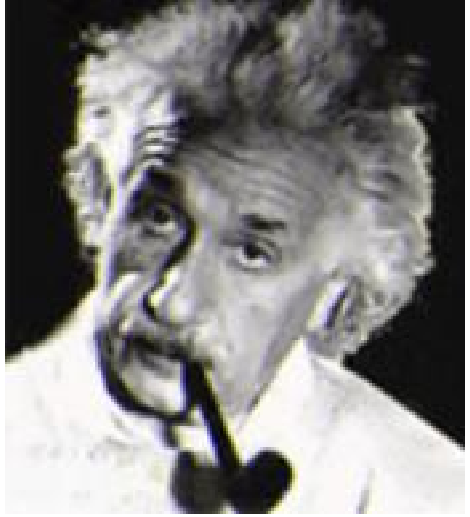
第四章　狭义相对论基础

(§ 4.4 - § 4.6)



本章教学基本要求

1、搞清相对论时空观与牛顿时空观的本质差别。
2、熟练掌握洛仑兹变换公式，并能进行定量计算，理解各种相对论时空效应的物理本质。
3、掌握相对论动力学的基本方程及质速关系。
4、分清相对论中，总能量、静止能量和动能等概念。
5、掌握质能关系和相对论的动量和能量关系

一、基本概念和规律

1、两条基本原理

相对性原理

光速不变原理

2、洛伦兹变换

一个事件，在K系的时空坐标是（x，y，z，t），在K′系的时空坐标是（x'，y'，z'，t'），他们之间的变换关系是洛伦兹变换。

3、相对论的时空观

（1）同时的相对性：一个惯性系内发生在两个不同的位置（$\Delta x \neq 0$）的一个同时事件（$\Delta t = 0$），则在另一个惯性系中不是同时发生的($\Delta t' > 0$)。

（2）长度收缩：当物体和测量者有相对运动时，测量者测得物体沿运动方向的长度变短。

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

（3）时间膨胀：与发生事件的地点有相对运动的观察者测得该事件经历的时间延长。

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

设有两根尺子（固有长度均为L_0）以同样的速度V相对于某一参照系相向运动。求在与其中一根尺子相连接的参照系中所测得的另一尺子的长度是多少？

K为地球参照系，K'为尺子参照系 $u = v$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2} = \frac{-v-u}{1+uv/c^2} = \frac{-2vc^2}{c^2+v^2}$$

$$L_{K'} = \sqrt{1-\frac{v'^2_x}{c^2}}L_0 = L_0\sqrt{1-\frac{4v^2c^2}{(c^2+v^2)^2}} = L_0\frac{c^2-v^2}{c^2+v^2}$$

§ 4.4 狭义相对论动力学方程

经典力学对洛变换不协变，需被修正为相对论力学

一、质量与速度的关系

按照牛顿力学，一个确定的力，对物体产生确定的加速度。因此，物体的速度必定会超过光速值。

所以牛顿力学规律不能适应相对论的时空观。

由于光速极限的要求，所以物体的质量与自身的速度有关

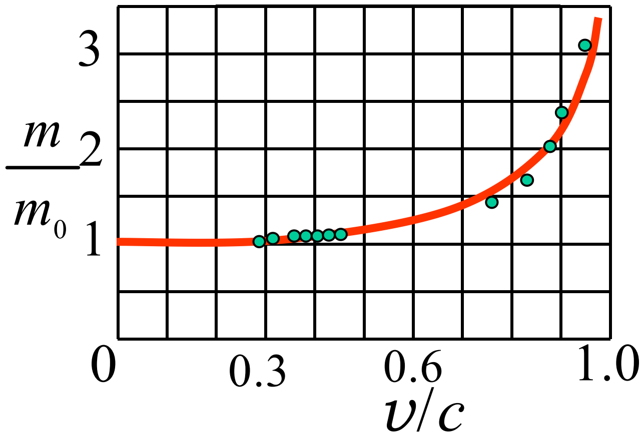
在一定外力作用下的物体，当它的速度越接近光速时，这个外力产生的加速度就越小。当物体速度趋于光速时，外力对它的作用不产生任何加速度。

在相对论力学中，质量一定不是常数。而是一个决定于速度的量。速度越大，质量也越大。当速度趋于光速时，质量趋向无限。

在狭义相对论中，这个定量的关系是

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其中v是物体的运动速度，m_0是物体静止时的质量，m称为物体以速度v运动时的质量



考夫曼实验结果：
电子质量随速度变化

讨论：(1) 普遍性：

$v \ll c$时，$m(v)=m_0$ $\Rightarrow$ 牛顿力学

$v \to c$ 时，$m \to \infty$ $\Rightarrow$ c 是极限速度

(2) 质量具有相对性

-----反映了物质与运动的不可分割性。

二、狭义相对论动力学方程

动量

当$\upsilon << c$时　$\upsilon/c \to 0$　$m = m_0$

$\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\vec{\upsilon}$$

光子：$m_0 = 0, \quad \upsilon = c$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

$$\because \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} + \vec{\upsilon}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$\because$当$\upsilon << c$时 $\Rightarrow$ $\vec{F} = m_0\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = m_0\vec{a}$

相对论动力学方程在洛伦兹变换下具有不变性。
在低速时，退化为经典力学。

§ 4.5 质量与能量的关系

一、相对论中的动能

在相对论中，认为动能定理仍适用。若取质点速率为零时动能为零。则质点动能就是其从静止到以 v 的速率运动的过程中，合外力所做的功。

$$E_K = \int_0^v \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_0^v \frac{d(m\vec{v})}{dt} \bullet d\vec{r} = \int_0^v \vec{v} \bullet d(m\vec{v})$$

$$\vec{v} \bullet d(m\vec{v}) = m\vec{v} \bullet d\vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} dm = mvdv + v^2 dm$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

将 $m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$ 两边求微分:

$$2mc^2dm - 2mv^2dm - 2m^2vdv = 0$$

$$c^2dm = v^2dm + mvdv$$

$$E_K = \int_{m_0}^{m} c^2dm = mc^2 - m_0c^2$$

即相对论动能公式。

当 $v \ll c$ 时：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\cdots \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

则：

$$E_K = mc^2 - m_0c^2$$

$$= m_0\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)c^2 - m_0c^2$$

$$= m_0c^2 + \frac{m_0}{2}v^2 - m_0c^2$$

$$= \frac{1}{2}m_0v^2$$

又回到了牛顿力学的动能公式。

二、质能关系

动能　　总能量　　静止能量

$$E_K = mc^2 - m_0c^2$$

$E_K = E - E_0$　动能为总能和静能之差。

$E = mc^2$　为相对论的质能关系式

在牛顿力学中，我们知道，如果一个力F对物体做功，功就转变为物体的动能。做功越大，物体的动能越高。可是，按照狭义相对论，当力F对物体作用时，最后并不增加物体的速度（因加速度趋于零），那么力做的功转变成什么了呢？

当v接近c时，外力F的作用不再使v有明显变化，但是却会使物体的质量m有所增加，作用时间越长，走的距离越远，m就越大（因m无上限）。所以，这个物体的能量的增加是和它的质量m的增加相联系的。

一个物体只要它的能量增加，其质量也将成比例地增加。

在经典力学中彼此独立的质量守恒和能量守恒定律在相对论中就结合起来，成了统一的“质能守恒定律”，它充分反映了物质和运动的统一性。由此公式我们可以看到，即使当物体静止时，它的能量E也不等于零，而等于 $E_0 = m_0 c^2$。这个能量称为静能。静能是通过相对论时空观的发展才被发现的一种能量的形态。原子能时代可以说是随同这一关系的发现而到来的。

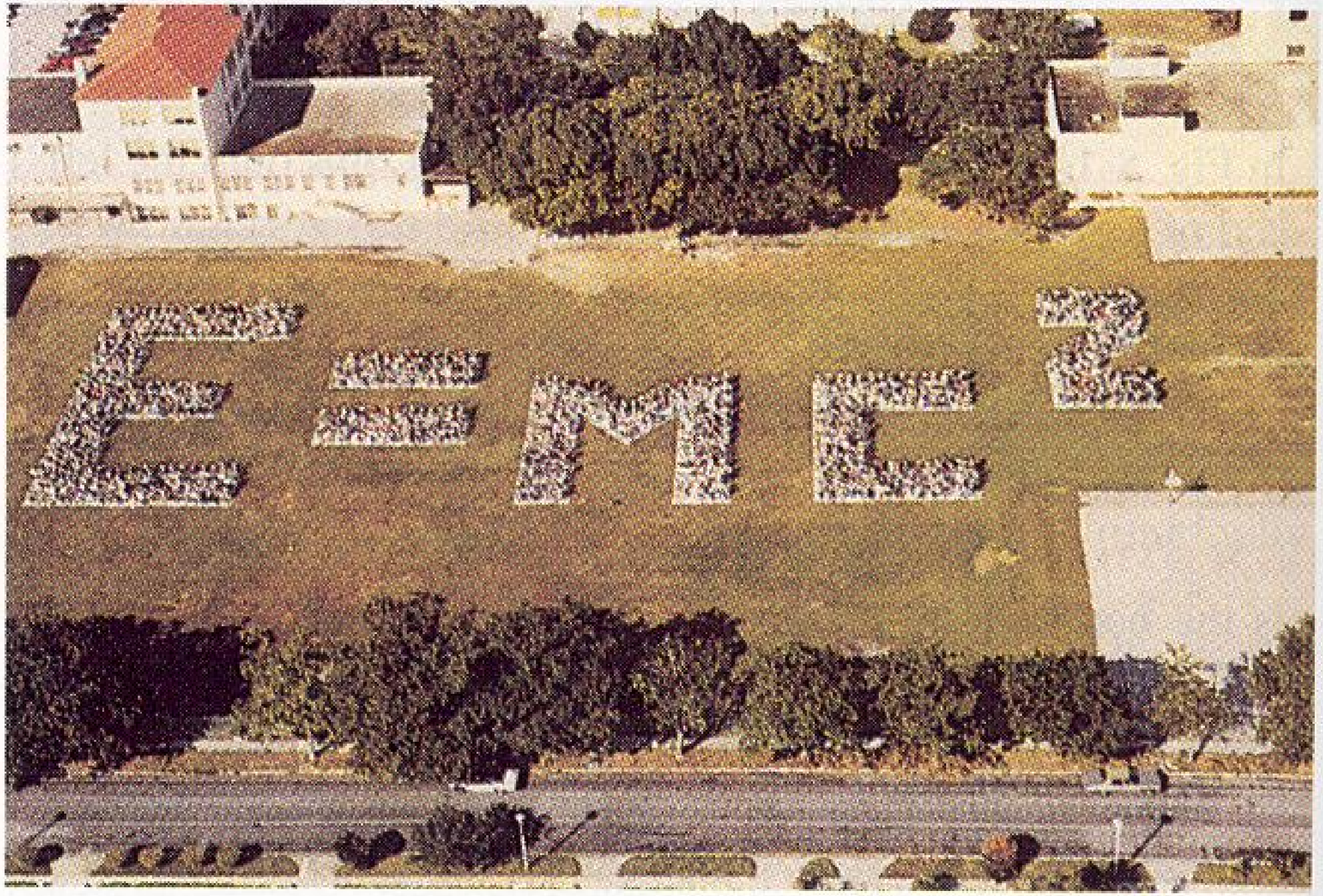


FIGURE 8-16 In 1979, students of Shenandoah Junior High School, in Miami, Florida, honored Albert Einstein on the 100th anniversary of his birth by spelling out his famous formula with their bodies.

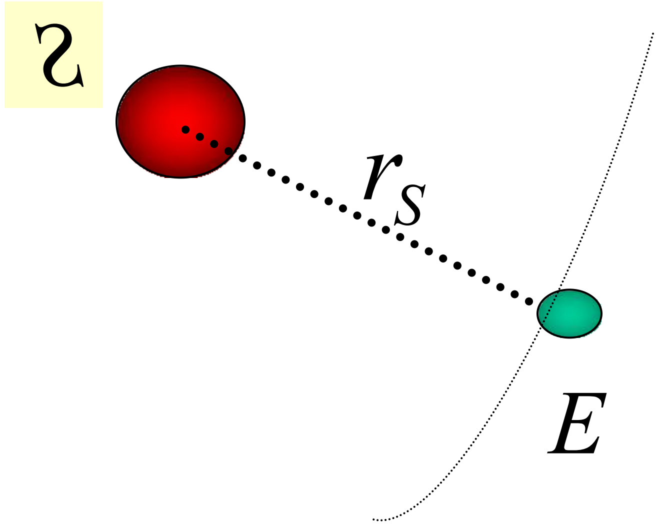
✹ 重要的实际应用

例1：太阳由于热核反应而辐射能量 →质量亏损

$$I = 1.74\times10^{3} W/m^{2}$$

$$P = 4\pi r_S^2 I = \cdots = 4.29\times10^{26} W$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx 4.29\times10^{26} J/s$$



$$\frac{|\Delta m|}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{c^2 \Delta t} = 5.4\times10^{9} kg/s$$

$$\frac{\Delta m}{m} = 8.5\times10^{-14}$$

核反应中：

反应前：　静质量 m_{01}　总动能E_{K1}

反应后：　静质量 m_{02}　总动能E_{K2}

能量守恒：$$m_{01}c^2 + E_{K1} = m_{02}c^2 + E_{K2}$$

因此：$$E_{K2} - E_{K1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

总动能增量

总静止质量的减小
质量亏损

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2$$

核反应中释放的能量相应于一定的质量亏损。

例2、在一种热核反应 $^{2}_{1}H+^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He+^{1}_{0}n$ 中各种粒子的静止质量为：

氘核：$m_1=3.3437\times10^{-27}kg$

氚核：$m_2=5.0049\times10^{-27}kg$

氦核：$m_3=606425\times10^{-27}kg$

中子：$m_4=1.6750\times10^{-27}kg$

求这一热核反应释放的能量是多少？

解：质量亏损为：

$$\Delta m_0 = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)$$
$$= [(3.3437 + 5.0049) - (6.6425 + 1.6750)] \times 10^{-27}$$
$$= 0.0311 \times 10^{-27} \text{kg}$$

相应释放的能量为：

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 0.0311 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 2.799 \times 10^{-12}$$

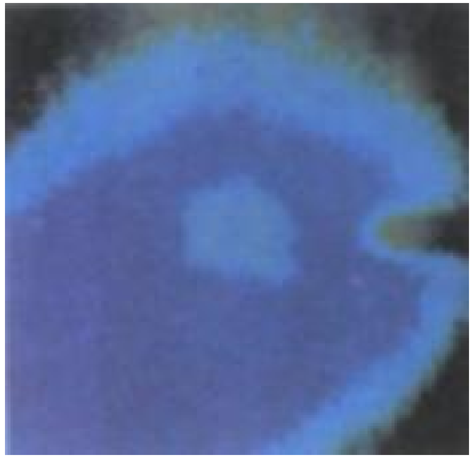
1kg这种核燃料所释放的能量为：

$$\frac{\Delta E}{m_1 + m_2} = \frac{2.799 \times 10^{-12}}{8.3486 \times 10^{-27}} = 3.35 \times 10^{14} \text{ J/kg}$$

这相当于同质量的优质煤燃烧所释放热量的1千多万倍！

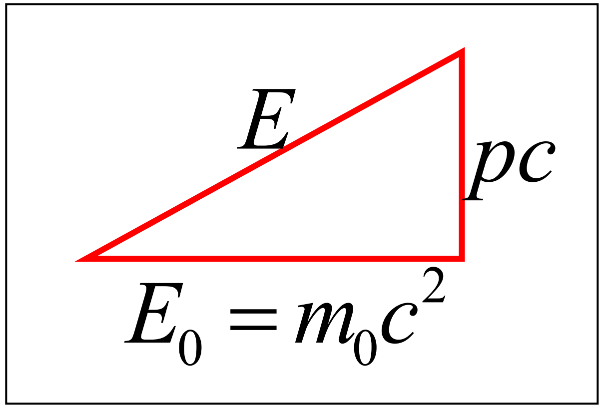






§ 4.6 能量与动量的关系

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{mc^2}\\ \vec{\boldsymbol{p}}&=\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}\end{aligned}} \Rightarrow \vec{\upsilon}=\frac{c^2}{E}\vec{p}$$



$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$

两边平方

动能为E_K的粒子： $E_K=E-E_0$

代入上式得： $E_k^2+2E_km_0c^2=P^2c^2$

$v<<c \Rightarrow E_k<<m_0c^2$ 略去E_k^2

$E_k=P^2/2m_0$ 回到了牛顿力学。

例2： 已知一个粒子的动能等于它本身的静止能量，求该粒子的速度。

解： 根据题意有，$E_K = m_0 c^2$

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2$$

从而可得粒子的速度为 $v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

例3： 设一质子以速度 $v=0.80c$ 运动。求其总能量、动能和动量.

解： 质子的静能 $E_0=m_0c^2=938\text{MeV}$

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{938}{(1-0.8^2)^{1/2}}\text{MeV}=1563\text{MeV}$$

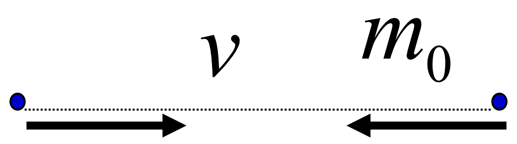
$$E_\text{k}=E-m_0c^2=625\text{MeV}$$

$$p=mv=\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=6.68\times10^{-19}\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

例4　两全同粒子以相同的速率相向运动，碰后复合

求：复合粒子的速度和质量

解：设复合粒子质量为M 速度为$\vec{V}$



碰撞过程，动量守恒

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V} \qquad \boxed{V = 0}$$

由能量守恒　$2mc^2 = M_0 c^2$

$$\boxed{M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} > 2\boldsymbol{m}_0$$

损失的能量转换成静能

作业：

4.25　　4.31

4.30　　4.33

例：下列说法中哪些是正确的?

(1)一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速。

(2)质量、长度、时间的测量结果都是随物体与观察者的相对运动状 态而改变的。

(3)在一惯性系中发生于同一时刻，不同地点的两个事件在其他一切 惯性系中也是同时发生的。

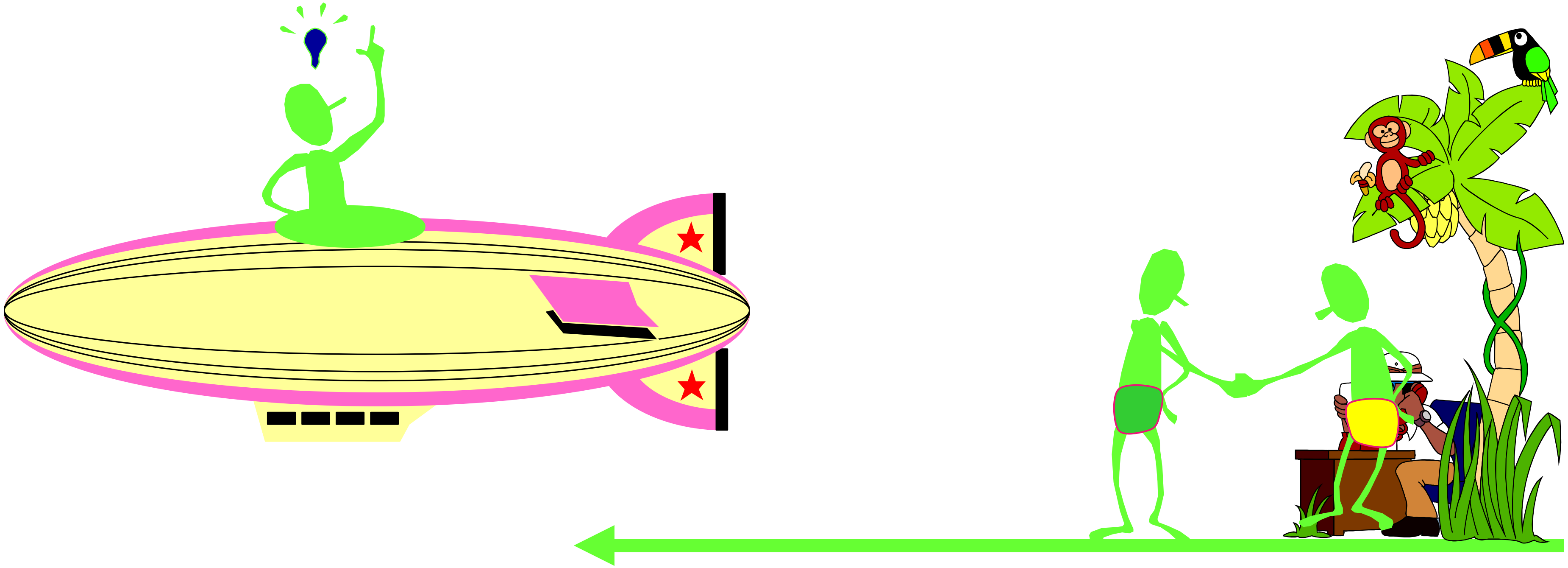
(4)惯性系中的观察者观察一个与他作匀速相对运动的时钟时，会看 到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得慢些。

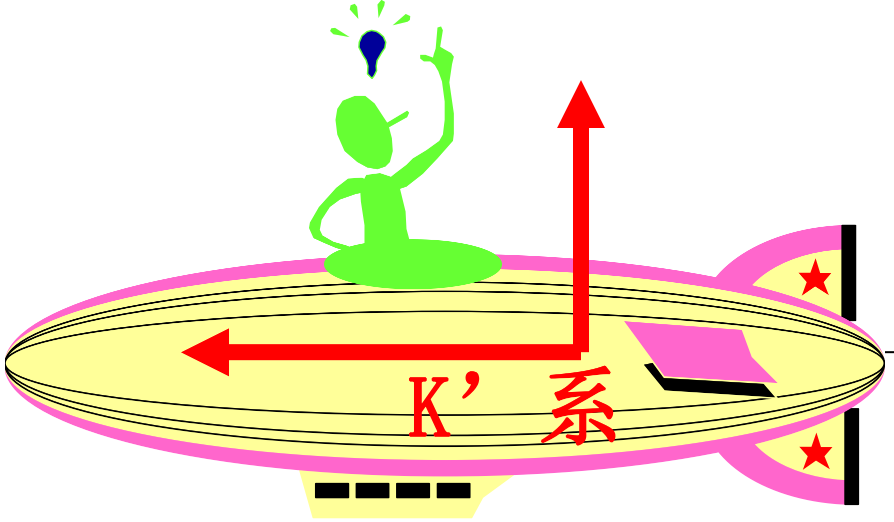
A: (1), (3), (4)　　B: (1), (2), (4)

C: (1), (2), (3)　　D: (2), (3), (4)

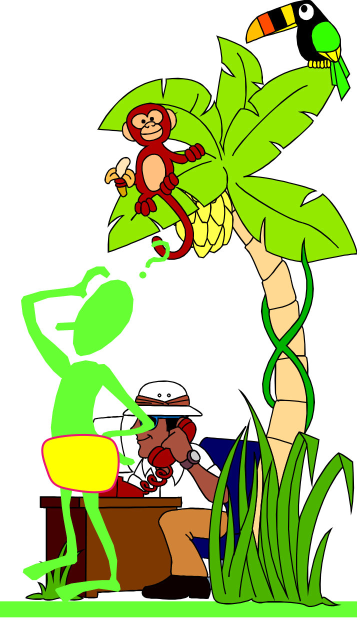
双生子佯谬.(Twin paradox)

一对双生兄弟:“明明”和“亮亮”,在他们20岁生日的时候,明明坐宇宙飞船去作一次太空旅游,飞船一去一回作匀速直线运动,速度为0.9998C.明明在天上过了一年,回到地球时,亮亮已多大年龄?





取飞船为K’系
地球为K系，
飞船飞出为事件“1”，飞回为
事件“2”



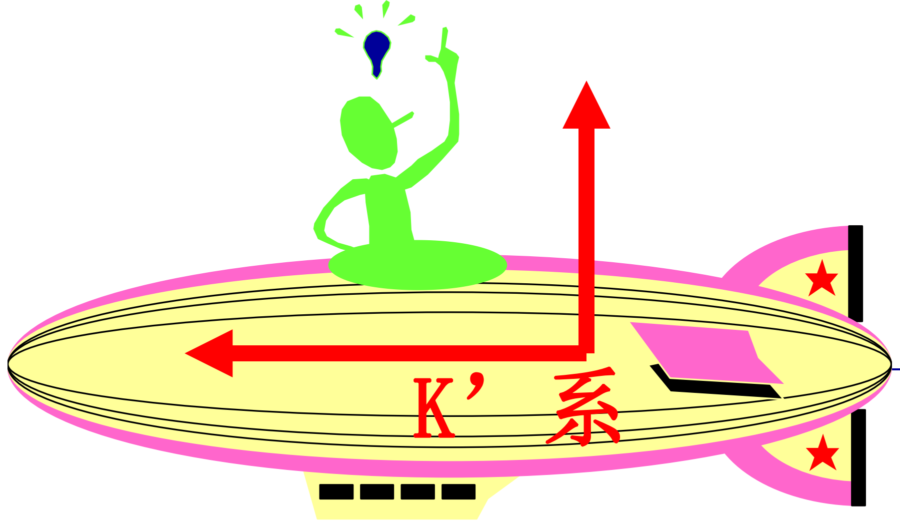
对K’系：

$$\Delta t'_0 = t'_2 - t'_1 = 1\text{年}$$

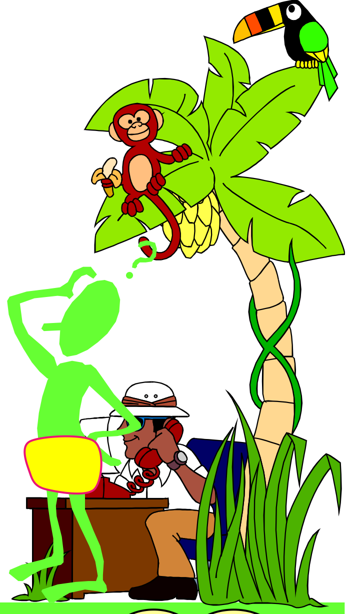
对K系：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{1\text{年}}{\sqrt{1-0.9998^2}} = 50\text{年}$$



取飞船为K’ 系
地球为K系，
飞船飞出为事件“1”，飞回为事件“2”



对K系：

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 = 1\text{年}$$

对K’ 系：

$$\Delta t'_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$= \frac{1\text{年}}{\sqrt{1 - 0.9998^2}} = 50\text{年}$$

双生子佯谬

明明和亮亮到底是谁年轻呢？

人们迷惑不解。有人甚至怀疑相对论

解释： 不是相对论有问题。是人们不恰当地应用了相对论。

狭义相对论只适用于惯性系，飞船一去一回要加速和减速，不是惯性系，因此飞船上不能用狭义相对论的变换公式来计算地球上所经历的时间，所以飞船上得出的结论是不正确的。地球上亮亮年老的结论是正确的。

1971年，美国空军用两组Cs（铯）原子钟做实验。发现绕地球一周的运动钟变慢了203±10ns，而按广义相对论预言运动钟变慢184 ± 23 ns，在误差范围内理论值和实验值一致，验证了孪生子效应。