《线性代数》复习提纲

一、行列式

1.定义
2.计算：
  (1)八种基本形；
  (2)利用性质直接计算；
  (3)利用性质直接化为八种基本形（最主要右上三角）；
  (4)展开；
  (5)范德蒙行列式。

二、矩阵

1.矩阵的运算及性质：加、数乘、乘、方阵的幂与多项式、转置、逆矩阵；
  综合：解矩阵方程。
2.方阵行列式的性质：
  $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$。
3.矩阵可逆的判别及求逆矩阵：
  (1)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$；
  (2)$\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$且$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，其中$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；
  (3)$n\geq 3$时，$[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{E}]\xrightarrow{行}[\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{A}^{-1}]$，推广：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。$[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}]\xrightarrow{行}[\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}]$
4.分块矩阵：
  (1)$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}\Rightarrow|\boldsymbol{G}|=|\boldsymbol{A}_1|\ldots\boldsymbol{A}_s$，$\boldsymbol{G}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{bmatrix}$
  (2) $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} & & \boldsymbol{A}_1 \\ & ⋰ & \\ \boldsymbol{A}_s & & \end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{G}^{-1}=\begin{bmatrix} & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & ⋰ & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \end{bmatrix}$

5.初等矩阵与初等变换的关系：
  (1)$\boldsymbol{E}_n\underset{C_{ij}}{\overset{R_{ij}}{\longrightarrow}}\boldsymbol{E}(i,j)$
  (2) $\boldsymbol{E}_n\underset{kC_{ij}}{\overset{kR_{ij}}{\longrightarrow}}\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)$

(3) $E_n \underset{C_j+kC_i}{\overset{R_i+kR_j}{\longrightarrow}} E(i+j(k),j)$ $(i<j)$

6.矩阵的等价：

(1)$\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(2)等价标准形：若$r(\boldsymbol{A})=r$，则$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & 0\end{bmatrix}$

7.矩阵的秩：

(1)定义；

(2)求法；

(3)五个重要公式：

①若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times t}=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$；

②$r(\boldsymbol{AB})\le\min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}$；

③$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

④$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \end{bmatrix}\right)=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

⑤若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$可逆，$r(\boldsymbol{AC})=r(\boldsymbol{C})$，$r(\boldsymbol{CB})=r(\boldsymbol{C})$

三、线性空间

1.线性空间 V，三个常见的线性空间：

①$\boldsymbol{P}^n$，$\mathbf{R}^n$

②$\boldsymbol{P}^{m\times n}$

③$\boldsymbol{P}[x]_n$。

2. 线性表示：

(1) 定义（V 中）；

(2) $\boldsymbol{P}^n$中：判断$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$是否成立，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{\alpha}_s)$, $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{\alpha}_s,\ \boldsymbol{\beta})$

3. 线性相关与线性无关：

(1) 定义（V 中）；

(2) $\boldsymbol{P}^n$中：$r(\boldsymbol{A})$ =?；

(3) 特别$s=n$，$|\boldsymbol{A}|$ =?

4. 极大线性无关组与向量的秩：

(1) 定义；

(2) 求法（$\boldsymbol{P}^n$中）；

(3) $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$的行秩$=\boldsymbol{A}$的列秩。

综合：给一个常有参数λ的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，讨论：λ取何值时：

①无关；

②相关；

③求极大线性无关组与向量组的秩；

④剩余向量用极大无关组线性表示。

5. 基与维数：

(1) 定义，三个常用基：

①$\boldsymbol{P}^n$；

②$\boldsymbol{P}^{m\times n}$；

③$\boldsymbol{P}[x]_n$；

(2) 向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标：

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=[x_1,\ \ldots,\ x_n]^{\mathrm{T}};$$

(3) 基(I) $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基(II) $\boldsymbol{\eta}_1$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$的过渡矩阵：

基变换公式：$(\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{M}$

坐标变换公式：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{MY},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{X}$

(4) n维线性空间 V 中任意n个线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$均可作为 V 的一组基（若$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 在 V 中一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}_1$，…，$\boldsymbol{X}_n$，则$|\boldsymbol{X}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n|\neq 0$）。

6. 子空间：

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解空间的基与维数；

(2) 由$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_t$生成的子空间$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\alpha}_t)$的基与维数。

7. n维欧代空间$\mathbf{R}^n$：

(1) 内积；

(2) 长度；

(3) 正交；

(4) 标准正交基；

(5) 正交矩阵$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1},\ \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E})$；

(6) 施密特正交化方法：

①正交化；

②单位化。

四、线性方程组

1.齐次：$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{O}_{m\times 1}$ (II)

(1)解的判别：

①只有零解；

②有非零解；

(2)若$r(\boldsymbol{A})=r$,则(II)的基础解系有$n-r$个解向量，通解为：

$$\xi=t_1\xi_1+\cdots+t_{n-r}\xi_{n-r}(\dim\boldsymbol{W}=n-r)$$

2.非齐次：$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{b}_{m\times 1}$ (I)

(1)解的判别：

①无解；

②唯一解；

③无穷多解；

(2)通解（用导出组的基础解系表示）：

$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+t_1\xi_1+\cdots+t_{n-r}\xi_{n-r}$

综合：给一个常有参数λ的方程组，讨论λ取何值时：

(1)无解；

(2)唯一解；

(3)无穷多解（并求其通解）。

五、矩阵的对角变化

1.特征值与特征向量：

(1)定义：$\boldsymbol{A}\xi=\lambda\xi\ (\xi\neq 0)$

(2)求法；

(3)性质：

①$\begin{cases}\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\\ \lambda_1\ldots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|\end{cases}$

②若λ是$\boldsymbol{A}$的特征值$\Rightarrow$ λ^k是$\boldsymbol{A}^k$，$f(\lambda)$是$f(\boldsymbol{A})$，λ^{-1}是$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$是$\boldsymbol{A}^*$的特征值，且$|f(\boldsymbol{A})|=f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_n)$。

2. 矩阵的相似：

(1)定义：$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$；

(2)性质：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似$\Rightarrow\begin{cases}r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$，$\begin{cases}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}\\ |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\end{cases}$，$\begin{cases}\boldsymbol{A}^k\text{与}\boldsymbol{B}^k\text{相似}\\ f(\boldsymbol{A})\text{与}f(\boldsymbol{B})\text{相似}\end{cases}$。

3.矩阵的对角化：

(1)条件：

①充要条件；

②充分条件（互异单根）；

③重根：$r_1+\cdots+r_n=n\ (\text{或}n_i=r_i)$

(2)方法：$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$

(3)若已知$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量，求$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$

4.实对称矩阵的对角化：$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{\Lambda}$ （$\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$）

六、二次型

1.用配方法化二次型为标准形，并写出二次型的秩和正惯性指数。

2.写出二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$，用正交线性替换化二次型为标准形。

3.矩阵的合同：

(1)定义$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$;

(2)性质；

(3)判别：实对称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的合同$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$且正惯性指数相同。（注：等价，相似，合同的判别）。

4.实二次型$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$正定（即实对称$\boldsymbol{A}$的正定）的判别：

(1)正惯性指数=n;

(2) $\boldsymbol{A}$的特征值全大于零；

(3)顺序主子式Δ_k全大于零；

(4)定义，正定二次型（正定矩阵）的性质。

(5)存在可逆 $\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$