第二章 拉格朗日方程

1 第二类拉格朗日方程

2 拉格朗日方程的应用

3 耗散力与陀螺力

4 能量积分与循环积分

1. 第二类拉格朗日方程

(1) 动力学普遍方程

质点系由n个质点组成，受到s个完整约束，系统自由度为$k=3n-s$。

取广义坐标q_1、q_2、…、q_k，任一质点的矢量坐标通过广义坐标表示为$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_k;t)$。

质点的质量为m_i，受到主动力$\boldsymbol{F}_i$与约束力$\boldsymbol{F}_{ci}$作用，再加上惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi}=-m_i\boldsymbol{a}_i$。

根据达朗贝尔原理，质点系的所有主动力、约束力和惯性力在形式上组成平衡力系，满足平衡条件。

设系统受到的约束都是双面、定常、理想的，由虚位移原理得平衡条件为，质点系的所有主动力和惯性力在虚位移上所作虚功的总和等于零

$$\sum \delta W=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{gi})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

动力学普遍方程/达朗贝尔—拉格朗日方程

动力学普遍方程的解析表达式：

$$\sum \delta W=\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(F_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(F_{iz}-m_i z_i)\delta z_i]=0$$

建立了质点系的一般动力学关系，形式上可进一步改进

如何更进一步？

- 动力学普遍方程也可以用，但惯性力比较多时会比较麻烦。
- 有没有一劳永逸的把虚位移甩掉，从而得出力学系统在广义坐标描述下所具有的最一般形式的动力学方程？
- 在完整约束的情况下，这样得出的动力学方程叫拉格朗日方程；在非完整约束时，利用拉格朗日乘子法也能得出相应的动力学方程。

(2)广义力表示的普遍方程

广义虚位移δq_1、δq_2、…、δq_k相互独立，将质点系各个质点的虚位移通过广义虚位移表示。主动力的虚功总和

$$\sum \delta W_a = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j$$

惯性力的虚功总和

$$\sum \delta W_g = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} Q_{gj} \delta q_j$$

- Q_{gj}: 质点系相应于广义坐标q_j的广义惯性力，是一个代数量

$$Q_{gj} = \sum_{i=1}^{n} F_{gi} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i a_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

将主动力与惯性力虚功的表达式代入动力学普遍方程，得到

$$\sum \delta W = \sum_{j=1}^{k} (Q_j + Q_{gj}) \delta q_j = 0$$

广义虚位移δq_1、δq_2、…、δq_k独立且任意

$$Q_j + Q_{gj} = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

上式表明质点系的动力学普遍方程也可表示为广义力与广义惯性力之和等于零。它是代数方程，其数目等于系统的自由度数。

(3) 拉格朗日方程

一般地，质点系各个质点的矢量坐标可表示为广义坐标的函数，$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_k;t)$。质点速度相应地通过广义速度表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

两边关于广义速度 $\dot{q}_j$ 求偏导数，得到一个恒等关系式

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

消点规则

质点速度关于广义坐标的导数为

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l \partial q_j}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

质点矢量坐标关于广义坐标的导数仍为广义坐标的函数，$\partial r_i/\partial q_j=\partial r_i/\partial q_j(q_1,q_2,\cdots,q_k;t)$。再将它关于时间求全导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_l+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

比较两等式，即得另一个恒等关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$$

交换关系

利用恒等式，可将广义惯性力表示为

$$Q_{gi} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

则广义惯性力

$$Q_{gi} = -\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

$$= \quad -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)$$

$$= \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

广义惯性力可以通过动能的导数表达，形式简便，物理意义明确

将广义惯性力代入动力学普遍方程在广义坐标空间的形式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

第二类拉格朗日(Lagrange)方程/拉格朗日方程

拉格朗日方程形式简洁、便于应用，可用于建立质点系的一般动力学关系，特别是质点与约束均较多的复杂系统。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 它是常微分形式的方程，其数目等于系统的自由度数。二阶常微分方程组，通常是非线性的
- 该方程由系统动能与广义力确定，它们都是代数量、计算方便。 拉格朗日方程是标量方程
- 对于受理想约束的系统，该动力学方程不包含未知的约束力，故没有“多余”的动力学关系。是最少量方程
- 如果需求约束力，可解除相应的约束，将约束力转化为主动力，从而通过广义力进入拉格朗日方程，同时系统的自由度或方程数也随之增加。

只需要分析速度，不需分析加速度

基本不需要“技巧”