运动学

点的合成运动

刚体平面运动

两系一点

静参考系（定系）：**认定不动的参考系。**

动参考系（动系）：**相对静系运动着的参考系。**

动点：**研究对象。**

三种运动

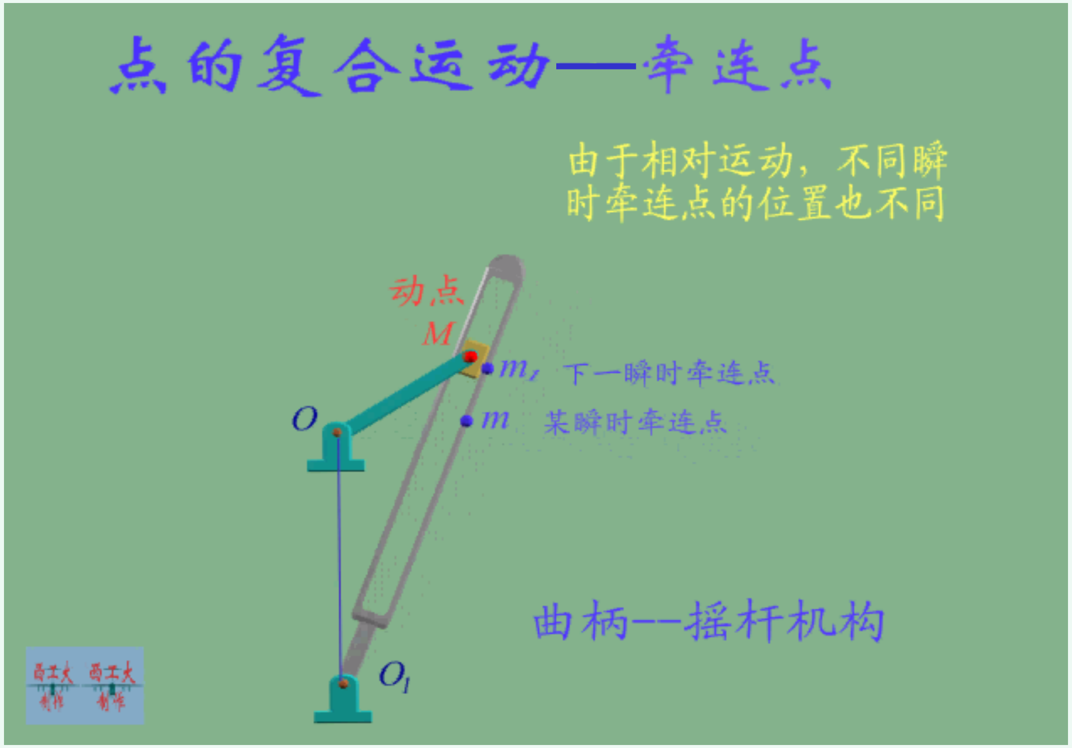
绝对运动：**动点对于定参考系的运动。**

相对运动：**动点对于动参考系的运动。**

牵连运动：**动参考系对于定参考系的运动。**

牵连点：某瞬时，动系上与动点重合的点。

$$\begin{cases} \text{a. 某瞬时动系上的固定点} \\ \text{b. 不同瞬时，牵连点不同} \end{cases}$$



三种速度

绝对速度(absolute velocity) v_a ：动点相对定系的速度。

相对速度(relative velocity) v_r ：动点相对动系的速度。

牵连速度(carrier velocity) v_e ：牵连点相对定系的速度。

● 三种加速度

绝对加速度$\boldsymbol{a}_\mathrm{a}$：**动点对于定系的加速度称为绝对加速度。**

相对加速度$\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$：**动点对于动系的加速度称为相对加速度。**

牵连加速度$\boldsymbol{a}_\mathrm{e}$：**牵连点相对于定系的加速度称为牵连加速度。**

● 动点和动系的选择

原则：(1) **动点对动系要有相对运动。**

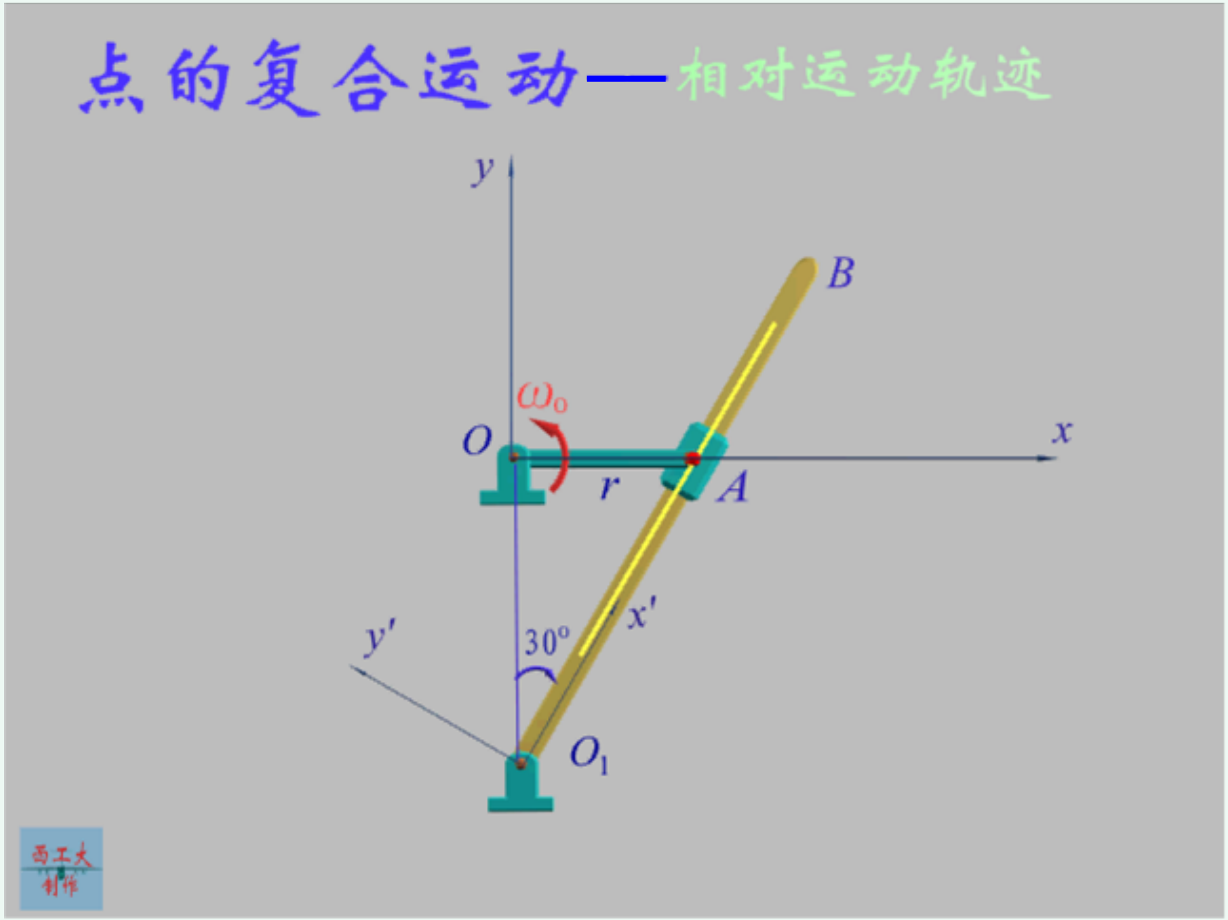
(2) **动点的相对轨迹要容易确定。**

具体选择方法：

(1) **选择持续接触点为动点。**

(2) **动系固连在瞬时重合点所在的物体上，这样相对运动轨迹就很容易确定。**

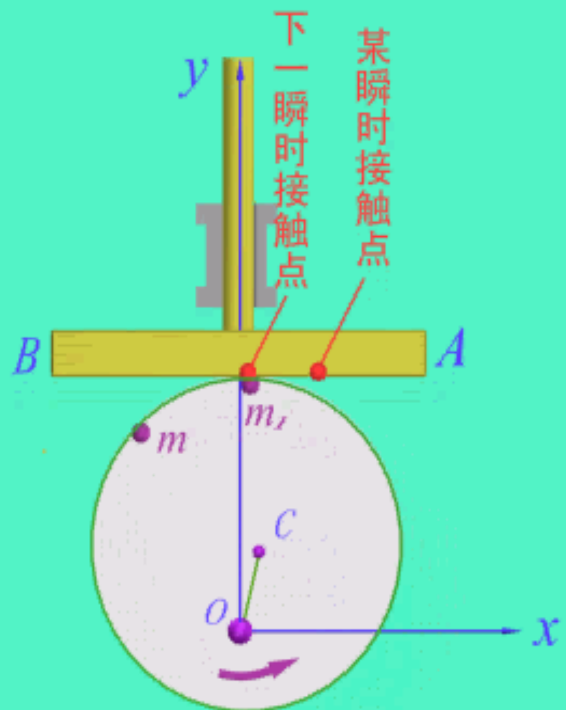
(3) **对没有持续接触点的问题，一般不选择接触点为动点。根据选择原则具体问题具体分析。**



动点—滑块 A 。

动系—固连于摇杆 O_1B。

点的复合运动——动点动系的选择



在机构传动问题中，一般选择持续接触点为动点。

但平底凸轮机构无持续接触点，如何选择动点呢？

平底凸轮机构

速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$$

绝对速度

相对速度

牵连速度

动点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和。

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$ —— 动系平动时点的加速度合成定理

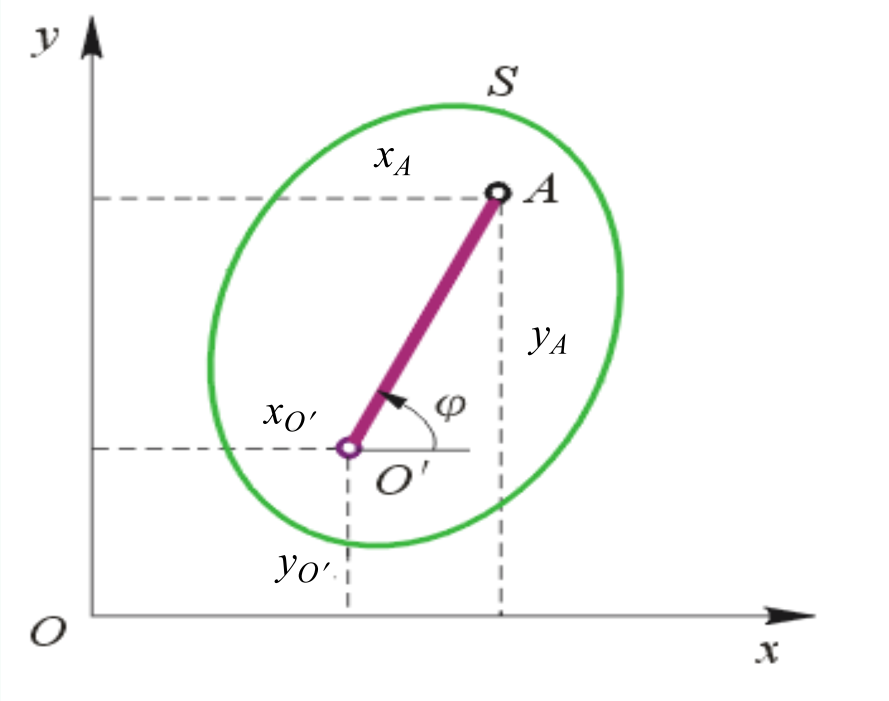
$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_r$$ 科氏加速度

牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理（科里奥利定理），即当牵连运动是定轴转动时，动点在每一瞬时的绝对加速度，等于它的牵连加速度、相对加速度和科氏加速度三者的矢量和。

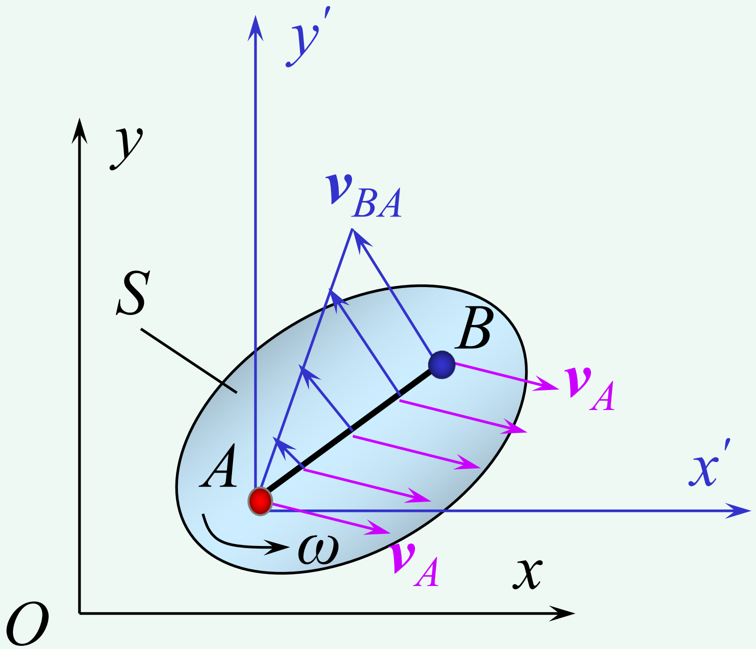
刚体平面运动：

确定同一刚体上两个点之间速度和加速度之间的关系



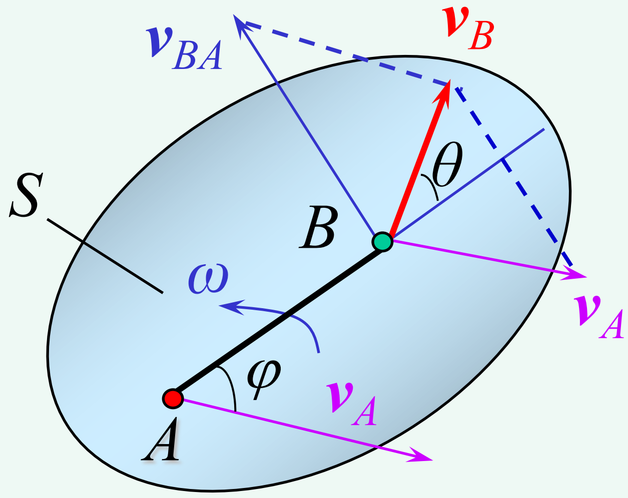
平面图形上各点的速度

1. 基点法



$$\boxed{v_B = v_A + v_{BA}}$$

2. 速度投影法



速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

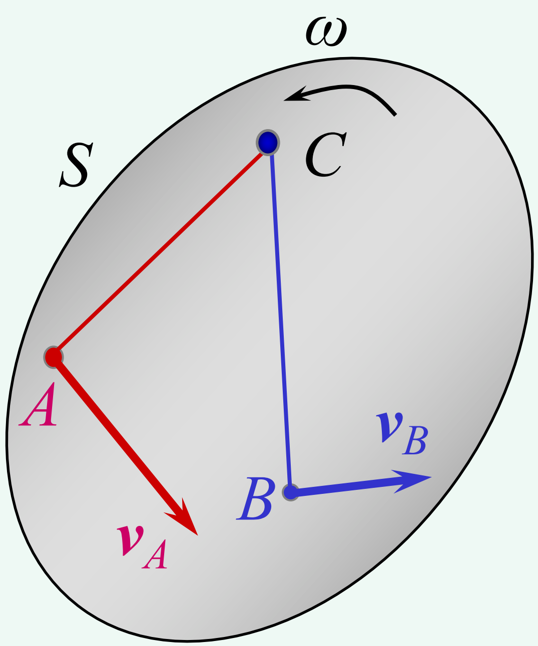
上式等号两侧 分别向AB连线上投影，因为v_{BA}垂直于AB，所以v_{BA}在AB上投影等于零。

则 $$[\boldsymbol{v}_A]_{AB} = [\boldsymbol{v}_B]_{AB}$$

或 $$v_A \cos\varphi = v_B \cos\theta$$

速度投影定理：平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

3. 速度瞬心法

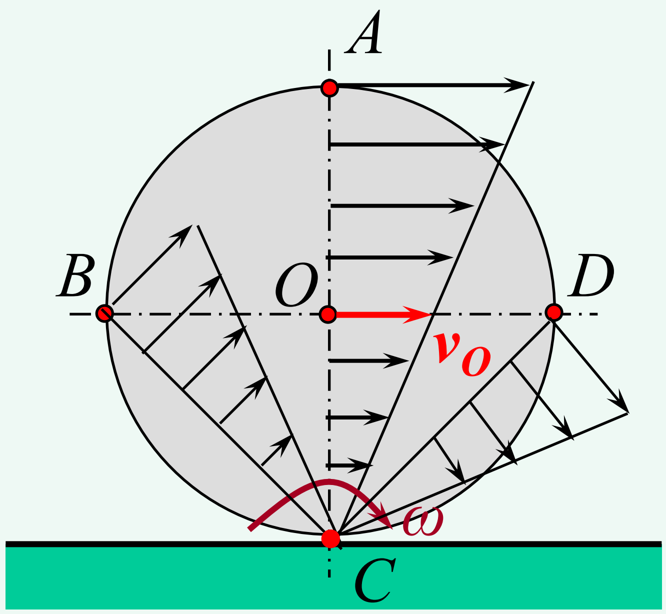


已知平面图形上两点的速度矢量的方向，这两点的速度矢量方向互不平行。

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC}$$

● 滚轮只滚不滑

车轮沿固定面只滚动而不滑动时，车轮与固定面的接触点C的速度为零。点C就是车轮的速度瞬心。



加速度

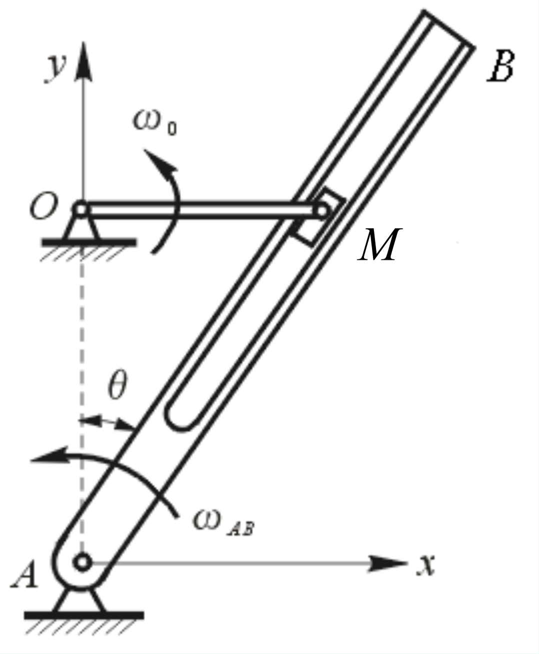
$$a_B = a_A + a_{BA}^t + a_{BA}^n$$

$$a_{BA}^t = \alpha * AB$$

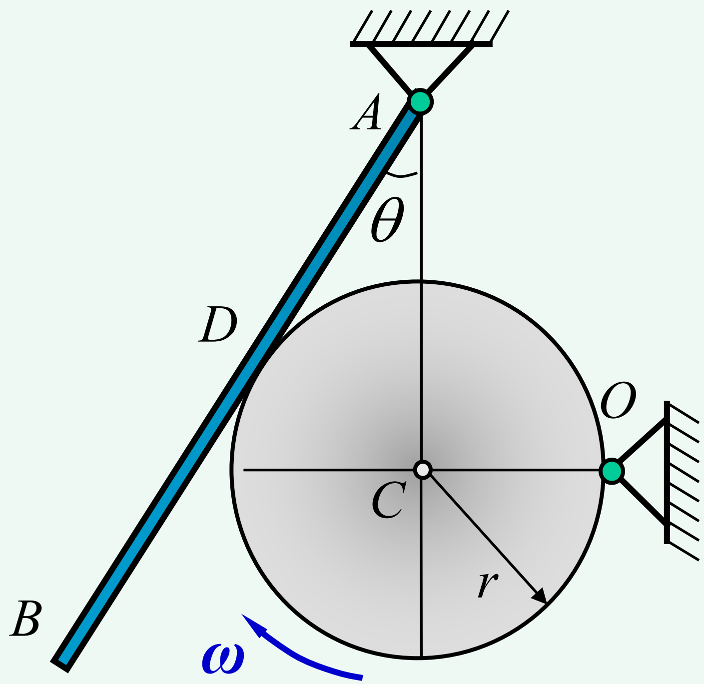
$$a_{BA}^n = \omega^2 * AB$$

平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与这一点相对于基点为坐标原点的平移系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

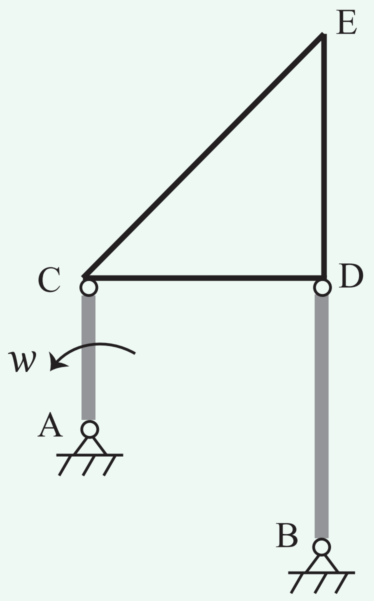
例 **如图所示。曲柄**OM**长**20 cm**，以转速**n=30 r/min**绕**O**点逆时针向转动，曲柄转轴与导杆转轴之间距离**OA = 20 cm **。试求当曲柄在水平位置时导杆**AB**的角速度和加速度。**

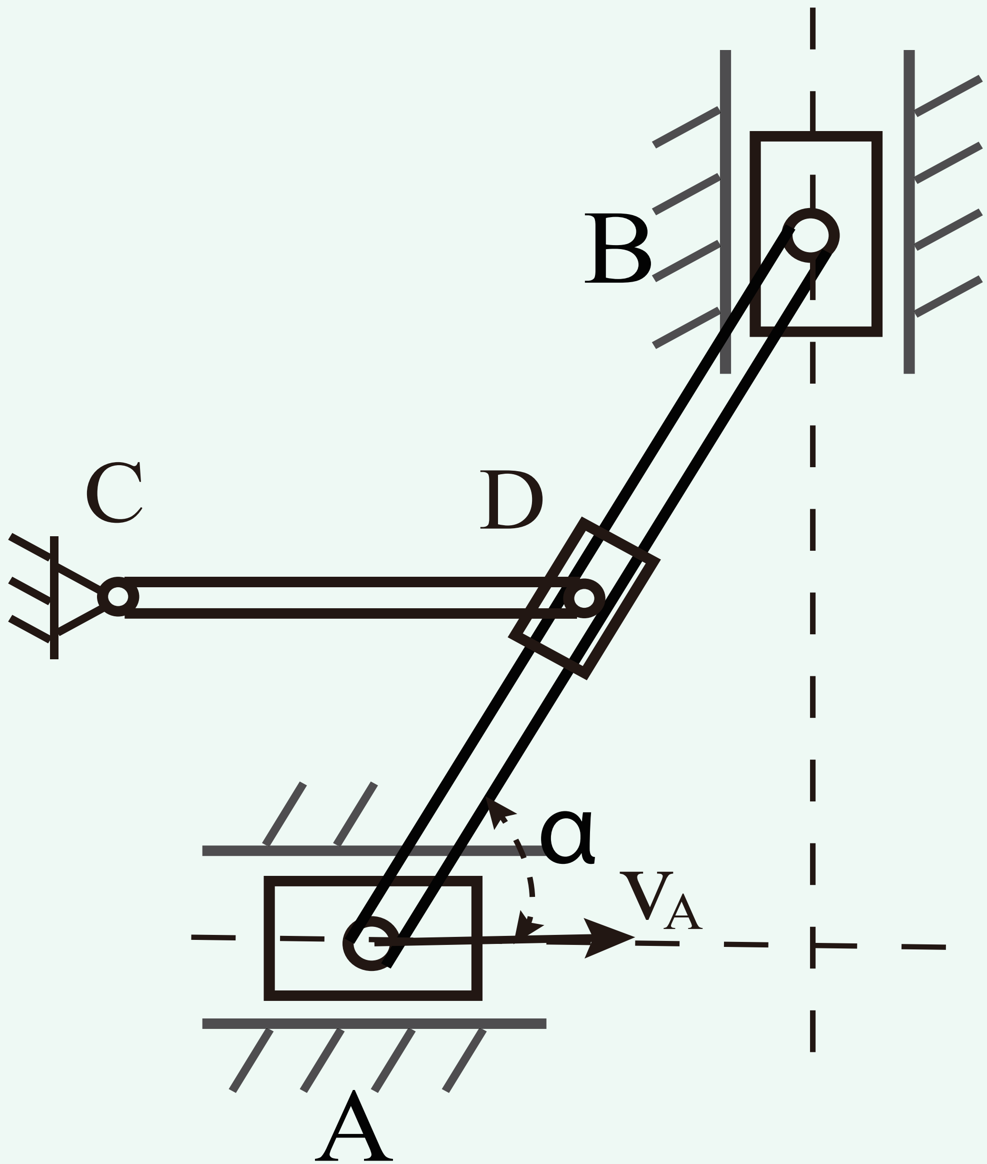


例 已知圆盘半径$r=2\sqrt{3}\ \text{cm}$,以匀角速度$\omega=2\ \text{rad/s}$绕位于盘缘的水平固定轴O转动，并带动杆AB 绕水平固定轴A转动，$AB=4r$ 。试求杆AB与铅直线夹角$\theta=30°$时杆AB角速度和角加速度。



例 图示机构中，杆AC长0.5l，CD、BD长为l，杆AC以匀角速度ω带动等腰直角三角形板CDE运动。图示时刻AC和BD位置均铅直，试求此时三角形板上点E的速度和加速度。




B
C
D
α
v_A
A

动力学

动量定理

（质心运动定理）

动量矩定理

动能定理

质心运动定理

质点系动量定理的表达式

$$Ma_C = \sum F^{(e)}$$

即，质点系的总质量与其质心加速度的乘积,等于作用在该质点系上所有外力的矢量和（主矢）,这就是质心运动定理。

动量矩定理：　固定点

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_O}$$

$$\boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

刚体对某固定点的动量矩随时间的变化率,等于作用于刚体的全部外力对同一点的矩的矢量和（外力对点O的**主矩**），这就是质点系对定点的动量矩定理。

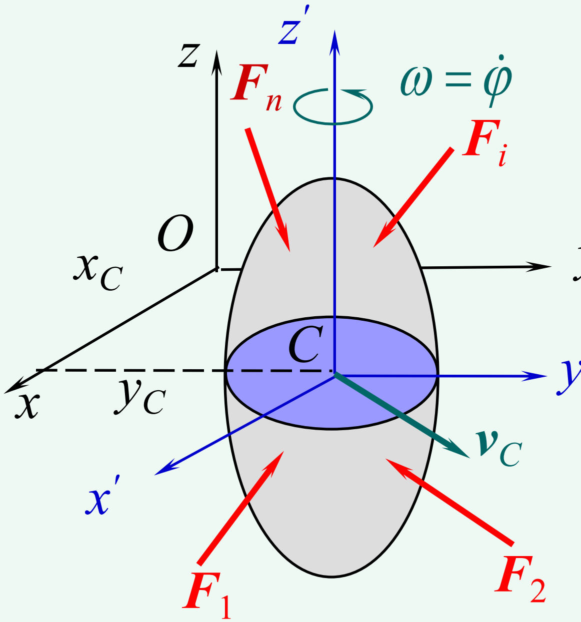
动量矩定理： 相对于质心的动量矩

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C}$$

这就是相对于质心的动量矩定理的一般形式。

即，刚体相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于刚体所受外力对质心的主矩。

$$\boxed{m_{\mathrm{R}}\ddot{x}_C=\sum F_x \ , \quad m_{\mathrm{R}}\ddot{y}_C=\sum F_y \ , \quad J_{Cz'}\ddot{\varphi}=M_{Cz'}(\boldsymbol{F})}$$



刚体的平面运动微分方程。可以应用它求解刚体作平面运动时的动力学问题。

动能定理微分和积分形式

微分形式 $\sum \mathrm{d}T = \sum \mathrm{d}'W$

积分形式 $T_2 - T_1 = \sum W$

式中 T_1、 T_2 分别代表某一运动过程中开始和终了时质点系的动能。上式表明质点系的动能在某一路程中的改变量，等于作用于质点系的各力在该路程中的功的代数和。这就是质点系动能定理的积分形式。

动量矩定理的一个核心问题是计算转动惯量

动能定理的（一个）核心问题是计算动能，某种程度上来说，也就是计算转动惯量

刚体动能，通常两种计算方法

1）质心动能+相对于质心的动能

2）从瞬心出发，计算相对于瞬心的转动惯量

只滚不滑的轮子

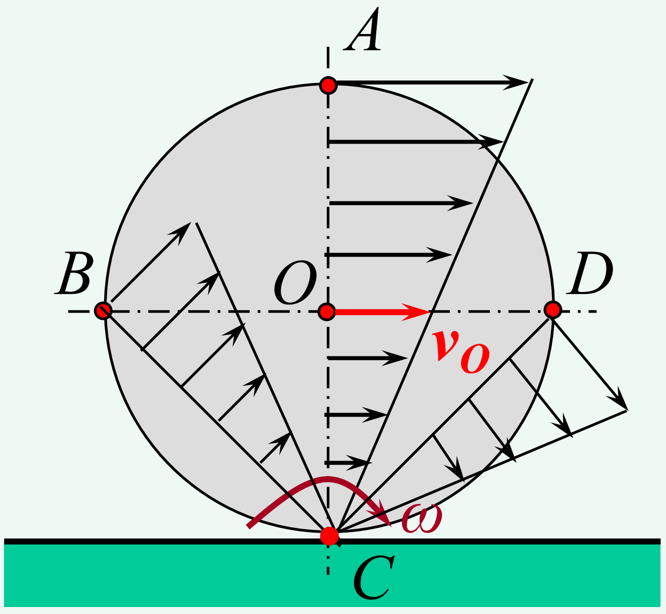
运动学关系

转动惯量：相对质心、相对瞬心

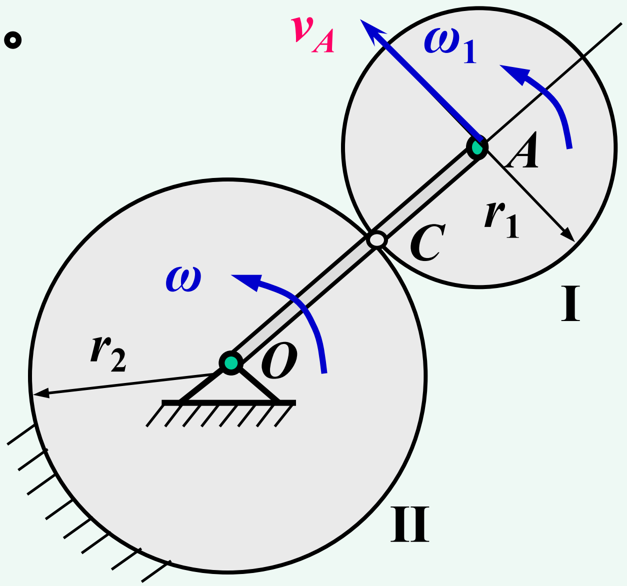
动能：两种计算方法

1）质心动能+相对于质心的动能

2）从瞬心出发



系统如图所示，轮I的质量为m_1，纯滚动，AO杆的质量为 m ，角速度为 ω ，试求系统的动能。



动力学三大定律的总结

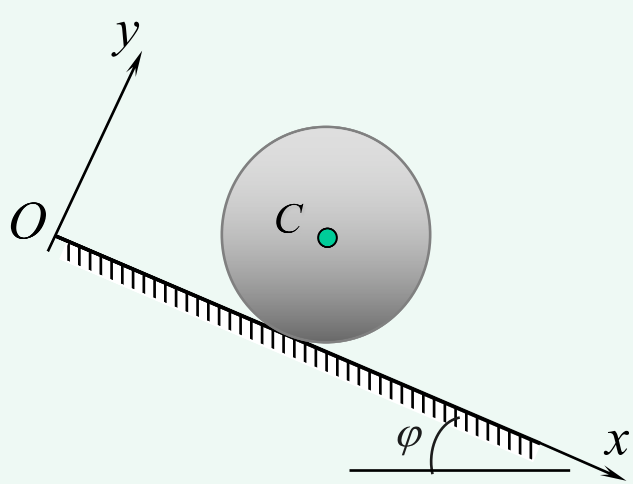
动力学普遍定理
- 动量定理
- 动量矩定理
- 动能定理

每个定理都有积分和微分两种形式（冲量和冲量矩定理未讲）

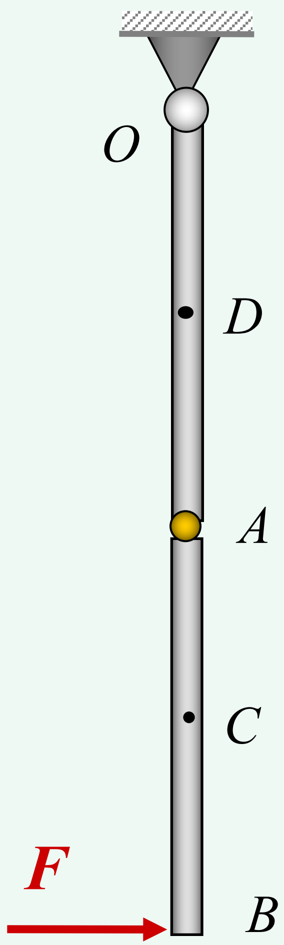
三者都可由对质点的牛顿定理推导出来，因而这些定理的数学方程具有某种等价性。

1）求速度和角速度：采用积分形式的定理；
2）求加速度和角加速度：采用微分形式的定理；
3）通常情况下，如果不计算理想约束力，可采用能量定理、或满足使约束力不出现在方程（约束力过转轴或与转轴平行等）中的定理。
4）微分形式定理的应用：应用求导运算时，应对于运动的一般位置进行分析；
5）其它注意事项：质心运动定理一般必用；注意运用守恒条件；补充运动学关系。

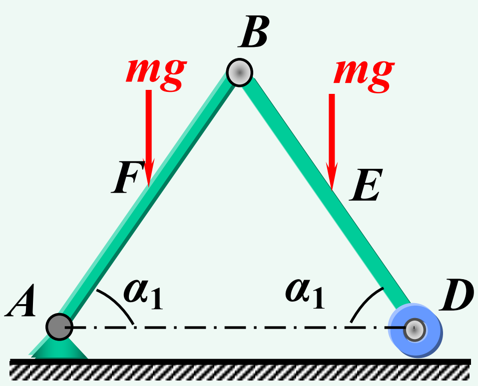
例 **匀质圆柱的质量是 m ，半径是 r，从静止开始沿倾角是φ 的固定斜面向下滚动而不滑动，斜面与圆柱的静摩擦系数是 f_{s}。试求圆柱质心 C 的加速度，以及保证圆柱滚动而不滑动的条件。**



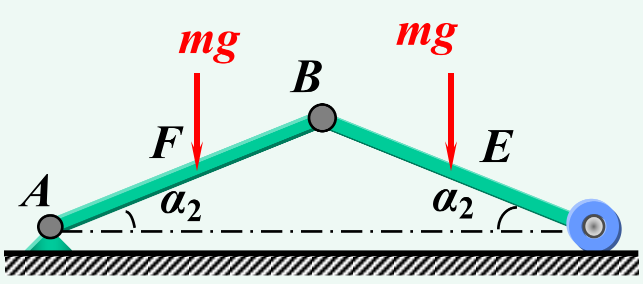
例　长为 l 、质量均是 m 的两根匀质细杆悬在O点，O、A为铰连接。试求力F作用瞬时两杆角加速度。



例 系统在铅直平面内由两根相同的匀质细直杆构成，A，B为铰链，D为小滚轮，且AD水平。每根杆的质量为 m，长度为 l，当仰角$\alpha_1=60^\circ$ 时，系统由静止释放。试求当仰角减到$\alpha_2=30^\circ$时，杆AB的角速度，摩擦和小滚轮的质量都不计。

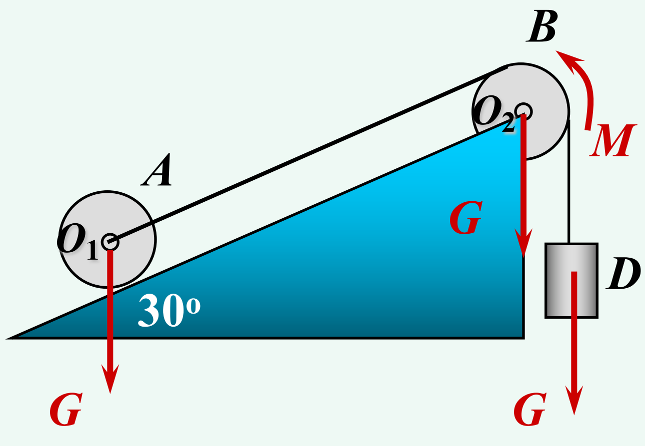


(a)

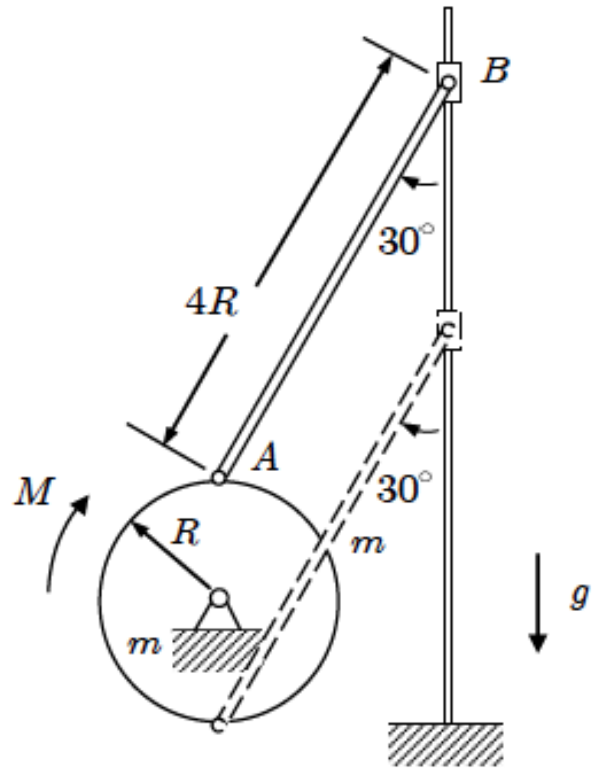


(b)

例 均质圆轮A和B的半径均为r，圆轮A和B以及物块D的重量均为G，圆轮B上作用有力偶矩为M的力偶。圆轮A在固定斜面上由静止向下作纯滚动，不计圆轮B的轴承的摩擦力。求：（1）物块D的加速度；（2）两圆轮之间的绳索所受拉力；（3）圆轮B处的轴承约束力。



题三、质量为m、半径为R的均质圆轮在恒力偶矩$M=4mgR/\pi$的驱动下作定轴转动；质量为m、长度为$4R$的均质杆AB的A端与圆轮边缘铰接，B端铰接无质量套筒，套筒可在铅垂滑杆上自由滑动。初始时刻A端处于圆轮最底端且系统静止（如图中虚线所示），终止时刻A端处于圆轮最顶端，不计各处摩擦，试求终止时刻：(1) 圆轮的角速度ω；(2) 圆轮的角加速度α和套筒受滑杆的支撑力F_N。(25 分)



周培源大学生
力学竞赛

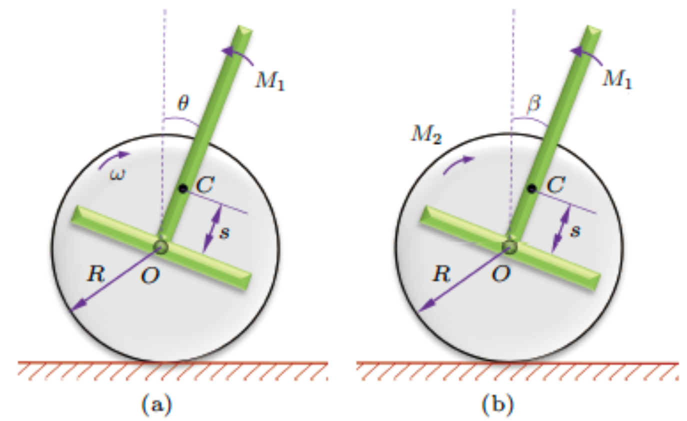
考试范围：
理论力学+材料力学
满分120分，考试时间3.5小时

2019年

图示铅垂平面内的系统，T形杆质量为m_1，对质心C的转动惯量为J_1；圆盘半径为R，质量为m_2，对质心O的转动惯量为J_2；杆和盘光滑铰接于点O，$\overline{CO}=s$。设重力加速度为g、地面和盘间的静摩擦因数为μ_0、动摩擦因数为μ，不计滚动摩阻。

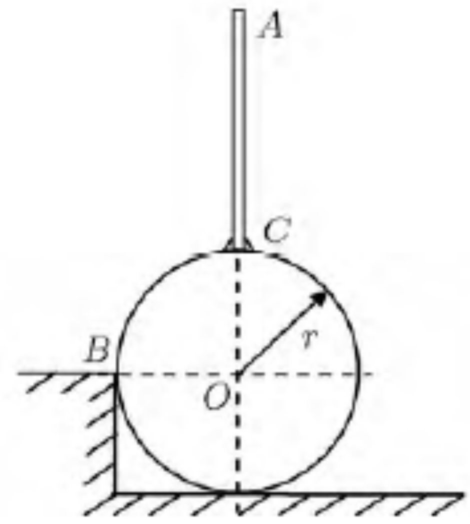
(1) 如图(a)，盘以匀角速度ω沿水平地面向右作纯滚动。为使杆保持与铅垂方向夹角θ $(0\leqslant\theta<\pi/2)$不变，需在杆上施加多大的力偶矩M_1？并求此时地面作用于盘的摩擦力F；(5分)

(2) 如图(b)，当盘上施加顺时针的常力偶矩M_2，同时$M_1=0$，杆作平移，分析圆盘的可能运动，并求杆与铅垂方向夹角β、盘的角加速度ε及地面对盘的摩擦力F。(25分)

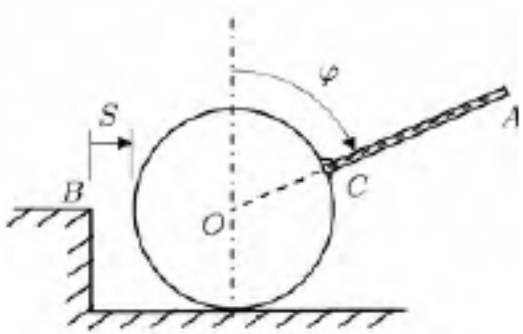


2017年

十一、(共 15 分) 如题图 21(a) 所示，质量均为 m 的圆轮和细直杆 AC 固结成一组合刚体. 其中，杆 AC 沿圆轮径向，O 为圆轮轮心，C 点为轮与杆的固结点，也是组合刚体的质心. 初始时刻，组合刚体静止于水平面，左边紧靠高度为 r 的水平台阶，然后，在图示不稳定平衡位置受微小扰动后向右倾倒，以 φ 表示组合刚体在杆端 A 与地面接触之前的转动角度 (参见图 21(b)). 圆轮，半径为 r，组合刚体关于过轮心 O 并垂直于圆轮的轴之转动惯量为 J_O. 略去各处摩擦，试求解如下问题.



(a)



(b)

预祝考试顺利！