常数项级数审敛法

在研究级数时，中心问题是判定级数的敛散性，如果级数是收敛的，就可以对它进行某些运算，并设法求出它的和或和的近似值但是除了少数几个特殊的级数，在一般情况下，直接考察级数的部分和是否有极限是很困难的，因而直接由定义来判定级数的敛散性往往不可行，这就要借助一些间接的方法来判定级数的敛散性，这些方法称为审敛法

对常数项级数将分为正项级数和任意项级数来讨论

一、正项级数及其审敛法

1. 定义：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数. 这种级数非常重要,
以后我们将会看到许多级数的敛散性判定问题
都可归结为正项级数的收敛性问题

2. 正项级数收敛的充要条件：$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$

部分和数列$\{s_n\}$为单调增加数列.

定理

正项级数收敛$\Leftrightarrow$部分和所成的数列s_n有界.

3.比较审敛法 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，

且$u_n \le v_n \ (n=1,2,\cdots)$, 若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

反之，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

证明 (1) 设$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ $\because u_n \le v_n$,

且$s_n = u_1+u_2+\cdots+u_n \le v_1+v_2+\cdots+v_n$

即部分和数列有界 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 设 $s_n \to \infty \, (n \to \infty)$ 且 $u_n \le v_n$,

则 $\sigma_n \ge s_n \to \infty$ 不是有界数列

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散. 定理证毕.

推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛(发散)

且 $v_n \le k u_n (n \ge N)(k u_n \le v_n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛(发散).

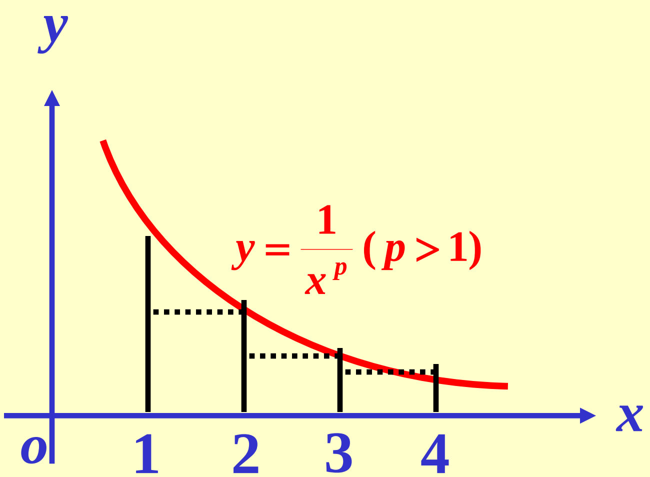
比较审敛法的不便：须有参考级数.

例 1 讨论 P–级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解 设 $p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则 $P-$级数发散.

设 $p>1$, 由图可知 $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$



$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n \frac{dx}{x^p} = 1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1+\frac{1}{p-1}$$

即s_n有界，　　则$P-$级数收敛.

$$P-\text{级数}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，　收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时，　发散}\end{cases}$$

重要参考级数： 几何级数，P-级数，调和级数.

例 2 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

证明 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散,

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

比较审敛法是一基本方法，虽然有用，但应用起来却有许多不便，因为它需要建立定理所要求的不等式，而这种不等式常常不易建立，为此介绍在应用上更为方便的极限形式的比较审敛法

4. 比较审敛法的极限形式:

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当$0<l<+\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

证明 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$ 对于 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}>0$,

$\exists N$, 当 $n>N$ 时, $l-\dfrac{l}{2}<\dfrac{u_n}{v_n}<l+\dfrac{l}{2}$

即 $\dfrac{l}{2}v_n<u_n<\dfrac{3l}{2}v_n \quad (n>N)$

由比较审敛法的推论, 得证.

5. 极限审敛法：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,

如果 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$（或 $\lim_{n\to\infty} nu_n = \infty$），

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

如果有 $p > 1$，使得 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n$ 存在,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 3 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$；

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$ 原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}} = 1,$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛，故原级数收敛.

6. 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法)：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ数或$+\infty$)

则$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$时级数发散； $\rho=1$时失效.

证明　当ρ为有限数时，对$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N$，当$n>N$时，有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$,

即 $\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon\quad(n>N)$

当$\rho<1$时，取$\varepsilon<1-\rho$，使$r=\varepsilon+\rho<1$,

$u_{N+2}<ru_{N+1}$，$u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1}$，$\cdots$,

$u_{N+m}<r^{m-1}u_{N+1}$，而级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}r^{m-1}u_{N+1}$收敛,

$\therefore \sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{N+m}=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_u$收敛，收敛

当$\rho>1$时，取$\varepsilon<\rho-1$，使$r=\rho-\varepsilon>1$,

当$n>N$时，$u_{n+1}>ru_n>u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. 发散

比值审敛法的优点：不必找参考级数. 直接从级数本身的构成——即通项来判定其敛散性

两点注意:

1. 当$\rho = 1$时比值审敛法失效;

例 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}(\rho = 1)$

2. 条件是充分的, 而非必要.

例 $\because u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n,$

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛,

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = a_n,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{6},$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \dfrac{3}{2},\qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例 4　判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

解　(1) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \dfrac{10^n}{n!} = \dfrac{n+1}{10} \to \infty \ (n \to \infty)$,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)} = 1$,

比值审敛法失效, 改用比较审敛法

$\because \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n} < \dfrac{1}{n^2}$, $\because$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

例5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{6}$

解　由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在，检比法失效

而 $\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{6}\le\frac{n}{3^n}$　对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

由检比法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛

故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{6}$ 收敛

例6 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x>0)$

解 $$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{x}{e}$$

由检比法得 $x<e$ 级数收敛

$x>e$ 级数发散

$x = e$ 检比法失效，但

$$e > (1+\frac{1}{n})^n \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n$$

即后项大于前项　　故级数发散

7. 根值审敛法（柯西判别法）：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，如果$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(ρ为数或$+\infty$)，则$\rho < 1$时级数收敛；

$\rho > 1$时级数发散；$\rho = 1$时失效.

证明 (1) $\rho<1$ 取 $0<\varepsilon_0<1-\rho$

则 $r=\rho+\varepsilon_0<1$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ 知 $\exists N$，使当$n>N$时

$\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon_0=r$

$\Rightarrow\quad u_n<r^n \qquad (n>N)$

由 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}r^n$ 收敛及比较审敛法得

$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 收敛

$\Rightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

(2) $\rho > 1$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$ 知 $\exists N$，使当$n > N$时

$\sqrt[n]{u_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n > 1$

故 u_n 不趋于 0 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(3) $\rho = 1$ 不能判定

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

例如, 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$,

$$\because \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

级数收敛.

二、交错级数及其审敛法

定义: 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

莱布尼茨定理　如果交错级数满足条件:

（ⅰ）$u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$;（ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值

$|r_n| \leq u_{n+1}$.

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0,$

$$\because s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

数列 s_{2n} 是单调增加的,

$$\text{又 } s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

$$\leq u_1$$ 数列 s_{2n} 是有界的,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1. \qquad \because \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$$

$\therefore$ 级数收敛于和 s, 且 $s \le u_1$.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

满足收敛的两个条件, $\therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

定理证毕.

例 7 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 的收敛性.

解 $\because \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$

故函数 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减, $\therefore u_n > u_{n+1}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$ 原级数收敛.

证明 u_n 单调减的方法

$u_{n+1} - u_n \overset{?}{<} 0 \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \overset{?}{<} 1$

$u_n = f(n)$ 考察 $f'(x) \overset{?}{<} 0$

三、绝对收敛与条件收敛

定义： 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证明 令 $v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1,2,\cdots)$,

显然 $v_n \geq 0$, 且 $v_n \leq |u_n|$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,

又$\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(2v_n - |u_n|)$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

上定理的作用：

任意项级数 $\Longrightarrow$ 正项级数

定义：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

例 8 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

解 $\because \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛,

故由定理知原级数绝对收敛.

将正项级数的检比法和检根法应用于判定任意项级数的敛散性可得到如下定理

定理　设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \qquad (\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho)$$

则 $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

$\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

$\rho = 1$ 可能绝对收敛，可能条件收敛，也可能发散

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

注意

一般而言，由 $\sum_{i=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，并不能推出

$\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ 发散　　如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散　　但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛

如果 $\sum_{i=1}^{\infty}|u_n|$ 发散是由检比法和检根法而审定

则 $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ 必定发散　这是因为检比法与检根法

审定级数发散的原因是通项不趋向于0

由 $|u_n| \not\to 0 \Rightarrow u_n \not\to 0$

四、小结

<table>
<tr><th></th><th>正 项 级 数</th><th>任意项级数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">审敛法</td><td colspan="2">1. 若 $S_n \to S$,则级数收敛;
2. 当 $n \to \infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散;
3.按基本性质;</td></tr>
<tr><td>4.充要条件
5.比较法
6.比值法
7.根值法</td><td>4.绝对收敛
5.交错级数
(莱布尼茨定理)</td></tr>
</table>

思考题

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛？反之是否成立？

思考题解答

由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，可以推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛，

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

反之不成立．例如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

练 习 题

一、填空题:

1、$p-$级数当________时收敛, 当________时发散;

2、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的后项与前项之比值的根等于ρ,

则当________时级数收敛; ________时级数发散;

______________时级数可能收敛也可能发散 .

二、用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n} \qquad (a>0)$.

三、用比值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

四、用根值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

五、判别下列级数的收敛性:

1、$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; 3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}\quad(a>0)$.

六、判别下列级数是否收敛?如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

2、$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n-\ln n}$.

七、若 $\lim_{n\to+\infty} n^{2}u_{n}$ 存在, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n}$ 收敛 .

八、证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^{n}}=0$.

练习题答案

一、1、$p > 1, p \le 1$；

2、$\rho < 1, \rho > 1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$), $\rho = 1$.

二、1、发散； 2、发散.

三、1、发散； 2、收敛.

四、1、收敛； 2、收敛.

五、1、发散； 2、收敛； 3、$\begin{cases} a > 1, \text{收敛}; \\ 0 < a < 1, \text{发散}; \\ a = 1, \text{发散}. \end{cases}$

六、1、绝对收敛； 2、条件收敛； 3、条件收敛.