动 力 学

dynamics

动力学

- **动力学的任务**

研究物体的机械运动与作用力之间的关系。

- **动力学的分类**

质点动力学
质点系动力学

质　点:是指具有一定质量但可以忽略其尺寸大小的物体。

质点系:一群具有某种联系的质点，刚体可以看成不变形的质点系。

动力学

- 动力学的基本内容

牛顿力学:在牛顿定律基础上建立的动力学。

分析力学:以虚位移原理和达朗贝尔原理为基础，建立受约束系统普遍方程，从而推出拉格朗日方程。

第9章

质点动力学

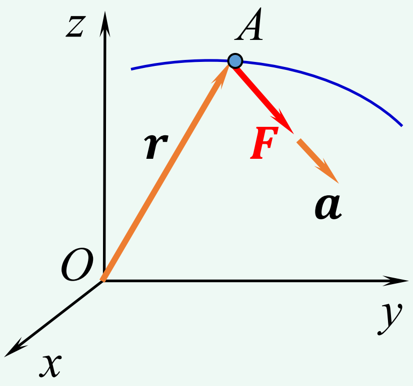
质点动力学
（牛顿第二定律）

质点是物体最简单、最基本的模型，是构成复杂物体系统的基础。质点动力学基本方程给出了质点受力与其运动变化之间的联系。

§9-1　质点运动微分方程

1.　矢量形式

　　设有可以自由运动的质点A，质量是m，作用力的合力是$\boldsymbol{F}$，加速度是$\boldsymbol{a}$。由运动学可知



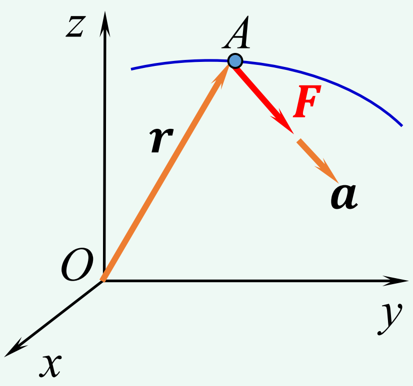
$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 可写成

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

这就是质点运动微分方程的矢量形式。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$



2. 直角坐标形式

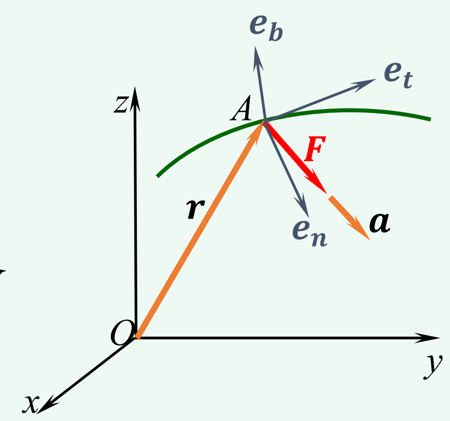
把上式沿固定直角坐标系$Oxyz$的各轴投影，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z$$

F_x, F_y, F_z 是作用力$\boldsymbol{F}$在各轴上的投影。上式是直角坐标形式的质点运动微分方程。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

3. 自然形式



如采用自然轴，并把上式向各轴投影，可得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_t,\qquad m\frac{v^2}{\rho}=F_n,\qquad 0=F_b$$

式中$a_t=\frac{d^2s}{dt^2},a_n=\frac{v^2}{\rho},a_b=0$, 是加速度$\boldsymbol{a}$在切线、主法线和副法线正向的投影。$\boldsymbol{F}_t$ ， $\boldsymbol{F}_n$ 和 $\boldsymbol{F}_b$ 是合力$\boldsymbol{F}$在相应轴上的投影。上式就是自然形式的质点运动微分方程。

§ 9-2　质点动力学基本问题

矢量形式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

直角坐标形式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F_y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=F_z \end{cases}$$

自然形式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2}=F_t \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n \\ 0=F_b \end{cases}$$

质点动力学的两类问题:

质点动力学的第一类问题：已知运动，求力。

● 解决第一类问题，只需根据质点的已知运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，代入左边公式，通过导数运算，即得作用力 $\boldsymbol{F}$。

质点动力学的第二类问题：已知力，求运动。

● 求解第二类问题，是个积分过程。必须注意：在求解第二类问题时，方程的积分中要出现积分常数，为了完全确定质点的运动，必须根据运动的初始条件定出这些积分常数。

质点动力学解题步骤：

（1） 根据题意，适当选取研究对象。

（2） 进行受力分析和运动分析。

（3） 根据点的运动形式，选取相应的坐标系。

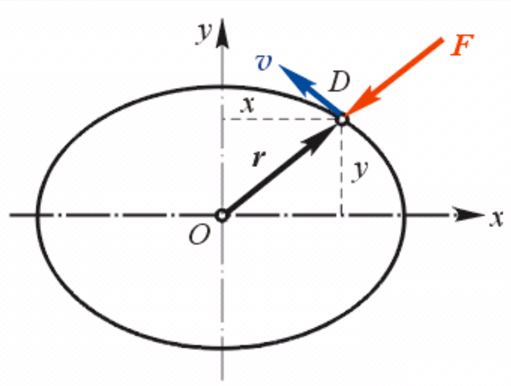
（4） 把质点放在一般位置，建立质点的动力学方程或运动微分方程。

（5） 解动力学方程并分析结果。

例题9-1 质点D在固定平面Oxy内运动，已知质点的质量m，运动方程是

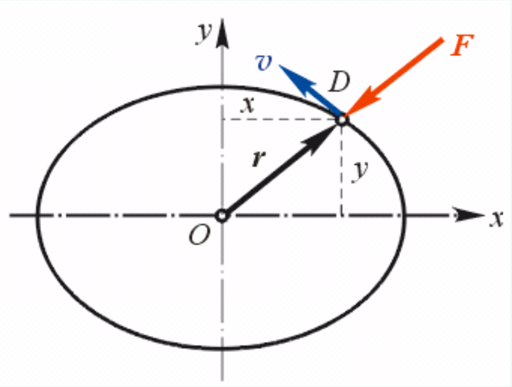
$$x = A\cos kt \qquad y = B\sin kt$$

式中A、B、k 都是常数量。试求作用于质点D的力F。



解：本题属于第一类问题。已知运动方程求质点受力，即

$$x = A\cos kt \qquad y = B\sin kt$$



代入

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\ ,m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\ ,m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

注意到 $\ddot{x} = -k^2 A\cos kt = -k^2 x$

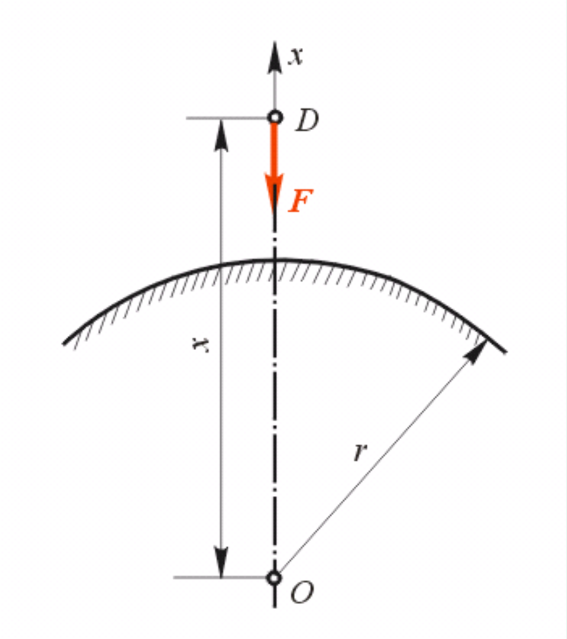
$$\ddot{y} = -k^2 A\sin kt = -k^2 y$$

得到 $F_x = -mk^2 x \quad F_y = -mk^2 y$

于是力$\boldsymbol{F}$可表示成

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} = -mk^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -mk^2\boldsymbol{r}$$

例题9-2 由地球上空某点沿铅垂方向发射宇宙飞船。试求飞船能够脱离地球引力所需的最小初速度。不计空气阻力和不考虑地球自转。

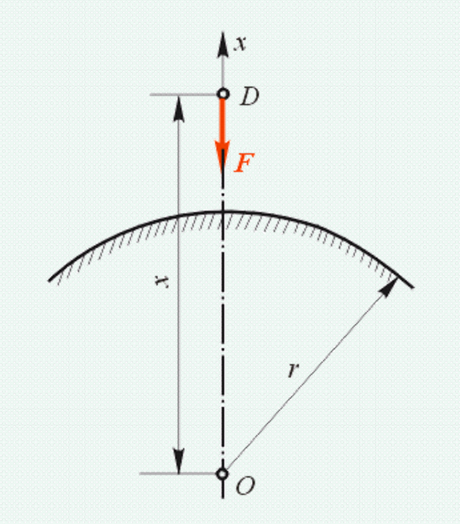


解：地球对飞船的作用力$\boldsymbol{F}$可由万有引力公式求得，即

$$F = -\mu \frac{m}{x^2}$$

式中，m是飞船的质量，地球的引力常数 $\mu = GM = 3.986 \times 10^5\ km^3/s^2$

x是飞船到地心O的距离。

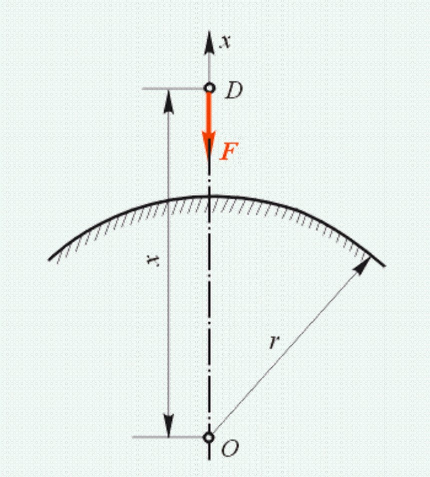


飞船的运动方程为

$$ma = -\mu \frac{m}{x^2}$$

$$ma = -\mu\frac{m}{x^2}$$

考虑到$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, 上式可改写为



$$\frac{vdv}{dx} = -\frac{\mu}{x^2}$$

分离变量。并求定积分，有

$$\int_{v_0}^{v} vdv = -\int_{x_0}^{x}\frac{\mu}{x^2}dx$$

式中，v_o是发射速度，x_o是发射点的坐标，积分后得

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{\mu}{x} - \frac{\mu}{x_0}$$

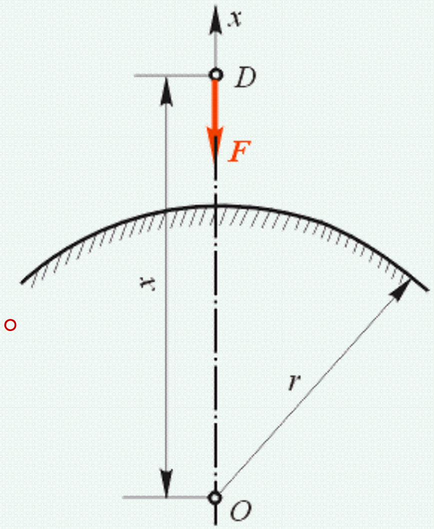
从而得

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2\mu(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x})}$$

根据逃逸速度的定义，当 $x \to \infty$，速度需仍满足 $v \geq 0$ 。令此速度等于零，最后求得飞船所需的最小发射速度

$$v_{0min} = \sqrt{\frac{2\mu}{x_0}}$$

这个速度称为在距离地心O为x_0处的脱离速度。

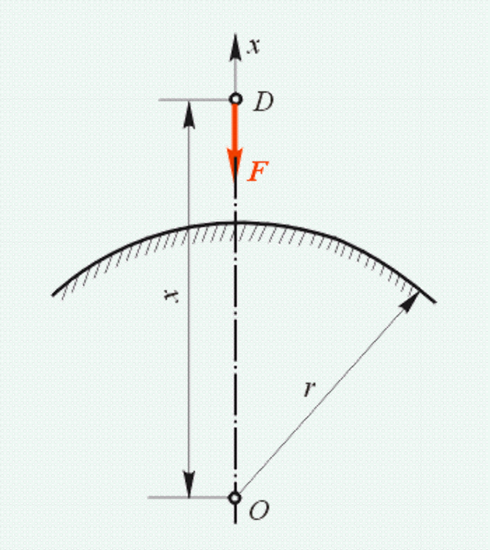


如果在地面上发射，则

$$x_0 = r = 6371\ km$$

带入公式

$$v_{0min} = \sqrt{\frac{2\mu}{x_0}} = 11.2\ km/s$$



注意在$x_0 = r$处的脱离速度v_{0min}称为地面处的第二宇宙速度v_{II}，

$$v_{II} = 11.2\ km/s$$