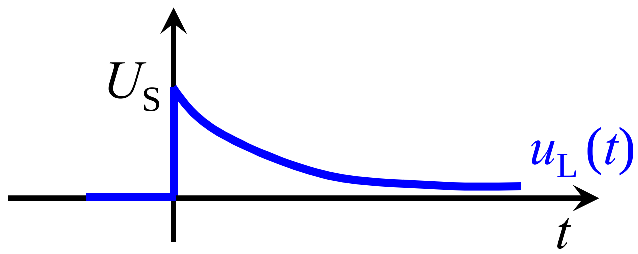
- 全解：$i_L(t)=i_{Lp}(t)+i_{Lh}(t)=\dfrac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$

  系数：$i_L(0+)=\dfrac{U_S}{R}+A \quad \Rightarrow A=-\dfrac{U_S}{R}$

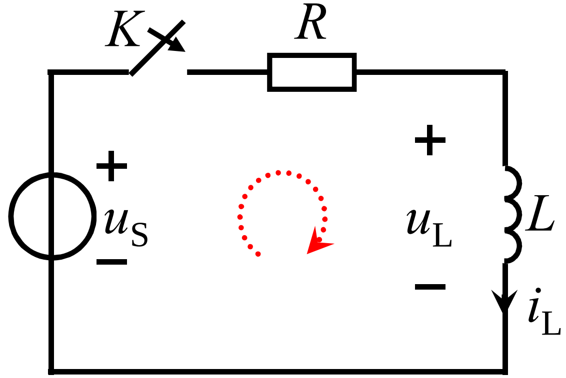


- 信号：$i_L(t)=\dfrac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

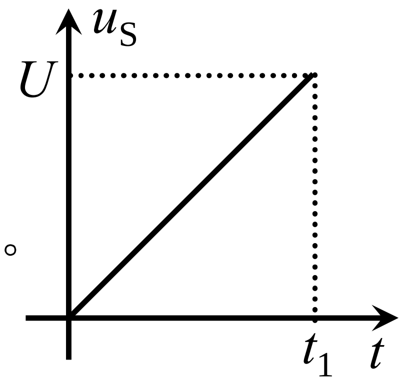
  $$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=U_Se^{-\frac{R}{L}t}$$



Ø 零状态响应（例：斜坡函数激励）



- $t = 0$ 时刻，合上开关。
  （电感初始电流为零）



$$u_S(t) = \begin{cases} \dfrac{U}{t_1}\cdot t & 0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

- 根据回路，有：$Ri_L + L\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{U}{t_1}t \quad 0 < t < t_1$

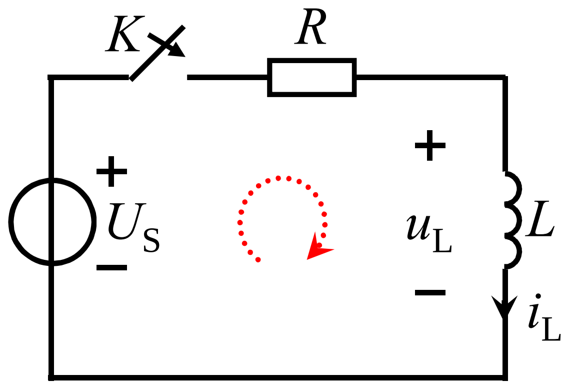
- 特解：$i_{Lp}(t) = \dfrac{U}{Rt_1}t - \dfrac{LU}{R^2 t_1}$，强制分量（非稳态分量）。

  齐次解：$i_{Lh}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

  系数：$i_L(0+) = -\dfrac{LU}{R^2 t_1} + A \quad \Rightarrow A = \dfrac{LU}{R^2 t_1}$

  信号：$i_L(t) = \dfrac{U}{Rt_1}t - \dfrac{LU}{R^2 t_1}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$，$u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{LU}{Rt_1}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

零状态响应（例：斜坡函数激励）



- 当 $t > t_1$ 时：$Ri_L + L\dfrac{di_L}{dt} = 0$

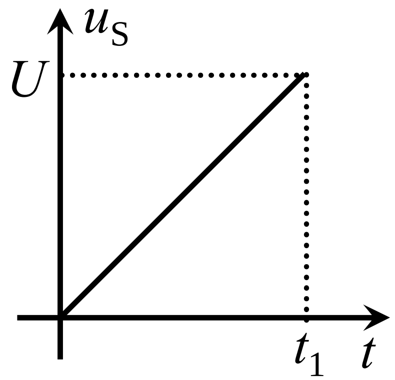
- 特解：$i_{Lp}(t) = 0$

齐次解：$i_{Lh}(t) = Be^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$

系数：$B = i_L(t_1+) = i_L(t_1-) = \dfrac{U}{R} - \dfrac{LU}{R^2 t_1}(1 - e^{-\frac{R}{L}t_1})$

信号：$i_L(t) = (\dfrac{U}{R} - \dfrac{LU}{R^2 t_1})\ e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)} + \dfrac{LU}{R^2 t_1} e^{-\frac{R}{L}t}$

$$i_L(t) = \frac{U}{Rt_1}t - \frac{LU}{R^2 t_1}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



$$u_S(t) = \begin{cases} \dfrac{U}{t_1}\cdot t & 0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

v 一阶动态电路的全响应和三要素法

- ü 全响应：

  储能元件初始能量为非零的动态电路在外加激励作用下产生的响应。

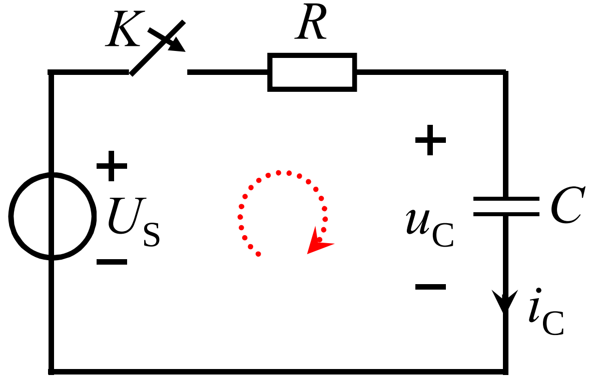
  （相当于零输入响应和零状态响应的叠加）

- ü 三要素法：

  求解一阶动态电路的响应方法。

  （回避了微分方程的求解）

Ø 全响应（*RC* 电路）



ü $t = 0$ 时刻，合上开关。
（电容初始电压不为零：$u_C(0-) = U_0$ ）

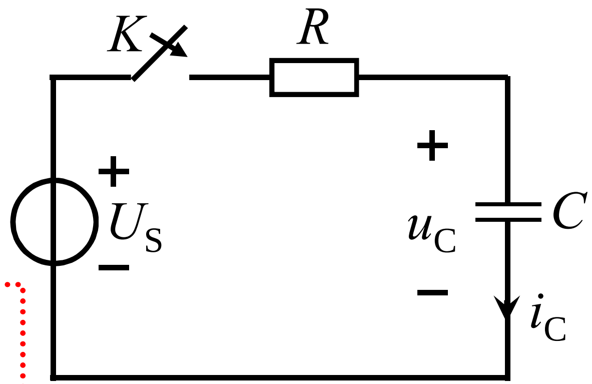
ü 根据回路，有：$RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = U_S$（一阶线性常系数非齐次微分方程）

ü 强制分量：$u_{Cp}(t) = U_S$；自由分量：$u_{Ch}(t) = Ae^{-t/t}$，$(t = RC)$

全响应：$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = U_S + Ae^{-t/t}$

系数由初值确定：$u_C(0+) = U_S + A \quad \Rightarrow \quad A = U_0 - U_S$

Ø 全响应（分解）



ü 分解方式 1：强制分量 + 自由分量

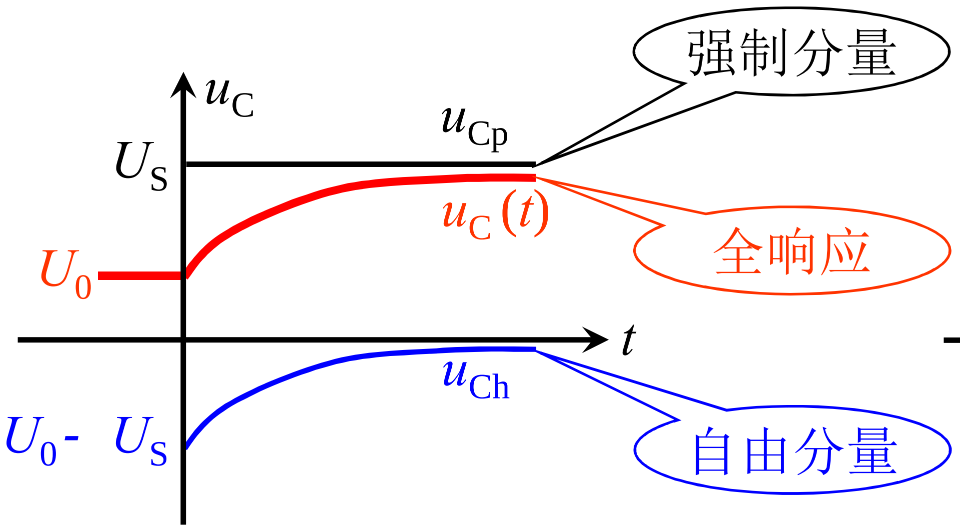
$$u_C(t)=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)=\boxed{U_S}+\boxed{(U_0-U_S)\ e^{-t/t}}$$

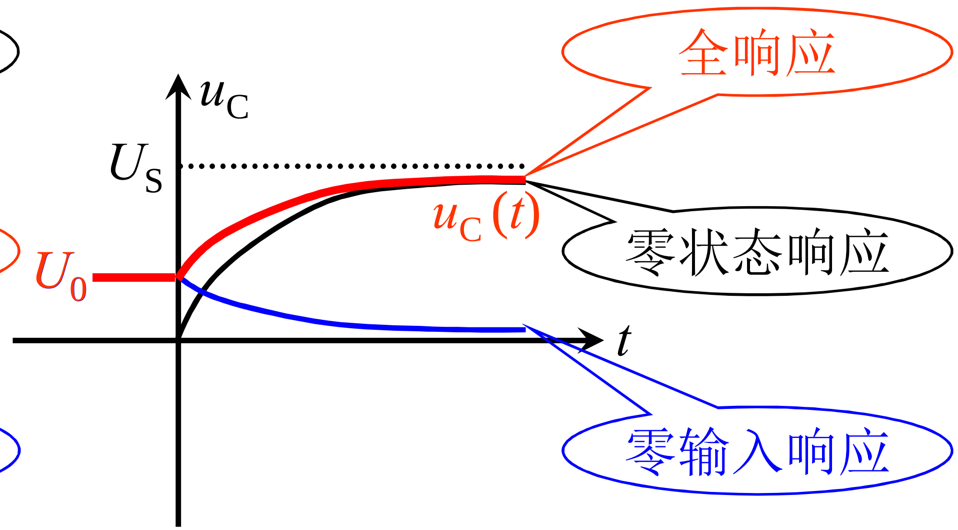
（强制分量、特解、稳态分量；自由分量、齐次解、暂态分量）

ü 分解方式 2：零状态响应 + 零输入响应

$$u_C(t)=\boxed{U_S(1-e^{-t/t})}+\boxed{U_0e^{-t/t}}$$

物理概念清楚，便于叠加计算





Ø 三要素法

ü 一阶电路的数学模型：一阶微分方程。

$$a\frac{df(t)}{dt}+bf(t)=u(t)$$

ü 解的一般形式：$f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+Ae^{-\frac{t}{t}}$

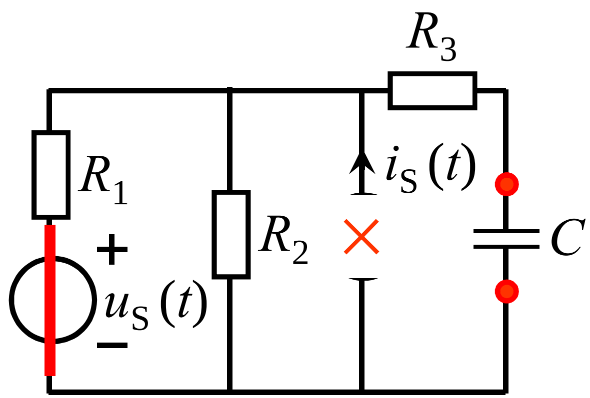
ü 系数由初值确定：$f(0+)=f_{\mathrm{p}}(0+)+A \quad \Rightarrow \quad A=f(0+)-f_{\mathrm{p}}(0+)$

ü 最终的表达方式为：$f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+[f(0+)-f_{\mathrm{p}}(0+)]e^{-\frac{t}{t}}$

$$\text{三要素：}\begin{cases} f_{\mathrm{p}}(t) & \text{特解（稳态解），} f(\infty) \\ f(0+) & \text{初值} \\ t & \text{时间常数} \end{cases}$$

Ø 三要素法（时间常数的计算）

ü 方法：从电路图分析时间常数；
原则：时间常数与激励无关。

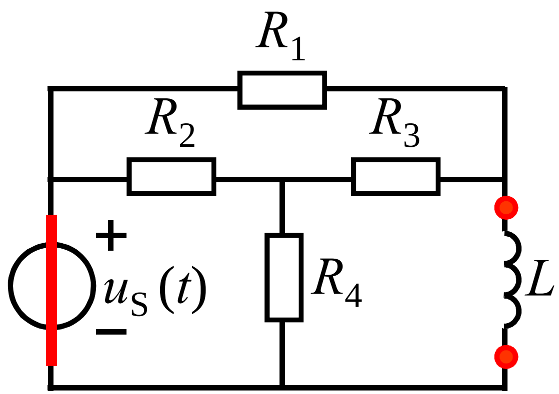


ü 一阶 *RC* 电路：$R_{eq} = R_1 // R_2 + R_3$

$$t = R_{eq}C$$

ü 一阶 *LR* 电路：$R_{eq} = (R_2 // R_4 + R_3) // R_1$

$$t = L / R_{eq}$$



三要素：$\begin{cases} f_p(t) & \text{特解（稳态解），} f(\infty) \\ f(0+) & \text{初值} \\ t & \text{时间常数} \end{cases}$

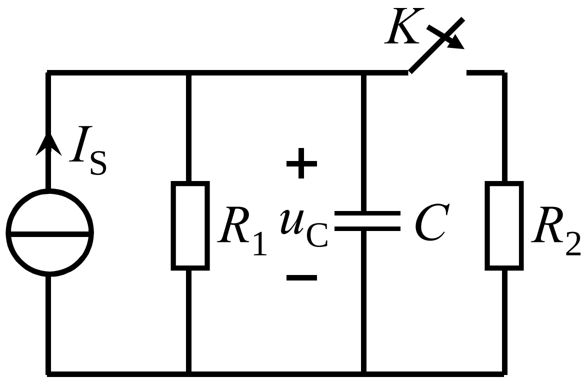
【例6.6】

$$f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+[f(0+)-f_{\mathrm{p}}(0+)]e^{-\frac{t}{t}}$$

右图所示电路。

已知：$t=0$ 时合上开关 K 。

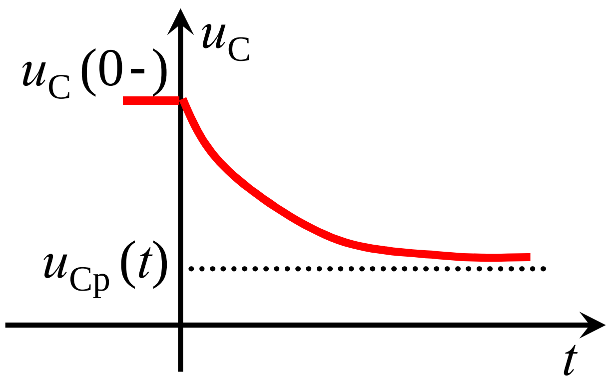
求：换路后的 $u_{\mathrm{C}}(t)$ 。



解：$u_{\mathrm{C}}(t)=u_{\mathrm{Cp}}(t)+[u_{\mathrm{C}}(0+)-u_{\mathrm{Cp}}(0+)]e^{-\frac{t}{t}}$

其中：

$$\begin{cases} u_{\mathrm{Cp}}(t)=u_{\mathrm{Cp}}(\infty)=I_{\mathrm{S}}(R_1 // R_2) \quad \Rightarrow \quad =u_{\mathrm{Cp}}(0+) \\ u_{\mathrm{C}}(0+)=u_{\mathrm{C}}(0-)=I_{\mathrm{S}}R_1 \\ t=R_{\mathrm{eq}}C=(R_1 // R_2)C \end{cases}$$



例：$I_{\mathrm{S}}=1\mathrm{A}$，$R_1=2\Omega$，$R_2=1\Omega$，$C=3\mathrm{F}$

$$u_{\mathrm{Cp}}(t)=u_{\mathrm{Cp}}(0+)=\frac{2}{3}\mathrm{V}，\ u_{\mathrm{C}}(0+)=2\mathrm{V}，\ t=2\mathrm{s}$$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=\frac{2}{3}+[2-\frac{2}{3}]e^{-\frac{t}{2}}$$

$f_{\mathrm{p}}(t)$	特解（稳态解），$f(\infty)$
$f(0+)$	初值
t	时间常数

【例6.7】

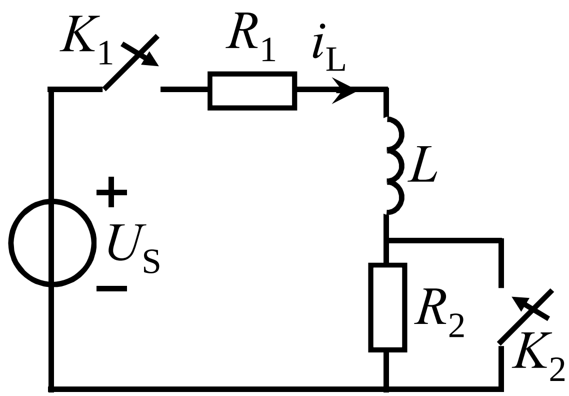
右图所示电路。

已知：电感无初始储能，

$t=0$ 时合上开关 K_1，$t=0.2$s 时合上开关 K_2。

求：两次换路后的 $i_L(t)$。

例：$U_S=10$V，$R_1=2\Omega$，$R_2=3\Omega$，$L=1$H



解：0 ~ 0.2s 时：

$$i_L(t)=i_{Lp}(t)+[i_L(0+)-i_{Lp}(0+)]e^{-\frac{t}{\tau}}=2+[0-2]e^{-5t}$$

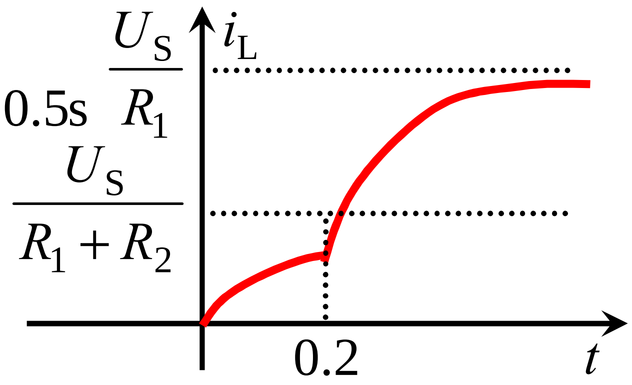
其中：$i_{Lp}(t)=\dfrac{U_S}{R_1+R_2}=2$A，$i_L(0+)=i_L(0-)=0$，$\tau=\dfrac{L}{R_{eq}}=\dfrac{L}{R_1+R_2}=0.2$s

由此，可求得 $t=0.2$s 时的电流值，定义为$i_L(0.2)=1.26$A

0.2s 以后：

$$i_{Lp}(t)=\frac{U_S}{R_1}=5\text{A}，\ i_L(0.2+)=i_L(0.2)，\ \tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{L}{R_1}=0.5\text{s}$$

即可求得 新的 $i_L(t)=5+[1.26-5]e^{-2(t-0.2)}$



【例6.8】

已知：某 RL 电路在阶跃函数激励下的响应为：$i_{\mathrm{L}}(t)=4-3e^{-2.5t}\mathrm{A}$

问：（1）将初始状态量增加两倍，响应为?

（2）将激励增加三倍，响应为?

（3）同时实现 1 和 2，响应为?

解：按“零状态响应 + 零输入响应”方式分解全响应。

$$i_{\mathrm{L}}(t)=4-3e^{-2.5t}=4\times(1-e^{-2.5t})+1\times e^{-2.5t}$$

$$即：\begin{cases}零状态响应：\ i_{\mathrm{LZ}}(t)=4\times(1-e^{-2.5t}) \\ 零输入响应：\ i_{\mathrm{LS}}(t)=1\times e^{-2.5t}\end{cases}$$

（1）$i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{LZ}}(t)+2i_{\mathrm{LS}}(t)=4\times(1-e^{-2.5t})+2\times e^{-2.5t}=4-2e^{-2.5t}\mathrm{A}$

（2）$i_{\mathrm{L}}(t)=3i_{\mathrm{LZ}}(t)+i_{\mathrm{LS}}(t)=12\times(1-e^{-2.5t})+e^{-2.5t}=12-11e^{-2.5t}\mathrm{A}$

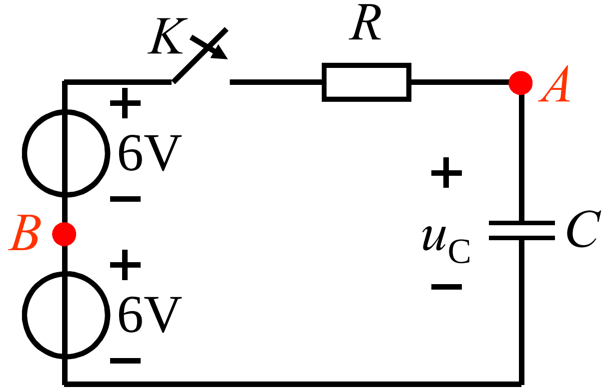
（3）$i_{\mathrm{L}}(t)=3i_{\mathrm{LZ}}(t)+2i_{\mathrm{LS}}(t)=12\times(1-e^{-2.5t})+2\times e^{-2.5t}=12-10e^{-2.5t}\mathrm{A}$

【例6.9】

右图所示电路。

已知：电容处于零状态，然后闭合开关 K 。

问：若要求 5 秒后，AB 间电压大于 2V，
应如何选择 R、C ？



解：按三要素法（$u_C(0+)=u_C(0-)=0\text{V}$ ）。

$$u_{AB}(t)=u_{ABp}(t)+[u_{AB}(0+)-u_{ABp}(0+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中：$u_{ABp}(t)=u_{ABp}(\infty)=u_{ABp}(0+)=6\text{V}$，$u_{AB}(0+)=-6\text{V}$，$\tau=RC$

所以：$u_{AB}(t)=6-12e^{-\frac{t}{RC}}$

由已知，得：$u_{AB}(5)=6-12e^{-\frac{5}{RC}}\geq 2$

即：$RC\leq 4.55\text{s}$

RC 延时电路，用 AB 间的电压控制其它电路。

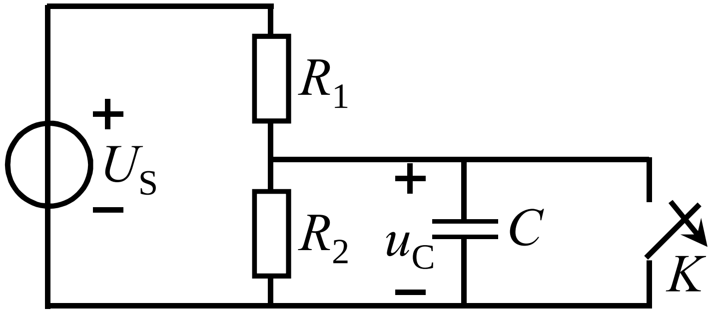
【例6.9-2】

右图所示电路。

已知：电路各参数，

电容处于零状态，然后打开开关 K 。

求：多少时间以后，电容电压能大于 U_C ？



解：按三要素法 $u_C(t)=u_{Cp}(t)+[u_C(0+)-u_{Cp}(0+)]e^{-\frac{t}{t}}=10+[0-10]e^{-\frac{t}{1.2}}$

其中：$u_{Cp}(t)=u_{Cp}(\infty)=u_{Cp}(0+)=U_S\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$，$u_C(0+)=0$，$t=(R_1//R_2)C$

例：$U_S=20\text{V}$，$R_1=R_2=16\Omega$，$C=150\text{mF}$

若定义 $U_C=5\text{V}$ 时，$t=1.2\ln 2=0.832\text{s}$ 。

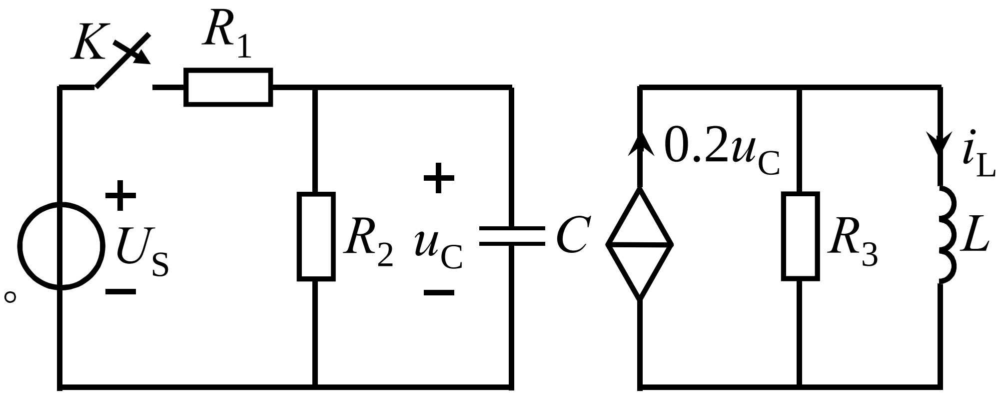
<u>RC 延时电路，用电容端电压控制其它电路。</u>

【例6.10】

右图所示电路。

已知：初始零状态。

求：开关 K 闭合后的 $u_C(t)$、$i_L(t)$ 。



解：按三要素法。

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0+) - u_{Cp}(0+)]e^{-\frac{t}{t}} = 0.8 + [0 - 0.8]e^{-5t}$$

其中：

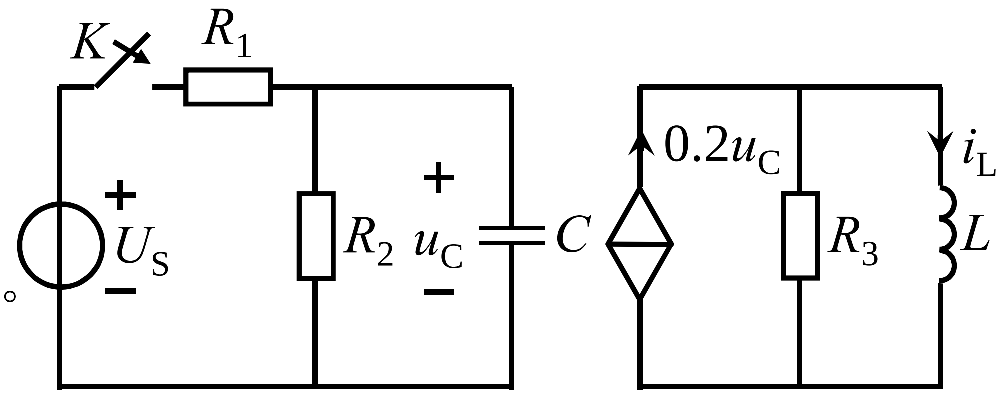
$$u_{Cp}(t) = u_{Cp}(\infty) = u_{Cp}(0+) = U_S \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.8\text{V}，\quad u_C(0+) = 0，\quad t = (R_1 // R_2)C = 0.2\text{s}$$

例：$U_S = 1\text{V}$，$R_1 = 1\Omega$，$R_2 = 4\Omega$，$C = 0.25\text{F}$

右图所示电路。

已知：初始零状态。

求：开关 K 闭合后的 $u_C(t)$、$i_L(t)$。



解：由电路得：$\dfrac{u_L(t)}{R_3}+i_L(t)=0.2u_C(t)$，即：$\dfrac{L}{R_3}\cdot\dfrac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=0.2u_C(t)$

可求得：$i_{Lp}(t)=A+Be^{-\frac{t}{RC}}=0.16+0.107e^{-5t}$ $\quad\quad \dfrac{di_L(t)}{dt}+2i_L(t)=0.32(1-e^{-5t})$

$$\text{因此:}\ i_L(t)=i_{Lp}(t)+[i_L(0+)-i_{Lp}(0+)]e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$=0.16+0.107e^{-5t}+[0-0.267]e^{-2t}$$

例：$R_3=1\Omega$，$L=0.5\text{H}$

- 一阶动态电路分析要点

Ø 一阶动态电路分析要点（换路定则）

ü 电容电流有限值时，电容电压不突变，即 $u_C(0+) = u_C(0-)$；

电感电压有限值时，电感电流不突变，即 $i_L(0+) = i_L(0-)$。

ü 换路定则可用来确定换路后的初始状态，此时电容用数值为 $u_C(0+)$ 的电压源代替，电感用数值为 $i_L(0+)$ 的电流源代替。

此时的电路是一纯电阻直流电路，可以用直流电路的分析方法计算电路中的各电压电流参数。

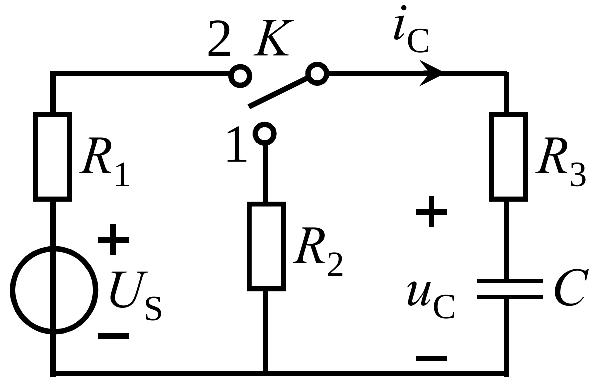
（非独立初值可借助独立初值，及微分方程求解）

ü 对于纯电容回路，或电容与电压源组成的回路，各电容电压可能突变，此时应采用节点电荷守恒定律来确定初值；

对于纯电感割集，或电感与电流源组成的割集，各电感电流可能突变，此时应采用回路磁链守恒定律来确定初值。

【例6.11-1】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的 $u_C(0+)$，$i_C(0+)$，$\dfrac{du_C}{dt}(0+)$

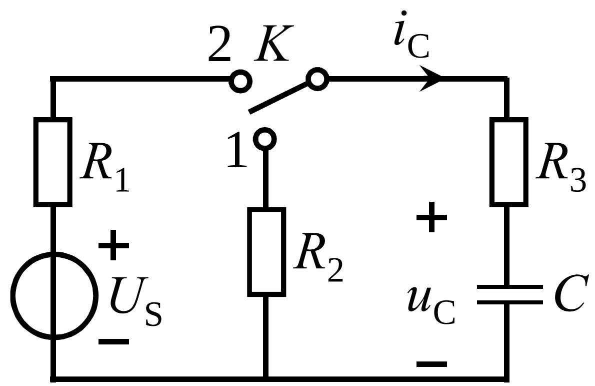
解：根据换路定则 $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$

所以：$i_C(0+) = \dfrac{U_S - u_C(0+)}{R_1 + R_3} = \mathbf{L}$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = \mathbf{L}$$

【例6.11-2】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 2（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $u_C(0+)$，$i_C(0+)$，$\dfrac{du_C}{dt}(0+)$

解：根据换路定则 $u_C(0+) = u_C(0-) = U_S$

所以：$i_C(0+) = \dfrac{-u_C(0+)}{R_2 + R_3} = \mathbf{L}$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = \mathbf{L}$$

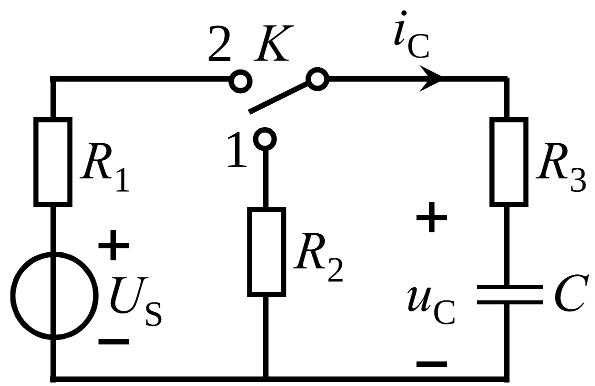
【例6.11-3】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 2（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $u_C(0+)$，$i_C(0+)$，$\dfrac{du_C}{dt}(0+)$



原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(wt + j_S)$

解：根据换路前电路，定义 $Z = R_1 + R_3 + \dfrac{1}{jwC} = |Z|\angle j$

则，换路前电压为：$u_C(t) = \dfrac{U_m}{|Z|} \cdot \dfrac{1}{wC} \sin(wt + j_S - j - \dfrac{p}{2})$

根据换路定则：$u_C(0+) = u_C(0-) = \dfrac{U_m}{|Z|} \cdot \dfrac{1}{wC} \sin(j_S - j - \dfrac{p}{2})$

所以：$i_C(0+) = \dfrac{-u_C(0+)}{R_2 + R_3} = \mathbf{L}$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = \mathbf{L}$$

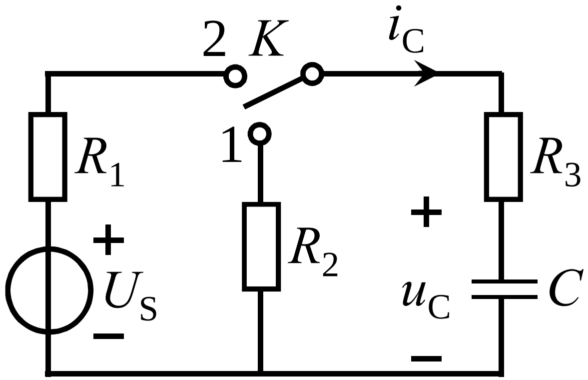
【例6.11-4】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1 （稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的 $u_C(0+)$，$i_C(0+)$，$\dfrac{du_C}{dt}(0+)$



原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(wt + j_S)$

<u>*思考题*</u>

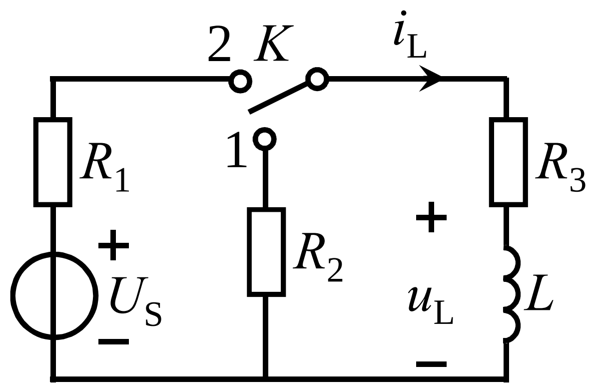
【例6.11-5】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2。

求：换路后的 $i_L(0+)$，$u_L(0+)$，$\dfrac{di_L}{dt}(0+)$



解：根据换路定则 $i_L(0+)=i_L(0-)=0$

所以：$u_L(0+)=U_S-(R_1+R_3)i_L(0+)=\mathbf{L}$

$$\frac{di_L}{dt}(0+)=\frac{u_L(0+)}{L}=\mathbf{L}$$

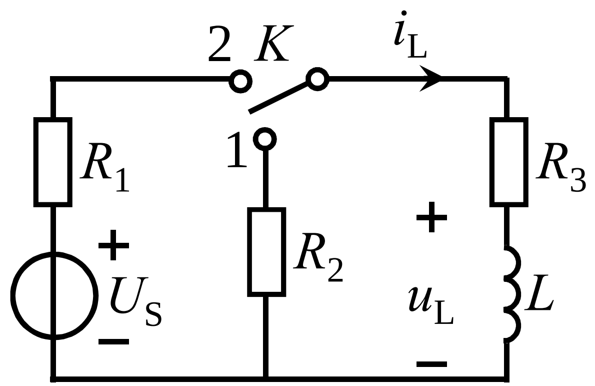
【例6.11-6】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 2（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $i_L(0+)$，$u_L(0+)$，$\dfrac{di_L}{dt}(0+)$



解：根据换路定则 $i_L(0+) = i_L(0-) = \dfrac{U_S}{R_1 + R_3}$

所以：$u_L(0+) = -(R_2 + R_3) i_L(0+) = \mathbf{L}$

$$\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = \mathbf{L}$$

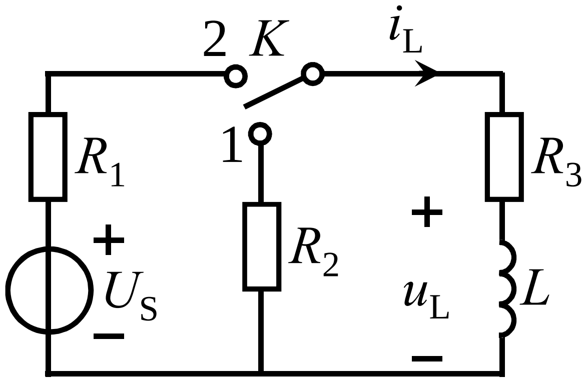
【例6.11-7】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 2（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $i_L(0+)$，$u_L(0+)$，$\dfrac{di_L}{dt}(0+)$



原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(wt + j_S)$

解：根据换路前电路，定义 $Z = R_1 + R_3 + jwL = |Z|\angle j$

则，换路前电流为：$i_L(t) = \dfrac{U_m}{|Z|}\sin(wt + j_S - j)$

根据换路定则：$i_L(0+) = i_L(0-) = \dfrac{U_m}{|Z|}\sin(j_S - j)$

所以：$u_L(0+) = -(R_2 + R_3)i_L(0+) = \mathbf{L}$

$$\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = \mathbf{L}$$

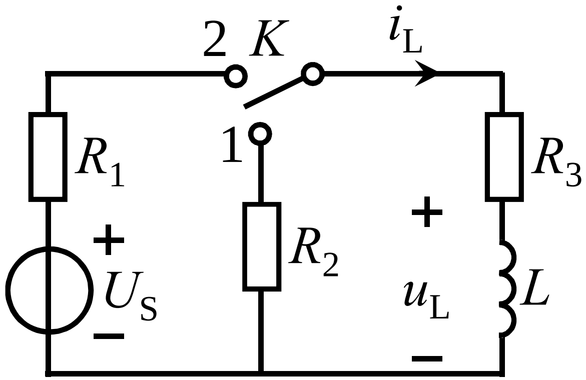
【例6.11-8】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的 $i_L(0+)$，$u_L(0+)$，$\dfrac{di_L}{dt}(0+)$



原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(wt + j_S)$

思考题

【例6.12-1】

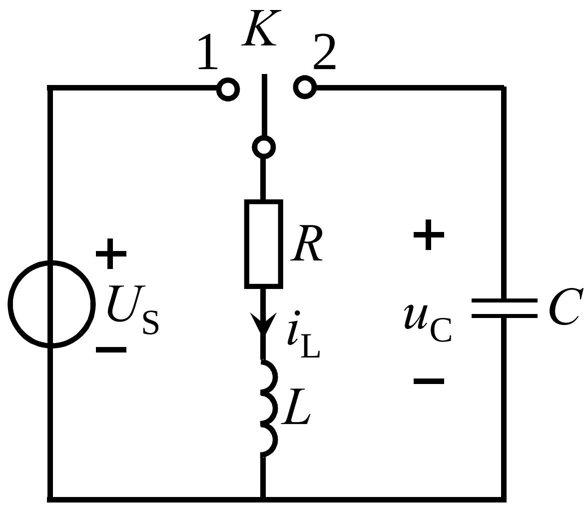
右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的

$$u_C(0+),\quad \frac{du_C}{dt}(0+),\quad i_L(0+),\quad \frac{di_L}{dt}(0+)$$



解：

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{U_S}{R}$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) = \text{由题意确定}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = -\frac{i_L(0+)}{C} = \mathbf{L}$$

$$\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = \frac{-Ri_L(0+) + u_C(0+)}{L} = \mathbf{L}$$

<u>二阶电路</u>

【例6.12-2】

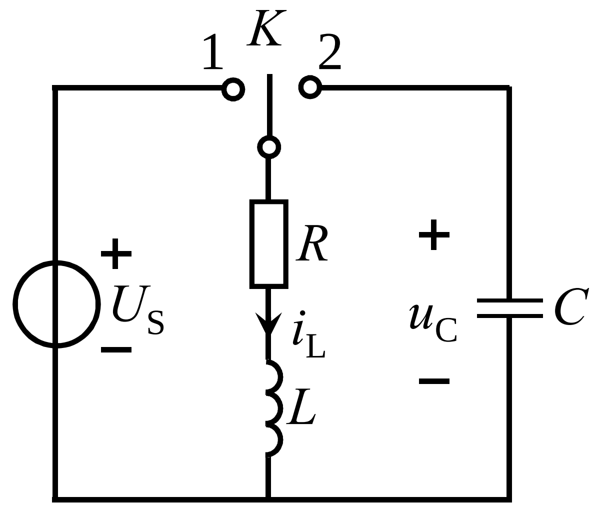
右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的

$$u_C(0+),\quad \frac{du_C}{dt}(0+),\quad i_L(0+),\quad \frac{di_L}{dt}(0+)$$



原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(\omega t + \varphi_S)$

解：$$i_L(0+) = i_L(0-) = \left.\frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_S)}{|Z|\angle\varphi}\right|_{t=0-},\quad Z = R + j\omega L$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) = \text{由题意确定}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = -\frac{i_L(0+)}{C} = \cdots$$

$$\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = \frac{-Ri_L(0+) + u_C(0+)}{L} = \cdots$$

Ø 一阶动态电路分析要点（*RC* 电路）

ü RC 电路方程一般形式：$RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=u$ ， 全解：$u_C(t)=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)$

ü 特解 $u_{Cp}(t)$：

当 $u=U_S$ （直流，包括零值）时，$u_{Cp}(t)=U_S$；

当 $u=U_m\sin(wt+j_S)$（正弦）时，

$$u_{Cp}(t)=\frac{U_m}{|Z|}\cdot\frac{1}{wC}\sin(wt+j_S-j-\frac{p}{2})，\text{其中}Z=R+\frac{1}{jwC}=|Z|\angle j$$

ü 通解 $u_{Ch}(t)=Ae^{-t/t}$ ， 其中$\boldsymbol{\tau}=RC$ 。

根据 $u_C(0+)=u_{Cp}(0+)+u_{Ch}(0+)=u_{Cp}(0+)+A\Rightarrow A=u_C(0+)-u_{Cp}(0+)$

ü 全解（三要素公式）：$u_C(t)=u_{Cp}(t)+[u_C(0+)-u_{Cp}(0+)]e^{-t/t}$

零状态+零输入（直流）： $=U_S(1-e^{-t/t})+U_0e^{-t/t}$

三要素公式能直接用于一阶电路中的任何电压电流的计算。

一阶动态电路分析要点（*RL* 电路）

- *RL* 电路方程一般形式：$L\dfrac{di_{\mathrm{L}}}{dt}+Ri_{\mathrm{L}}=u$ ，全解： $i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{Lp}}(t)+i_{\mathrm{Lh}}(t)$

- 特解 $i_{\mathrm{Lp}}(t)$：

  当 $u=U_{\mathrm{S}}$（直流，包括零值）时，$i_{\mathrm{Lp}}=U_{\mathrm{S}}/R$；

  当 $u=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_{\mathrm{S}})$（正弦）时，

  $$i_{\mathrm{Lp}}(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{|Z|}\sin(\omega t+\varphi_{\mathrm{S}}-\varphi)\text{，其中}Z=R+j\omega L=|Z|\angle\varphi$$

- 通解 $i_{\mathrm{Lh}}(t)=Ae^{-t/\tau}$ ，其中 $\boldsymbol{\tau}=L/R$ 。

  根据 $i_{\mathrm{L}}(0+)=i_{\mathrm{Lp}}(0+)+i_{\mathrm{Lh}}(0+)=i_{\mathrm{Lp}}(0+)+A\Rightarrow A=i_{\mathrm{L}}(0+)-i_{\mathrm{Lp}}(0+)$

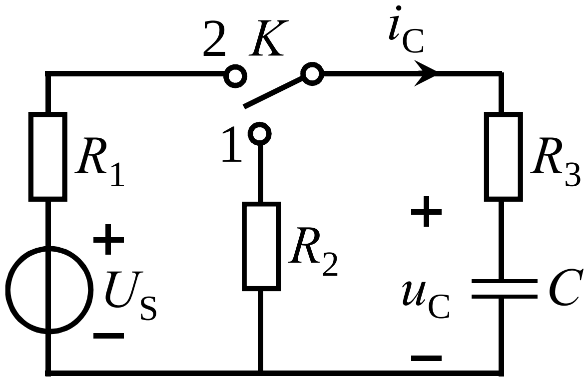
- 全解（三要素公式）：$i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{Lp}}(t)+[i_{\mathrm{L}}(0+)-i_{\mathrm{Lp}}(0+)]e^{-t/\tau}$

  零状态+零输入（直流）： $=I_{\mathrm{S}}(1-e^{-t/\tau})+I_{0}e^{-t/\tau}$

  三要素公式能直接用于一阶电路中的任何电压电流的计算。

【例6.13-1】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 1 （稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的 $u_C(t)$， $\dfrac{du_C(t)}{dt}$， $i_C(t)$

解：换路后电路方程：$(R_1+R_3)C\dfrac{du_C(t)}{dt}+u_C=U_S$

特解：$u_{Cp}(t)=U_S$

通解：$u_{Ch}(t)=Ae^{-t/t}$ ， $\begin{cases} t=(R_1+R_3)C \\ U_S+A=u_C(0+)=0 \Rightarrow A=-U_S \end{cases}$

所以：$u_C(t)=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)=U_S(1-e^{-t/(R_1+R_3)C})$

$$\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{U_S}{(R_1+R_3)C}e^{-t/(R_1+R_3)C}$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\mathbf{L}$$

标准算法

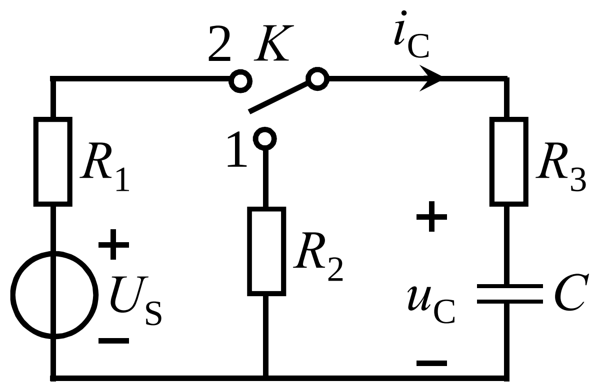
【例6.13-2】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1 （稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的 $u_C(t)$， $\dfrac{du_C(t)}{dt}$， $i_C(t)$



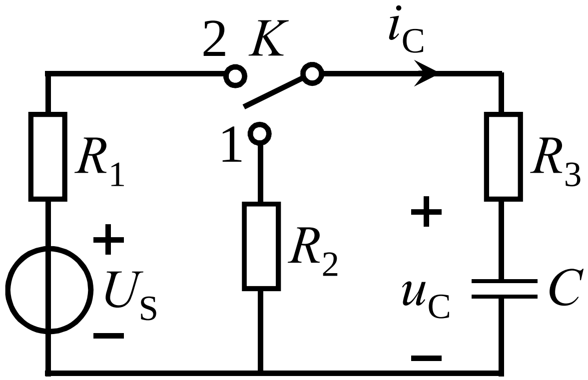
解：零状态响应法。$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = U_S + Ae^{-t/t}$

$$\text{其中：}\begin{cases} U_S + A = u_C(0+) = 0 \Rightarrow A = -U_S \\ t = (R_1 + R_3)C \end{cases}$$

所以：$u_C(t) = \mathbf{L}$ ， $\dfrac{du_C(t)}{dt} = \mathbf{L}$ ， $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt} = \mathbf{L}$

【例6.13-3】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

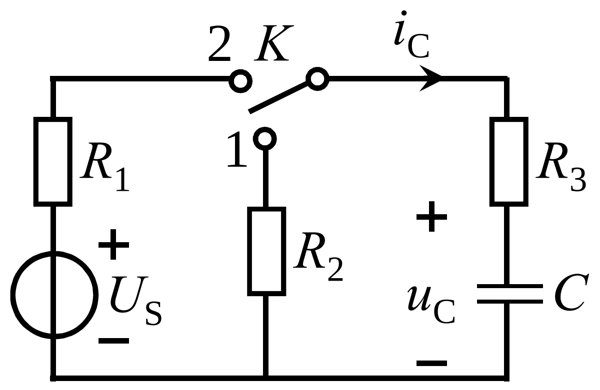
求：换路后的 $u_C(t)$，$\dfrac{du_C(t)}{dt}$，$i_C(t)$

解：三要素法。$u_C(t)=u_{Cp}(t)+[u_C(0+)-u_{Cp}(0+)]e^{-t/t}$

$$
\text{其中：}\begin{cases} u_{Cp}(t)=u_{Cp}(\infty)=u_{Cp}(0+)=U_S \\ u_C(0+)=0 \\ t\ =(R_1+R_3)C \end{cases}
$$

所以：$u_C(t)=\mathbf{L}$ ，$\dfrac{du_C(t)}{dt}=\mathbf{L}$ ，$i_C(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}=\mathbf{L}$

【例6.13-4】



右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 1（稳态）；

　　　0 时刻，开关 K 从位置 1 切换至位置 2 。

求：换路后的 $u_C(t)$，$\dfrac{du_C(t)}{dt}$，$i_C(t)$

原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(\omega t + \varphi_S)$

解：三要素法。 $u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0+) - u_{Cp}(0+)]e^{-t/\tau}$

$$\text{其中：}\begin{cases} \cancel{u_{Cp}(t) = u_{Cp}(\infty) = u_{Cp}(0+) = U_S} \\ u_C(0+) = 0 \\ \tau = (R_1 + R_3)C \end{cases}$$

$$u_{Cp}(t) = \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_S)}{Z} \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

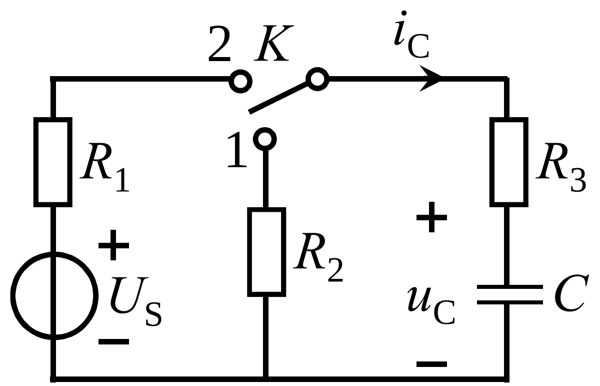
$$= \frac{U_m/\sqrt{2}}{|Z| \cdot \omega C} \angle(\varphi_S - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$Z = R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C} = |Z| \angle \varphi$$

$$u_{Cp}(0+) = \frac{U_m}{|Z| \cdot \omega C} \sin(\varphi_S - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

【例6.13-5】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 2 （稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $u_C(t)$， $\dfrac{du_C(t)}{dt}$， $i_C(t)$

解：换路后电路方程：$(R_2+R_3)C\dfrac{du_C(t)}{dt}+u_C=0$

特解：$u_{Cp}(t)=0$

通解：$u_{Ch}(t)=Ae^{-t/t}$ ， $\begin{cases} t=(R_2+R_3)C \\ A=u_C(0+)=U_S \end{cases}$

所以：$u_C(t)=u_{Cp}+u_{Ch}=U_Se^{-t/(R_2+R_3)C}$

$$\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{U_S}{(R_2+R_3)C}e^{-t/(R_2+R_3)C}$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\mathbf{L}$$

<u>*标准算法*</u>

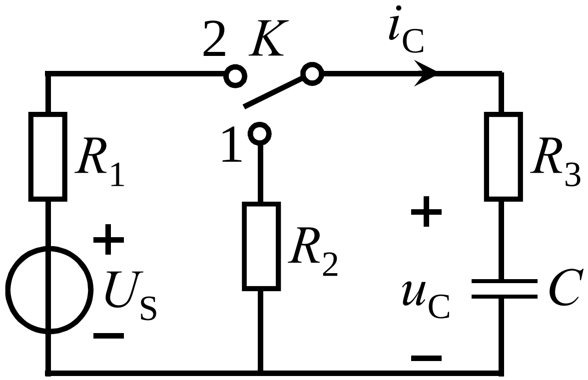
【例6.13-6】

右图所示电路。

已知：开关 K 初始位置 2 （稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $u_C(t)$， $\dfrac{du_C(t)}{dt}$， $i_C(t)$

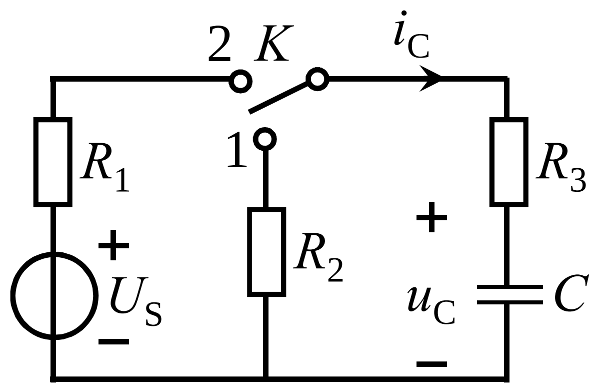


解：零输入响应法。$u_C(t) = u_{Ch}(t) = Ae^{-t/t}$

$$\text{其中：}\begin{cases} A = u_C(0+) = U_S \\ t\ = (R_2 + R_3)C \end{cases}$$

【例6.13-7】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 2（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

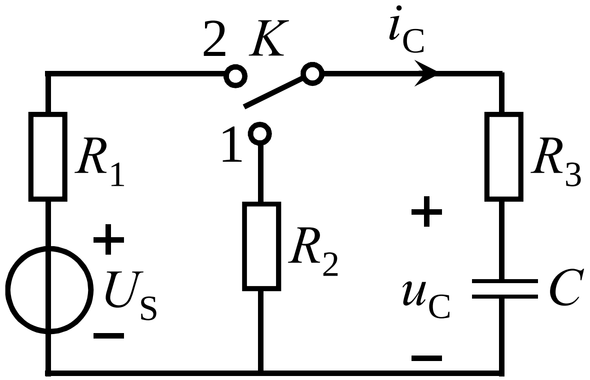
求：换路后的 $u_C(t)$，$\dfrac{du_C(t)}{dt}$，$i_C(t)$

解：三要素法。$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0+) - u_{Cp}(0+)]e^{-t/t}$

$$\text{其中：}\begin{cases} u_{Cp}(t) = u_{Cp}(\infty) = u_{Cp}(0+) = 0 \\ u_C(0+) = U_S \\ t \ = (R_2 + R_3)C \end{cases}$$

【例6.13-8】

右图所示电路。



已知：开关 K 初始位置 2（稳态）；

0 时刻，开关 K 从位置 2 切换至位置 1 。

求：换路后的 $u_C(t)$，$\dfrac{du_C(t)}{dt}$，$i_C(t)$

原恒压源 U_S 改为：$u_S = U_m \sin(wt + j_S)$

解：三要素法。 $u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0+) - u_{Cp}(0+)]e^{-t/t}$

换路前：

其中：
$$\begin{cases} u_{Cp}(t) = u_{Cp}(\infty) = u_{Cp}(0+) = 0 \\ \cancel{u_C(0+) = U_S} \\ t = (R_2 + R_3)C \end{cases}$$

$$u_C(t) = \frac{U_m \sin(wt + j_S)}{Z} \cdot \frac{1}{jwC}$$

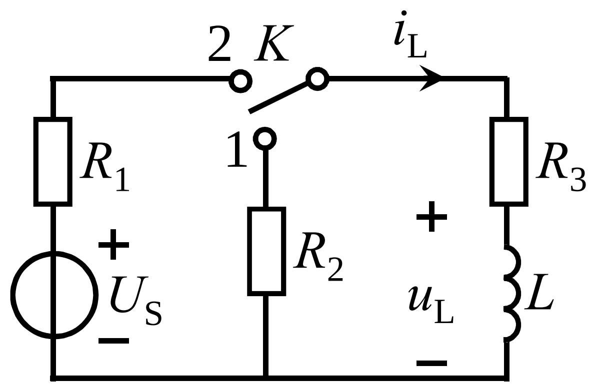
$$= \frac{U_m}{|Z| \cdot wC} \angle(j_S - j - \frac{p}{2})$$

$$Z = R_1 + R_3 + \frac{1}{jwC} = |Z| \angle j$$

$$u_C(0+) = \frac{U_m}{|Z| \cdot wC} \sin(j_S - j - \frac{p}{2})$$

【例6.14】

右图所示电路。



求：换路后的 $i_L(t)$，$u_L(t)$，$\dfrac{di_L(t)}{dt}$

思考题

例：在 0 时刻，将正弦信号 $u=120\sqrt{2}\sin(314t+45^{\circ})$V 加在 R = 30Ω和 L = 0.127 H 的串联电路中，求电感电流（零状态响应）。

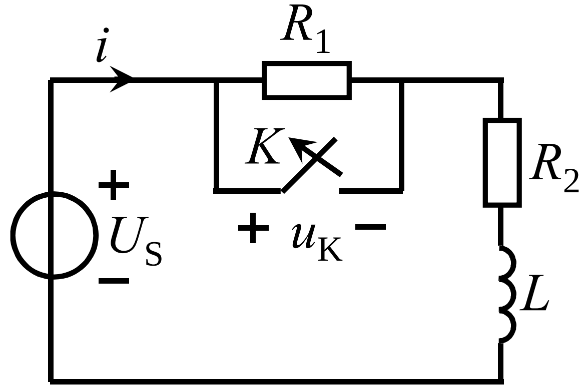
答案：$i=3.39\sin(314t-8.13^{\circ})+0.48e^{-236t}$ A

【例6.15】

右图所示电路。

已知：0 时刻，打开开关 K 。

求：换路后的开关电压 u_{K} 。



解：（1）标准算法。

换路后电路方程：$L\dfrac{di}{dt}+(R_1+R_2)i=U_{\mathrm{S}}$

特解和通解：$i_{\mathrm{Cp}}(t)=\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_1+R_2}$

$i_{\mathrm{Ch}}(t)=Ae^{-t/t}$ ，

$$\begin{cases} t=\dfrac{L}{R_1+R_2} \\ \dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_1+R_2}+A=i(0+)=\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_2}\Rightarrow A=\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_2}-\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_1+R_2} \end{cases}$$

所以：$u_{\mathrm{K}}(t)=R_1 i(t)=\mathbf{L}$

（2）三要素法：$u_{\mathrm{K}}(t)=u_{\mathrm{Kp}}(t)+[u_{\mathrm{K}}(0+)-u_{\mathrm{Kp}}(0+)]e^{-t/t}$

$$=\frac{R_1U_{\mathrm{S}}}{R_1+R_2}+[\frac{U_{\mathrm{S}}}{R_2}R_1-\frac{R_1U_{\mathrm{S}}}{R_1+R_2}]e^{-t/t}，\quad t=\frac{L}{R_1+R_2}$$

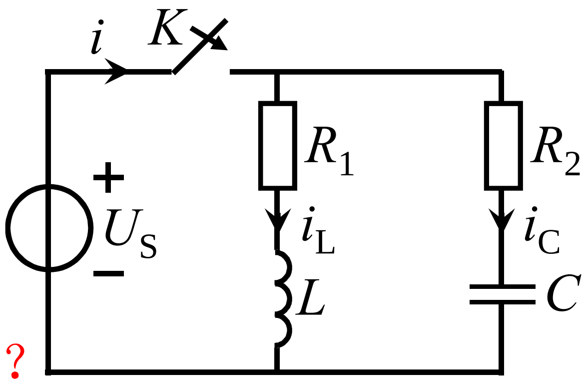
【例6.16】

右图所示电路。

已知：电路参数初始零状态；

　　　0 时刻，合上开关 K 。

求：换路后的开关电流 i 。



若要求开关电流无暂态分量，对参数有何要求？

解：换路后，L、C 两支路上的电流变化规律是独立的。

三要素法：

$$i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{Lp}}(t)+[i_{\mathrm{L}}(0+)-i_{\mathrm{Lp}}(0+)]e^{-t/t}=\frac{U_{\mathrm{S}}}{R_1}+[0-\frac{U_{\mathrm{S}}}{R_1}]e^{-t/t},\quad t=\frac{L}{R_1}$$

$$i_{\mathrm{C}}(t)=i_{\mathrm{Cp}}(t)+[i_{\mathrm{C}}(0+)-i_{\mathrm{Cp}}(0+)]e^{-t/t}=0+[\frac{U_{\mathrm{S}}}{R_2}-0]e^{-t/t},\quad t=R_2C$$

所以：$i(t)=i_{\mathrm{L}}(t)+i_{\mathrm{C}}(t)=\mathbf{L}$

要求：$\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_1}e^{-\frac{R_1}{L}t}=\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_2}e^{-\frac{1}{R_2C}t}\Rightarrow\begin{cases}R_1=R_2\\ \dfrac{L}{R_1}=R_2C\end{cases}$

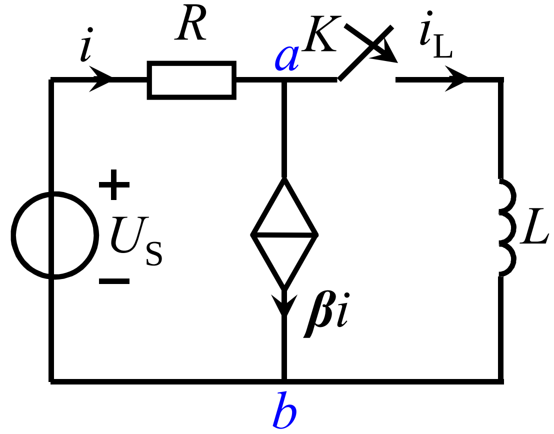
【例6.17】

右图所示电路。

已知：电路参数初始零状态；

0 时刻，闭合开关 K 。

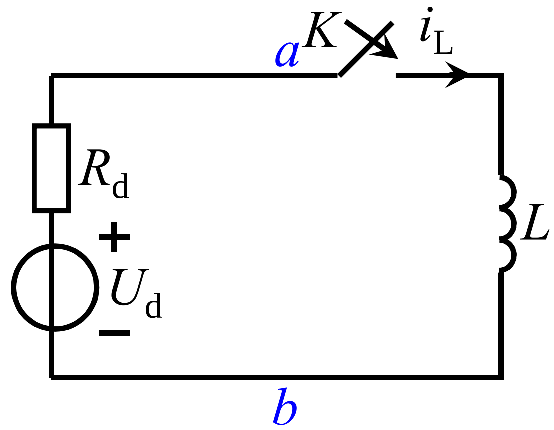
求：换路后的电流 i 、i_L 。



解：首先对 ab 点作戴维宁等效。

开路电压：$U_d = U_S$ ，短路电流：$I_d = (1-b)\dfrac{U_S}{R}$ ，等效内阻：$R_d = \dfrac{R}{1-b}$

（1）零状态响应法：$i_L(t) = \dfrac{U_d}{R_d}(1-e^{-t/t})$，$t = \dfrac{L}{R_d}$



（2）三要素法：$i_L(t) = i_{Lp}(t) + [i_L(0+) - i_{Lp}(0+)]e^{-t/t}$

$$= \frac{U_d}{R_d} + [0 - \frac{U_d}{R_d}]e^{-t/t}, \quad t = \frac{L}{R_d}$$

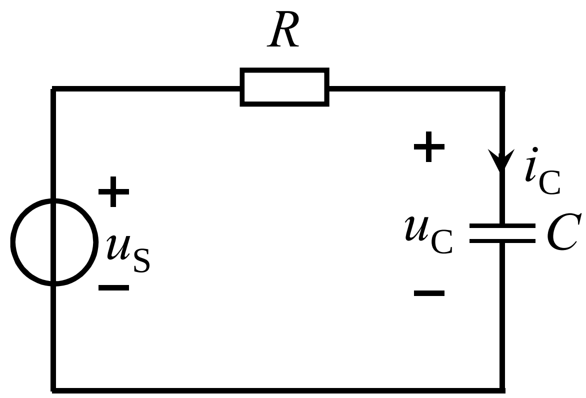
所以：$i(t) = \dfrac{i_L(t)}{1-b} == \mathbf{L}$

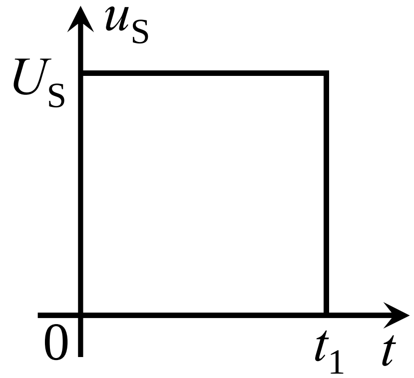
【例6.18】

右图所示电路。

已知：电路零状态，u_S 波形如下。

求：换路后的 u_C 、i_C 。





解：$0\sim t_1$ 时间段内，零状态响应。

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-t/t})，\quad t=RC$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\mathbf{L}$$

并可获得 t_1 时刻的电压值：$u_C(t_1)=U_S(1-e^{-t_1/t})$

t_1 以后时间段，零输入响应。

$$u_C(t)=Ae^{-(t-t_1)/t}\;，\quad t=RC，\quad A=u_C(t_1)$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=\mathbf{L}$$

v 二阶动态电路

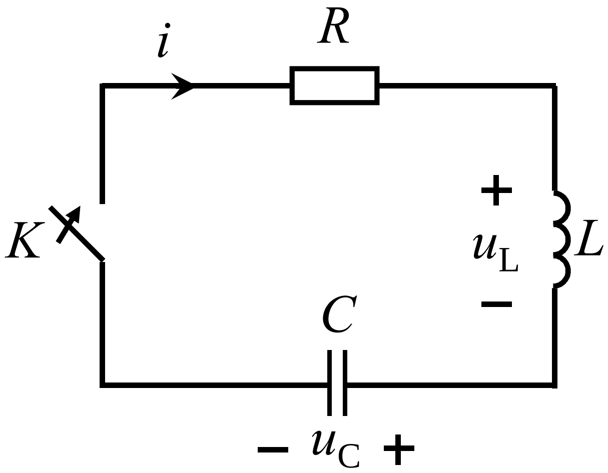
- ü 二阶动态电路：
  含两个独立储能元件（需用二阶常微分方程描述）的电路。

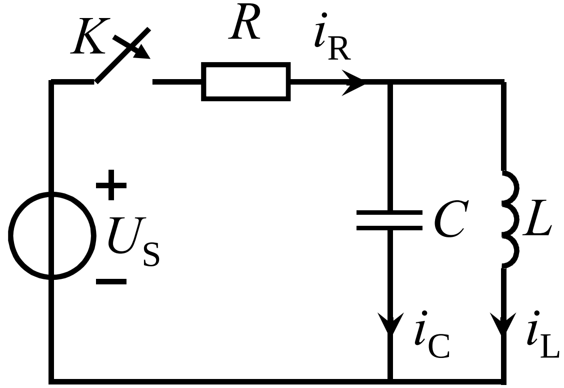
- ü 分析方法与一阶动态电路基本相同。

- ü 介绍 *RLC* 串联电路的零输入响应。

Ø 二阶动态电路（典型电路）

ü 下图所示两个典型的二阶动态电路。





ü 典型微分方程：$\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2b\dfrac{d\,f(t)}{dt} + w_0^2 f(t) = e(t)$

ü 特解：$f_{\mathrm{p}}(t)$，齐次解：$f_{\mathrm{h}}(t)$。

ü 特征方程：$s^2 + 2bs + w_0^2 = 0$，特征根：$s = -b \pm \sqrt{b^2 - w_0^2}$

Ø 二阶动态电路（典型电路）

$b > w_0$： 过阻尼，通解为：$f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$b < w_0$： 欠阻尼，通解为：$f(t) = A e^{-bt} \sin(w_d t + q)$

$b = w_0$： 临界阻尼，通解为：$f(t) = A_3 e^{st} + A_4 t e^{st}$

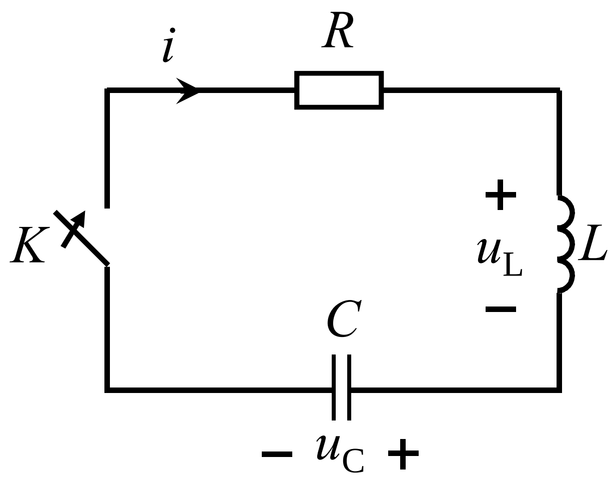
ü 二阶动态电路过渡过程的形式取决于特征根。

ü 特征根仅仅取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

ü 可根据初值， 确定上述待定系数 。

ü 特征方程：$s^2 + 2bs + w_0^2 = 0$ ，特征根：$s = -b \pm \sqrt{b^2 - w_0^2}$

Ø 二阶动态电路（零输入响应）



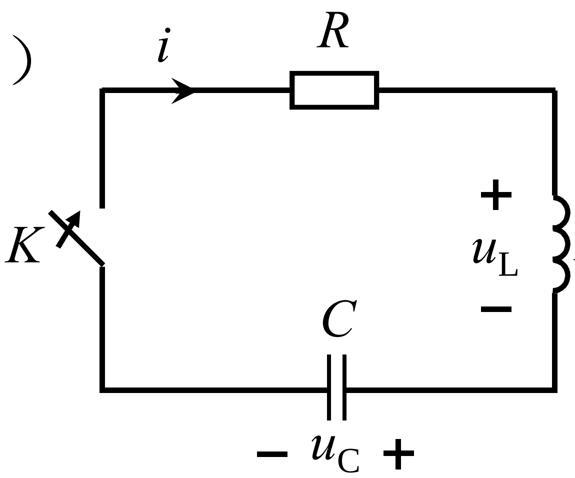
- 右图所示电路。
- 定义：$u_C(0-) = U_0$， $i(0-) = 0$ 。
- $t = 0$ 时刻闭合开关 K 后，由电路得：$Ri + u_L + u_C = 0$

  根据电路中电压电流关系，有：
  $$RC\frac{du_C}{dt} + L\frac{di}{dt} + u_C = 0$$
  $$RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

- 特征方程：$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$ 特征根：$s_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$

$$s^2 + 2bs + w_0^2 = 0 \qquad s = -b \pm \sqrt{b^2 - w_0^2}$$

Ø 二阶动态电路（零输入响应～过阻尼）



当$(\frac{R}{2L})^2 > \frac{1}{LC}$，即$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$时

$$s_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

ü 特征方程有两个不相等的负实根。

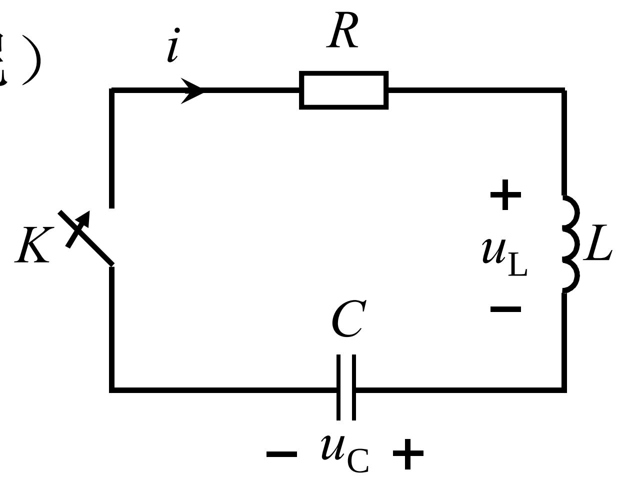
通解表达式为：$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

ü 根据：
$$\begin{cases} u_C(0+) = U_0 \quad \Rightarrow \quad A_1 + A_2 = U_0 \\ i(0+) = C\dfrac{du_C}{dt}(0+) = 0 \quad \Rightarrow \quad Cs_1 A_1 + Cs_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

因此：$A_1 = \dfrac{s_2}{s_2 - s_1} U_0$，$A_2 = \dfrac{-s_1}{s_2 - s_1} U_0$

即：$u_C(t) = \dfrac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})$

Ø 二阶动态电路（零输入响应 ~ 过阻尼）

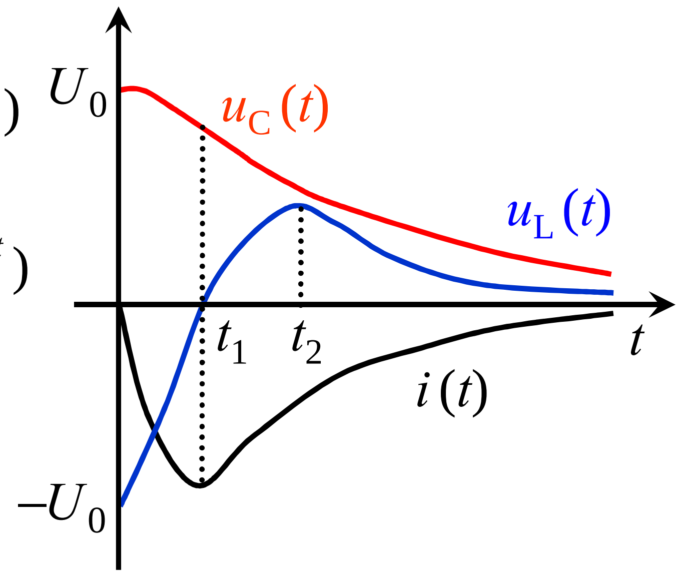


$$s_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \mathbf{L} = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \mathbf{L} = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$$

$$u_C(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})$$



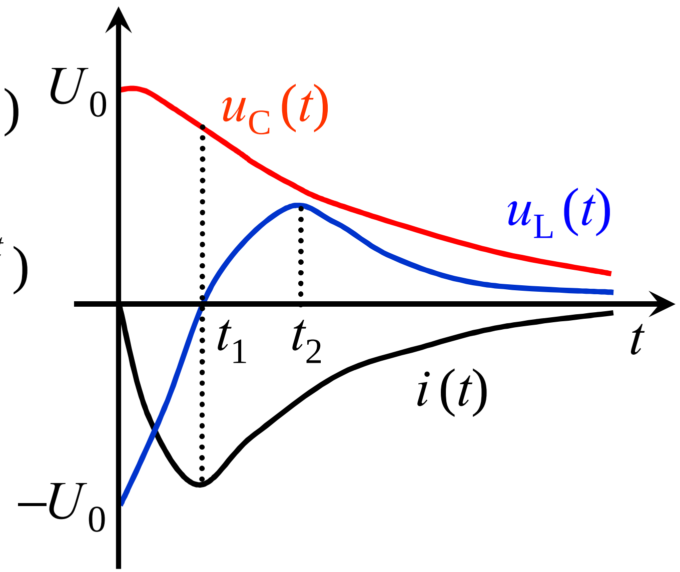
Ø 二阶动态电路（零输入响应～过阻尼～波形分析）

ü $u_C(t)$ 由两个单调下降的指数函数组成，波形是非周期、非振荡的。

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \mathbf{L} = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \mathbf{L} = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$$

$$u_C(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})$$



Ø 二阶动态电路（零输入响应～过阻尼～波形分析）

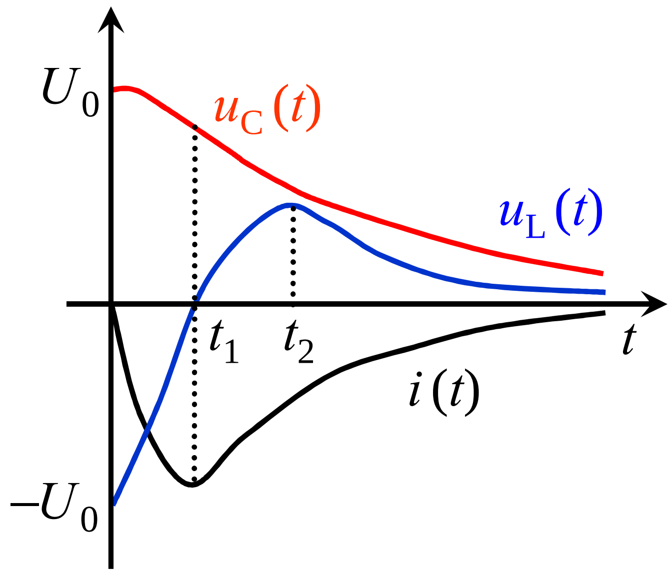
ü $u_C(t)$ 由两个单调下降的指数函数组成，波形是非周期、非振荡的。

ü i 只有大小变化，没有方向变化。

电路接通后，电容始终放电，放电电流从零至极值再趋于零。

$$令: \frac{di}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad t_1=\frac{1}{s_1-s_2}\cdot\ln\frac{s_2}{s_1}$$

$$此时: \left.\frac{d^2u_C}{dt^2}\right|_{t=t_1}=0，\ u_L=0$$



ü $u_L(t)$ 由 $-U_0$ 开始，从负至正再趋于零。

$$令: \frac{du_L}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad t_2=\frac{2}{s_1-s_2}\cdot\ln\frac{s_2}{s_1}=2t_1$$

$$此时: \left.\frac{d^2i}{dt^2}\right|_{t=t_2}=0$$

Ø 二阶动态电路（零输入响应～过阻尼～能量）

ü $0 \sim t_1$ 阶段：

电容电压逐步降低（逐步释放电场能量）；

电流（绝对值）逐步增加；

电感逐步增强（储存）磁场能量；

电阻一直消耗能量。

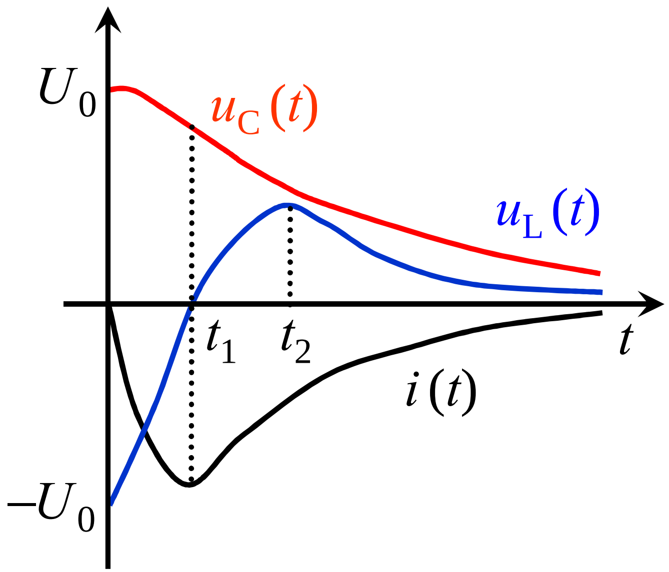
ü t_1 以后阶段：

电容电压逐步降低（逐步释放电场能量）；

电流（绝对值）逐步减少；

电感逐步减少（释放）磁场能量；

电阻一直消耗能量。

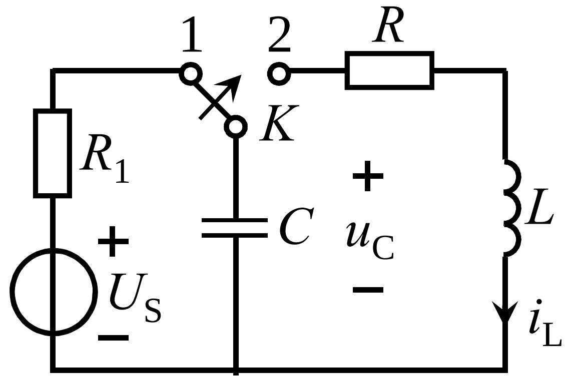


【例6.19】

右图所示电路。

已知：$U_S = 10\text{V}$，$R = 4\text{k}\Omega$，$C = 1\mu\text{F}$，$L = 1\text{H}$ 。

求：$t = 0$ 时刻开关 K 从 1 至 2 后的 u_C 。



解：换路瞬间：$u_C(0+) = u_C(0-) = U_S$

$$i_L(0+) = -C\frac{du_C}{dt}(0+) = 0$$

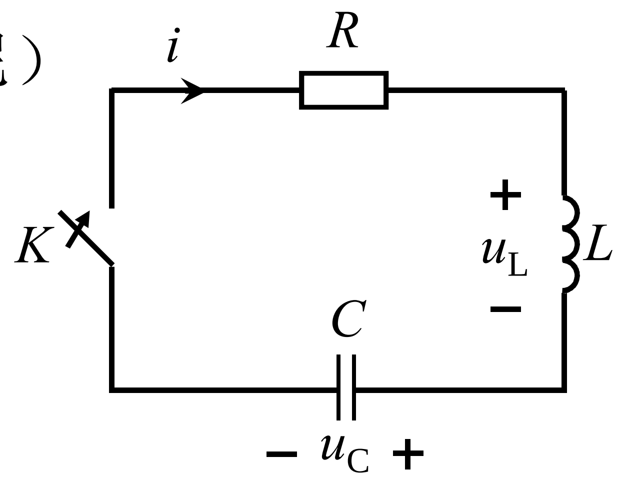
由于$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$，所以通解表达式为：$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

其中：$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = \mathbf{L}$，$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = \mathbf{L}$

$$A_1 = \frac{s_2}{s_2 - s_1}u_C(0+),\quad A_2 = \frac{-s_1}{s_2 - s_1}u_C(0+)$$

Ø 二阶动态电路（零输入响应～欠阻尼）

当$(\frac{R}{2L})^2 < \frac{1}{LC}$，即$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$时



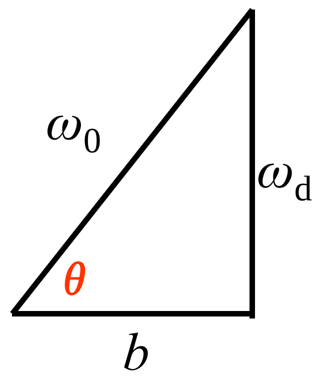
ü 特征方程有两个实部为负的共轭复根。

$$s = -b \pm \sqrt{b^2 - w_0^2}$$
$$= -b \pm jw_d$$

ü 衰减系数：$b = \dfrac{R}{2L}$

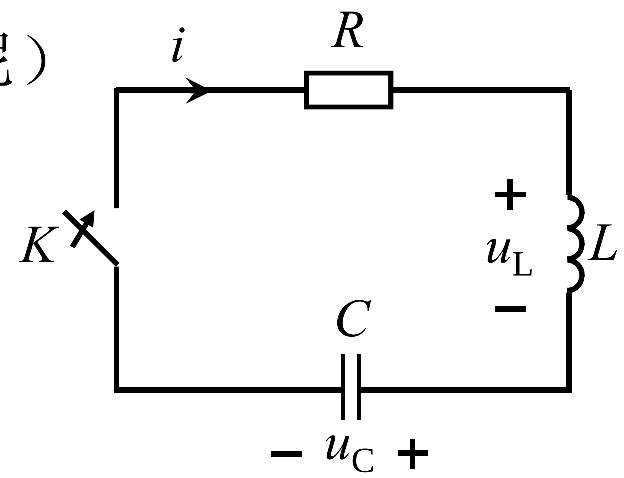
谐振角频率：$w_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

（固有）振荡角频率：$w_d = \sqrt{w_0^2 - b^2}$



ü 通解表达式为：$u_C(t) = Ae^{-bt}\sin(w_d t + q)$

Ø 二阶动态电路（零输入响应～欠阻尼）

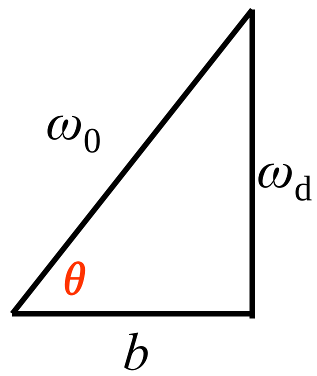


当$(\frac{R}{2L})^2 < \frac{1}{LC}$，即$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$时

ü 根据：
$$\begin{cases} u_C(0+) = U_0 \quad \Rightarrow \quad A\sin q = U_0 \\ i(0+) = C\dfrac{du_C}{dt}(0+) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(-b)\sin q + Aw_d \cos q = 0 \end{cases}$$

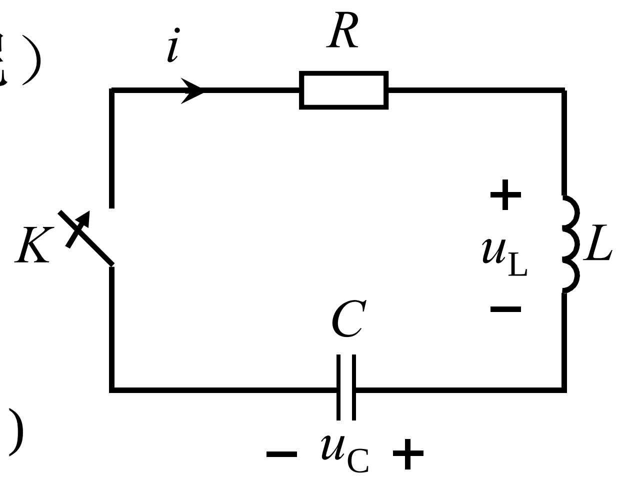
ü 因此：$q = tg^{-1}\dfrac{w_d}{b}$，$A = \dfrac{U_0}{\sin q} = \dfrac{w_0}{w_d}U_0$

$$u_C(t) = \frac{w_0}{w_d}U_0 e^{-bt}\sin(w_d t + q)$$



$$u_C(t) = Ae^{-bt}\sin(w_d t + q)$$

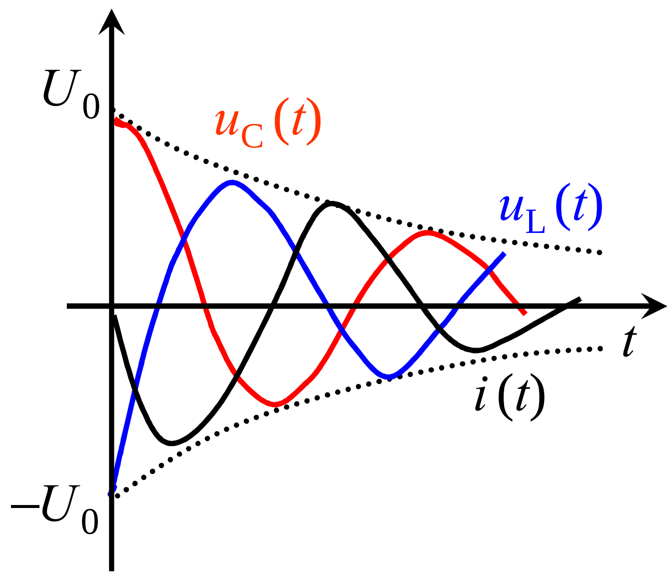
Ø 二阶动态电路（零输入响应 ~ 欠阻尼）



$$i(t)=C\frac{du_{\mathrm{C}}}{dt}=\mathbf{L}=\frac{U_0}{w_{\mathrm{d}}L}e^{-bt}\sin(w_{\mathrm{d}}t+p)$$

$$u_{\mathrm{L}}(t)=L\frac{di}{dt}=\mathbf{L}=\frac{w_0}{w_{\mathrm{d}}}U_0e^{-bt}\sin(w_{\mathrm{d}}t-q)$$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=\frac{w_0}{w_{\mathrm{d}}}U_0e^{-bt}\sin(w_{\mathrm{d}}t+q)$$



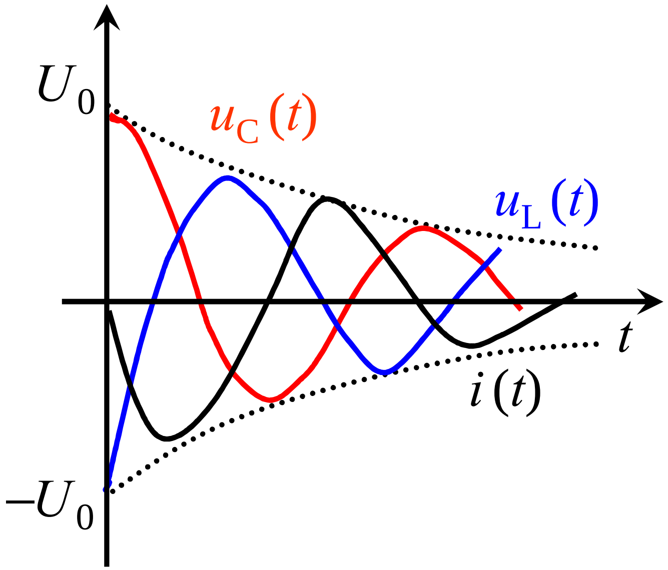
Ø 二阶动态电路（零输入响应～欠阻尼～波形分析）

ü 波形均是振幅按指数规律衰减的正弦波，波形是周期、振荡的。

$$i(t)=C\frac{du_{\mathrm{C}}}{dt}=\mathbf{L}=\frac{U_0}{w_{\mathrm{d}}L}e^{-bt}\sin(w_{\mathrm{d}}t+p)$$

$$u_{\mathrm{L}}(t)=L\frac{di}{dt}=\mathbf{L}=\frac{w_0}{w_{\mathrm{d}}}U_0e^{-bt}\sin(w_{\mathrm{d}}t-q)$$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=\frac{w_0}{w_{\mathrm{d}}}U_0e^{-bt}\sin(w_{\mathrm{d}}t+q)$$



Ø 二阶动态电路（零输入响应～欠阻尼～波形分析）

ü 波形均是振幅按指数规律衰减的正弦波，波形是周期、振荡的。

ü u_C 达极大值时，$i = 0$；

i 达极大值时，$u_L = 0$ （通过对 i 求导得：$t = \dfrac{1}{w_d} tg^{-1} \dfrac{w_d}{b}$）

ü 阻尼（衰减）振荡：振幅逐渐减小的振荡。

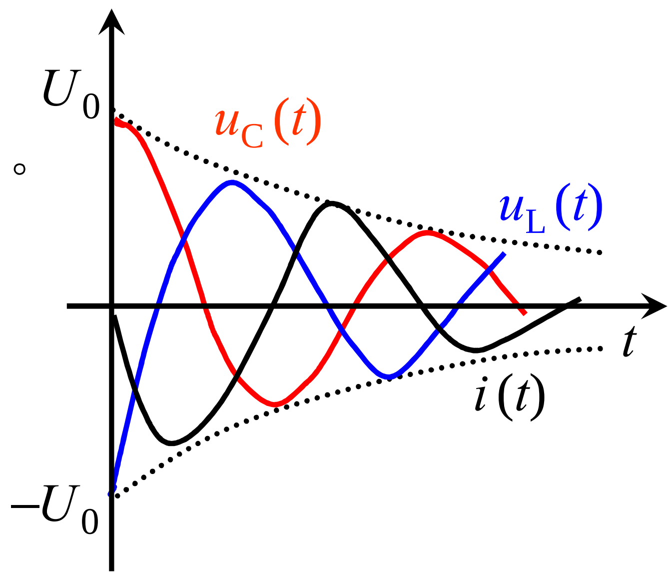
衰减系数 b 越大，振幅衰减越快（$u_C \sim e^{-bt}$）。

（若 $b = 0$，等幅振荡，无阻尼振荡）

振荡角频率ω_d 减少时，振荡减慢。

（若 $\omega_d = 0$，非周期非振荡）

（无阻尼振荡时，$\omega_d = \omega_0$ ）



Ø 二阶动态电路（零输入响应～欠阻尼～能量）

ü $0 \le t \le \dfrac{q}{w_{\mathrm{d}}}$ 阶段：

电容电压逐步降低（逐步释放电场能量）；

电流（绝对值）逐步增加；

电感逐步增强（储存）磁场能量；

电阻一直消耗能量。

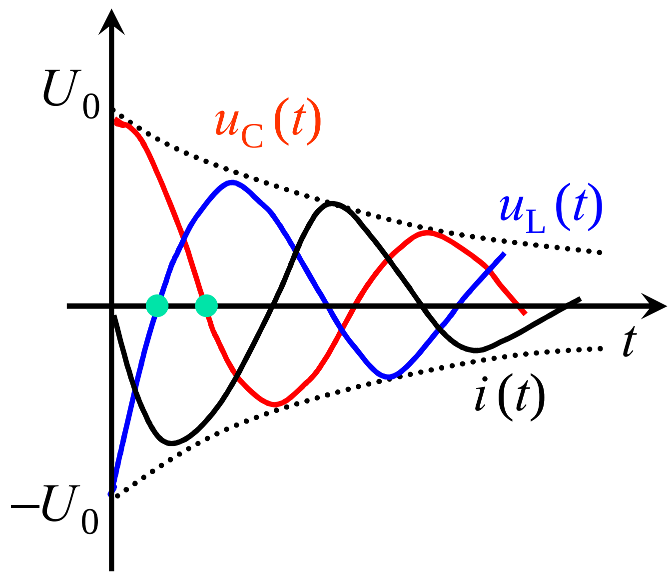
ü $\dfrac{q}{w_{\mathrm{d}}} \le t \le \dfrac{p-q}{w_{\mathrm{d}}}$ 阶段：

电容电压逐步降低（逐步释放电场能量）；

电流（绝对值）逐步减少；

电感逐步减少（释放）磁场能量；

电阻一直消耗能量。



二阶动态电路（零输入响应～欠阻尼～能量）

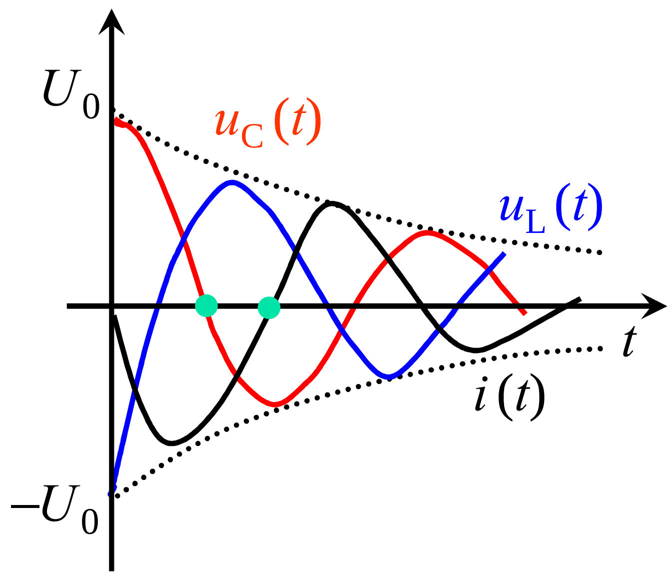
- $\dfrac{\pi-\theta}{\omega_{\mathrm{d}}} \le t \le \dfrac{\pi}{\omega_{\mathrm{d}}}$ 阶段：

  电流（绝对值）逐步减少；

  电感逐步减少（释放）磁场能量；

  电阻一直消耗能量；

  电容电压逐步增加（反向充电）。

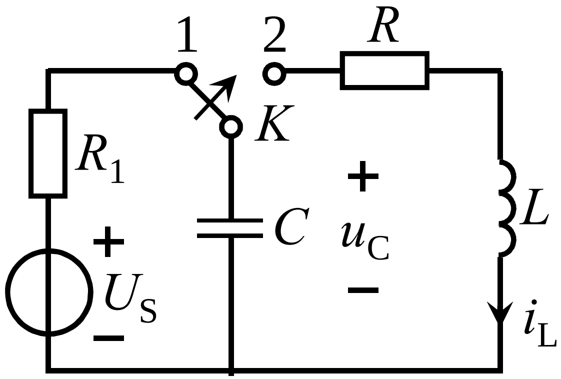


【例6.20】

右图所示电路。

已知：$U_S = 15\text{KV}$，$R = 6 \times 10^{-4}\,\Omega$，
$C = 1700\mu\text{F}$，$L = 6 \times 10^{-9}\,\text{H}$ 。

求：$t = 0$ 时刻开关 K 从 1 至 2 后的 i_L 及其极值。



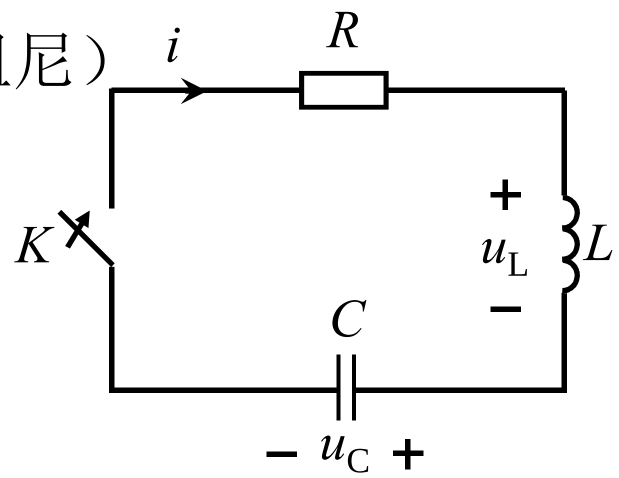
解：由于$R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$，振荡参数为：$b = \dfrac{R}{2L} = 5\times10^4$ ，$w_d = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - b^2} = 3\times10^5$

通解表达式为：$i(t) = \dfrac{U_0}{w_d L} e^{-bt} \sin(w_d t + p) = 8.3\times10^6 e^{-5\times10^4 t} \sin(3\times10^5 t)\text{A}$

当 $t = \dfrac{1}{w_d} tg^{-1} \dfrac{w_d}{b} = 4.6\times10^{-6}\text{s}$ 时，$i(t)_{\max} = 6.3\times10^6\,\text{A}$

当 $R = 0$ 时，无阻尼振荡，此时：$b = 0$，$w_d = w_0$ ，$i_L(t) = \dfrac{U_0}{w_0 L} \sin(wt + p)$

Ø 二阶动态电路（零输入响应～临界阻尼）



当$(\frac{R}{2L})^2=\frac{1}{LC}$，即$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$时

$$s_1=s_2=-\frac{R}{2L}=s$$

ü 特征方程有两个相等的负实根。

通解表达式为：$u_C(t)=(A_3+A_4t)e^{st}$

ü 根据：$\begin{cases} u_C(0+)=U_0 \quad \Rightarrow \quad A_3=U_0 \\ i(0+)=C\dfrac{du_C}{dt}(0+)=0 \quad \Rightarrow \quad A_3s+A_4=0 \end{cases}$

因此：$A_3=U_0$，$A_4=-sU_0$

所以：$u_C(t)=U_0(1-st)e^{st}$

$$i(t)=-\frac{U_0}{L}te^{st}$$

$$u_L(t)=-U_0(1+st)e^{st}$$

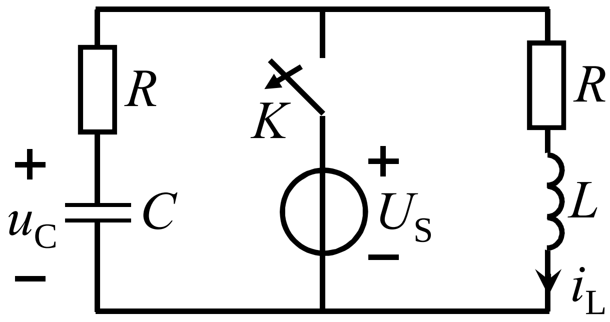
图形类似于过阻尼，非周期、非振荡。

【例6.21】

右图所示电路。

已知：$U_S = 1\text{V}$，$R = 1\Omega$，$C = 1\text{F}$，$L = 1\text{H}$ 。

求：$t = 0$ 时刻开关 K 打开后的 $i_L(t)$、$u_C(t)$ 。



解：由于 $2R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$，临界阻尼：$s_1 = s_2 = -\frac{2R}{2L} = -1$

通解表达式为：$u_C(t) = (A_3 + A_4 t)e^{-t}$

根据初值，有：
$$\begin{cases} u_C(0+) = U_S \quad \Rightarrow \quad A_3 = 1 \\ i_L(0+) = -C\dfrac{du_C}{dt}(0+) = \dfrac{U_S}{R} \quad \Rightarrow \quad -A_3 + A_4 = -1 \end{cases}$$

所以：$u_C(t) = e^{-t}\text{V}$，$i_L(t) = e^{-t}\text{A}$

- 二阶动态电路分析要点

Ø 二阶动态电路分析要点（*RLC* 串联电路）

ü *RLC* 串联电路方程一般形式：$LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=u$

初值为：$u_C(0+)$， $\dfrac{du_C}{dt}(0+)=\dfrac{i_C(0+)}{C}$

<u>*（全响应 = 零输入响应 + 零状态响应 = 特解 + 通解）*</u>

ü 特解 $u_{Cp}(t)$：

当 $u=U_S$（直流）时，按纯电阻直流（电容/电感 ...）电路方式处理；

当 $u=u_S$ （正弦）时，按正弦稳态电路方式处理。

ü 通解 $u_{Ch}(t)$：

特征方程：$s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}=0$

特征根：$s_{12}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2-\dfrac{1}{LC}}=-b\pm\sqrt{b^2-w_0^2}=-b\pm jw_d$

Ø 二阶动态电路分析要点（*RLC* 串联电路）

ü 当 $b^2 - w_0^2 > 0$ 时：$u_{Ch}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ ， $\dfrac{du_{Ch}(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t}$

ü 当 $b^2 - w_0^2 = 0$ 时：$u_{Ch}(t) = (A_3 + A_4 t)e^{-bt}$ ， $\dfrac{du_{Ch}(t)}{dt} = [-b(A_3 + A_4 t) + A_4]e^{-bt}$

ü 当 $b^2 - w_0^2 < 0$ 时：$u_{Ch}(t) = Ae^{-bt}\sin(w_d t + q)$

$$\frac{du_{Ch}(t)}{dt} = Ae^{-bt}[-b\sin(w_d t + q) + w_d\cos(w_d t + q)]$$

（利用初值 $u_C(0+)$ 和 $\dfrac{du_C}{dt}(0+)$ ，可确定各系数）

注意，初值是全解的初值：$u_C(0+) = u_{Cp}(0+) + u_{Ch}(0+)$

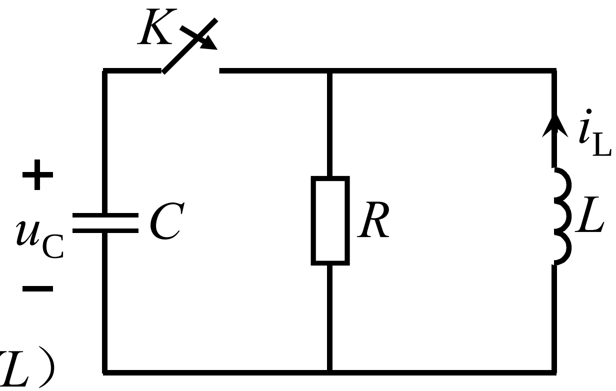
特征方程：$s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC} = 0$

特征根：$s_{12} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2 - \dfrac{1}{LC}} = -b \pm \sqrt{b^2 - w_0^2} = -b \pm jw_d$

- Ø 二阶动态电路分析要点（*RLC* 并联电路）

  - ü 一般选电感电流，列写二阶微分方程。

【例6.22】



右图所示电路。

判别电路响应的形式 。

解：根据 0+ 时刻电路，得：$\begin{cases} u_C + L\dfrac{di_L}{dt} = 0\text{（}KVL\text{）} \\ i_L = C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{R}\text{（}KCL\text{）} \end{cases}$

经整理后，得：$LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

特征根为：$s_{12} = -\dfrac{1}{2RC} \pm \sqrt{(\dfrac{1}{2RC})^2 - \dfrac{1}{LC}}$ ，判别式：$\dfrac{1}{R} \sim 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

例：当$\dfrac{1}{R} > 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$时，两个负实根，无振荡。

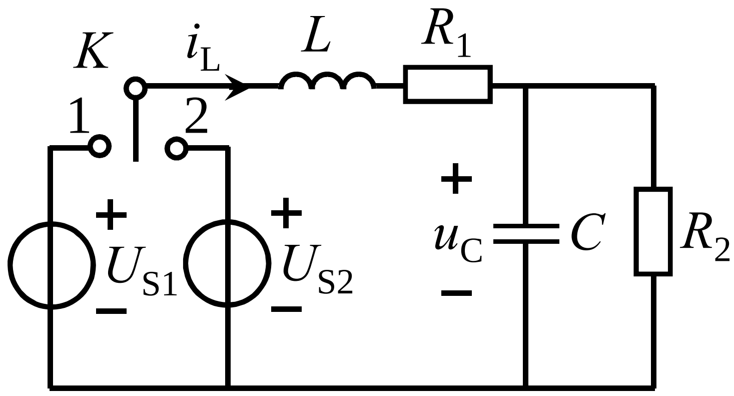
RLC 串联时，增大 R 可抑制振荡；RLC 并联时，减小 R 可抑制振荡。

【例6.23】

右图所示电路。

已知：$R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 2\,\Omega$，$C = 0.25\text{F}$，
$L = 2\,\text{H}$ ，$U_{S1} = 6\text{V}$，$U_{S2} = 12\text{V}$；
开关初始位置1（已稳态）。

求：$t = 0$ 时刻开关 K 从 1 至 2 后的 $u_C(t)$ 与 $i_L(t)$ 。



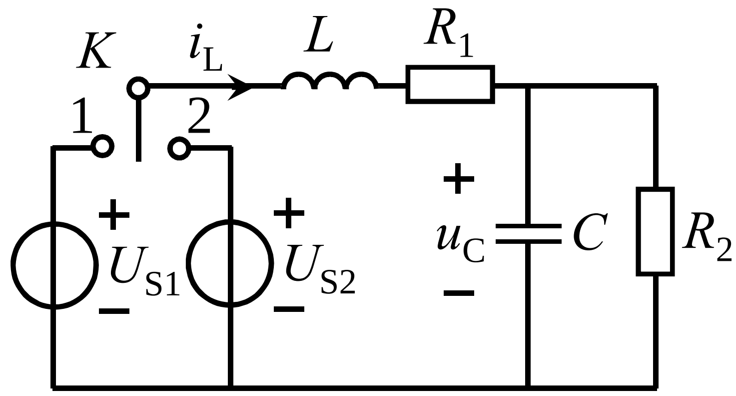
解：根据换路前电路，得：$i_L(0-) = \dfrac{U_{S1}}{R_1 + R_2} = 0.5\text{A}$， $u_C(0-) = R_2 i_L(0-) = 1\text{V}$

根据 0+ 时刻电路，得：
$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} + R_1 i_L + u_C = U_{S2} \text{（}KVL\text{）} \\ i_L = C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{R_2} \text{（}KCL\text{）} \end{cases}$$

经整理并代入数据后，得：

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 7\frac{du_C}{dt} + 12u_C = 24$$

右图所示电路。



已知：$R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 2\,\Omega$，$C = 0.25\text{F}$，
$L = 2\,\text{H}$，$U_{S1} = 6\text{V}$，$U_{S2} = 12\text{V}$；
开关初始位置1（已稳态）。

求：$t = 0$ 时刻开关 K 从 1 至 2 后的 $u_C(t)$ 与 $i_L(t)$ 。

解：特解：$u_{Cp}(t) = 2\text{V}$ ，通解：$u_{Ch}(t) = A_1e^{-3t} + A_2e^{-4t}$

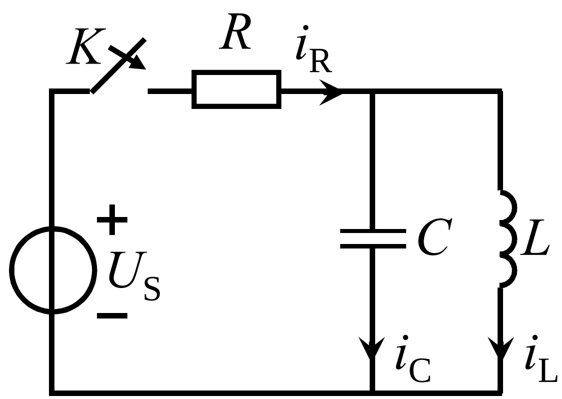
根据初值，有：$\begin{cases} u_C(0+) = 2 + A_1 + A_2 = u_C(0-) = 1 \\ i_L(0+) = C\dfrac{du_C}{dt}(0+) + \dfrac{u_C(0+)}{R_2} = -\dfrac{3}{4}A_1 - A_2 + \dfrac{1}{2} = i_L(0-) = 0.5 \end{cases}$

解得：$A_1 = -4$，$A_2 = 3$

...结论...

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 7\frac{du_C}{dt} + 12u_C = 24$$

【例6.24】



右图所示电路。

已知：$R = 50\Omega$，$C = 100\mu F$，$L = 0.5\,H$，

$U_S = 50V$，$i_L(0-) = 2A$，$u_C(0-) = 0$。

求：$t = 0$ 时刻开关 K 合上后的 $i_L(t)$ 。

解：根据 0+ 时刻电路，得：
$$\begin{cases} Ri_R + L\dfrac{di_L}{dt} = U_S \text{（}KVL\text{）} \\ i_R = i_L + C\dfrac{du_C}{dt} = i_L + LC\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} \text{（}KCL\text{）} \end{cases}$$

经整理并代入数据后，得：
$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 200\frac{di_L}{dt} + 20000 i_L = 20000$$

特解：$i_{Lp}(t) = 1A$

通解：$i_{Lh}(t) = Ae^{-100t}\sin(100t + j)$ （特征根 $s = -100 \pm j100$ ）

根据初值，有：
$$\begin{cases} i_L(0+) = 1 + A\sin j = i_L(0-) = 2 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0+) = \dfrac{u_L(0+)}{L} = -200A\sin j + 200A\cos j = \dfrac{u_C(0+)}{L} = 0 \end{cases}$$

解得：$j = 45^{\mathbf{0}}$，$A = \sqrt{2}$

v 二阶动态电路的直觉分析法

- ü 工程实际应用中，以关注特征为主。

  （初始值、变化趋势、稳态值、过渡时间、阻尼系数...）

- ü 以二阶 *RLC* 串联型动态电路为例：

  已知：R、L、C、$u_C(0-)$、$i_L(0-)$，并可依据电路获得 $u_C(\infty)$、$i_L(\infty)$；

  则：电路的特征根 s_{12} 可求，并可获得电路的过渡过程形式；

若单调衰减形式：以初值确定曲线起点，以初值导数确定曲线变化趋势，变化速率以持续时间较长的特征根为主，过渡过程约 3～5 个时间常数。

若振荡衰减形式：曲线起点、曲线变化趋势及过渡过程时间同上，振荡峰值的变化速率取决于特征根（实部）。

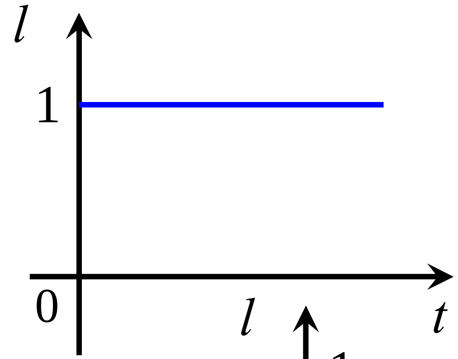
具体请参考教材 P325～327 说明例。

单位阶跃响应

- 单位阶跃响应：

  单位阶跃信号的激励源加至动态电路后，所产生的零状态响应。

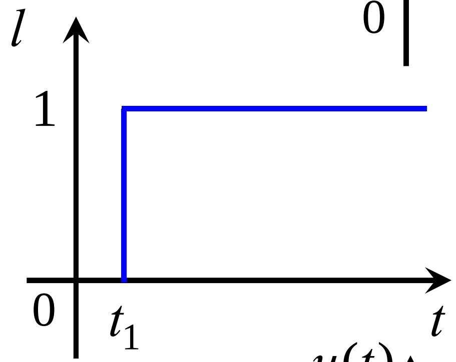
- 单位阶跃信号：$l(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

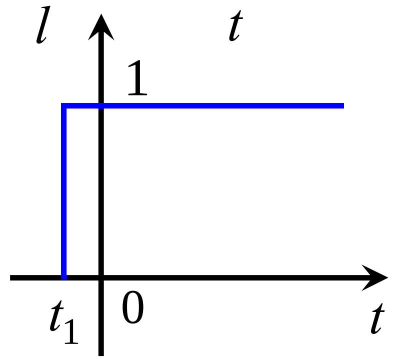


- A 个单位阶跃信号。

- 迟延（位移）单位阶跃信号：

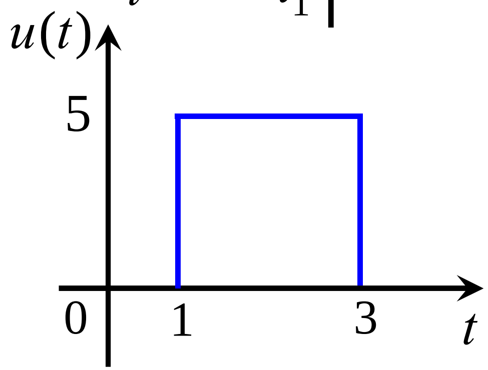
$$l(t-t_1)=\begin{cases}0 & t<t_1\\ 1 & t>t_1\end{cases}$$





- 脉冲（门）信号：

$$u(t)=5l(t-1)-5l(t-3)$$

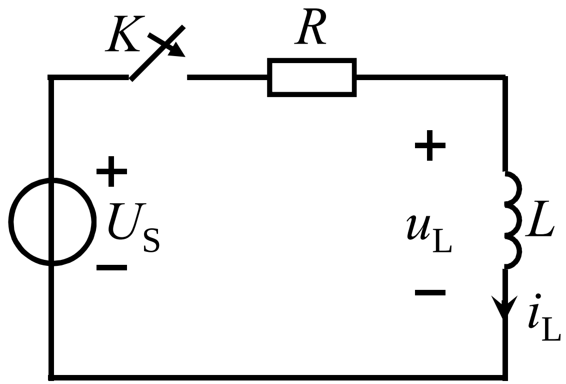


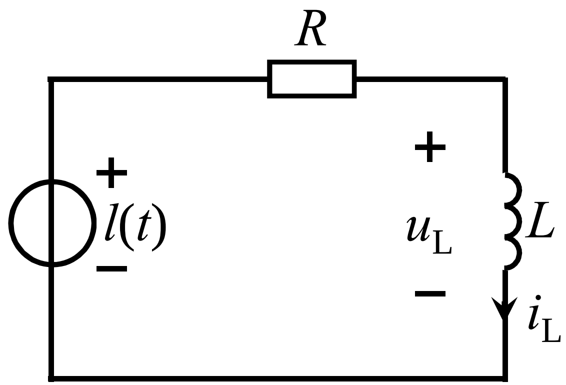
Ø 单位阶跃响应

ü $t = 0$ 时刻，合上开关。
（电感初始电流为零）

ü 当 $U_S = 1\text{V}$ 时：$U_S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

ü $l(t)$ 又称开关函数。





Ø 单位阶跃响应

ü $t = 0$ 时刻，合上开关。
（电感初始电流为零）

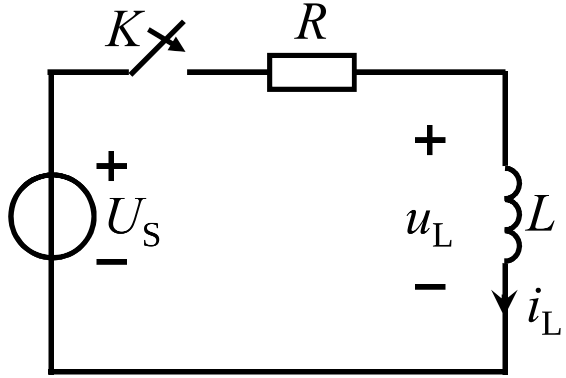
ü 零状态响应：$i_L(t) = \dfrac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

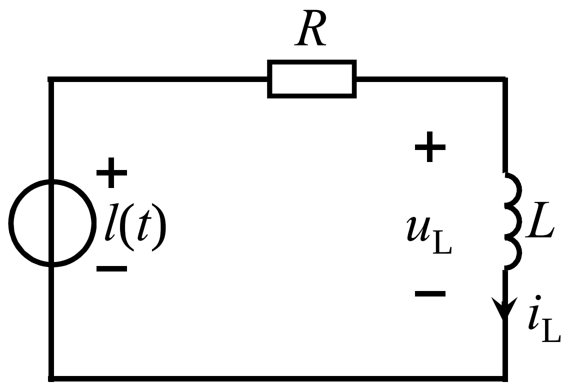
ü 单位阶跃响应：$i_L(t) = \dfrac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot l(t)$

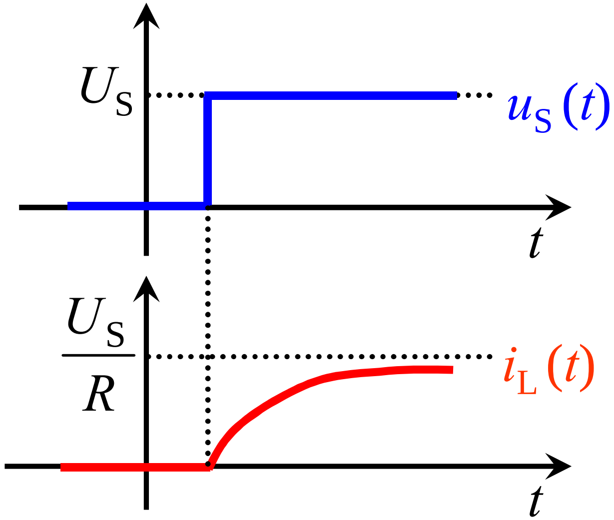
ü 若定义 $t = t_0$ 时刻，合上开关：

$$i_L(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}(t - t_0)}) \cdot l(t - t_0)$$

（激励延迟多少，响应亦延迟多少）





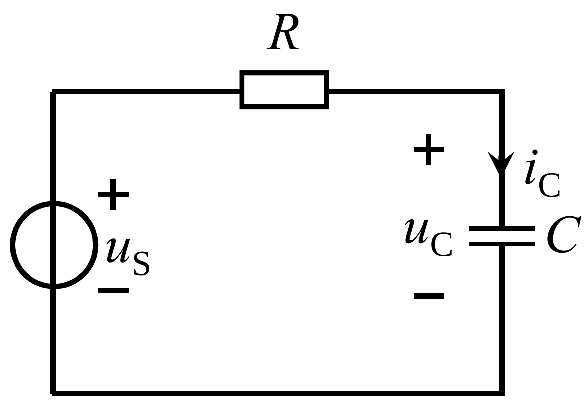


【复例6.18】

右图所示电路。

已知：电路零状态，u_S 波形如下。

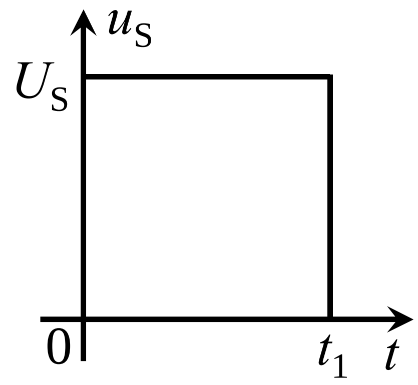
求：换路后的 u_C 、i_C 。



解：$0\sim t_1$ 时间段内，零状态响应：$u_C(t)=U_S(1-e^{-t/RC})$

并可获得 t_1 时刻的电压值:$u_C(t_1)=U_S(1-e^{-t_1/RC})$

t_1 以后时间段，零输入响应:$u_C(t)=u_C(t_1)e^{-(t-t_1)/RC}$



单位阶跃响应分析:$u_S(t)=U_S[l(t)-l(t-t_1)]$

则：$u_C(t)=U_S(1-e^{-t/RC})\cdot l(t)-U_S(1-e^{-(t-t_1)/RC})\cdot l(t-t_1)$

v 本节作业

- ü 习题 7

  补充题 1、补充题 2（换路定则）

  补充题 3（斜坡信号激励）

  补充题 4（一阶电路分析基础）

  所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。

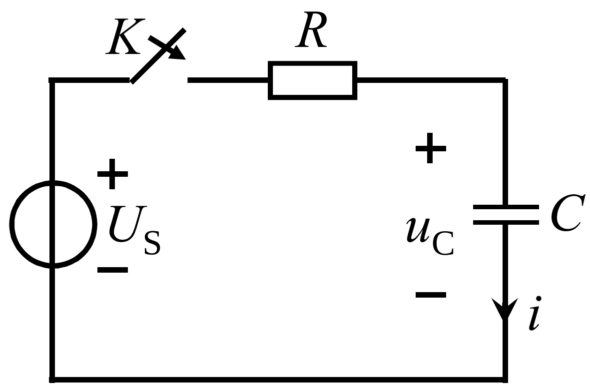
v 本节作业（补充题 1）

ü 补充题 1

下图所示电路中：$U_S = 100V$，$R = 1000\Omega$，$C = 1uF$，开关 S 合上以前电容未充过电。

定义：$t = 0$ 时合上开关 K 。

计算：$t = 0^+$ 时，i ，$\dfrac{di}{dt}$ ，$\dfrac{d^2 i}{dt^2}$ 。



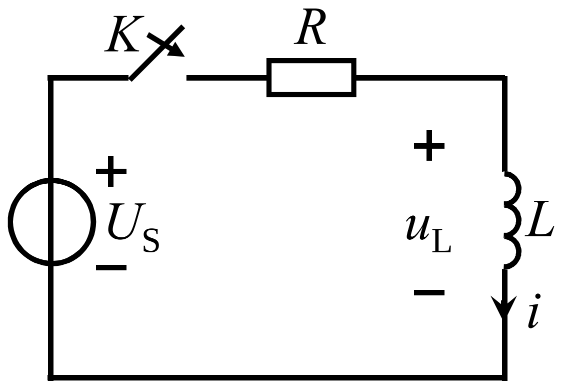
v 本节作业（补充题 2）

ü 补充题 2

下图所示电路中：$U_S = 100\text{V}$，$R = 10\Omega$，$L = 1\text{H}$，开关 S 合上以前电感无初始能量。

定义：$t = 0$ 时合上开关 K 。

计算：$t = 0^+$ 时，$\dfrac{di}{dt}$ ，$\dfrac{d^2 i}{dt^2}$ 。

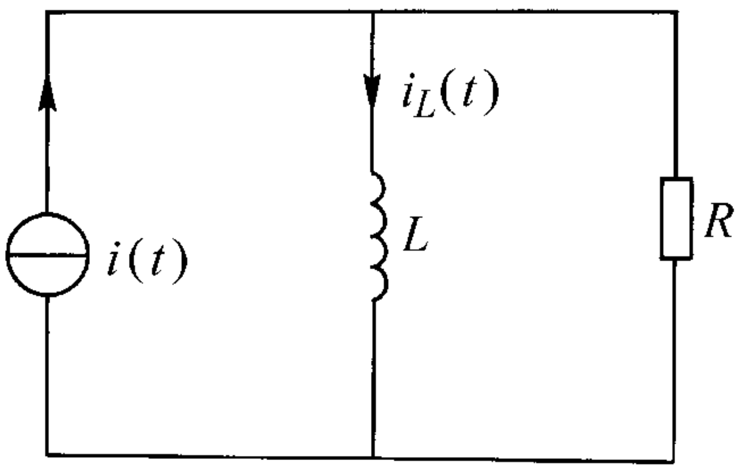


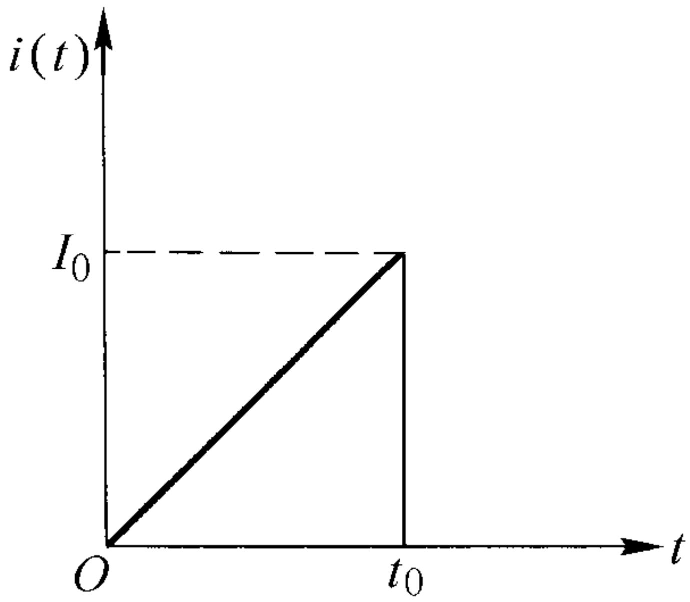
本节作业（补充题 3）

- 补充题 3

  下图所示电路及电流源 $i(t)$ 波形（参考 教材 P344 题图 7.7）。

  计算：电感两端电压 $u(t)$ 的表达式。





写出表达式后可代入　$L = 0.5\mathrm{H}$，$R = 1\Omega$，$I_0 = 2\mathrm{A}$，$t_0 = 1\mathrm{s}$

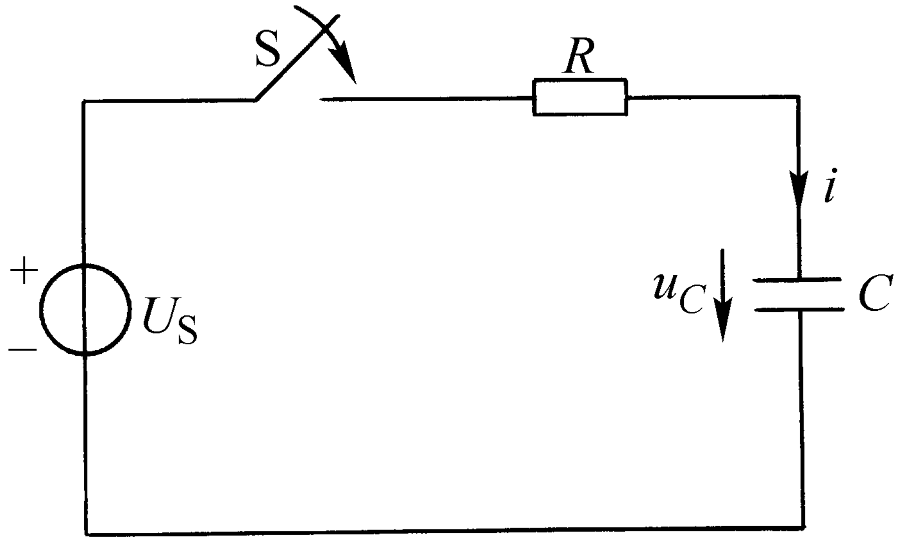
v 本节作业（补充题 4）

ü 补充题 4

下图所示电路中： $R = 10\Omega$，$C = 200\mu\text{F}$，$u_C(0^-) = 2\text{V}$

$u_S = \sqrt{2}\sin(314t - 45°)\text{V}$

计算：开关 S 合上后的 $i(t)$ 和 $u(t)$ 。



v 本节作业

- ü 习题 7（P344）
  补充题 4、补充题 5（三要素）
  10、12（三要素）

  所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。

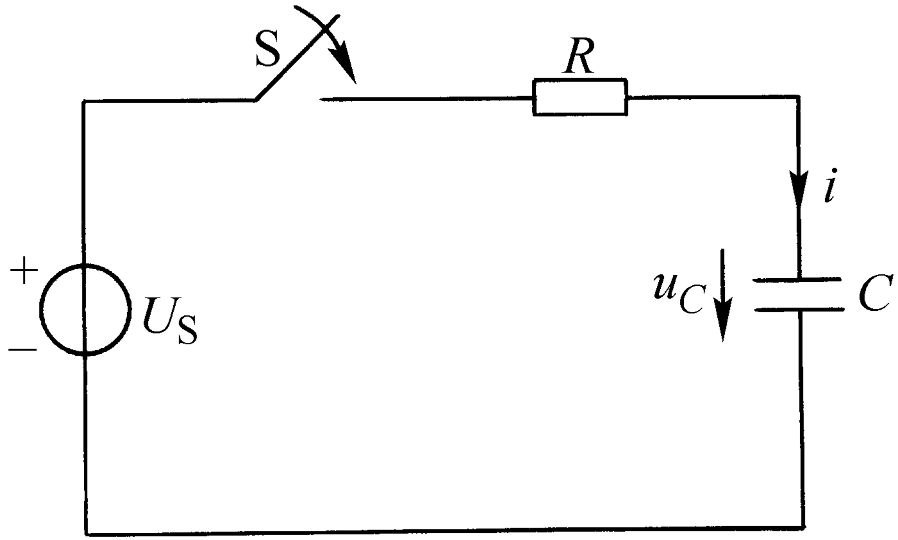
v 本节作业（补充题 4）

- 补充题 4

  下图所示电路中：$R=10\Omega$，$C=200\mu\text{F}$，$u_C(0^-)=2\text{V}$

  $$u_S=\sqrt{2}\sin(314t-45°)\text{V}$$

  计算：开关 S 合上后的 $i(t)$ 和 $u(t)$ 。



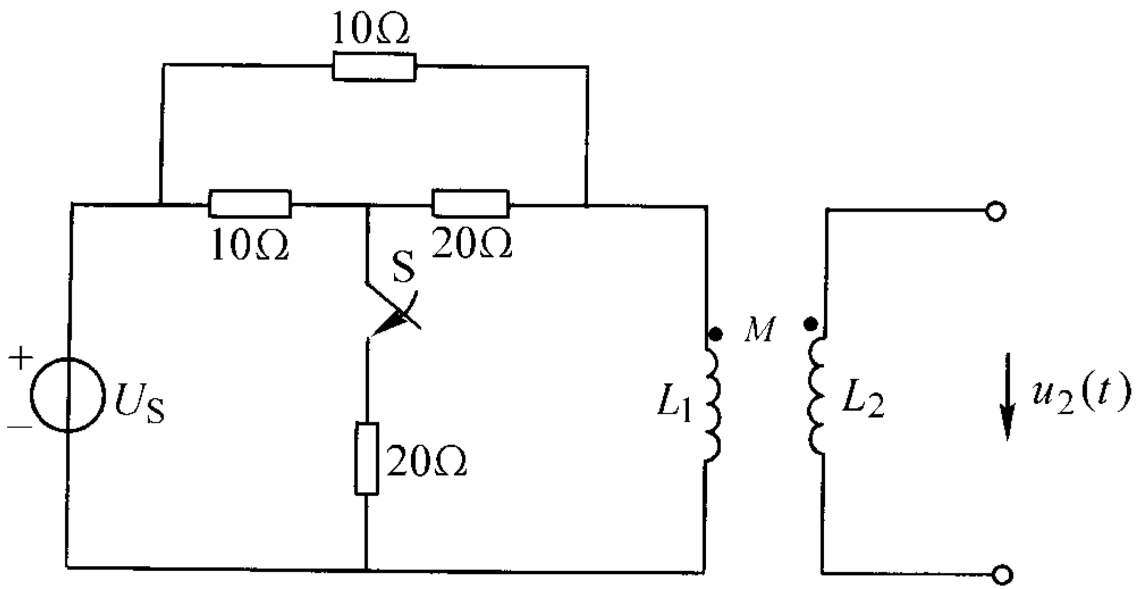
v 本节作业（补充题 5）

ü 补充题 5

下图所示电路中：$U_S = 10V$，$L_1 = 0.15H$，$L_2 = 0.1H$，$M = 0.05H$ ，电路在开关 S 闭合前已达稳态。

定义：$t = 0$ 时合上开关 S 。

计算：开关合上后的 $u_2(t)$ 。



本节作业

- 习题 7（P346）
  20、补充题 6（二阶电路）

  所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。

v 本节作业（补充题 6）

ü 补充题 6

下图所示电路中：$E=15\text{V}$，$L=0.4\text{H}$，$C=0.004\text{F}$，$u_C(0^-)=5\text{V}$ ，开关在原位置 1 时已达稳态。

定义：$t=0$ 时开关切换至 2 。

计算：R 分别为 10、20、30Ω 时，开关合上后的 $u_C(t)$ 。