第9章（三）全微分

浙江大学数学科学学院　卢兴江

全微分

定义 设 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的某邻域内有定义，若存在常数 $A,\ B,$ 使

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0).$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 则称 f 在点 P_0 处**可微**.

$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 P_0 处的**全微分**. 记作 $dz\big|_{P_0}=A\Delta x+B\Delta y.$

定理 若 $z=f(x,y)$ 在点 P 处可微，则$f(x,y)$ 在 P 点处可偏导且连续 .

证明 由 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，存在常数 A,B 使得 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$

令 $\Delta y=0$， $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(\Delta x).$

因此，$f'_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A.$ 同理可得 $f'_y(x,y)=B.$

即知 f 在 P 可偏导； 且显然有 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0,$ 所以 f 在 P 连续 .

由以上知，全微分可写成： $\mathrm{d}z\big|_P=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y.$

偏导数连续、可微、可偏导、连续的关系

f'_x，f'_y 在 P 连续 $\Rightarrow$ f 在 P 可微（$\not\Leftarrow$）

f 在 P 可微 $\Rightarrow$ f 在 P 可偏导（$\not\Leftarrow$）

f 在 P 可微 $\Rightarrow$ f 在 P 连续（$\not\Leftarrow$）

f 在 P 可偏导 $\not\Rightarrow$ f 在 P 连续，f 在 P 连续 $\not\Rightarrow$ f 在 P 可偏导

考察函数：（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点 $f(x,y)$ 连续，偏导存在，但不可微.

（2）$g(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=(0,0)\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点 $g(x,y)$ 可微，但 g'_x，g'_y 不连续.

全微分的计算

- 同理可定义其他多元函数的全微分，对 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$\mathrm{d}u = f_1'\mathrm{d}x_1 + f_2'\mathrm{d}x_2 + \cdots + f_n'\mathrm{d}x_n.$$

- 全微分的四则运算：设 u,v 可微，则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v\ ;\quad \mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u\ ;\quad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ .$$

- 一阶微分的形式不变性：设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 那么

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

全微分例题

例 1 设 $y=g(x,z)$，$z=z(x,y)$ 由 $f(x-z,xy)=0$ 确定，g,f 连续可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解： 将 $y=g(x,z)$ 两边求微分得 $\mathrm{d}y=g_1'\,\mathrm{d}x+g_2'\,\mathrm{d}z \quad \cdots\cdots(1)$

再将 $f(x-z,xy)=0$ 两边求微分得 $f_1'(\mathrm{d}x-\mathrm{d}z)+f_2'(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0 \quad \cdots\cdots(2)$

将 (1) 式代入 (2) 式得 $(f_1'+yf_2'+xf_2'g_1')\,\mathrm{d}x=(f_1'-xf_2'g_2')\,\mathrm{d}z$，即有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f_1'+(y+xg_1')f_2'}{f_1'-xf_2'g_2'}.$$

例 2 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由 $\begin{cases} y=u+v^2 \\ z=xu-v+1 \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

- **全微分在近似计算中的应用：** 函数近似值的计算；误差估计等。

多元函数的泰勒公式

定理 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内具有 $n+1$ 阶连续的偏导数，则 $\forall(x,y)\in U(P_0)$, 有

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n(x,y).$$

其中 $R_n(x,y)=\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\quad(0<\theta<1)$ 为拉格朗日余项.

例 2 (1) 将 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 展开成二阶泰勒公式 .

(2) 将 $z=\sin(2x+y)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 展开成一阶泰勒公式 .

谢谢！

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY