期末复习题三

2019年12月19日 星期四　　上午8:59

一、计算n阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n-2 & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$ 的值

二、设 a,b,c,d 为任意实常数,有线性方程组如下:

$$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=a^3 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3 \\ x_1+dx_2+d^2x_3=d^3 \end{cases} \qquad (1)$$

1. 试证明当 a,b,c,d 互异时,上述方程组(1)无解

2. 设 $a=b=k$, $c=d=-k$, 且 $[-1,1,1]^T$ 是上述方程组(1)的一个特解,试求上述方程组(1)的所有解

三、设 $R^{2\times2}$ 是2阶实矩阵关于矩阵的加法和数乘运算构成的实线性空间,令 $V=\{A\in R^{2\times2} \mid trA=0\}$

1. 试求V关于矩阵的加法和数乘运算构成实数域R上的线性空间

2. 试求线性空间V的一组基和维数

四、设有n ($n\geq2$ 为正整数)阶矩阵如下: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

试求A的实特征值及其对应的特征向量

五、当t取何值时,实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-$

$2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型

六、设 $V=R[x]_3$ 是次数小于3的实系数一元多项式和零多项式组成的关于多项式加法和数乘所成的实线性空间

1. 试证明 $\{1+x^2, 1+x, 1\}$ 是 V 的一组基，记作基(I)

2. 若对于任意的实系数多项式 $p_1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$, $p_2(x)=b_1+b_2x+b_3x^2$, 定义它们的内积为 $(p_1(x), p_2(x))=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, 试用施密特正交化方法将上述基 $\{1+x^2, 1+x, 1\}$ 改造成 V 的标准正交基

3. 设 $\{1+x+x^2, 1-x^2, 1-x\}$ 是 V 的另一组基，记作基(II)，试求基(I)到基(II)的过渡矩阵

4. 问基(I)和基(II)在2中的内积下的度量矩阵之间有何关系？

七、设 A, B 都是 n 阶实方阵，求证：

1. $AB+B$ 和 $BA+B$ 有相同的特征值

2. 如果 $AB=(B-A^T)A$，则 $A=0$

八、试证明任何一个方阵可表示为一个幂等矩阵(满足 $A^2=A$ 的方阵)和一个可逆矩阵的乘积。