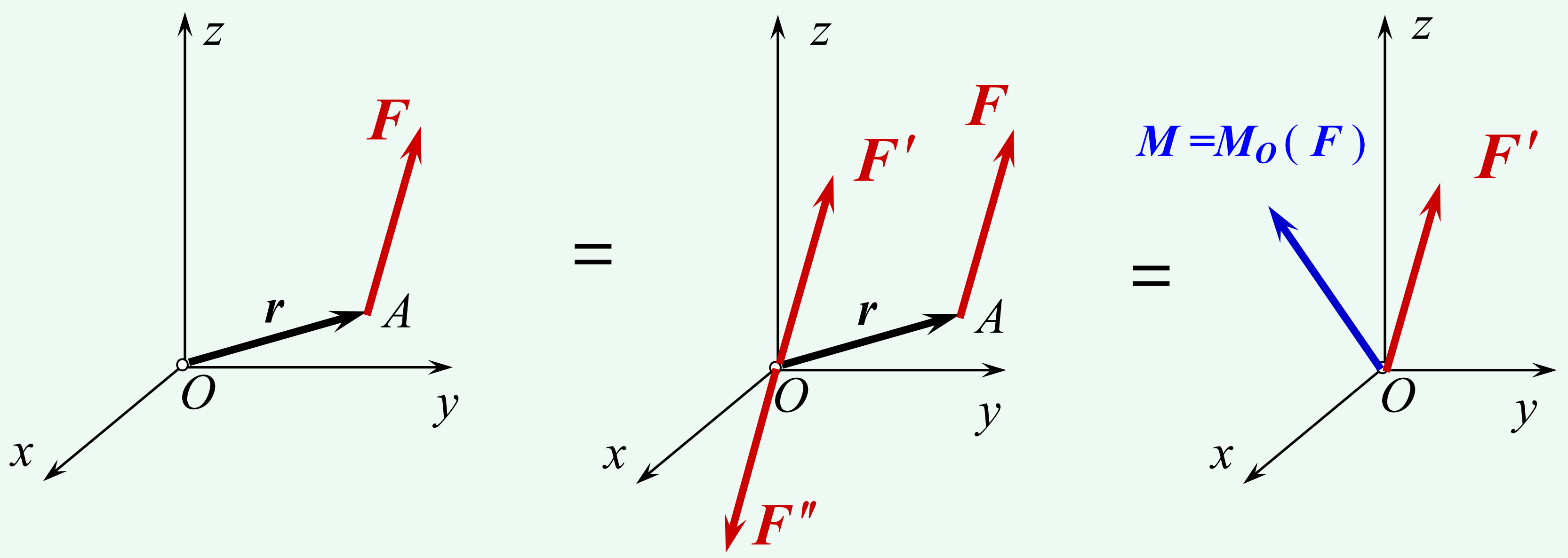
第3章

任意力系

§3-1 任意力系简化和合成

1. 力的平移定理

把力F作用线向某点O平移时，必须附加一个力偶，此附加力偶矩矢等于原力F对点O的矩矢。

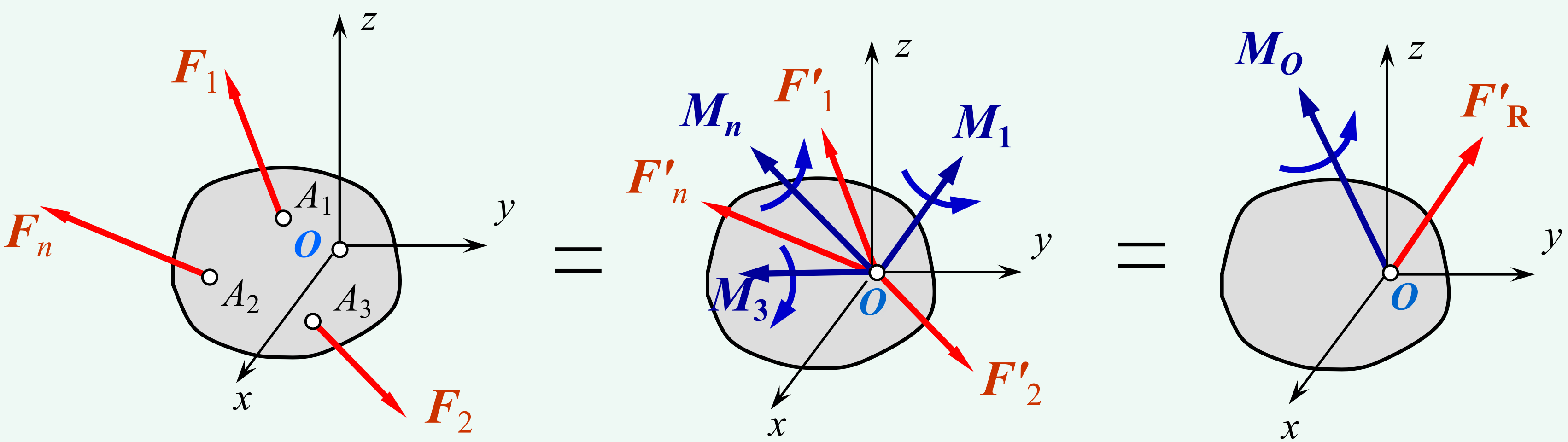


$$\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}'' = \boldsymbol{F}\,,\qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

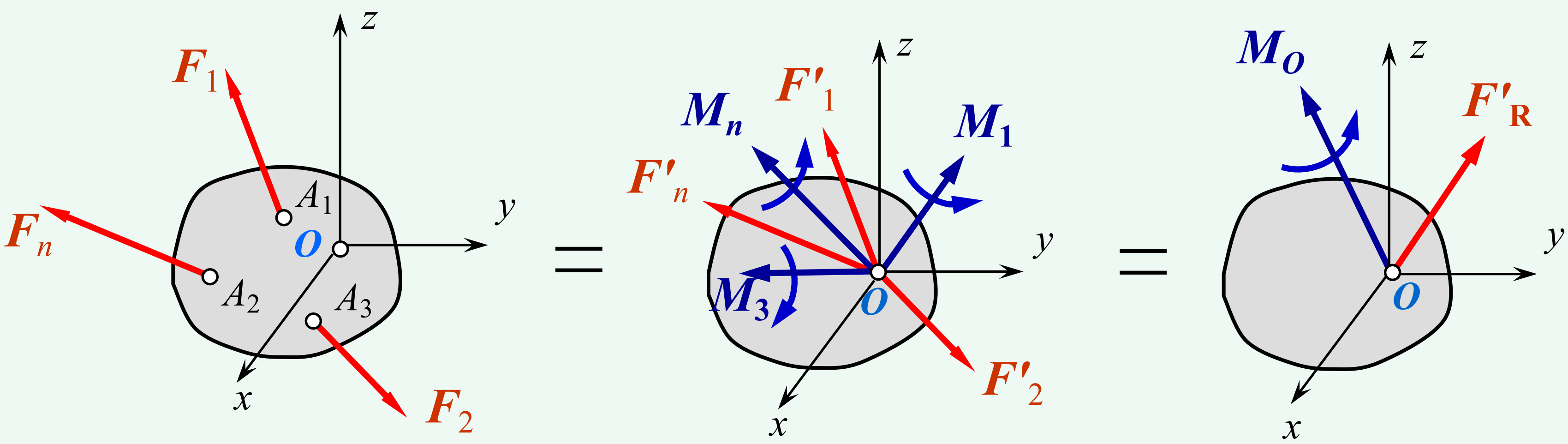
2. 任意力系的简化•主矢和主矩

（1）空间任意力系的简化•主矢和主矩

空间任意力系向任一点简化后，一般得到一个力和一个力偶。这个力称为原力系的主矢，它等于力系中所有各力的矢量和；这个力偶称为该力系简化中心的主矩，它等于力系中所有各力对该简化中心的矩之矢量和。

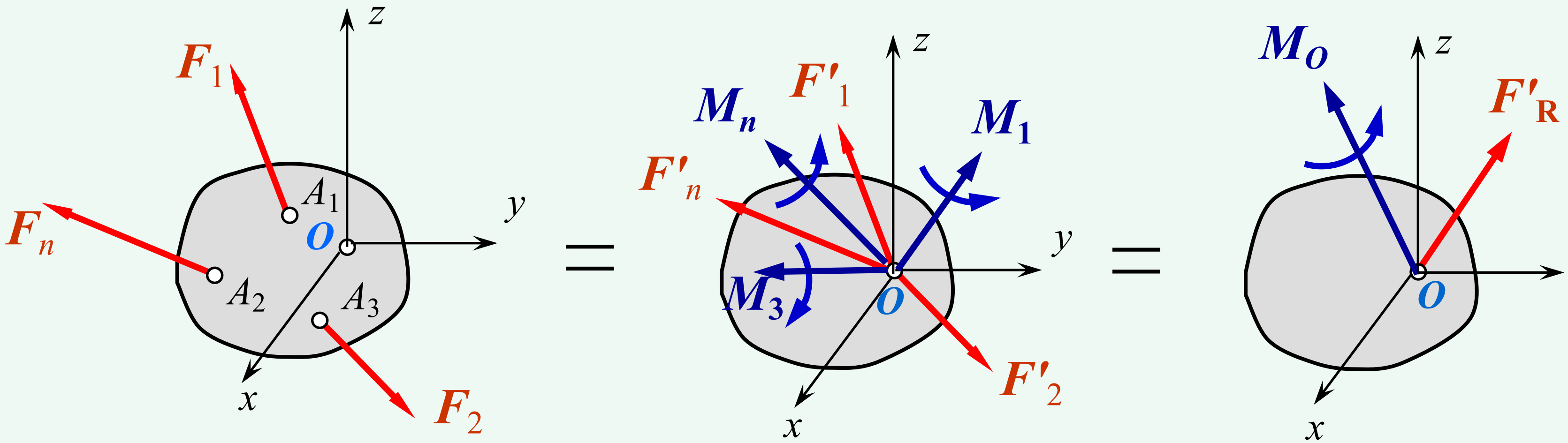


附加力偶系 $M_1 = M_O(F_1)$，$M_2 = M_O(F_2)$，…，$M_n = M_O(F_n)$



共点力系（F_1'，F_2'，…，F_n'）的合成结果为一作用在点O的力F'_R。这个力F'_R称为原空间任意力系的主矢。

$$F'_R = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_n = F_1 + F_2 + \cdots + F_n, \qquad F'_R = \sum F_i$$



附加力偶系的合成结果是一个力偶，此力偶的矩矢用M_O代表，称为原空间任意力系对简化中心O的**主矩**。

$$M_O = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n)$$

$$M_O = \sum M_O(F_i)$$

空间任意力系对简化中心O的

主矢 $$F'_{\mathrm{R}}=\sum F_i$$

主矩 $$M_O=\sum M_O(F_i)$$

结论

空间任意力系向任一点简化后，一般得到一个力和一个力偶。这个力称为原力系的主矢，它等于力系中所有各力的矢量和,作用在简化中心O，它与简化中心的位置无关。这个力偶称为该力系简化中心的主矩，它等于力系中所有各力对该简化中心的矩之矢量和，主矩则一般与简化中心的位置有关。

（2）主矢与主矩的计算

1）主矢的计算

主矢F'_R在直角坐标系$Oxyz$的投影

$$F'_{Rx}=\sum F_x\ ,\quad F'_{Ry}=\sum F_y\ ,\quad F'_{Rz}=\sum F_z$$

主矢的大小和方向余弦

$$F'_R=\sqrt{F'^2_{Rx}+F'^2_{Ry}+F'^2_{Rz}}$$

$$=\sqrt{\left(\sum F_x\right)^2+\left(\sum F_y\right)^2+\left(\sum F_z\right)^2}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{i}\right)=\frac{F'_{Rx}}{F'_R},\quad \cos\left(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{j}\right)=\frac{F'_{Ry}}{F'_R},\quad \cos\left(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{k}\right)=\frac{F'_{Rz}}{F'_R}$$

2）主矩的计算

通常用解析法，且考虑到空间力对点的矩与力对过该点的轴的关系，把空间力对点的矩的矢量计算转换为对轴的代数计算：

$$M_O = \sqrt{(\sum M_{ix})^2 + (\sum M_{iy})^2 + (\sum M_{iz})^2}$$

$$\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{i}) = \frac{\sum M_{ix}}{M_O}, \qquad \cos(\mathbf{M}_O, \boldsymbol{j}) = \frac{\sum M_{iy}}{M_O}, \qquad \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{k}) = \frac{\sum M_{iz}}{M_O}$$

(3) 平面任意力系的简化•主矢和主矩

对于平面任意力系的简化，可参考空间任意力系的简化过程进行，注意到在平面中将力偶的矩定义为代数量，得到以下**结论**：

平面任意力系向作用面内任一点O简化的结果，是一个力和一个力偶。这个力作用在简化中心O，它的力矢等于原力系中各力的矢量和，并称为原力系的**主矢**。这个力偶的矩等于各附加力偶矩的代数和，它称为原力系对简化中心O的**主矩**，并在数值上等于原力系中各力对简化中心O的力矩的代数和。

3. 任意力系的合成结果

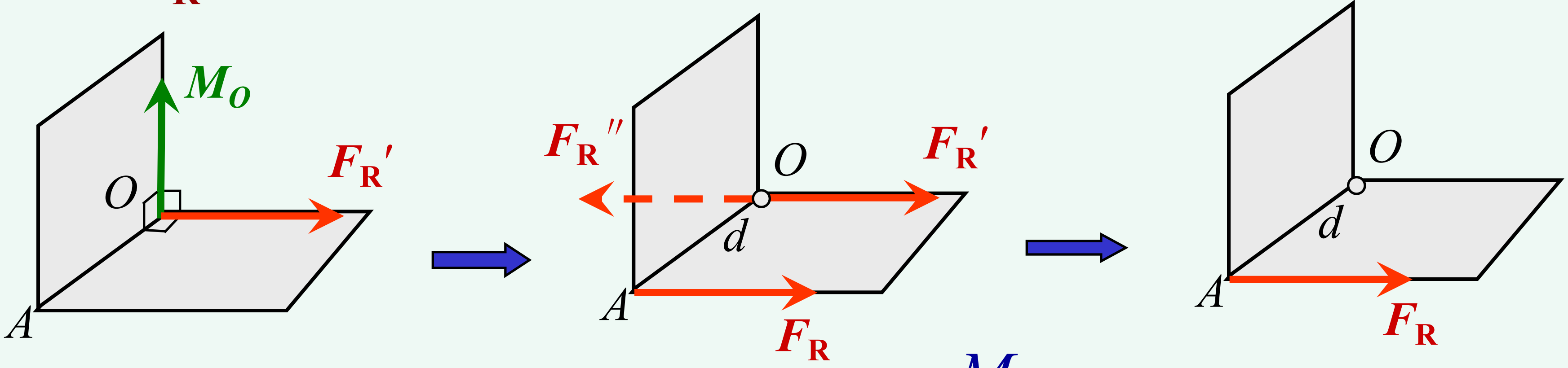
（1）力系合成为合力偶

$F_R'=0$，而 $M_O \neq 0$，则原力系合成为一个矩矢为M_O的合力偶。

该力系的主矩不随简化中心的位置而改变。

（2）力系合成为合力

- $F_R' \neq 0$，$M_O = 0$，则原力系合成为一个作用于简化中心O的合力F_R，且 $F_R = F_R'$。
- $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且$F_R' \perp M_O$。则原力系仍然合成为一个合力F_R。



$$F_R = -F_R'' = F_R'$$

$$d = \frac{M_O}{F_R'}$$

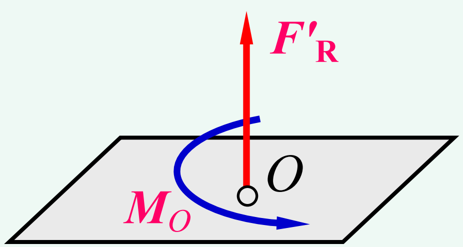
（3）力系合成为力螺旋

- $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且 $F_R' \parallel M_O$。

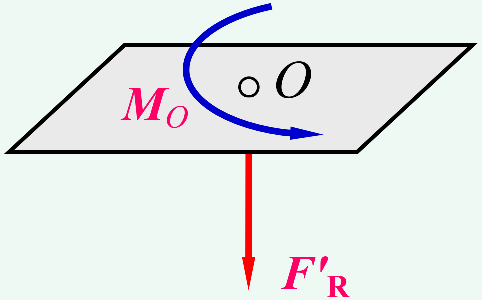
力系合成为一个力（作用于简化中心）和一个力偶，且这个力垂直于这个力偶的作用面。这样的一个力和一个力偶的组合称为**力螺旋**。

右手螺旋：力矢F_R'与力偶矩矢M_O指向相同（图a）。

左手螺旋：力矢F_R'与力偶矩矢M_O指向相反（图b）。

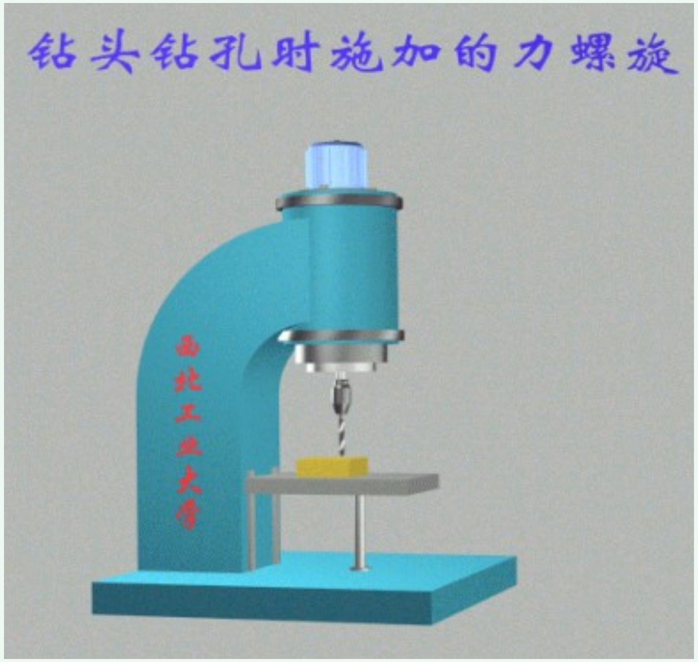


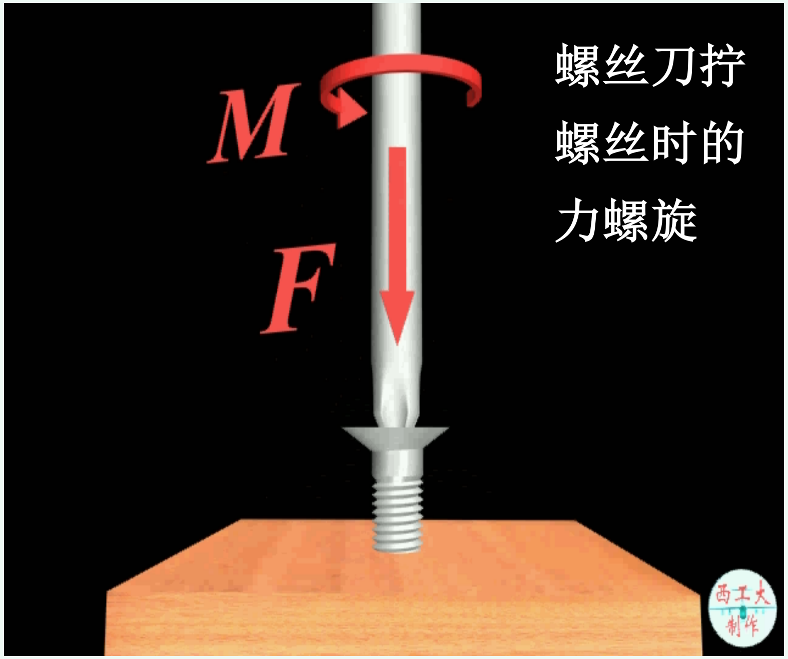
（a）



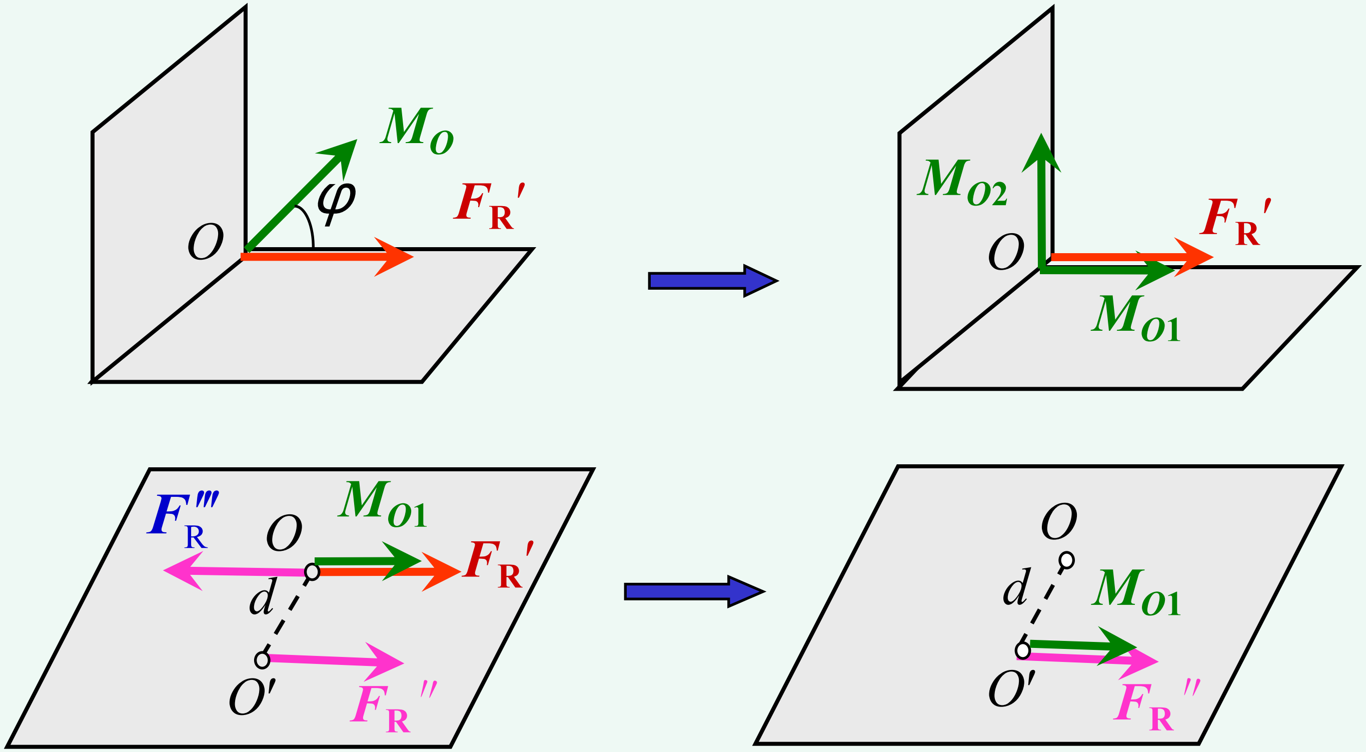
（b）

力螺旋工程实例





● $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且F_R'与 M_O成任意角，力系合成为一个力螺旋。



$$F_R'' = F_R' = -F_R'''$$

$$d = \frac{M_O \sin\varphi}{F_R'}$$

归纳本节所述，可得出如下结论，只要主矢和主矩不同时等于零，空间任意力系的最后合成结果可能有三种情形：

(1) 一个力偶 ($F_{\mathrm{R}}'=0$， $M_O \neq 0$);

(2) 一个力($F_{\mathrm{R}}' \neq 0$，而 $M_O=0$ 或 $F_{\mathrm{R}}' \perp M_O$) ;

(3) 一个力螺旋($F_{\mathrm{R}}' \neq 0$ ，$M_O \neq 0$ 且两者不相互垂直)。

§3-2 任意力系简化和合成

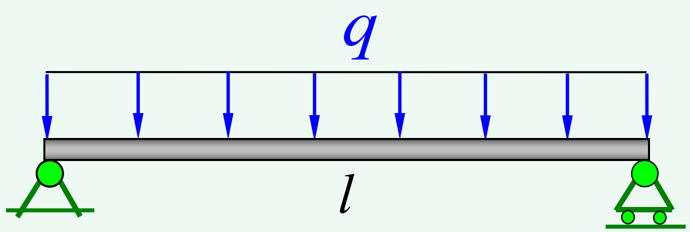
4. 合力矩定理

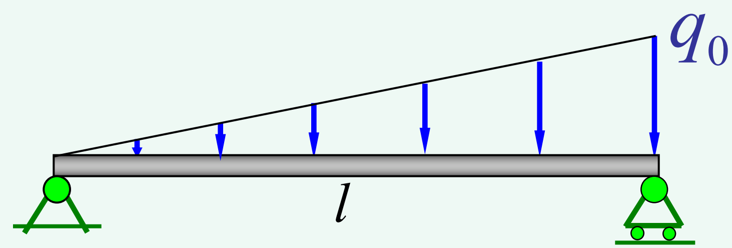
在空间任意力系(F_1', F_2', …, F_n')的合力为F_R的情况下，有合力对任一点的矩等于力系中各个分力对同一点矩的和，即$M_O(F_R)=\sum M_O(F_i)$

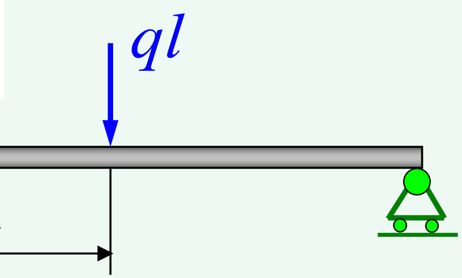
无需证明，因为合力与力系等效！

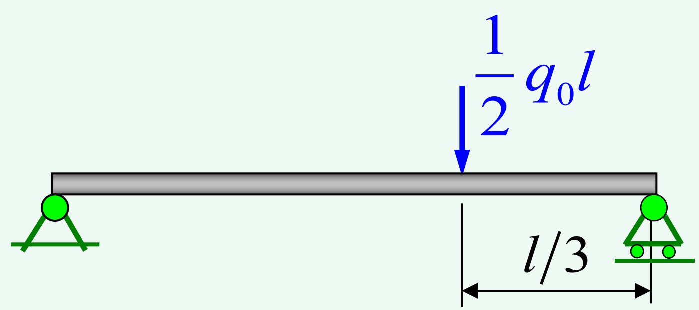
合力矩定理的一个应用

试将下图分布力简化。 **q：单位长度上的分布载荷**





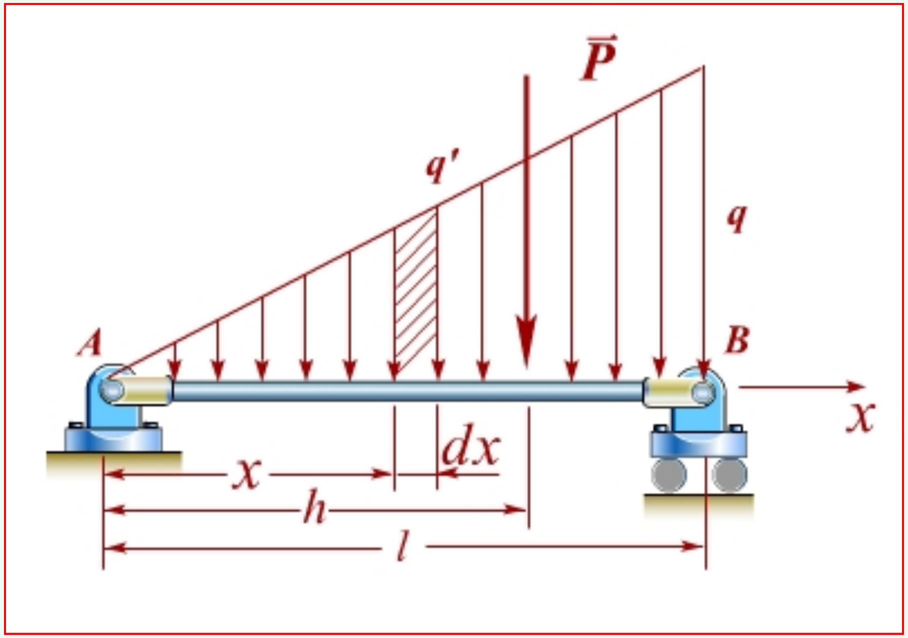




由力的平移定理、合力矩定理决定合力作用点位置

例 已知 :$q, l;$

求 :合力及合力作用线位置.

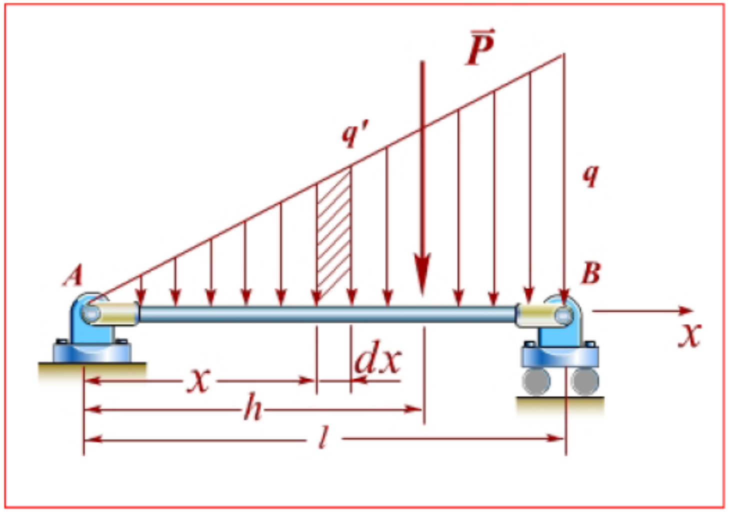


例　已知：q, l;

q：单位长度上的分布载荷

求：合力及合力作用线位置.

解：取微元如图



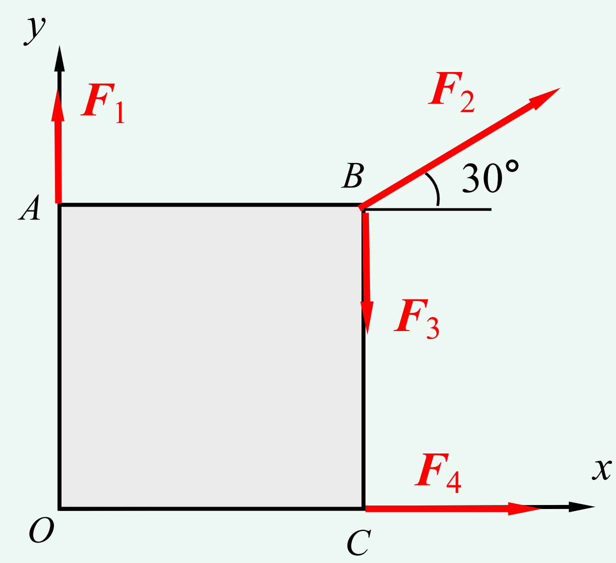
$$q' = \frac{x}{l} \cdot q$$

$$P = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} ql$$

由合力矩定理　$P \cdot h = \int_0^l q' \, \mathrm{d}x \cdot x = \int_0^l \frac{x^2}{l} q \, \mathrm{d}x$

得　$h = \frac{2}{3} l$

例题3-2 **正方形平板**$OABC$**的边长**b=4m，**分别作用有四个力**F_1=2 kN、F_2=4 kN、 F_3=2 kN 、F_4=3 kN（**如图所示**），**试求以上四个力构成的力系对点**O**的简化结果，以及该力系的最后的合成结果。**



解：**取坐标系**Oxy。

（1）求向O点简化的结果。

- **求主矢**F'_{R}。

$$F'_{\mathrm{R}x} = \sum F_x$$

$$= F_2 \cos 30° + F_4 = 6.64 \ \mathrm{kN}$$

$$F'_{\mathrm{R}y} = \sum F_y$$

$$= F_1 + F_2 \sin 30° - F_3 = 2 \ \mathrm{kN}$$

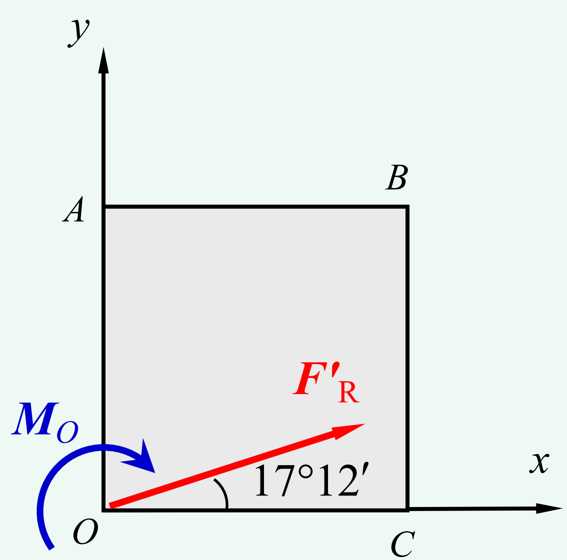
$$F'_{\mathrm{R}} = \sqrt{F'^2_{\mathrm{R}x} + F'^2_{\mathrm{R}y}} = 6.67\ \mathrm{kN}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{i}\right) = \frac{F'_{\mathrm{R}x}}{F'_{\mathrm{R}}} = 0.9553$$

$$\Rightarrow \angle\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{i}\right) = 17°12'$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{j}\right) = \frac{F'_{\mathrm{R}y}}{F'_{\mathrm{R}}} = 0.2957$$

$$\Rightarrow \angle\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{j}\right) = 72°48'$$



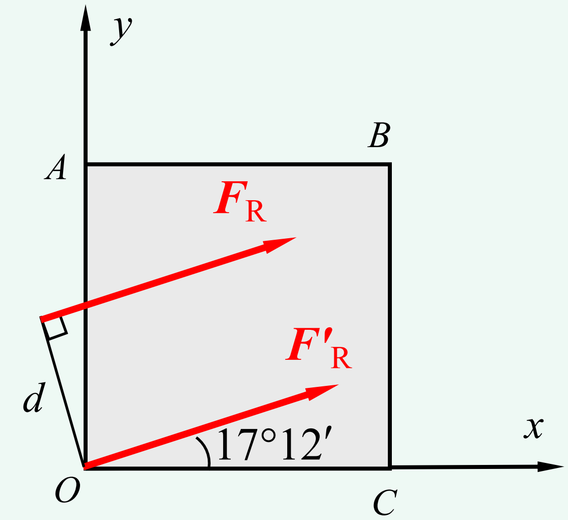
- **求主矩。**

$$M_O = \sum M_O\left(\boldsymbol{F}_i\right)$$

$$= b(F_2 \sin 30° - F_2 \cos 30° - F_3) = -13.9\ \mathrm{kN \cdot m}$$

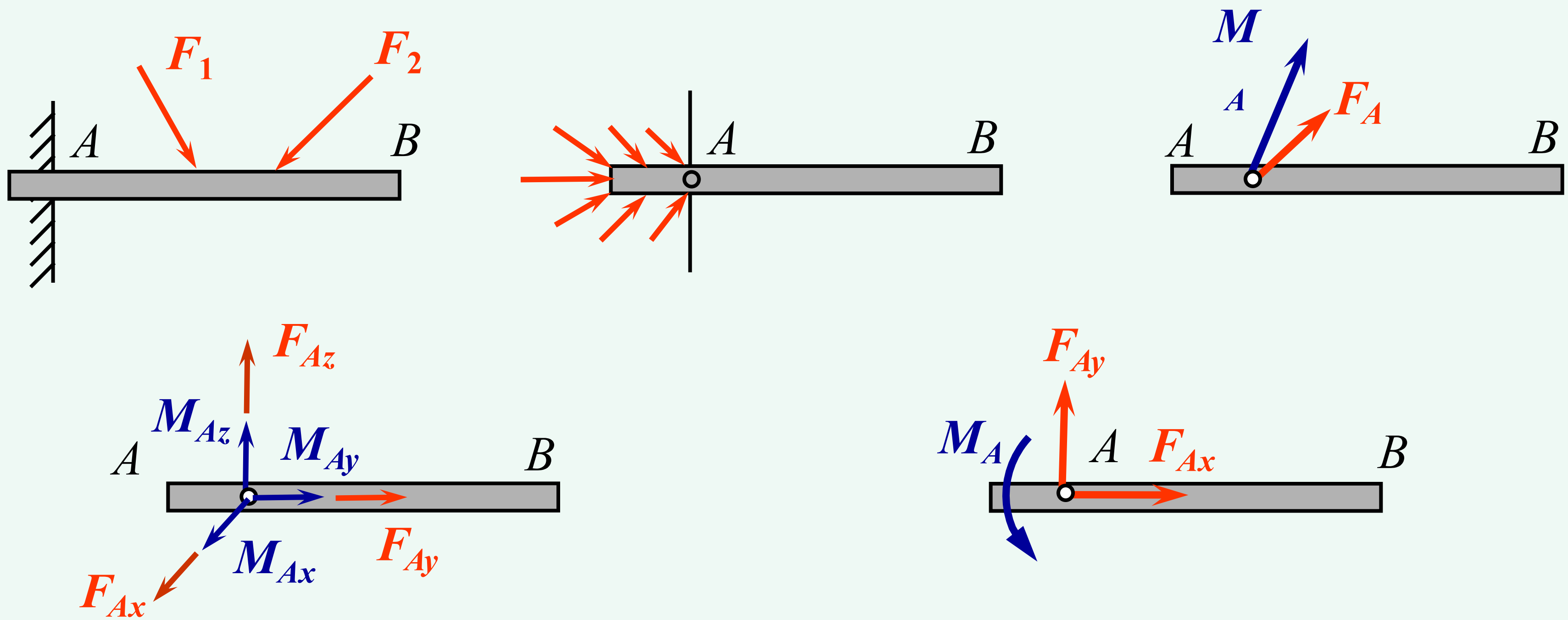
（2）求合成结果。

合成为一个合力F_R，F_R的大小、方向与F'_R相同。其作用线与O点的垂直距离为



$$d = \frac{|M_O|}{F'_R} = 2.08\ \text{m}$$

讨论　　固定端约束的约束反力



§3-2 任意力系的平衡条件和平衡方程

1. 空间任意力系平衡的充要条件(**根据空间任意力系的简化结果可知**)

力系中所有各力的矢量和等于零，以及这些力对任何一点的矩的矢量和也等于零。

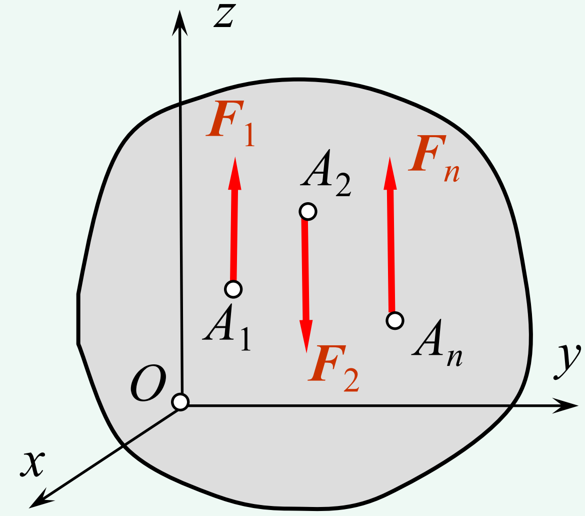
矢量方程 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}' = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$ ， $\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{0}$

空间任意力系的平衡方程

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sum F_x = 0, & \sum F_y = 0, & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, & \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, & \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0 \end{array}}$$

对于空间平行力系，在上式中有

$$\sum F_x \equiv 0,\quad \sum F_y \equiv 0,\quad \sum M_z \equiv 0$$



可见，空间平行力系的平衡方程只有三个

$$\sum F_z = 0\,,\quad \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0\,,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0$$

空间平行力系平衡的充要条件是：

力系中的各力在与其作用线平行的轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于任何两条与其垂直的轴的矩的代数和也分别等于零。

2. 平面任意力系的平衡方程

空间任意力系的平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

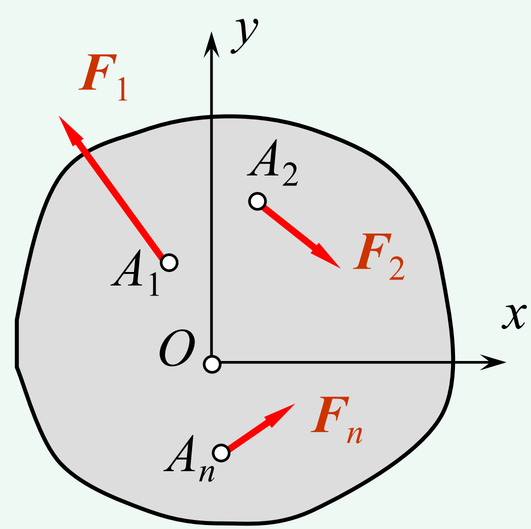
$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

对于平面任意力系，在上式中有

$$\sum F_z \equiv 0, \quad \sum M_x(\boldsymbol{F}) \equiv 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) \equiv 0$$

可见，平面任意力系的平衡方程只有三个

$$\boxed{\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$



$$\boxed{\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$

平面任意力系平衡的充要条件是：

力系中的各力在其作用平面内两坐轴上的投影的代数和分别等于零，同时力系中的各力对任一点的矩的代数和也等于零。

- 平面任意力系平衡方程的其他形式

二矩式：$\sum F_x = 0, \quad \sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$

且 A、B**的连线不和**x**轴相垂直。**

三矩式：$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0$

且A、B、C**三点不共线。**

●平面平行力系的平衡方程

平面任意力系的平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$$

对于平面平行力系，在上式中有

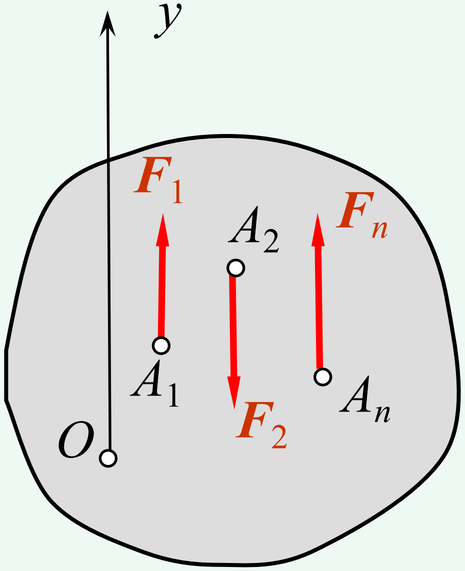
$$\sum F_x \equiv 0$$

可见，平面平行力系的平衡方程只有两个

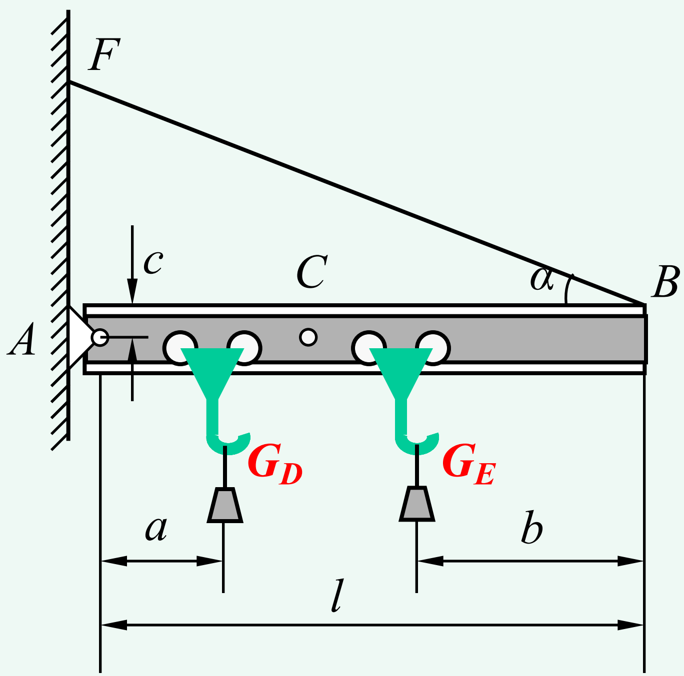
$$\sum F_y = 0, \qquad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$$

平面平行力系平衡的充要条件是：

力系中的各力的代数和等于零，同时这些力对任一点矩的代数和也等于零。



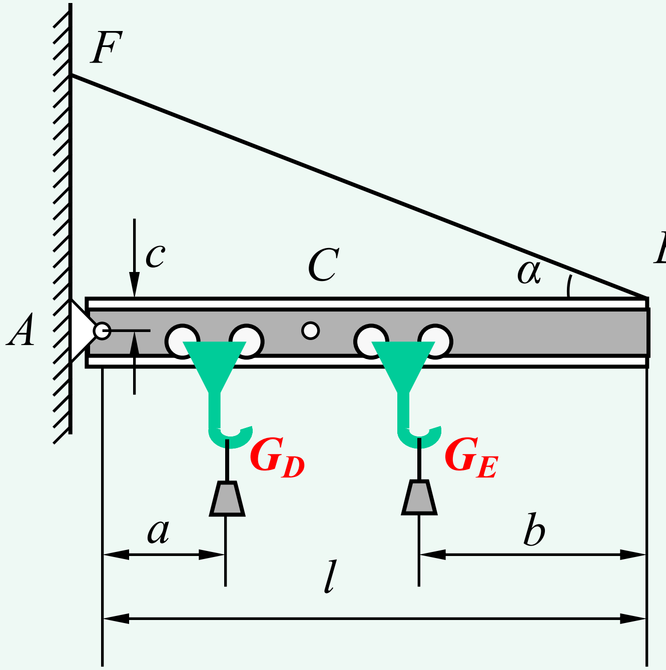
例题3-3 **伸臂式起重机如图所示，均质伸臂**AB**重**$G=2\ 200\ \text{N}$，**吊车**D、E**连同吊起重物各重**$G_D=G_E=4\ 000\ \text{N}$。**有关尺寸为** $l=4.3\ \text{m}$，$a=1.5\ \text{m}$，$b=0.9\ \text{m}$，$c=0.15\ \text{m}$, α=25°。**试求铰链**A**对臂**AB**的水平和垂直约束力，以及拉索**BF**的拉力。**

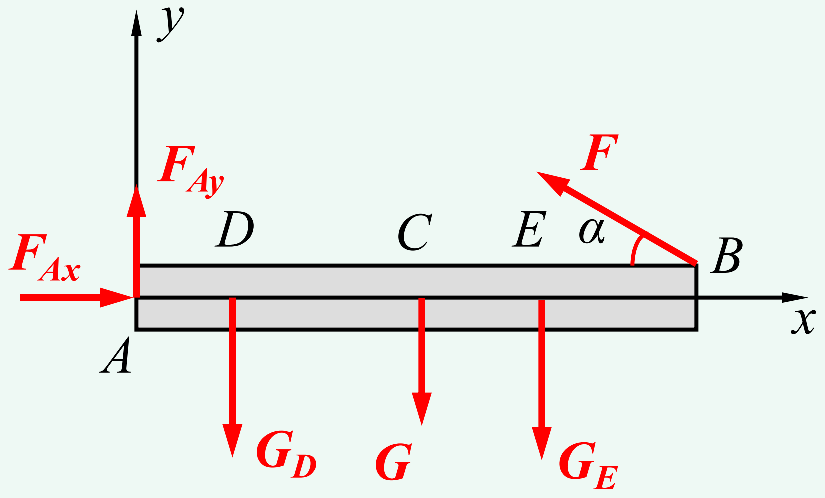


解：

(1) 取伸臂AB为研究对象。

(2) 受力分析如图所示。





（3）选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} - F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} - G_D - G - G_E + F\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,$$

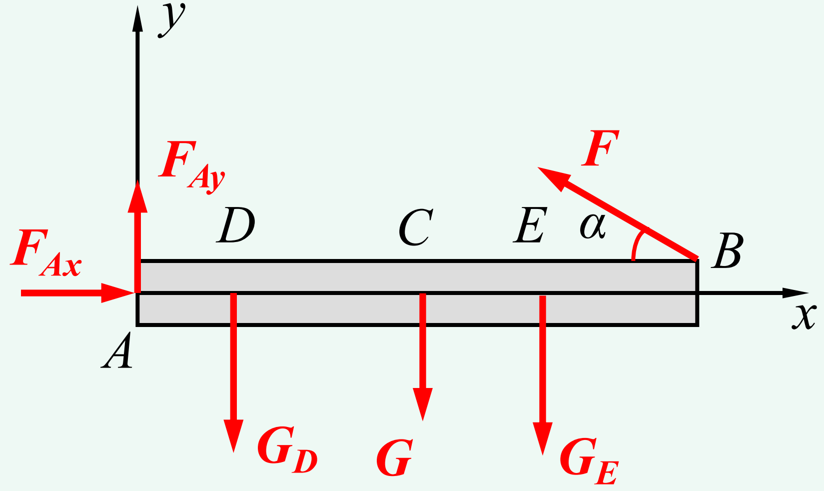
$$-G_D \times a - G \times \frac{l}{2} - G_E \times (l - b) + F\cos\alpha \times c + F\sin\alpha \times l = 0$$

（4）联立求解。

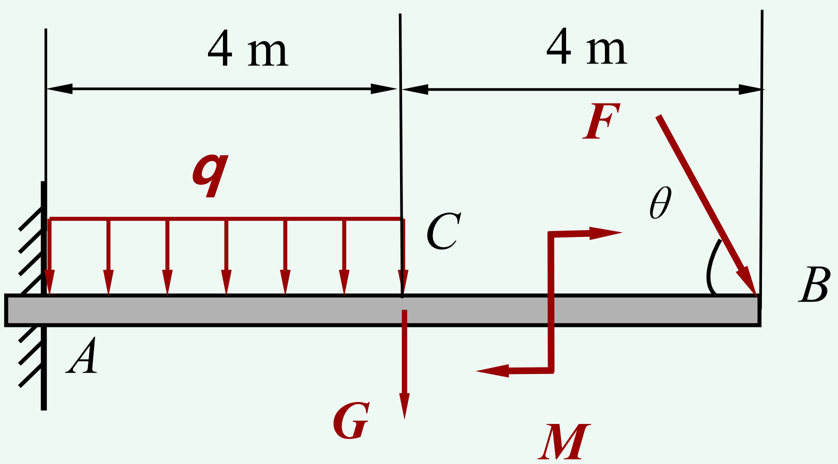
$F = 12\ 456\ \mathrm{N}$

$F_{Ax} = 11\ 290\ \mathrm{N}$

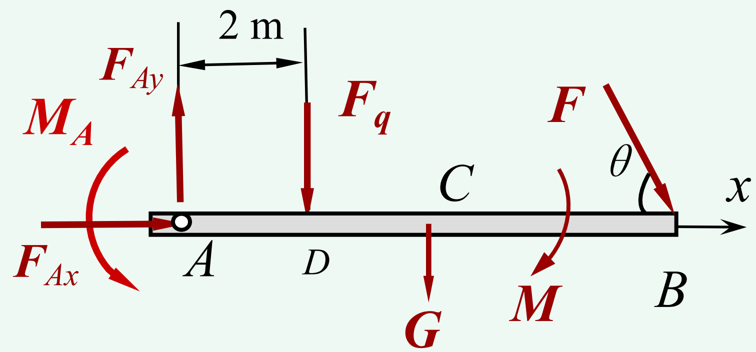
$F_{Ay} = 4\ 936\ \mathrm{N}$



例题3-4 **均质悬臂梁**AB**的**A**端为固定端，所受外载荷和尺寸受力如图所示。梁重**G=1 kN, **集中力**F=4 kN，**均布载荷集度**q=0.5 kN/m，**力偶矩的大小**M=4 kN·m，**试求固端**A**对梁的的约束力和约束力偶（θ已知）。**



解：取AB段为研究对象，受力分析如图所示。



$F_q = 4q = 2\ \text{kN}$

列平衡方程

$$\sum F_x = 0\ , \qquad F_{Ax} + F\cos\theta = 0$$

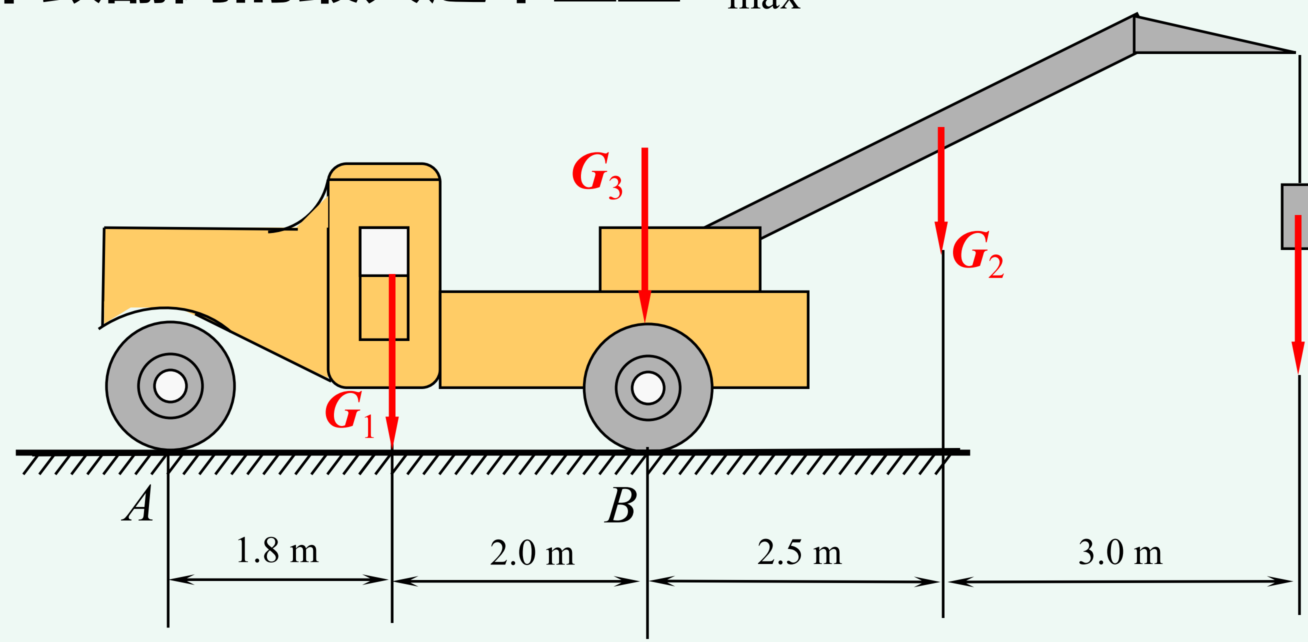
$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} - F\sin\theta - F_q - G = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0\ , \qquad M_A - 2F_q - 4G - M - 8F\sin\theta = 0$$

联立求解,可得

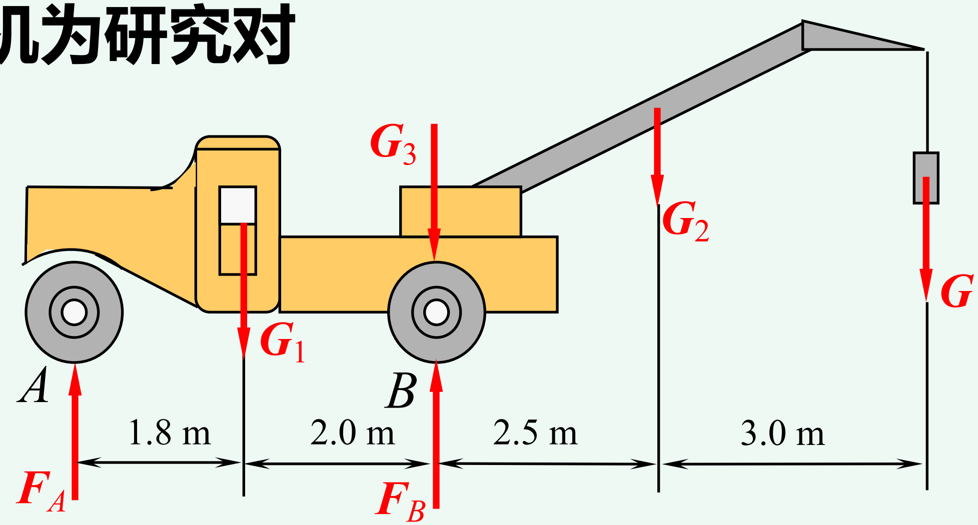
F_{Ax}, F_{Ay} , M_A

例题3-5 **一种车载式起重机，车重$G_1 = 26$ kN，起重机伸臂重$G_2 = 4.5$ kN，起重机的旋转与固定部分共重$G_3 = 31$ kN。尺寸如图所示。设伸臂在起重机对称面内，且放在图示位置，试求车子不致翻倒的最大起吊重量G_{max}。**



解：（1）取汽车及起重机为研究对象，受力分析如图所示。

（2）列平衡方程。



$$\sum F = 0,$$

$$F_A + F_B - G - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$-5.5G - 2.5G_2 + 2G_1 - 3.8F_A = 0$$

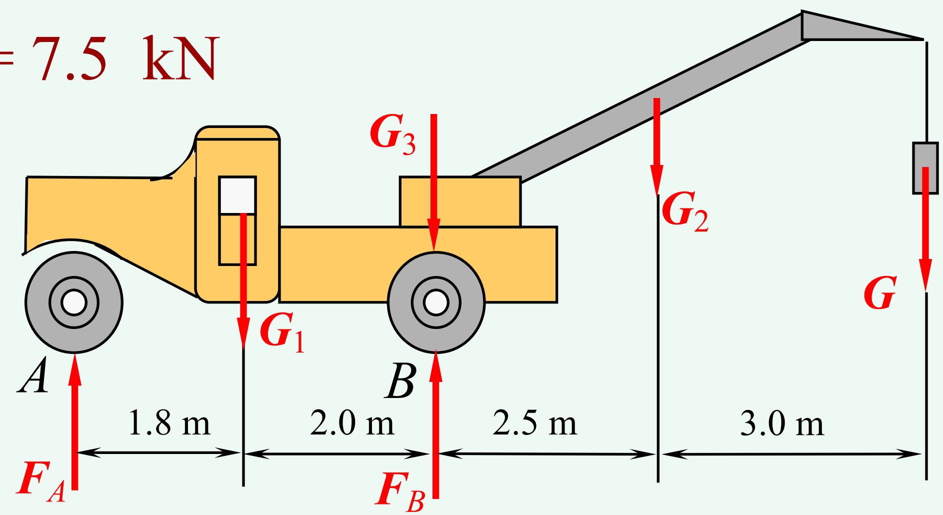
（3）求解。

$$F_A=\frac{1}{3.8}\left(2G_1-2.5G_2-5.5G\right)$$

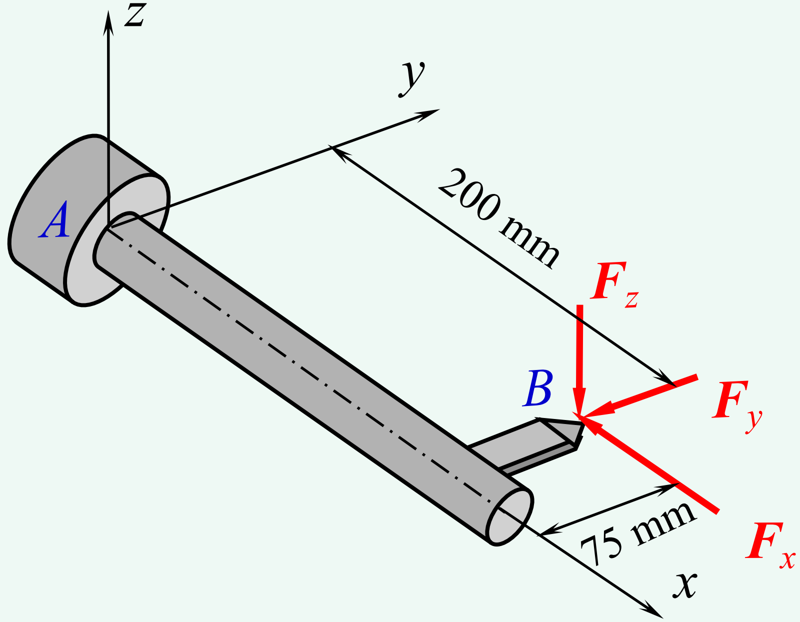
（4）不翻倒的条件是 $F_A \geq 0$，所以由上式可得

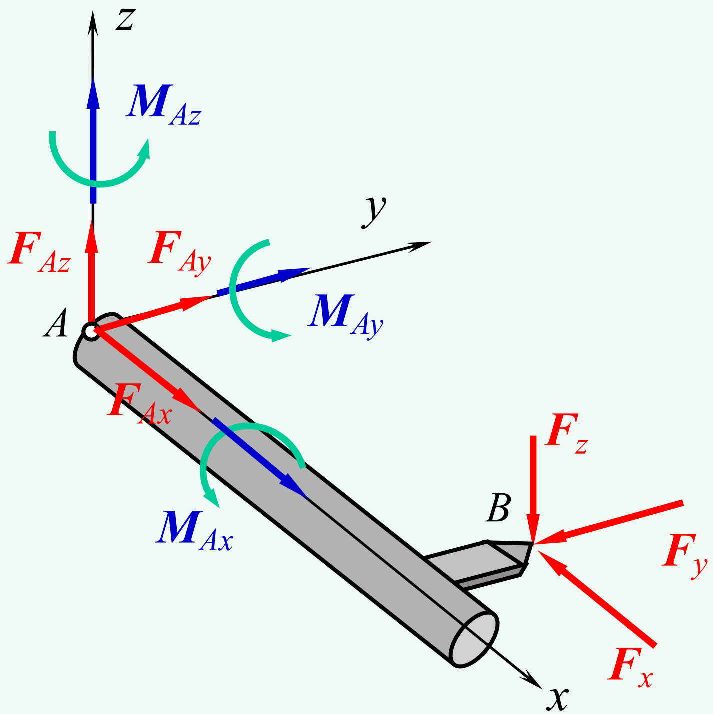
$$G \leq \frac{1}{5.5}\left(2G_1-2.5G_2\right)=7.5\ \text{kN}$$

故最大起吊重量为 $G_{max}=7.5\ \text{kN}$



例题3-6 **镗刀杆的刀头在镗削工件时受到切向力F_z、径向力F_y、轴向力 F_x的作用。各力的大小**F_z=5 000 N，F_y=1 500 N，F_x=750 N，**而刀尖**B**的坐标** x = 200 mm，y = 75 mm，z = 0。**如果不计刀杆的重量，试求刀杆根部**A**的约束力的各个分量。**

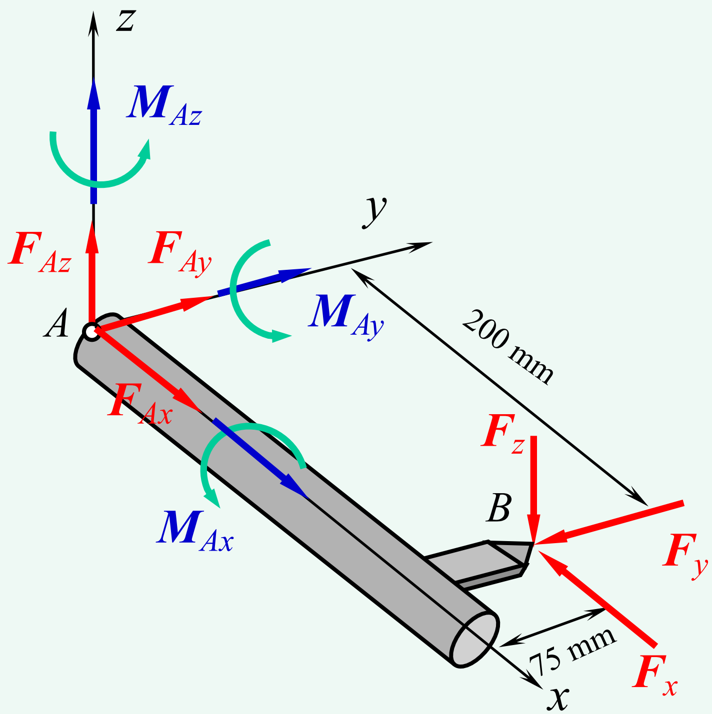




解：

（1）取镗刀杆为研究对象，受力分析如图所示。

刀杆根部是固定端，约束力是任意分布的空间力系，通常用这个力系向根部*A*点简化的结果表出。一般情况下可有作用在*A*点的三个正交分力和作用在不同平面内的三个正交力偶。



（2）列平衡方程。

$$\sum F_x = 0,\quad F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0,\quad F_{Az} - F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0,\quad M_{Ax} - F_z \times 0.075\ \mathrm{m} = 0$$

$$\sum M_y = 0,\quad M_{Ay} + F_z \times 0.2\ \mathrm{m} = 0$$

$$\sum M_z = 0,$$

$$M_{Az} + F_x \times 0.075\ \mathrm{m} - F_y \times 0.2\ \mathrm{m} = 0$$

（3）联立求解。

$F_{Ax} = 750\ \mathrm{N}$, $F_{Ay} = 1\,500\ \mathrm{N}$, $F_{Az} = 5\,000\ \mathrm{N}$

$M_{Ax} = 375\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_{Ay} = -1\,000\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_{Az} = 243.8\ \mathrm{N \cdot m}$

作业： 2-19，2-21，3-13，3-18

谢 谢