浙江大学 2018 - 2019 学年 秋冬 学期

《 微积分(甲) I 》课程期中考试试卷

课程号：821T0010，开课学院：数学科学学院

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打√），允许带 笔 入场

考试日期：2018 年 11 月 15 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______学号：______所属院系：______作业本编号：______

题序	一 (1-2)	二 (3-4)	三 (5-6)	四 (7-8)	五 (9-10)	六 (11-12)	总 分
得分							
评卷人							

得分

一、(本大题:第 1-2 小题，每小题 8 分，共 16 分.)

1. (8 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 $I=\{x \mid x \neq 0\}$, 且 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=g(x)$, 其中实常数 a, b 满足 $|a| \neq |b|$, 证明：

(1) 若 $g(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 也是奇函数； (2) 若 $g(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 也是偶函数.

2. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n^2]{\pi}\cdot\sqrt[n^2]{\pi^2}\cdot\sqrt[n^2]{\pi^3}\cdots\sqrt[n^2]{\pi^n})$.

得分

二、(本大题:第 3-4 小题，每小题 8 分，共 16 分.)

3. (8 分) 写出函数 $f(x)=\dfrac{x(x^2-1)}{|x-1|\sin x}$ 的间断点，并讨论是第一类型还是第二类型的间断点（讨论要用数学表达式说明理由）.

4. (8 分) 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x+2}=3$.

得分

三、(本大题:第 5-6 小题，每小题 8 分，共 16 分.)

5. (8 分) 设 $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{x_n(5-x_n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. (8 分) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{x^2}+\cos\dfrac{x}{1+x}}{2}\right)^{\frac{1}{\sin(x^2)}}$.

得分

四、(本大题:第 7-8 小题，每小题 8 分，共 16 分.)

7.(8 分) 设函数 $y=\arcsin\frac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}+(\sec x+\tan x)^{\arctan x}$，求 y'.

8.(8 分) 设曲线的极坐标方程为 $r=2-\cos\theta$，求曲线上相应于 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 的点处的切线方程和法线方程.

得分

五、(本大题:第 9-10 小题，每小题 10 分，共 20 分.)

9. (10 分) 设函数$f(u)$具有二阶导数, 且$f'(0)=-1, f''(0)=4$, 又二阶可导函数

$y=y(x)$ 由方程$y-2x\,e^{y-1}=1$所确定, $z=f(\ln y)$. 求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

10. (10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0,\\ a\,, & x=0,\\ b\sqrt{4-x}+cx\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$ 求常数a,b,c, 使$f(x)$在点$x=0$处可微.

得分

六、（本大题：第 11-12 小题，每小题 8 分，共 16 分.）

11.（8 分）设函数 $f(x)=x^2\ln\frac{1+x}{1-x}$，求 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

12.（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续，在开区间 $(0,2)$ 上可导，且 $f(1)=2$，$f(0)=f(2)=0$. 证明：

(1) 存在 $\eta\in(1,2)$，使 $f(\eta)=\eta$；(2) 对任意实常数 λ，存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.