第十章

静电场中的导体和电介质

第十章　静电场中的导体和电介质

解决的问题：电荷分布是怎样来的？

§10-1　静电场中的金属导体

静电感应现象

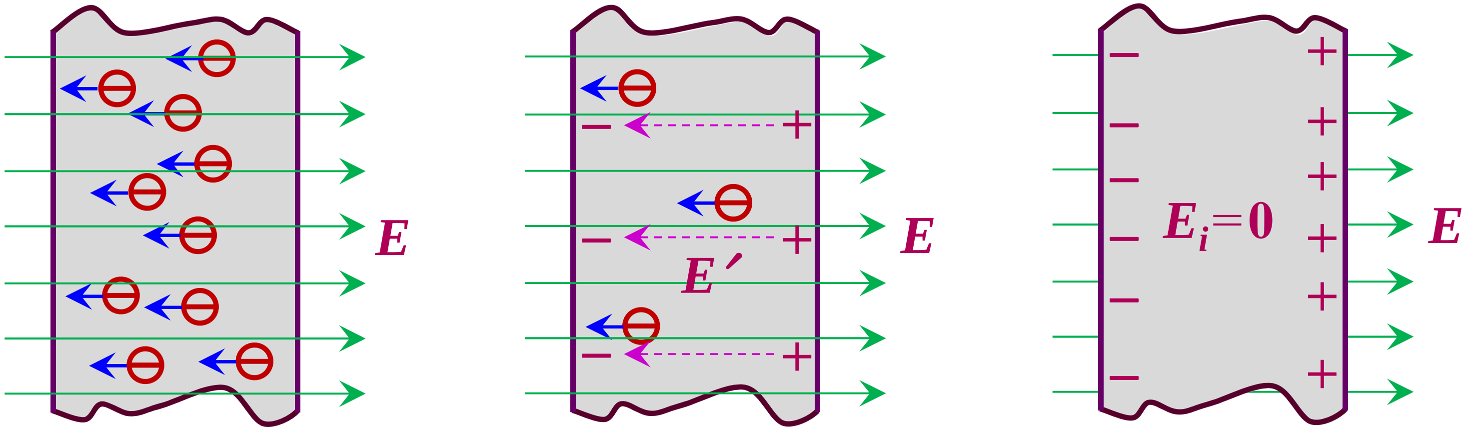
当导体置于外电场的瞬间(10^{-6} s)，导体的两端出现等量异种电荷的现象.

一. 导体的静电平衡

1、导体的静电平衡状态

导体内没有电荷做任何的宏观定向运动.

2、静电平衡的建立



导体静电平衡建立的过程

3、静电平衡的基本特点

① 导体内任一点的电场强度都等于零

无电荷作定向运动,电荷所受电场力

$$F_i=0 \rightarrow E_i=0$$

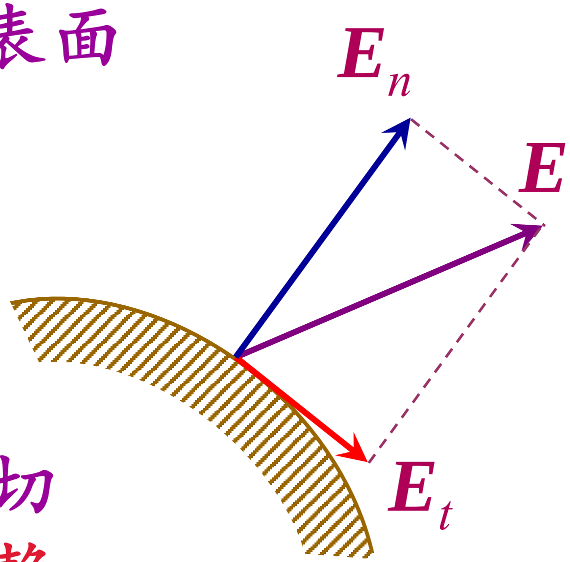
静电平衡的必要条件

② 导体是等势体,其表面是等势面

导体内部有E=0, 故任意两点间有

$$U_{pq}=\int_p^q \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=0$$

③ 导体表面的场强垂直于导体表面



导体表面电场可不为零, 但必须与导体表面垂直, 如图所证

否则,电荷在E_t的作用下作切向运动(定向运动)而未达到静电平衡

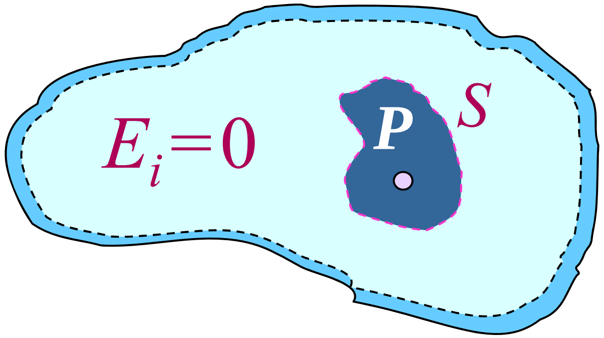
二. 静电平衡时导体上的电荷分布

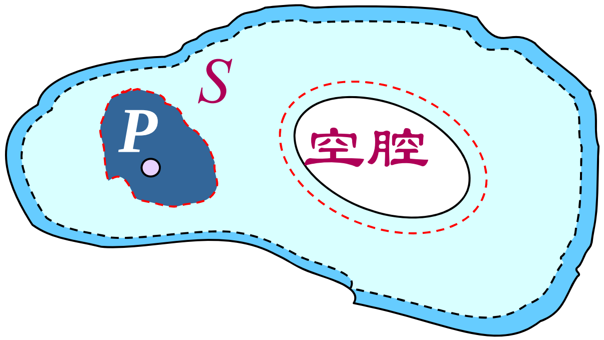
(一) 实心导体

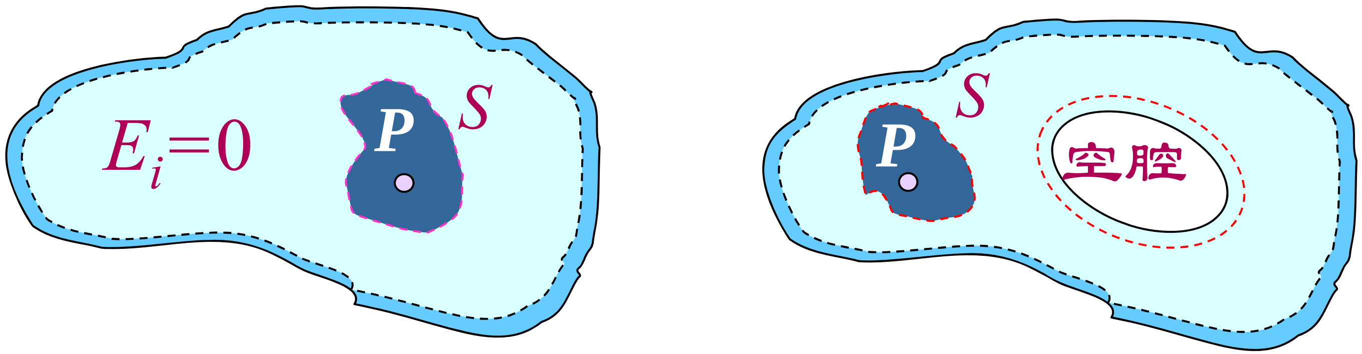
1. 无外电场的带电实心导体 (附近无其它电荷)

(1). 电荷的分布

当带电导体处于静电平衡状态时, 导体内部处处没有净电荷存在, 电荷只能分布在导体表面上. 可用高斯定理证明, 见图示:







论证导体静电平衡时电荷只能分布在导体表面

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E}=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \sum \boldsymbol{q}=\mathbf{0}$$

有空腔的情况后面具体讨论

(2). 导体表面附近的场强与电荷面密度的关系

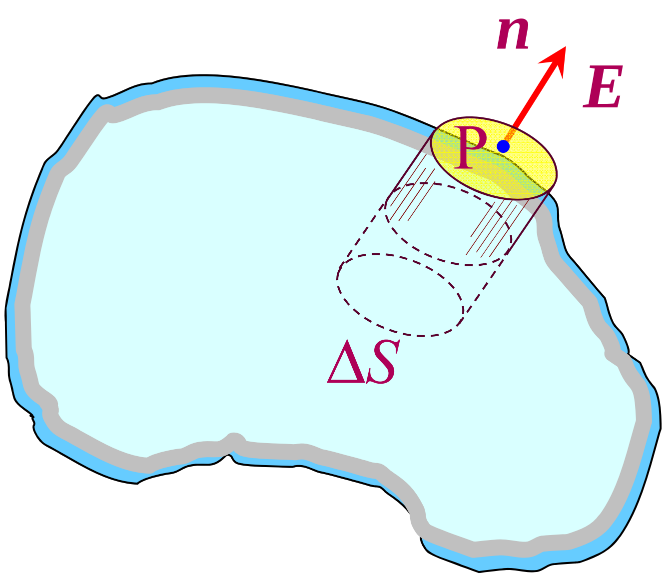
用高斯定理 证明

如图做高斯面，由于导体表面电场可不为零，但必须与导体表面垂直，由高斯定理得：

$$\oiint_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

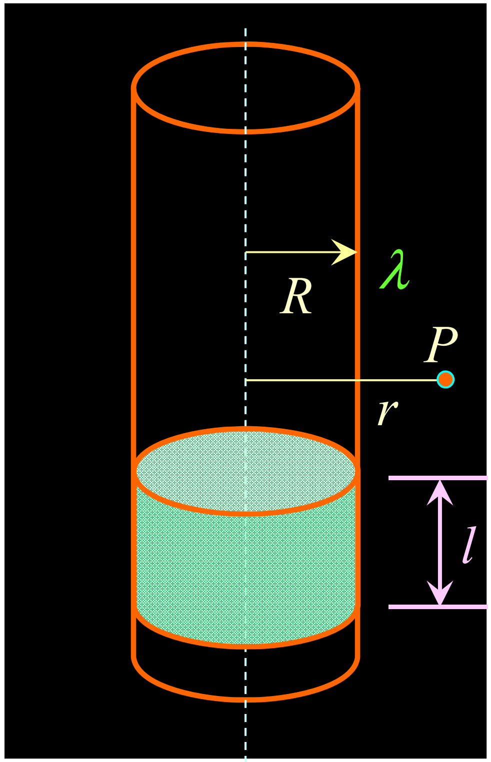
则：$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 写成矢量式：

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$



实例: 导体表面附近的场强与电荷面密度的关系

a. 无限长带电圆柱体金属导体



$$E_p = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

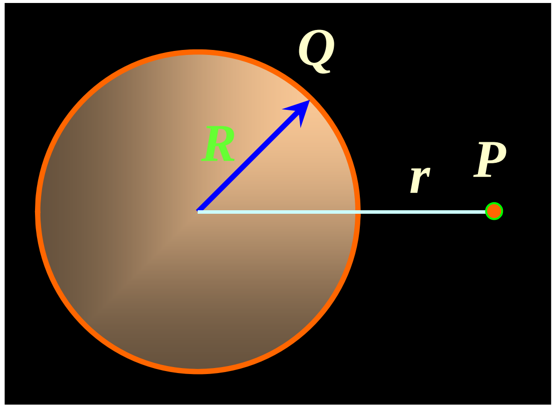
$$E_R = \lim_{r\to R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\sigma = \frac{\lambda l}{2\pi R l} = \frac{\lambda}{2\pi R}$$

$$E_R = \lim_{r\to R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

再考虑电场的方向 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

b. 带电金属导体球



$$E_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

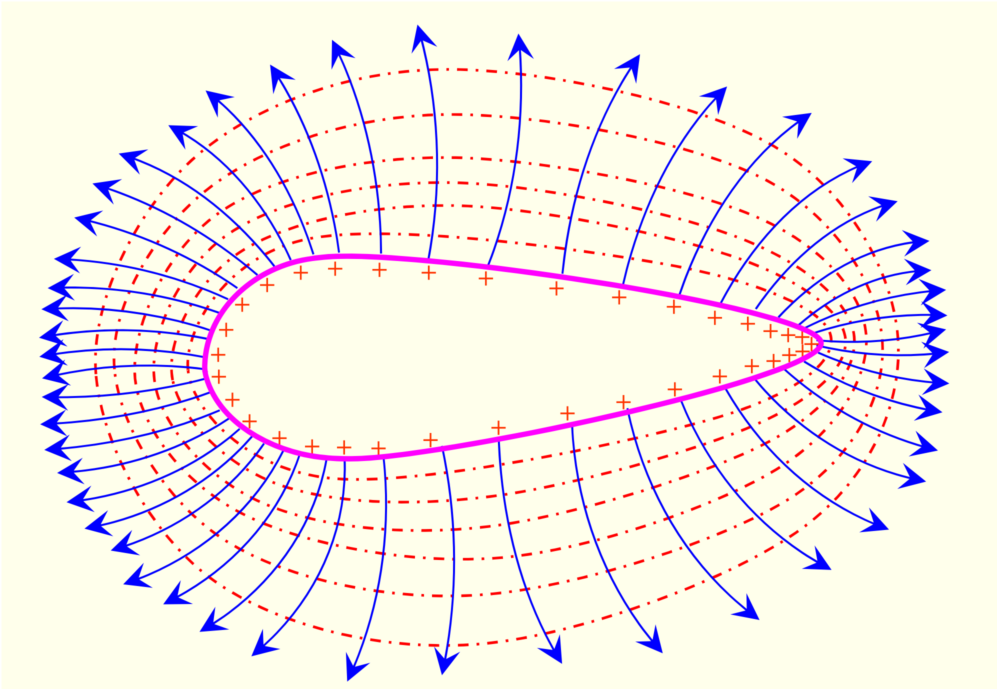
$$E_R = \lim_{r\to R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

再考虑电场的方向

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

(3). 电荷面密度与导体表面曲率的关系



电荷在导体表面上的分布规律:

电荷在导体表面上的分布规律与导体表面的曲率有关, 曲率大, 电荷面密度大, 曲率小, 电荷面密度小, 曲率负, 电荷面密度更小.

例: 两个半径分别为***R***和***r***的球形导体 (***R*>*r***), 用一根很长的细导线连接起来, 使这个导体组带电, 电势为***U***, 求两球表面电荷与曲率的关系? 设两球相距较远, 电荷分布互相不影响.

解: 由于两球由导线连接, 两球电势相等:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

得: $$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}$$

可见, 大球所带电量***Q***比小球***q***多.

两球的面电荷密度分别为:

$$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

所以:

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{(Q/4\pi R^2)}{(q/4\pi r^2)} = \frac{Qr^2}{qR^2} = \frac{r}{R}$$

结论: 两球电荷面密度与曲率半径成反比, 即与曲率成正比.

上述试验结果在技术上有十分重要的应用: 尖端放电, 避雷针, 高压输电线路的防漏电.

2. 外电场中的实心导体 (附近存在其它电荷)

(1) 导体内任一点的电场强度都等于零

(2) 电荷只能分布在导体表面上

(3) 导体表面的场强垂直于导体表面

(4)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

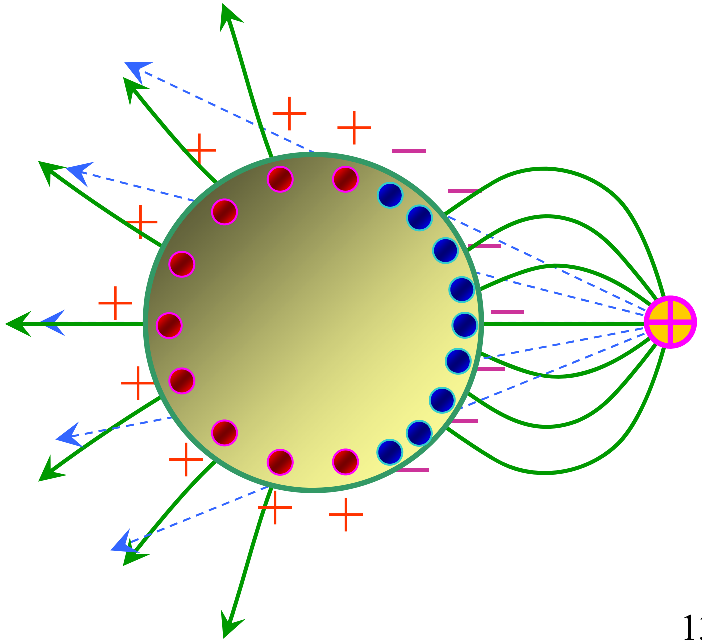
电场E为所有电荷共同激发而产生的

(5) 电荷面密度

(i) 不仅与导体表面曲率有关,

(ii) 而且与外电场有关,

即与其它电荷有关



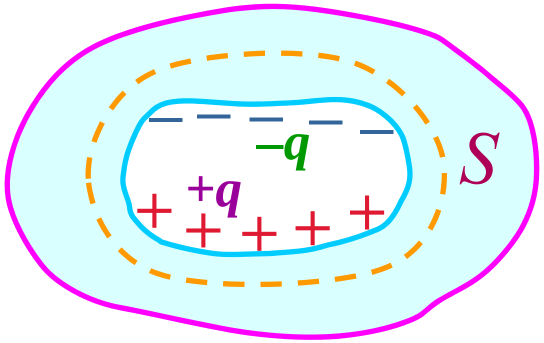
(二). 空腔导体　空腔外电场与实心导体类似

1. 腔内无带电体的带电空腔导体

(1). 电荷分布

在导体内做高斯面可证明,空腔的金属导体内电场强度为零,高斯面内净电荷为零.故电荷分布在外表面,内表面没有净电荷.

$$\oiint_S \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=0=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}\qquad \sum q=0$$



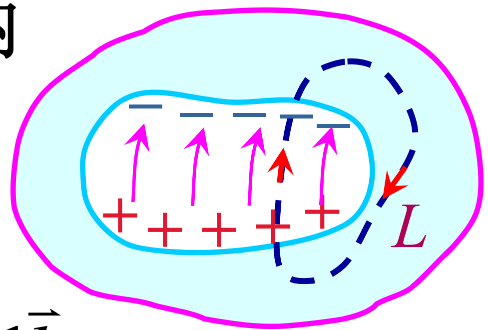
(2). 腔内电场

高斯定理不能证明空腔导体的内表面有无等量异种电荷. 因为这种分布与导体内 $E=0$ 并没有矛盾, 并不违反高斯定理, 似乎有存在这种电荷分布的可能.

$$\oiint_S \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\sum q/\varepsilon_0=(q-q)/\varepsilon_0=0$$

要证明导体空腔内表面无等量异种电荷，即空腔内无电场, 需借助于静电场的环路定理.

用反证法: 若存在这种情况,则空腔内表面带正负电荷,在空腔内$\boldsymbol{E} \neq \mathbf{0}$, 取如图的闭合路径$L$,做环路积分:



$$\oint_{L} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\text{沿电场线}} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\text{导体内}} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{\text{沿电场线}} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\text{导体内}} 0 \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{\text{沿电场线}} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\text{沿电场线}} E\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$= \int_{\text{沿电场线}} E \cdot \mathrm{d}l \neq \mathbf{0}$$

产生矛盾

静电场环路定理 $\oint_{L} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$

由于在沿电场线一段的线积分不为零, 则:

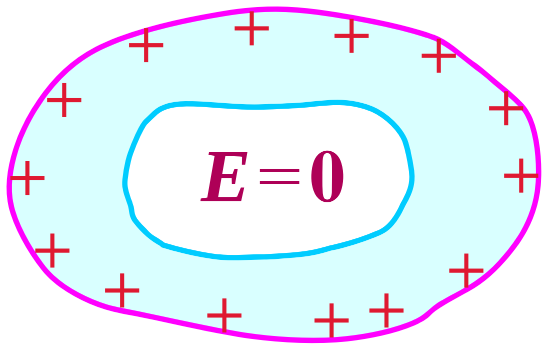
$\oint_L \vec{E} \bullet d\vec{l} \neq 0$ 此式与静电场环路定理矛盾

于是, 空腔内的场强 $E=0$

结论: 空腔导体 (腔内无带电体) 带电或在外电场中, 其电荷分布和电场分布的特点为:

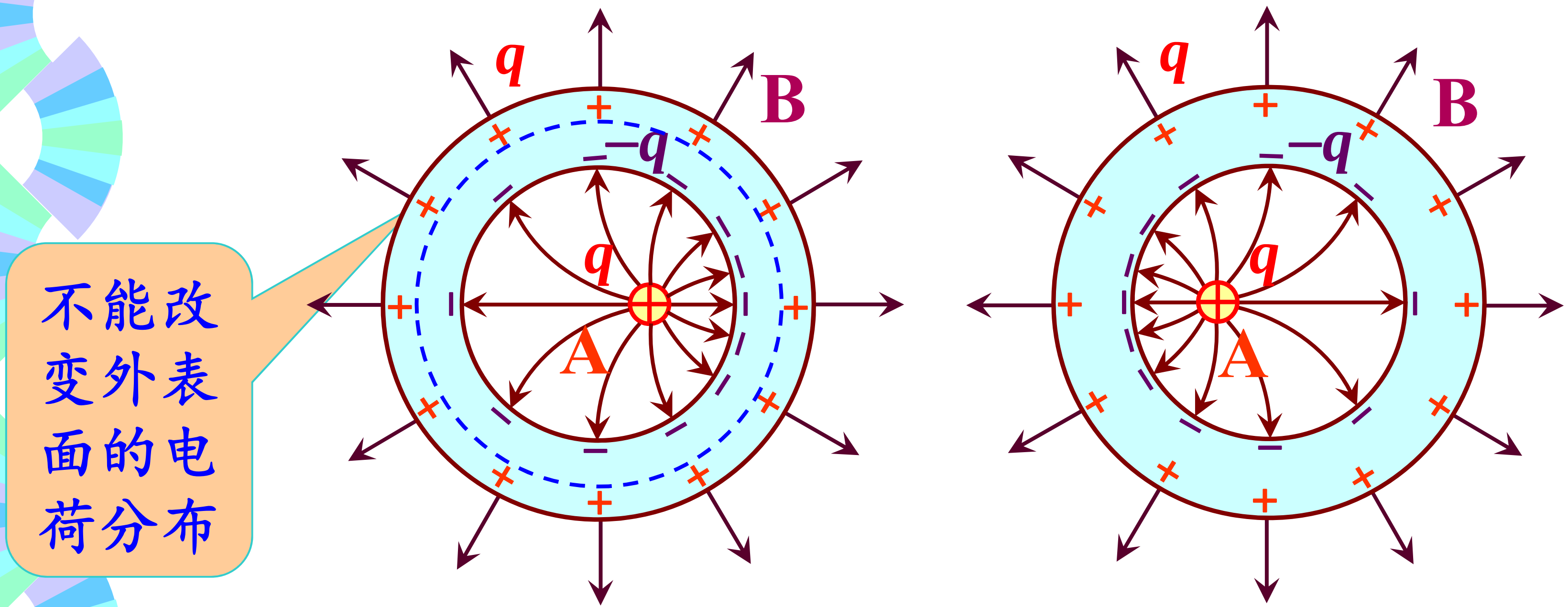
(i) 电荷只能分布在导体外表面上,
内表面上没有净电荷.

(ii) 导体内部及空腔内的总场强等于零.



2. 腔内有带电体的空腔导体

(1) 腔内部有带电体的不接地导体空腔



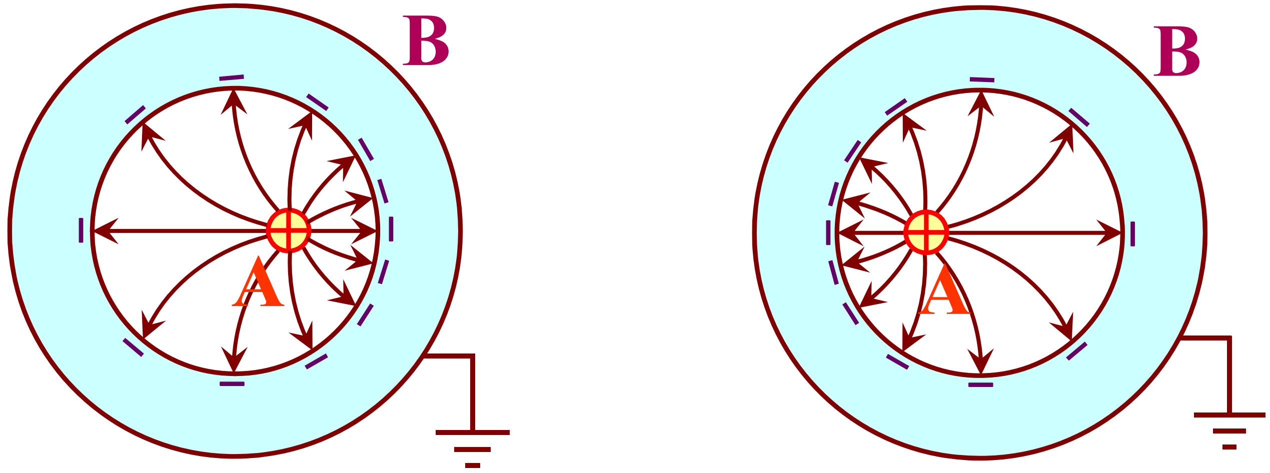
电荷分布的特点：

(i) 腔内电荷A可在导体空腔的内、外表面激发电荷

(ii) 腔内电荷A可以改变导体内表面的电荷量及其分布

(iii) 腔内电荷A只能改变导体外表面的电荷量，其位置的变化却不能改变导体外表的电荷分布.

(2) 接地导体



外表面接地时，空腔导体电荷分布特点:

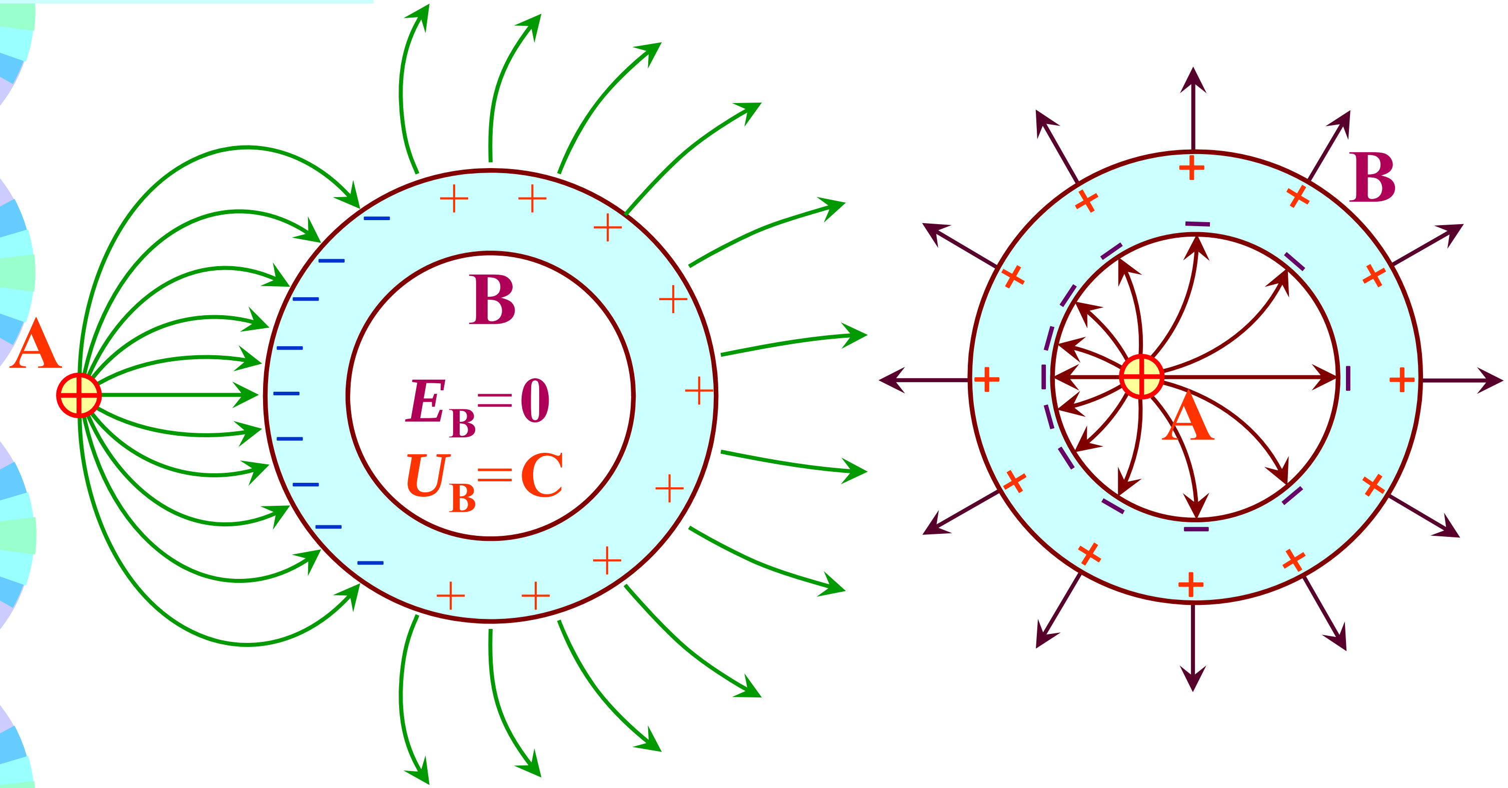
(i) 腔内电荷A可激发导体内表面电荷，但导体外表面的电荷分布被中和.

(ii) 腔内电荷A可以改变导体内表面的电荷量及其分布.

(iii) 腔内电荷A不会对导体外的物体产生影响.

三. 静电屏蔽

利用导体空腔将内外电场隔离



1. 情形一: 未接地导体空腔

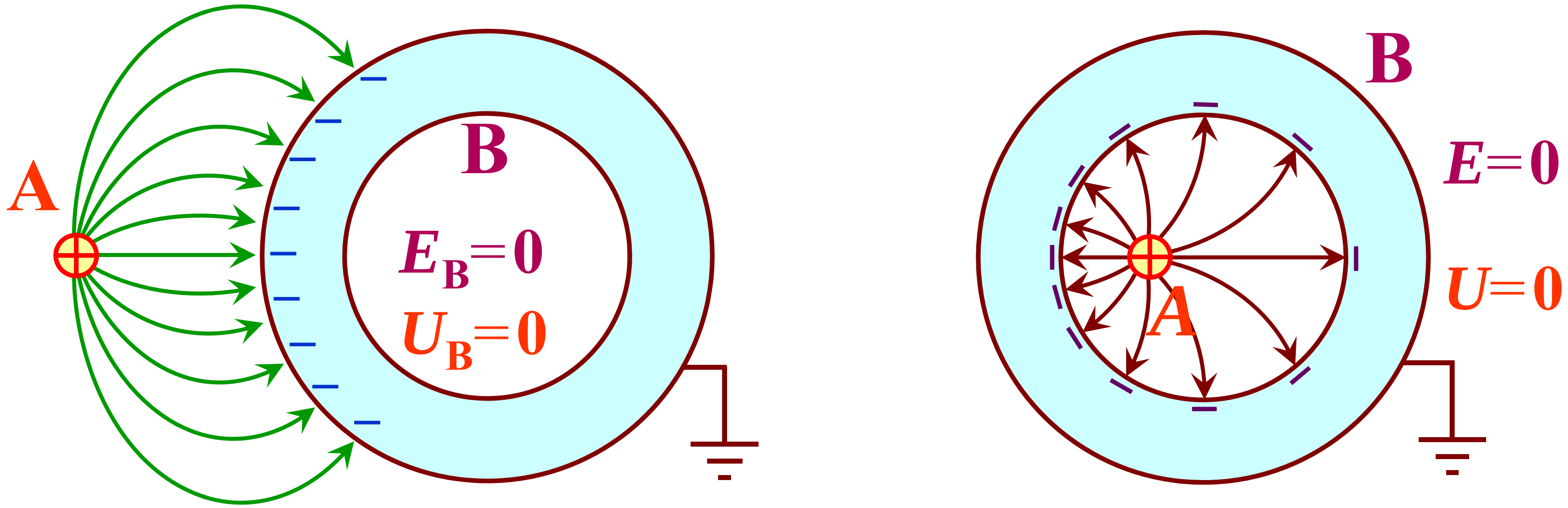
(1) 外电场不影响腔内电场 (通过感应电荷的作用).

故腔外电荷对腔内电荷的作用力为0.

(2) 空腔外电荷仍影响空腔内电势 (空腔内为等势体)

(3) 空腔内电荷仍影响空腔外电场和电势

2. 情形二：接地导体空腔



(1) 外电场不影响腔内电场, 也不影响腔内电势.

(2) 空腔内电荷也不影响空腔外电场和电势

因此, 将金属导体外表面接地, 则腔外电场不影响腔内电场, 腔内电场也不影响腔外电场. 即腔内外电场互不影响.

这些结果都是通过感应电荷实现的.

3. 静电屏蔽的应用

(1) 高压带电作业, 金属丝网制成的均压服;

(2) 电气设备金属罩壳接地;

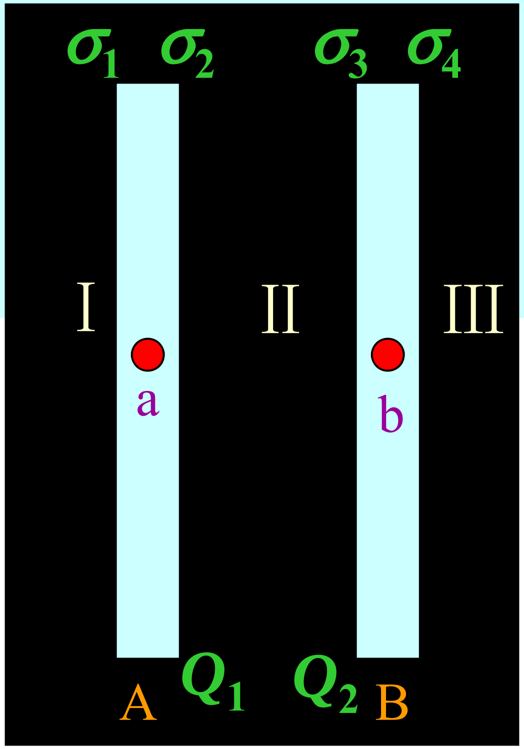
(3) 小信号的提取, 如生物电信号,信号数量级在mV、μV, 装置、导线用金属丝网屏蔽.

例1: 如图所示, 两块大小相同的平行板金属板A和B, 所带的电量分别为Q_1和Q_2, 且$Q_1>Q_2>0$. 设两块金属板的面积均为S, 略去边缘效应, 试求:

(1) 两导体四个表面上的电荷分布;

(2) Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ三个区域的电场强度;

(3) 若B板接地,两导体的电荷分布.



解: (1) 两导体四个表面上的电荷分布

由于两块金属板均很大, 均可视作无限大平板, 两金属板电荷均分布在其表面, 设四个表面电荷的面密度分别为σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, (均> 0)

空间任意一点的场强等于这四个无限大带电平面分别产生的场强叠加, 每个无限大平面产生的场强为$\sigma/(2\varepsilon_0)$, 方向垂直于带电平面, 当$\sigma>0$ 时, 离开平面.

当达到静电平衡时，**两导体电荷均分布在表面，而导体内部的场强为0.**

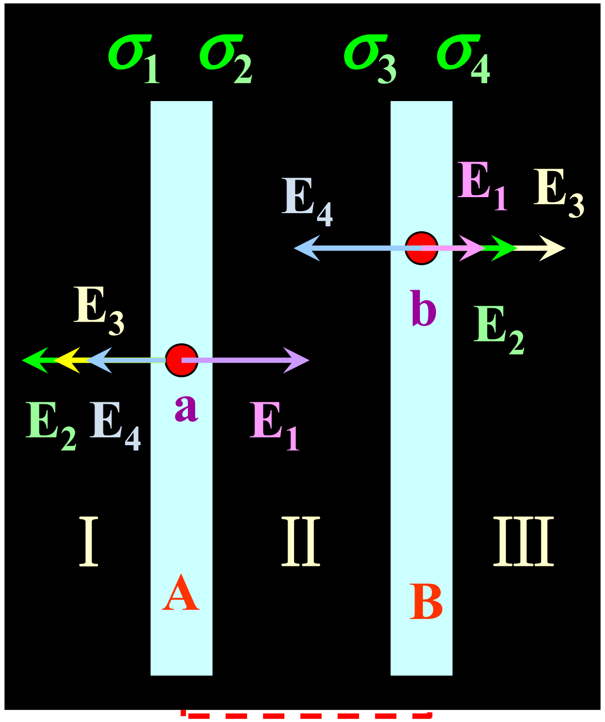
先**假设各导体平面均带正电**

导体A内任意一点a, 有

$$E_a = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

导体B内任意一点b, 有

$$E_b = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$



由金属板的电荷守恒定律

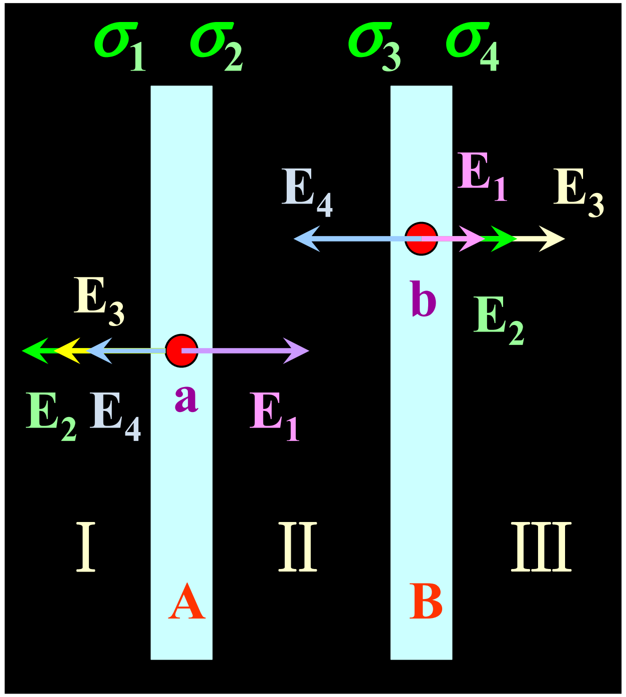
导体A: $\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_1$

导体B: $\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_2$

解方程组, 得:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S}$$



故两导体的电荷分布为

$$q_1 = \sigma_1 S = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \qquad q_2 = \sigma_2 S = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

$$q_3 = \sigma_3 S = -\frac{Q_1 - Q_2}{2} \qquad q_4 = \sigma_4 S = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

可见,两导体板相对的内侧表面带有等量异号电荷, 外侧表面带有等量同号电荷

★讨论: 由高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\text{in}} q_i = \frac{(\sigma_2+\sigma_3)\Delta S}{\varepsilon_0}$$

得: $\sigma_2 = -\sigma_3$

导体A内任意一点a,有

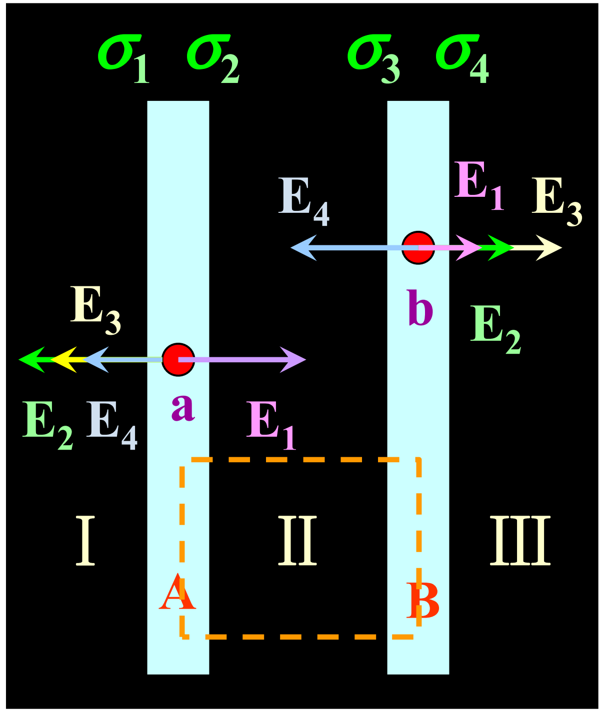
$$E_a = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

得: $\sigma_1 = \sigma_4$

由电荷守恒定律

导体A: $\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_1$

导体B: $\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_2$

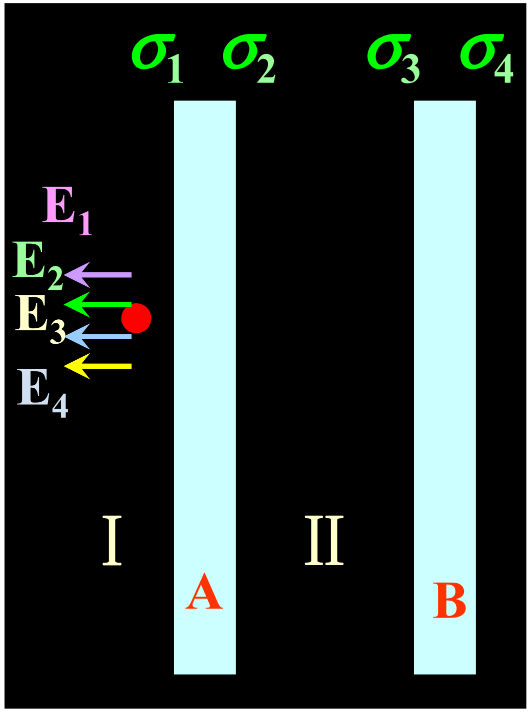


可得同样结果

(2) Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域的电场强度

用场强叠加原理

Ⅰ区的场强:



$$E_{\mathrm{I}}=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$=-\frac{(Q_1+Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}-\frac{(Q_1-Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}$$

$$-\frac{-(Q_1-Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}-\frac{(Q_1+Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}$$

$$=-\frac{(Q_1+Q_2)}{2\varepsilon_0 S}$$

负号表示方向向左

Ⅱ区：

$$E_{\text{II}}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$=\frac{(Q_1+Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}+\frac{(Q_1-Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}$$

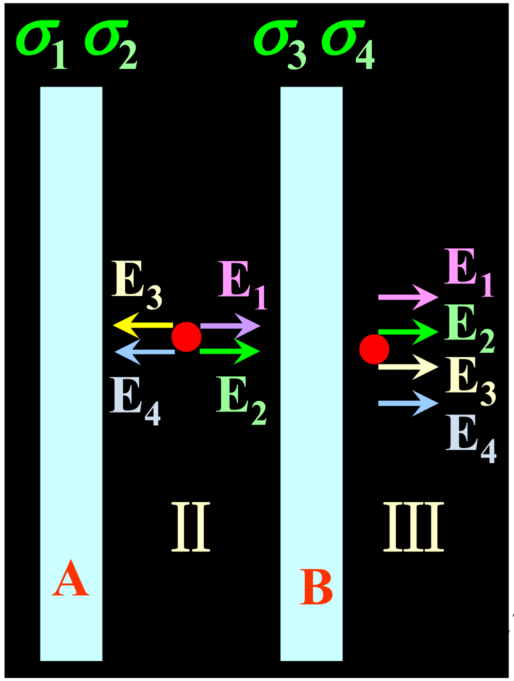
$$-\frac{-(Q_1-Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}-\frac{(Q_1+Q_2)/2S}{2\varepsilon_0}$$

$$=\frac{(Q_1-Q_2)}{2\varepsilon_0 S}$$ 方向向右

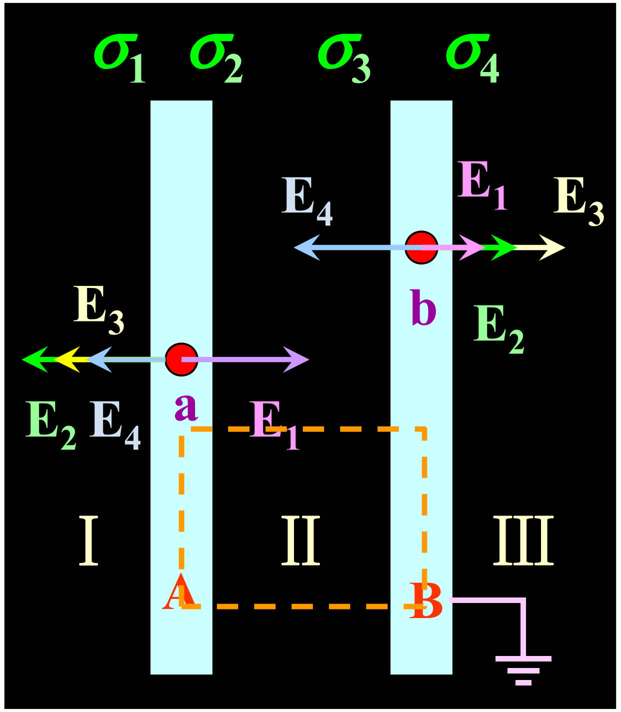
Ⅲ区：

$$E_{\text{III}}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$=\frac{(Q_1+Q_2)}{2\varepsilon_0 S}$$ 方向向右



(3) 若B板接地,两导体的电荷分布.



由于忽略边缘效应, 故

$\sigma_4'=0$ 为什么?

由高斯定理

得: $\sigma_2'=-\sigma_3'$

导体A内任意一点a,有

$$E_a=\frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3'}{2\varepsilon_0}=0$$

得: $\sigma_1'=0$

可见, 两导体板相对的内侧表面带有等量异号电荷, 外侧表面不带电

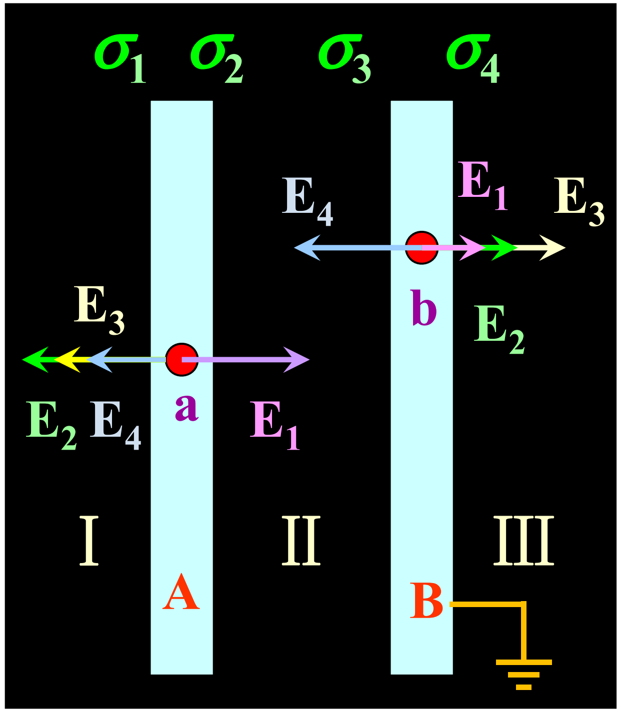
由A极板的电荷守恒定律

$$\sigma_1'S+\sigma_2'S=Q_1$$

得: $\sigma_2'=\dfrac{Q_1}{S}$ $\sigma_3'=-\dfrac{Q_1}{S}$

故B极板所带的电荷为

$$Q_B=\sigma_3'S+\sigma_4'S=-Q_1$$



★思考题：大地向导体B提供了多少电量?

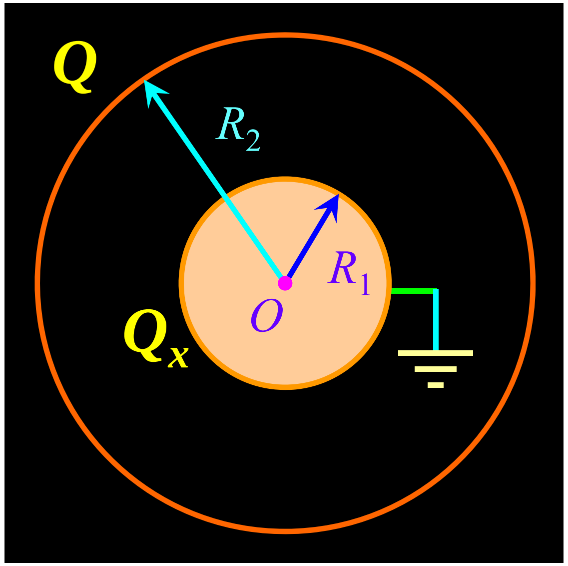
Ⅰ、III区的场强: $E=0$

II区的场强:

$$E_{II}=\frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3'}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_2'}{\varepsilon_0}=\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$$ 方向向右

例2: 如图,均匀带电量Q, 半径为R_2的导体薄球壳, 内有一半径为R_1的同心导体球, 若导体球接地, 求场强分布和电势分布

解: 内球接地, 内球带电吗?



内球接地, 表明内球与无穷远处等电势. 当外球壳带电量时, 内球也必带电量, 否则, 内球的电势不会为0

设内球带电量为 Q_x, 由球心电势为0

$$U_{1R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = 0$$

$$\boxed{Q_x = -\frac{R_1}{R_2} Q}$$

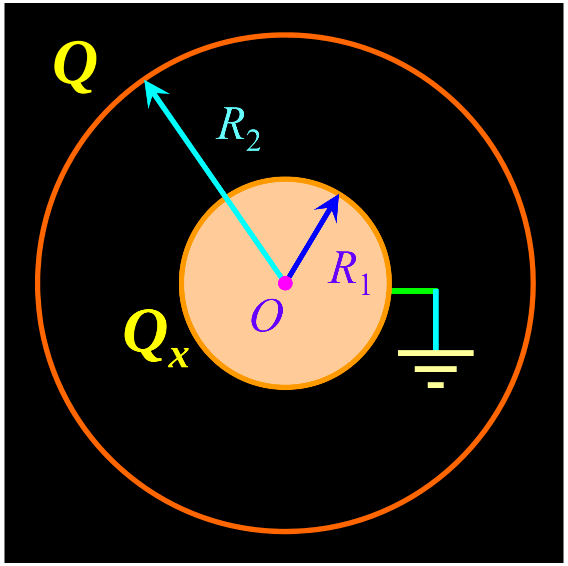
即使球形导体表面的电荷分布不均匀, 仍可以用该方法求球心的电势.

由高斯定理，得场强分布为：

$$E_1=\frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\qquad (R_1<r<R_2)$$

$$E_2=\frac{Q_x+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\qquad (r>R_2)$$

$$E_3=0\qquad (r<R_1)$$



由电势的定义，可得电势分布：

$(r<R_1)$ $\quad U_3=0$

$(R_1\le r\le R_2)$

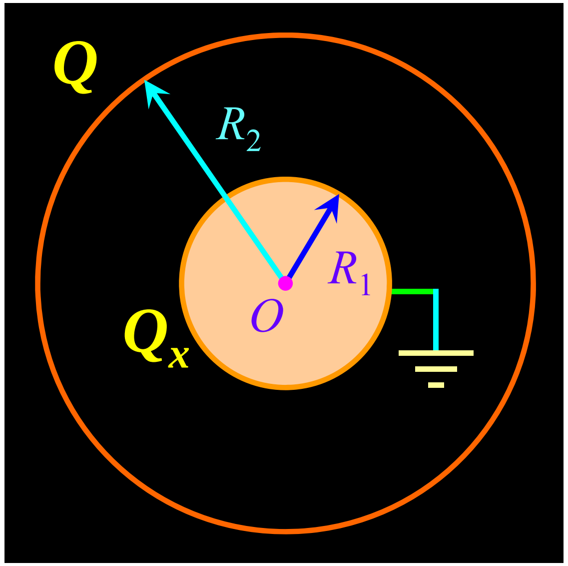
由于内球也是零电势

$$U_1=\int_r^{R_1}\vec{E}_1\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{R_1}\frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)$$

(r≥R₂)

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q_x + Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q_x + Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



导体接地时,其外表面电荷不一定为零!

但电势一定为零.

最后, 将Q_x代入以上各式, 可求得各处的场强和电势的分布为:

($R_1<r<R_2$)

$$E_1 = \frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q(-R_1/R_2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{R_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2 r^2}$$

($R_1 \leq r \leq R_2$)

$$U_1 = -\frac{R_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{R_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2 r}$$

($r > R_2$)

$$E_2 = \frac{Q(-R_1/R_2)+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2 r^2}$$

($r \geq R_2$)

$$U_2 = \frac{Q(-R_1/R_2)+Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{1}{r}$$

其余为0

能否由电势叠加原理求电势？

复习:均匀带电球面电场中的电势分布？

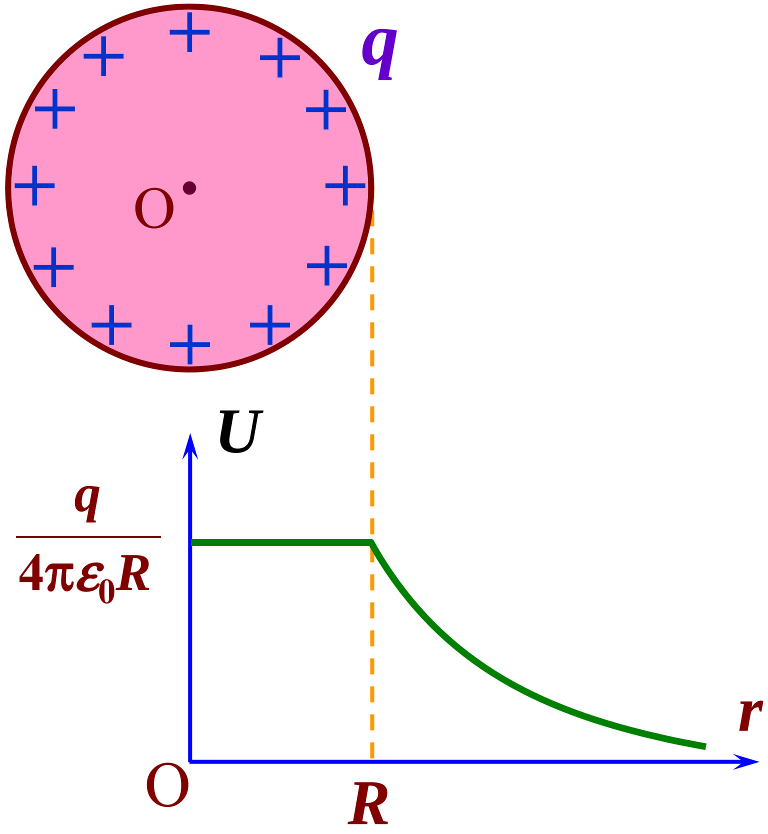
$r>R$ 时, 球外一点的电势

$$U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

与点电荷的电势类似

$r<R$ 时, 球内为等势体, 球内任一点的电势

$$U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



球内任意一点的电势都相等, 等于带电球体表面的电势, 也等于球心的电势.

由电势叠加原理求电势:先求Q_x

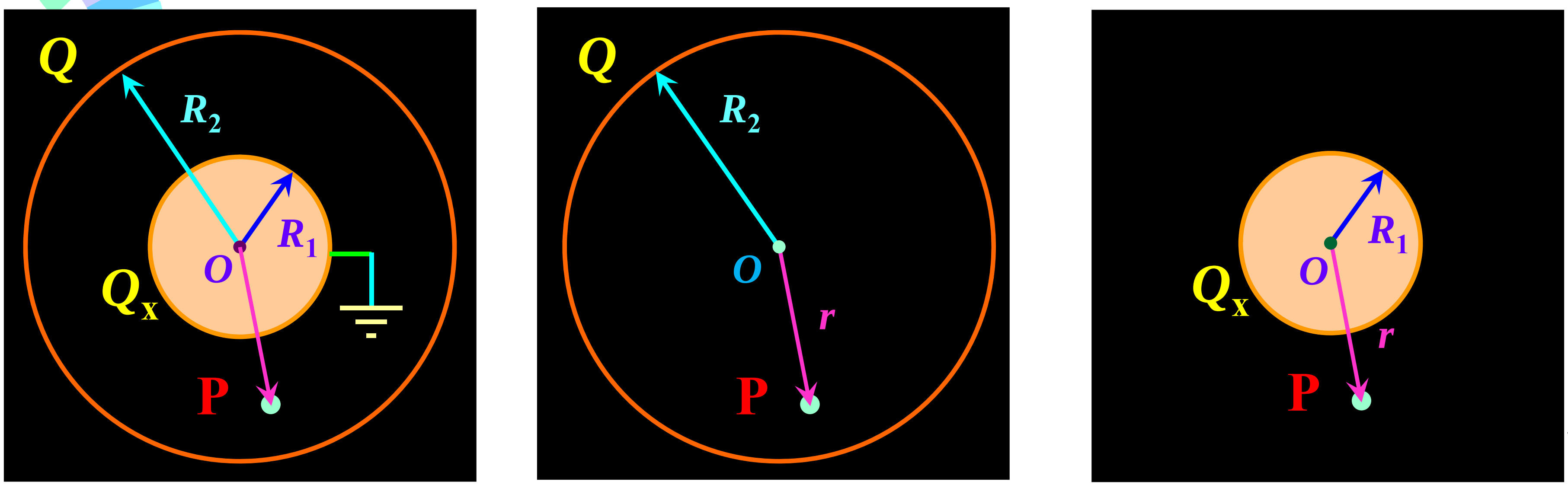
$(r<R_1)$ $U_3=0$

$(R_1\le r\le R_2)$

$$U_{1Q}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

$$U_{1Q_x}=\frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}=-\frac{R_1Q}{4\pi\varepsilon_0R_2}\frac{1}{r}$$

$$\boxed{U_1=U_{1Q}+U_{1Q_x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_2}-\frac{R_1Q}{4\pi\varepsilon_0R_2r}}$$

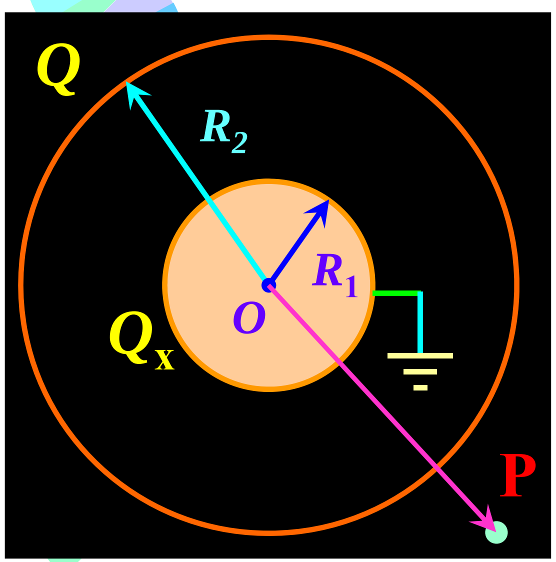


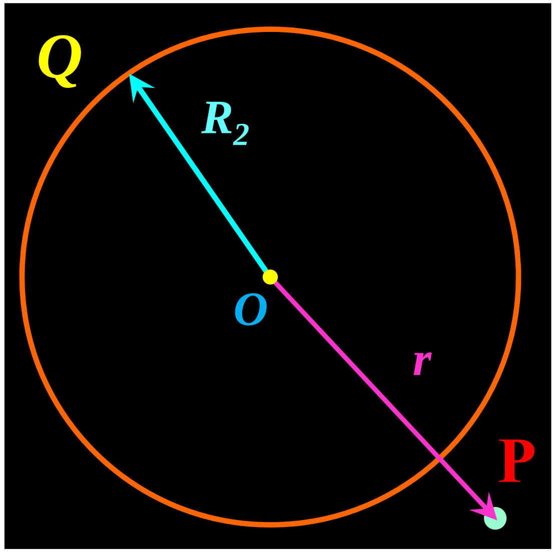
($r \geq R_2$)

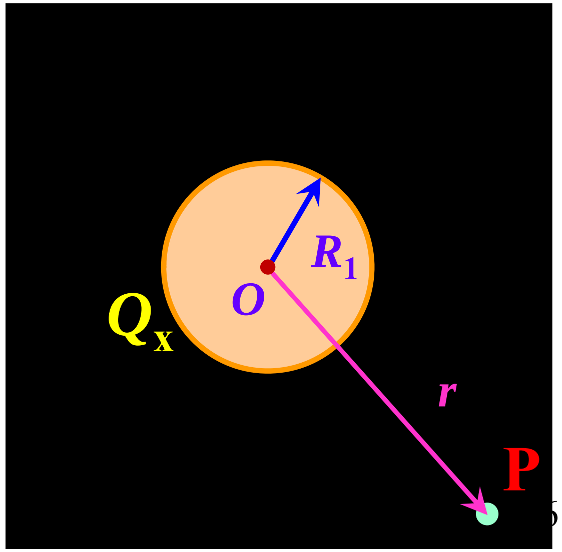
$$U_{2Q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$U_{2Q_x} = \frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{R_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{1}{r}$$

$$\boxed{U_2 = U_{2Q} + U_{2Q_x} = \frac{(R_2 - R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{1}{r}}$$







求电场强度

($r<R_1$) $E_3=-\nabla U_3=0$

($R_1<r<R_2$)

$$E_1=-\nabla U_1=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}-\frac{R_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2 r}\right)=-\frac{R_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2 r^2}$$

($r>R_2$)

$$E_2=-\nabla U_2=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{1}{r}\right]=\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{1}{r^2}$$

★小结:

用静电平衡解题是一个难点, 注意以下特点:

(1) 导体内任一点的电场强度都等于零

利用这个特点，结合导体中的电荷只能分布在导体表面一般可以确定导体中的电荷分布.

(2) 导体是等势体, 其表面是等势面

特别要注意，接地的导体电势一定为0，但是其表面电荷量却不一定为0，可以根据接地的导体电势一定为0或通过导体内任一点的电场强度都等于零的特点来判断导体中的电荷分布.

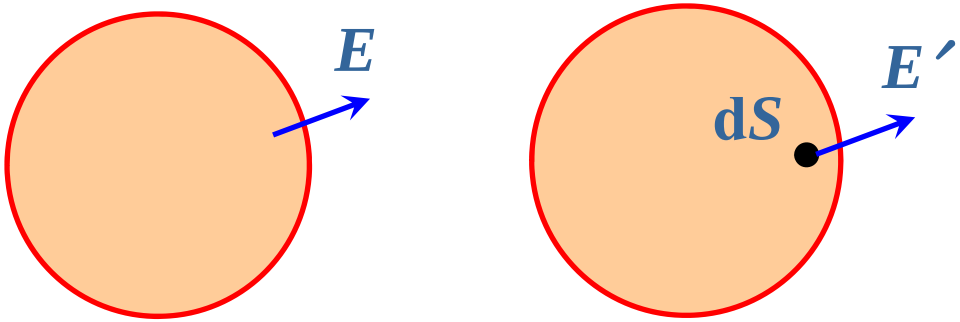
(3) 一般电势分布是一个连续函数

根据这个特点有时可用来求某些常数

注: 除了不能选为零电势的点

思考题:

(1)一球壳电荷密度为σ, 当被挖去一个小孔, 求小孔处的电场强度



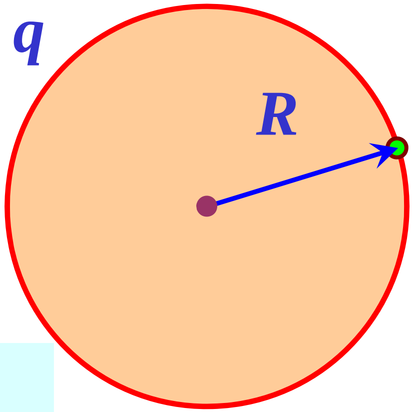
(2)一球壳电荷密度为σ, 其表面处面积为dS的电荷所受的电场力为多大?

(3) 我们知道,金属表面附近的电场强度为 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

则面电荷密度为σ的无限大平板金属板附近的电场强度也如上式表示.但上一章讲过,一块面电荷密度为σ的无限大平面的场强为 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

矛盾否?

§10-2 电容 电容器



一. 孤立导体的电容

1. 孤立导体电容的定义

空气中孤立球形导体的电势 $$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

一个孤立导体的电势**U**与所带电荷量**q**呈线性关系, 其比值称为孤立导体的电容

孤立球形导体的电容: $$C=\frac{q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$$

2. 孤立导体电容的特点

(1). 与**Q**无关,只决定导体本身

(2). 反映储存电量的能力

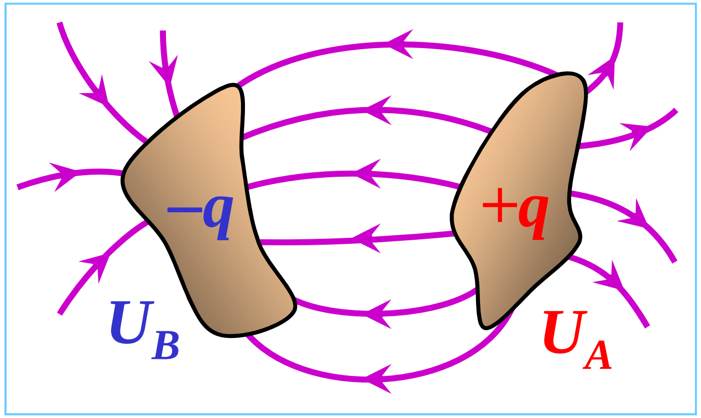
(3). 单位: **1F=10^6μF=10^{12}pF**

二. 电容器的电容

1. 电容器

两个导体组成的系统，用来储存电荷和电能.

两极板等量异号电荷.



符号：⊣⊢

2. 电容器电容C的定义

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}$$

Q为任一导体所带电量值，U_A-U_B为两导体间的电势差

孤立导体的电容也可视为该导体与无穷远处另一极板所组成的电容器

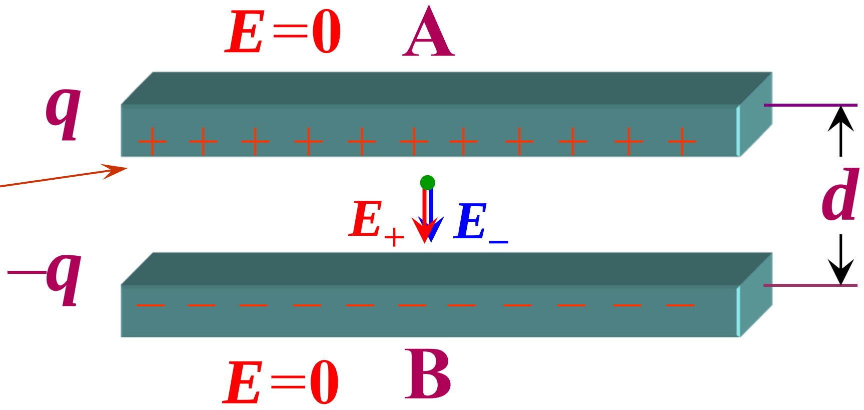
三. 简单电容器电容的计算

1.平行板电容器

两极板面积S, 间距d, 分别带电荷$+q$和$-q$,
忽略边缘效应, 真空中

近似于无限大平板
→ 匀强电场

两极板只有内表面带电



$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$U_A-U_B=\int_{(A)}^{(B)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

$$\boxed{C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

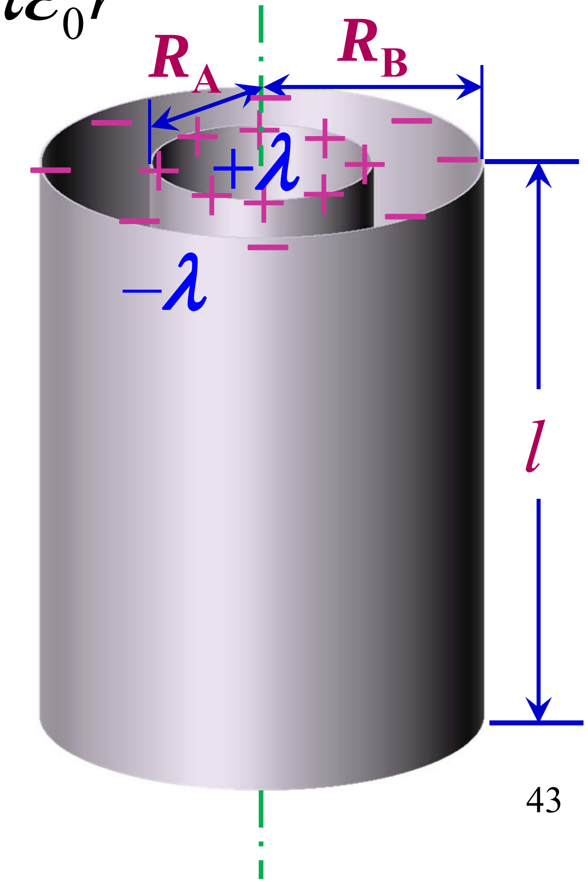
电容大小仅由材料
几何结构决定

2.圆柱形电容器

两同轴金属圆柱面，内、外柱面半径R_A、R_B，长$l >>(R_A-R_B)$，内外柱面线电荷密度为$+\lambda$、$-\lambda$，忽略边缘效应, 即“无限长”，

由高斯定理得两同轴金属圆柱面之间的电场强度:

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$



$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot \mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{\lambda l}{U_A-U_B}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}$$

电容大小仅由材料几何结构决定

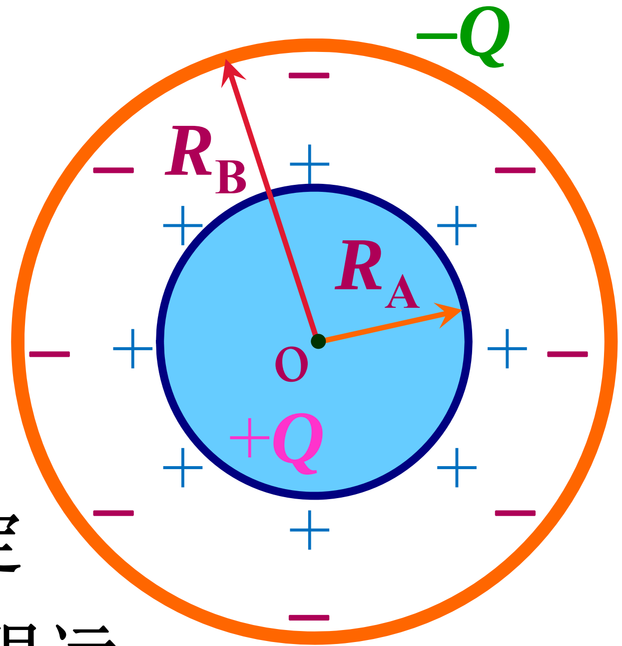
3.球形电容器

两同心金属球壳半径分别为R_A、R_B, 电荷$+Q$、$-Q$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_{R_A}^{R_B}E\mathrm{d}r=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$



$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_B R_A}{(R_B-R_A)}$$

电容大小仅由材料几何结构决定

当R_B>>R_A时, 即外壳趋向无限远,

由$R_B\to\infty$, $C=4\pi\varepsilon_0 R_A$, 为孤立导体球的电容

四. 复杂电容的计算—电容器的串联和并联

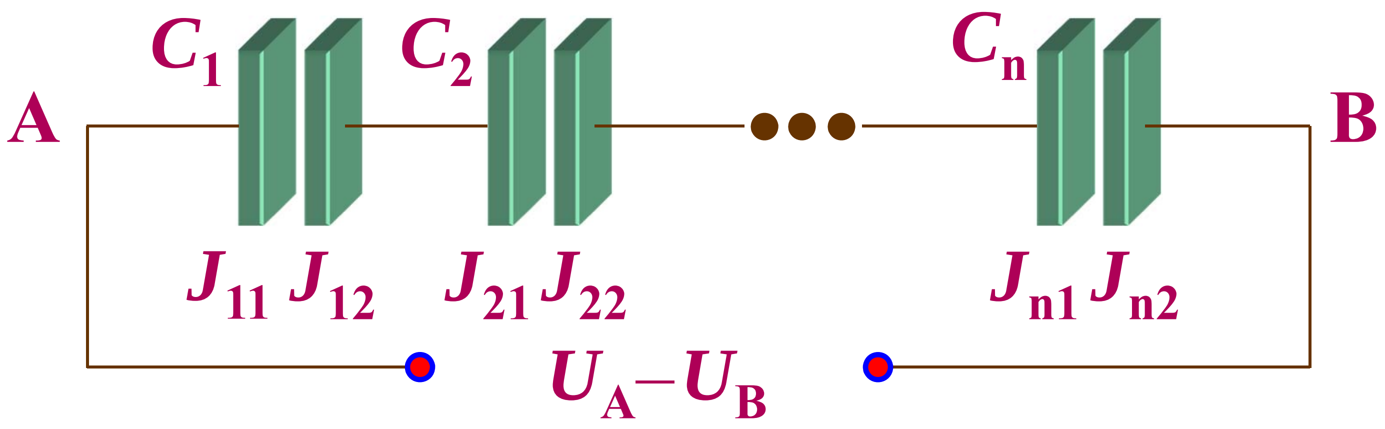
1 几个概念

电容器的性能指标: 电容量、耐压.

等值电容: 多个电容器连接后, 其等效的电容等于所带电量与两端电势差之比

2 电容器的串联

有$C_1,C_2,\ldots,C_n$, 相应电势差为 $U_1,U_2,\ldots,U_n$,



中间所有导体上的净电荷为零.

将C_1的左板和C_n的右板分别加上Q和$-Q$的电荷，由于静电感应，在其它电容的极板上感应出相应等量的电荷，电源只提供Q的电量。

电量　　$Q_1=Q_2=\ldots=Q_n=Q$

总电势差　$U_A-U_B=U_1+U_2+\ldots+U_n$

$$\frac{1}{C}=\frac{U_A-U_B}{Q}=\frac{U_1+U_2+\cdots+U_n}{Q}$$

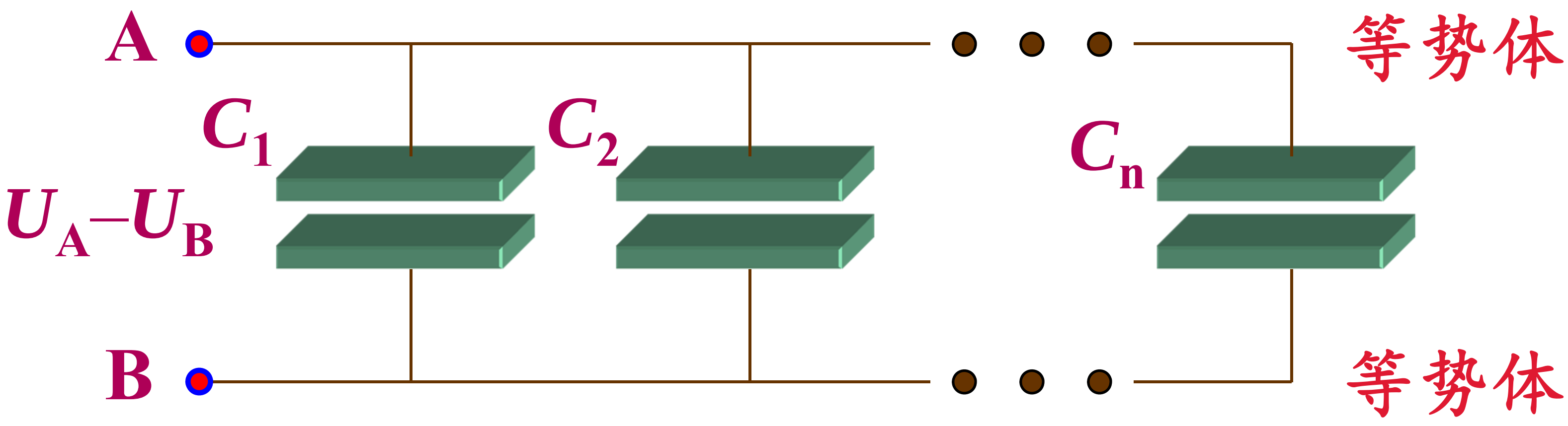
$$=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

相当于板间距d增加了

串联电容减小，耐压增加

3 电容器的并联:

有 $C_1, C_2, \ldots, C_n$,相应电量为 $q_1, q_2, \ldots, q_n$



总电量为 $Q=q_1+q_2+\ldots+q_n$, 都是电源提供的

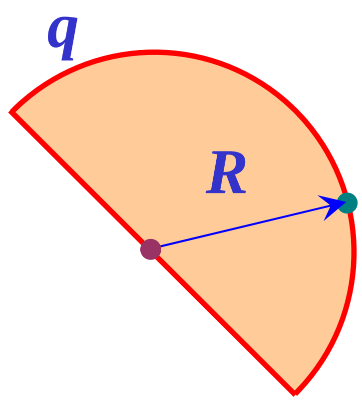
电势差为 U_A-U_B

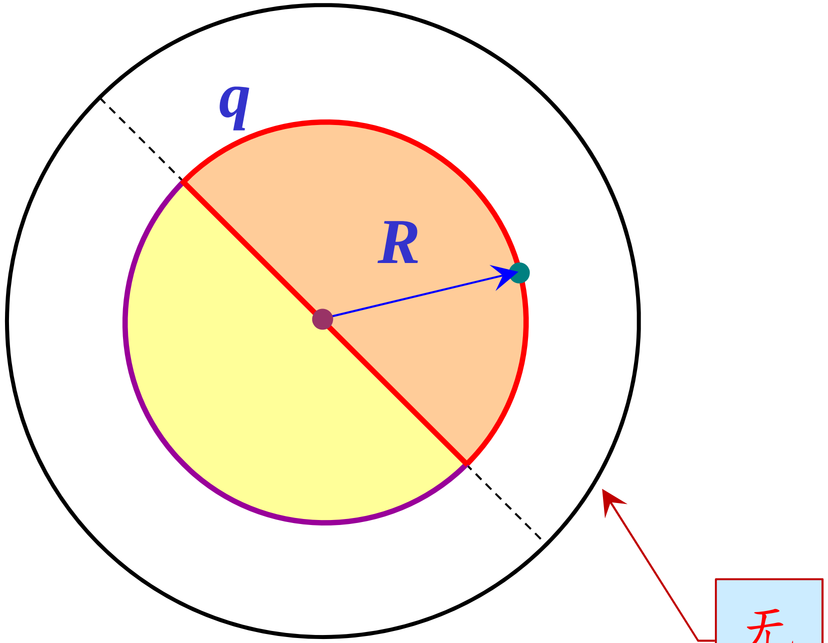
$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{U_A-U_B}=C_1+C_2+\ldots+C_n$$

并联增加总电容, 耐压值等于其中最低的耐压值.

相当于面积S增加了

例3: 求空气中半径为*R*的半球的电容 *C′*.





(1) 空气中整个球的电容 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

(2) 球的电容可看成两个半球电容的并联,

$$C = C' + C' = 2C'$$

故空气中半球的电容 $C' = C/2 = 2\pi\varepsilon_0 R$

例4.平板电容器,极板面积为S,极板间距为d, 若平行于极板插入一块面积也为S, 厚度为$d/2$的导体平板, 求该电容器的电容?

解: 两极板间真空处的场强为:

$$E_{ab} = E_{cd} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_{bc} = 0$$

$$\Delta U = \int_a^d \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_{ab} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_{bc} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{E}_{cd} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

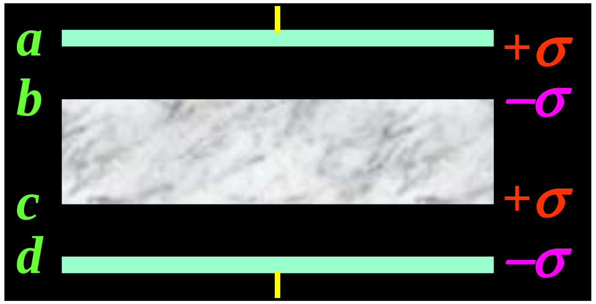
$$= \int_a^b \vec{E}_{ab} \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{E}_{cd} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d_{ab} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d_{cd} = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\sigma S}{\sigma d / 2\varepsilon_0} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} = 2C_0$$

电容增加了一倍, 这相当于平板电容器的极板间距减少了一半

解法二：

$$C_{ab}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_{ab}} \qquad C_{cd}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_{cd}}$$



电容器的串联

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_{ab}}+\frac{1}{C_{cd}}=\frac{d_{ab}}{\varepsilon_0 S}+\frac{d_{cd}}{\varepsilon_0 S}=\frac{d_{ab}+d_{cd}}{\varepsilon_0 S}=\frac{d/2}{\varepsilon_0 S}=\frac{d}{2\varepsilon_0 S}$$

$$C=\frac{2\varepsilon_0 S}{d}=2C_0$$

结果一样

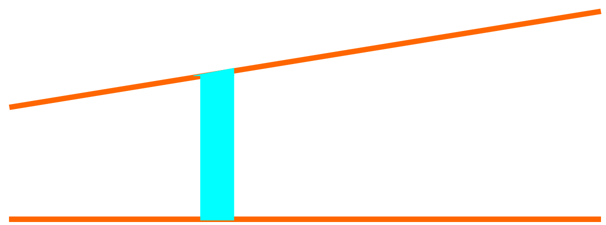
★小结: 求电容的方法

(1)先将电容器的两极板上分别加上等量异号的电量. 若是孤立导体的电容, 可将另一极板看成在无穷远处

(2)用电势的定义(有时可用电势叠加原理)求出两极板间的电势差

(3)用电容的定义求出电容量

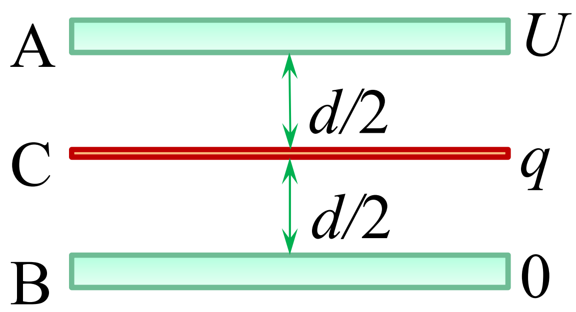
(4)对于复杂的电容器计算, 可先求出简单电容器的电容量, 然后在利用简单电容的串并联来求出电容.



♠例5: 一平行板电容器两极板的面积都是S, 相距为d, 分别维持$U_A=U$和$U_B=0$不变. 现将一块带有电荷量q的导体薄片(其厚度可以不计)放在两极板的正中间, 薄片的面积也是S, 如图所示, 略去边缘效应, 试求薄片的电势.

解

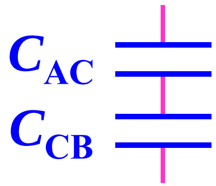
有人这样求C点的电势, A,C之间组成的电容C_{AC}和C,B之间组成的电容C_{CB}串联



且 $C_{AC}=C_{CB}$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_{AC}}+\frac{1}{C_{CB}}=\frac{2}{C_{CB}}$$

$$C=\frac{C_{CB}}{2}$$



$$q=UC=\frac{UC_{CB}}{2}$$

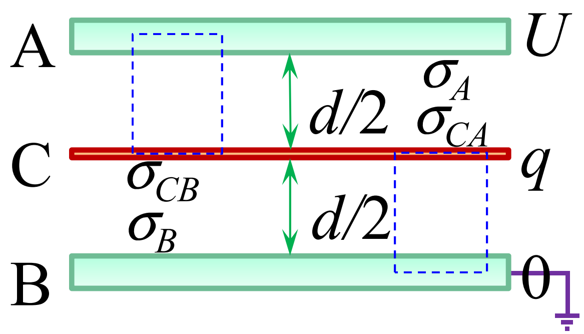
$$U_C=U_{CB}=\frac{q}{C_{CB}}=\frac{U}{2}$$

该解法对吗?

$U_B=0$不变什么意思?

♠**例5:** 一平行板电容器两极板的面积都是S, 相距为d, 分别维持$U_A=U$和$U_B=0$不变. 现将一块带有电荷量q的导体薄片(其厚度可以不计)放在两极板的正中间, 薄片的面积也是S, 如图所示, 略去边缘效应, 试求薄片的电势.

解 为了求C点的电势, 需要知道A,C之间的电场强度E_{AC}和C,B之间的场强E_{CB}; 为了求电场强度, 需要知道电荷的分布, 即各导体表面的电荷面密度.



设A,C,B三金属板相向面上的面电荷密度分别为$\sigma_A,\sigma_{CA},\sigma_{CB},\sigma_B$, 则由高斯定理和C板电荷守恒得:

$$\begin{cases}\sigma_A+\sigma_{CA}=0\\ \sigma_{CB}+\sigma_B=0\\ \sigma_{CB}+\sigma_{CA}=q/S\end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases}\sigma_{CA}=-\sigma_A\\ \sigma_B=-\sigma_{CB}\\ \sigma_A+\sigma_B=-(\sigma_{CA}+\sigma_{CB})=-\dfrac{q}{S}\end{cases}$$

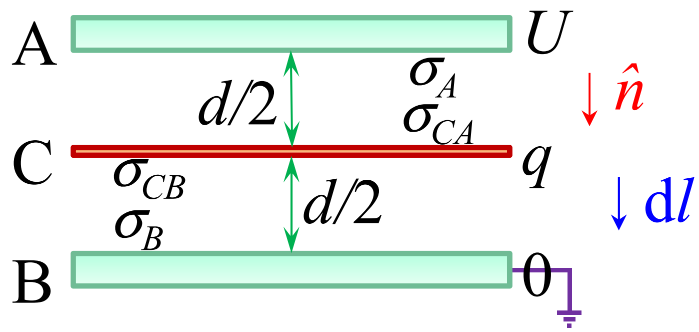
由已知条件: 维持$U_A = U$和$U_B = 0$不变

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = U$$

A、C之间的场强E_{AC}和C、B之间的场强E_{CB}为

$$\vec{E}_{AC} = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\vec{E}_{CB} = -\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}\hat{n}$$



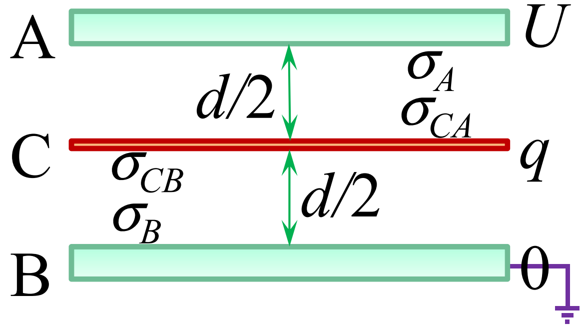
其中n为垂直于极板平面的单位矢量, 于是得:

$$U_A - U_B = U = \int_A^B \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^C \vec{E}_{AC}\bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_C^B \vec{E}_{CB}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0}\frac{d}{2} - \frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}\frac{d}{2} = (\sigma_A - \sigma_B)\frac{d}{2\varepsilon_0}$$

所以

$$\begin{cases} \sigma_A - \sigma_B = \dfrac{2\varepsilon_0 U}{d} \\ \sigma_A + \sigma_B = -(\sigma_{CA} + \sigma_{CB}) = -\dfrac{q}{S} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sigma_B = -\dfrac{q}{2S} - \dfrac{\varepsilon_0 U}{d} \\ \sigma_A = -\dfrac{q}{S} - \sigma_B = -\dfrac{q}{2S} + \dfrac{\varepsilon_0 U}{d} \end{cases}$$

$$U_C = U_C - U_B = \int_C^B \vec{E}_{CB} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}\frac{d}{2}$$

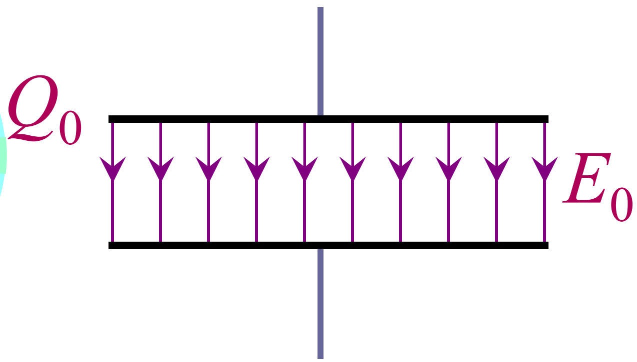
$$= -\frac{d}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{2S} - \frac{\varepsilon_0 U}{d}\right) = \frac{qd}{4\varepsilon_0 S} + \frac{U}{2}$$

§ 10-3 静电场的电介质

电介质: 电的非导体, 绝缘介质 (无自由电荷).
在外电场下对电场有影响,
静电平衡时, 内部场强不为零.

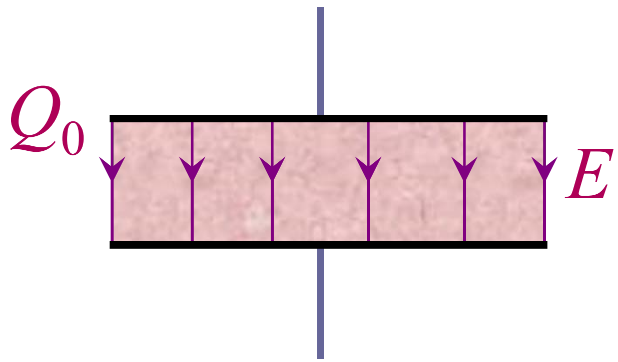
一、电介质对电场的影响

作平行板电容器做实验:



充电后

$$Q_0 = U_0 C_0$$



电介质对电场的影响

断电后, 插入电介质, 电势差变为$U<U_0$， $U\propto U_0$，其比例常数写成ε_r，称为电介质的相对介电常数(或相对电容率)，定义真空中$\varepsilon_r=1$，

断电后 (a)电荷Q_0不变的条件下, 电容增加ε_r倍,

电势下降

$$U=\frac{U_0}{\varepsilon_r}\ ,\quad C=\frac{Q_0}{U}=\frac{\varepsilon_r Q_0}{U_0}=\varepsilon_r C_0$$

(b)电荷Q_0不变的条件下, 场强减小ε_r倍.

$$E=\frac{U}{d}=\frac{U_0}{\varepsilon_r d}=\frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

why?

二、电介质的极化

电介质对电场影响的原因 → 电介质的极化

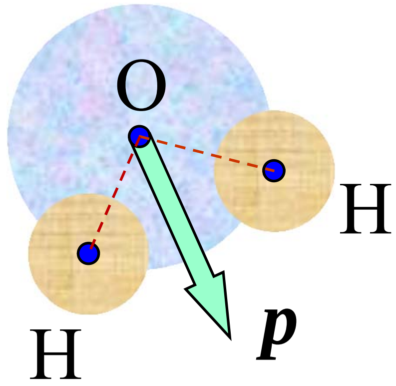
1. 有极分子和无极分子

原子的正负电中心重合,每个原子的电偶极矩为零.原子构成电介质分子时

无极分子

无极分子　几个原子构成分子时,正负电中心重合

无极分子 $\boldsymbol{p}=0$



有极分子

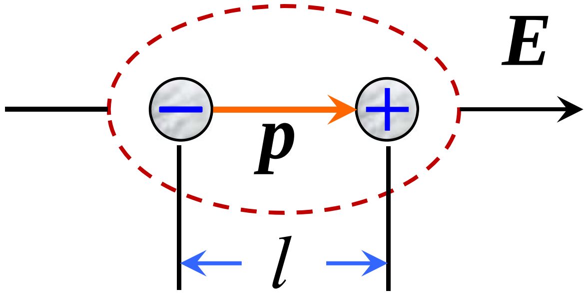
有极分子　正负电中心不重合

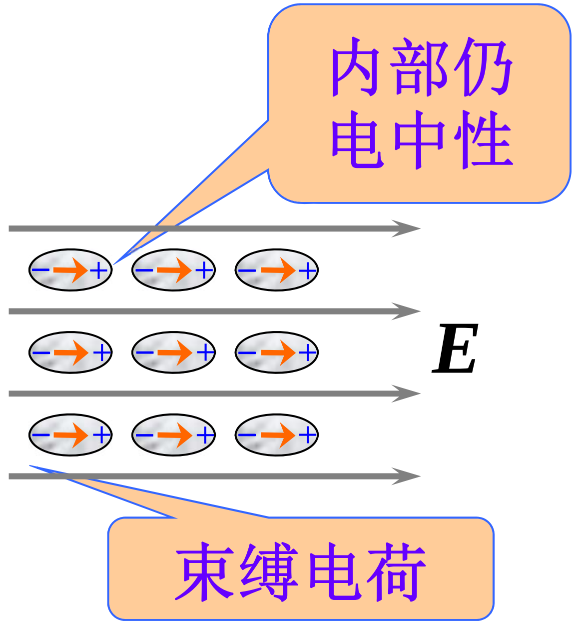
有极分子等效正负电荷中心组成等效分子电偶极矩 $\boldsymbol{p}\neq 0$.

对大量分子的等效电偶极矩之和 $\sum \boldsymbol{p}=0$.

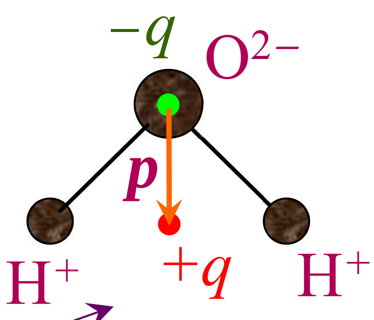
2. 无极分子和有极分子的极化

无极分子与有极分子

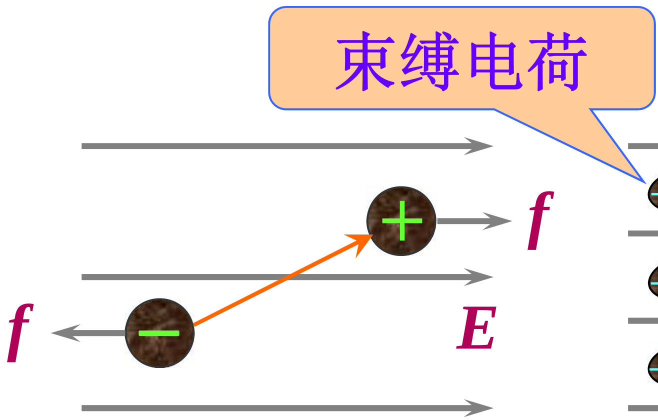


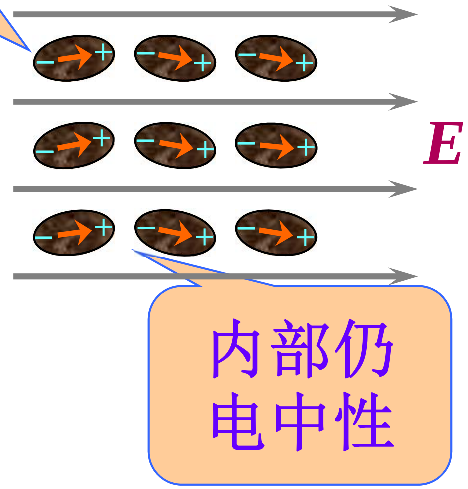


无极分子的位移极化



书上错





有极分子的取向极化

3. 极化的特点

(1) 均匀介质的界面上形成不能自由移动的束缚电荷或极化电荷, 介质内部仍是电中性

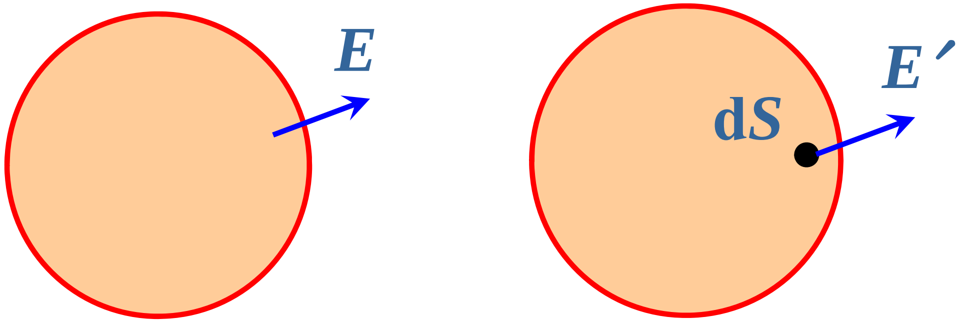
(2) 无极分子经历位移极化, 束缚电荷排列整齐.
有极分子主要经历取向极化, 束缚电荷一般排列不整齐.
极化的结果束缚电荷在介质内部产生电偶极矩.

(3) 电场越大, 则极化越严重, 束缚电荷则越多.
束缚电荷产生的电偶极矩越大,
当电场强度为0时, 极化消失

(4) 静电场中, 两种极化都存在, 而高频场中, 基本无取向极化.

思考题:

(1)一球壳电荷密度为σ, 当被挖去一个小孔, 求小孔处的电场强度



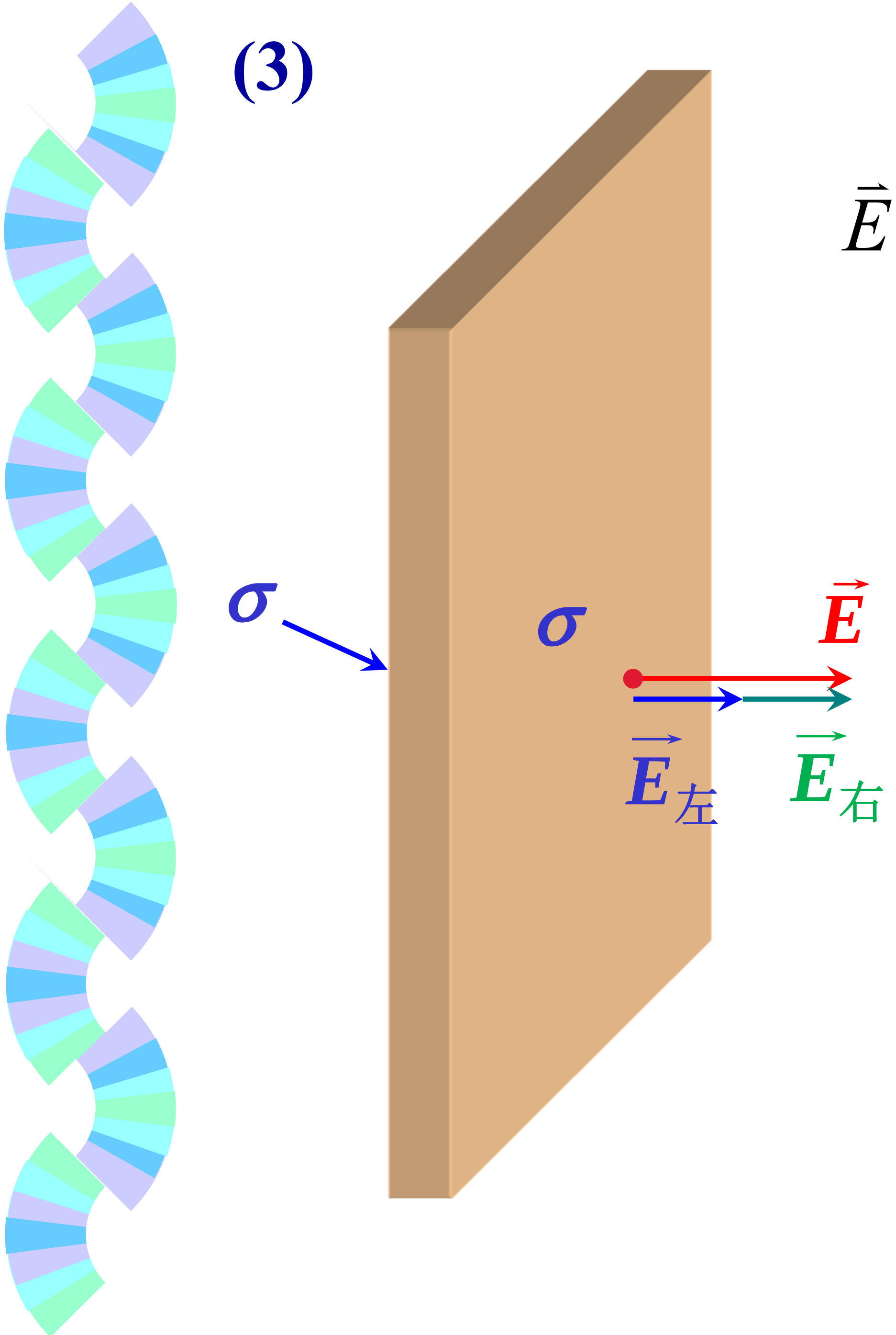
(2)一球壳电荷密度为σ, 其表面处面积为dS的电荷所受的电场力为多大?

(3) 我们知道,金属表面附近的电场强度为 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

则面电荷密度为σ的无限大平板金属板附近的电场强度也如上式表示.但上一章讲过,一块面电荷密度为σ的无限大平面的场强为 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

矛盾否?

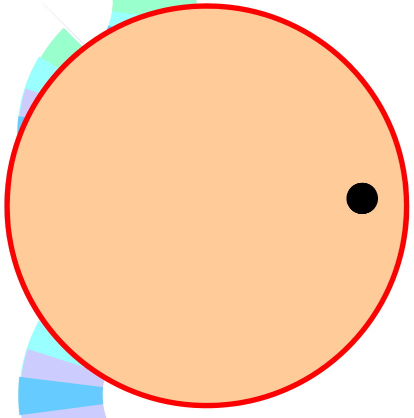
(3)



$$\vec{E} = \vec{E}_{左} + \vec{E}_{右}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(1)



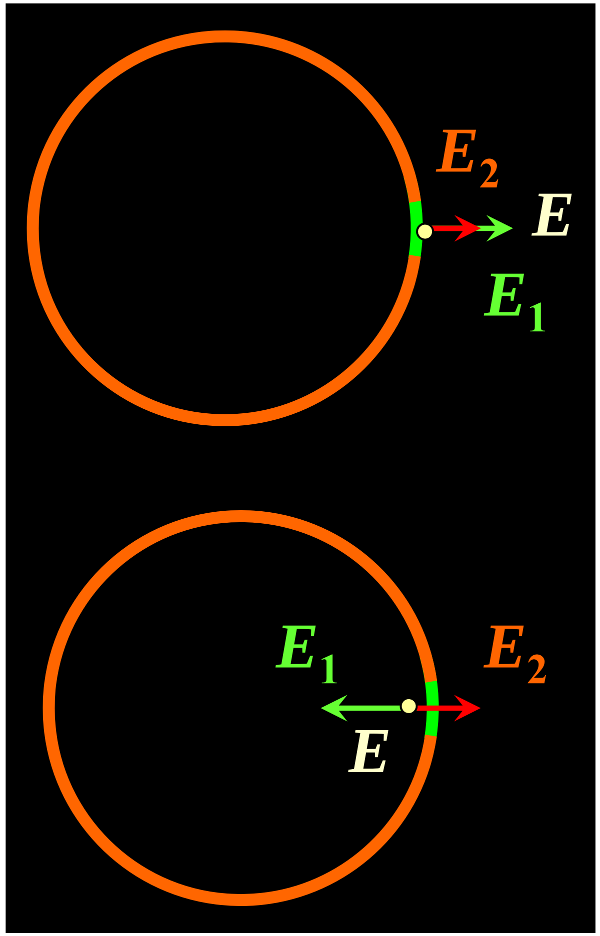
右边: $E_{righ} = E_1 + E_2 = E$

左边: $E_{left} = E_1 - E_2 = 0$

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2}$$

对于金属表面，由于 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



★ 注意:

这个结论只有在非常靠近金属表面时才成立

(2)

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}qE_2 = \sigma \mathrm{d}S \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}S$$

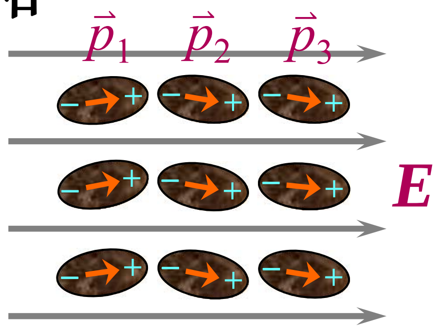
三、描述电介质极化的强弱 → 电极化强度

1. 电极化强度矢量

单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V_{体}}$$

P称为:
电极化强度矢量



2. 电极化强度矢量的特点

(1). 电极化强度矢量与电场的关系

各向同性介质
低电场

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e介质的电极化率

为合场强 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

(a) 电介质的极化强度决定于合场强**E**
(则介质内的场强) 而不是原来的场强E_0

(b) 极化强度**P** 与合场强**E**的方向相同

(c) 要求**P**, 先求**E**

(2). 极化强度矢量P与极化电荷面密度 σ'的关系

斜柱体所相当的电偶极矩为:

$$\mathrm{d}\sum p_i = \mathrm{d}qL = \sigma'\mathrm{d}SL$$

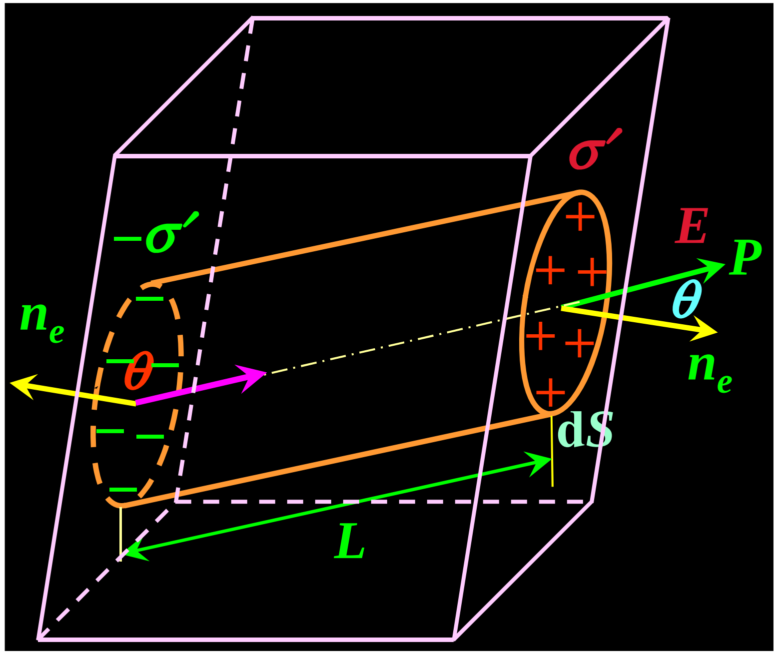
斜柱体的体积为:

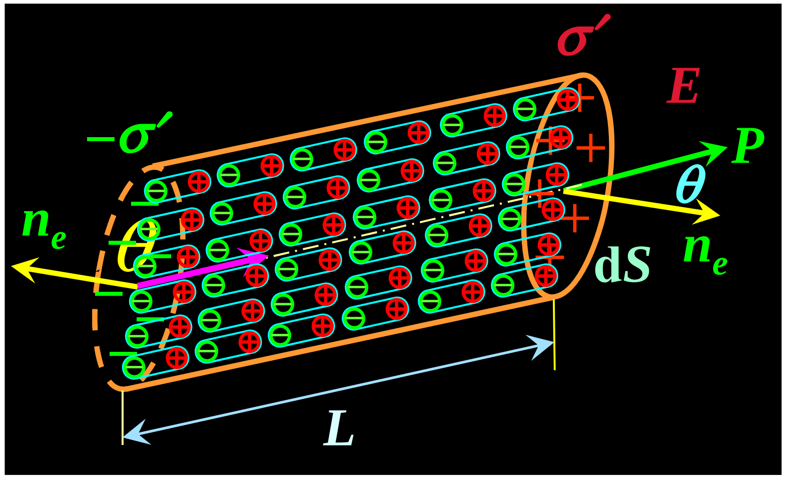
$$\mathrm{d}V_{体} = \mathrm{d}SL\cos\theta$$

电极化强度P的大小为:

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{\left|\mathrm{d}\sum \vec{p}_i\right|}{\mathrm{d}V_{体}}$$

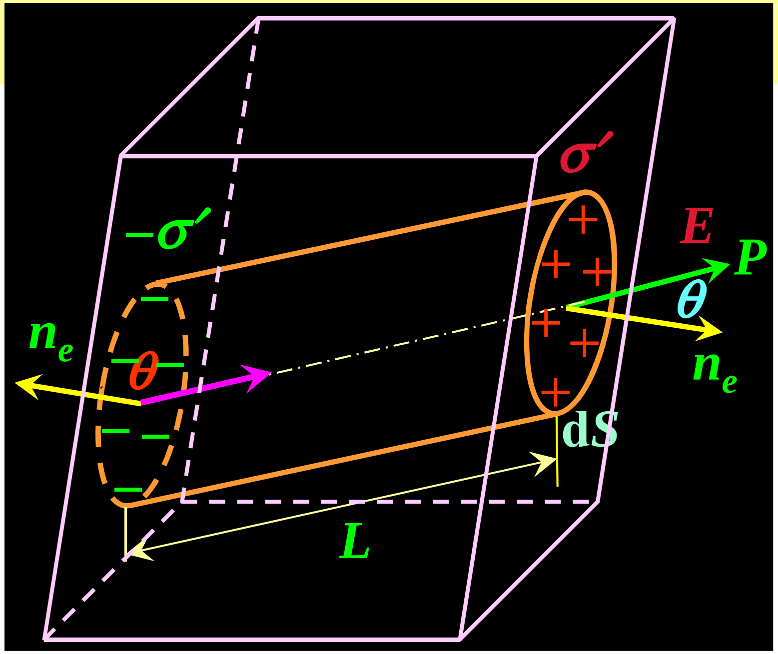
$$= \frac{\sigma' L\mathrm{d}S}{L\cos\theta \mathrm{d}S} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$





所以 $\boxed{\sigma' = \left|\vec{P}\right|\cos\theta = P_n = \vec{P}\bullet\hat{n}_e}$

电介质极化时的极化电荷面密度等于极化强度沿外法线方向的分量.



$0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \sigma' > 0$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ $\quad \sigma' < 0$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \sigma' = 0$

(a) 仅对均匀介质而言, 对不均匀介质还可能出现体密度, 且和极化强度有关

(b) 要求σ', 先求P

实验现象的解释

§10-4 电介质中静电场的基本定理

一、电介质中的场强

$E_0 \rightarrow$ 自由电荷

激发的电场，

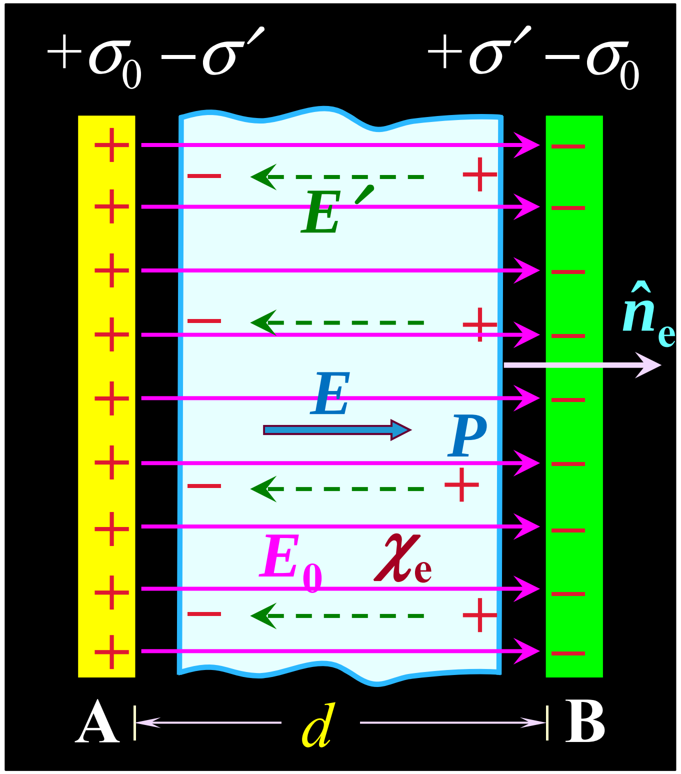
$E' \rightarrow$ 束缚电荷或

极化电荷

激发的电场，

介质中的合场强：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



E' 有什么特点?

1. 束缚电荷产生场强的特点

(1) 由于束缚电荷也是静止电荷, 故其场强的计算也与自由电荷产生的电场一样.

(2) 束缚电荷产生的场强方向总是与原电场相反, 故介质极化后的场强总比原来的场强小.

与金属内部不同, 介质极化后产生的场强不会为零.

(3) 各向同性介质, 低电场时, 电介质的极化强度

χ_e为极化率

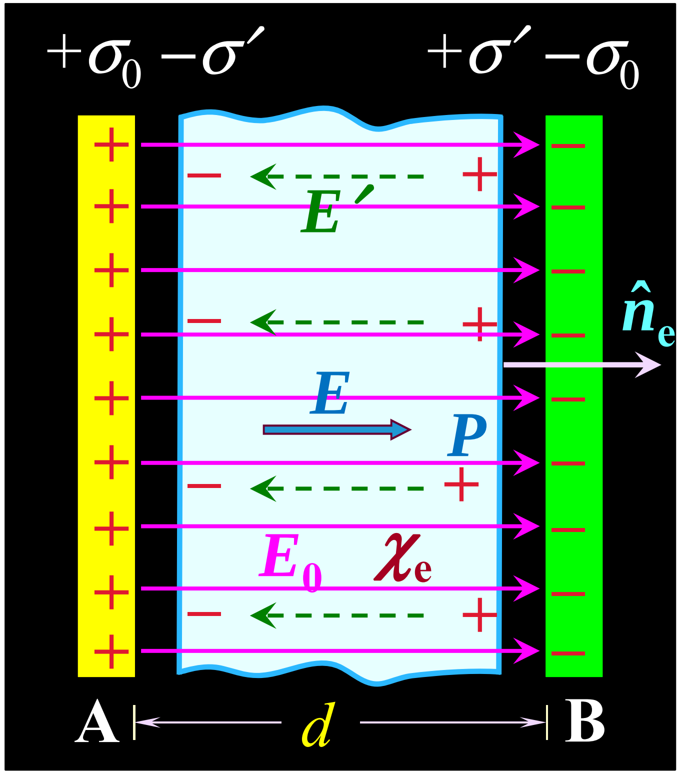
$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

P与E方向一致

电介质的极化强度决定于电介质内的合场强E而不是原来的场强E_0

2. 电介质对场强的影响

对充满极化率为χ_e的各向同性均匀电介质的无限大平行板电容器，设自由电荷密度为$\pm\sigma_0$，介质表面的束缚电荷密度$\pm\sigma'$



自由电荷的场强：($+\sigma_0$和$-\sigma_0$)

$$E_0=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

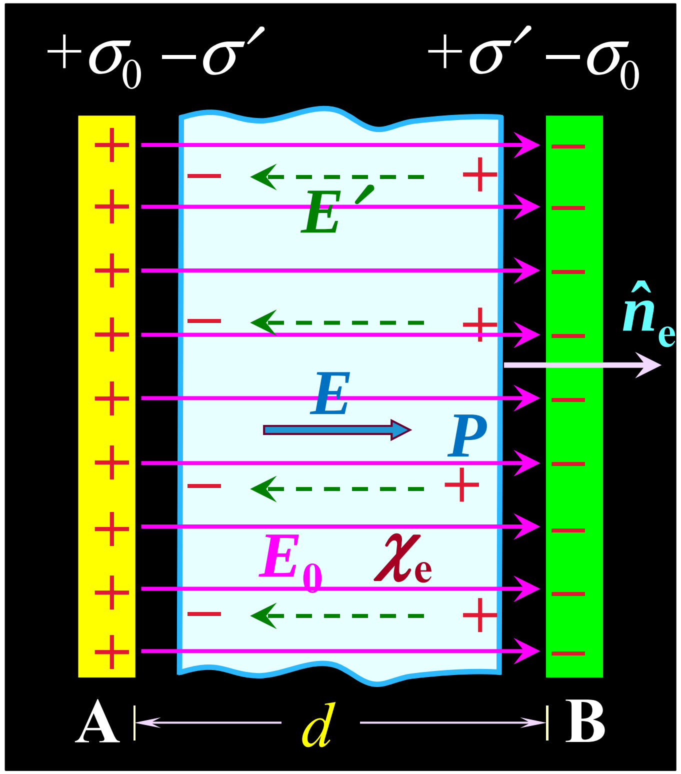
束缚电荷的场强：($+\sigma'$和$-\sigma'$)

$$E'=-\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}+(\frac{-\sigma'}{2\varepsilon_0})=-\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma'=P_n=P\cos\theta=P\cos 0°=P$$

合电场的场强为:

$$E = E_0 + E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$



$\sigma' = P\cos\theta = P$ 代入上式:

介质中的电极化强度

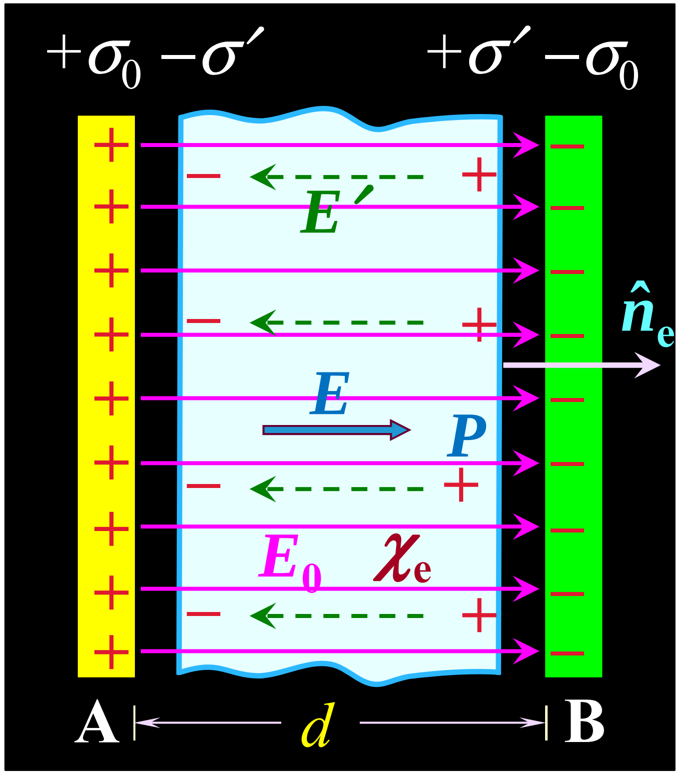
$P = \chi_e \varepsilon_0 E = \sigma'$

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

$$E = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$\varepsilon_r = (1+\chi_e)$

电介质内部的场强 E 是场强 E_0 的$1/(1+\chi_e)$倍.



$$E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

结论1:

在Q_0不变的情况下, 电介质中场强减弱为E_0的 $1/\varepsilon_r$

事实上, 由于极化电荷的存在, 净电荷量减小了

$$\sigma=-\sigma'+\sigma_0<\sigma_0$$

应该减小到多少呢?

a. 极化电荷密度和自由电荷密度的关系

电场强度的关系：

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$ 实验结果

电介质内部的电场

$$E = E_0 + E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

极化解释

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma_0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

b. 净电荷量

$$\sigma = -\sigma' + \sigma_0 = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0 + \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r}$$

由于极化电荷，净电荷量减小到极板电量的**1/ε_r**

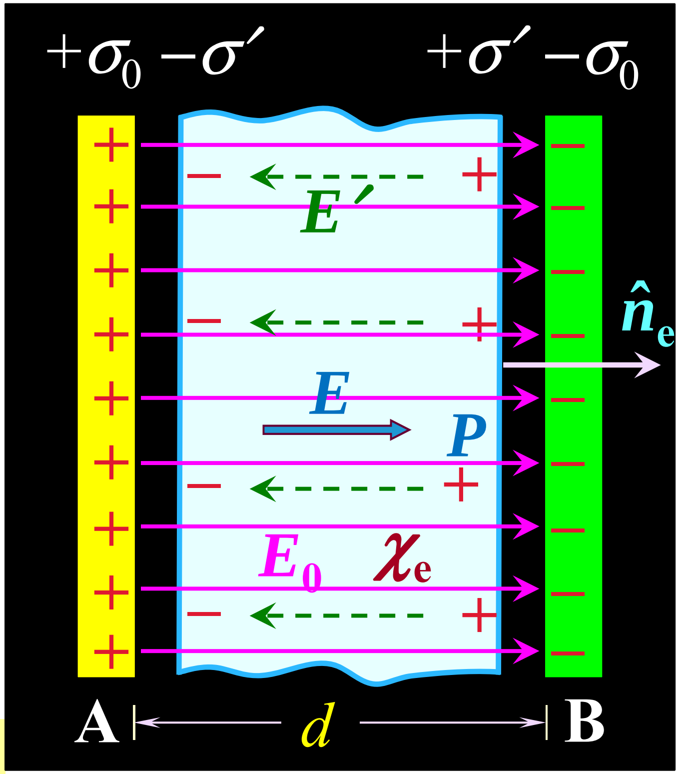
3.电介质对电容量及电势差的影响

设在无介质时,极板之间的电势差为U_{AB0},其电容为C_0,则有介质时两极板之间的电势差为:

$$U_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\int_{(A)}^{(B)}\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}\bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_r}\int_{(A)}^{(B)}\vec{E}_0\bullet \mathrm{d}\vec{l}=\frac{U_{AB0}}{\varepsilon_r}$$

降低电势差



结论2:

在Q_0不变的情况下, 电介质使电势差降低为原来的$1/\varepsilon_r$

有介质时的电容:

增加电容量

$$C=\frac{q_0}{U_{AB}}=\frac{q_0}{U_{AB0}/\varepsilon_r}=\varepsilon_r\frac{q_0}{U_{AB0}}=\varepsilon_r C_0$$

结论3:

在Q_0不变的情况下, 电介质使电容量增加为原来的ε_r倍

结论3中, 该条件(即在Q_0不变的情况下)并不是必需的

结论1和结论2成立的条件: 放入介质前后导体中自由电荷分布不变

二、有电介质时的高斯定理 电位移矢量*D*

1. 环路定理

极化电荷也是静止电荷，故束缚电荷所激发的场也是有势场，环路定理还成立；

$$\oint_L \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

2. 高斯定理

对于高斯定理，由于高斯面内所包含的电荷有导体的自由电荷，也有介质中的束缚电荷，而束缚电荷的电场同样会产生电通量，虽然高斯定理仍成立，但变成：

$$\oiint_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 + \sum q'\right)$$

其中***E***为高斯面上合电场的电场强度

讨论:

(a) 若已知电场强度***E***, 则可用高斯定理求出极化电荷$\sum \boldsymbol{q}'$

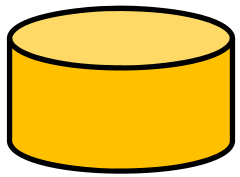
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 + \sum q'\right)$$

$$\sum q' = \varepsilon_0 \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S} - \sum q_0$$

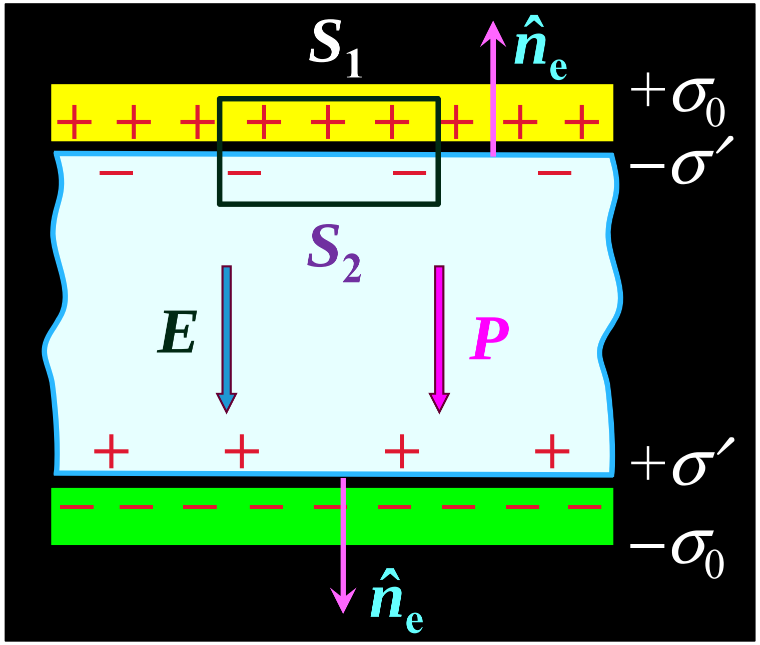
(b) 若电场强度***E***未知, 能否用高斯定理求出电场强度?

因为上式中***E***和$\sum \boldsymbol{q}'$相互关联, 而$\sum \boldsymbol{q}'$的值也不能直接求得, 因此必须设法消去上式中的$\sum \boldsymbol{q}'$

(1) 有电介质时高斯定理的推导



图示为平行板电容器，在介质和金属板间做圆柱体高斯面，得：



$$\oiint_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2)$$

从上介质面，也可得：

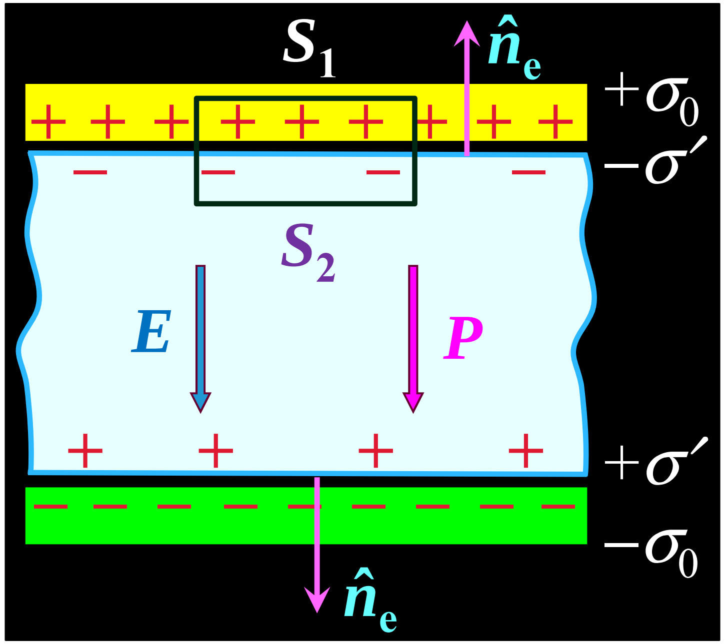
$$\vec{P} \bullet \hat{n}_e = P\cos\theta = P\cos\pi = -P = -\sigma'$$

$$\oiint_S \vec{P} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{P} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = PS_2 = \sigma' S_2$$

电极化通量

金属导体中 $E=0$, $P=0$

将此式代入得:



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0 S_1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma' S_2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0 S_1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S \vec{P} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S (\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q_0}{\varepsilon_0}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$$

定义电位移矢量：

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

则有电介质时的高斯定理变为:

电位移通量

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{\text{in}} q_0$$

有电介质时的高斯定理:

通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面所包围的自由电荷量的代数和.

***D*的单位是C/m².**

上式虽然从平行板电容器推得，但它是普遍适用，是静电场得基本定理之一.

(2). $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ 三矢量之间的关系

a、对电位移矢量*D*的几点说明:

(a) 电位移矢量没有明显的物理意义;

(b) 通过闭合曲面的电位移通量只与自由电荷有关,
而与束缚电荷无关;

(c) 电位移矢量决定于自由电荷与极化电荷的分布;
与自由电荷与极化电荷都有关

(d) 电位移矢量的定义式对各向同性和各向异性
的介质都适用

b、$\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ 三矢量之间的关系:

对各向同性的介质: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

$\varepsilon_r = (1+\chi_e)$

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}}$$

代入电位移矢量的定义式:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}}$$

★在各向同性的介质中$\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ 三矢量的方向都相同.

上式在各向异性的介质中并不适用,
因为 ***D*, *E*, *P*** 三矢量的方向可能不同.

(3). 电位移线

a.电位移线上每一点的切线方向
和该点的电位移 ***D*** 的方向相同;

b.垂直于电位移线的单位面积上通过的电位移线数等于该点的电位移***D***的量值.

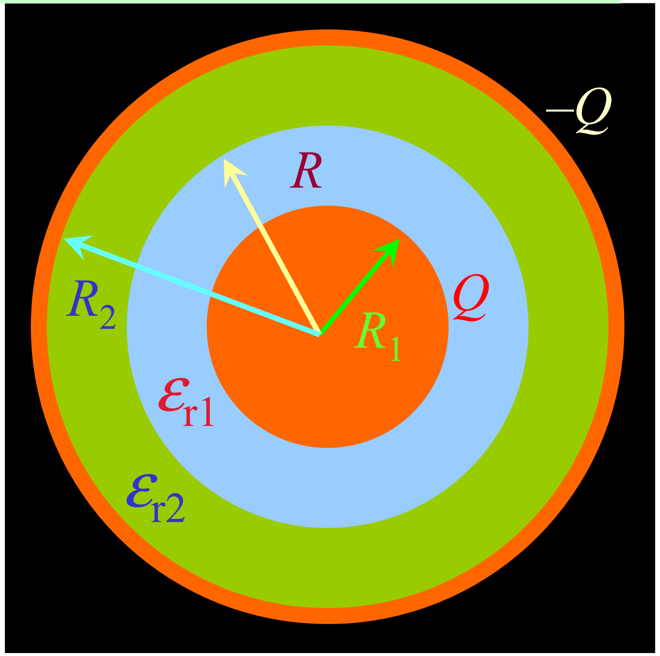
3. 有电介质时高斯定理的应用

例：如图,一球形电容器,由半径为R_1的金属球及与它同心的内径为R_2的金属球壳组成,其间有两层均匀电介质,相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2},其分界面是半径为R的同心球面,当电容器的带电量为Q时,求:

(1) 各区域$\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{P}$、U分布.

(2)内层电介质内表面和分界面的极化电荷面密度

解: (1) 各区域D、E、P、U分布

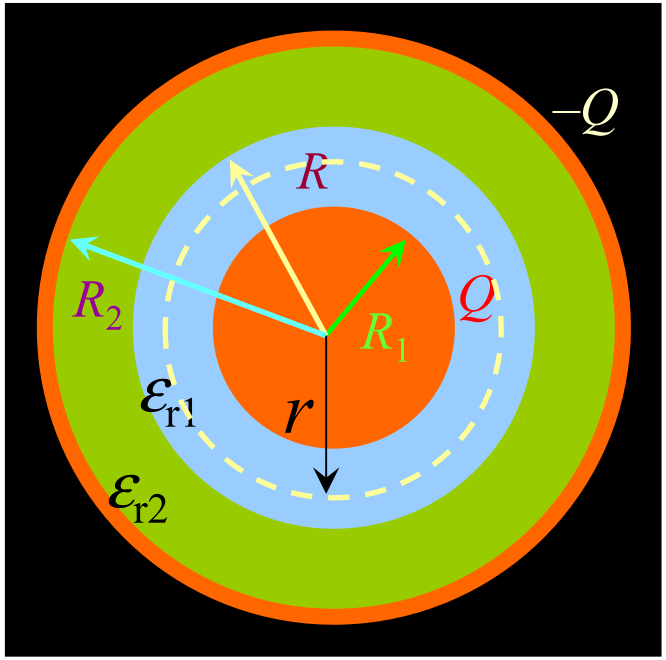


分析对称性:

由于电荷和电介质的分布都是球对称性的，故介质极化后产生的极化电荷也是球对称性地分布在介质的内外表面.

因此,电场强度 E 和电位移矢量 D 必定在矢径方向并且大小呈球对称.

求电场强度$\boldsymbol{E}$的分布:



(a) $R_1<r<R$

取高斯面:

过所求点取与金属球同心的,半径为r的球面S为高斯面

根据介质中的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S D\cdot\cos 0°\cdot \mathrm{d}S=D\cdot 4\pi r^2=\sum_{in} q_0=Q$$

$$D_1=\frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}$$

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}$$

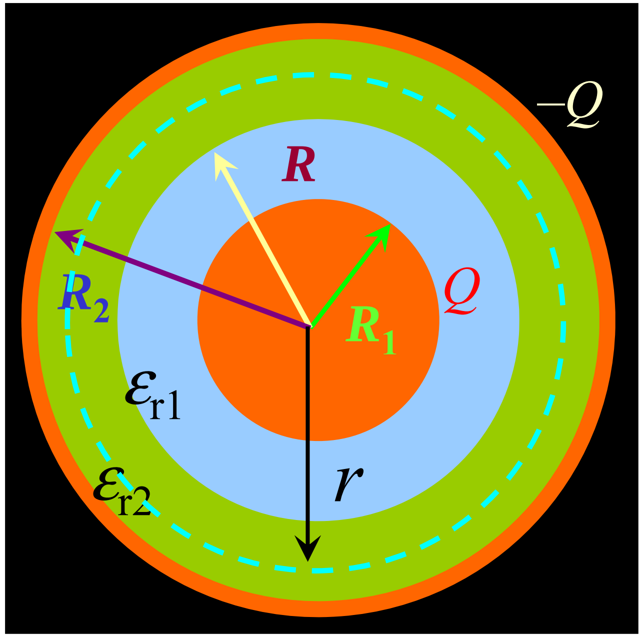
$$\boldsymbol{P_1=D_1-\varepsilon_0E_1=(\varepsilon_{r1}-1)\varepsilon_0E_1}=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}r^2}$$

方向均为沿矢径向外

(b)同理 $\boldsymbol{R<r<R_2}$

$$\oiint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S D\cdot\cos 0^\circ\cdot \mathrm{d}S$$

$$=D\cdot 4\pi r^2=\sum_{in} q_0=Q$$



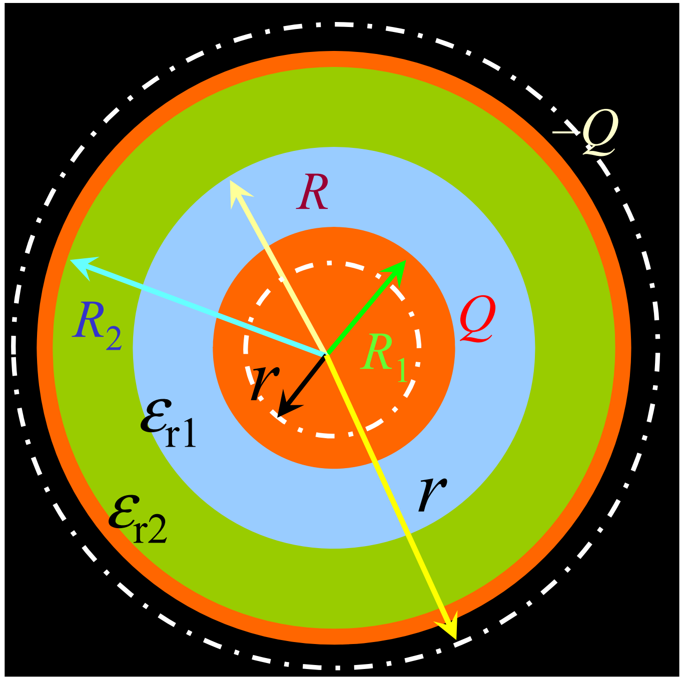
$$D_2=\frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_2}=\frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}$$

$$\boldsymbol{P_2=D_2-\varepsilon_0 E_2=(\varepsilon_{r2}-1)\varepsilon_0 E_2}=\frac{(\varepsilon_{r2}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r2}r^2}$$

方向均为沿矢径向外

(c) $R_2<r$和$r<R_1$



$$\oiint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S D\cdot\cos 0^\circ \cdot \mathrm{d}S$$

$$= D\cdot 4\pi r^2 = \sum_{in} q_0 = 0$$

$$\boldsymbol{D_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{E_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{P_3 = 0}$$

方向均为沿矢径向外.

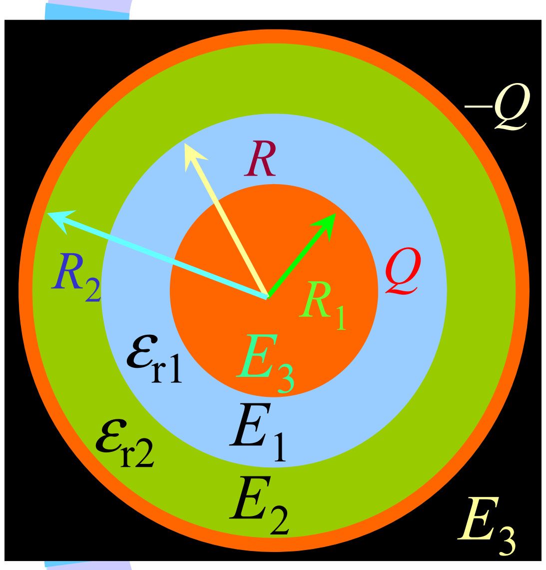
求电势的分布:

(a) $r \le R_1$

$$U = \int_p^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$= \int_r^{R_1} \vec{E}_3 \bullet d\vec{l} + \int_{R_1}^{R} \vec{E}_1 \bullet d\vec{l} + \int_R^{R_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \bullet d\vec{l}$$

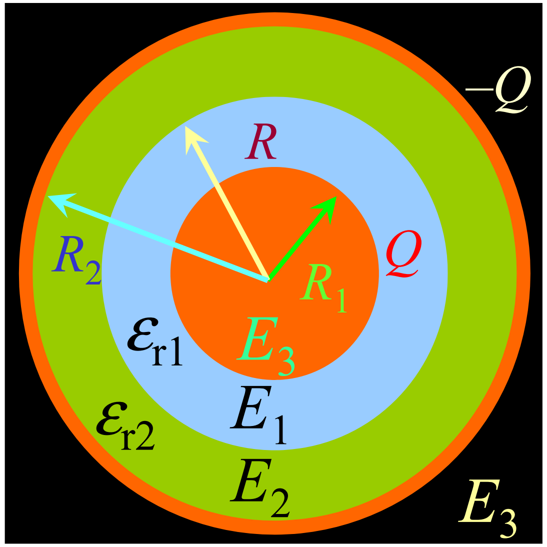
$$= \int_p^{R_1} 0 \cdot dr + \int_{R_1}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2} dr$$



$$+ \int_R^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} 0 \cdot dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right)\right]$$

(b) $R_1 \le r \le R$



$$U = \int_p^\infty \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^R \vec{E}_1 \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_R^{R_2} \vec{E}_2 \bullet \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_2}^\infty \vec{E}_3 \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2} \mathrm{d}r + \int_R^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2} \mathrm{d}r + \int_{R_2}^\infty 0 \cdot \mathrm{d}r$$

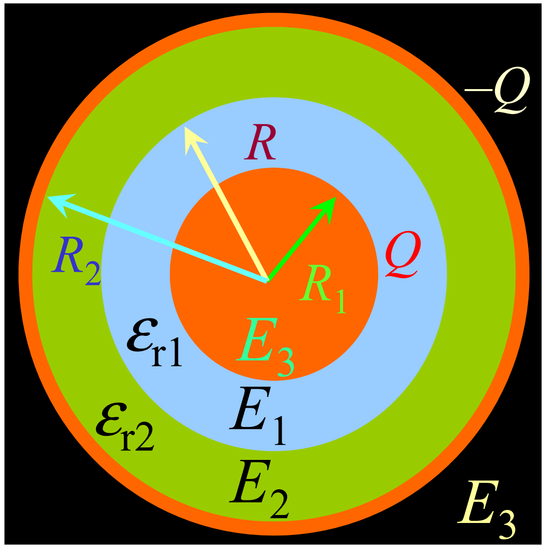
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right)\right]$$

(c) $R \le r \le R_2$

$$U=\int_p^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_r^{R_2}\vec{E}_2\bullet d\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\bullet d\vec{l}$$

$$=\int_r^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}0\cdot dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$



(d) $R_2 \le r$

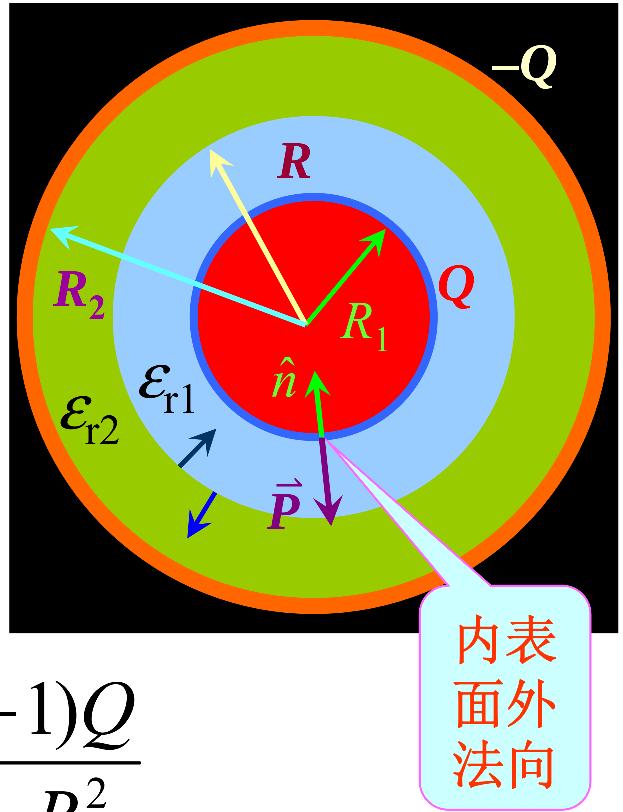
$$U=\int_p^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_r^{\infty}\vec{E}_3\bullet d\vec{l}=\int_r^{\infty}0\cdot dr=0$$

思考题: 求电势能否用电势叠加原理　束缚电荷?

(2)内层电介质内表面的极化电荷面密度.

$$P_1=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}r^2}$$

由于内表面的外法线方向为 $-\hat{r}$ 方向



$$\sigma'=\vec{P}_1\Big|_{r\to R_1}\bullet\hat{n}=P_{1R_1}\cos\pi$$

$$=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}R_1^2}\cdot(-1)=\frac{(1-\varepsilon_{r1})Q}{4\pi\varepsilon_{r1}R_1^2}$$

电介质交界面的极化电荷面密度

$$\sigma_1'=\vec{P}_1\Big|_{r\to R}\bullet\hat{n}=P_{1R}\cos 0^\circ=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}R^2}$$

$$\sigma_2'=\vec{P}_2\Big|_{r\to R}\bullet\hat{n}=P_{2R}\cos\pi=-\frac{(\varepsilon_{r2}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r2}R^2}$$

$$\boxed{\sigma'=\sigma_1'+\sigma_2'=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}R^2}-\frac{(\varepsilon_{r2}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r2}R^2}=\frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)}$$

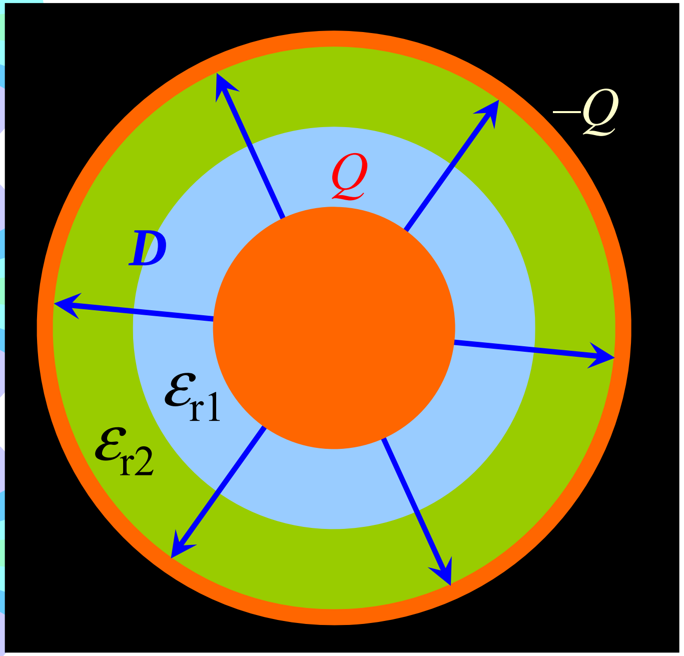
★讨论：(1)电位移线和电场线

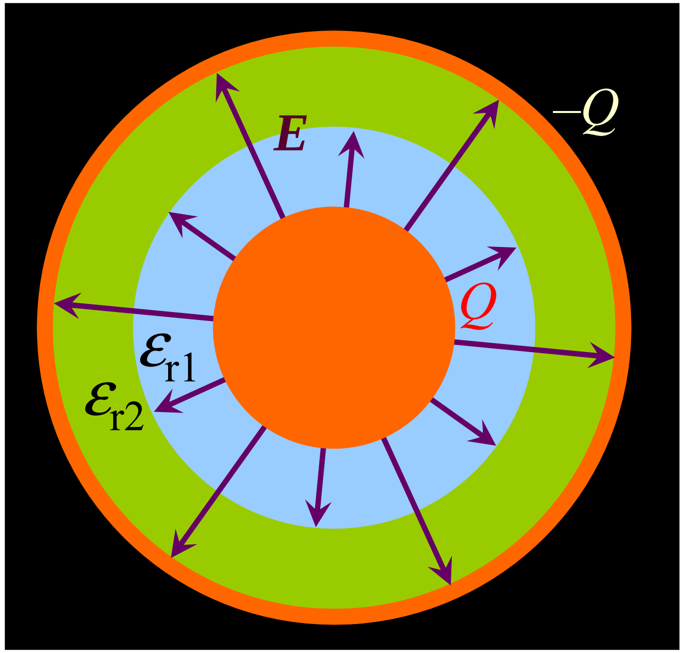
$$D_1 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2}$$

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2}$$





(2) 能用真空中的高斯定理求极化电荷吗?如何求?