第二章 质点动力学

(§2.6 - §2.8)

§2.6 密舍尔斯基方程 火箭运动

§2.7 功 质点动能定理

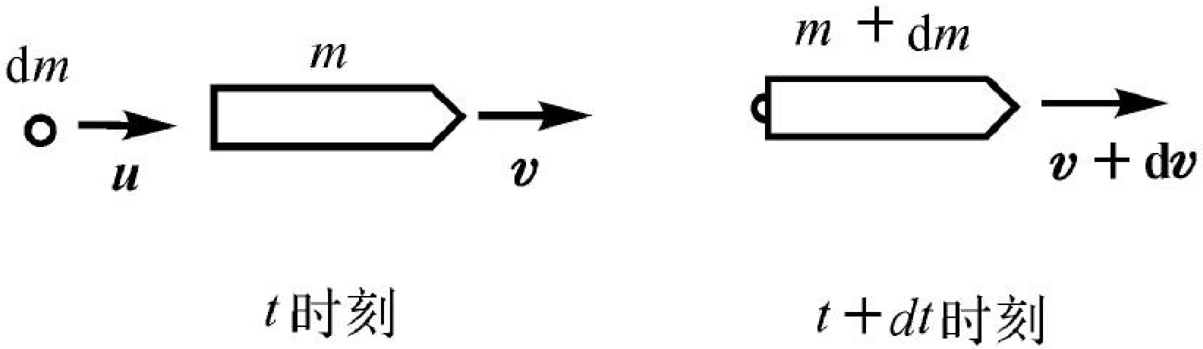
§2.8 势能

§ 2.6 密舍尔斯基方程
火箭运动

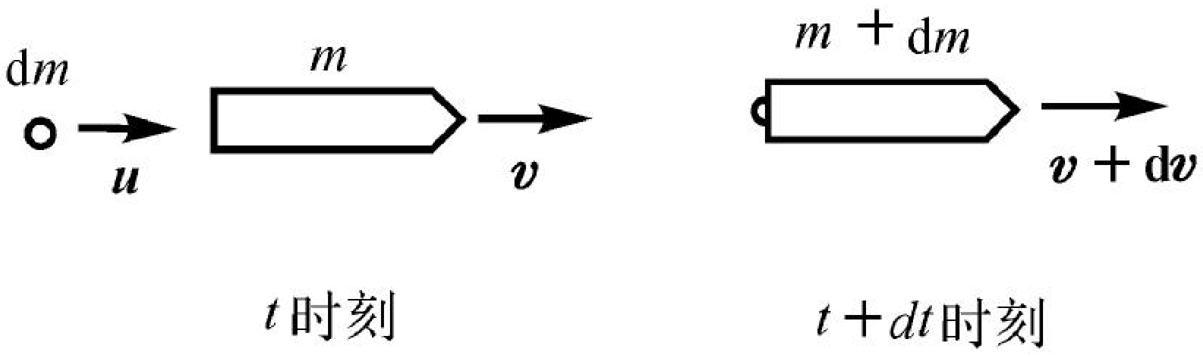
1、密舍尔斯基方程

变质量系统的运动方程

（火箭、雨滴、提绳子等）



主体和即将加上去的流动物构成质点系。



设主体和流动物所受外力分别为F和f，根据质点系动量定理的微分形式：

$$(\vec{F}+\vec{f})dt=(m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})-(m\vec{\upsilon}+\vec{u}dm)$$

$\vec{F} >> \vec{f}$ 略去二阶无限小量

$$\vec{F}dt=m(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})+dm\vec{\upsilon}-m\vec{\upsilon}-\vec{u}dm$$

$$\vec{F}dt = m(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})+dm\vec{\upsilon}-m\vec{\upsilon}-\vec{u}dm$$

$$\vec{F}+(\vec{u}-\vec{\upsilon})\frac{dm}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}+\vec{\upsilon}'\frac{dm}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}}$$

主体运动方程

密舍尔斯基方程

式中**F**为主体所受合外力，**m**为主体质量，**v**为主体速度，**v'**为流动物相对于主体的速度。

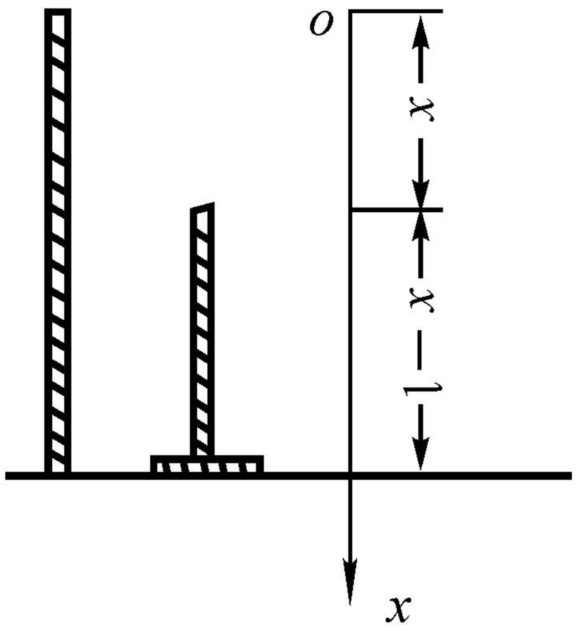
$$\vec{\upsilon}'\frac{dm}{dt}$$

流动物**dm**对主体的作用力

若$dm/dt>0$，v_{rel}与v同向，作用力为推力。

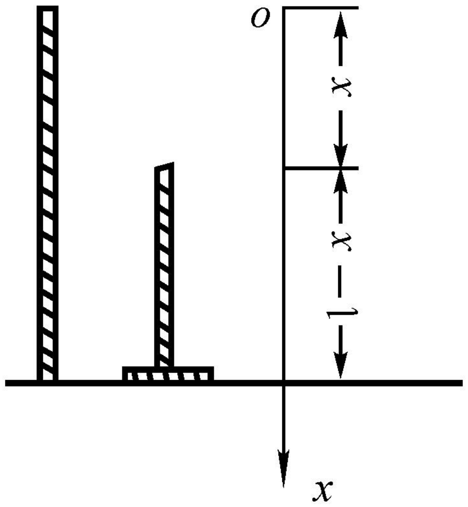
若$dm/dt<0$，v_{rel}与v反向，作用力也为推力。

例1、质量为M，长为L软绳竖直下垂，下端刚好触及水平地面。若让它由静止开始自由落体，求已落下x长一段时，地面所受压力。



解：取主体为桌面上的绳子：

$m = Mx/L$;流动物为$dm = M\,dx/L$ 。



$$\because m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \quad \therefore 0 = (mg - N) + v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$m = \frac{M}{L}x, \quad dm = \frac{M}{L}dx, \quad v' = \sqrt{2gx,}$$

$$\therefore 0 = \frac{M}{L}xg - N + \frac{M}{L}2gx = 3gx\frac{M}{L} - N$$

$$N = 3gx\frac{M}{L}$$

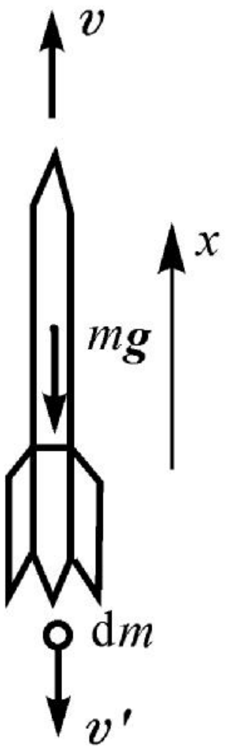
所以地面所受的压力大小为 3gxM/L
方向竖直向下。

2、火箭运动

(a)在重力场中竖直发射

由密舍尔斯基方程：

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}+\vec{\upsilon}'\frac{dm}{dt}$$



以竖直向上为轴正方向，则：

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=(-mg)+(-\upsilon')\frac{dm}{dt}$$

$$t=0$$

分离变量，积分，并代入初始条件：

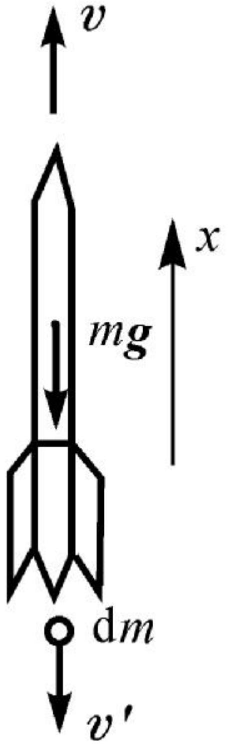
$$\upsilon=0$$

$$m=m_0$$

$$\upsilon=\upsilon'\ln\frac{m_0}{m}-gt$$

(b) 在不受外力情况下发射

若反冲力远大于重力时，重力可忽略。



$$m\frac{d\upsilon}{dt}=-\upsilon'\frac{dm}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\upsilon=\upsilon'\ln\frac{m_0}{m}$$

$$L=\int_0^t \upsilon dt=\int_0^t \upsilon'\ln\frac{m_0}{m}dt$$ 飞行距离

A Long March II F rocket blasts off with the Shenzhou IV in the rocket base of Jiuquan in Northwest China's Gansu Province on December 30, 2002. [Xinhua]

神州 V

$$\upsilon = \upsilon' \ln \frac{m_0}{m_f} - gt \qquad \upsilon = \upsilon' \ln \frac{m_0}{m_f}$$

讨论：增加火箭速度的方法

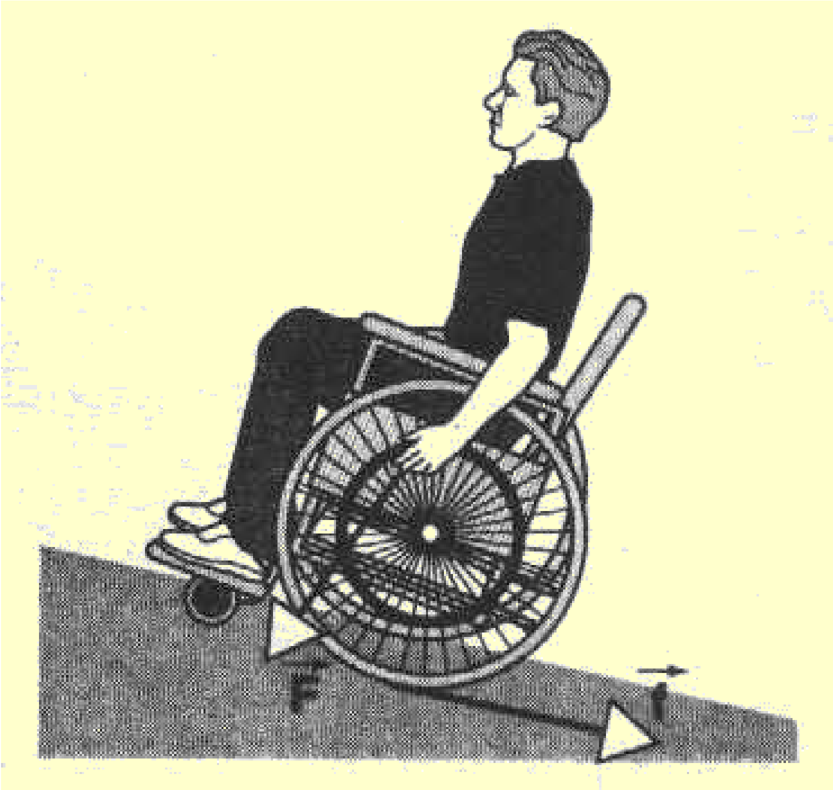
①增大v_{rel} 。 理论上可达到5000m/s，实际上达到2500m/s有困难；

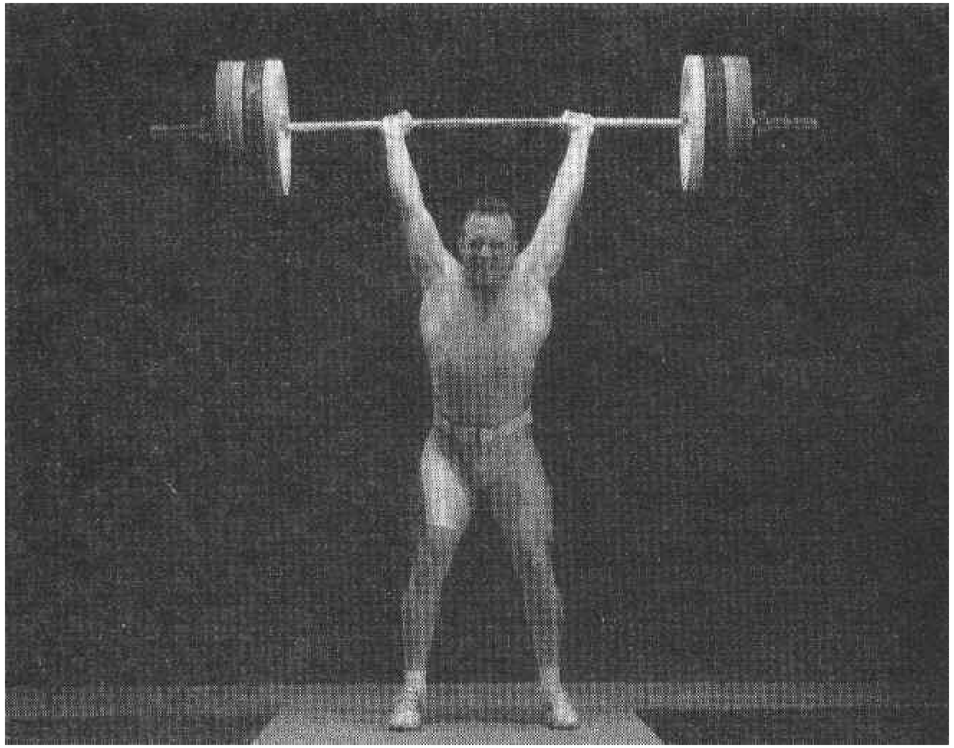
②增加m_0/m_f。质量比要到49才能达到第一宇宙速度，很困难。

必须采用多级火箭才能真正提高速度！

§ 2.7 功 质点动能定理

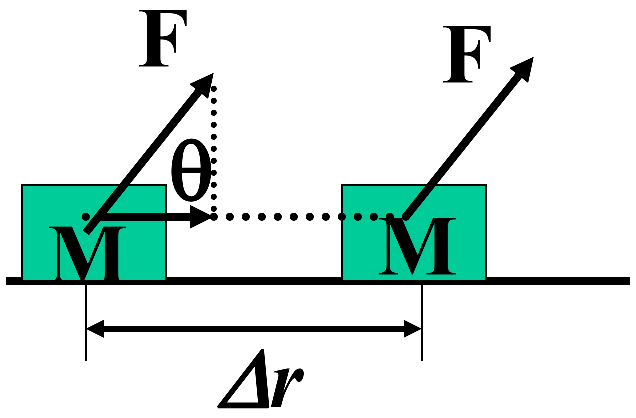
功　　力的空间积累





功?

1、恒力的功



记作 $A=\vec{F}\bullet\Delta\vec{r}=F\cos\theta\Delta r=F_t\Delta r$

位移无限小时： $dA=\vec{F}\bullet d\vec{r}$

元功：***dA***；元位移： $d\vec{r}$

功等于质点受的力和它的位移的点乘

功是标量，没有方向，但有正负

$0\le\theta<\pi/2 \quad A>0$

$\pi/2<\theta\le\pi \quad A<0$

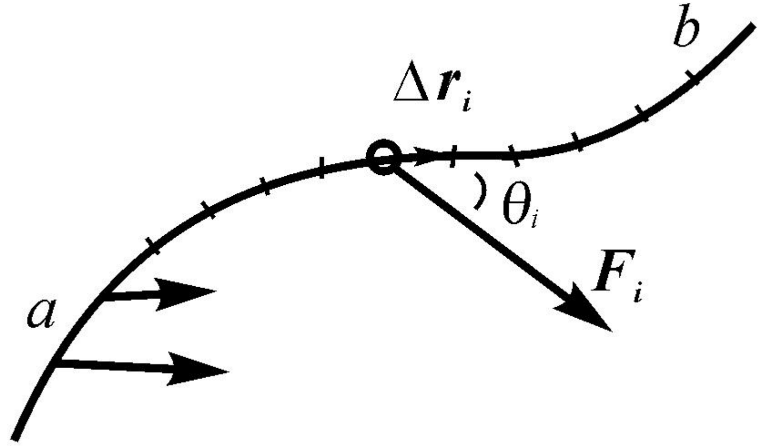
$\theta=\pi/2 \quad A=0$

2、变力的功

设质点在力的作用下沿一曲线运动，则功的计算如下：

ab分成许多小段Δr_i, Δr_i范围内F恒定

$$A \approx \sum \vec{F}_i \bullet \Delta \vec{r}_i$$



$\Delta r_i \to 0$， A→准确

$$A = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_a^b \vec{F}_i \bullet \Delta \vec{r}_i = \int_a^b \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i$$

在直角坐标系中

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

注意：1、功是过程量，与路径有关。2、功是标量，但有正负。3、合力的功为各分力的功的代数和。

例2、质量为2kg的质点在力 $\vec{F}=12t\vec{i}$ (SI) 的作用下，从静止出发，沿x轴正向作直线运动。求前三秒内该力所作的功。

解：（一维运动可以用标量）

$$A=\int \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int 12tvdt$$

$$v=v_0+\int_0^t adt=0+\int_0^t \frac{F}{m}dt=\int_0^t \frac{12t}{2}dt=3t^2$$

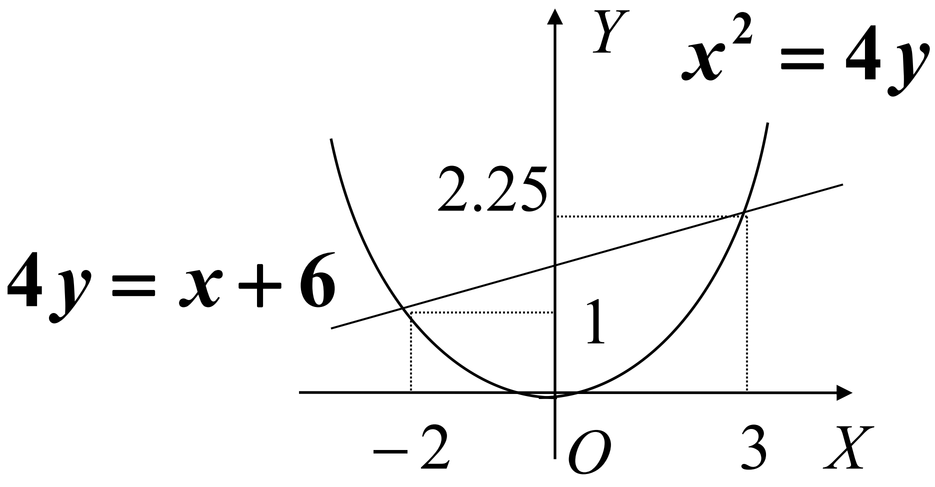
$$\therefore A=\int_0^3 12t\cdot 3t^2dt=\int_0^3 36t^3dt=9t^4=729J$$

例3 作用在质点上的力为 $\vec{F}=2y\vec{i}+4\vec{j}(N)$

在下列情况下求质点从$x_1=-2(m)$处运动到 $x_2=3(m)$ 处该力作的功：

1. 质点的运动轨道为抛物线 $x^2=4y$

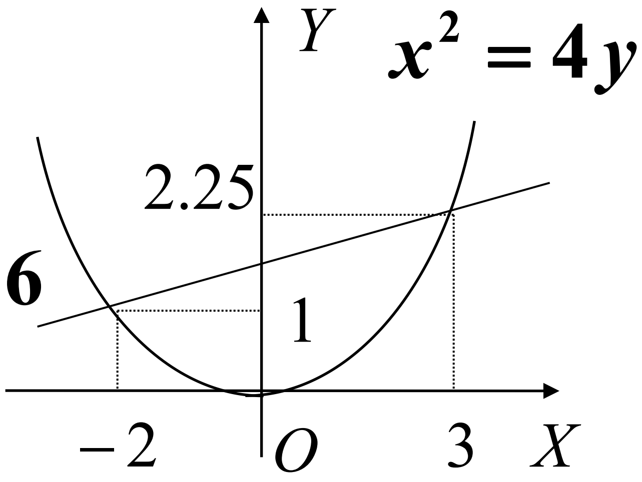
2. 质点的运动轨道为直线 $4y=x+6$



$$A=\int_a^b \vec{F}\bullet d\vec{r}$$

$$=\int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$4y=x+6$$



$$\vec{F}=2y\vec{i}+4\vec{j}(N)$$

$$A_1=\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2}(F_x dx+F_y dy)=\int_{x_1}^{x_2}2y dx+\int_{y_1}^{y_2}4dy$$

$$=\int_{-2}^{3}\frac{x^2}{2}dx+\int_1^{9/4}4dy=10.8J$$

$$A_2=\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2}(F_x dx+F_y dy)=\int_{x_1}^{x_2}2y dx+\int_{y_1}^{y_2}4dy$$

$$=\int_{-2}^{3}\frac{1}{2}(x+6)dx+\int_1^{9/4}4dy=21.25J$$

做功与路径有关

3、功率：

力在单位时间内所作的功

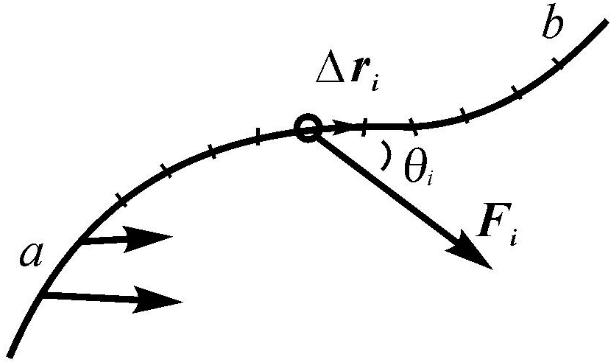
若在Δt时间内作功ΔA，则：

平均功率：$\overline{P} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

瞬时功率：$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{dA}{dt}$

$$\because\ dA = \vec{F} \bullet d\vec{r}\ \therefore\ P = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

4、质点的动能定理



$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b F_t \left| d\vec{r} \right|$$

$$= m \int_a^b a_t \left| d\vec{r} \right|$$

$$a_t = dv/dt \qquad \left| d\vec{r} \right| = vdt$$

$$A_{ab} = m \int_a^b dv/dt \cdot vdt = m \int_{v_a}^{v_b} vdv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

定义：动能$E_k=mv^2/2$　$A_{ab}=E_{Kb}-E_{ka}=\Delta E_K$。

动能是状态量, 动能是质点因运动而具有的做功本领。

5、质点系的动能定理

质点：m_1　m_2

内力：$\vec{f}_1$　$\vec{f}_2$　初速度：$\vec{v}_{1A}$　$\vec{v}_{2A}$

外力：$\vec{F}_1$　$\vec{F}_2$　末速度：$\vec{v}_{1B}$　$\vec{v}_{2B}$

$$m_1: \quad \int_{A_1}^{B_1} \vec{F}_1 \bullet d\vec{r}_1 + \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_1 \bullet d\vec{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2$$

$$m_2: \quad \int_{A_2}^{B_2} \vec{F}_2 \bullet d\vec{r}_2 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_2 \bullet d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2$$

两式相加得：

$$\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_1\bullet d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_2\bullet d\vec{r}_2+\int_{A_1}^{B_1}\vec{f}_1\bullet d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{f}_2\bullet d\vec{r}_2$$

$$=\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2B}^2-(\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2A}^2)$$

即：外力的功之和＋内力的功之和

＝系统末动能－系统初动能

记作：$A_{外}+A_{内}=E_{KB}-E_{KA}$

所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量。

注意：内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量。

§2.8 势能

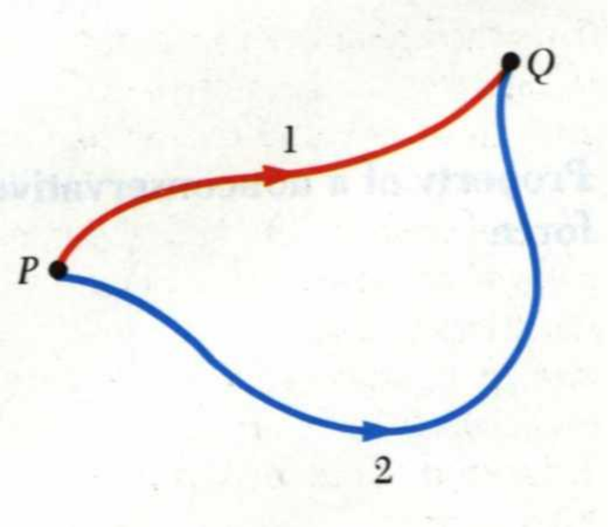
1、势能：由于物体位置的变化而具有的能量为势能。

2、引入势能的条件：

（1）质点系；（2）保守内力做功。

1、保守力：做功与路径无关，只与始末位置有关的力为保守力。

$$A_{PQ}(沿1) = A_{PQ}(沿2)$$



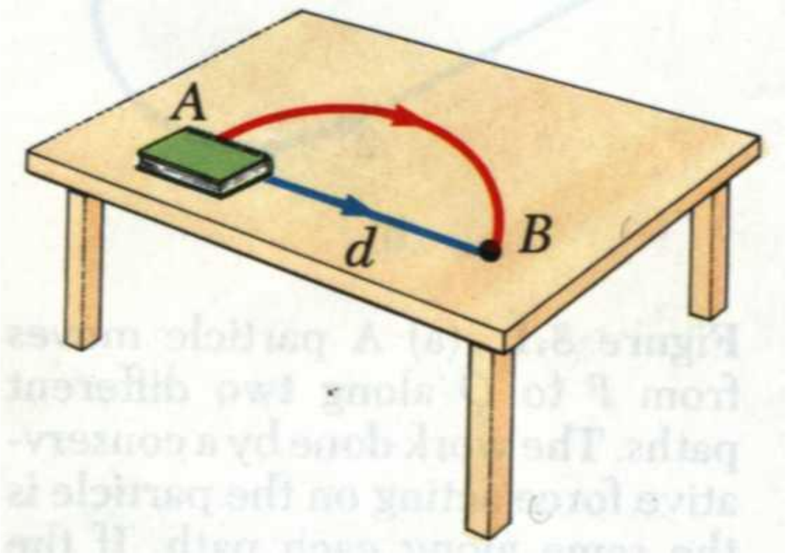
保守力沿任意闭合路径所做的功为零。

万有引力、静电力、弹性力

2、非保守力：做功的大小与路径有关。

$$A_{ab}(沿1) = -f.d$$

$$A_{ab}(沿2) = -f.\pi.\frac{d}{2}$$



(1) 重力的功

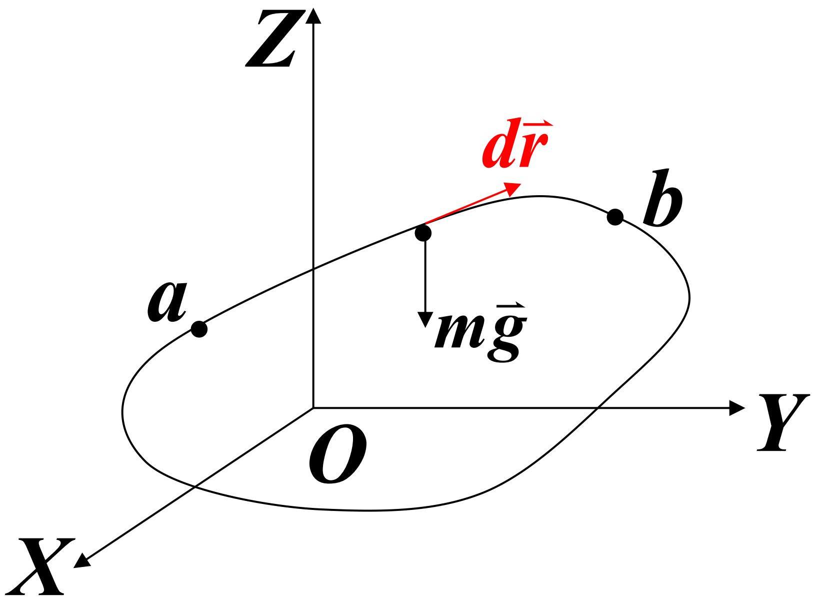
m在重力作用下由a运动到b，取地面为坐标原点.

$$A_G = \int_a^b m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b (-mg)\vec{k}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= \int_{z_a}^{z_b} -mgdz$$

$$= \underbrace{mgz_a}_{\text{初态量}} - \underbrace{mgz_b}_{\text{末态量}}$$

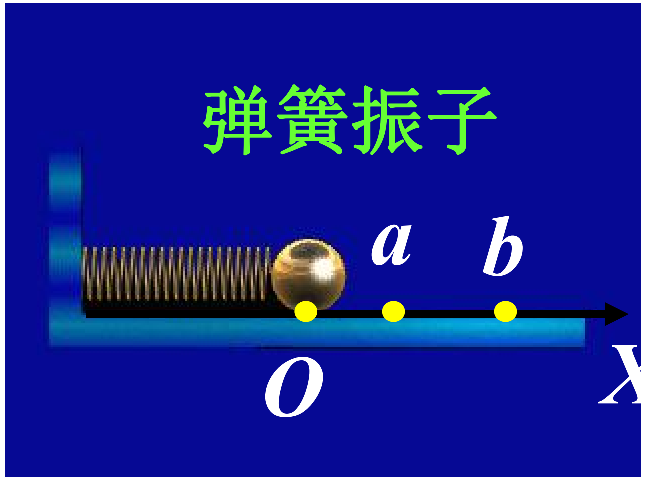


(2) 弹力的功

$$F = -kx$$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} -kx\,dx = -\left(\frac{1}{2}kx_b^{\ 2} - \frac{1}{2}kx_a^{\ 2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}kx_a^{\ 2}}_{\text{初态量}} - \underbrace{\frac{1}{2}kx_b^{\ 2}}_{\text{末态量}}$$



(3) 引力的功

两个质点之间在引力作用下相对运动时，以M所在处为原点，M指向m的方向为矢径的正方向。m受的引力方向与矢径方向相反。

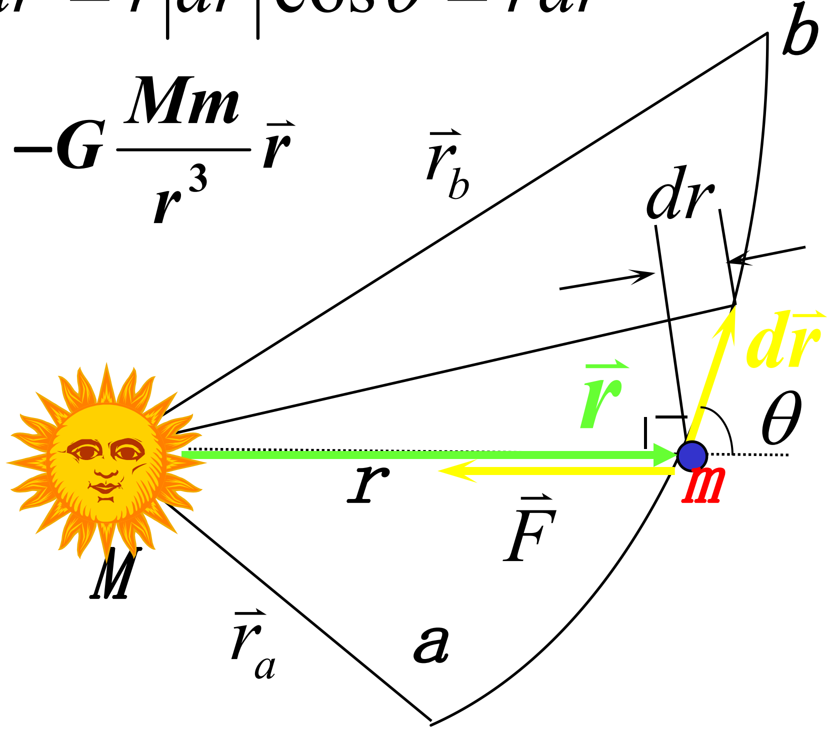
$$A=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\bullet d\vec{r}$$

$$=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^3}rdr$$

$$=\underbrace{(-G\frac{Mm}{r_a})}_{\text{初态量}}-\underbrace{(-G\frac{Mm}{r_b})}_{\text{末态量}}$$

$$\vec{r}\bullet d\vec{r}=r|d\vec{r}|\cos\theta=rdr$$

$$\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$



3、势能和保守力的关系：

(1) 保守力所做的功等于系统势能增量的负值。

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{重} &= -(mgz_b - mgz_a) \\
A_{引} &= -\left[\left(-G_0\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G_0\frac{Mm}{r_a}\right)\right] \\
A_{弹} &= -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
A_{保} &= \int_a^b \vec{F}_{保} \bullet d\vec{r} \\
&= E_{p_a} - E_{p_b} \\
&= -\Delta E_p
\end{aligned}
$$

保守力做正功等于相应势能的减少；

保守力做负功等于相应势能的增加。

$$A=\int_a^b \vec{F}_{保}\bullet d\vec{r}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p$$

设b点为零势能位置，$E_{pb}=0$；则作任一位置a相应的势能为：

$$E_{pa}=\int_a^{零势能位置}\vec{F}\bullet d\vec{r}$$

质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

重力势能（以地面为零势能点）

$$E_P=\int_y^0 -mgdy=-mg(0-y)=mgy$$

弹性势能（以弹簧原长为零势能点）

$$E_p=\int_x^0 -kx\bullet dx=-(0-\frac{1}{2}kx^2)=\frac{1}{2}kx^2$$

引力势能（以无穷远为零势能点）

$$E_P=\int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}dr=-GMm\frac{1}{r}$$

势能只具有相对意义

小结：

1、只要有保守力，就可引入相应的势能。

2、计算势能必须规定零势能参考点。质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

3、势能仅有相对意义，所以必须指出零势能参考点。两点间的势能差是绝对的，即势能是质点间相对位置的单值函数。

4、势能是属于具有保守力相互作用的质点系统的。

作业：

2.64　　2.68

2.72　　2.82