级　数 — 幂级数部分

浙江大学数学学院　薛儒英

一. 函数项级数的基本概念

给定无穷多个函数$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots,n,\cdots)$，表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为**函数项级数**, 记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

- $u_n(x)$称为函数项级数的一般项（或通项）。

如：

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;$$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx;$$

我们知道：有限个函数相加之和仍是一个函数；

问： 无穷多个函数是否一定可以相加？无穷多个函数相加还是一个函数吗？

定义： 给定函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 如果通项$u_n(x)$在$x_0$ 处都有定义、且(常数项)级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则$x_0$称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**；

- 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点组成的集合称为**收敛域**，即

$$\text{收敛域} = \left\{ x_0 : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\text{收敛} \right\}.$$

- 定义在收敛域上的函数$S(x)$:

$$S(x): \quad x_0 \in \text{收敛域} \hookrightarrow S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**和函数**，记为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in \text{收敛域}.$$

牢记：，等比（几何）级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q| < 1\text{时} \\ \text{发散}, & |q| \geq 1\text{时} \end{cases}$$

例1. 试求下列函数项级数的收敛域、和函数:

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \cdots;$

解： 等比级数，公比$q = (x-1)$, 第一项$a = (x-1)$, $\Longrightarrow$

- 当$|x-1| < 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$收敛, 和$S(x) = \frac{x-1}{2-x}$;
- 当$|x-1| \geq 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$发散；

从而函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$的收敛域为$(0,2)$, 和函数$S(x) = \frac{x-1}{2-x}$；即当$x \in (0,2)$时

$$(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \cdots = \frac{x-1}{2-x};$$

例1. 试求下列函数项级数的收敛域、和函数:

(2). $\sum_{n=0}^{\infty} \tan^n x = 1 + \tan x + \tan^2 x + \cdots$;

解： 等比级数，公比$q = \tan x$,第一项$a = 1$,

- 当$|\tan x| < 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n x$收敛，和$S(x) = \frac{1}{1-\tan x}$;
- 当$|\tan x| \geq 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n x$发散;

从而函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n x$的收敛域为

$$(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}), (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

和函数$S(x) = \frac{1}{1-\tan x}$;

- 收敛域、和函数一般是很难求的;
- 下面我们重点讨论：幂级数、傅里叶级数;

定义： 函数项级数

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

称为关于$x-x_0$的**幂级数**; 特别，当$x_0=0$时，函数项级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

称为关于x的**幂级数**; 如

$$(x+2)-(x+2)^2+(x+2)^3-(x+2)^4+\cdots,$$

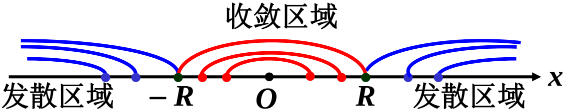
$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots.$$

- 幂级数可以作为多项式的推广；
- 下面主要讨论关于x的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，所得结论对关于$x-x_0$的幂级数仍成立；

Abel定理： 给定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

(1). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (x_0 \neq 0)$收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| < |x_0|$内绝对收敛；

(2). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| > |x_0|$内发散；



Abel定理： 给定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

(1). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (x_0 \neq 0)$收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| < |x_0|$内绝对收敛；

(2). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| > |x_0|$内发散；

证明： (1). 级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Longrightarrow$存在常数$M$使得$|a_n x_0^n| \leq M$; 从而当$|x| < |x_0|$时

$$|a_n x^n| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = Mq^n, \, 0 \leq q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

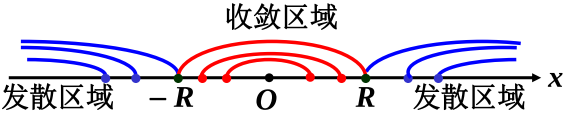
由级数$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$收敛及比较判别法，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| < |x_0|$内绝对收敛；

(2). 利用反证法，若存在$|x_1| > |x_0|$使得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$收敛, 由(1)得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$绝对收敛, 矛盾！

Abel定理： 给定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

(1). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (x_0 \neq 0)$收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| < |x_0|$内绝对收敛；

(2). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| > |x_0|$内发散；



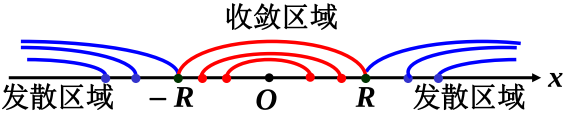
由Abel定理 $\Longrightarrow$ 存在$R \in [0, +\infty]$ 满足：

- 当$|x| < R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；
- 当$|x| > R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散；
- 当$|x| = R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛或发散？

Abel定理： 给定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

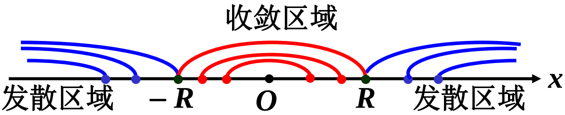
(1). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (x_0 \neq 0)$收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| < |x_0|$内绝对收敛；

(2). 如果（常数项）级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x| > |x_0|$内发散；



由Abel定理 $\Longrightarrow$ 存在$R \in [0, +\infty]$ 满足：

- 当$|x| < R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；
- 当$|x| > R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散；
- 当$|x| = R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛或发散？不一定；

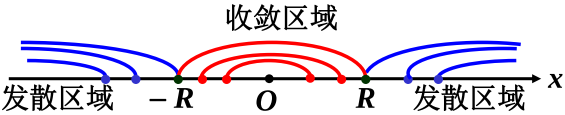


由Abel定理, 存在$R \in [0, +\infty]$ 满足:

- 当$|x| < R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛;
- 当$|x| > R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散;

定义: R称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径; $(-R, R)$ 称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间;

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$内绝对收敛、在$|x| > R$ 内发散;



由Abel定理，存在$R \in [0, +\infty]$ 满足：

- 当$|x| < R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；
- 当$|x| > R$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散；

定义： R称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径；$(-R, R)$ 称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间；

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$内绝对收敛、在$|x| > R$ 内发散；但是当$|x| = R$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$可能收敛、也可能发散；

- $R = +\infty \iff$ 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$处处绝对收敛；

- $R = 0 \iff$ 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅仅在$x = 0$处收敛；

如何求幂级数收敛半径?

- $\left\{\begin{array}{l} \text{当}|x| < R\text{时幂级数绝对收敛} \\ \text{当}|x| > R\text{时幂级数发散} \end{array}\right. \iff R$为收敛半径;

定理: 若$a_n \neq 0$且

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \text{或}\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径$R = \frac{1}{\rho}$.

证明: 利用$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x|$以及比值判别法得

- 当$|x| < \frac{1}{\rho}$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛;
- 当$|x| > \frac{1}{\rho}$时幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散;

从而幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径$R = \frac{1}{\rho}$.

注意: 上述定理要求$a_n \neq 0$，对系数有无穷多个等于零的幂级数不适用；如级数： $1 + x^2 + 2x^4 + \cdots + nx^{2n} + \cdots$;

- $\begin{cases} \text{当}|x| < R\text{时幂级数绝对收敛} \\ \text{当}|x| > R\text{时幂级数发散} \end{cases} \iff R \in [0, +\infty]$收敛半径;

例2. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域:

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$?

解: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)|x| = 2|x|$, 根值判别法得

- 当$|x| < \frac{1}{2}$时幂级数绝对收敛;
- 当$|x| > \frac{1}{2}$时幂级数发散;

从而,幂级数的收敛半径$R = \frac{1}{2}$,收敛区间$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- 当$|x| < \frac{1}{2}$时幂级数绝对收敛；
- 当$|x| > \frac{1}{2}$时幂级数发散；

- 当$x = \frac{1}{2}$时$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} = \sqrt{e} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ 当$x = \frac{1}{2}$时幂级数发散；

- 当$x = -\frac{1}{2}$时$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right| = \sqrt{e} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ 当$x = -\frac{1}{2}$时幂级数发散；

综述: 幂级数收敛域为$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

例2. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域：

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^{3n}}{n}$?

解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(3x)^{3(n+1)}}{(n+1)}}{\frac{(3x)^{3n}}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{27n}{n+1}|x|^3 = 27|x|^3$,

- 当$|x| < \frac{1}{3}$时幂级数绝对收敛；
- 当$|x| > \frac{1}{3}$时幂级数发散；

$\Longrightarrow$ 幂级数的收敛半径$R = \frac{1}{3}$, 收敛区间$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- 当$x = \frac{1}{3}$时幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；
- 当$x = -\frac{1}{3}$时幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 收敛；

$\Longrightarrow$ 幂级数收敛域为$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;

例2. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域：

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n}$?

解： $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+3} |x|^2 = |x|^2$, 由比值判别法得

- 当$|x| < 1$时幂级数绝对收敛；
- 当$|x| > 1$时幂级数发散；

$\Longrightarrow$ 幂级数的收敛半径$R = 1$, 收敛区间$(-1, 1)$.

- 当$x = \pm 1$时幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 收敛；

$\Longrightarrow$ 幂级数收敛域为$[-1, 1]$;

(4). $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$?

解： $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = +\infty (x \neq 0$时), 由根值判别法得：

$$\text{当}x \neq 0\text{时幂级数发散；}$$

从而幂级数的收敛半径$R = 0$, 收敛区间$\emptyset$, 收敛域$\{0\}$.

例2. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域：

(5). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(1+n)^n}$?

解： $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{3n}}{(1+n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{1+n} = 0$, 由根值判别法

$$\Longrightarrow \quad \text{对任何实数}x\text{幂级数收敛；}$$

从而幂级数的收敛半径$R = +\infty$, 收敛区间$(-\infty, +\infty)$, 收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

例2. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域：

(6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{4^n n}$?

解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+2}}{4^{(n+1)}(n+1)}}{\frac{(x-1)^{n+1}}{4^n n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+1)}|x-1| = \frac{1}{4}|x-1|$, 由比值判别法得：

- 当$|x-1|<4$时绝对收敛；
- 当$|x-1|>4$时发散；

$\Longrightarrow$ 幂级数的收敛半径$R=4$, 收敛区间为$(-3,5)$.

- $x-1=-4$时幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n}$, 收敛;
- 当$x-1=4$时幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}$, 发散;

$\Longrightarrow$ 幂级数收敛域为$[-3,5)$;

定理： 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R>0$, 收敛域为$I$. 则

(1). 和函数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛域$I$内连续；

(2). 和函数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$内可导且

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ x\in(-R,R).$$

(3). 和函数$S(x)$在收敛域I内可积，且对a、$b\in I$

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n dx\right).$$

证明省略。

- 和函数在收敛域I内连续、可积，且积分与$\sum$可交换；
- 和函数在收敛域I内不一定可导；但是在收敛区间$(-R,R)$内可导、且求导与$\sum$可交换；

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的导函数$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$仍为幂级数，它们的收敛半径相等（但收敛域可能不同！）；

例：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$的收敛半径为$R = 1$、收敛区域为$[-1, 1)$; 而级数

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1},$$

的收敛半径为$R = 1$、收敛区域为$(-1, 1)$;

例3. 求下列幂级数的收敛半径、收敛域及和函数：

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$?

解： 收敛半径$R=1$、收敛域$[-1,1)$; 当$|x|<1$时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x t^{n-1} dt \right) \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x); \end{aligned}$$

如何求$S(-1)$? 和函数$S(x)$在收敛域$[-1,1)$内连续，利用连续性

$$S(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x) = \lim_{x \to (-1)^+} -\ln(1-x) = -\ln(1-x)\big|_{x=-1}.$$

从而$x \in [-1,1)$时和函数$S(x) = -\ln(1-x)$。特别

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = S(-1) = -\ln 2 \Rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

例3. 求下列幂级数的收敛半径、收敛域及和函数：

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$?

解： 收敛半径$R=1$、收敛域$[-1,1]$;

当$|x|<1$且$x\neq 0$时$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{x}S_1(x)$,

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^x\frac{x^n}{n}dx\right]=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]dx \\
&= \int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x x^{n-1}dx\right)\right]dx=\int_0^x\left[\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx\right]dx \\
&= \int_0^x\left[\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}\right)dx\right]dx=\int_0^x[-\ln(1-x)]\,dx \\
&= x+(1-x)\ln(1-x);
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad |x|<1\text{且}x\neq 0\text{时}S(x)=\frac{1}{x}S_1(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x);$$

$|x|<1$且$x\neq 0$时$S(x)=\frac{1}{x}S_1(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$;

如何求$S(-1)$? $S(1)$? 和函数$S(x)$在收敛域$[-1,1]$内连续，利用连续性

$$\begin{aligned} S(-1) &= \lim_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim_{x\to(-1)^+} 1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x) \\ &= \left[1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)\right]_{x=-1}. \end{aligned}$$

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-} S(x)=\lim_{x\to 1^-} 1+\left(\frac{1-x}{x}\right)\ln(1-x)=1.$$

从而$x\in[-1,1]$时和函数

$$x\in[-1,0)\cup(0,1)\text{时}S(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x);\ S(1)=1,\ S(0)=0.$$

特别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=S(1)=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=S(-1)=1-2\ln 2$;

例3. 求下列幂级数的收敛半径、收敛域及和函数：

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$?

解： 收敛半径$R=1$、收敛域$(-1,1)$; 当$|x|<1$时

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2};$$

例3. 求下列幂级数的收敛半径、收敛域及和函数：

(4). $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$?

解： 收敛半径$R=1$、收敛域$(-1,1)$; 当$|x|<1$时

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(nx^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)'=x\,(S_1(x))'\,;$$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' \\ &= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}; \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow S(x)=xS_1'(x)=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

例3. 求下列幂级数的收敛半径、收敛域及和函数：

(5). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}(x-2)^n$?

解： 收敛半径$R=1$、收敛域$(1,3)$; 当$|x-2|<1$时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((x-2)^n - \frac{(x-2)^n}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n+1} \\ &= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{x-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{x-2}S_1(x),\ x\neq 2; \\ S_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_2^x (x-2)^n dx\right) \\ &= \int_2^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n\right)dx = \int_2^x \frac{1}{3-x}dx = -\ln(3-x); \\ \Longrightarrow &\quad S(x) = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{x-2}S_1(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{\ln(3-x)}{x-2},\ x\neq 2; \end{aligned}$$

显然，$S(2)=0$.

例3(6). 求常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的和？

解： 考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 收敛半径$R=1$、收敛域$[-1,1)$;
当$|x|<1$时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x x^{n-1}dx\right)\\ &= \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x);\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}=S(-1/3)=\ln(3/4);$$

由于和函数$S(x)$在收敛域$[-1,1)$上连续，在区间$(-1,1)$内$S(x)=-\ln(1-x)$;

$$S(-1) = \lim_{x\to(-1)^+}S(x)=\lim_{x\to(-1)^+}-\ln(1-x)=-\ln 2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = S(-1)=-\ln 2;$$

例3(7). 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$的收敛半径、收敛域及和函数。

解： 由$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}}\right| = \frac{|x+1|}{2}$得，收敛半径$R=2$；

- 当$|x+1|>2$时幂级数发散、当$|x+1|<2$时幂级数绝对收敛；
- 当$x+1=2$时幂级数为$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$，发散；
- 当$x+1=-2$时幂级数为$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，条件收敛；

从而，收敛区间为$[-3,1)$; 记$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$; 利用幂级数的性质，当$x\in[-3,1)$时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-1}^{x}\frac{(x+1)^{n-1}}{2^n}dx \\ &= \int_{-1}^{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{2^n}\right)dx = \int_{-1}^{x}\frac{1}{1-x}dx = \ln 2-\ln(1-x). \end{aligned}$$

- 幂级数“类似于”多项式，求导、积分，求近似值等都比较方便。**问：什么样的函数可以表示为幂级数？**

定理：假设函数$f(x)$在区间$|x-x_0|<R$内有无限阶导数，且对任意$\xi \in (x_0-R, x_0+R)$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0.$$

则函数$f(x)$在区间$|x-x_0|<R$内可**唯一地**表示为关于$(x-x_0)$的幂级数

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

证明： 对$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 记

$$S_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

由泰勒定理，存在$\xi \in (x_0 - R, x_0 + R)$使得

$$f(x) = S_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1};$$

$$\Longrightarrow S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x) - \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = f(x);$$

从而

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = S(x) = f(x).$$

(唯一性)　若对$x\in(x_0-R,x_0+R)$, 存在另外一个关于$(x-x_0)$的幂级数

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots;$$

则$a_0=f(x_0)$ 、且由幂级数性质对$x\in(x_0-R,x_0+R)$,

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots;$$

$\Longrightarrow a_1=f'(x_0)$, 由幂级数性质对$x\in(x_0-R,x_0+R)$,

$$f^{(2)}(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots,$$

$\Longrightarrow 2!a_2=f^{(2)}(x_0)$, 由幂级数性质对$x\in(x_0-R,x_0+R)$,

$$f^{(3)}(x)=3!a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}+\cdots,$$

$$\Longrightarrow a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),\ a_2=\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0),\cdots,a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\cdots.$$

定理：假设函数$f(x)$在区间$|x-x_0|<R$内有无限阶导数，且对任意$\xi\in(x_0-R,x_0+R)$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0.$$

则函数$f(x)$在区间$|x-x_0|<R$内可唯一地表示为关于$(x-x_0)$的幂级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

函数$f(x)$展开成关于$(x-x_0)$的幂级数的方法：

- 直接法;
- 间接法;

例4(1). 求函数$\sin x$关于x的幂级数并指出其收敛域？

解： $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$得

$$f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,\ k = 0, 1.2, \cdots;$$

且对x、$\xi \in (-\infty, +\infty)$且$|\xi| \le |x|$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\xi + \frac{(n+1)n\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0;$$ (证明见后面)

由$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots.,$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, |x| < \infty.$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, |x| < \infty.$$

- **如何证明:**

$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\xi+\frac{(n+1)n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0?$

对x、$\xi \in (-\infty, +\infty)$且$|\xi| \le |x|$，由$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$收敛(利用比值判别法) 得$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0$; 由极限的夹逼准则及

$$0 \le \left| \frac{\sin\left(\xi + \frac{(n+1)n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \le \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

得$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\xi+\frac{(n+1)n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$;

注. 类似,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, |x| < \infty.$$

例4(2). 求函数e^x关于x的幂级数并指出其收敛域？

解： $f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x$ 得

$$f^{(n)}(0)=1,\ n=0,1.2,\cdots;$$

且对x、$\xi\in(-\infty,+\infty)$且$|\xi|\le|x|$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=0;$$

由定理,

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,|x|<\infty.$$

牢记:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ |x| < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ |x| < \infty;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, |x| < \infty;$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,\ |x| < 1;\end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots,\ x \in (-1, 1];$$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,\ |x| < 1;$

定理： 假设函数$f(x)$在区间$|x-x_0|<R$内有无限阶导数，且对任意$\xi\in(x_0-R,x_0+R)$满足$\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$. 则函数$f(x)$在区间$|x-x_0|<R$内可**唯一地**表示为关于$(x-x_0)$的幂级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

间接法: 给定无限阶可导函数$f(x)$，

$$\text{由已知展开式}\Longrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<\delta$$

则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$为函数$f(x)$关于$(x-x_0)$的幂级数, 且

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<R.$$

例5(1). 求函数$\frac{1}{x}$关于$x-2$的幂级数并指出其收敛域?

解： $\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(x-2)/2}$, 记$t=-(x-2)/2$, 则当$|t|<1$时

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=1+t+t^2+t^3+\cdots;$$

从而，当$|-(x-2)/2|=|t|<1$时

$$\Longrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-2)/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n,\ |x-2|<2.$$

函数表示为幂级数—间接法

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n, \ |x-2| < 2.$$

进一步；

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} &= -\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n\right)' \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}} (x-2)^{n-1}, \ |x-2| < 2.
\end{aligned}$$

- $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}} (x-2)^{n-1}, \ |x-2| < 2.$

例5(2). 已知$|t|<1$时有$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$; 试求$f(x)=\ln(1+3x)$关于$x-1$的幂级数并指出其收敛域?

解: $f'(x)=\frac{3}{1+3x}=\frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{3}{4}(x-1)}=\frac{3}{4}\frac{1}{1-t}$, 其中$t=-\frac{3}{4}(x-1)$.

当$|x-1|<\frac{4}{3}$时

$$f'(x)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}(x-1)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}(x-1)^n,$$

$$\begin{aligned} f(x)-f(1) &= \int_1^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\int_1^x(x-1)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},\ |x-1|<\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ln(1+3x)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n\cdot 4^n}(x-1)^n,\ |x-1|<\frac{4}{3}.$$

例5(3). 已知$|t| < 1$时有$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$; 试求$f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$关于$x$的幂级数并指出其收敛域?

解: $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2} = -\left(\frac{1}{2+x}\right)'$,

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n, \ |x/2| < 1;$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2+x)^2} &= -\left(\frac{1}{2+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}x^n, \ |x| < 2;\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \frac{1}{(2+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}x^n$, $|x| < 2$;

例5(4). 试求$f(x) = \arctan x$关于x的幂级数、并求数$f^{(101)}(0)$? $f^{(102)}(0)$?

解： $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (记$t = -x^2$, $|t| < 1$时有$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$)

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \ |-x^2| < 1;$$

利用$f(0) = 0$,

$$\arctan x = \int_0^x f'(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, |x| < 1;$$

由唯一性，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, |x| < 1;$$

比较系数得

$$\frac{f^{(101)}(0)}{101!} = \frac{(-1)^{50}}{101}, \frac{f^{(102)}(0)}{102!} = 0 \Longrightarrow f^{(101)}(0) = 100!, \ f^{(102)}(0) = 0.$$

例5(5). 试求函数$f(x)=x^2\arctan x$的麦克劳林级数，并求级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

解： 记$g(x)=\arctan x$, 则当$|x|<1$时

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x)-g(0)=\int_0^x g'(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛区间为$[-1,1]$、和函数$S(x)$ 为闭区间$[-1,1]$上连续、且$|x|<1$时

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=g(x).$$

例5(5). 试求函数$f(x) = x^2 \arctan x$的麦克劳林级数，并求级数$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

- $|x| < 1$时

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = arctanx = g(x).$$

从而我们有

$$g(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} g(x) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x) = S(-1),$$
$$g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = S(1).$$

从而，我们有

$$f(x) = x^2 g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+3}, \; x \in [-1, 1].$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = S(1) = f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

例5(6). 已知幂级数$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$满足等式$y''+xy'+y=0$,求$y=y(x)$?

解: $y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$, $y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$; 代入

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

比较系数得

$$\Longrightarrow(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0,\ n=0,1,\cdots;$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0, \Longrightarrow a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2},\ n=0,1,\cdots;$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad & a_2=-\frac{1}{2}a_0,\ a_4=\frac{(-1)^2}{4\cdot 2}a_0=\frac{(-1)^2}{2^2\cdot 2!}a_0,\cdots,\\
& a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}a_0,\ k=1,2,3,\cdots;\\
\Longrightarrow \qquad & a_3=-\frac{1}{3}a_1,\ a_5=\frac{(-1)^2}{5\cdot 3}a_1=\frac{(-1)^2 2^2\cdot 2!}{5!}a_1,\cdots,\\
& a_{2k+1}=\frac{(-1)^k 2^k\cdot k!}{(2k+1)!}a_1,\ k=1,2,3,\cdots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}x^{2k}+\cdots\right]\\
&+ a_1\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2^2\cdot 2!}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^k 2^k\cdot k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots\right].
\end{aligned}$$