
机器人导论

—复习课

朱秋国

浙江大学 控制科学与工程学院

Email: qgzhu@zju.edu.cn

2021年4月23日



1. 机器人驱动原理

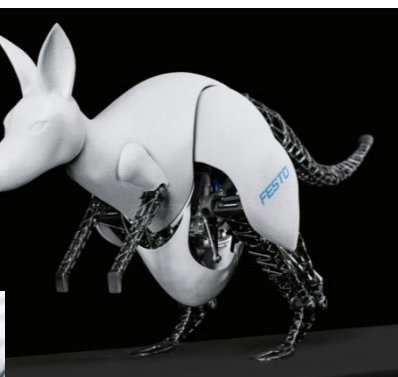
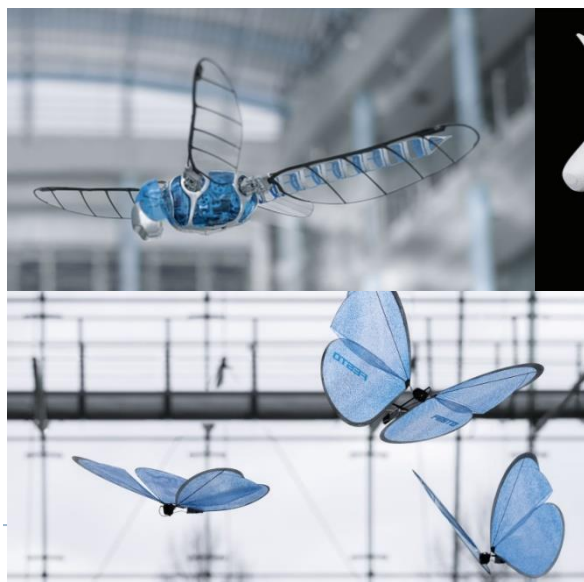
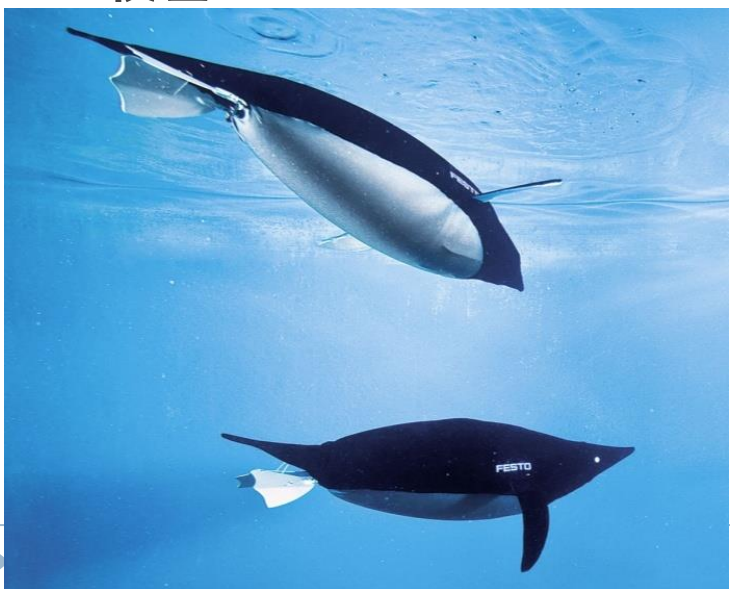
▶ 电机驱动

- ▶ 电机是日常生活中最常用和最普遍的驱动方式。
- ▶ 优点：控制调节简单、稳定性较好。
- ▶ 缺点：力矩小、刚度低，常常需要配合减速器使用。
- ▶ 典型应用：工业机器人、服务机器人等。



► 气压驱动

- 气压驱动以空气压缩为动力源，也是机器人驱动的一种重要形式。
- 气动式主要有气缸、气阀、管路等元件组成。
- 优点：气源获得方便、成本低、动作快。
- 缺点：输出功率小，体积大。一般而言，其工作噪声较大、控制精度较差。



▶ 液压驱动

- ▶ 液压式主要有液压缸、液压马达、阀等组成。
- ▶ 优点：重量轻、尺寸小、动作平稳、快速性好、产生的力/力矩非常大。
- ▶ 缺点：易漏油、维护困难；不确定性和非线性因素多，控制和校正不如电气式方便。
- ▶ 在机器人中的应用较少，但正在逐步增加。



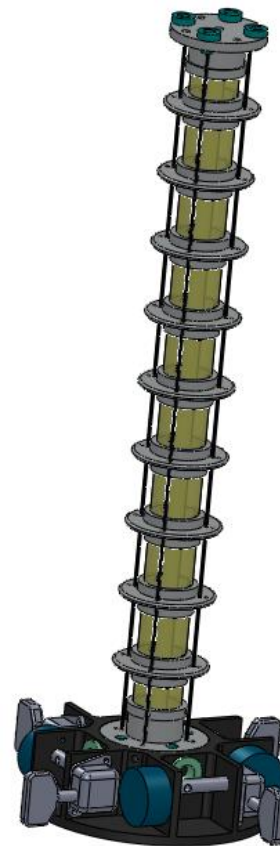
► 新型驱动

软体机器人的驱动方式主要取决于所使用的智能材料，一般有：

- 介电弹性体（DE）
- 形状记忆合金（SMA）
- 形状记忆聚合物（SMP）
- 离子聚合物金属复合材料（IPMC）



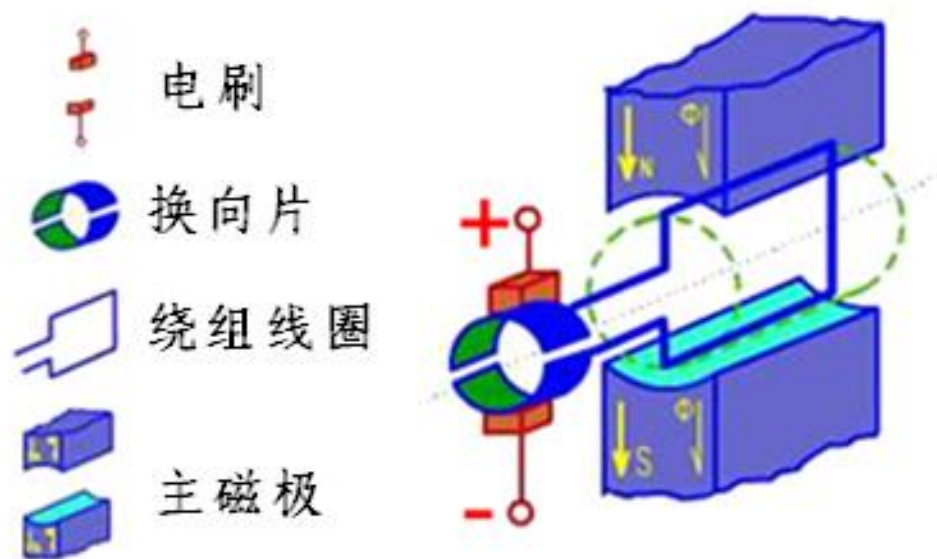
软体机器人



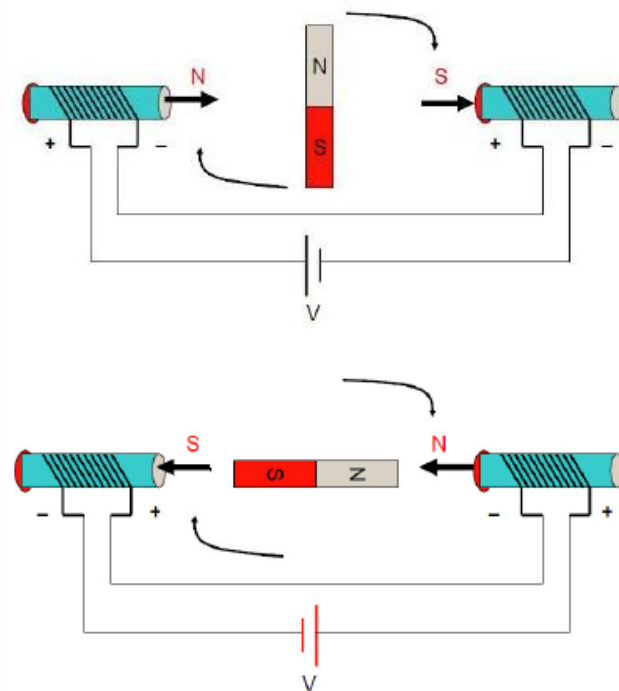
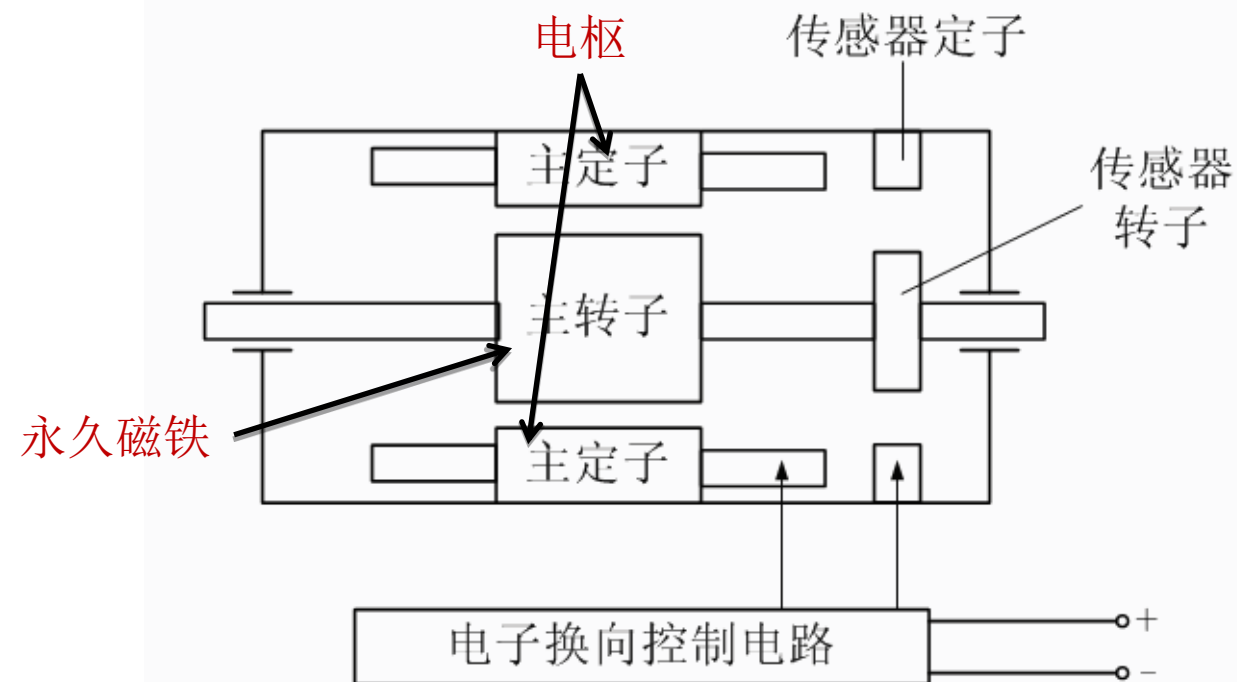
SMA柔性脊柱

直流有刷电机

有刷直流电机结构及工作原理



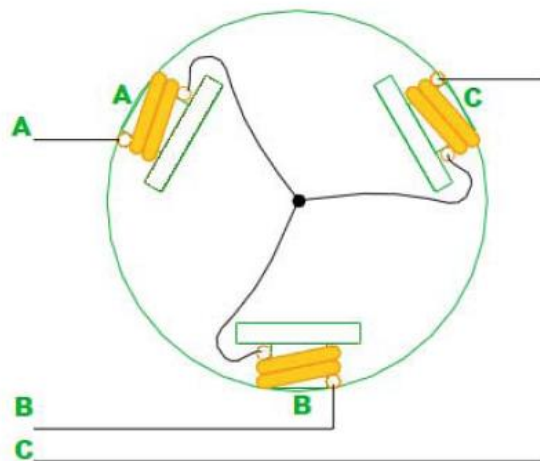
- 有刷直流电机由**磁极**、**电枢绕组**、**电刷**和**换向片**组成。
 - 磁极在工作中固定不动，称为**定子**（用于产生磁场）
 - 电枢绕组是转动部分，称为**转子**



- 1、无刷直流电机由**电机本体**、**位置传感器**、**电子换向电路**三大部分组成。
- 2、电机主体由主定子、主转子组成。**主转子是永久磁铁**，**主定子是电枢**。当定子绕组通直流电时，与转子作用产生电磁转矩，定子电流必须根据转子的位置变化适时换向，才能获得单一方向的电磁转矩，使电机转动。

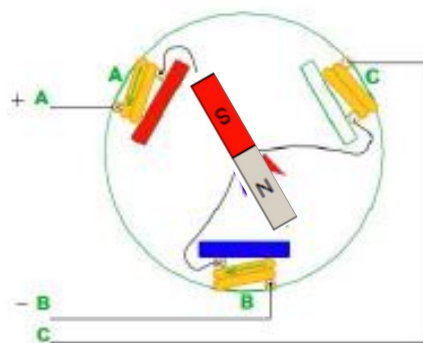
无刷直流电机结构

一般而言，无刷电机的绕组有星形联结方式和三角联结方式，而三相星形联结（Y型）的二二导通方式最为常见。我们以三相3绕组2极（1对极）为例：

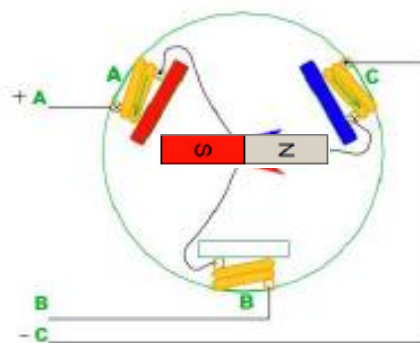


整个电机就引出三根线A, B, C。当它们之间两两通电时，有6种情况，分别是AB, AC, BC, BA, CA, CB。

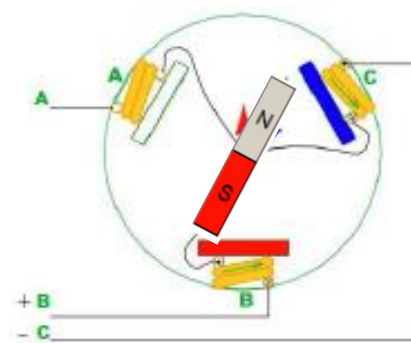
红色和蓝色分别表示磁感应强度的方向



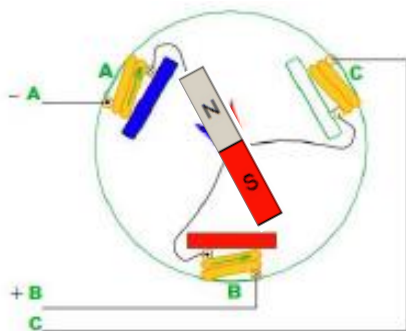
(a) AB 相通电情形



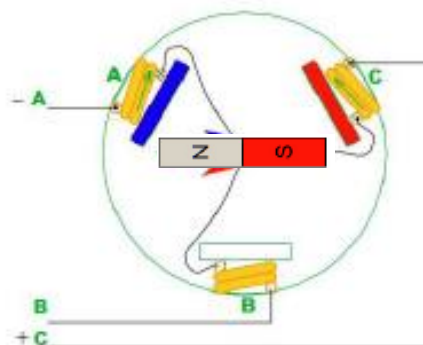
(b) AC 相通电情形



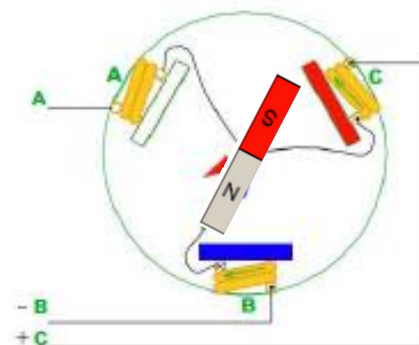
(c) BC 相通电情形



(d) BA 相通电情形



(e) CA 相通电情形



(f) CB 相通电情形

注意：换相只与转子位置有关，与速度无关

三个最重要的物理量

电枢电动势 E_a 、电磁转矩 T 和电磁功率 P

$$E_a = K_e n$$

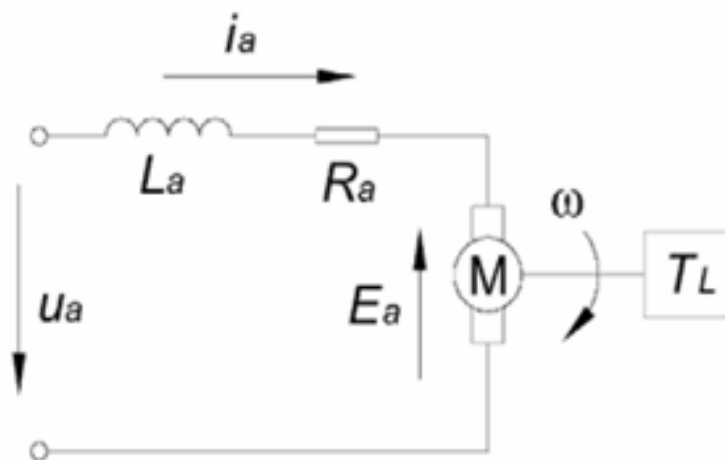
$$T = K_m I$$

$$P = E_a \cdot I = T \cdot \omega$$

K_e 是速度常数

K_m 是力矩常数

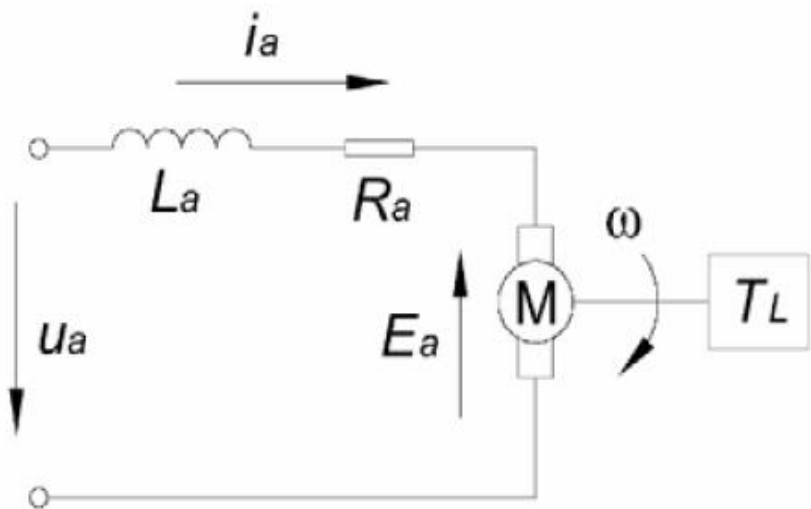
n 是电机转速， I 是电枢电流， ω 是角速度



- 转速与感应电动势成正比
- 力矩与电流大小成正比

转矩和转速的关系

直流伺服电机电枢等效电路



$$U = E_a + I \cdot R_a = K_e \cdot n + I \cdot R_a$$

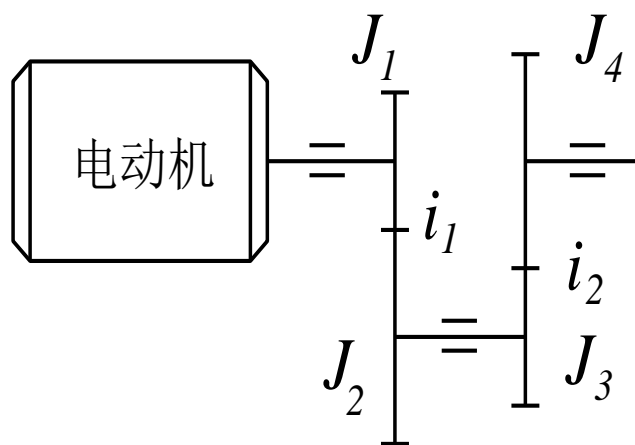
$$n = \frac{U - I \cdot R_a}{K_e}$$

简单起见，可以忽略电枢回路中的调节电阻。

检查电机是否烧坏，可以通过测量电机绕组的值是否正常来判断。

转动惯量的匹配

负载的转动惯量折合到主动轴上时，从动轴上的转动惯量和阻尼系数都要除于传动比的平方，负载转矩除于传动比。



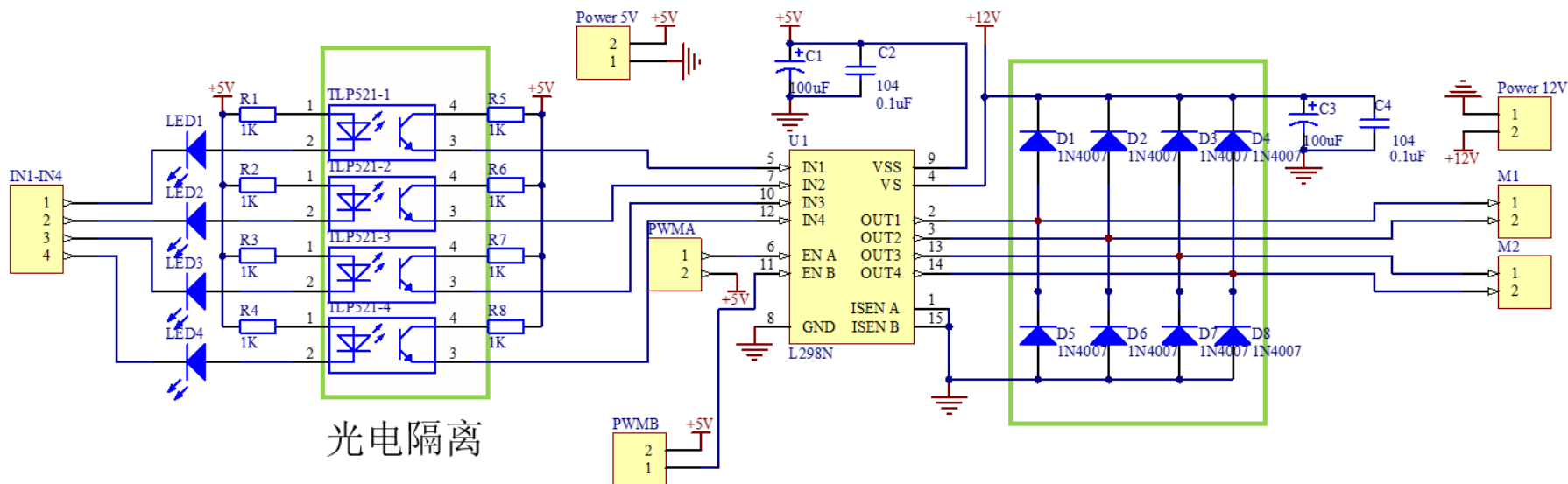
$$J_L = J_1 + \frac{J_2 + J_3}{i_1^2} + \frac{J_4}{i_1^2 i_2^2}$$

对于直流电机而言，高动态的伺服系统，一般要求：
电机的转动惯量 $J_M < (2-3)J_L$ (J_L 为负载的等效转动惯量)

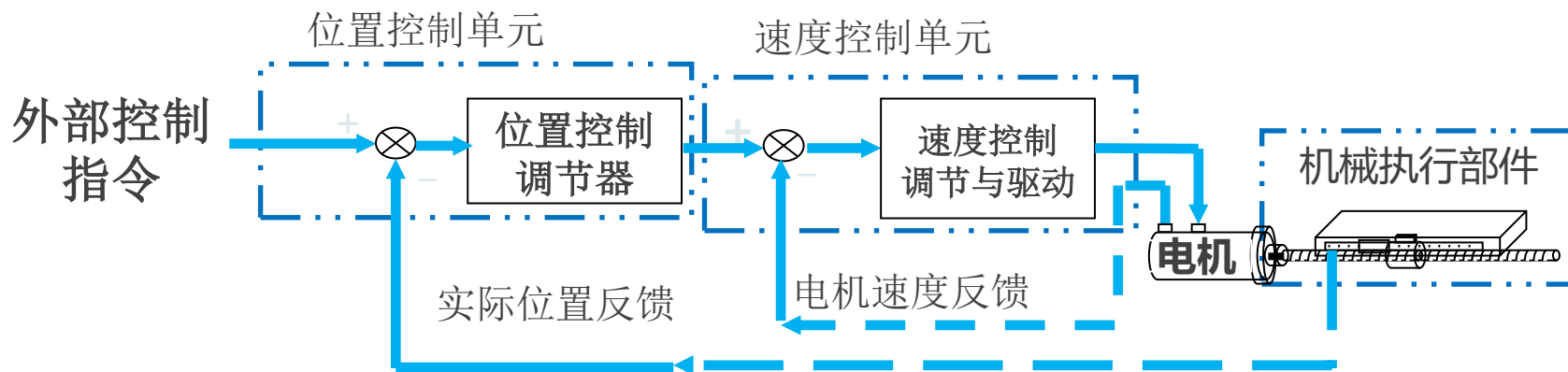


驱动电路与模块

▶ 驱动电路

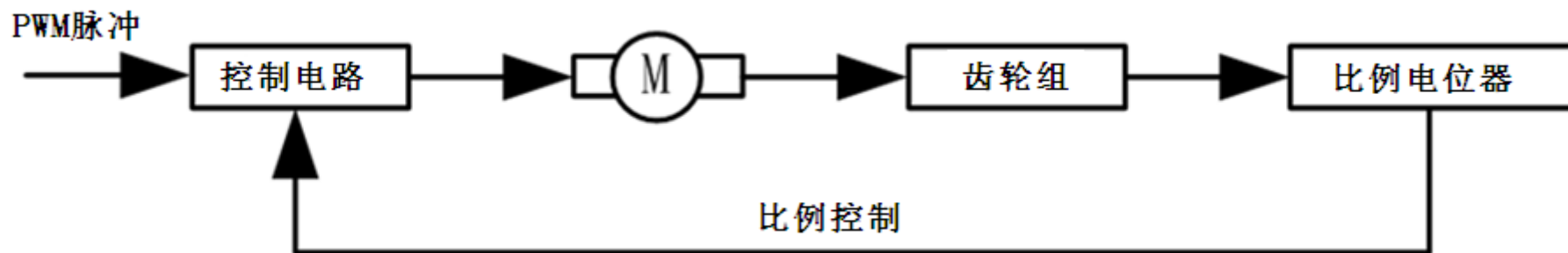


闭环伺服系统



闭环控制系统的特点是精度较高，但系统的结构较复杂、成本高，还有系统稳定性的问题。

模拟舵机



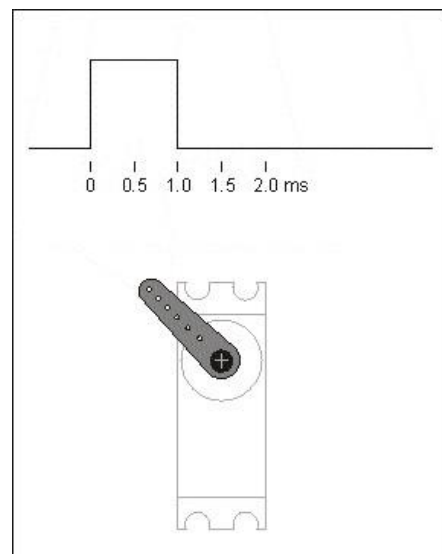
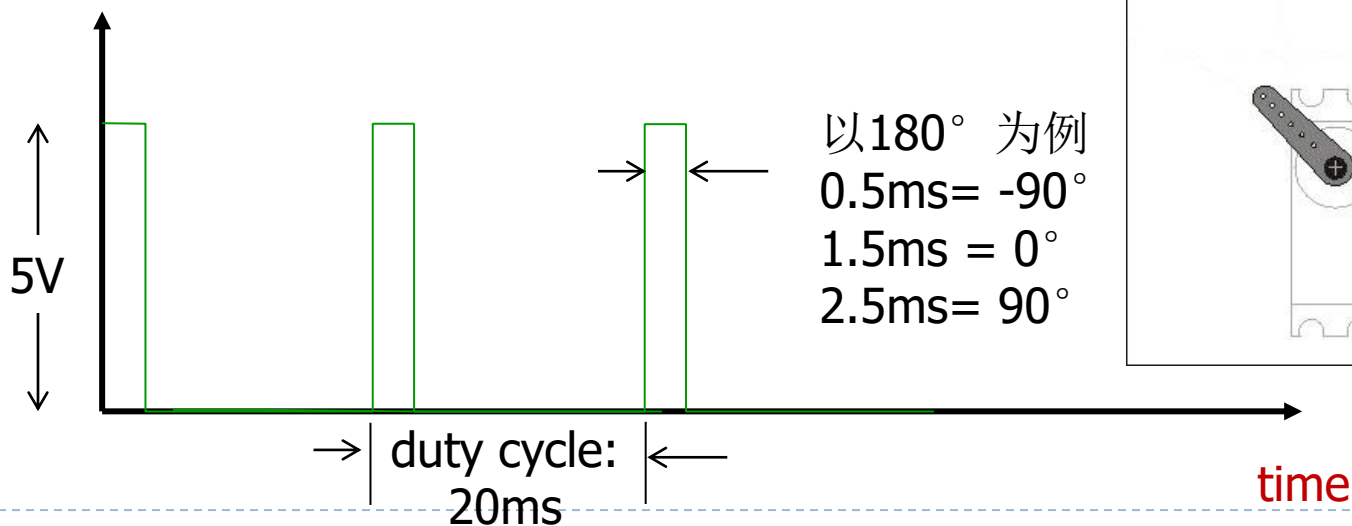
舵机系统原理图

根据上图，请问舵机采用的是什么控制？

舵机位置控制

- ← 舵机转动角度由**PWM**（脉冲宽度调制）信号的占空比来实现；
- ← **PWM**周期为**20ms**，脉宽分布在**0.5~2.5ms**之间；
- ← 不同脉宽对应不同转角位置。

黄色信号线的电压值



思考题：

请描述一下电机转子由静止状态加速到额定转速的过程？

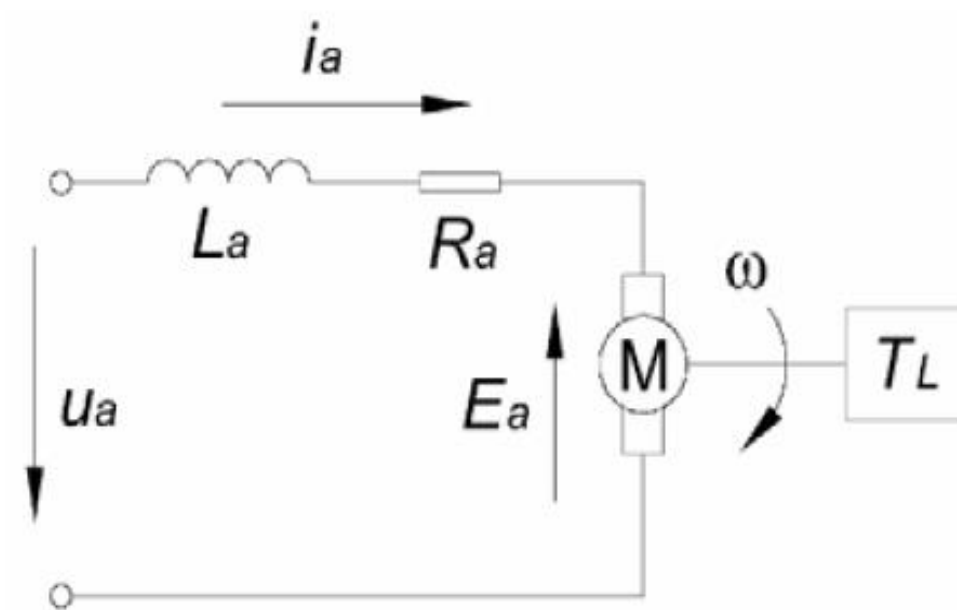


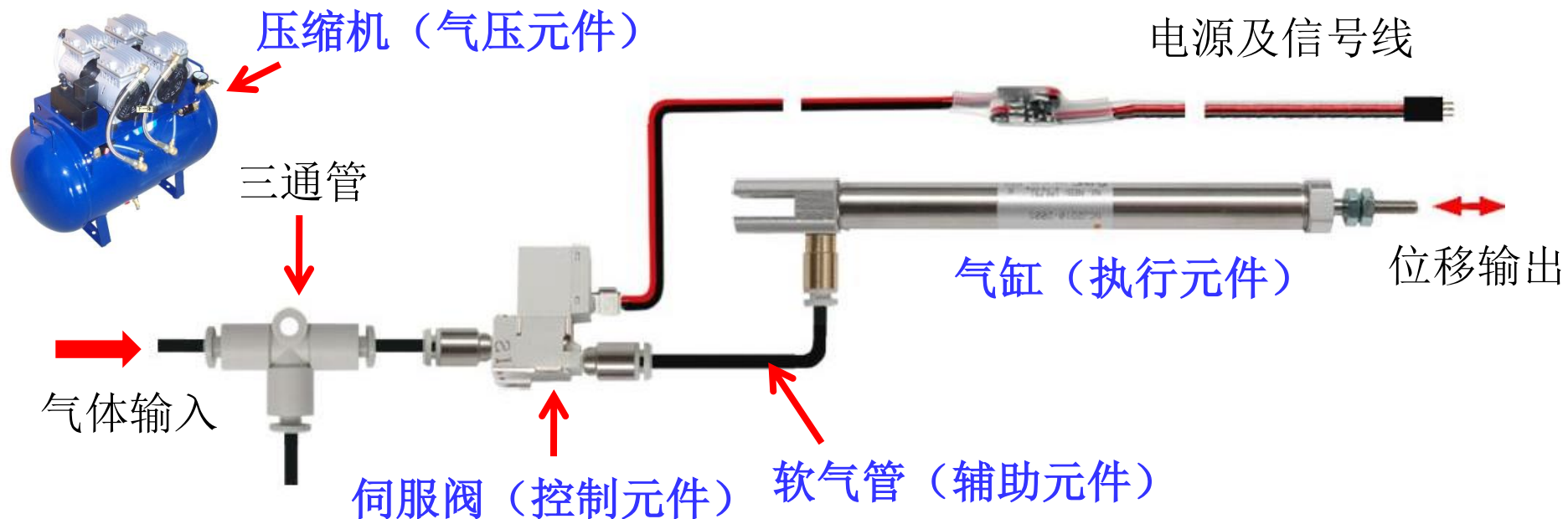
图. 直流电机简化模型

思考题：

你认为一个机器人应该具备哪些主要特征？
请列举不少于**3**种



机器人用简易气动设计



一个简易的气动系统由：气压元件、控制元件、执行元件和辅助元件组成。使用气动要注意安全。

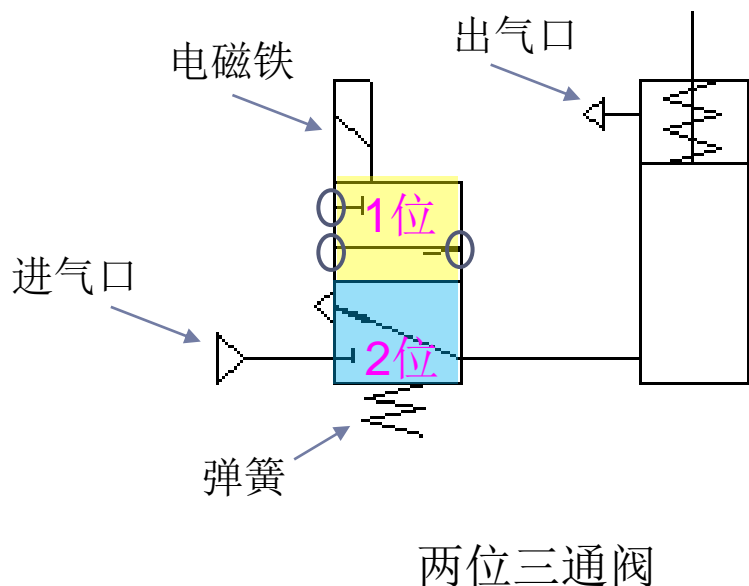
气动驱动系统

- ▶ **气压元件：**气源装置，其功能是将原动机输入的机械能转换成流体的压力能，为系统提供动力
 - ▶ **执行元件：气缸、气马达，**功能是将流体的压力能转换成机械能，输出力和速度或转矩和转速），以带动负载进行直线运动或旋转运动
 - ▶ **控制元件：压力、流量和方向控制阀，**作用是控制和调节系统中流体的压力、流量和流动方向，以保证执行元件达到所要求的输出力（或力矩）、运动速度和运动方向
 - ▶ **辅助元件：**保证系统正常工作所需要的辅助装置，包括**管道、管接头、储气罐、过滤器和压力计**
-

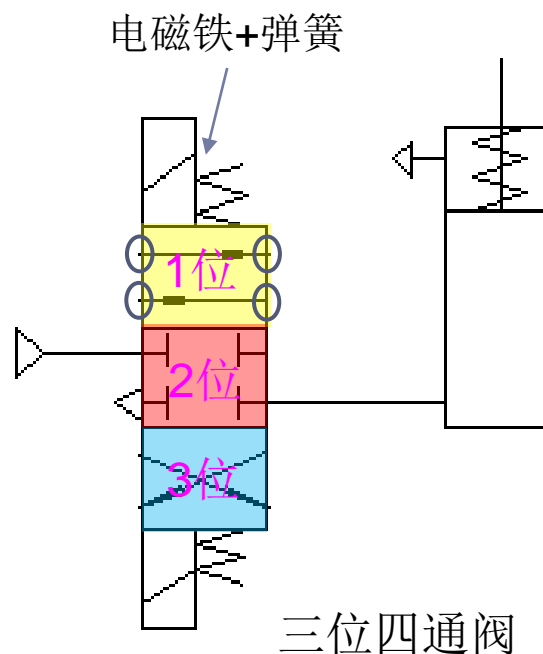
方向控制回路

▶ 单作用气缸换向回路

▶ 掌握几位几通的概念



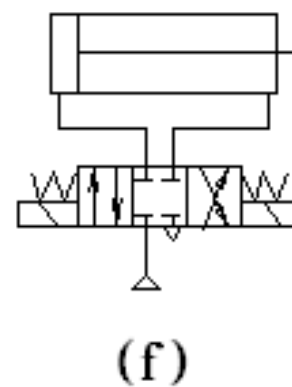
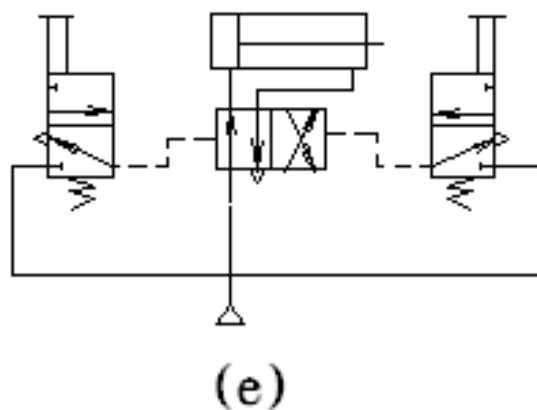
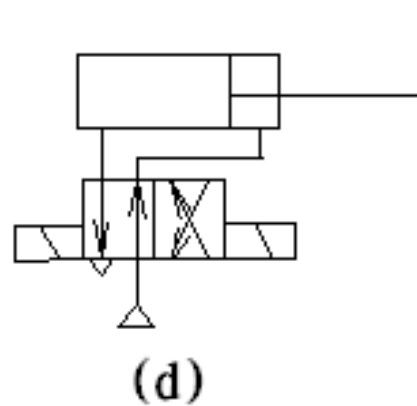
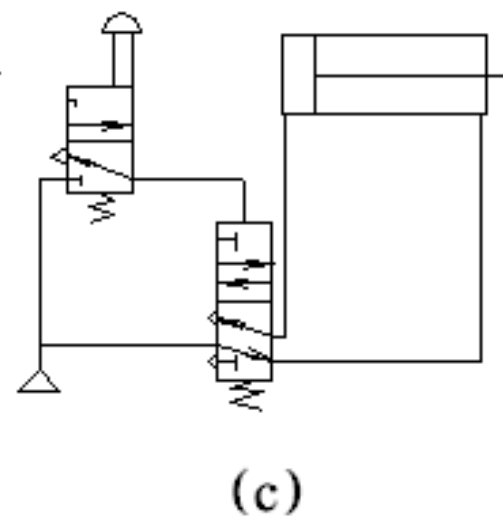
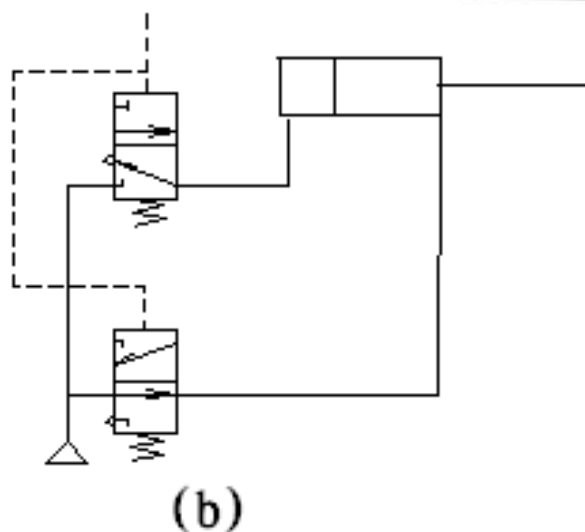
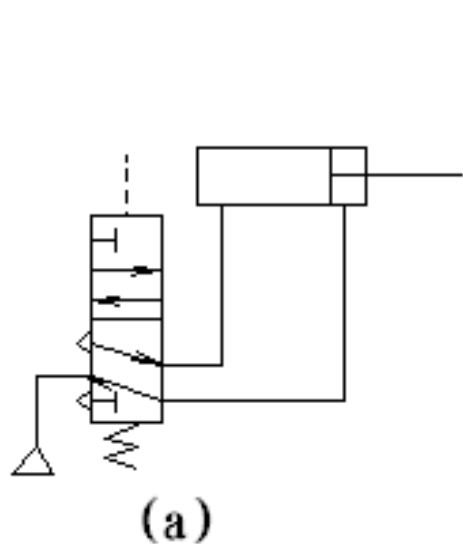
(a)



(b)

方向控制回路

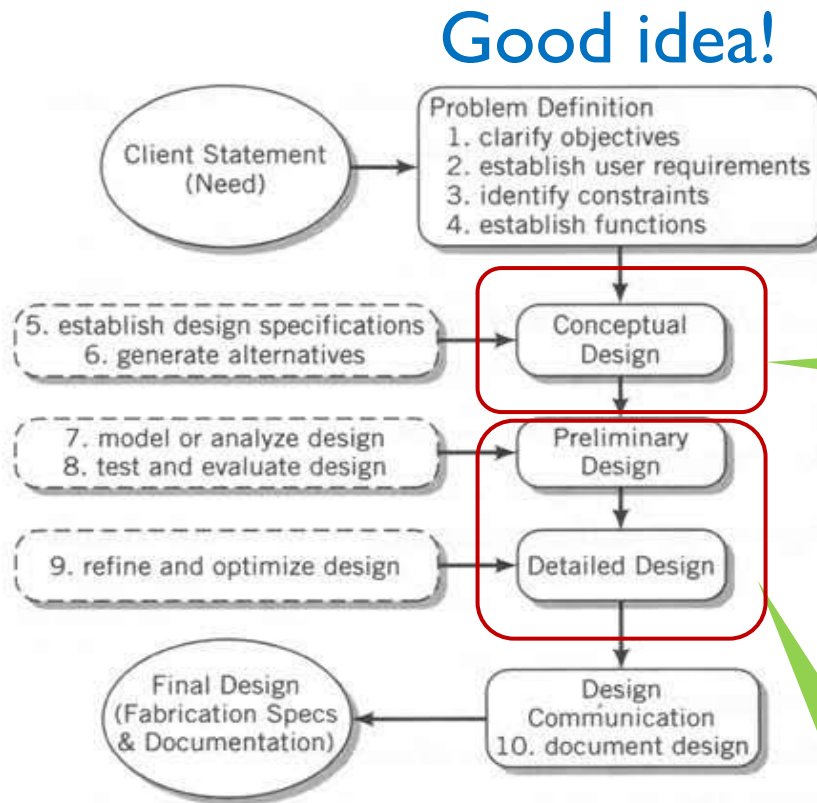
► 双作用气缸换向回路



2. 机器人设计与传动

设计流程

► The Design Process: As a Flow Chart



分解和迭代是必不可少的！
Decomposition and iteration are also essential.

《机器人设计》

Figure 2.3 A prescriptive, five-stage model of the design process. Like the previous model, this model is also very stylized in that the process is shown as a linear sequence of artifacts (*need* and *final design*) and design phases, within which are situated the design tasks.

《机器人制作》

机器人机构的组成

1.1 机器人机构的组成

概括地讲，机器人机械结构由三部分组成：

1、执行机构

执行机构用于完成操作任务。它需要在动力源的带动下，完成预定的操作。如：直流电机、舵机和气缸等。

2、传动机构

传动机构是**转速和转矩的变换器**，也是伺服系统的一部分，要求根据伺服控制系统进行选择设计，以满足控制性能。因此，需满足传动的精度，满足轻量、高速和高可靠性。如：齿轮。

3、支撑/导向机构

导向机构作用是**支撑和导向**，使运动能安全、准确地完成特定方向的运动。如：轴承和导轨。

传动机构的性能要求

传动机构的性能一般需满足以下几个方面要求：

1、转动惯量

传动机构的**质量和转动惯量应尽量小**。否则，机构的负载会增大；系统响应会降低；固有频率会降低，易产生谐振。

2、刚度

- 伺服系统动力损失小。（**变形损失能量小**）
- 频率要高，超出机构的频带宽度，使之不易产生共振。
- 闭环系统更加稳定。

3、阻尼

阻尼越大，振动的振幅就越小，衰减也越快。但大阻尼会使系统稳态误差增大、精度降低。

共振区域阻尼越大越好；远离共振区域阻尼越小越好。

► **其他要求：摩擦小、抗振性好、传动间隙小等。**

齿轮的术语

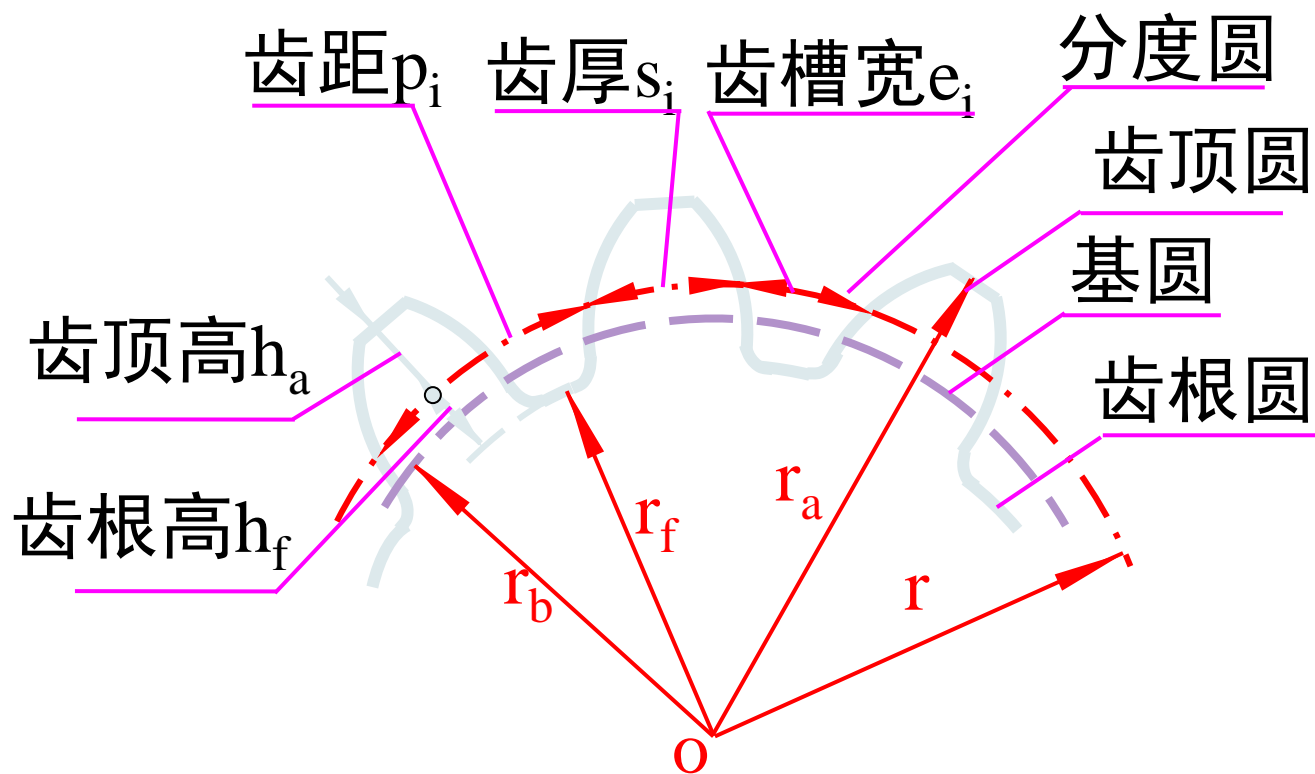
齿顶圆 (d_a)

齿根圆 (d_f)

分度圆 (d)

基圆 (d_b)

齿数 (z)



同一圆周上 $p_i = s_i + e_i$

齿距和齿厚均在分度圆上。

齿轮基本参数的计算公式

分度圆与模数

模数 m : 人为地把 p_i / π 规定为一些简单的有理数，该比值称为模数，用 m 表示。模数越大，齿厚就越大，齿轮的承载能力就越高。

分度圆 d : 是齿轮上一个人为地约定的轮齿计算的基准圆，规定分度圆上的模数和压力角为标准值。分度圆又称节圆。

国标压力角的标准值为 20°



✓分度圆直径为 $d = mz$

基圆直径为 $d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha$

基圆上的齿距 $P_b = \pi d_b / z = \pi m \cos \alpha$

齿顶圆直径 $d_a = d + 2h_a$

齿根圆直径 $d_f = d - 2h_f$

法节 $P_n = P_b = \pi d_b / z = \pi m \cos \alpha$

一般情况下：

$$h_a^* = 1, \quad c^* = 0.25$$

$$h_f^* = (h_a^* + c^*)$$

$$h_a = h_a^* \times m$$

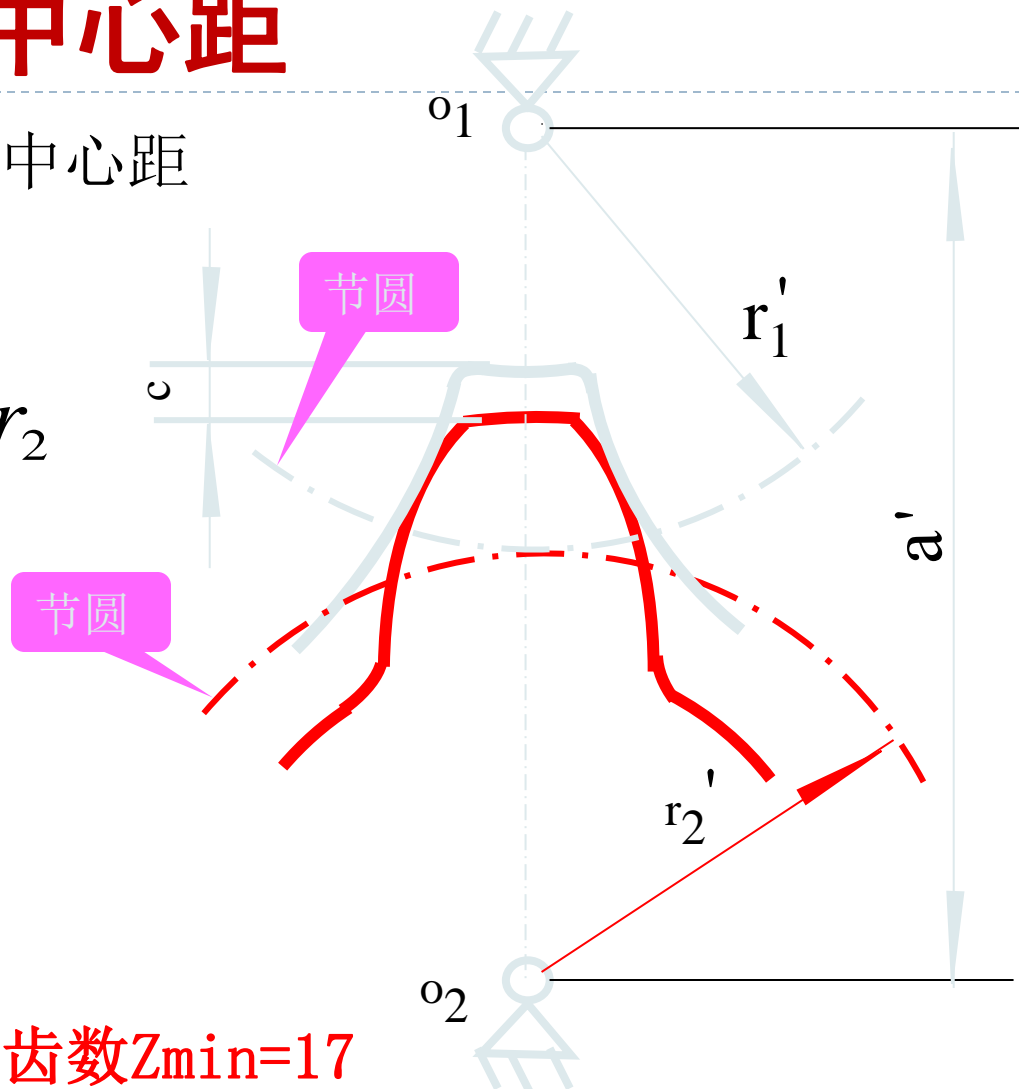
$$h_f = h_f^* \times m$$

欲使两齿轮正确啮合，两轮的模数必须相等

无侧隙传动的中心距

一对齿轮啮合传动时，中心距
等于两节圆半径之和

$$\begin{aligned} a &= r_1' + r_2' = r_1 + r_2 \\ &= \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \end{aligned}$$

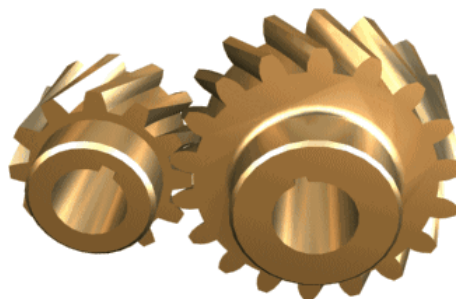


特别注意：

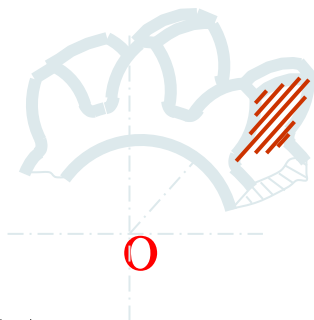
当 $ha^*=1$ ， $a=20^\circ$ 时，齿数 $Z_{min}=17$

如果 $Z_{min}<17$ ，那么采用变位修正法（建议尽量避免）

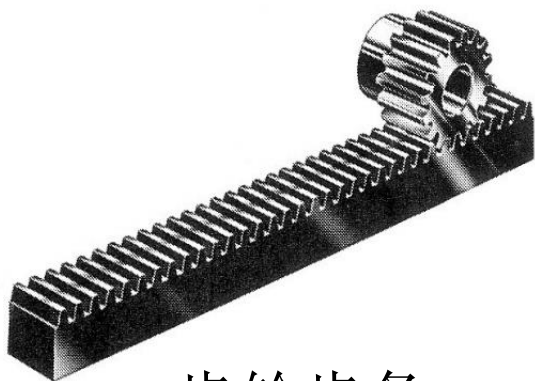
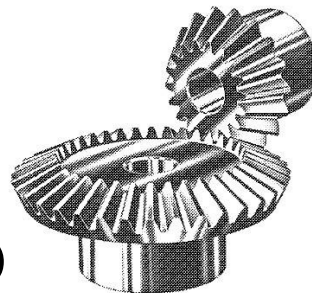
其他形式的齿轮



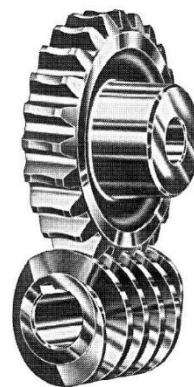
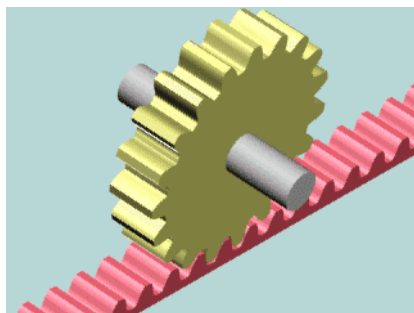
斜齿轮



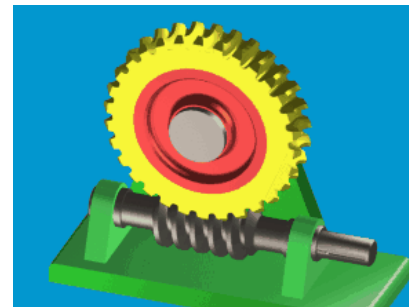
锥齿轮
(伞齿轮)



齿轮齿条

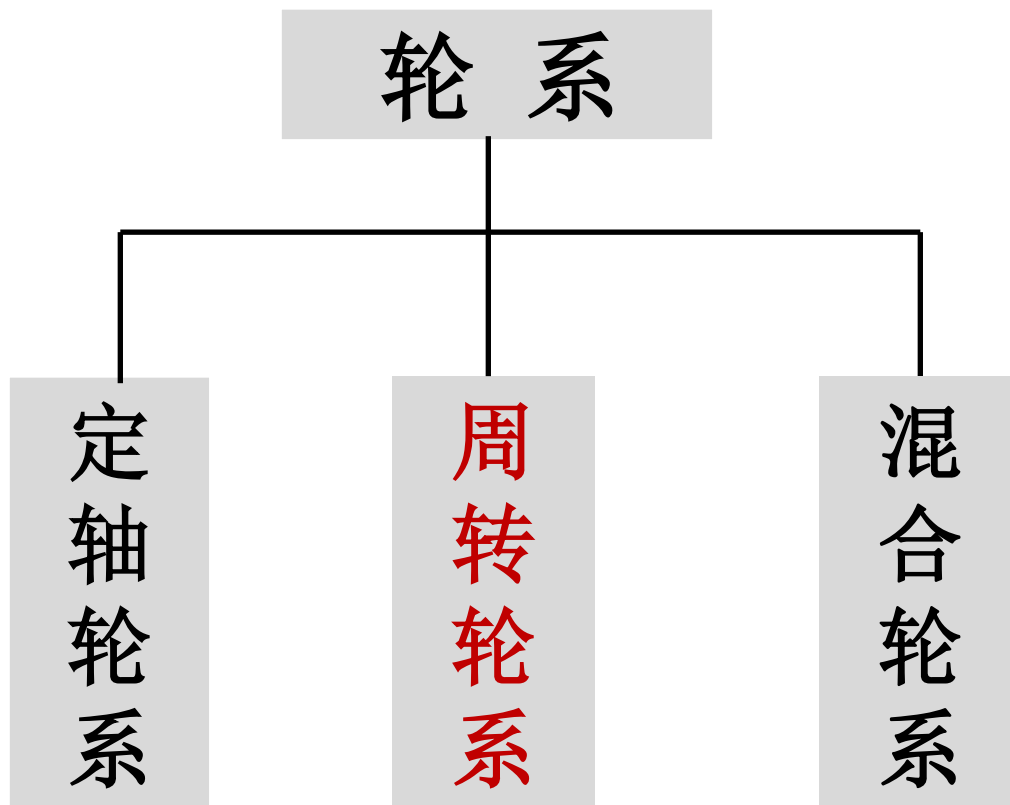


蜗轮蜗杆



齿轮轮系

- ▶ 由一系列齿轮所组成的传动系统。



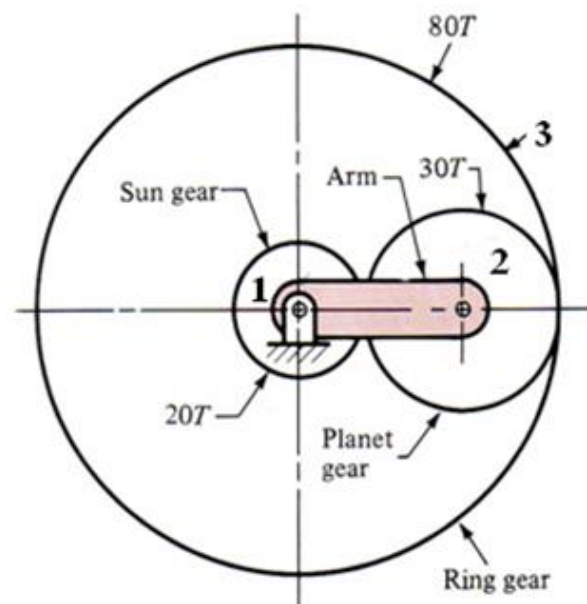
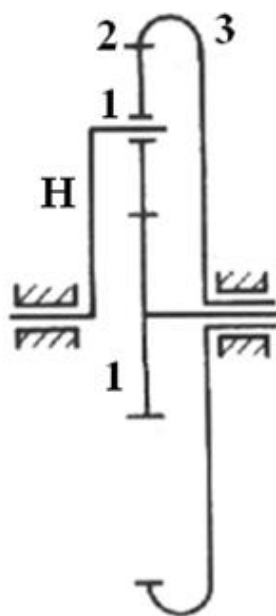
周转轮系

在齿轮系中，**至少有一个齿轮的轴线不固定**，而是绕另一个齿轮的轴线转动的轮系。

部件：1、3，称为太阳轮（可作为**输入/输出**）

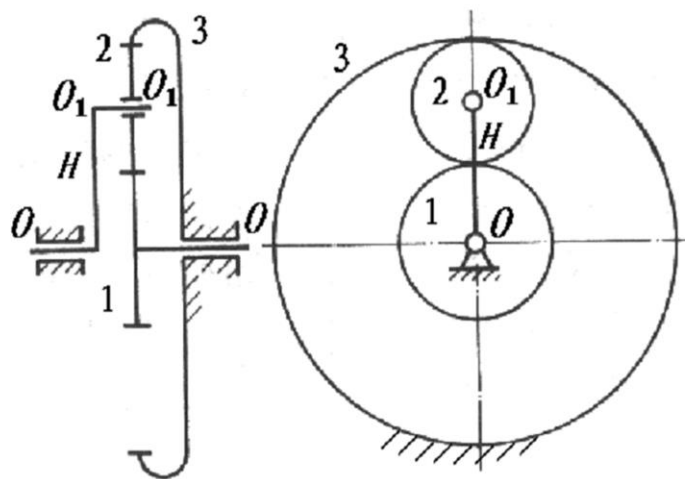
部件：H，称为行星架（可作为**输出/输入**）

部件：2，称为行星轮



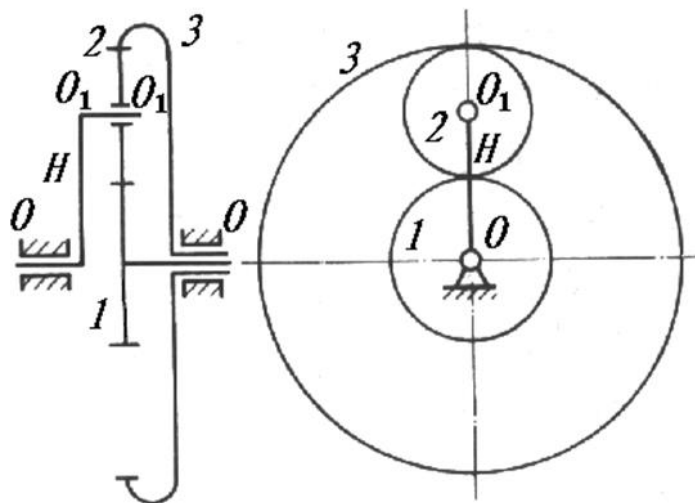
- 太阳轮与行星轮啮合
- 行星轮自转与公转
- 行星架支撑行星轮

周转轮系:



行星轮系

行星轮系有**1DOF**自由度，
一个太阳轮必须件固定，
只需给定一个独立的运动。

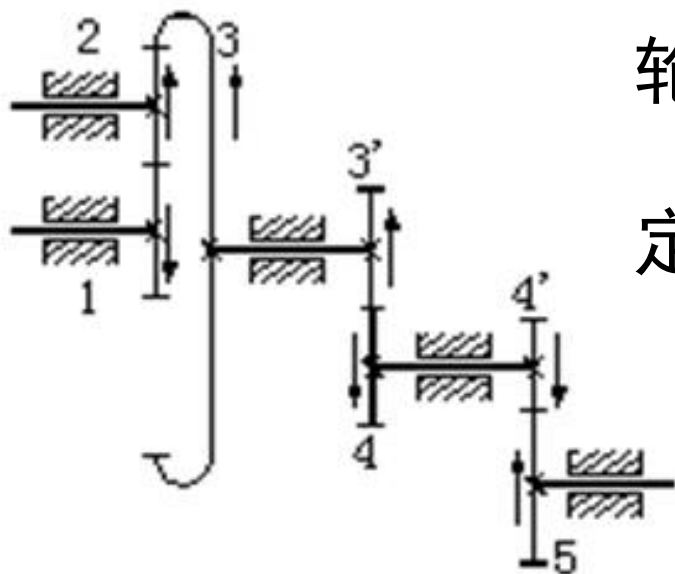


差动轮系

差动轮系有**2DOF**自由度；
太阳轮均可动，且3个部件均
可动，需要给定两个独立的运
动，可用作运动的合成或分解。

减速比计算

定轴轮系的传动比 $\left\{ \begin{array}{l} 1、\text{传动比} \\ 2、\text{转向关系} \end{array} \right.$

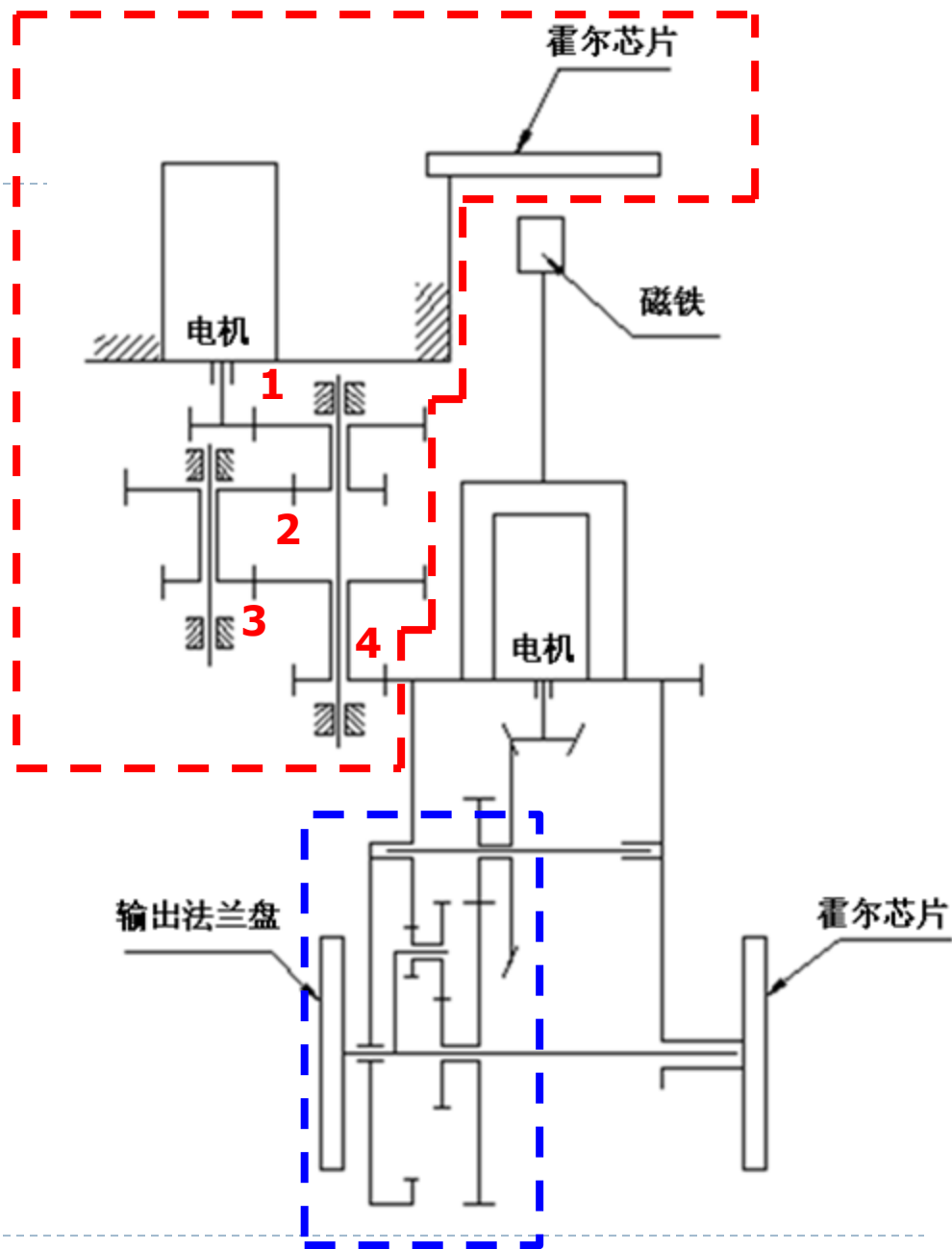
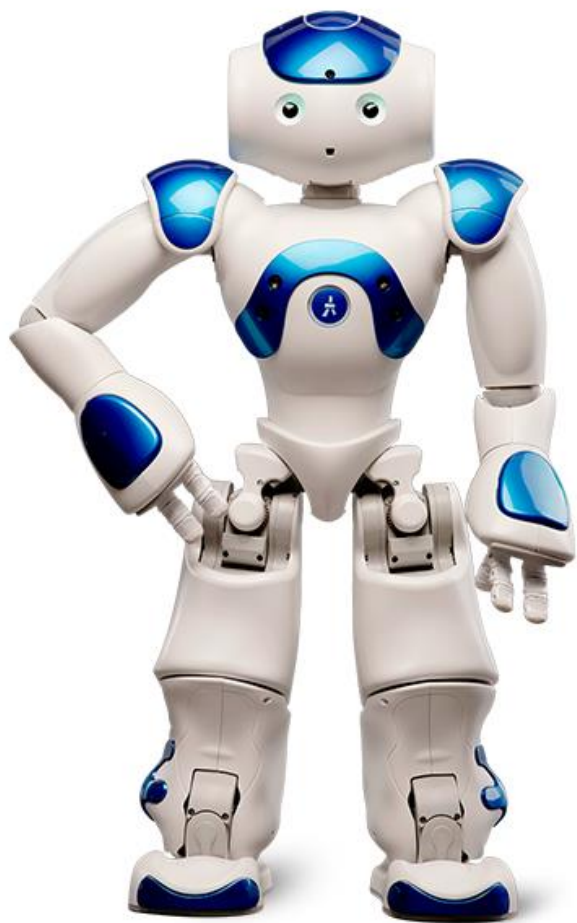


轮系的传动比：
$$i_{\text{首末}} = \frac{\omega_{\text{首}}}{\omega_{\text{末}}} = \frac{Z_{\text{首}}}{Z_{\text{末}}}$$

定轴轮系传动比：

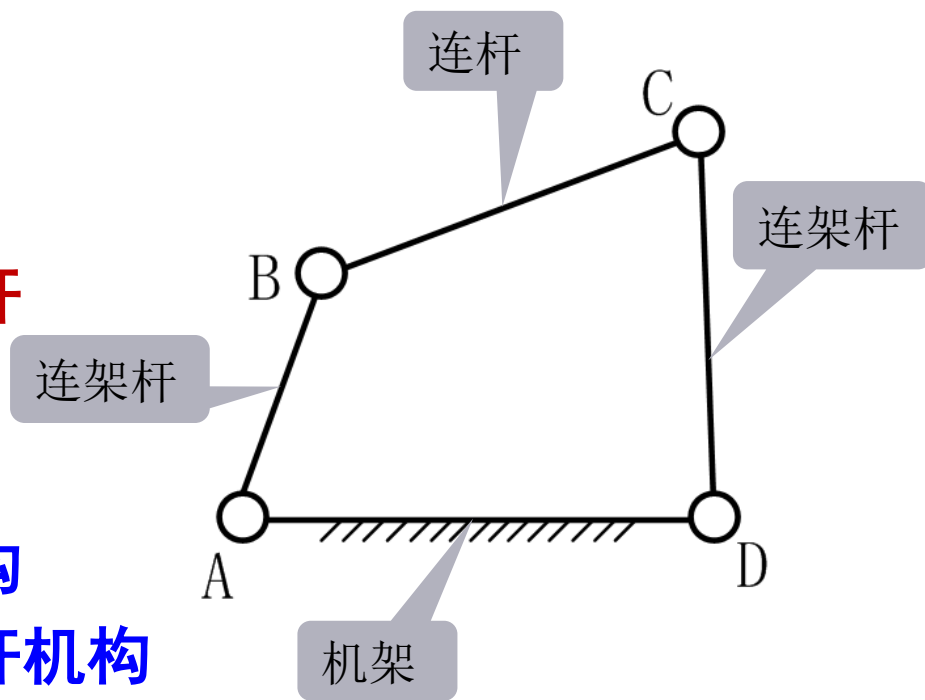
$$\begin{aligned} i_{15} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5} \\ &= \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_3}{Z_2} \frac{Z_4}{Z_3} \frac{Z_5}{Z_4} = \frac{Z_5}{Z_1} \end{aligned}$$

应用实例



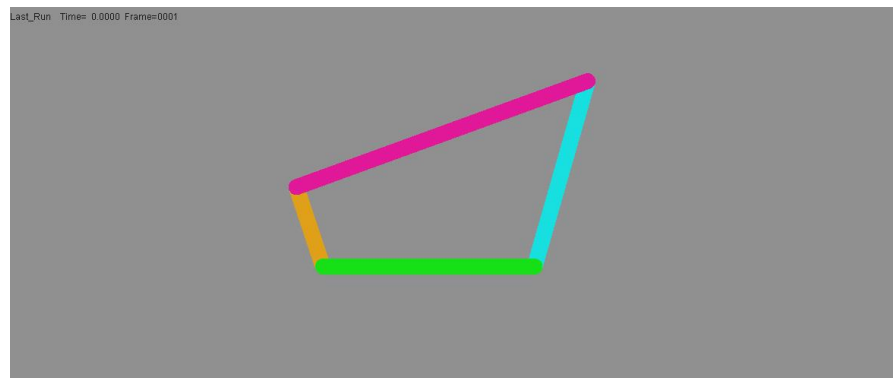
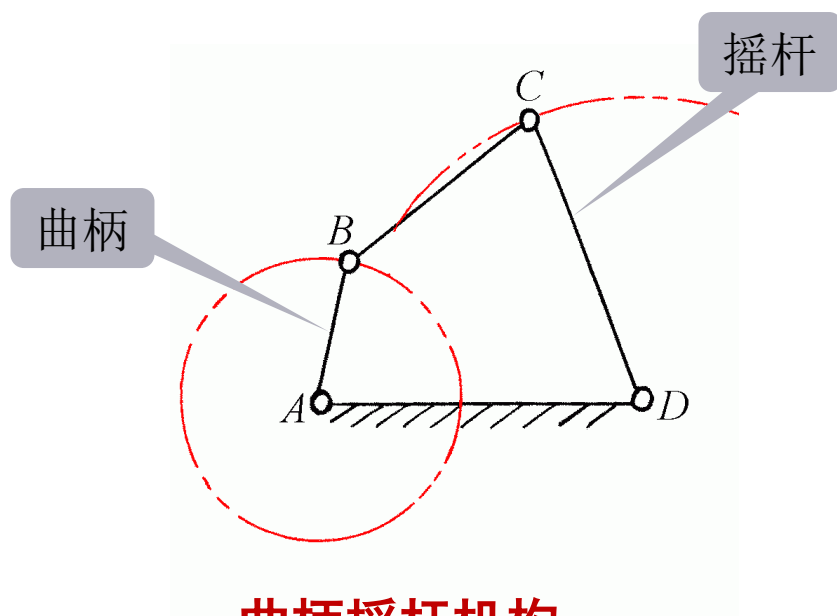
四连杆的组成

- ▶ 铰链四连杆是平面四杆机构的基本形式，其他形式可以认为是它的演化形式。
- ▶ 在右图机构中：
 - ▶ AD为**机架**
 - ▶ BC为**连杆**
 - ▶ AB、CD与机架相连为**连架杆**
- ▶ 能做整周回转者为**曲柄机构**
- ▶ 只能一定范围摆动的为**摇杆机构**



基本形式一：曲柄摇杆机构

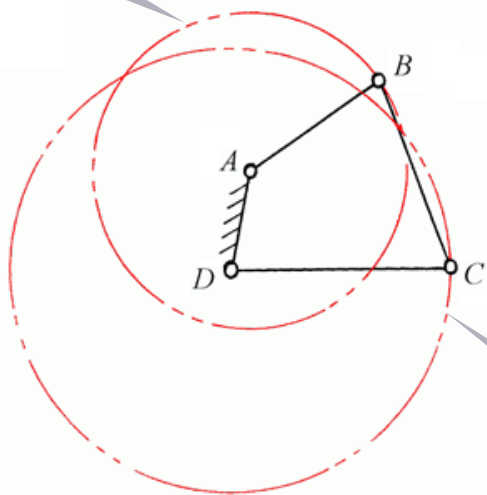
- ▶ **曲柄摇杆机构**：铰链四杆机构的两个连架杆中，有一个为曲柄，另一个为摇杆。



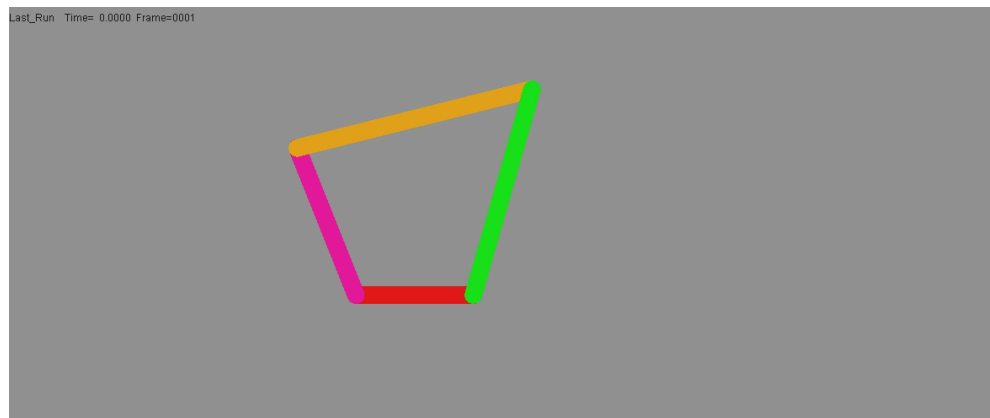
基本形式二：双曲柄机构

- 若铰链四杆机构中的两个连杆架均为曲柄，则称其为**双曲柄机构**。

曲柄1



Last_Run Time= 0.0000 Frame=0001

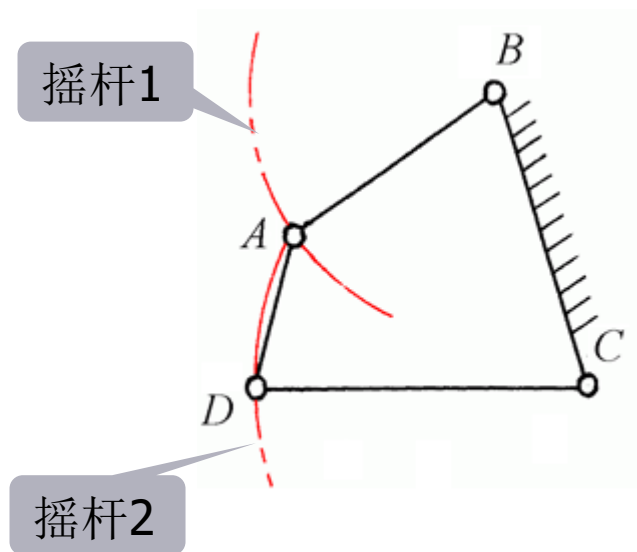


曲柄2

双曲柄机构

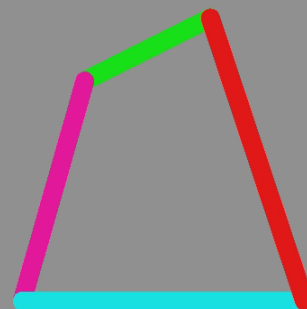
基本形式三：双摇杆机构

- 若铰链四杆机构中的两个连杆架均为摇杆，则称其为**双摇杆机构**。



双摇杆机构

Last_Run Time= 0.0000 Frame=001



曲柄摇杆机构的条件

平面四杆机构具有**整转副** → **则可能存在曲柄**

若**连架杆1**若能整周回转，
必有**两次**与机架共线。

由 $\triangle B_2C_2D$ 可得：

$$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$$

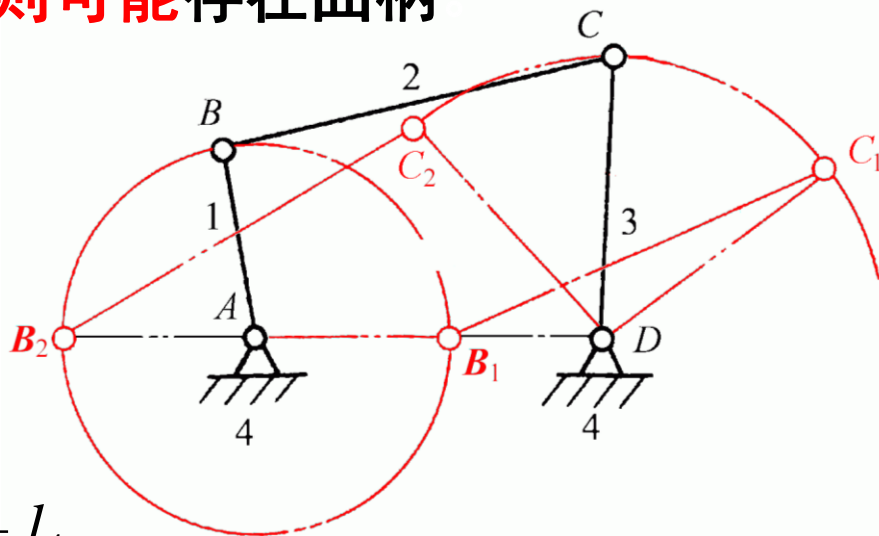
由 $\triangle B_1C_1D$ 可得：

$$l_3 \leq (l_4 - l_1) + l_2 \quad \Rightarrow \quad l_1 + l_3 \leq l_2 + l_4$$

$$l_2 \leq (l_4 - l_1) + l_3 \quad \Rightarrow \quad l_1 + l_2 \leq l_3 + l_4$$

将以上三式两两相加得（满足曲柄摇杆的条件）：

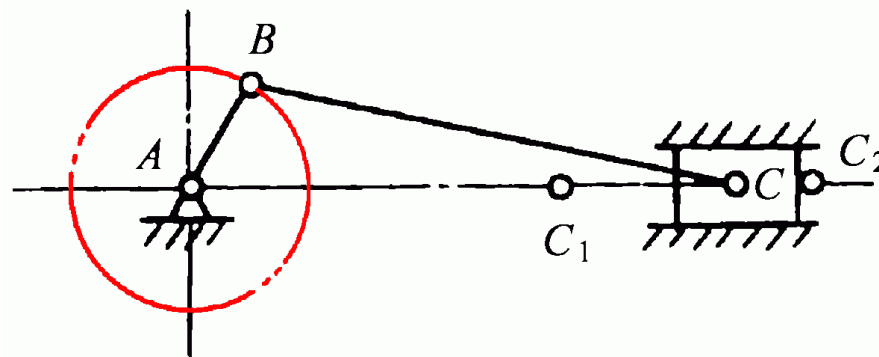
$$l_1 \leq l_2 \quad l_1 \leq l_3 \quad l_1 \leq l_4 \quad \Rightarrow \quad \text{AB 为最短杆，为曲柄摇杆机构}$$



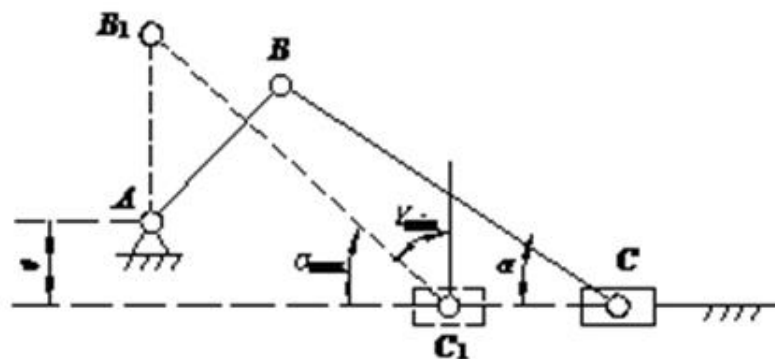
当最短杆为连杆 l_2 时，则为双摇杆机构！
当最短杆为机架 l_4 时，则为双曲柄机构！

演化形式一：曲柄滑块机构

曲柄滑块机构：



偏置曲柄滑块机构：



移动副可认为是回转中心由无穷远处的转动副演化而来。

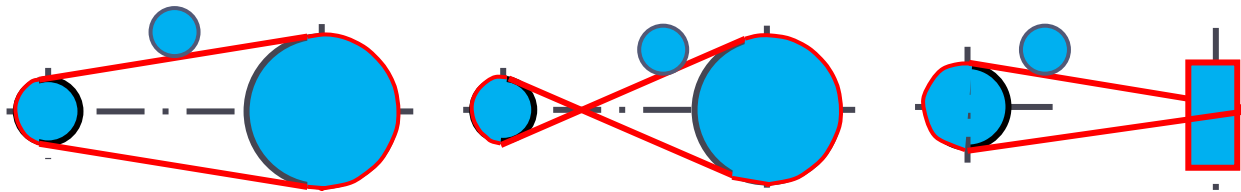
演化形式二：平行四边形机构



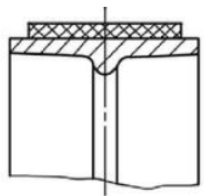
Last_Run Time= 0.0000 Frame=001



带传动



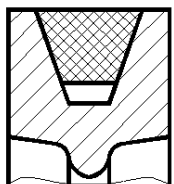
结构简单、传动平稳、造价低廉以及缓冲吸振



平带传动



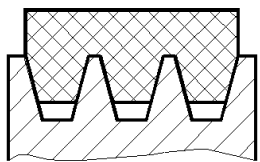
结构最简单，带轮容易制造，在传动中心距较大时应用较多，以帆布芯平带应用最广。



V型带传动



V带传动应用最广，相比平带传动能产生更大摩擦力，这是V带传动最主要的优点。



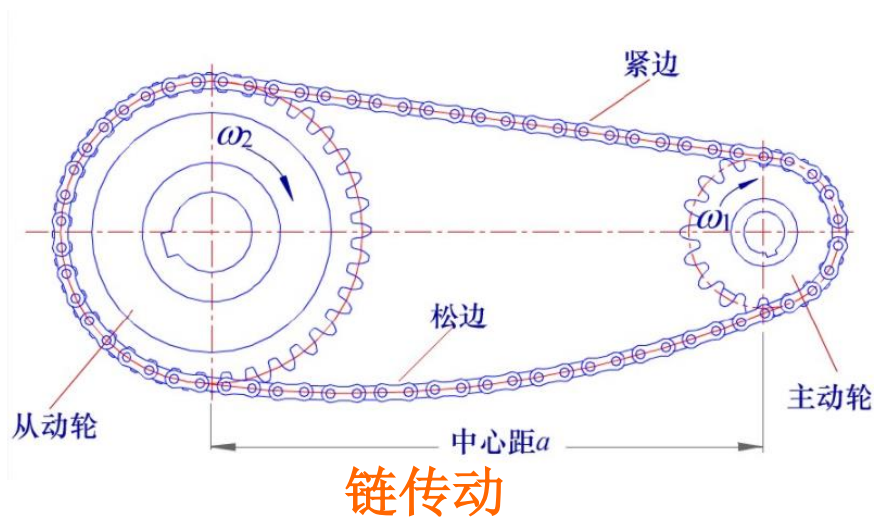
多楔带传动



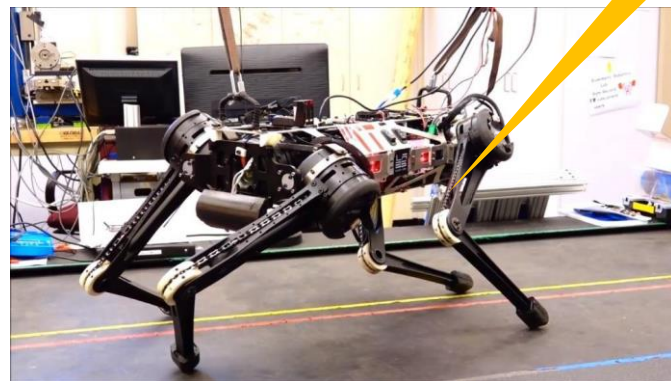
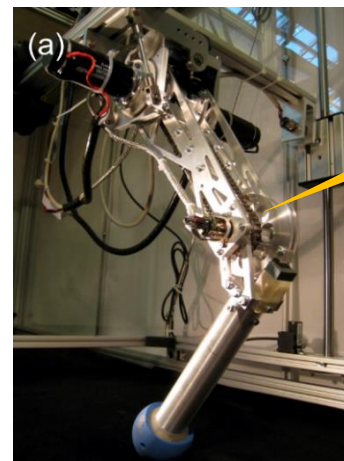
多楔带传动兼有平带和V带的优点，柔性好、摩擦力大，能传递的功率大。主要用于传递功率较大而结构要求紧凑的场合，传动比可达10，带速可达40m/s。

链传动

- 链传动是依靠链齿轮齿与链节的啮合来传递运动和动力，但在运转时不能保证瞬时传动比。

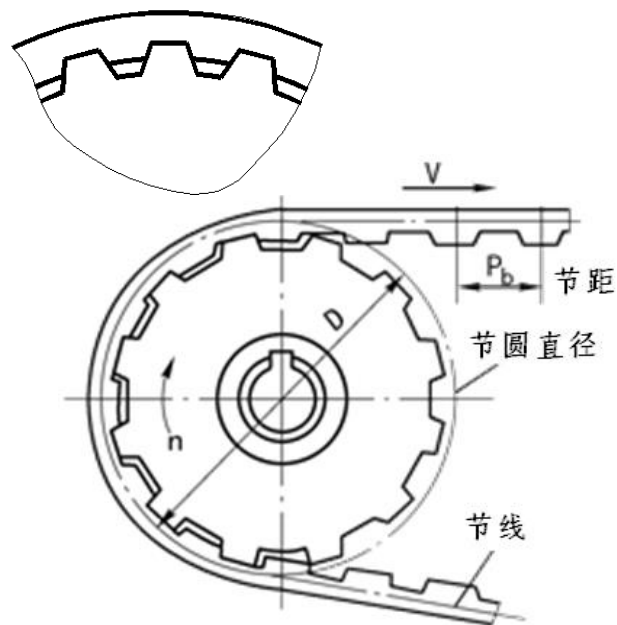


链传动可以应用在不宜采用齿轮传动的场合，比如自行车、摩托车。
还可用在低速重型及极为恶劣的工作条件下，比如应用在掘土机的运行机构。



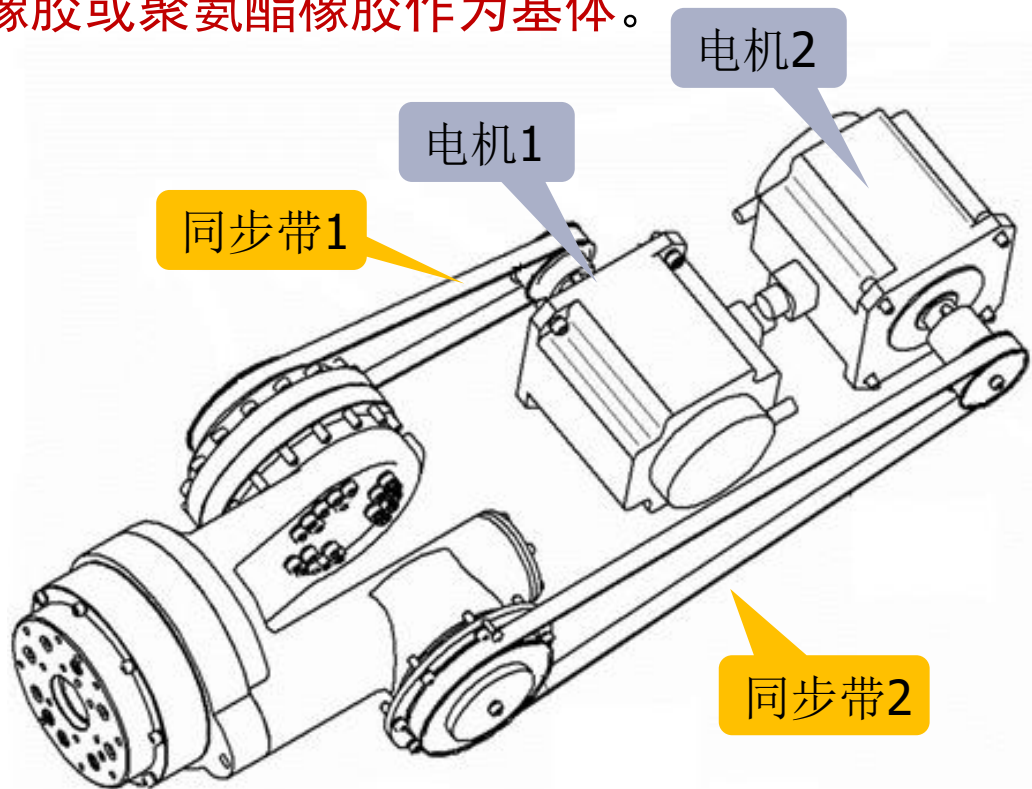
同步带

同步带传动综合了带传动和链传动的优点，通常采用钢丝绳或玻璃纤维绳作为抗拉材料，以氯丁橡胶或聚氨酯橡胶作为基体。



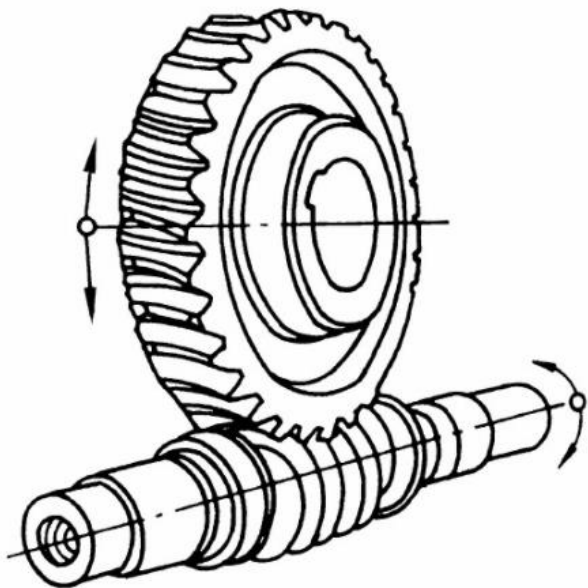
同步带传动

注意：避免采用润滑油对橡胶材料的皮带进行润滑，易造成橡胶的膨胀，导致其网裂和硬化。



蜗杆传动

- ▶ 蜗杆传动由蜗杆、涡轮组成，是在空间交错的两轴间传递运动和动力的一种传动机构，两轴交错的夹角常用的是 90°



蜗杆传动

蜗杆传动的特点：

- ◆ **传动比大，结构紧凑。** 单级传动比 $i=5\sim 80$ ，零件数目少，结构紧凑。
- ◆ **传动平稳，噪声小。** 由于蜗杆齿呈连续的螺旋状，且与涡轮齿的啮合是连续进行的，同时啮合的齿数较多，所以传动平稳，噪声小。
- ◆ **具有自锁性。** 蜗杆的螺旋线升角小于啮合面的当量摩擦角时，蜗杆传动便具有自锁性。

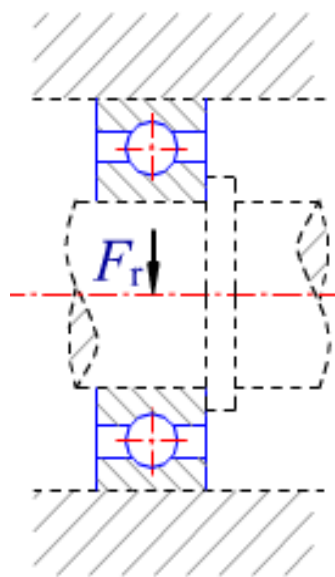
课程回复：思考题

在传动机构中，由旋转运动变成直线运动的机构有哪些？

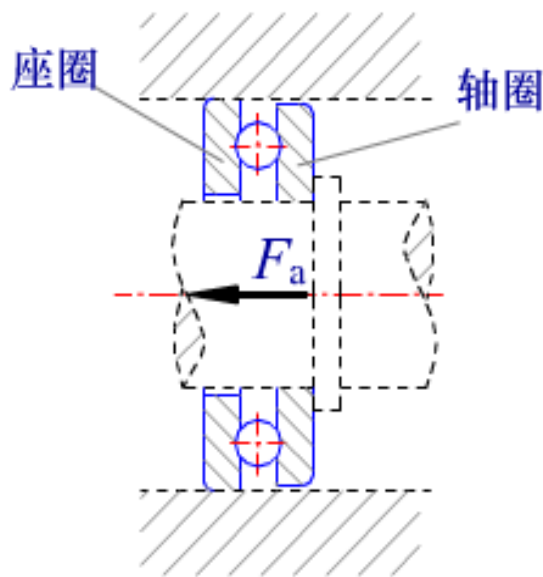


3. 机器人机械设计

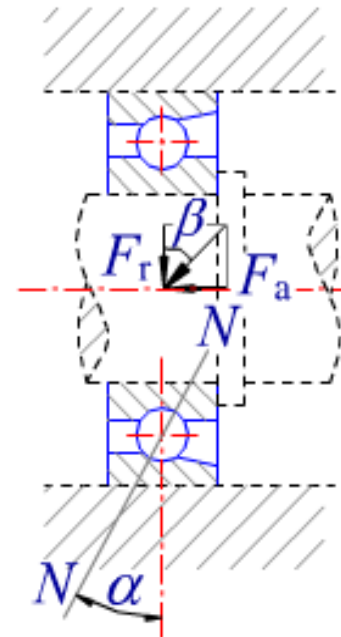
按可承受的载荷方向不同，滚动轴承分为三类：



径向接触轴承



轴向接触轴承



向心角接触轴承

- 主要用来承受径向力
- 主要用来承受轴向力
- 能同时承受径向力和较大的轴向力

接触角 α ：滚动体的载荷方向线与轴承径向平面之间的夹角；

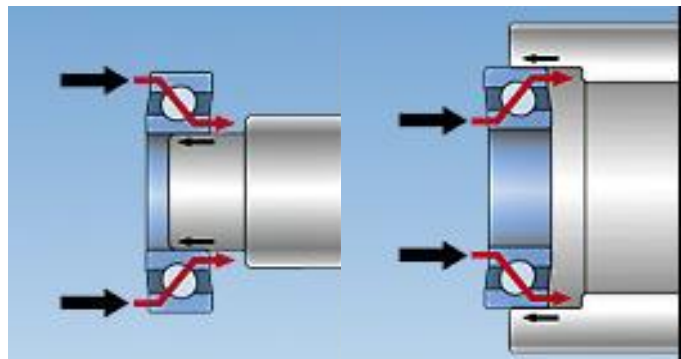
α 越大，可以承受的轴向力越大

滚动轴承的安装

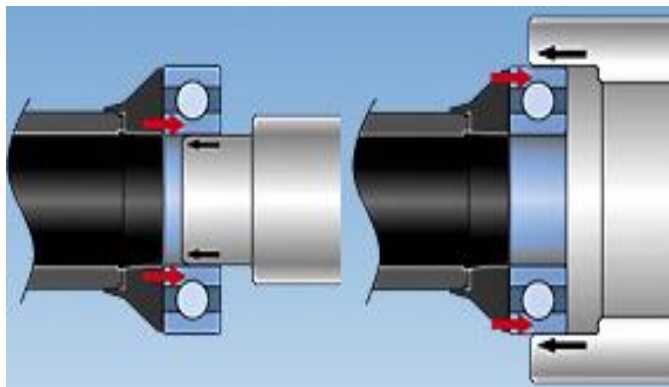
装拆滚动轴承时，**不能通过滚动体来传力**，以免造成滚道或滚动体的损伤。安装需要采用**合适的工具**。

配合过盈量小的中、小型轴承可用**压力机压入**

配合过盈量大的轴承常用**温差法（热胀热缩法）**装配



错误的施力



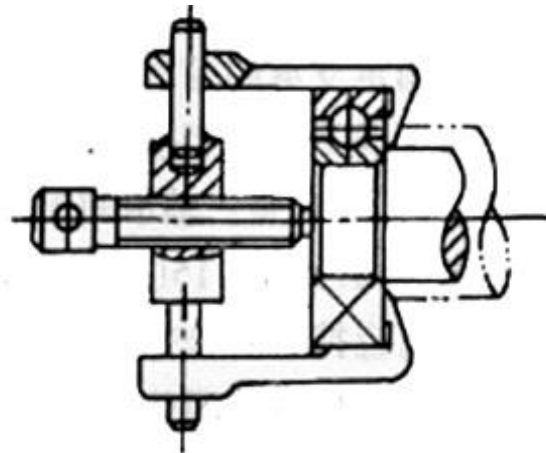
正确的施力



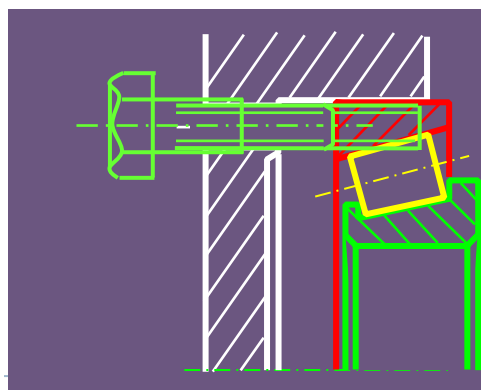
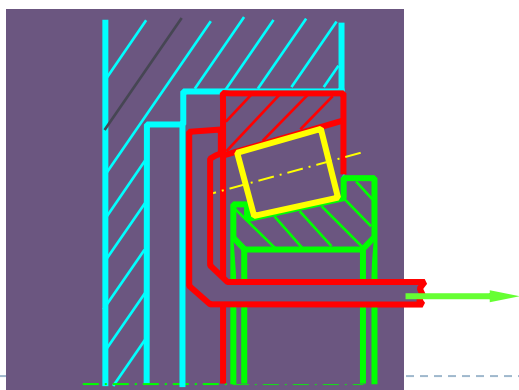
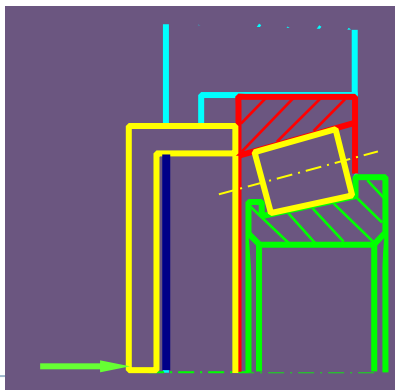
压机

滚动轴承的拆卸

方法1：拉马



方法2：预留拆卸高度或螺孔



轴系设计——滑动轴承（无油润滑轴承）

- ▶ 无油润滑轴承，是**滑动轴承**的一种。
- ▶ 在使用过程中**不用加润滑剂**也能正常运转

常见的做法是将**润滑材料**，如**石墨（黑铅）**、**聚四氟乙烯**、**二硫化钼**等镶嵌的工艺埋入黄铜、青铜、铸铁等合金材料中。



使用过程中，通过**摩擦热使固体润滑与轴摩擦**，**形成油、粉末并存润滑的优异条件**，既保护轴不磨损，又使固体润滑特性永恒。

- ▶ **优点：**尤其是在空间受限，以及承受一定载荷时，可以尝试使用。
- ▶ **缺点：**摩擦相对较大。



如何在机器中合理地使用轴承？——轴承的安装和固定

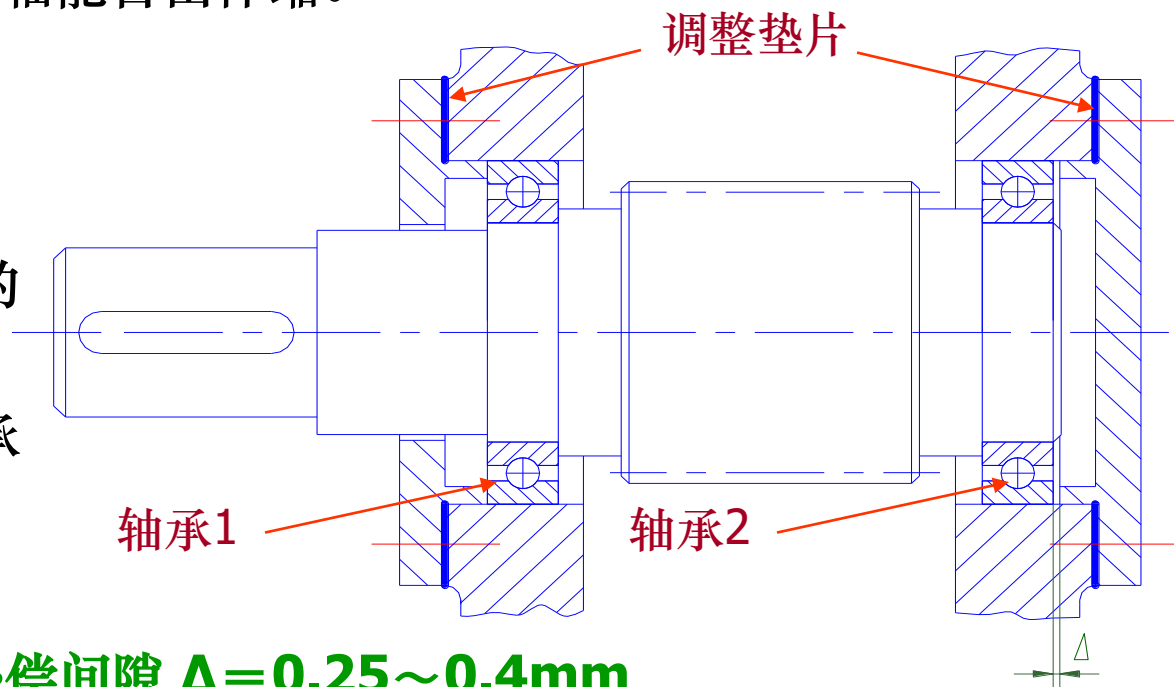
目的：通过轴承与轴和轴承座间的联接固定，使轴系在机器中有确定位置。

要求： { 1) 使轴上的载荷能可靠地传到机架上去，防止轴沿轴向串动。
2) 受热膨胀时，轴能自由伸缩。

➤轴系固定的三种方法：

两端固定支承（最常用）

通过两个轴承共同限制轴的双向串动。其中，轴承1限制轴一个方向的串动，轴承2限制反方向的串动。

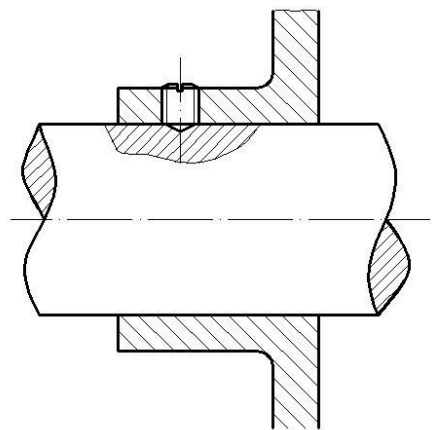


对于深沟球轴承，应留热补偿间隙 $\Delta = 0.25 \sim 0.4\text{mm}$

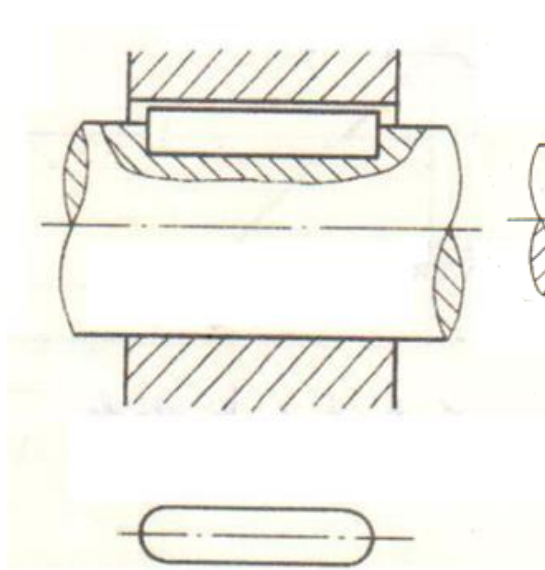
特点：结构简单，安装调整容易，适用于温度变化不大的短轴。

轴系设计——联接（轴向固定）

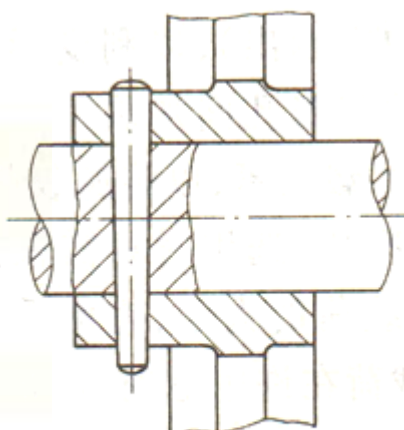
► 轴在轴向上的固定方法：



紧定螺钉



键连接



销连接



联轴器



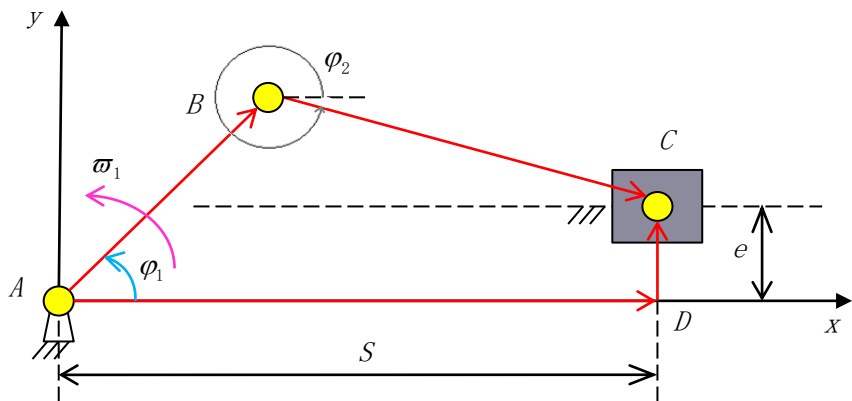
厌氧胶

4. 机器人运动学

曲柄滑块机构的位移分析

欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

已知: l_{AB} 、 l_{BC} 、 e 、 φ_1 和 ω_1
求: φ_2 、 ω_2 、 α_2 和 s 、 v_C 、 a_C



由封闭矢量多边形ABCD可得矢量方程

$$l_{AB} e^{i\varphi_1} + l_{BC} e^{i\varphi_2} = S e^{i0} + l_{DC} e^{i\pi/2} \quad (1-1)$$

由式 (1-1) 的实部和虚部分别相等可得

$$l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \varphi_2 = S \quad (1-2)$$

$$l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BC} \sin \varphi_2 = e \quad (1-3)$$

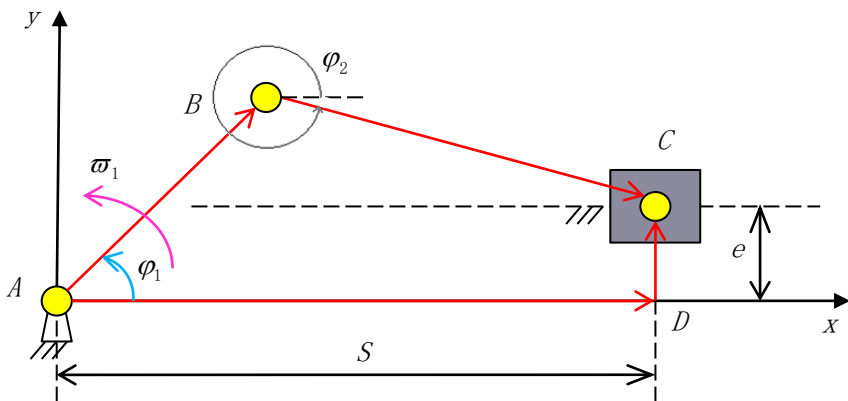
由式 (1-2) 和 (1-3) 消去转角 φ_2 可得

$$S = l_{AB} \cos \varphi_1 + (\text{sign}) \sqrt{l_{BC}^2 - e^2 - l_{AB}^2 \sin^2 \varphi_1 + 2 l_{AB} e \sin \varphi_1} \quad (1-4)$$

式中, **sign**代表“±”, 应按所给机构的装配方案选取

$$\varphi_2 = \arctan \frac{e - l_{AB} \sin \varphi_1}{S - l_{AB} \cos \varphi_1} \quad (1-5)$$

曲柄滑块机构的速度分析



$$i = 0 + i1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

由式 (2-4) 可得连杆的角速度：

$$\omega_2 = \frac{-l_{AB} \omega_1 \cos \varphi_1}{l_{BC} \cos \varphi_2} \quad (2-5)$$

将 ω_2 代入式 (2-3) 可求得滑块的速度 V_C

$$l_{AB} e^{i\varphi_1} + l_{BC} e^{i\varphi_2} = S e^{i0} + l_{DC} e^{i\pi/2} \quad (1-1)$$

将上式位移方程 (1-1) 求时间的导数：

$$l_{AB} \omega_1 e^{i(\varphi_1 + \pi/2)} + l_{BC} \omega_2 e^{i(\varphi_2 + \pi/2)} = \dot{S} \quad (2-1)$$

$$\dot{S} = V_c \quad (2-2)$$

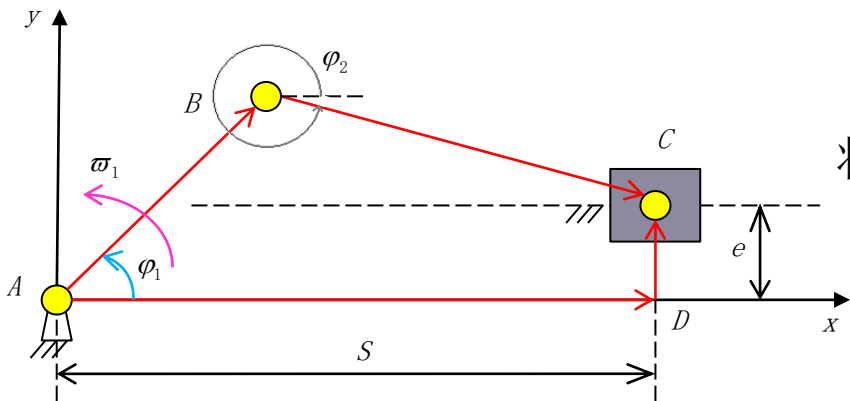
方向：	$e^{i(\varphi_1 + \pi/2)}$	$e^{i(\varphi_2 + \pi/2)}$
大小：	$l_{AB} \omega_1$	$l_{BC} \omega_2$

将式 (2-1) 的实部和虚部分别相等可得

$$-l_{AB} \omega_1 \sin \varphi_1 - l_{BC} \omega_2 \sin \varphi_2 = \dot{S} \quad (2-3)$$

$$l_{AB} \omega_1 \cos \varphi_1 + l_{BC} \omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \quad (2-4)$$

曲柄滑块机构的加速度分析



$$l_{AB} \omega_1 e^{i(\varphi_1 + \pi/2)} + l_{BC} \omega_2 e^{i(\varphi_2 + \pi/2)} = \dot{S} \quad (2-1)$$

将速度方程式 (2-1) 对时间求导可得

$$l_{AB} \omega_1^2 e^{i(\varphi_1 + \pi)} + l_{BC} \omega_2^2 e^{i(\varphi_2 + \pi)} + l_{BC} \alpha_2 e^{i(\varphi_2 + \pi/2)} = \ddot{S}$$

假设式 (3-1) 的输入角速度恒定

$$\ddot{S} = \alpha_c \quad (3-2)$$

由式 (3-1) 的实部和虚部分别相等可得：

$$a_C = -l_{AB} \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_{BC} (\omega_2^2 \cos \varphi_2 + \alpha_2 \sin \varphi_2) \quad (3-3)$$


$$-l_{AB} \omega_1^2 \sin \varphi_1 - l_{BC} \omega_2^2 \sin \varphi_2 + l_{BC} \alpha_2 \cos \varphi_2 = 0 \quad (3-4)$$

由式 (3-3) 可得连杆的角加速度

$$\alpha_2 = \frac{l_{AB} \omega_1^2 \sin \varphi_1}{l_{BC} \cos \varphi_2} + \tan \varphi_2 \omega_2^2 \quad (3-5)$$

将 α_2 代入式 (3-3) 可求得滑块的加速度 α_c 。

矢量方程解析法的步骤



步骤1、选定直角坐标系；

步骤2、选取各杆的矢量方向与转角；

步骤3、根据所选矢量方向画出封闭的矢量多边形；

步骤4、根据封闭矢量多边形列出复数极坐标形式的矢量方程式；

步骤5、由矢量方程式的实部和虚部分别相等得到位移方程式，并求出位置解析式；

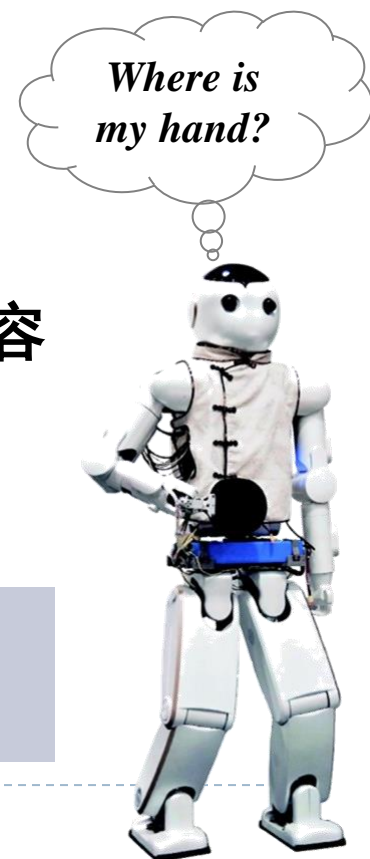
步骤6、将位移方程式对时间求导后，得出速度方程式，并求出速度解析式；

步骤7、将速度方程式对时间求导后，得出加速度方程式，并求出加速度解析式。

机器人运动学

- ▶ **运动学 (Kinematics)** : 是指机器人连杆的位置和姿态（简称：**位姿**）与关节角度关系的理论。
- ▶ **正运动学**：已知关节角，求连杆末端的位姿
- ▶ **逆运动学**：已知连杆末端的位姿，求关节角度
- ▶ **涉及内容**：坐标变化、转动特性、空间速度等内容

运动学只研究物体的运动
而不考虑引起（或影响）这种运动的力

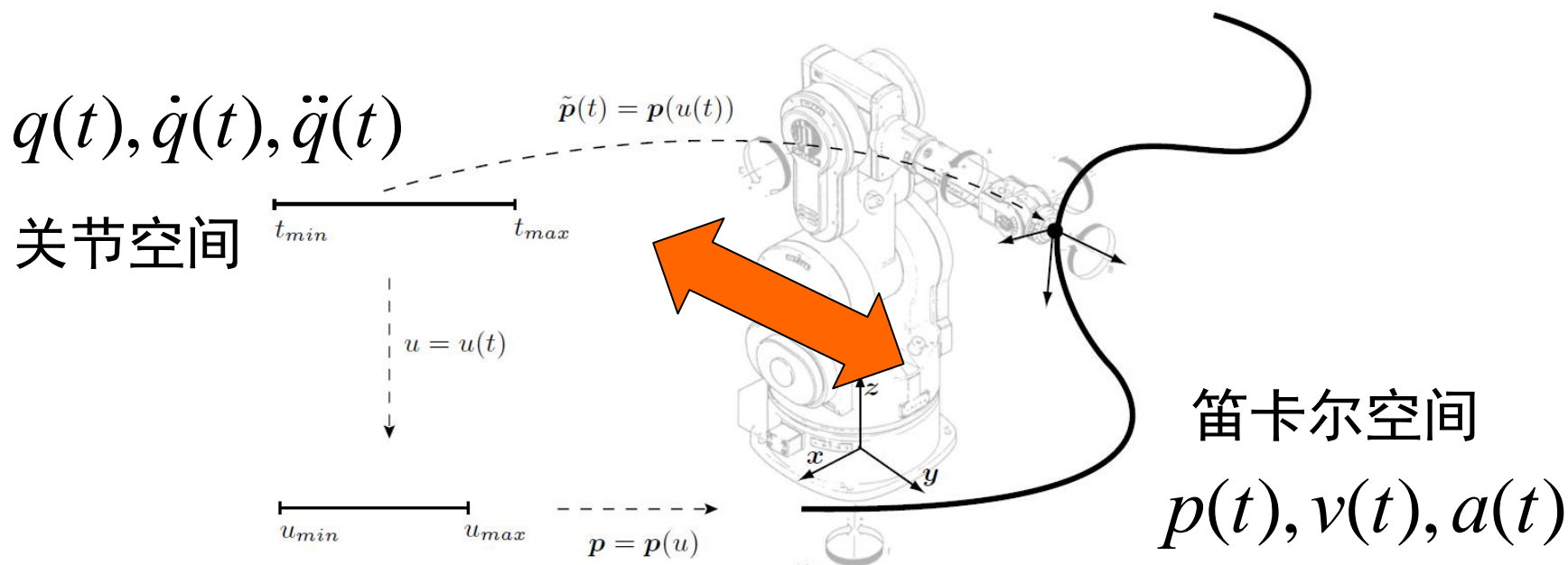


运动学

- ▶ 运动学是研究机械系统的运动方式，是实现机器人运动控制和系统设计的基础
- ▶ 运动学只研究物体的运动，包括几何和时间特性，不考虑引起运动的力
- ▶ 即研究位置、速度、加速度和位置变量对于时间或者其他变量的高阶微分

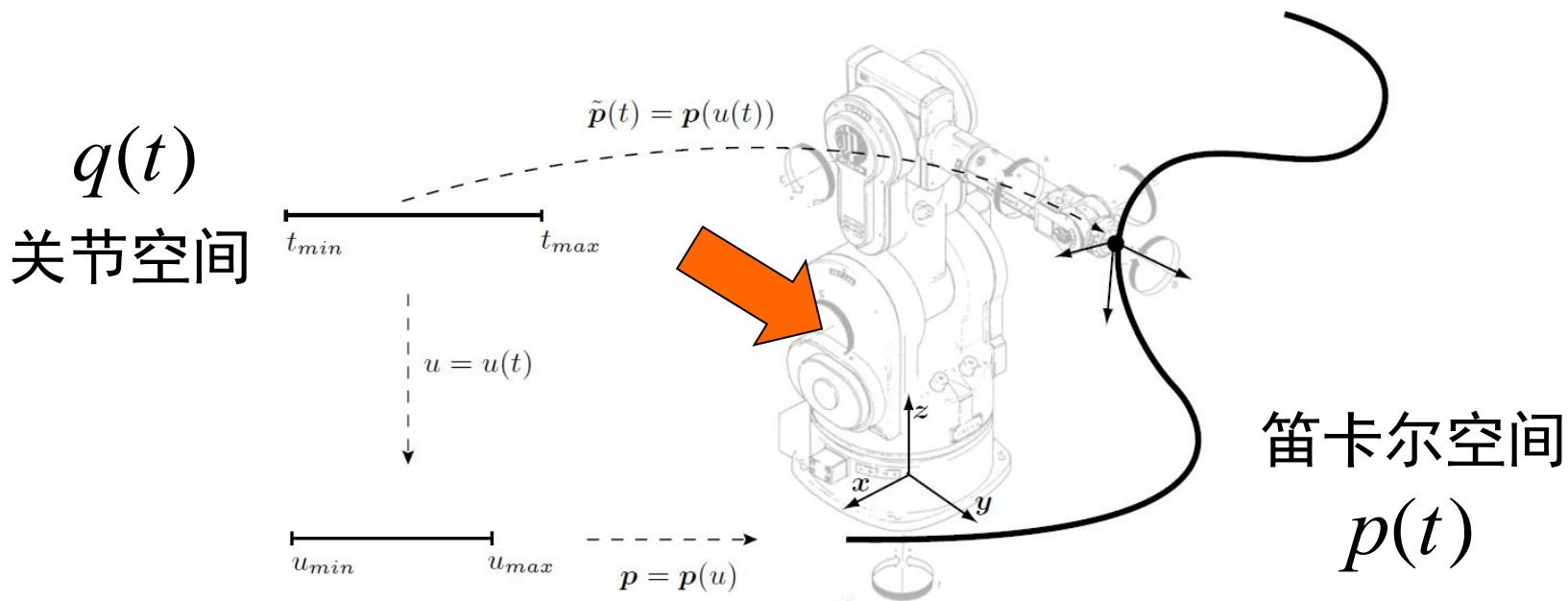
运动学

- 运动学建模：建立机器人参考点运动控制与各个驱动运动控制之间的关系（数学模型）



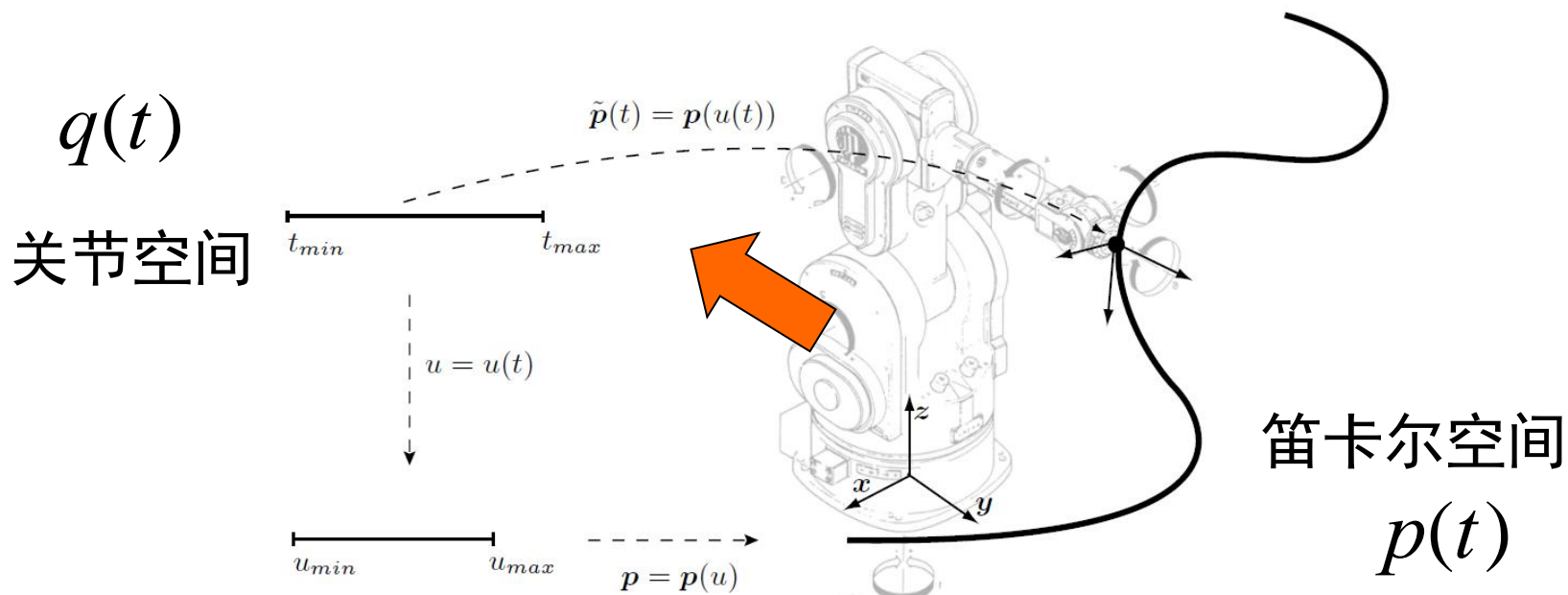
正运动学

- ▶ 给定一组关节角的值，计算工具坐标系相对于基坐标系的位置和姿态，即末端执行器位置和姿态



逆运动学

- ▶ 给定操作臂末端执行器的位置和姿态，计算所有可达位置和姿态的关节角



由于运动学方程是非线性的，很难得到封闭解，甚至无解同时提出了解的存在性和多解问题

动力学

- ▶ 研究产生运动所需要的力
- ▶ 操作臂的各种运动都必须通过关节驱动器产生一组复杂的力矩函数来实现
- ▶ 力矩函数形式取决于末端执行器路径的空间特性和瞬时特性、连杆和负载的质量特性、以及关节摩擦等

要使机械臂沿着期望路径运动，必须考虑动力学方程，并根据动力学方程求出关节力矩函数

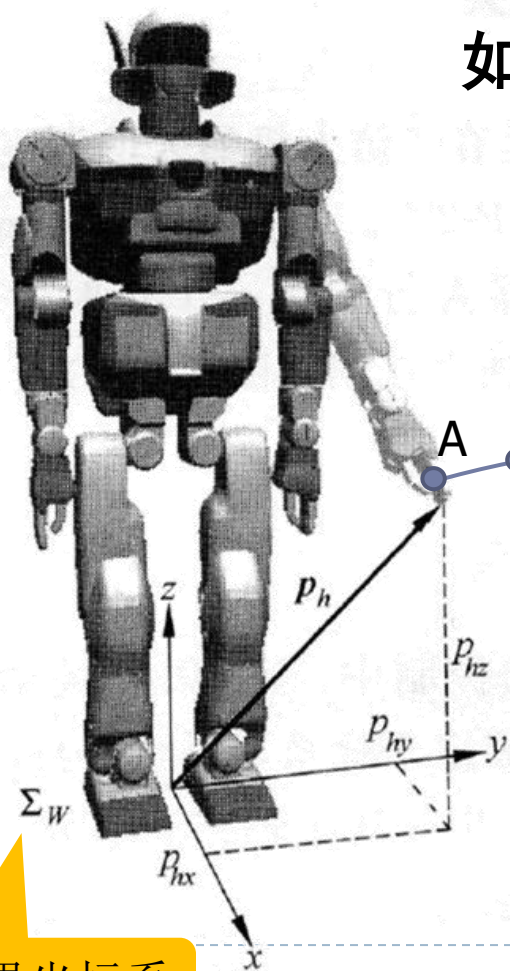


坐标变换

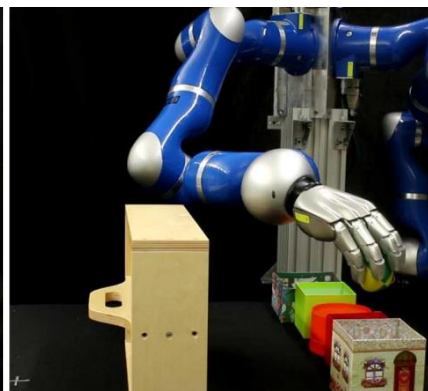
- ▶ **绝对位置**: 在世界坐标系中来描述的位置, 如手臂末端的绝对位置用三维矢量表示:

$$\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} p_{hx} \\ p_{hy} \\ p_{hz} \end{bmatrix}$$

前提条件: 构建每个关节的坐标系 (本文略)



世界坐标系



坐标变换

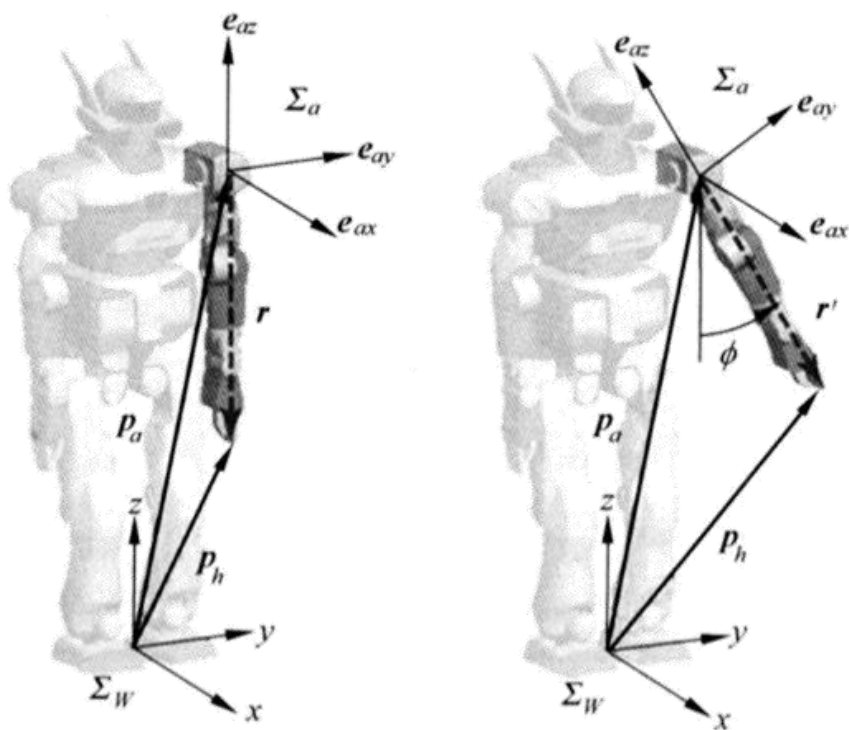
r 和 r' 之间的关系可表示为：

$$r' = R_a r$$

R_a 称为旋转矩阵，是在局部坐标 Σ_a 中的描述。

那么末端点（end-point）在世界坐标系中的位置：

$$p_h = p_a + R_a^a p_h$$



坐标变换

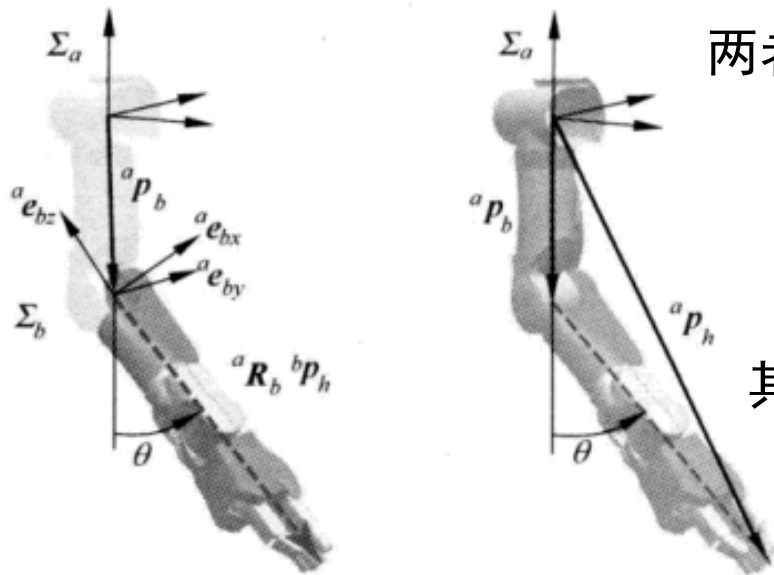
在坐标系 Σ_b 中观察的end-point位置为 ${}^b p_h$ ，
到在 Σ_a 中观察的end-point位置为 ${}^a p_h$ 。

两者的变换关系为：

$$\begin{bmatrix} {}^a p_h \\ 1 \end{bmatrix} = {}^a T_b \begin{bmatrix} {}^b p_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 ${}^a T_b$ 称为变换矩阵：

$${}^a T_b = \begin{bmatrix} {}^a R_b & {}^a p_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



坐标变换

假设有个机械链将从 Σ_1 到 Σ_N 的局部坐标系依次联结起来，对于相邻两个坐标系 Σ_i 和 Σ_{i+1} ，从 Σ_{i+1} 到 Σ_i 的齐次变换矩阵为 ${}^i T_{i+1}$ ，那么迭代上面讨论的变换过程可得：

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{T}_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 \cdots {}^{N-1} T_N$$

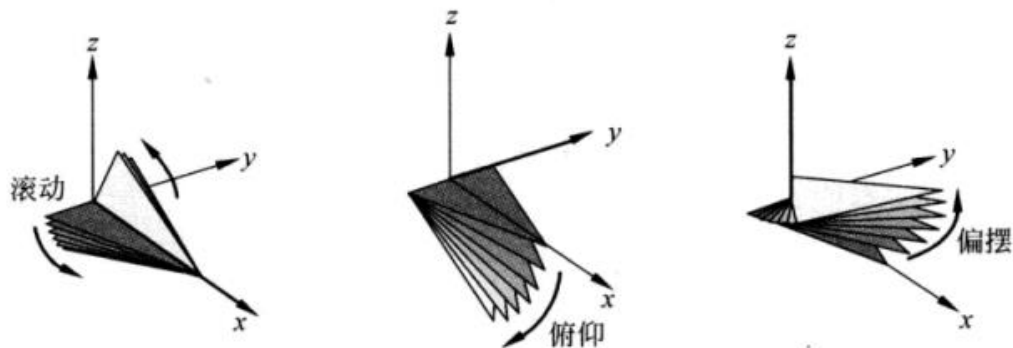
式中 \mathbf{T}_N 为从 Σ_N 到世界坐标系 Σ_w 的齐次变换矩阵。

如果在连杆末端追加关节，那么应该将相应的矩阵放在右边相乘。



转动特性

- 最基本的转动: 是绕 X , Y 和 Z 轴的旋转运动, 分别称为滚动 (roll)、俯仰 (pitch) 和偏摆 (yaw)



转 动 轴	名 称	所 用 符 号
x 轴	滚动 (roll)	ϕ
y 轴	俯仰 (pitch)	θ
z 轴	偏摆 (yaw)	ψ

转动特性

- ▶ 对应于滚动（ ϕ ）、俯仰（ θ ）和偏摆（ ψ ）的旋转矩阵依次为：

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



转动特性

- ▶ 如果有一点 p 绕原点依次作滚动、俯仰和偏摆，其位置将变成：

$$p' = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)p$$

- 其中：

$$\begin{aligned} R_{rpy}(\varphi, \theta, \psi) &= R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi) \\ &= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\varphi & s_\psi s_\theta + c_\psi s_\theta c_\varphi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\theta + s_\psi s_\theta s_\varphi & -c_\psi s_\theta + s_\psi s_\theta c_\varphi \\ -s_\theta & c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$



转动特性

$$R_{rpy}(\varphi, \theta, \psi) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)$$
$$= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\varphi & s_\psi s_\theta + c_\psi s_\theta c_\varphi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\theta + s_\psi s_\theta s_\varphi & -c_\psi s_\theta + s_\psi s_\theta c_\varphi \\ -s_\theta & c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \end{bmatrix}$$

- 利用上式，可以实现三维空间中从一个给定的姿态到任一姿态的变换。

$${}^a R_s = {}^a R_b {}^b R_s$$



范例1：机械臂的正运动学

正运动学的计算可根据齐次变换按链式法则进行。

例:7关节击球臂

关节1: 肩俯仰关节, 关节角 q_1

关节2: 肩滚动关节, 关节角 q_2

关节3: 肩偏摆关节, 关节角 q_3

关节1~3的三个关节轴线相交于肩心

关节4: 肘滚动关节, 关节角 q_4

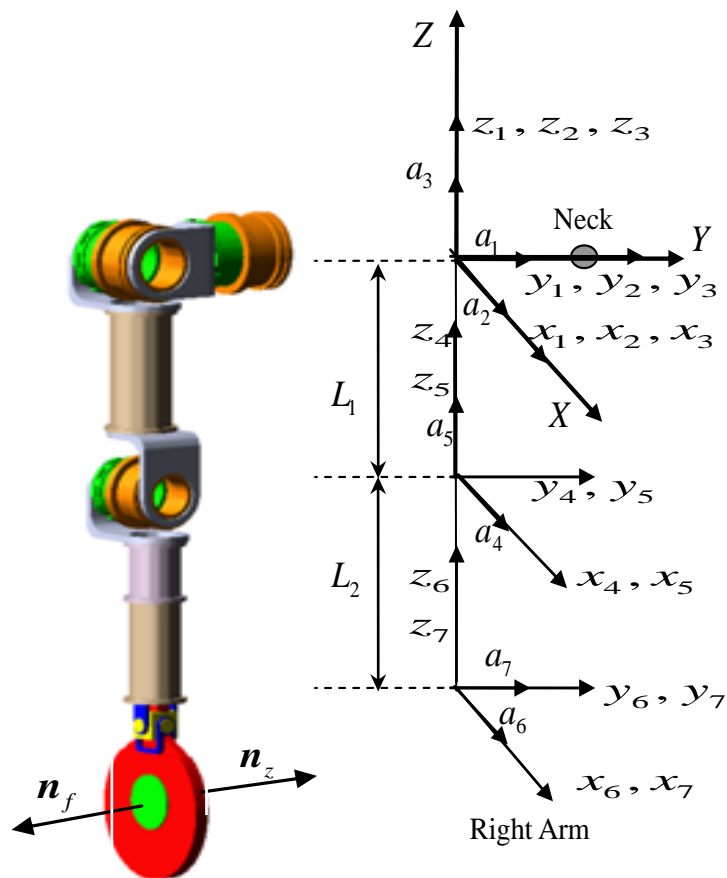
关节5: 肘偏摆关节, 关节角 q_5

关节4~5的二个关节轴线相交于肘心

关节6: 腕滚动关节, 关节角 q_6

关节7: 腕俯仰关节, 关节角 q_7

关节6~7的二个关节轴线相交于腕心



范例：机械臂的正运动学

已知肩心在 Σ_w 中的坐标为 $\begin{bmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 1.45 \end{bmatrix}$ 米

上臂长（肩心至肘心的距离）0.25米

下臂长（肘心至腕心的距离）0.26米

腕心至拍心的距离0.18米

Σ_1 、 Σ_2 和 Σ_3 的原点均取为肩心

Σ_4 和 Σ_5 的原点均取为肘心

Σ_6 和 Σ_7 的原点均取为腕心

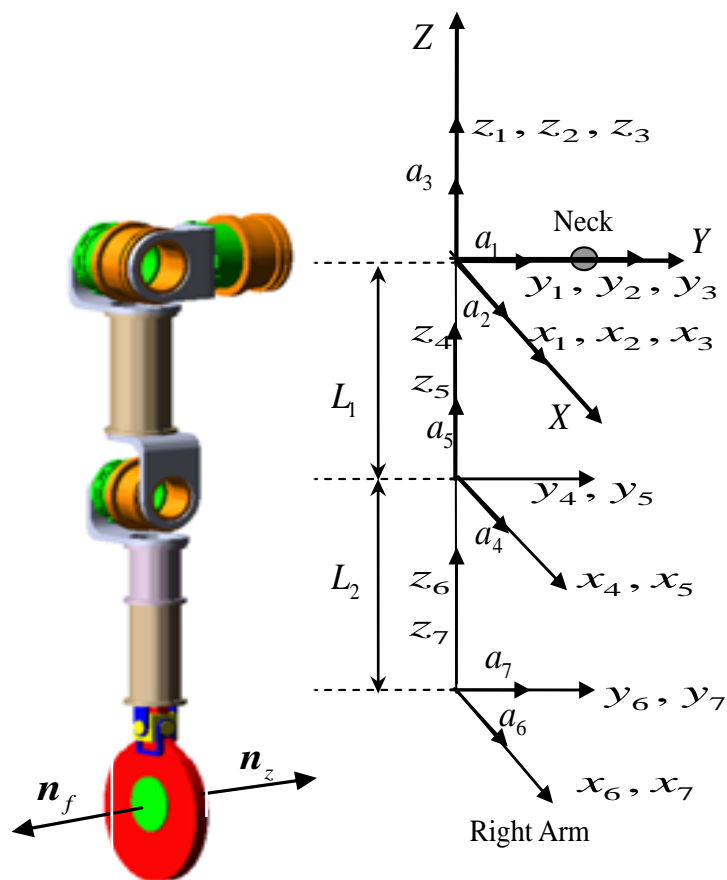
Σ_s 的原点取为拍心

当 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = 0$ 时

上臂、小臂和球拍均下垂

肩心、肘心、腕心和拍心在同一直线上

Σ_w 、 Σ_1 、 Σ_2 、 Σ_3 、 Σ_4 、 Σ_5 、 Σ_6 、 Σ_7 和 Σ_s 的x轴、y轴和z轴分别平行



$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.16 \\ -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 1.45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

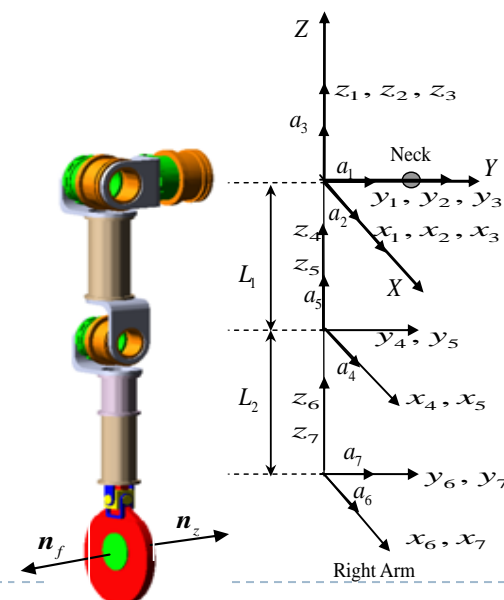
$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 & 0 \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ 0 & \sin q_6 & \cos q_6 & -0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^6T_7 = \begin{bmatrix} \cos q_7 & 0 & \sin q_7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_7 & 0 & \cos q_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^7F_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_S = T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_7 {}^7F_S \quad F_S \text{ 表示球拍在 } \Sigma_W \text{ 中的位姿}$$

当已知 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 、 q_5 、 q_6 和 q_7 时

将它们的值代入上式即可求得 F_S



机器人逆运动学

- ▶ 逆运动学是指根据机器人末端位姿求解关节角
- ▶ 正运动学一般用于检验逆运动学是否正确
- ▶ 逆运动学的难度高于正运动学

求解结果：

无解

多解（可根据一定的原则，选择最优解）

唯一解

求解方法：

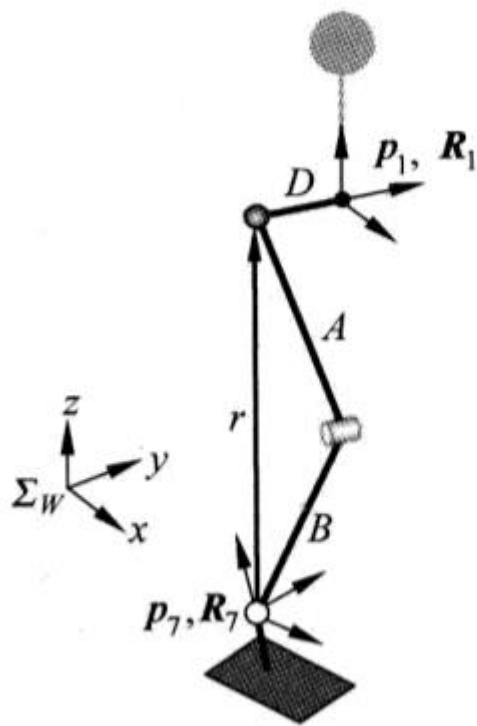
数值方法（需迭代，实时性差，通用性好）

解析方法（无需迭代，实时性好，通用性差）

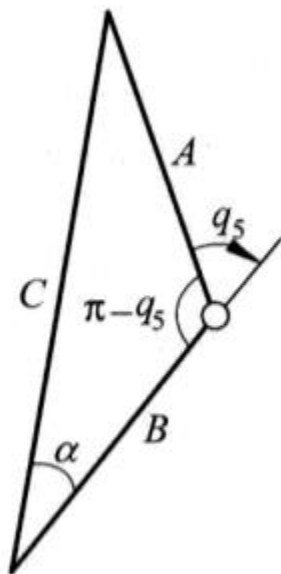


范例2：机器人的逆运动学

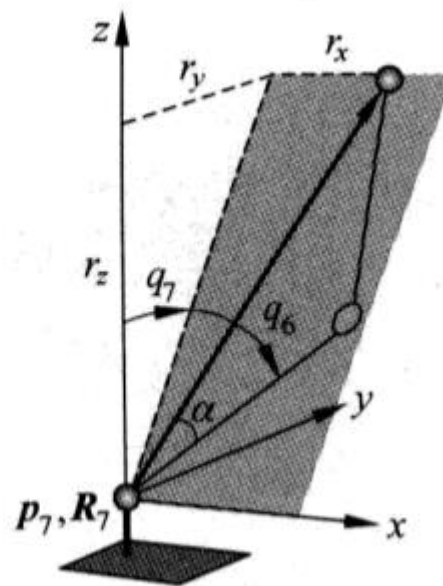
- 以右腿运动为例，给定躯干和右脚的位置 (p_1, R_1) 和 (p_7, R_7)



(a).



(b)



(c)

- 定义躯干原定到髋关节的距离为D，大腿长为A，小腿长为B

The End.

Thanks for your attention.

