第五章 机械振动

(§ 5.1 - § 5.2)

本课时教学基本要求

1、掌握简谐振动的特征、规律和表示方法。熟练掌握三个特征量的意义及确定方法。
2、掌握旋转矢量法；会从振动曲线确定振动方程。
3、理解简谐振动的动力学特征，并能判定简谐振动。理解简谐振动的能量特征。

5.1 简谐振动的描述

- 机械振动　物体围绕一固定位置往复运动.

  其运动形式有直线、平面和空间振动.

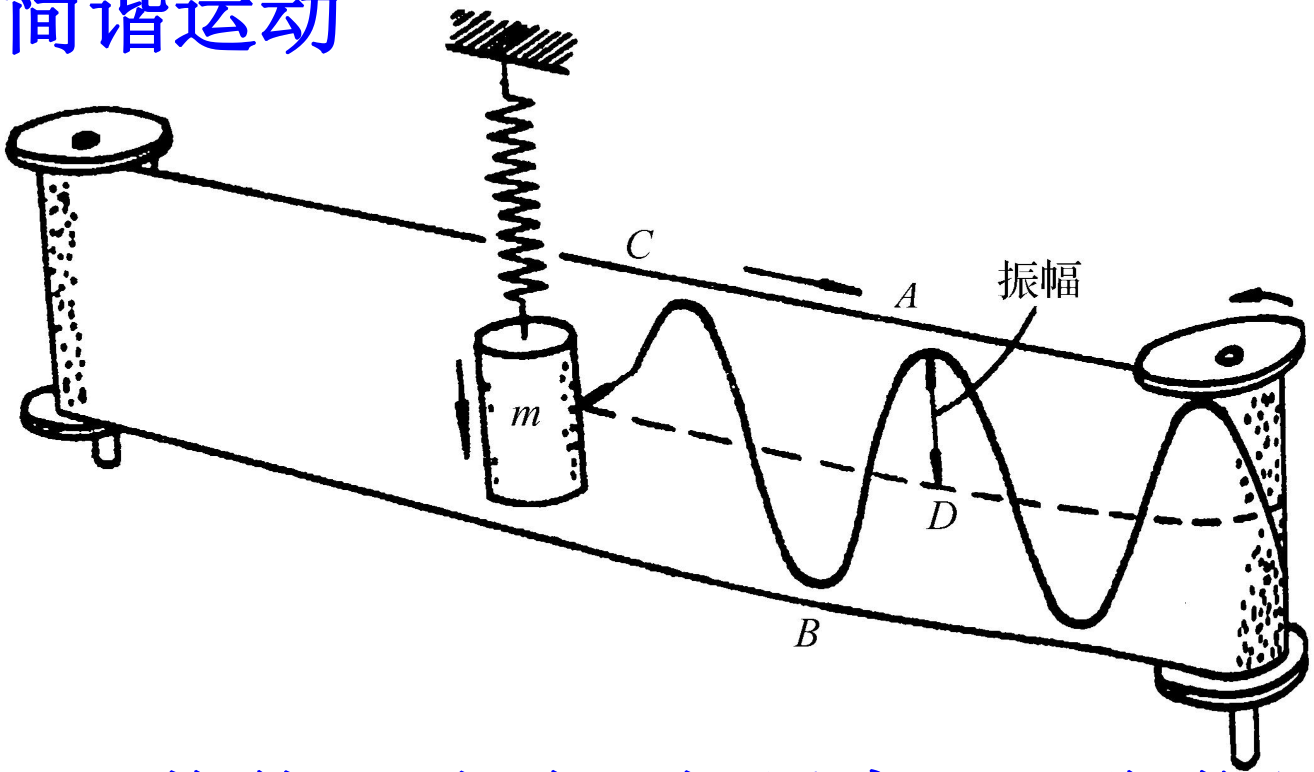
  例如一切发声体、心脏、海浪起伏、地震以及晶体中原子的振动等.

- 周期和非周期振动
- 简谐运动　最简单、最基本的振动.

$$\boxed{\text{简谐运动}} \;\underset{\text{分解}}{\overset{\text{合成}}{\longleftrightarrow}}\; \boxed{\text{复杂振动}}$$

谐振子　作简谐运动的物体.

一、 简谐运动



物体运动时，如果离开平衡位置的位移(或角位移）按余弦（或正弦）规律随

§ 往复变化，这样的运动称作简谐运动。

表达式 $\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)}$

一、 描述简谐运动的特征量

$$\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

1.振幅A：最大位移的绝对值（恒取正值）。

2. 角频率ω：在2π秒时间内完成全振动的次数

3. 周期T：振动往复一次所需的时间。

4. 频率ν：单位时间内的振动次数。 $\boxed{\nu=1/T}$

$$\boxed{\omega=2\pi\nu=2\pi/T}$$

5. 相位:（1）（ω § +φ ）是 § 时刻的相位

（2） φ 是 § ＝0时刻的相位 — 初相

三个特征量

A —— 振幅　离开平衡位置的最大位移的绝对值

ω —— 角频率　（或称圆频率）

在2π秒时间内完成全振动的次数

φ —— 初相

反映初始时刻振动系统的运动状态

三、 简谐运动的描述方法

1. 解析法

已知表达式 $\Rightarrow$ A、T、φ

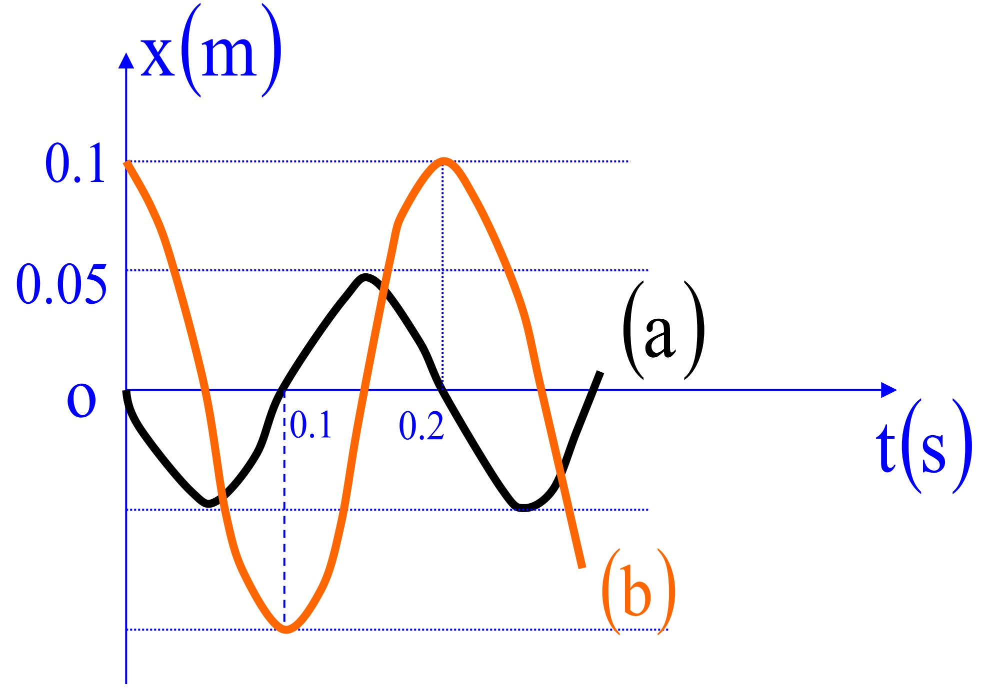
已知A、T、φ $\Rightarrow$ 表达式

2. 曲线法

已知曲线 $\Rightarrow$ $\odot$、Ω、φ

已知 $\odot$、Ω、φ $\Rightarrow$ 曲线

例1：　已知振动曲线如图，分别写出（a）、（b）曲线的振动方程，并比较两个振动的相位差$\varphi_a-\varphi_b=$?



解：（a）曲线

由图可知：

$$A=0.05\text{m}$$

$$T=0.2\text{s}$$

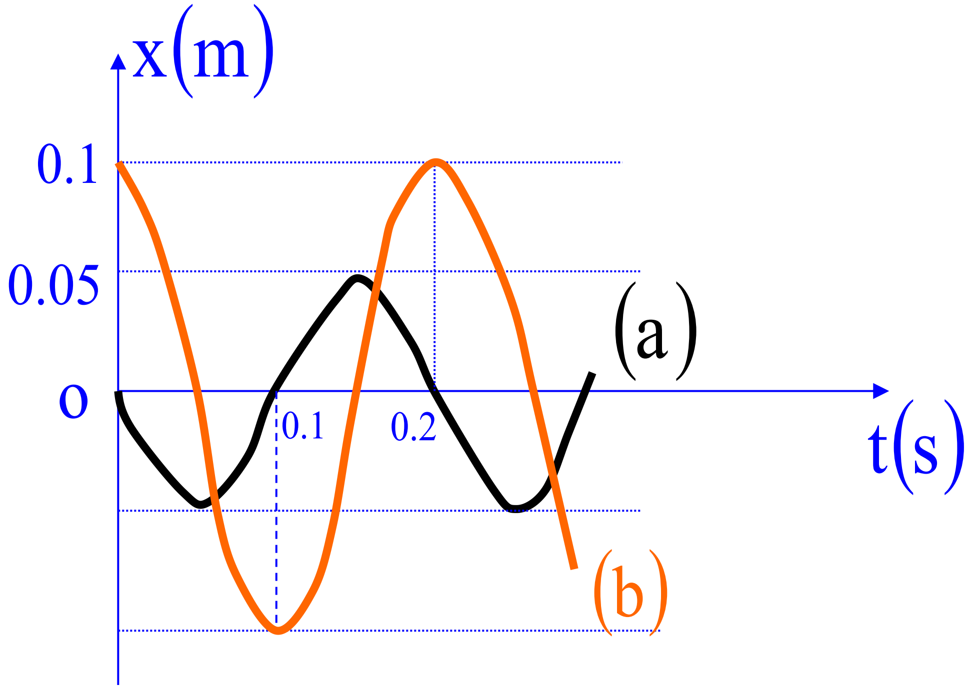
$$\therefore \quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.2}=10\pi \qquad \varphi_a=?$$

$\because t = 0$时，

$x = 0$

$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} < 0$

（看曲线斜率）



$$\boxed{\begin{array}{c} x = A\cos\varphi \\ \upsilon = -\omega A\sin\varphi \end{array}}$$

$$\therefore \quad \varphi_a = \frac{\pi}{2}$$

$$x_a = 0.05\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \ (\mathrm{m})$$

（‘）曲线

$$A = 0.1\mathrm{m}$$

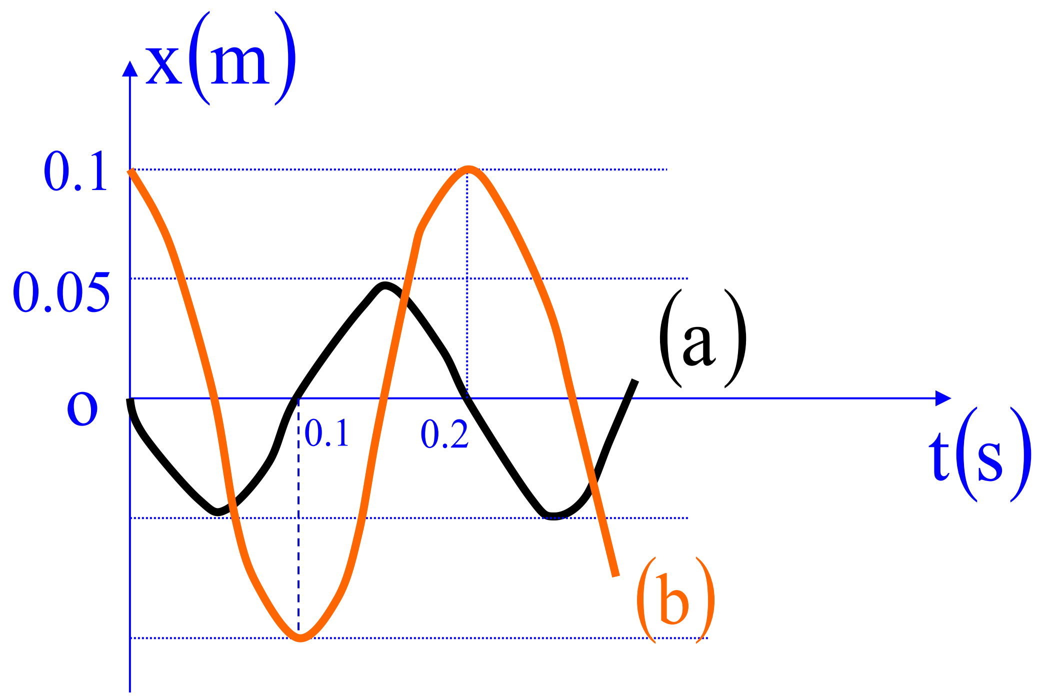
$$\boldsymbol{T = 0.2s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi$$

$t = 0$时，$x = A$

$$\boldsymbol{\varphi_b = 0}$$

$$\boldsymbol{x_b = 0.1\cos(10\pi t)\ (m)}$$



两个振动的位相差： $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$

四、简谐运动的速度、加速度

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

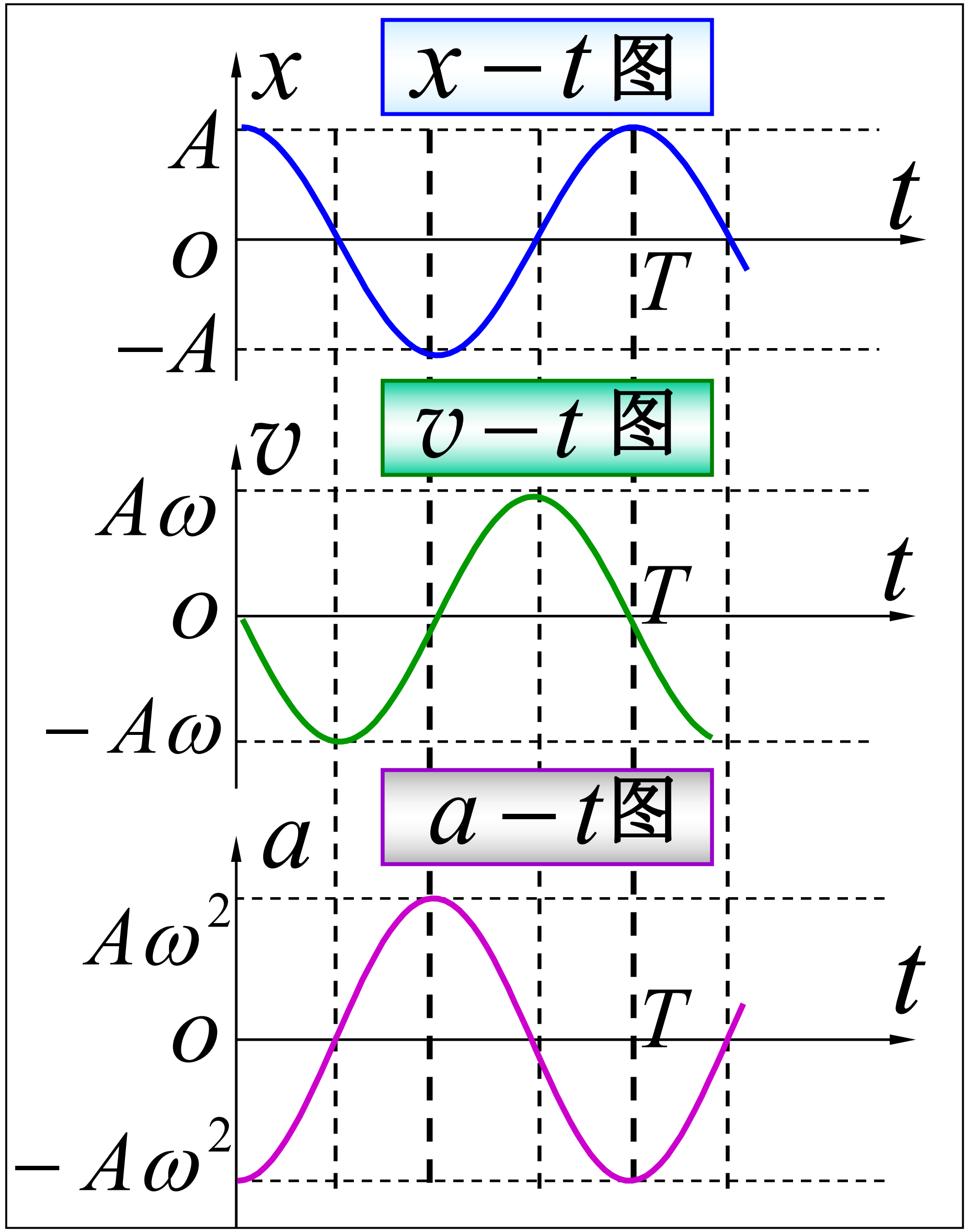
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ 取 $\varphi = 0$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)}$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)}$$

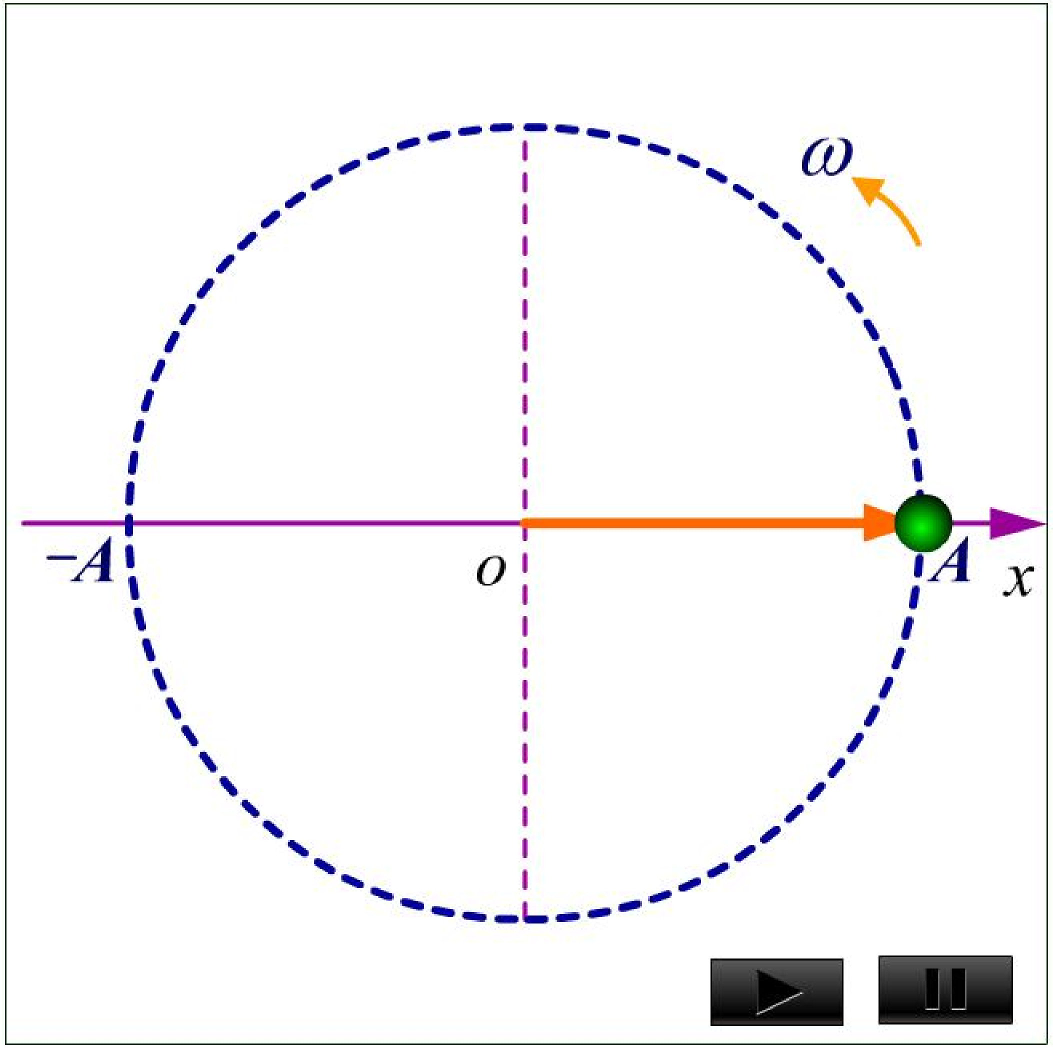
$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

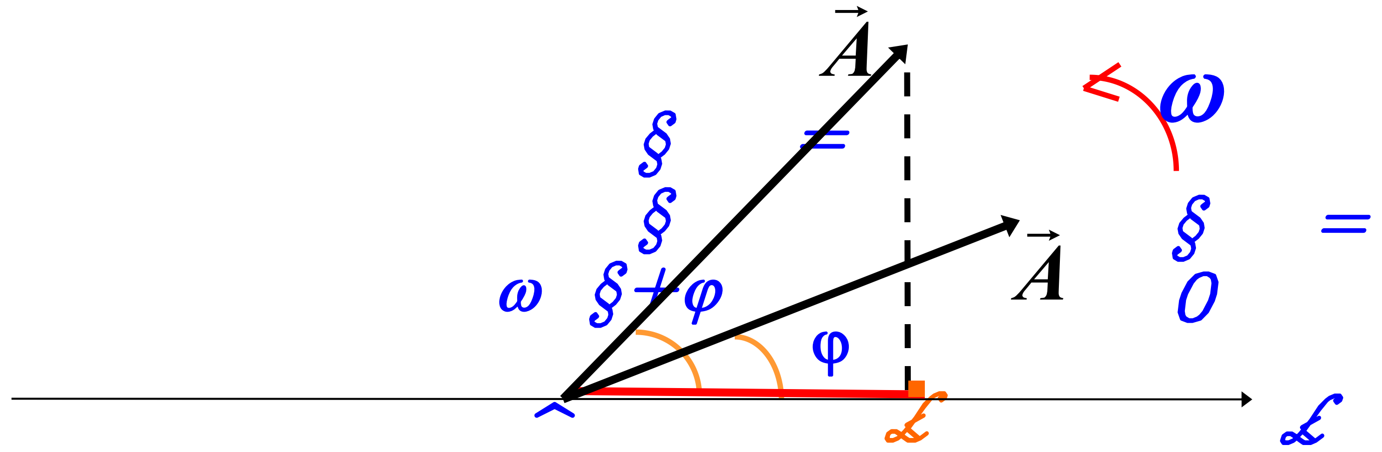


二. 振幅矢量图示法(旋转矢量法)

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动.





旋转矢量的长度——振幅A

旋转矢量旋转的角速度——振动角频率 ω

旋转矢量旋转的方向——逆时针方向

旋转矢量与参考方向£的夹角

——振动相位 $(\omega t+\varphi)$

旋转矢量在£轴上投影点的运动规律——

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

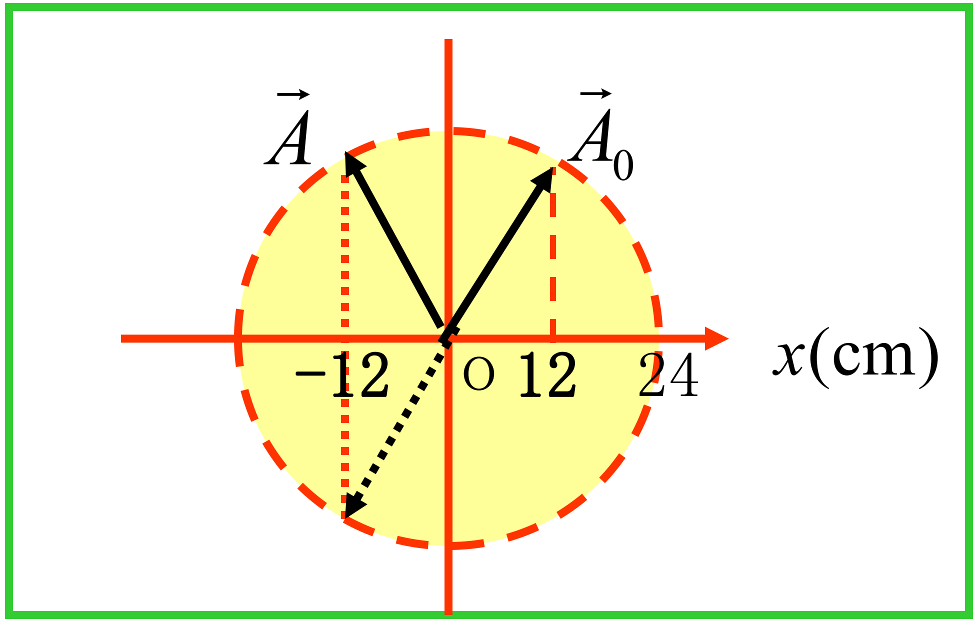
例2：

已知：$A = 24\text{cm}$, $T = 3\text{s}$, $t = 0$时 $x_0 = 12\text{cm}$, $v_0 < 0$,

求：质点运动到 $x = -12\ \text{cm}$处所需最短时间。

解：作 $t = 0$时刻的旋转矢量 $\vec{A}_0$

作 $x = -12\text{cm}$处的旋转矢量 $\vec{A}$



$$\Delta t_{\min} = \frac{1}{6} T = 0.5\ \text{s}$$

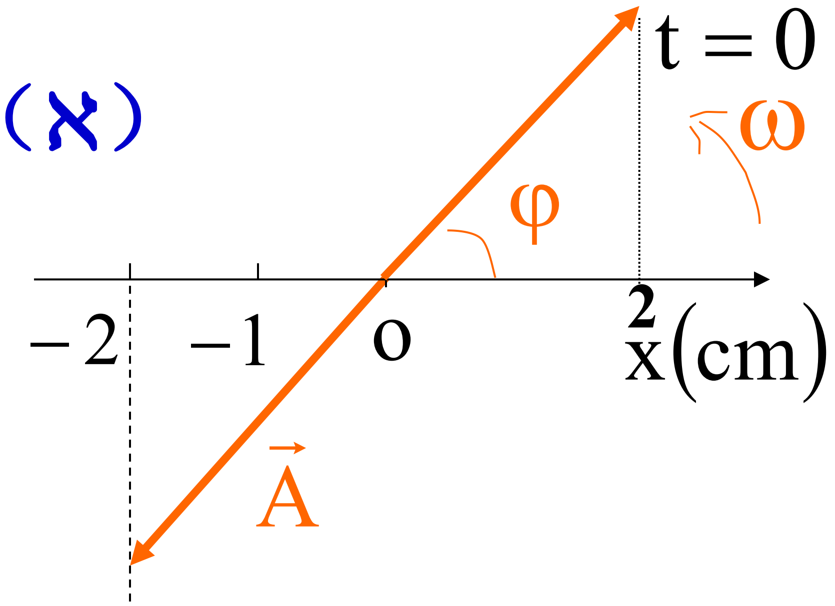
例3：已知质点作简谐运动，振幅A=4cm，频率ν =0.5 Hz 。 t=1s 时，x= - 2cm且向x正方向运动。写出振动表达式。

解： $T=\dfrac{1}{\nu}=\dfrac{1}{0.5}=2$ （ℵ）

由图 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$$

$$\therefore \quad x=4\,cos(\pi t+\pi/3)\ \ (cm)$$

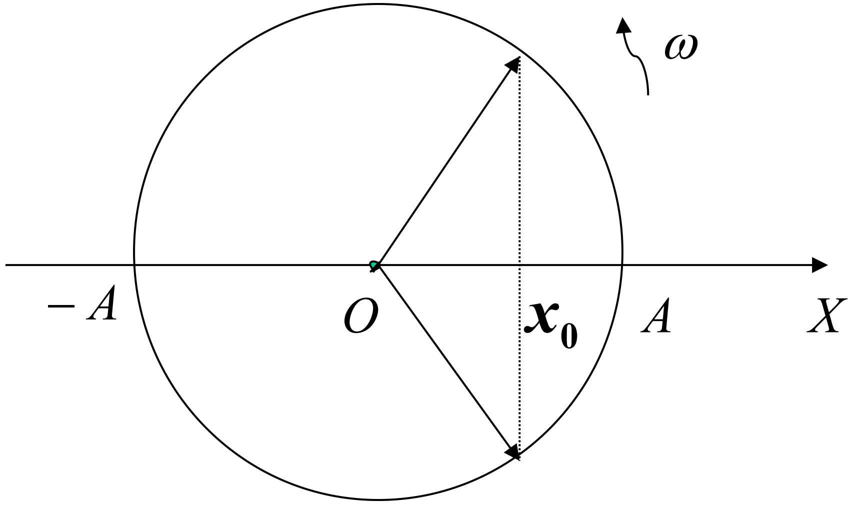


旋转矢量法确定φ:
先在X轴上找到相应x_0, 有两个旋转矢量，由v_0的正负来确定其中的一个

$v_0 < 0$, 上半圆, $0 < \varphi < \pi$

$v_0 > 0$, 下半圆，$\pi < \varphi < 2\pi$ 或 $-\pi < \varphi < 0$

$v_0 = 0, x_0 = A, \varphi = 0, x_0 = -A, \varphi = \pi$



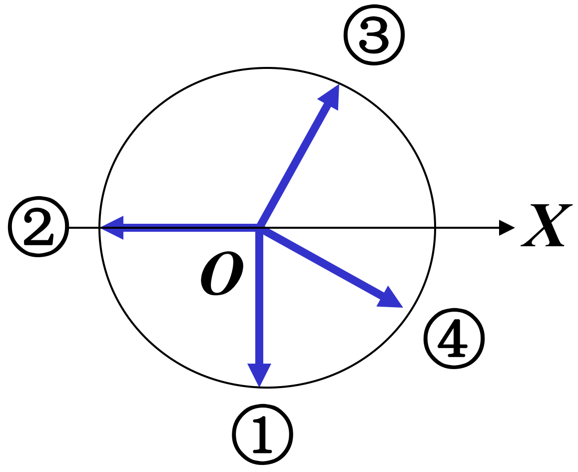
【例4】 一简谐振动的振幅为A，角频率为ω，以下列各种情况为起始时刻，分别写出简谐振动的表达式：

①物体过平衡位置向X轴正方向运动；

②物体被压缩到最大位移处；

③过 $\frac{A}{2}$ 处向X轴负方向运动；

④过 $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ 处向X轴正方向运动。



解：先写出简谐振动的标准表达式，并画旋转矢量图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

1、$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

3、$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$

2、$x = A\cos(\omega t \pm \pi)$

4、$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{6})$

五. 相位差

$$\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)$$

对两同频率的谐振动 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

初相差

- 同相和反相

当 $\Delta\varphi=\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$

两振动步调相同, 称同相

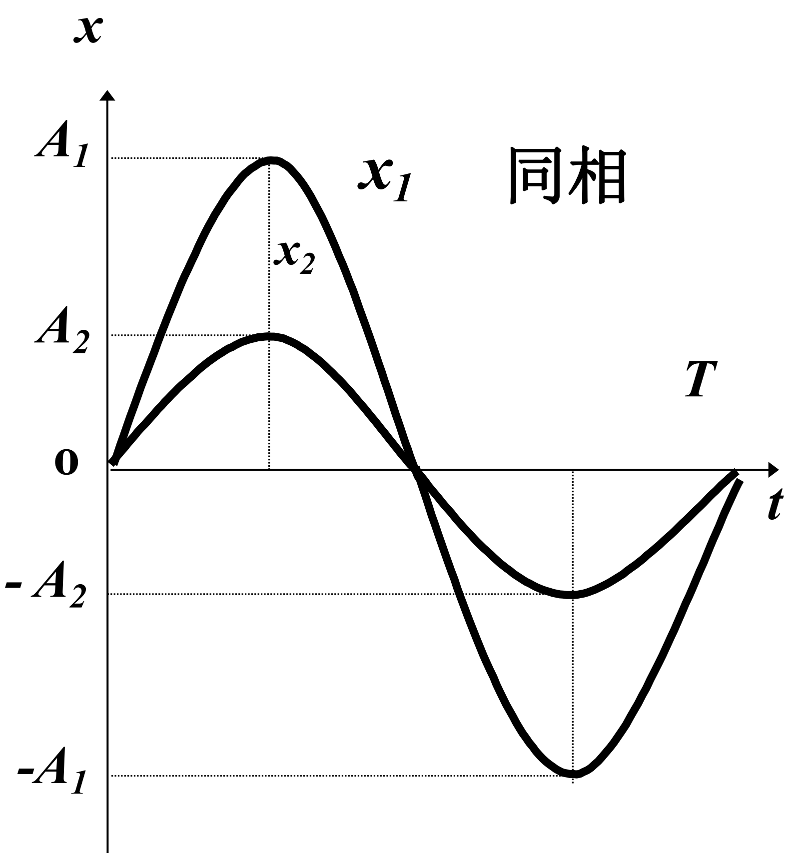
当 $\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$

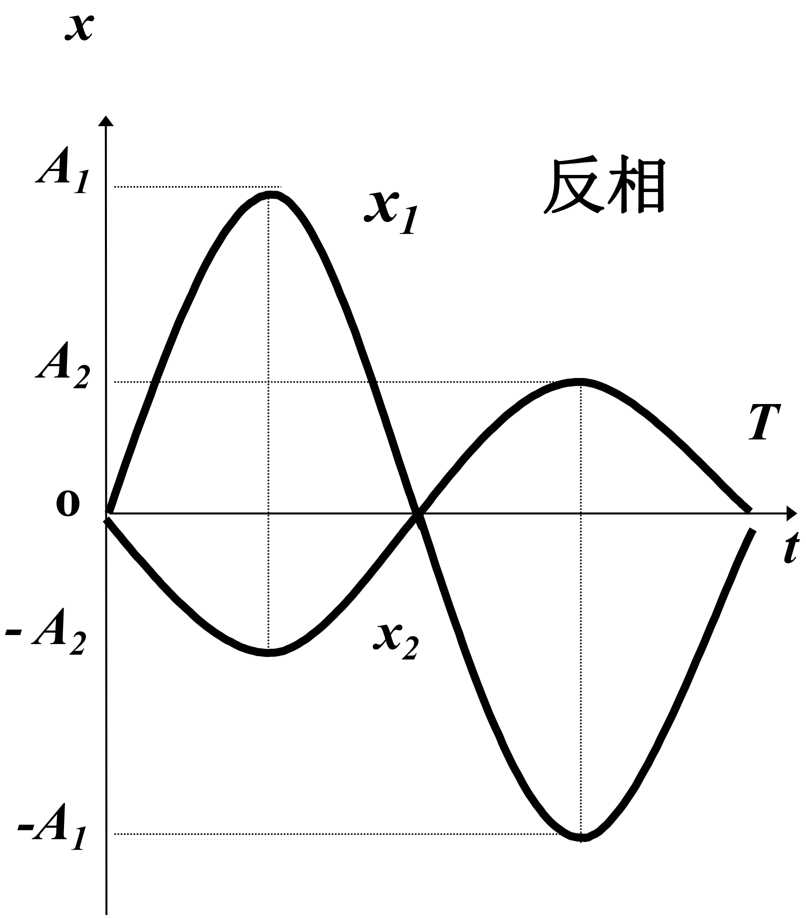
两振动步调相反 ， 称反相

同相和反相

当$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$,
$(k = 0,1,2,\ldots)$,
两振动步调相同, 称同相

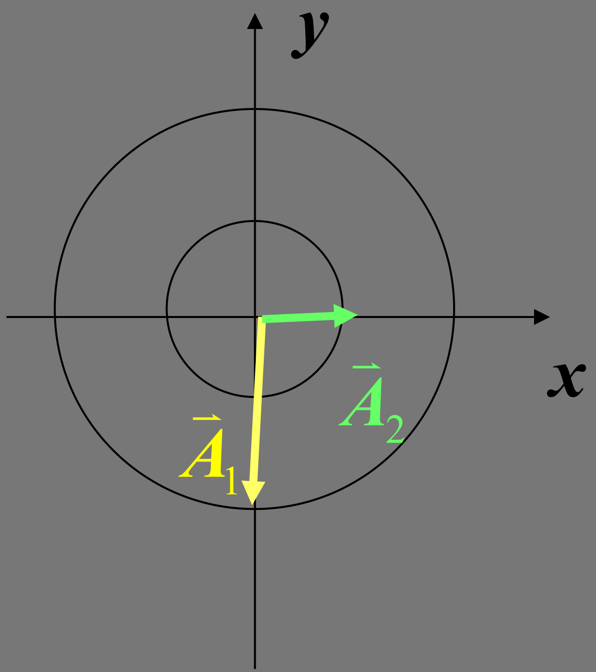
当$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$,
$(k = 0,1,2,\ldots)$,
两振动步调相反, 称反相

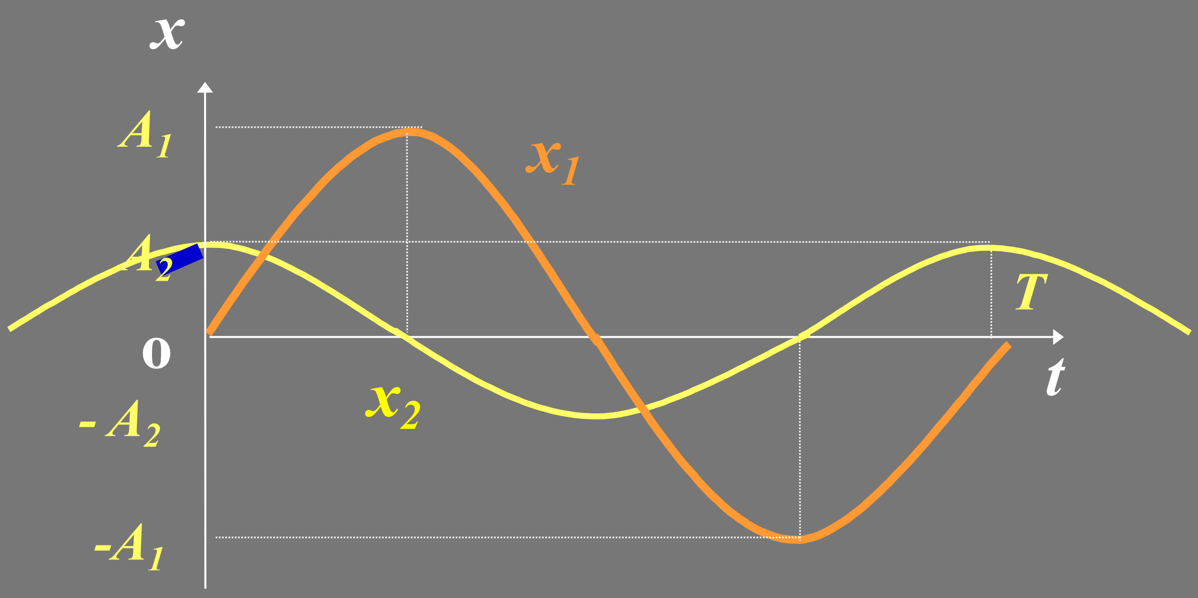




超前和落后

若$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1>0$， 则 x_2比x_1较早达到正最大，称x_2比x_1超前 （或x_1比x_2落后）。





$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

即x_2比x_1超前$\frac{\pi}{2}$

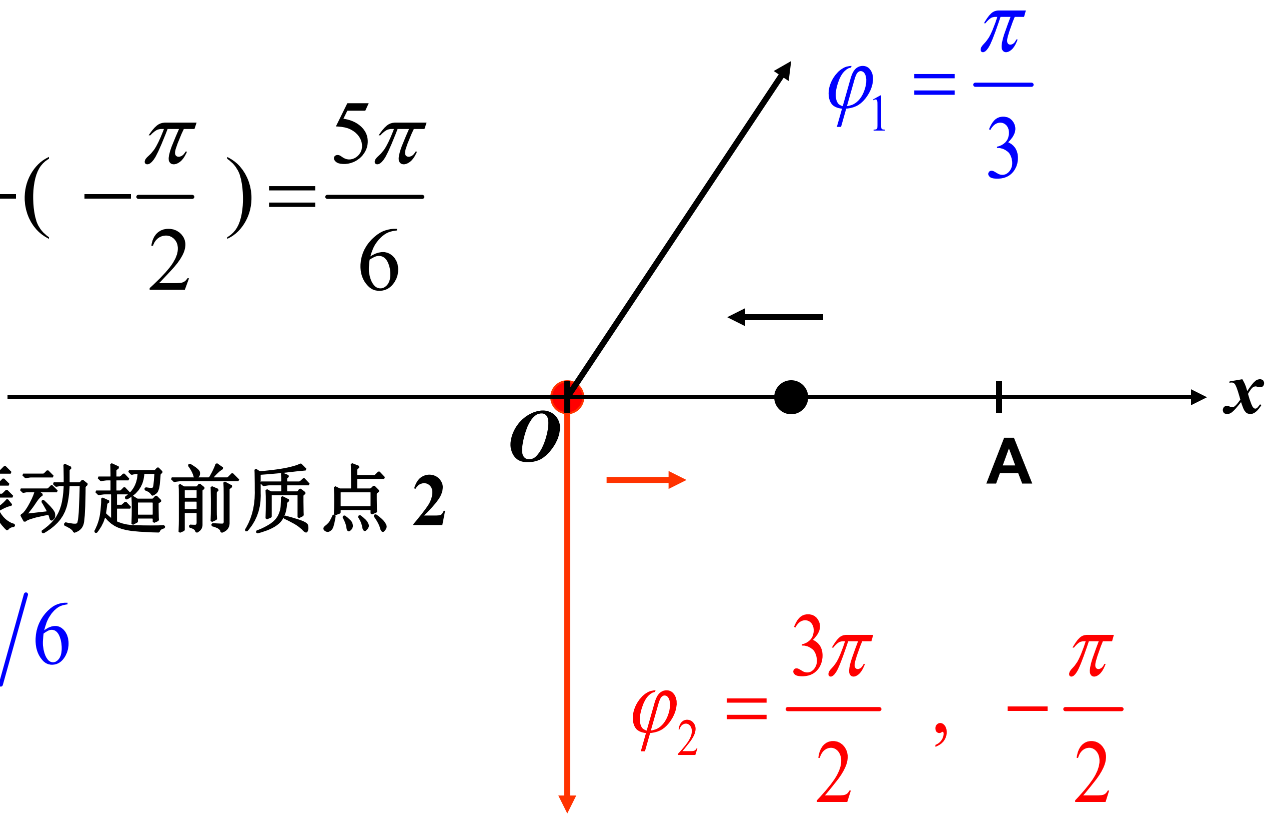
超前、落后以$<\pi$ 的相位角来判断

超前时间$\Delta t=\Delta\varphi/\omega=\Delta\varphi T/2\pi$

例5: 两质点作同方向、同频率的简谐运动，振幅相等。当质点 1 在 $x_1 = A/2$ 处，向 x 轴负方向运动时，另一个质点 2 在 $x_2 = 0$ 处，向x 轴正方向运动。求这两质点振动的相位差。

解:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$



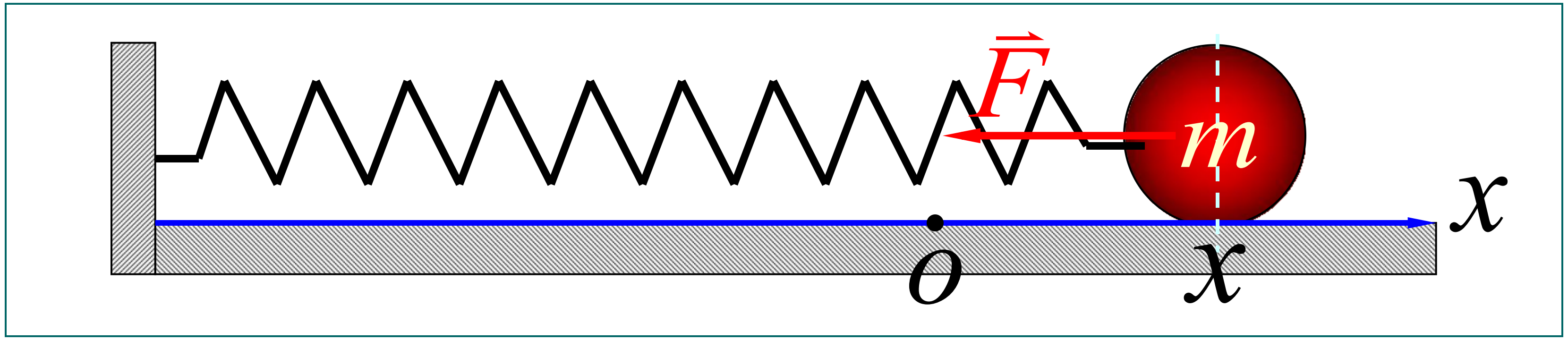
质点 1 的振动超前质点 2 的振动 $5\pi/6$

§ 5.2 谐振动的动力学表述

一、简谐运动的运动微分方程及其解

1． 受力特点：线性回复力 （ $F=$ －

2． 运动微分方程（以水平弹簧振子为例）



弹簧振子的动力学特征

受力 $\boxed{F=-kx}$

力的方向与位移的方向相反，始终指向平衡位置——回复力。

$$F=ma \qquad a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$$

$$\boxed{\omega^2=\frac{k}{m}} \qquad a=-\omega^2 x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0}$$

简谐运动的运动微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

其解即为简谐运动方程。

$$x=\boxed{A}\cos(\omega t+\boxed{\varphi})$$

根据初始条件确定

3. 固有角频率

弹簧振子:

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

固有角频率决定于系统内在性质

常数 A 和 φ 的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

二、简谐振动的能量

- 以弹簧振子为例

$$F = -kx \quad \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

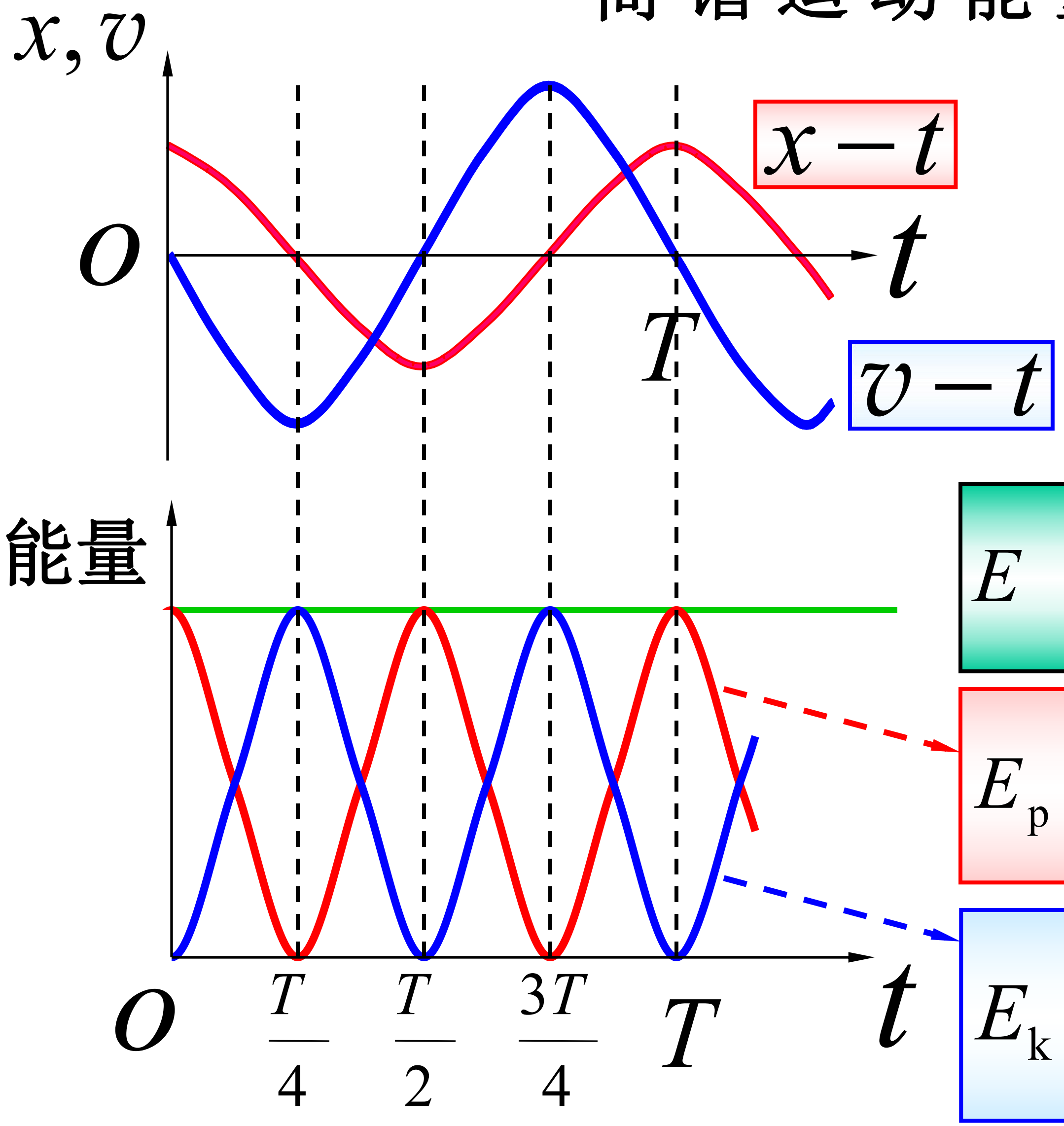
$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\omega^2 = k / m$$

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$$

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

简谐运动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

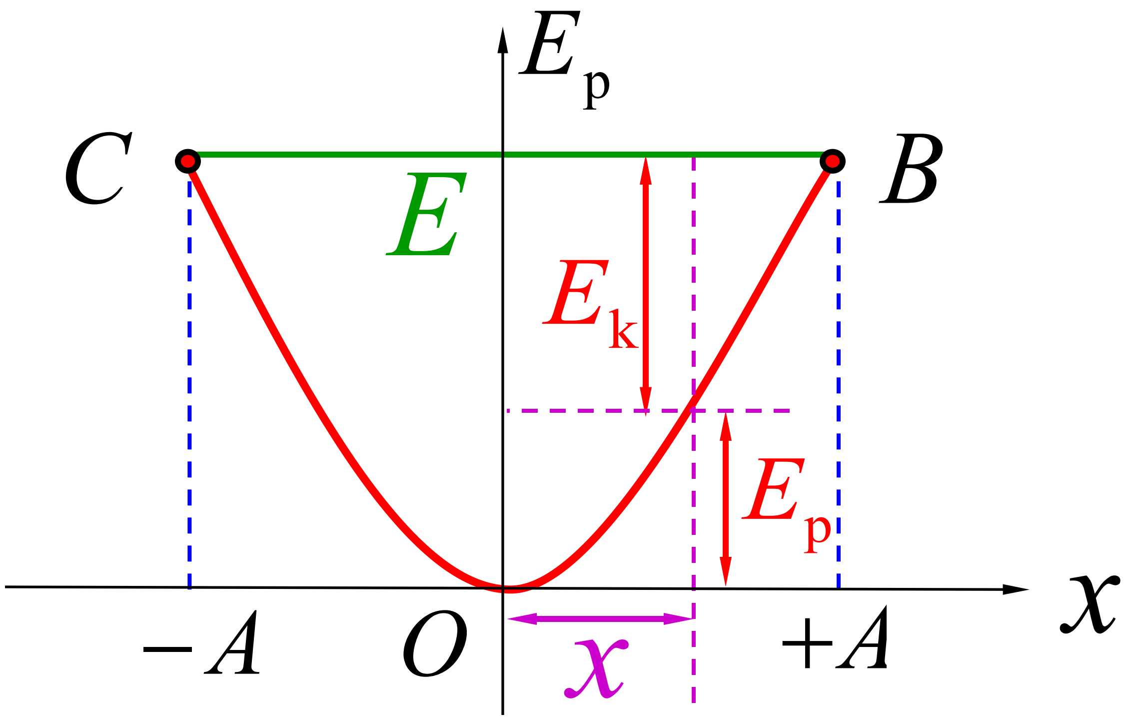
$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐运动能量守恒，振幅不变

简谐运动势能曲线



能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 常量$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

判别简谐运动的依据

$$(1).F=-kx \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$

$$(2).\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\mathbf{const.} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

分析步骤：

1、找到平衡位置*O*，建立坐标系；

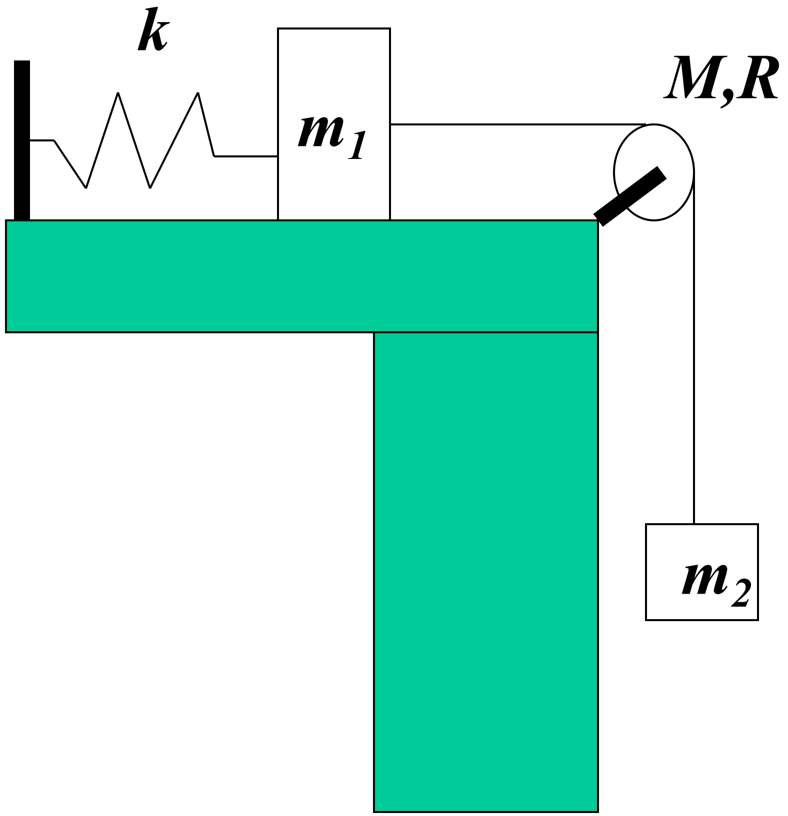
2、受力分析；

2、沿*X*轴正方向移动一小位移*x*；

3、证明 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

机械振动和机械波习题课

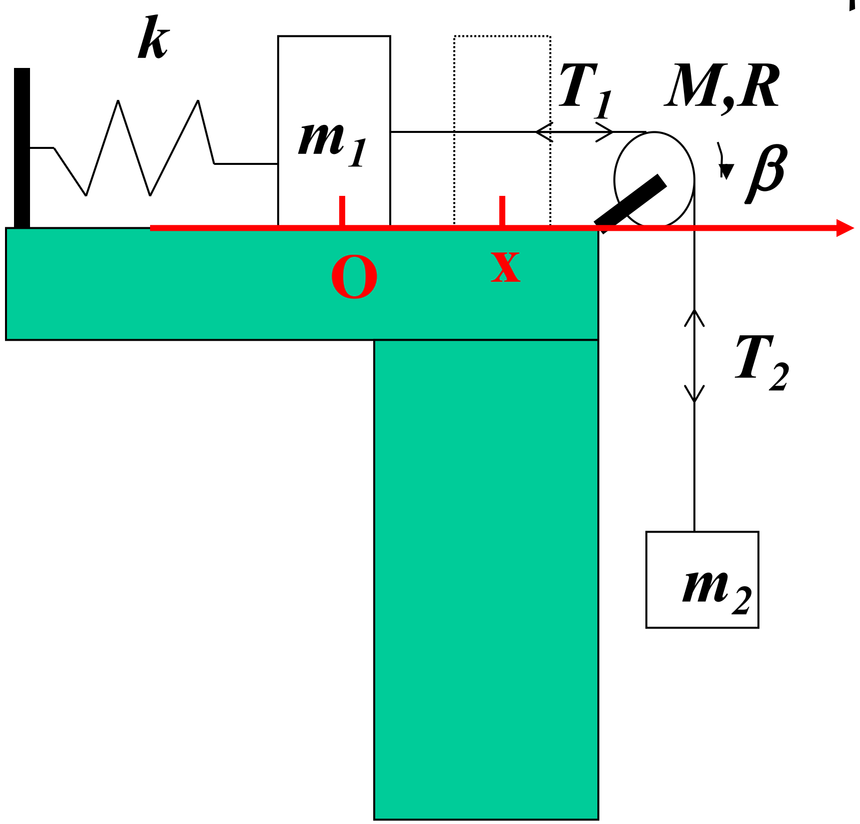
例6. 如图所示：已知m_1　m_2　k　$\mu=0$. 圆柱型定滑轮：M,R,纯滚动. 试证明m_1作简谐振动,并求出ω.



机械振动和机械波习题课

解:动力学法.

受力分析如图，取m_1平衡位置为坐标原点o



$$kx_0 = m_2 g$$

$$m_1: T_1 - k(x + x_0) = m_1 \frac{d^2x}{d^2t}$$

$$m_2: m_2 g - T_2 = m_2 \frac{d^2x}{d^2t}$$

$$M: (T_2 - T_1)R = \frac{1}{2} MR^2 \beta$$

$$\frac{d^2x}{d^2t} = \beta R$$

机械振动和机械波习题课

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{d^2t}+\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}x=0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}}}$$

作业：

5-2

5-10

5-19

5-29