期末复习题四答案

2019年12月22日 星期日　　上午4:00

一、$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2} - \sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$

$-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2} - \sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} - \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\beta) + \sin(\alpha-\gamma)\right)$

二、$A^{-1}XA + XA + 2E = O \Rightarrow (A^{-1}+E)XA = -2E \Rightarrow (A^{-1}+E)X = -2A^{-1}$

$\Rightarrow X = (A^{-1}+E)^{-1}\cdot(-2)\cdot A^{-1} = -2(A+E)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

三、考虑增广矩阵，$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (d-a)(d-b) \end{bmatrix}$

则 (i) 当 a,b,c 互不相同时，$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$，$y = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(b-c)}$，$z = \frac{(d-a)(d-c)}{(c-a)(c-b)}$

(ii) 当 $a=b=c=d$ 时，$\begin{cases} x_1 = 1-k_1-k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases}$，其中 k_1,k_2 为任意常数

(iii) 当 $a=b=c\neq d$ 时，无解

(iv) 当 $a=b\neq c$ 时，$\begin{cases} x = 1-\frac{d-a}{c-a}-k \\ y = k \\ z = \frac{d-a}{c-a} \end{cases}$ 其中 k 为任意常数

(v) 当 $a=c=d\neq b$，$\begin{cases} x = 1-k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$，其中 k 为任意常数

(vi) 当 $a=c\neq b=d$ $\begin{cases} x = -k \\ y = 1 \\ z = k \end{cases}$，其中 k 为任意常数

(vii) 当 $a=c\neq b$，且 $b\neq d$ 且 $b\neq a$ 时，无解

(viii) 当 $b=c=d\neq a$ 时，$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 1-k \end{cases}$，其中 k 为任意常数

(ix) 当 $b=c\neq d=a$ 时，$\begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = -k \end{cases}$，其中 k 为任意常数

(x). 当 $b=c\neq a$ 且 $a\neq d$ 且 $b\neq d$ 时，无解

四、(1) $|\lambda E_{2n} - C| = \begin{vmatrix} \lambda E_n & -A \\ -A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n - A & -A \\ \lambda E_n - A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n - A & -A \\ 0 & \lambda E_n + A \end{vmatrix} = |\lambda E_n - A|\,|\lambda E_n + A|$

$\therefore C$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n, -\lambda_1, -\lambda_2 \cdots, -\lambda_n$

(2) $A = \begin{bmatrix} a_1 & \vdots \\ a_2 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A| = \left| \lambda E - \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \lambda^{n-2}\left| \lambda E_2 - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \right| = \lambda^{n-2}\cdot(\lambda-n)\cdot(\lambda-\sum_{k=1}^{n} a_k^2)$$ （这里用到 $|E-AB|=|E-BA|$）

综上 A的特征值为 $\underbrace{0,0\cdots 0}_{n-2个}, n, \sum_{k=1}^{n} a_k^2$

五、(1) 由于 $r(A^TA)=r(A)$

$\Rightarrow r(A_1^TA_1)=r(A_1)=p$

$r(A_2^TA_2)=r(A_2)=n-p$

$\because A_1^TA$ 半正定，

$\therefore$ ∃正交矩阵 Q_1，s.t $Q_1^T(A_1^TA_1)Q=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_p,0,\cdots 0\}$ $\lambda_i>0$

令 $X=Q_1Y$

$f=X^T(A_1^TA_1-A_2^TA_2)X=Y^TQ_1^TA_1^TA_1Q_1Y-Y^TQ_1^TA_2^TA_2Q_1Y$

$=Y^T\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_p,0,\cdots 0\}Y-Y^TQ_1^TA_2^TA_2QY$

∃ Q_2, s.t $Q_2^T(Q_1^TA_1^TA_1Q_1)Q_2=\mathrm{diag}\{0,0\cdots 0,\lambda_{p+1},\lambda_{p+2}\cdots\lambda_n)$ $\lambda_i>0$

令 $Y=Q_2Z$, $Q_2=(q_{ij})_{n\times n}$, $f(Z)=\lambda_1(q_{11}z_1+\cdots+q_{1n}z_n)+\cdots+\lambda_p(q_{p1}z_1+\cdots+q_{pn}z_n)-\lambda_{p+1}z_{p+1}^2-\cdots-\lambda_n z_n^2$

令 $W=\begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1p} & q_{1,p+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \cdots & q_{pp} & q_{p,p+1} & \cdots & q_{p,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(W)=\lambda_1w_1^2+\cdots+\lambda_pw_p^2-\lambda_{p+1}w_{p+1}^2\cdots-\lambda_nw_n^2$

综上，正惯性系数为 p，负惯性系数为 $n-p$

(2) 由于 $r(A_1^TA_1-A_2^TA_2)=p+n-p=n$

故 $A_1^TA_1+A_2^TA_2$ 可逆

六、$\alpha_1=1$, $\alpha_2=x$, $\alpha_3=x^2$, $\alpha_4=x^3$ （以下有 $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin(x)+C$）

$\beta_1=1$, $\beta_2=x-\dfrac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}=x$

$\beta_1=1$, $\beta_2=x-\dfrac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}=x$

$$\beta_3=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^2dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^3dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^2dx}x=x^2-\frac{\pi-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}{\pi}$$

$$=x^2-\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

$$=x^2-\frac{1}{2}$$

$$\beta_4=x^3-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^3dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^4dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^2dx}x-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^5dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^4dx}(x^2-\tfrac{1}{2})$$

$$=x^3-\frac{3}{4}x$$

则 $\beta_1=1$, $\beta_2=x$, $\beta_3=x^2-\frac{1}{2}$, $\beta_4=x^3-\frac{3}{4}x$ 为正交多项式组

(2) $4x^3+3x^2+2x+1=\frac{5}{2}+5x+3(x^2-\frac{1}{2})+4(x^3-\frac{3}{4}x)$

故坐标为 $(\frac{5}{2},5,3,4)^T$

七、$\|AX\|^2=(AX,AX)=(AX)^TAX=X^TA^TAX=\|X\|^2=X^TX$

$\Rightarrow X^T(A^TA-E)X=0$

又有 $(A^TA-E)^T=A^TA-E$

$\Rightarrow A^TA=E$

八、$\begin{cases} aXE_r+E_sB=O \\ XA+E_s\cdot E_s=Y \\ E_rA+WE_s=O \\ aE_r+WB=U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=-\frac{1}{a}B \\ Y=E_s-\frac{1}{a}BA \\ W=-A \\ U=aE_r-AB \end{cases}$

(2). 由第一问可知 $\begin{vmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} aE_r & A \\ O & E_s-\frac{1}{a}BA \end{vmatrix}=a^r\cdot|E_s-\frac{1}{a}BA|$

$$\begin{vmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} aE_r-AB & O \\ B & E_s \end{vmatrix}=|aE_r-AB|$$

$\Rightarrow a^r|E_s-\frac{1}{a}BA|=|aE_r-AB|$

$\Rightarrow a^r|aE_s-BA|=a^s|aE_r-AB|$ (两边同乘 a^s)

得证