浙江大学 2007-2008 学年秋冬学期《线性代数》期末试卷

一、填空题（每空 3 分，本大题共 18 分）

1． 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$都是 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\boldsymbol{A}|=1$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，则$|\boldsymbol{B}|=$ __2__。

2． 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别是m和n阶可逆方阵，$\boldsymbol{C}$为$m+n$阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，

则$\boldsymbol{C}^*=(-1)^{mn}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & a\boldsymbol{B}^*\\ b\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$。

3． 三元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 1，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的三个线性无关的解，且$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[1，2，3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[0，-1，1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1=[1，0，-1]^{\mathrm{T}}$，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是____________________。

(要求用方程组对应的导出组的基础解系与方程组的一个特解来表示)

解 因为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 1，则导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系向量个数为 3-1=2。因为$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的三个线性无关的解，则

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}=\left[\frac{1}{2}，1，\frac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，且

$$(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=[0，2，4]^{\mathrm{T}}$$

$$(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=[1，3，2]^{\mathrm{T}}$$

是对应的导出组的解，容易验证它们是线性无关的，因此它们是导出组的基础解系。由此可知非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是

$$\left[\frac{1}{2}，1，\frac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}+k_1[0，2，4]^{\mathrm{T}}+k_2[1，3，2]^{\mathrm{T}}$$

其中k_1，k_2为任意数。

4． 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$r(\boldsymbol{A})=r$，$(r<n)$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为________________，行列式$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k|=$____________________。

解 由教材 P224 例 5.5.3 可知，因为$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$r(\boldsymbol{A})=r$，$(r<n)$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为 0($n-r$重根)和 1($r$重根)，令$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^k$，则$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k$的特征值分别为：

$f(0)=1(n-r$重根)

$f(1)=1+k(r$重根)

所以$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k|=f^{(n-r)}(0)f^r(0)=(1+k)^r$。

5. 二次型$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_1-2x_2+3x_3-5x_4)(3x_1+5x_2-4x_3+3x_4)$的矩阵是________________。

解

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_1-2x_2+3x_3-5x_4)(3x_1+5x_2-4x_3+3x_4)$$

$$=[x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\-5\end{bmatrix}[3, 5, -4, 3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$=[x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix}3&5&-4&3\\-6&-10&8&-6\\9&15&-12&9\\-15&-25&20&-15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$=[x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix}3&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&6\\-\frac{1}{2}&-10&\frac{23}{2}&-\frac{31}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{23}{2}&-\frac{31}{2}&\frac{29}{2}\\6&-25&\frac{29}{2}&-15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

所以二次型矩阵为

$$\begin{bmatrix}3&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&6\\-\frac{1}{2}&-10&\frac{23}{2}&-\frac{31}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{23}{2}&-\frac{31}{2}&\frac{29}{2}\\6&-25&\frac{29}{2}&-15\end{bmatrix}$$

二、计算题（本大题共 67 分，要求写出必要的计算步骤）

6. (本题 10 分) 计算行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\0&0&0&1&3\\0&0&0&2&4\\0&1&0&1&1\end{vmatrix}$。

$=-20$

注意复印的参考答案为 20，这是错误的。

7. (本题 10 分)已知$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$和$\boldsymbol{\beta}_1=[2, 1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[1, 3, 0, 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[0, 0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=[0, 0, 1, -1]^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^4$的两组基，而从基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$到

$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}4&3&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&1&3\end{bmatrix}$。

(1) 求基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；

(2) 求向量$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$在基$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标；

答案

$\boldsymbol{\alpha}_1=[1，-2，0，0]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2，9，0，0]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=[0，0，2，4]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=[0，0，-3，-7]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\delta}=[-2，3，13，-5]^{\mathrm{T}}$

8. (本题 10 分) 设n阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}\end{bmatrix}$$

求$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$。

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&1-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}&1-\frac{1}{n}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{B}^2=n\boldsymbol{B}$$

从而

$$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{n}\boldsymbol{B}\right)^2=\boldsymbol{E}-\frac{2}{n}\boldsymbol{B}+\frac{1}{n^2}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$

由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$可得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$$

故

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}-1+\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2n} & -1+\frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \cdots & -1+\frac{1}{2n}\end{bmatrix}$$

9. (本题 17 分) 设线性方程组为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5\\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7\\ 8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4=9\end{cases}$$

试就参数λ的值讨论方程组的解，并且在有解时求出它的解。(要求用方程组对应的导出组的基础解系和方程组的一个特解来表示)

10. (本题 20 分) 已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & b\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是二重特征值，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$是对角矩阵，写出此对角矩阵。

答案

$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$

$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

三、证明题（本题共 15 分）

11．(本题 5 分) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是$m\times n$矩阵，且$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，求证齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$有非零的公共解。

证一 因为$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，则$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，从而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$$

有非零解，因此$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$有非零的公共解。

证二 因为$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，则$r(\boldsymbol{A})<n$，$r(\boldsymbol{B})<n$，记

$$r(\boldsymbol{A})=r_1，r(\boldsymbol{B})=r_2$$

设齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$， …，$\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$

设齐次线性方程组$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$的基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$， …，$\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$

因为$n-r_1+n-r_2=n+(n-r_1-r_2)>n$，则$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$， …，$\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$， …，$\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$线性相关，从而存在不全为零的数$l_1$，$l_2$， …，$l_{n-r_1}$，$k_1$，$k_2$， …，$k_{n-r_2}$使得

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}=\boldsymbol{\theta}$$
$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}=-\left(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}\right)$$

因为l_1，l_2， …，l_{n-r_1}和k_1，k_2， …，k_{n-r_2}中至少有一组数不全为零，不妨假设l_1，l_2， …，l_{n-r_1}不全为零，则由$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$， …，$\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$的线性无关性知

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}\ne\boldsymbol{\theta}$$

从而

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}=-\left(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}\right)\ne\boldsymbol{\theta}$$

因为$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r_1}\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$和$-\left(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r_2}\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}\right)$分别是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$的解，因此$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$有非零的公共解。

12．(本题 10 分) 已知$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是n阶正定矩阵，矩阵方程$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$只有唯一解，且$n$阶方阵$\boldsymbol{B}$是该矩阵方程的解，求证：

(1) $\boldsymbol{B}$是对称矩阵；

(2) $\boldsymbol{B}$是正定矩阵。

证

(1) 因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是对称矩阵。因为$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$的解，则

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}$$
$$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$$

由此可知$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$也是方程$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$的解，由解的唯一性知$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{B}$是对称矩阵。

(2) 由$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}$两边取共轭得$\overline{\boldsymbol{AB}}+\overline{\boldsymbol{BA}}=\overline{\boldsymbol{C}}$，由于$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}+\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$，由此可知$\overline{\boldsymbol{B}}$也是方程$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$的解，由解的唯一性知$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵。设$\lambda$是$\boldsymbol{B}$的特征值，非零向量$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{B}$的属于特征值$\lambda$的特征向量，则$\boldsymbol{B\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$。由此可得

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB\xi}+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BA\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}$$

$$(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\lambda\boldsymbol{\xi}+(\lambda\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}$$

$$2\lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}$$

因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$都是正定矩阵，则$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}>0$，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}>0$，所以$\lambda>0$。因为$\boldsymbol{B}$的所有特征向量都大于零，因此$\boldsymbol{B}$是正定矩阵。