微积分（H）I 复习

数学科学学院 卢兴江
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

一、数列极限

数列极限

定义($\varepsilon - N$ 语言)：

对$\{a_n\}$，若存在常数a，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in Z^+$，当 $n \ge N$ 时，

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (\text{或 } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon)$$

则称数列$\{a_n\}$收敛，其极限为 a . 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

1

数列极限的性质：

唯一性，有界性，保号性，夹逼性

2

数列极限的四则运算：

“注意极限的存在性”

单调有界准则：

单调有界数列必有极限

3

柯西收敛准则：

数列$\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_n\}$为柯西数列。即

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in Z^+$，当 $n, m > N$ 时，$|a_n - a_m| < \varepsilon.$

常用的数列极限：

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0\ (|q| < 1),\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0),\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

一、函数极限

函数极限

定义($\varepsilon-\delta$ 语言):

设 $f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0)$内有定义，若 $\exists A\in R$，使得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，常数 A 为其极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

4

函数极限的性质:

极限唯一性，局部有界性，保号性，夹逼性

函数极限的四则运算:

"注意极限的存在性"

归结原理:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall x_n\neq x_0, n=1,2,\cdots \lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\ 有\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

无穷小:

无穷小的比较，无穷小的阶，利用等价无穷小求极限。

5

两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

二、连续函数及性质

函数连续与间断点

函数连续的定义： 设 $f(x)$在$U(x_0)$有定义, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

函数的间断点及其类型：

第一类间断点：左右极限皆存在。

（不相等为**跳跃间断点**，相等为可去**间断点**）

第二类间断点：左右极限至少有一个不存在。

闭区间上连续函数的性质

有界性： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

最大最小值： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到最大最小值。

介值性： $[a,b]$ 上的连续函数可取到其最小值与最大值之间任何数值。

零点存在定理： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)f(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

三、导数与微分

导数

导数的定义：

设 $f(x)$在$U(x_0)$内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在,

则称 $f(x)$ 在 x_0 点可导．也可表示为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

导数的计算：

- *基本初等函数求导数公式；导数的四则运算。*
- *复合函数求导数；隐函数求导数；参数式函数求导数。*
- *高阶导数（莱泊尼兹公式）。*

微分

微分的定义：

设 $f(x)$在$U(x_0)$内有定义，如果 $\exists A\in R$，使

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

则称$f(x)$在 x_0 **可微**， $\mathrm{d}y=A\Delta x$ 称为 $f(x)$在 x_0 的微分。

微分与导数的关系：

可微 $\Leftrightarrow$ 可导， $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

一阶微分的形式不变性：

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则 $\mathrm{d}y=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u$.

三、微分中值定理

费马定理 → 设$f(x)$在$U(x_0)$内有定义，如果 $f(x_0)$为极值，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$.

罗尔定理 → 设 $f(x)$ 满足：（1）在 $[a,b]$ 上连续 （2）在 (a,b) 内可导 （3）$f(a)=f(b)$，则至少 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理 → 设 $f(x)$ 满足：（1）在 $[a,b]$ 上连续 （2）在 (a,b) 内可导，则至少 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西中值定理 → 设 $f(x), g(x)$ 满足：（1）在 $[a,b]$ 上连续 （2）在 (a,b) 内可导，则至少 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

四、泰勒定理（泰勒公式）

在 x_0 点的 n 次泰勒多项式

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

带拉格朗日余项泰勒公式

设 $f(x)$ 在 $\mathrm{U}(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则 $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$.

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间.

带皮亚诺余项泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数，则 $f(x)=T_n(x)+o\left[(x-x_0)^n\right]$，$x\to x_0$.

常用的五个麦克劳林公式:

(1) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$.

(2) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$.

(3) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$.

(4) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$.

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$.

五、导数的应用

注意条件：如可导性，最后极限的存在性（或无穷大）等。

洛必达法则

对 $\frac{0}{0}$ 型， $\frac{\infty}{\infty}$ 型 $\left(\frac{*}{\infty}\text{型}\right)$ 未定式求极限。

求函数的单调区间和极值

(1)极值必在导数为零的点（驻点）或不可导的点取到。

(2)判别极值的两个定理

求函数的凹向区间和拐点

(1)若 $f''(x)\ge 0$，则 $y=f(x)$ 向上凹； 若 $f''(x)\le 0$，则 $y=f(x)$ 向下凹。

(2) $y=f(x)$ 的拐点即为 $y=f'(x)$ 的极值点。 （拐点为函数的连续点）

曲线的渐近线

水平渐近线： 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则 $y=A$ 为水平渐近线。

垂直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为垂直渐近线。

斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\ne 0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则 $y=kx+b$ 为斜渐近线。

曲率与曲率圆

曲率：$K=\frac{|f''(x)|}{\left[1+f'^2(x)\right]^{3/2}}$； **曲率中心**：$\xi=x-\frac{f'(x)\left[1+f'^2(x)\right]}{f''(x)}$，$\eta=y+\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}$.

六、不定积分

原函数与不定积分

若 $F'(x)=f(x)$,则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的**原函数**。称 $\{F(x)+C\}$ 为 $f(x)$ 的**不定积分**。

不定积分与微分互为逆运算： $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,\quad \int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$

计算不定积分方法

凑微分法： $x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha}\mathrm{d}x^{\alpha+1}$; $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$; $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$; $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$; $\cdots$

变量替换法： $\sqrt{a^2-x^2}\leftrightarrow x=a\sin t$; $\sqrt{x^2-a^2}\leftrightarrow x=a\sec t$; $\sqrt{a^2+x^2}\leftrightarrow x=a\tan t$;

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\leftrightarrow\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t.$ 对三角有理函数（万能变换） $t=\tan\frac{x}{2}.$

分部积分法： $\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$

有理函数不定积分

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\Rightarrow$ 可分解为部分分式： $\frac{A}{(x-\alpha)^k},\quad \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k},\quad k\in Z^+.$

七、定积分及其应用

定积分概念及意义　***定义（定积分的思想）， 几何意义和物理意义， 定积分的性质等.***

定积分的计算

微积分基本定理（含变上限积分求导）

牛顿--莱布尼兹公式，变量替换法，分部积分法

特殊函数的定积分：

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$； 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$

若 $f(x)$ 为周期函数（周期为T），则 $\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(x)\mathrm{d}x.$

定积分的应用

几何上：求平面图形的面积（直角坐标，极坐标）、平面曲线的弧长、旋转体体积和侧面积；

物理上：求液体静压力、变力作功、简单非均匀物体质量和转动惯量、简单物体间的引力等。

反常积分（广义积分）　***无穷区间的广义积分定义和计算； 无界函数广义积分和计算。Γ函数及性质。***

数列极限例题

方 法

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ： 对任意给出的正数 ε, 找出符合条件的正整数 N. 即当 $n \ge N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

例 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2}{2n^2-n} = \dfrac{1}{2}$

证： 记 $a_n = \dfrac{n^2+2}{2n^2-n}$, $a = \dfrac{1}{2}$, 因为 $\left|\dfrac{n^2+2}{2n^2-n} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{n+4}{4n^2-2n}\right| < \dfrac{5n}{4n^2-2n} = \dfrac{5}{4n-2}$

所以令 $\dfrac{5}{4n-2} < \varepsilon$ 解得 $n > \dfrac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. 取 $N = \left[\dfrac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}\right] + 1$, 即有

对 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $n \ge N > \dfrac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ 时, $|a_n - a| = \left|\dfrac{n^2+2}{2n^2-n} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2}{2n^2-n} = \dfrac{1}{2}$.

数列极限例题

例 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+\sqrt{n^4+k^2}}$

解　记 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+\sqrt{n^4+k^2}}=\dfrac{1}{n^2+\sqrt{n^4+1^2}}+\dfrac{2}{n^2+\sqrt{n^4+2^2}}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+\sqrt{n^4+n^2}}$，则有

$$\frac{n+1}{2\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+\sqrt{n^4+n^2}\right)}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\sqrt{n^4+n^2}}\le a_n\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\sqrt{n^4}}=\frac{n(n+1)}{4n^2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

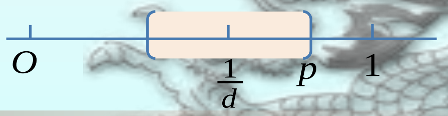
而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\Big/\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{4}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{4}$.

例 2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{d^n}=0$　(常数 $d>1$).

证：记 $a_n=\dfrac{n}{d^n}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{d^{n+1}}\cdot\dfrac{d^n}{n}=\dfrac{1}{d}<1$，由保号性，存在 $0<p<1$ 和正整数 N 使得

当 $n\ge N$ 时，$0<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<p.\Rightarrow a_{n+1}<pa_n<p^2a_{n-1}<\cdots<p^{n-N+1}a_N$，即有　$0<a_n<p^n\cdot\dfrac{a_N}{p^N}$，

因为 $0<p<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0$，由夹逼性知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{d^n}=0$.



单调有界准则的应用举例

例1 设数列由下式定义 $u_1=2,\ u_{n+1}=\dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1},n=1,2,3,\cdots,$

试证明$\{u_n\}$收敛并求其极限。

证明 因为$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}-u_n=\dfrac{2u_n(1-u_n^2)}{3u_n^2+1},\ u_n>0,\quad 1-u_1<0,$ 而

$1-u_{n+1}^2=1-\left(\dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}\right)^2=\dfrac{(1-u_n)^3}{(3u_n^2+1)^2},$ 所以 $1-u_n^2<0\ \Rightarrow u_{n+1}<u_n,\ n=1,2,3,\cdots,$

$\Rightarrow\{u_n\}$单调减少有下界。由单调有界准则，$\{u_n\}$ 收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a,$ 有 $a=\dfrac{a(a^2+3)}{3a^2+1},$ 解得 $a=\pm1$(由保号性 $a=-1$舍去).

单调有界准则的应用举例

例 2 设数列由下式定义 $u_1=1,\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{u_n+1},n=1,2,3,\cdots$, 试证明$\{u_n\}$收敛并求其极限。

证明 观察$\{u_n\}$的前几项： $1,\ 2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{19}{11},\ \cdots$, 数列并不是单调的。

假设数列收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 则 $a=\dfrac{a+3}{a+1}$, 得 $a=\pm\sqrt{3}$ (由保号性 $a=-\sqrt{3}$ 舍去).

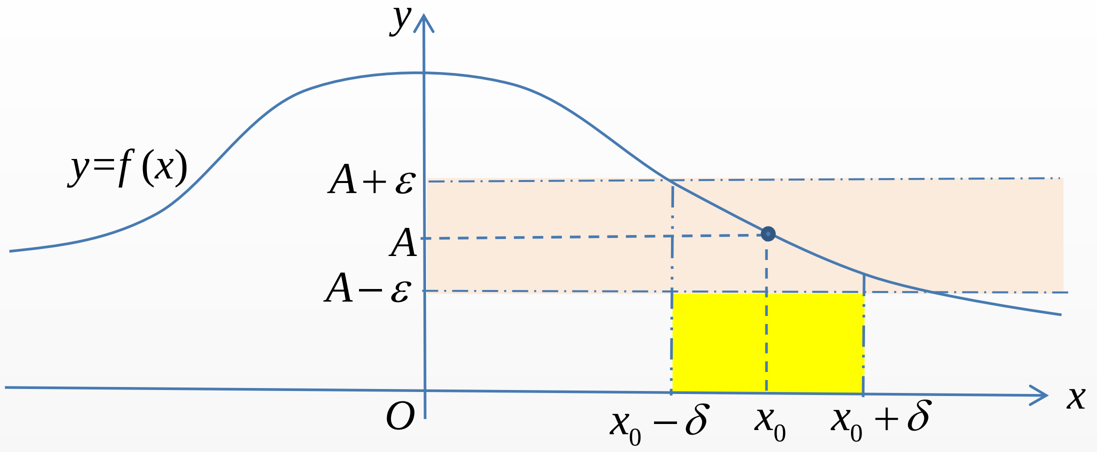
考察 $$\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|=\left|\frac{u_n+3}{u_n+1}-\sqrt{3}\right|=\left|\frac{(u_n-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{u_n+1}\right|<(\sqrt{3}-1)\left|u_n-\sqrt{3}\right| \quad . \quad (u_n>0)$$

$$\Rightarrow 0\le\left|u_n-\sqrt{3}\right|<(\sqrt{3}-1)\left|u_{n-1}-\sqrt{3}\right|<\cdots<(\sqrt{3}-1)^n\to 0 \quad (n\to\infty)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=\sqrt{3}.$$

注意：在递推式两边取极限前须先证明数列极限存在。例如 $u_1=2,\ u_{n+1}=u_n^2,\ n=1,2,3,\cdots,\quad \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty.$
若直接对递推式两边取极限（记数列极限为a）有 $a=a^2 \Rightarrow a=0,\ 1.$ 显然是错误的。

返回

函数极限



证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ： 对任意给出的正数 ε,

找出符合条件的正数 δ. 即当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

例 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=2.$

证明: 因为 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{6x^3-7x^2+1}{x^2-1}-2\right|=3\left|\dfrac{2x^2-x-1}{x+1}\right|=3\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|\cdot|x-1|,$

先限制 $0<|x-1|<1$, 即 $0<x<2\ (x\neq 1)$. 所以 $|f(x)-A|<3\cdot\dfrac{5}{1}\cdot|x-1|=15|x-1|,$

令 $15|x-1|<\varepsilon$, 得 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{15}$, 取 $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{15}\right\}$, 即有

对 $\forall\varepsilon>0$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=2.$

返回

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

无穷小的阶

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=a\neq 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时关于$x-x_0$ 的 k 阶无穷小.

例 问下列函数当 $x\to 0$ 时关于 x 是几阶无穷小？

(1) $f(x)=x+x^3$ (2) $g(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt[5]{x+\sqrt[7]{x}}}$

解： （1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^3}{x}+\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1\neq 0$, 所以 $f(x)$为1阶无穷小。

（2）由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^{1-3k}+\sqrt[5]{x^{1-15k}+\sqrt[7]{x^{1-105k}}}}$知，当 $k=\dfrac{1}{105}$ 时此极限为1，

所以 $g(x)$为 $\dfrac{1}{105}$ 阶无穷小。

注意:
不是任何无穷小量都具有阶数的

例 当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ 是无穷小，但是 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^k\ln x}=\infty$, $\forall k>0.$

利用等价无穷小求极限

设 $f(x)$，$g(x)$，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小，且 $f(x)\sim\alpha(x)$，$g(x)\sim\beta(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

证： $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\beta(x)}{g(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1+x-\sin x)\right]^{\frac{1}{\cos x-1+x-\sin x}\cdot\frac{\cos x-1+x-\sin x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+x-\sin x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

泰勒公式的应用

例1 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x-xf(x)}{x^3}=0$， 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-f(x)}{x^2}$.

解： 由泰勒公式 $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$，由题设得

$$0=\lim_{x\to0}\frac{\left(2x+\dfrac{(2x)^3}{3}+o(x^4)\right)-xf(x)}{x^3}=\frac{8}{3}+\lim_{x\to x_0}\frac{2-f(x)}{x^2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to x_0}\frac{2-f(x)}{x^2}=-\frac{8}{3}.$$

例2 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-\left(1+x+\dfrac{x^2}{3}\right)e^x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\dfrac{1}{2}(4x)+\dfrac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}(4x)^2+o(x^2)\right)-\left(1+x+\dfrac{x^2}{3}\right)\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+2x-2x^2+o(x^2)\right)-\left(1+x+\dfrac{x^2}{3}+x+x^2+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{23}{6}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{23}{6}.$$

泰勒公式的应用

例3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, 且 $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(\frac{1}{2})=0$, 证明：$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $|f'''(\xi)|\ge 24$.

证： $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的泰勒公式 $f(x)=f(\frac{1}{2})+\dfrac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x-\frac{1}{2})^2+\dfrac{f'''(\eta)}{3!}(x-\frac{1}{2})^3$ 得

$$1=f(0)=f(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3;$$

$$2=f(1)=f(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3,$$

两式相减得： $1=\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}\cdot\dfrac{1}{8}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{48}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$,

即 $48=|f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)|\le|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|$.

因此有 $\xi=\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$ 或 $\xi_2\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $|f'''(\xi)|\ge 24$.

返回

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

微分中值定理

例1　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(2)=5f(0)$, 证明: $\exists\xi\in(0,2)$, 使 $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证: 设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$, 则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导，且 $F(2)=\dfrac{f(2)}{5}=f(0)=F(0)$.

由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $F'(\xi)=\dfrac{\left(1+\xi^2\right)f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\left(1+\xi^2\right)^2}=0$, 即 $\left(1+\xi^2\right)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

例2　设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)f(3)>0$, $f(0)f(2)<0$,

证明：对 $\forall\mu\in R$, $\exists\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=\mu f(\xi)$.

证: 由罗尔定理得 $\exists\xi_1\in(0,2)$, 使 $f(\xi_1)=0$; $\exists\xi_2\in(2,3)$, 使 $f(\xi_2)=0$. 令 $F(x)=e^{-\mu x}f(x)$, 则

$F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续, 在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，且 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$, 由罗尔定理得

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$ 使 $F'(\xi)=e^{-\mu\xi}f'(\xi)-\mu e^{-\mu\xi}f(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=\mu f(\xi)$.

微分中值定理

例3　设 $0<a<b$, 证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^\xi$.

证：$ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^\xi \Leftrightarrow \dfrac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^\xi$.　设 $F(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $G(x)=\dfrac{1}{x}$, 则由柯西中值定理

$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\dfrac{\xi e^\xi-e^\xi}{\xi^2}\cdot\left(-\xi^2\right)=(1-\xi)e^\xi$.

另证（K值法）：记 $K=\dfrac{ae^b-be^a}{a-b}\Rightarrow \dfrac{1}{b}e^b-\dfrac{1}{a}e^a-K\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)=0$.

设 $F(x)=\dfrac{1}{x}e^x-\dfrac{1}{a}e^a-K\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)$, 则有 $F(a)=F(b)=0$, 由罗尔定理得

$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=\dfrac{\xi e^\xi-e^\xi}{\xi^2}+\dfrac{K}{\xi^2}=0\cdot$　即 $\dfrac{ae^b-be^a}{a-b}=K=(1-\xi)e^\xi$.

祝大家考试顺利，寒假快乐！

求满绩！