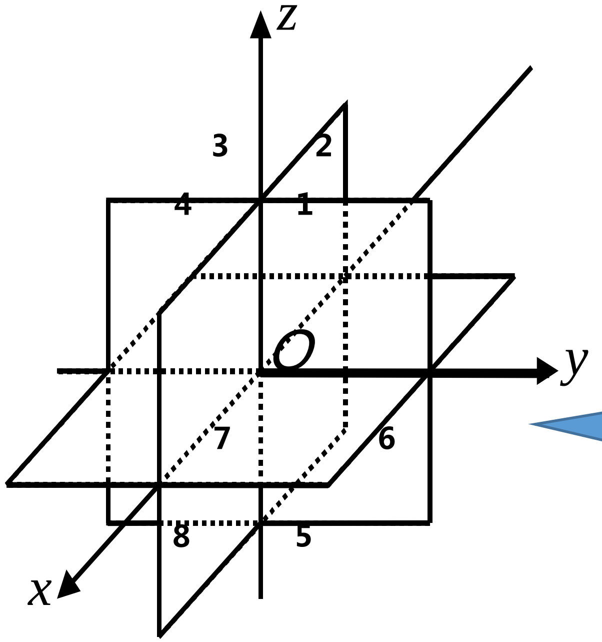
第8章（三）

§8.3 空间直角坐标系及向量的表示和运算

数学科学学院　卢兴江

空间直角坐标系



八个卦限

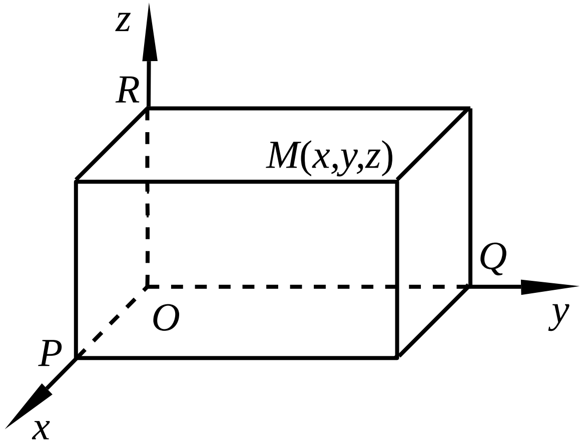
坐标原点： O

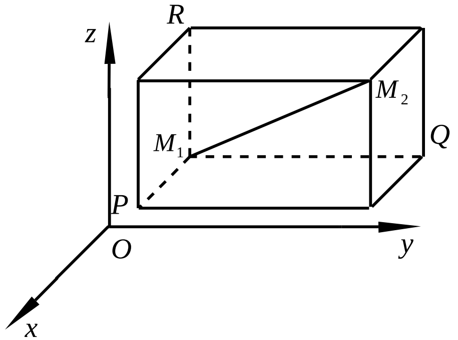
坐 标 轴： 横轴 x 轴，纵轴 y 轴 ，竖轴 z 轴

坐标平面： xoy 平面，yoz 平面，zox 平面

坐标： $M\,(x,\ y,\ z)$

横坐标　　纵坐标　　竖坐标

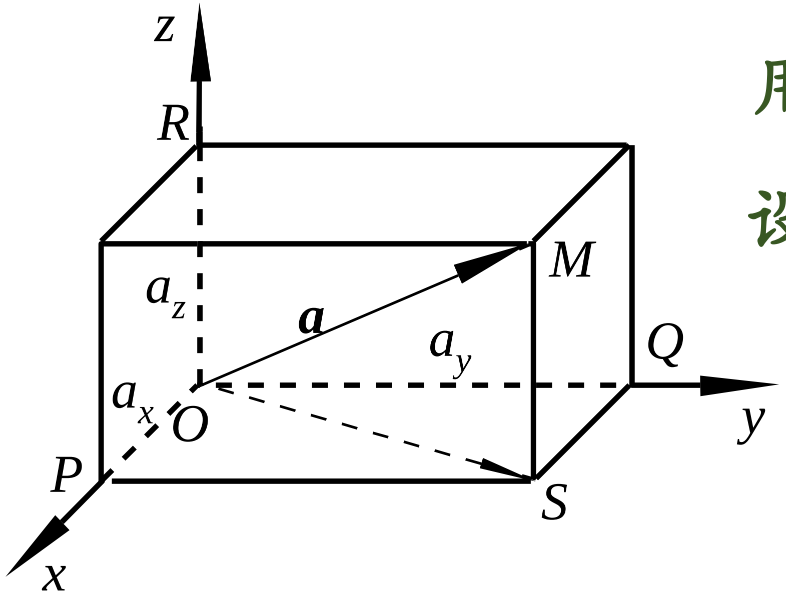




两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ **之间的距离：**

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

矢量的坐标表示及运算



用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示 Ox轴, Oy轴, Oz轴正向的单位矢量。

设M的坐标为（a_x, a_y, a_z），则

$$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x, a_y, a_z)$$

模 $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$

方向
- 方向角： α,β,γ
- 方向余弦： $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|},\cos\gamma=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$

单位矢量：

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

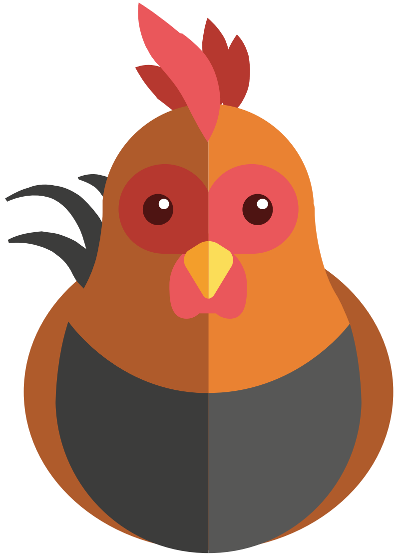
矢量的坐标表示及运算

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ 则：

加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$

减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$

数乘 $m\boldsymbol{a}=(ma_1)\boldsymbol{i}+(ma_2)\boldsymbol{j}+(ma_3)\boldsymbol{k}$ ， $m\in R$



定理 若 $\vec{a}\neq 0$， 则

$$\vec{a}\,||\,\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \exists m\in R,\ \vec{b}=m\vec{a} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$$

矢量的坐标表示及运算

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$， $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$， 则

由 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$， $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$ 得

点乘 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},\quad \theta=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

定理 $\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

矢量的坐标表示及运算

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$， $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$， $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$， 则

由 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$； $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ 得

叉乘

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\times\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)$$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}-\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\vec{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}\triangleq\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

混合积

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left[\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}-\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\vec{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}\right]\cdot\left(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

谢谢！

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY