第7章　级数（六）

§7.7 函数的傅里叶级数展开

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

三角级数与三角函数系

我们称形如 $\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\omega x+B_n\sin n\omega x)$ 的级数为**三角级数**.

其周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. 其中 A_0; A_n, B_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 均为常数.

三角级数是由三角函数

$$1,\ \cos\omega x,\ \sin\omega x,\ \cos 2\omega x,\ \sin 2\omega x,\ \cdots,\ \cos n\omega x,\ \sin n\omega x,\ \cdots$$

所生成，以上这些三角函数称为**三角函数系**.

定义 若函数 $f(x), g(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=0$，则称 $f(x), g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上**正交**.

定理 三角函数系 $1,\ \cos\omega x,\ \sin\omega x,\ \cos 2\omega x,\ \sin 2\omega x,\ \cdots,\ \cos n\omega x,\ \sin n\omega x,\ \cdots$

在 $[a, a+T]\,(\forall a\in R)$ 上 $\left(\text{例如在}\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]\text{上}\right)$ 两两正交.

函数的傅里叶展开

由计算易得： $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\cdot\cos n\omega x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\cdot\sin n\omega x\mathrm{d}x=0$； $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x\cdot\sin m\omega x\mathrm{d}x=0$；

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x\cdot\cos m\omega x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \frac{T}{2}, & n=m\end{cases};\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x\cdot\sin m\omega x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \frac{T}{2}, & n=m\end{cases}.$$

假设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 可积，$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$，且可逐项积分，

这里 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，由三角函数系的正交性，有

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x;\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

这里 a_0, a_n, b_n，$n=1,2,3,\cdots$ 称为**傅里叶系数**；

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$ 称为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上的**傅里叶级数（傅里叶展开）**.

函数的傅里叶展开

特别，当 $T=2\pi$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ,$$

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$; $\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots.$

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时，$a_n=0,\ n=0,1,2,3,\cdots,\quad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots.$

此时展开的傅里叶级数称为**正弦级数**。

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，$b_n=0,\ n=1,2,3,\cdots,\quad a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,3,\cdots.$

此时展开的傅里叶级数称为**余弦级数**。

狄利克雷定理

定理 （Dirichlet）设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足：

(1)连续或者至多有有限多个第一类间断点；(2)至多有有限多个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且其和函数为

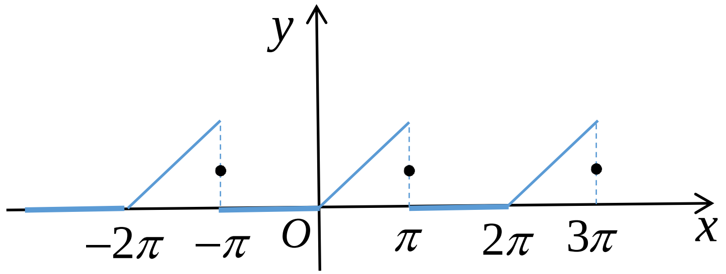
$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点，} \\ \dfrac{f(\frac{T}{2}-0)+f(\frac{T}{2}+0)}{2}, & \text{当 } x=\pm\dfrac{T}{2} \end{cases} \quad S(x+T)=S(x),\ \forall x\in R.$$

函数的傅里叶展开例题

例 1 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，并求其和函数 $S(x)$.

解

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]=S(x)=\begin{cases}f(x), & -\pi<x<\pi\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi\end{cases},\ S(x+2\pi)=S(x),\ \forall x\in R.$$

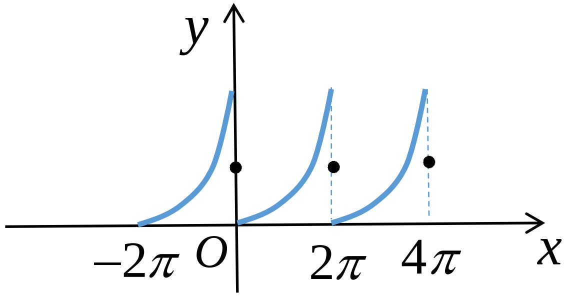
函数的傅里叶展开例题

例 2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=x^2$，　$0\le x<2\pi$，将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的值.

解

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2}{3};\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{4\pi}{n},\quad n=1,2,3,\cdots$$



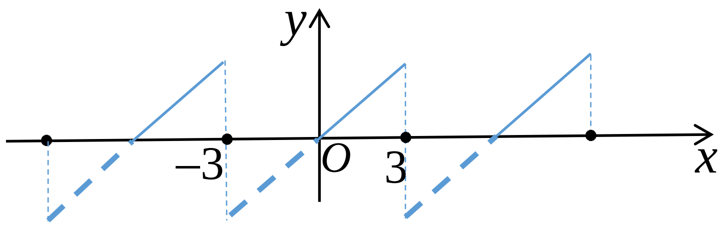
$$f(x)\sim\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx\right]=\begin{cases}x^2, & 0<x<2\pi\\ 2\pi^2, & x=0,\ 2\pi\end{cases}.$$

令 $x=0$ 得：$\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=2\pi^2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 令 $x=\pi$ 得：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

函数的傅里叶展开例题

例 3 设 $f(x)=x,\ x\in[0,3]$，将 $f(x)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数。

解 (1) 将 $f(x)$ “奇延拓” 为 $F(x)=x,\ x\in(-3,3]$，如图。然后将 $F(x)$ 展开为周期为 6 的傅里叶级数.



$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$

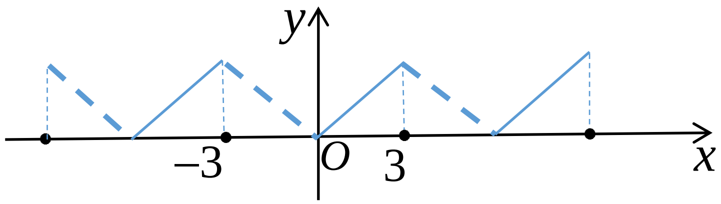
$$b_n=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3}F(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}x\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi},\ n=1,2,3,\cdots.$$

$$f(x)\sim\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}=S(x)=f(x)=x,\quad 0\le x<3;\qquad S(3)=0.$$

函数的傅里叶展开例题

(2) 将 $f(x)$“偶延拓”为 $G(x)=\begin{cases}-x, & -3\le x<0\\ x, & 0\le x\le 3\end{cases}$，如图。

然后将 $G(x)$ 展开为周期为 6 的傅里叶级数.



$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots,\qquad a_0=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3}G(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}x\mathrm{d}x=3;$$

$$a_n=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3}G(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}x\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{6\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2},\ n=1,2,3,\cdots.$$

$$f(x)\sim\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{3}=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{3}=S(x)=f(x)=x,\quad x\in[0,3].$$


谢谢！
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY