第十七章

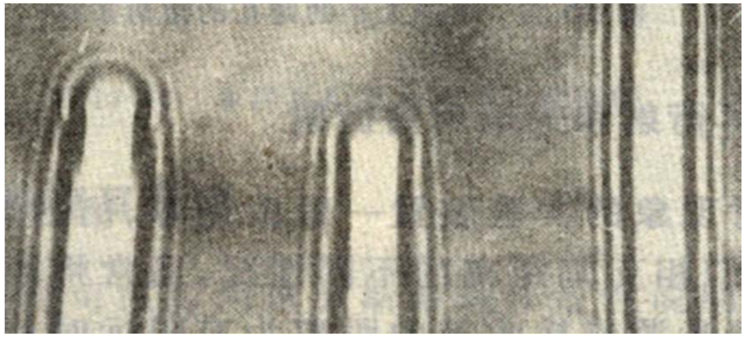
光的衍射

第17章 光的衍射

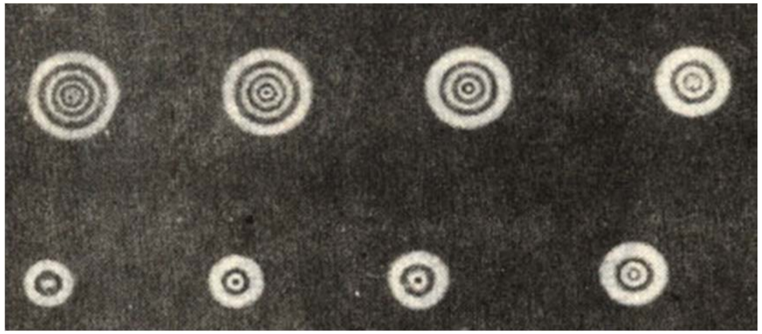
§ 17-1 衍射现象

一、衍射现象

波在传播过程中，绕过障碍物的边缘，偏离直线传播的现象，称为**波的衍射**. 当光遇到的障碍物尺寸与光波的波长相当时，产生光的衍射现象.



针和线的衍射条纹

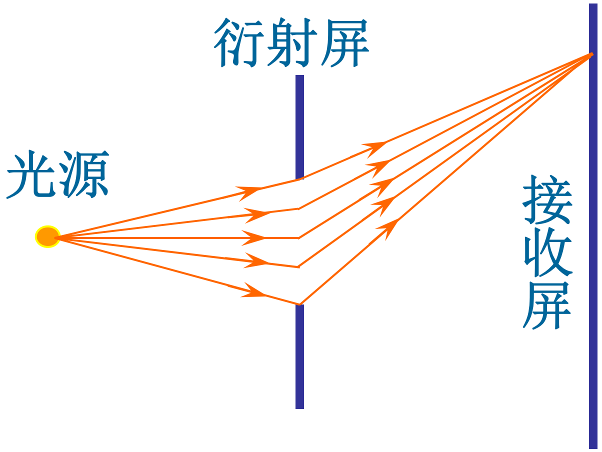


不同大小的圆孔的衍射条纹

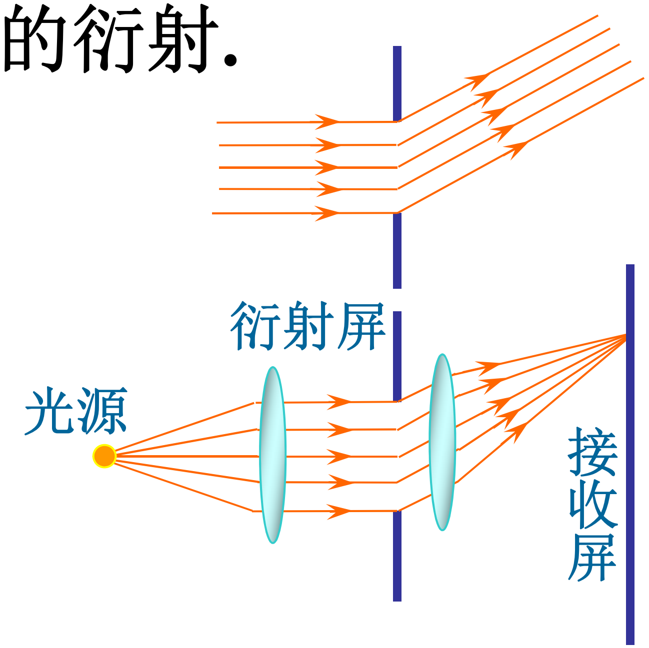
二、衍射的分类

菲涅耳衍射：衍射屏离光源或接收屏为**有限距离**的衍射.

夫琅禾费衍射：衍射屏离光源或接收屏为**无限远距离**的衍射.



菲涅耳衍射



夫琅禾费衍射

问题：(1) 光为什么会改变传播方向?

(2) 为什么产生明暗条纹的衍射图样?

§ 17.2 惠更斯—菲涅耳原理

一、惠更斯原理

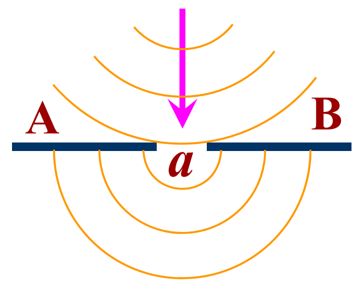
惠更斯 (Huygens, Christiaan 1629-1695)

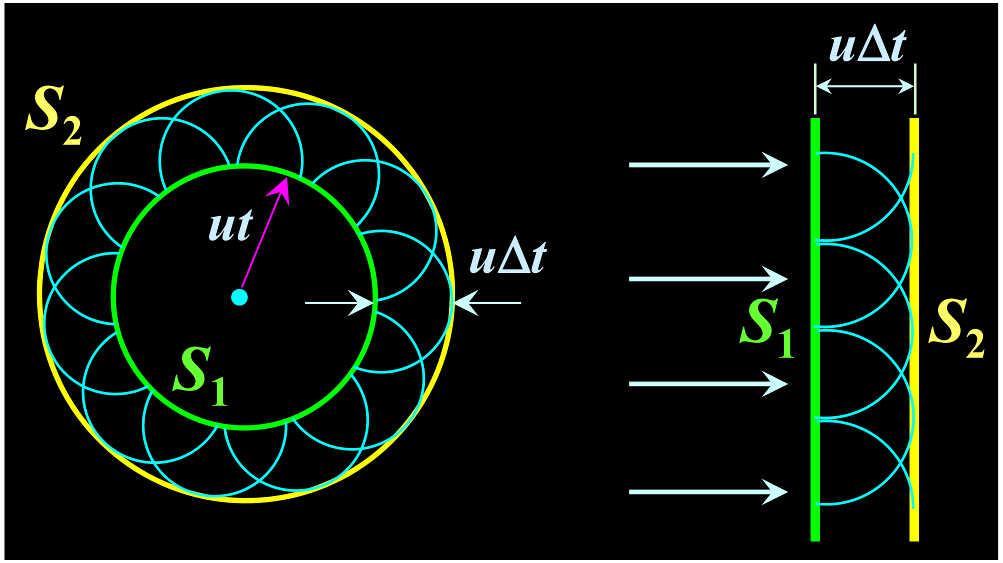
荷兰天文学、数学、物理学家. 发现土星的光环, 发明了摆钟, 对波动理论的发展起了重要作用.

1. 惠更斯原理:

(1) 媒质中波动所到达的各点都可以看作一个新的子波源, 这些子波源向空间发射球面子波.

(2) 在以后的任一时刻, 这些子波的包络面就是波在该时刻的新的波阵面.



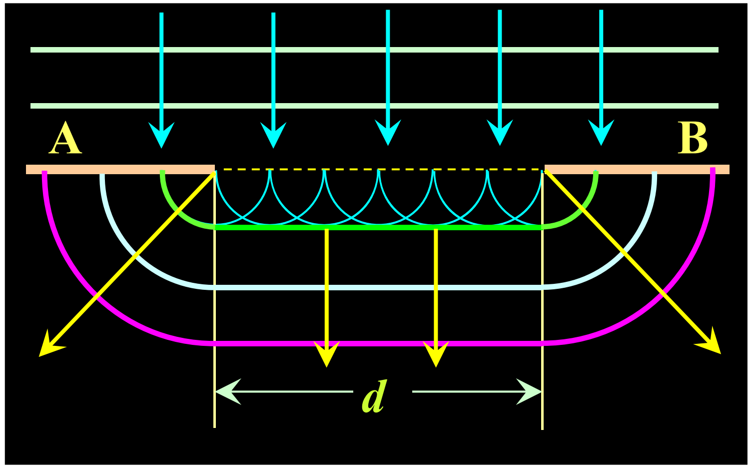


用惠更斯原理求新的波阵面

2. 用惠更斯原理可以解释波的衍射、反射和折射等现象.

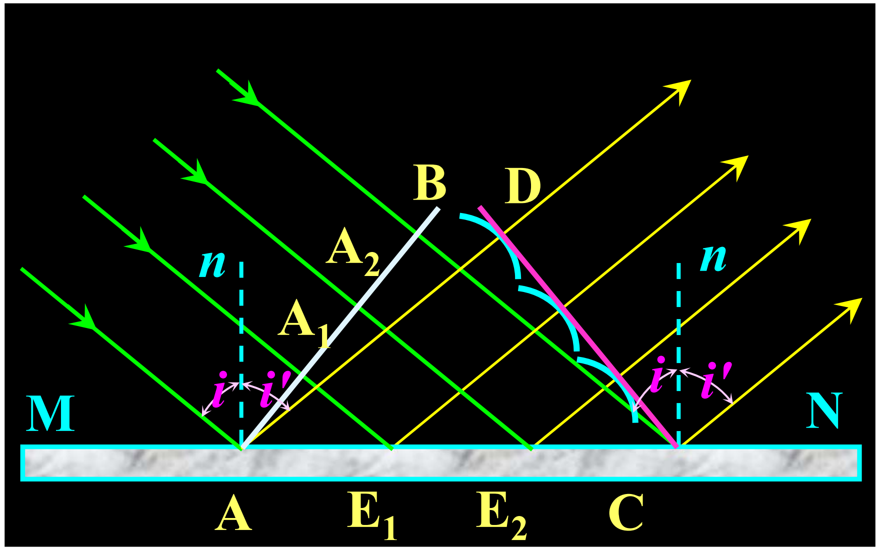
(1) 波的衍射

平面波遇障碍物AB后, 光线进入几何阴影, 产生衍射.



(2) 波的反射和折射

(a) 波的反射



波阵面AB上A点发出子波到达D点时，B点到达C点，由于入射波和反射波在同一媒介，波速不变.

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = u\Delta t$$

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{CDA} = 90^\circ$$

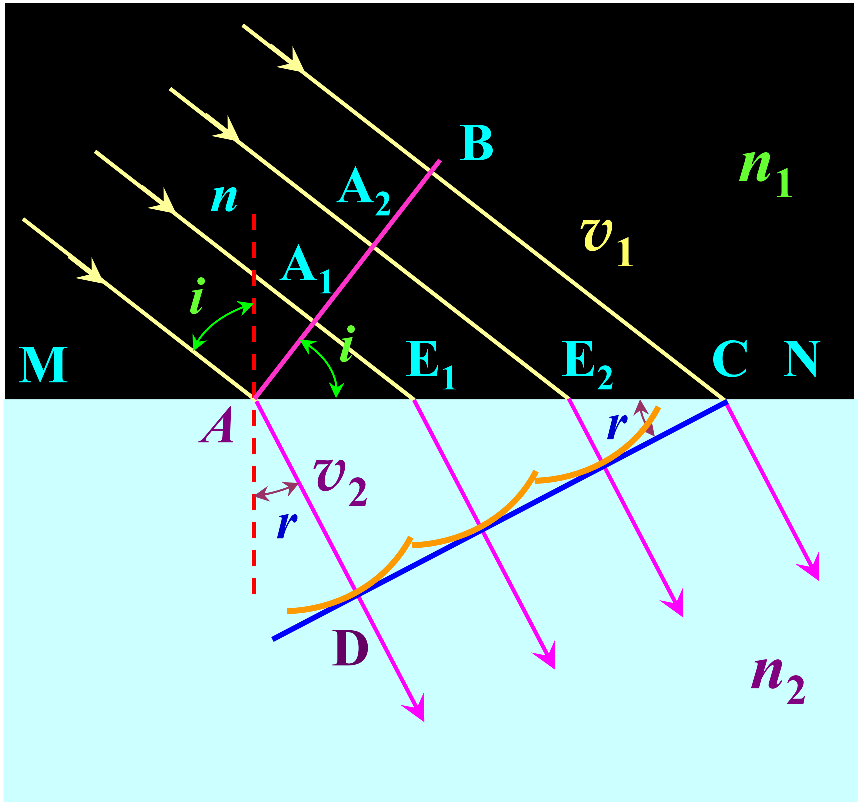
$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AD}^2} = \mathrm{DC}$$

ΔABC和ΔCDA 全等，则：$i = i'$

(b) 波的折射

设t时刻有波阵面AB, 经Δt时间, 子波由A点传播到D点, 相应B点传播到C点. CD为折射波的波阵面. 由图可知:

$i = \angle BAC$, $r = \angle ACD$



$$BC = v_1 \Delta t = AC\sin i$$

$$AD = v_2 \Delta t = AC\sin r$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

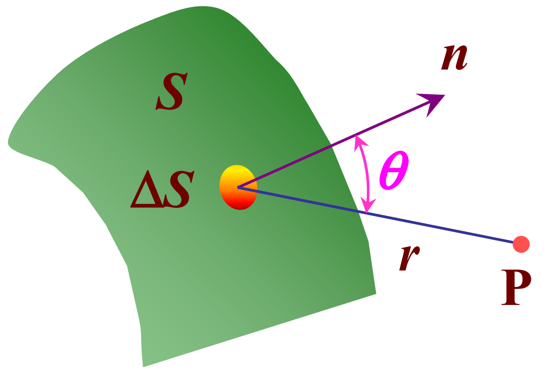
$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

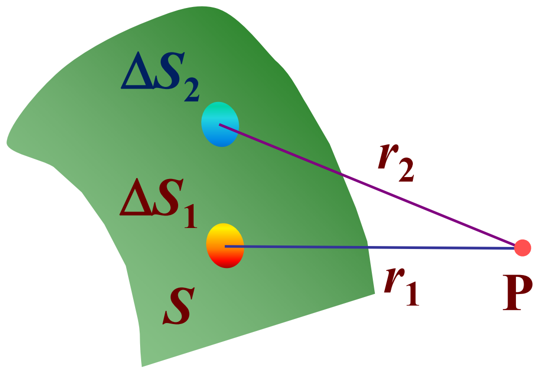
二、惠更斯–菲涅耳原理

惠更斯原理定性的解决了波的传播方向问题, 但无法对波的衍射强度进行定量描写. 1816年, 菲涅耳提出了惠更斯–菲涅耳原理, 解决了波的强度分布问题.

1. 惠更斯–菲涅耳原理:

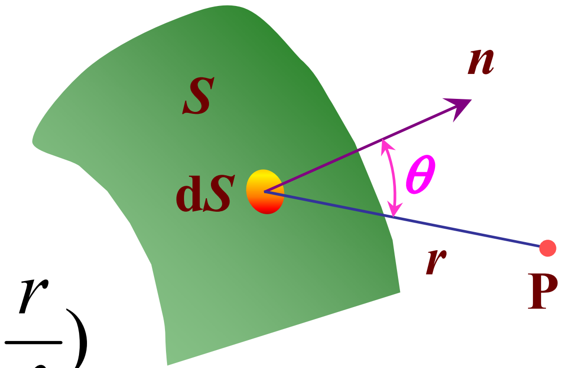
波在传播过程中, 从同一波阵面S上发出的子波是相干波, 经传播而在空间某点相遇时, 可相互叠加而产生干涉现象.





2. 惠更斯–菲涅耳原理的数学表达式

波阵面S上面元dS处的振动传播到P点:



$$\mathrm{d}E_p = C\frac{\mathrm{d}S}{r}K(\theta)\cos(\omega t+\varphi-2\pi\frac{r}{\lambda})$$

倾斜因子 $K(\theta)$

$\theta\uparrow \rightarrow K(\theta)\downarrow$， $\theta=0 \rightarrow K(\theta)=1$

$\theta\geq\pi/2 \rightarrow K(\theta)=0$波不向后传

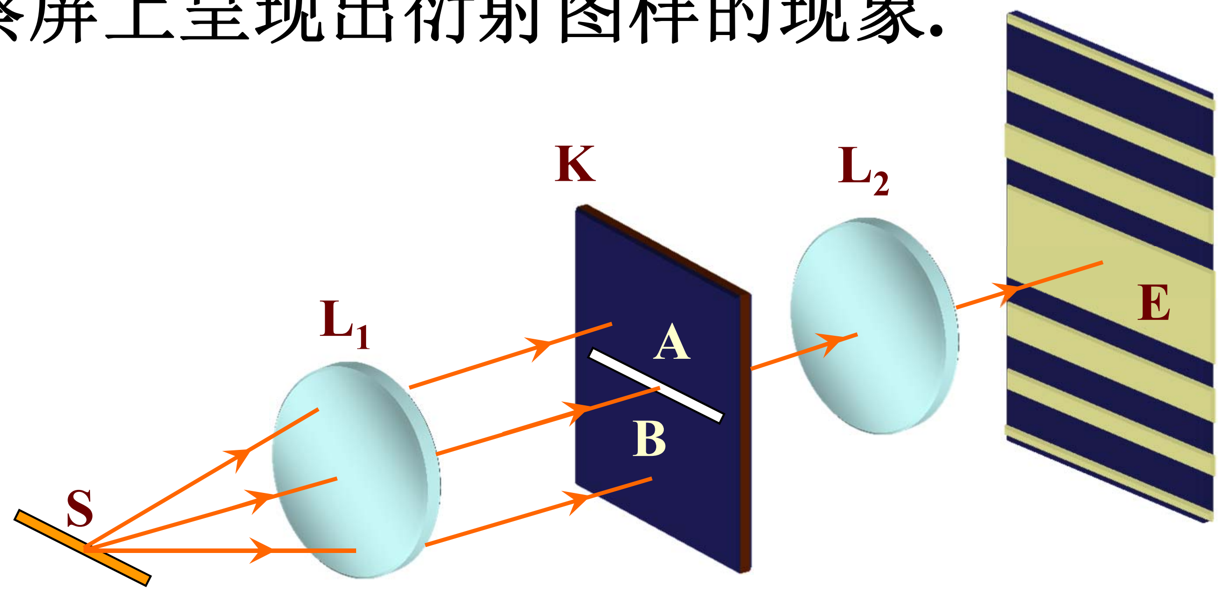
若波阵面S上的振幅分布不均匀，其分布函数为$A(r)$, 整个波阵面S在P点所产生的合振动为:

$$E_p = \iint_S C'\frac{A(r)}{r}K(\theta)\cos(\omega t+\varphi-2\pi\frac{r}{\lambda})\mathrm{d}S$$

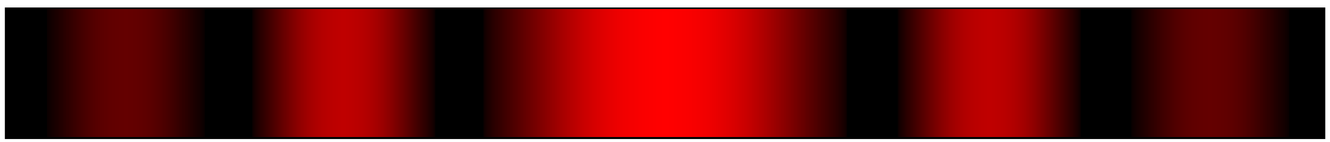
§ 17-3 单缝的夫琅禾费衍射

单缝衍射:

平行光线透过一条细长直缝后，在远处观察屏上呈现出衍射图样的现象.



单缝衍射实验装置图

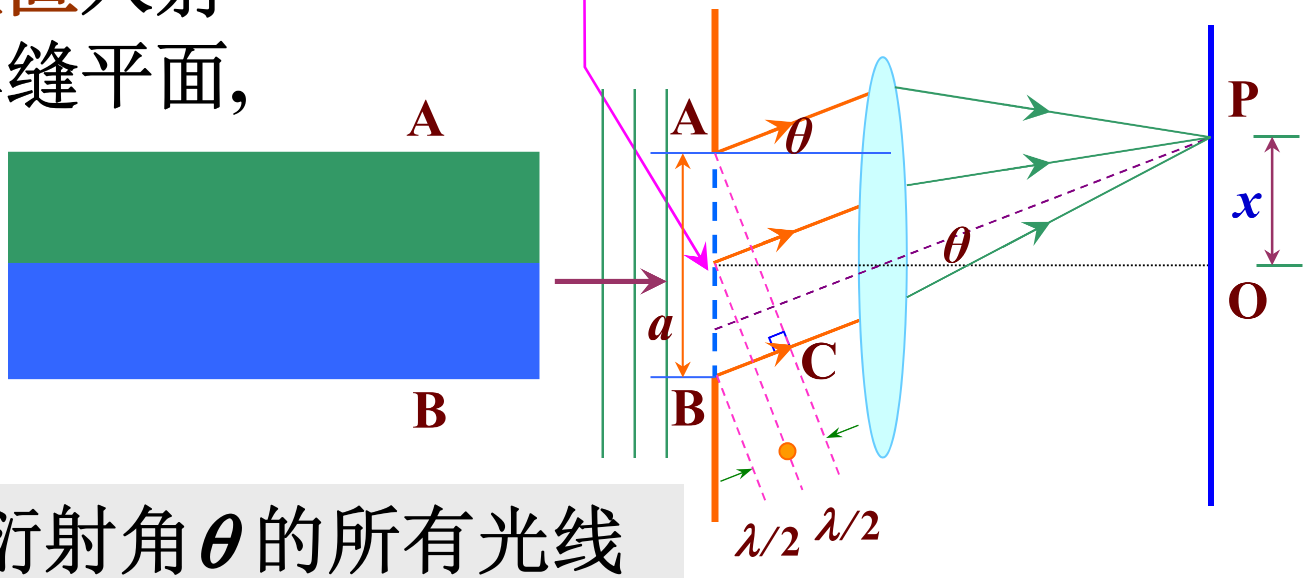


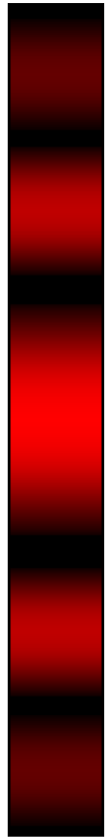
线光源的单缝衍射图象

一、菲涅耳半波带法

A,B波阵面上各子波源无相位差

光垂直入射到单缝平面,



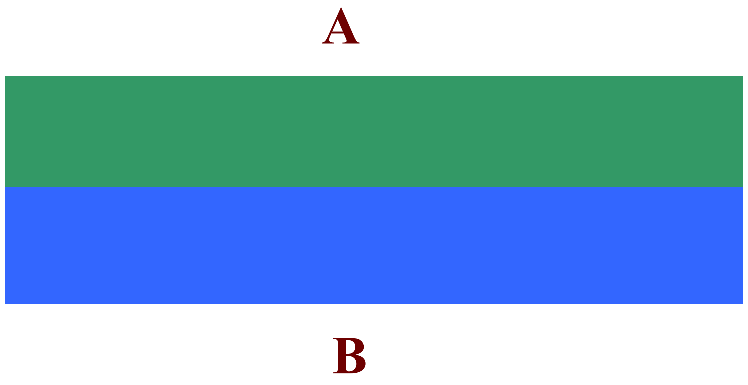


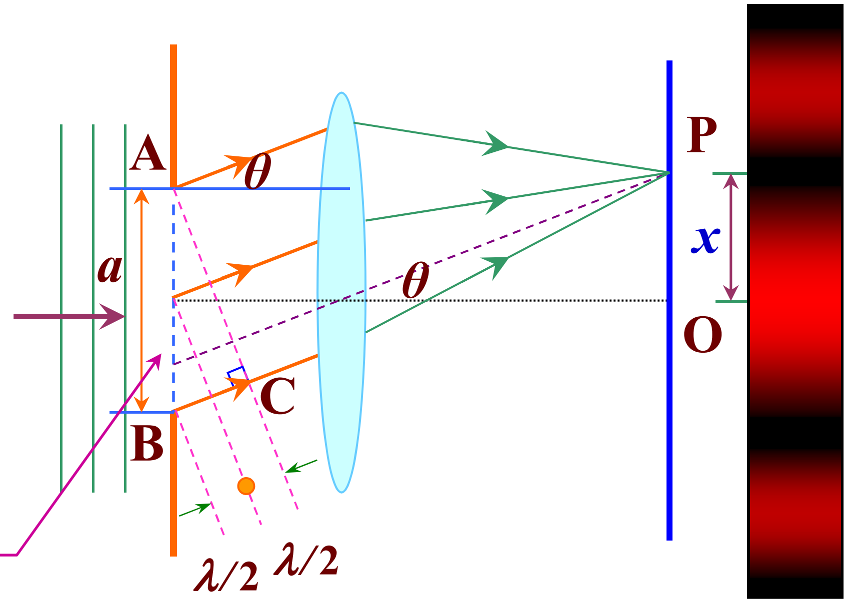
研究某个衍射角θ的所有光线

单缝边缘A、B发出的两光线到P点的光程差:

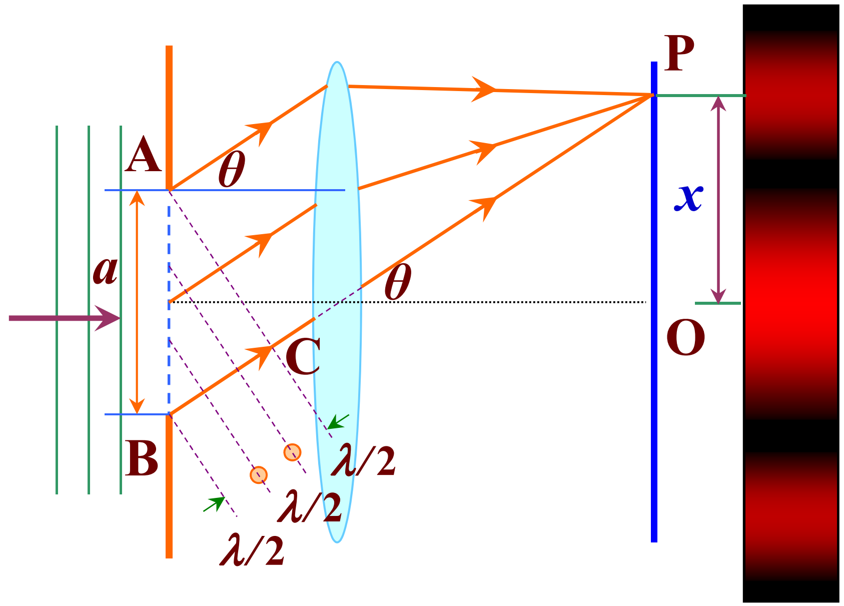
$$\delta = BC = a\sin\theta$$

作一系列平行于AC面的平面,将单缝面分割成N个同宽度的窄带，若两窄带的边缘光线到P点的光程差为半个波长，称此窄带为半波带.

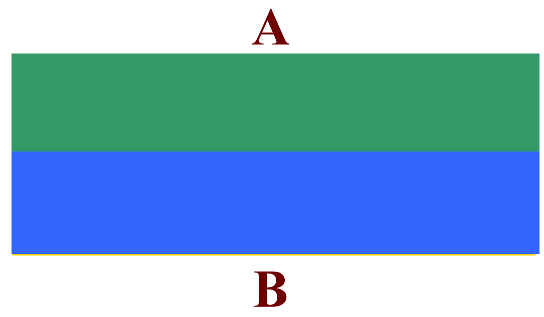




A,B波阵面上各子波源无相位差

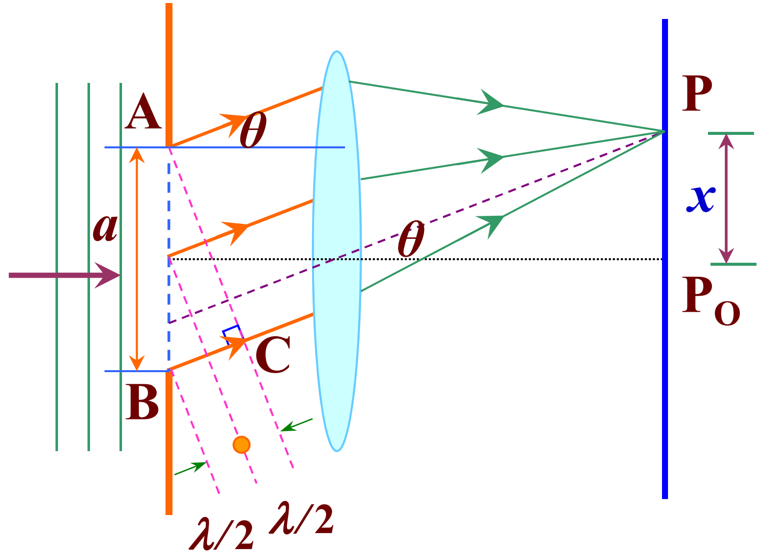


★单缝衍射产生明暗条件的位置:



1、暗纹位置(角位置)

BC为半波长的偶数倍,狭缝可分成偶数个半波带,半波带中的任一点,总能在邻近波带上找到相应点使两点间光程差为半波长,从而光强呈P点抵消,产生暗纹.



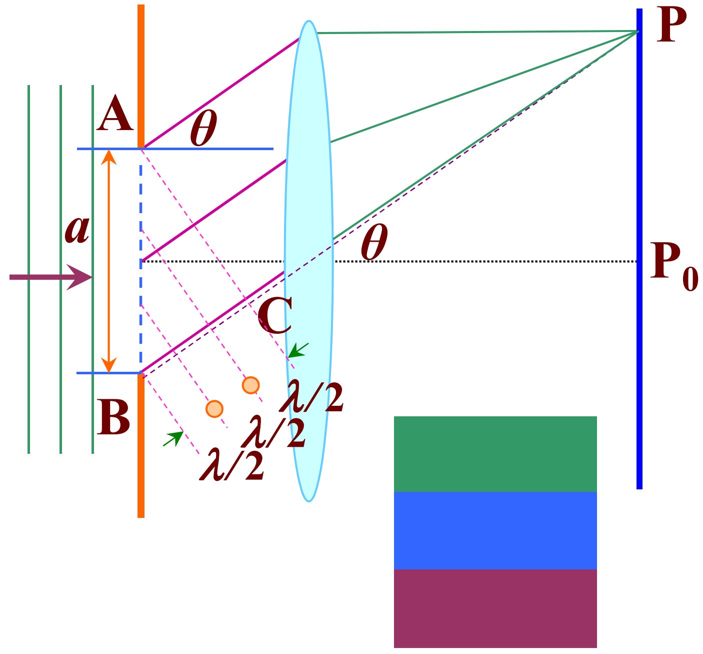
$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$$

$k=1,2,3,\cdots$ 暗纹位置

注意k不能取0

2、明纹位置(角位置)

BC为半波长的奇数倍,狭缝可分成奇数个半波带.其中的偶数个半波带的光强抵消,留下一个半波带不能抵消



P点光强不能抵消, 产生亮纹

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$k=1,2,3,\cdots$ 明纹位置

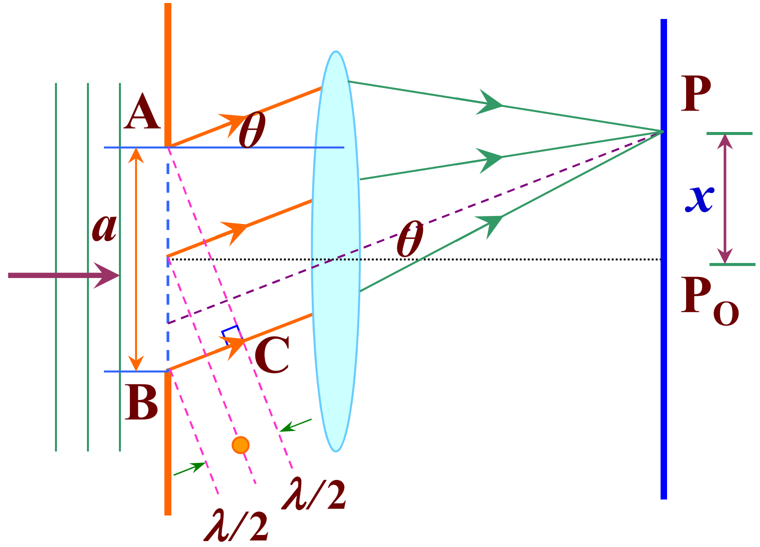
注意k也不能取0

3、中央明纹

$\theta=0$ 中央明纹中心

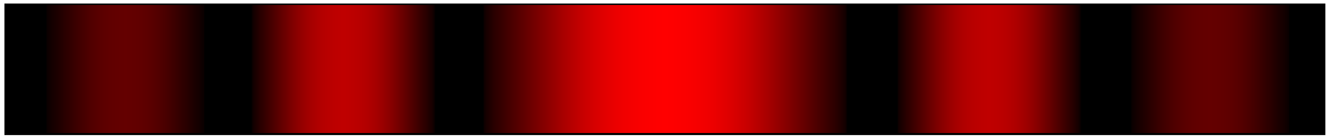
单缝中各点到达中央位置光程相等, 产生明纹

二、单缝衍射图样的特征



1. 条纹的亮度分布

中央明纹的光强最大，随着k 增加，波带数增多，未被抵消的波带面积变小，条纹光强减弱.



2. 中央明纹的半角宽度

第一级暗纹的衍射角为中央明纹的半角宽度：

第一级暗纹位置 $a\sin\theta_1 = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda = \lambda$

中央明纹的半角宽度 $\Delta\theta = \theta_1 = \arcsin\dfrac{\lambda}{a} \approx \dfrac{\lambda}{a}$

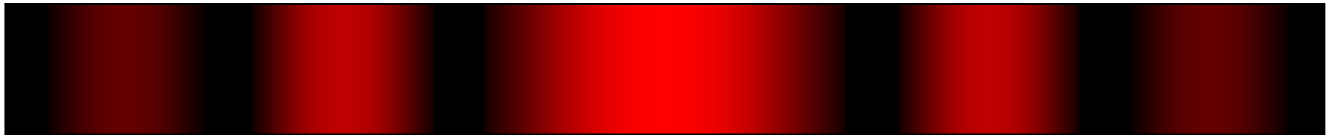
中央明纹的角宽度

两个第一级暗纹之间的衍射角差:

$$2\Delta\theta = 2\theta_1 = 2\arcsin\frac{\lambda}{a} \approx \frac{2\lambda}{a}$$

其它明纹的角宽度

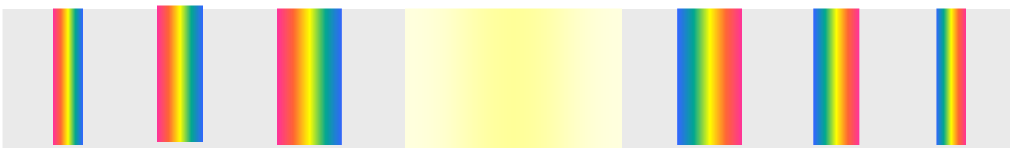
相邻两级暗纹之间的衍射角差:



3. 衍射光谱

λ一定, $a\downarrow$, $\theta\uparrow$.

a不变, $\lambda\downarrow$, $\theta\downarrow$(色散现象)



色散现象

其它位置的光强呢?

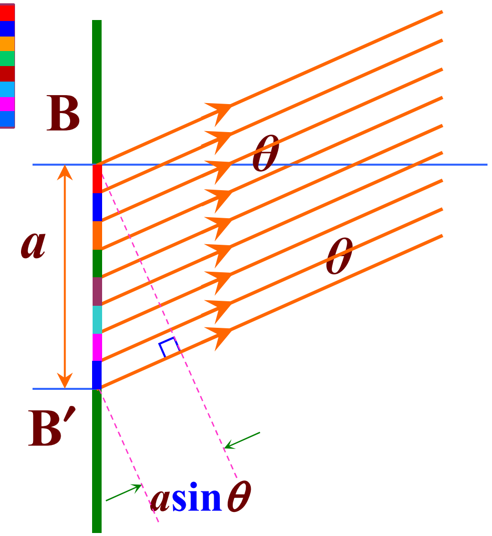
三、单缝夫琅禾费衍射的光强分布

半波带法 $\xrightarrow[\text{分割太粗}]{\text{不定量}}$ (1)明纹位置存疑
(2)不知道其余位置的光强

直接用惠更斯–菲涅耳公式 $\xrightarrow[\text{分割太细}]{\text{定量}}$ 太复杂(p53)

按惠更斯–菲涅耳原理 → 振幅矢量叠加法

1. 衍射图样的光强分布



单缝a等分成n条面元dS 的窄波带

各窄波带dS到P点的Δr很小, 振幅

$$A_1 \approx A_2 \approx \cdots \approx A_i \approx \cdots \approx A_n$$

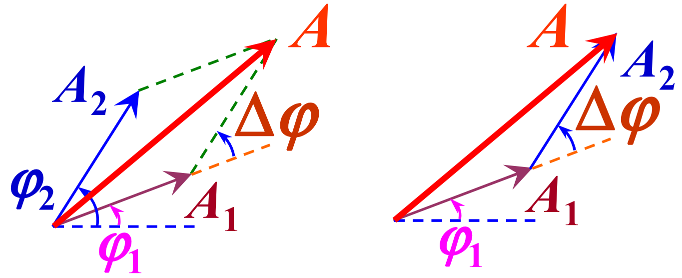
相邻窄波带光线到P点的相位差$\Delta\varphi$

P点的振动是分振动的合成

振幅旋转矢量的矢量和

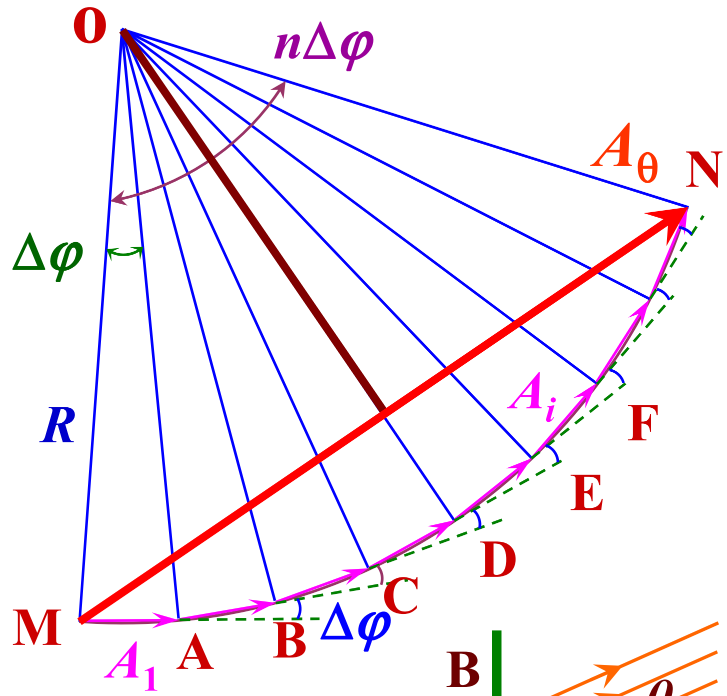
总的相位差$n\Delta\varphi$

两振动合成 $\vec{A}_1+\vec{A}_2=\vec{A}$



n个振动合成近似构成圆弧

为什么?



小扇形OMA

$$\angle MOA=\Delta\varphi,\ A_1\approx R\Delta\varphi$$

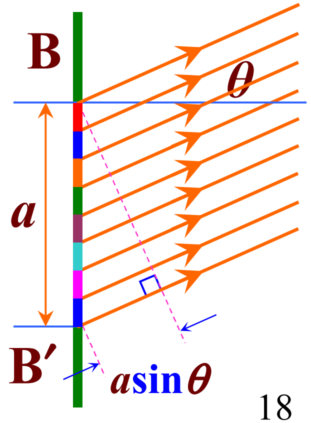
$$R\approx A_1/\Delta\varphi$$

三角形OMN

合振幅 $|\vec{A}_\theta|=\mathrm{MN}$

$$A_\theta=2\cdot R\sin\frac{n\Delta\varphi}{2}=2\frac{A_1}{\Delta\varphi}\sin\frac{n\Delta\varphi}{2}$$

$\Delta\varphi=?$



$n\Delta\varphi$为单缝a两边缘光的相位差, 求法如下:

单缝a两边缘总光程差： $\delta = a\sin\theta$

单缝a两边缘总相位差： $n\Delta\varphi = 2\pi\dfrac{\delta}{\lambda} = 2\pi\dfrac{a\sin\theta}{\lambda}$

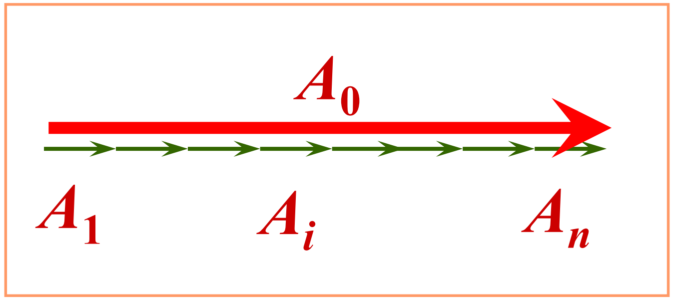
令 $u = \dfrac{n\Delta\varphi}{2} = \dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$ 则 $\Delta\varphi = \dfrac{2u}{n}$

合振幅 $A_\theta = 2\dfrac{A_1}{\Delta\varphi}\sin\dfrac{n\Delta\varphi}{2} = 2\dfrac{A_1}{2u/n}\sin u = nA_1\dfrac{\sin u}{u}$

$\theta = 0$, $\Delta\varphi = 0$, $u = 0$

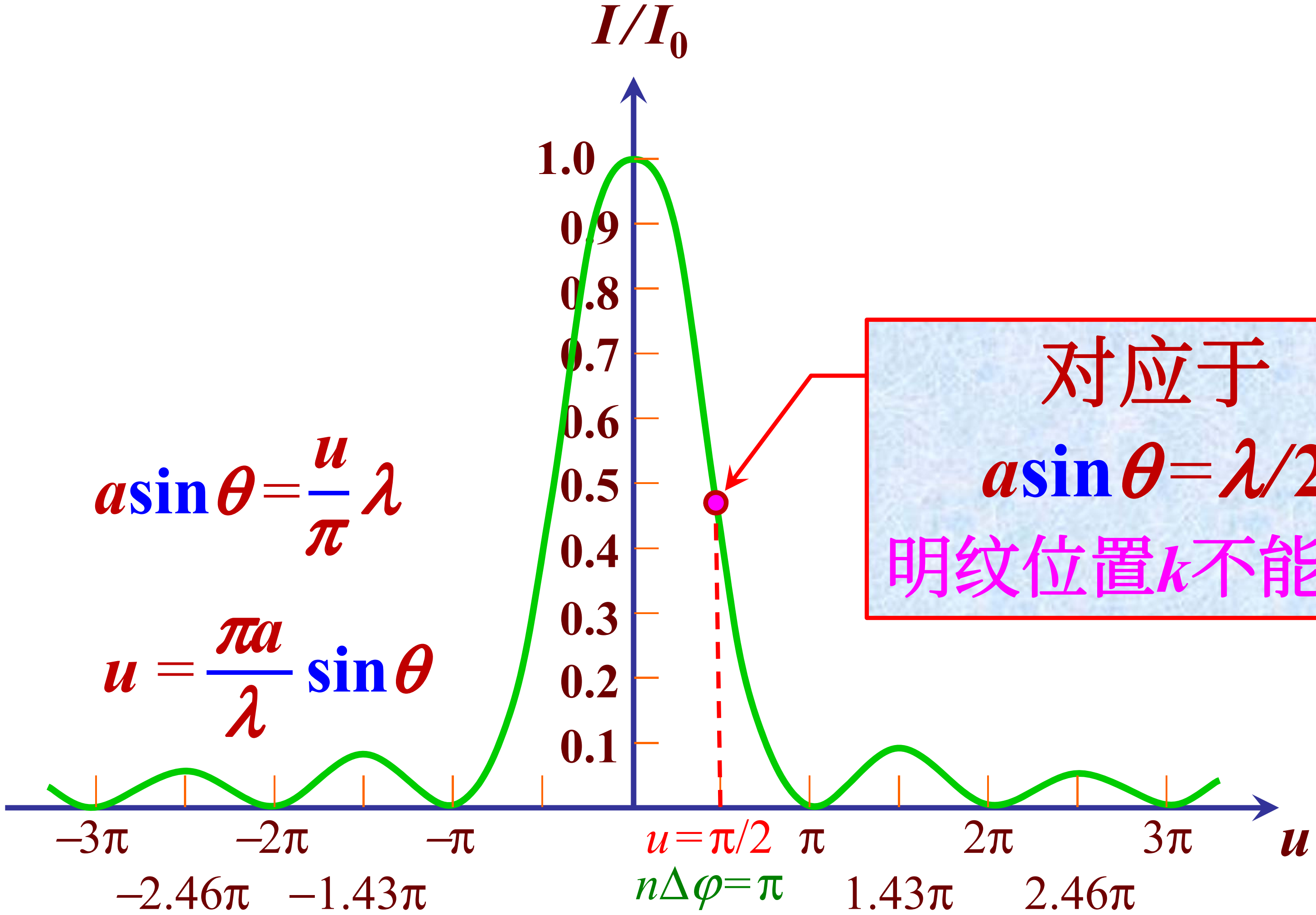
$A_0 = nA_1$, 光强为I_0

中央明纹



P点的振幅 $A_\theta = A_0\dfrac{\sin u}{u}$ 光强之比 $\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{A_\theta^2}{A_0^2} = \dfrac{\sin^2 u}{u^2}$

单缝夫琅禾费衍射相对光强分布曲线



$$a\sin\theta=\frac{u}{\pi}\lambda$$

$$u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

对应于

$a\sin\theta=\lambda/2$

明纹位置k不能取0

单缝夫琅禾费衍射相对光强分布

2. 光强分布曲线的讨论

$$\frac{I}{I_0}=\frac{A_\theta^2}{A_0^2}=\frac{\sin^2 u}{u^2} \qquad u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

(1) 中央明纹

$\theta=0$处, $u=0$, $I=I_0$, 光强最大, 称零级主极大,
其余明纹称第k极主极大.

(2) 暗纹位置

$I=0$, 即$\sin u=0$而$u\neq 0$处为暗纹

$$u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=\pm k\pi \qquad k\neq 0;\ k=1,2,3,\cdots$$

得暗纹衍射角满足 $a\sin\theta=\pm 2k\dfrac{\lambda}{2}$ $\quad k=1,2,3,\cdots$

与半波带法得到的结果相同

(3) 明纹位置 各级明纹出现在I/I_0的极大值处

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\sin^2 u}{u^2}\right)=0$$

解得 (1) $\sin u=0$ $\quad I=0$

(2) $\tan u=u$

求解$\tan u = u$方程, 得到出现极大值的u值,

$$u_1 = \pm 1.43\pi,\ \ u_2 = \pm 2.46\pi,\ \ u_3 = \pm 3.47\pi,\ \cdots$$

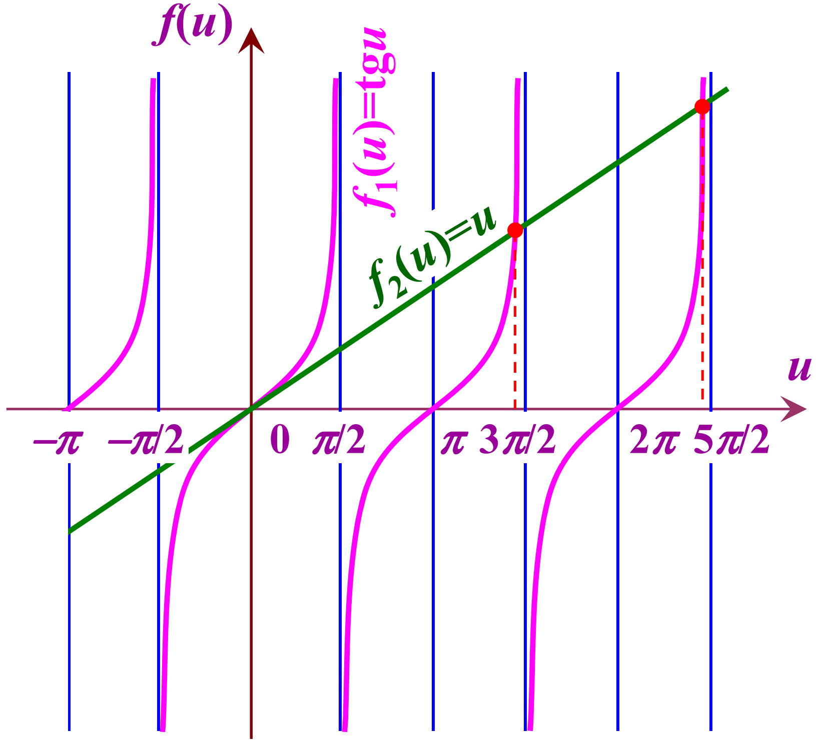
相应各级明纹角位置

$$a\sin\theta_1 = \pm 1.43\lambda$$

$$a\sin\theta_2 = \pm 2.46\lambda$$

$$a\sin\theta_3 = \pm 3.47\lambda$$

……



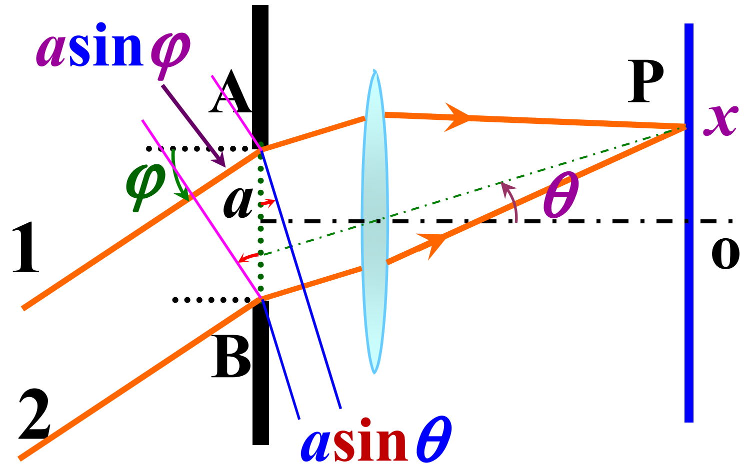
各级明纹的光强之比

$$\frac{I_1}{I_0} = 4.7\% \qquad \frac{I_2}{I_0} = 1.7\% \qquad \frac{I_3}{I_0} = 0.8\% \qquad \cdots\cdots$$

注意: 在 $u = \pm\pi/2$ (即$a\sin\theta = \pm\lambda/2$)附近没有出现极大值

四、光线斜入射时的单缝衍射

入射光与法线成φ



1、入射光和衍射光在法线两侧

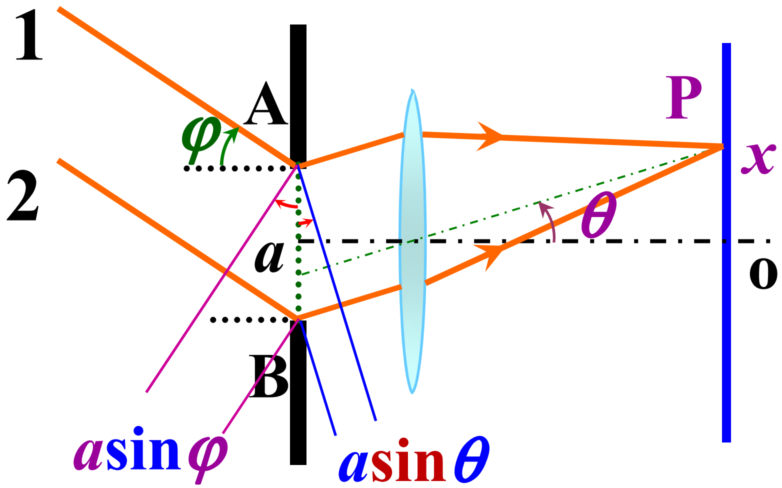
$$\delta = a\sin\theta - a\sin\varphi$$

$$= \begin{cases} \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗} \quad k=1,2,3,\cdots \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明} \quad k=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$\theta=\varphi$方向为中央明纹,条纹向上移动

2、入射光和衍射光在法线同侧

$$\delta = a\sin\varphi + a\sin\theta = \begin{cases} \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗} \quad k=1,2,3,\cdots \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明} \quad k=1,2,3,\cdots \end{cases}$$



$\theta = -\varphi$ 方向为中央明纹, 条纹向下移动

例. 平行单色光垂直入射于单缝上, 观察夫琅和费衍射. 若屏上P点处为第二级暗纹, 则单缝处波面相应地可以划分为几个半波带? 若将单缝的宽度缩小一半, P点将是第几级的明纹或暗纹?

解: (1) 第一级暗纹处波面可分为两个半波带,

第二级暗纹处波面可分为四个半波带.

(2)若将单缝的宽度缩小一半, $a'=a/2$, 假设P点将是k'的暗纹, 由暗纹方程,

$$a\sin\theta = 2k\cdot\lambda/2 = 2\lambda$$

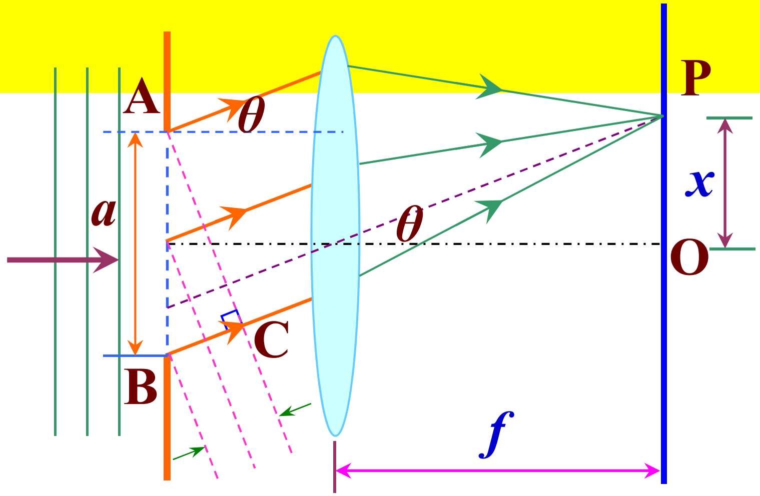
$$a'\sin\theta = 2k'\cdot\lambda/2$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{k'}{2} \qquad k' = \frac{a'}{a}\cdot 2 = 1$$

P点是第一级暗纹

从物理概念上来说, 原来屏上P点处为第二级暗纹,波面可分为四个半波带;若单缝的宽度缩小一半, 则波面可以分为二个半波带, 故为第一级暗纹.

例. 某种单色平行光垂直入射在缝宽$a = 0.15$ mm的单缝上, 缝后放一个焦距f =400 mm的凸透镜,在透镜的焦平面上,测得中央明条纹两侧的两个第三级暗条纹之间的距离为8.0 mm,求入射光的波长.



解: 设第三级暗纹在θ_3方向上

则有: $a\sin\theta_3 = \pm k\lambda = \pm 3\lambda$

此暗纹到中心的距离为

$$x_3 = f\,\mathrm{tg}\,\theta_3$$

因为θ_3很小, 可认为$\mathrm{tg}\,\theta_3 \approx \sin\theta_3$, 所以

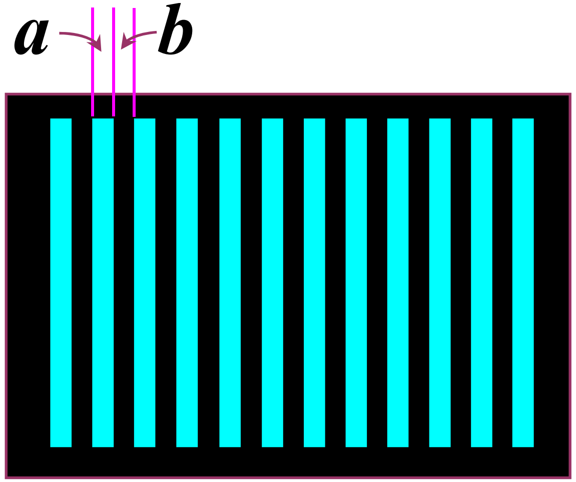
$$x_3 \approx \pm f\,3\lambda/a$$

两侧第三级暗纹的距离是

$$\Delta x_3 = 2x_3 = 6f\lambda/a = 8.0 \text{ mm}$$

$$\therefore \quad \lambda = (2x_3)a/6f = 500 \text{ nm}$$

§ 17-4 光栅衍射

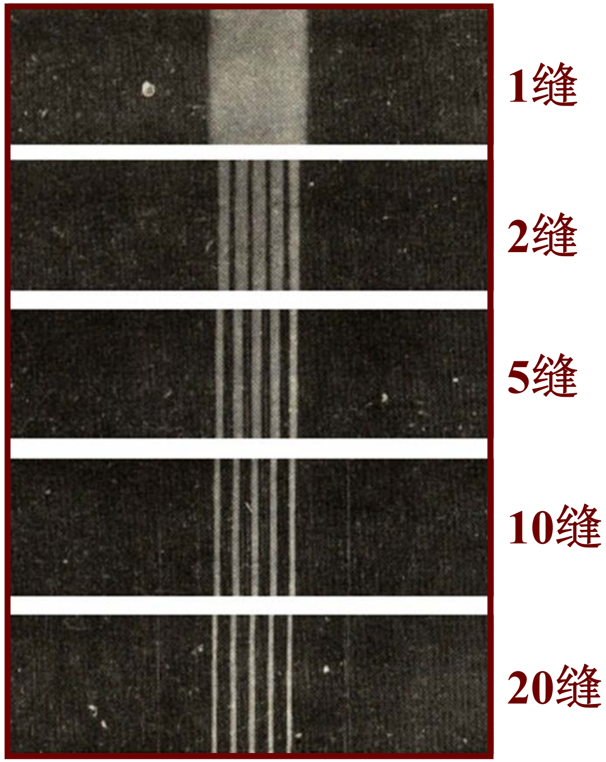


一、光栅衍射现象

大量等宽度等间距的平行狭缝构成的光学器件称为光栅.光栅由透射、反射之分.

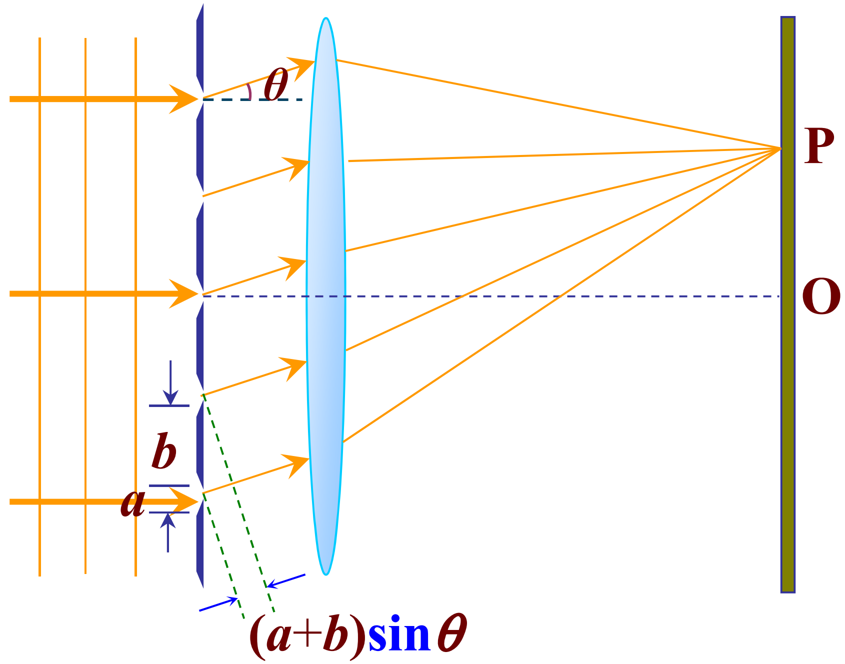
透射光栅的缝宽度a，不透光部分的宽度b，则$d=a+b$ 称为**光栅常数**.

光栅狭缝数越多，衍射条纹就越细锐，明亮.



二、光栅衍射(单色光)图象的特点

a. 光栅衍射的形成



多缝之间的多光束干涉

单缝衍射缝内子光束干涉

b. 光栅衍射的条纹

所有狭缝同一衍射角的光在屏幕上会聚成一点 (实际为一条线)

不会因为狭缝的错位而使同一衍射角的光在屏幕上形成错位.

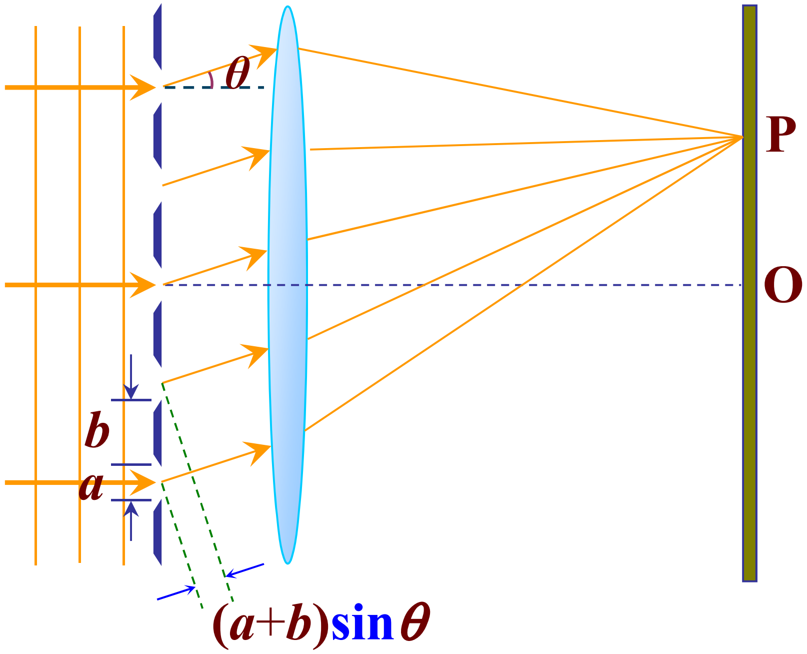
1. 光栅的多缝干涉 缝间多光束干涉

(1) 主极大(明纹) 光栅方程

相邻两缝对应点发出的光线间的光程差为:

$$\delta=(a+b)\sin\theta$$

它们的相位差为2π的整数倍时, 产生明纹.



故明纹条件为:

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta=\frac{2\pi(a+b)\sin\theta}{\lambda}=\pm 2k\pi \quad k=0,1,2,\cdots$$

$$(a+b)\sin\theta=d\sin\theta=\pm k\lambda; \qquad k=0,1,2,\cdots$$

称为光栅方程

$$(a+b)\sin\theta = d\sin\theta = \pm k\lambda\,; \quad k=0,1,2,\cdots$$

讨论:

(a) 由于θ角不可能大于$\pi/2$

$$\theta < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad k < \frac{d}{\lambda}$$

因而明纹的最大级数 $k<d/\lambda$

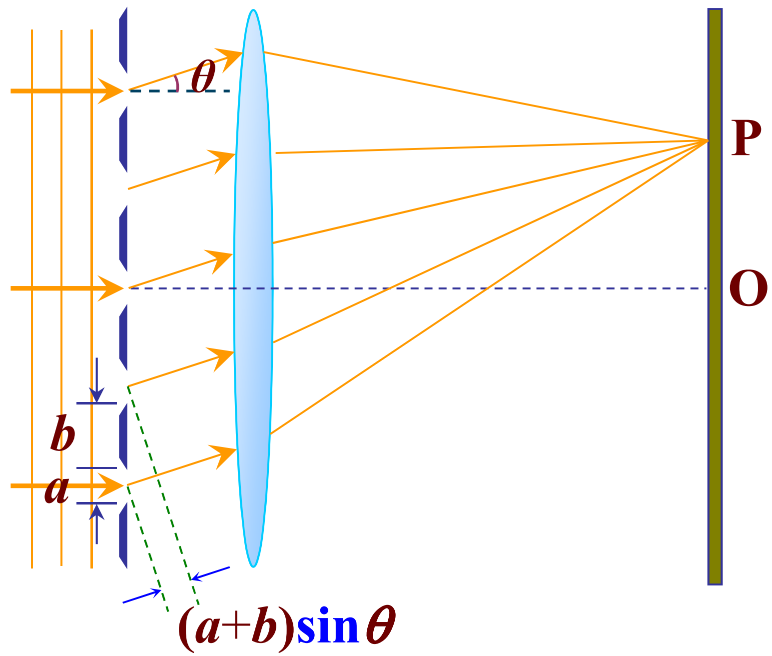
(b) 由于光栅衍射中d较小，故光栅衍射的衍射角θ都比较大

故: $\sin\theta \neq \tan\theta \neq \theta$

与单缝衍射和双缝干涉不同

(2) 暗条纹

各狭缝在屏幕P点所产生的振幅矢量$A_1, A_2, \ldots, A_N$，但它们的相位不同.



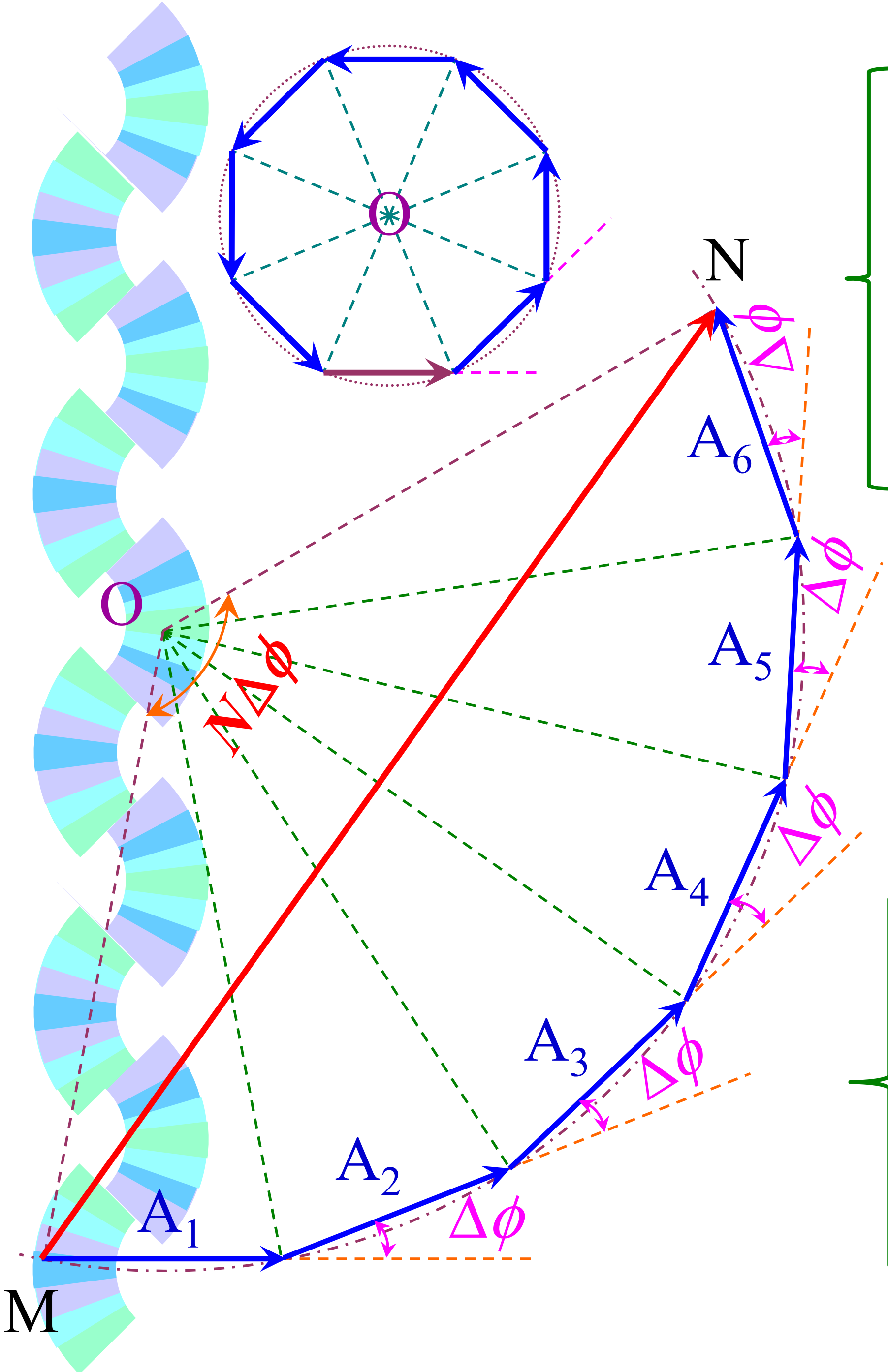
相邻两缝光振动的光程差:

$$\delta = (a+b)\sin\theta = d\sin\theta$$

相位差: $$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

要使P点出现暗纹, 光强为0, 则合振动的振幅为0:

故在振动的旋转矢量表示法中, 各分振动的振幅矢量应组成一个或多个闭合的多边形



$$N\Delta\phi=\pm k'2\pi$$ k'个闭合圈

$$k'=1,2,3,\cdots$$

$$\Delta\phi\neq 2k\pi$$ 不可能围成闭合圈

$$\rightarrow\ k'\neq kN$$

$$N\Delta\phi=N2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda}=\pm 2k'\pi$$

$$Nd\sin\theta=\pm k'\lambda$$ 暗纹方程

$$k'=1,2,3,\cdots$$

$$k'\neq kN$$

讨论:

暗纹方程 $Nd\sin\theta=\pm k'\lambda$

(a) 当$k'=kN$时

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}(\pm k')\frac{\lambda}{N}$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}(\pm kN)\frac{\lambda}{N}=\pm 2k\pi$$

$$\xrightarrow{A_1}\xrightarrow{A_2}\xrightarrow{A_3}\xrightarrow{A_4}\xrightarrow{A_5}\cdots\cdots\xrightarrow{A_N}$$

$d\sin\theta=\pm k'\frac{\lambda}{N}=\pm kN\frac{\lambda}{N}=\pm k\lambda$ 为第k级明纹

(b) 当$k'\neq kN$时为暗条纹

所以暗条纹k'的取值为：

$$k' = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1); \pm(N+1), \pm(N+2), \cdots,$$
$$\pm(2N-1); \pm(2N+1), \pm(2N+2), \cdots$$

$k'=N$
$k=1$
第1级明纹

$k'=2N$
$k=2$
第2级明纹

(c) 在两相邻主极大之间有$N-1$条暗纹

故可利用两相邻主极大之间的暗纹数可判断光栅的缝数N!

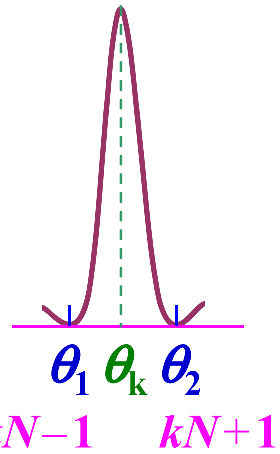
(3) 主极大(明纹)的宽度

k级衍射主极大相邻左右的两个极小之间的衍射角θ_2与θ_1之差

$$N(a+b)\sin\theta_1 = (kN-1)\lambda$$

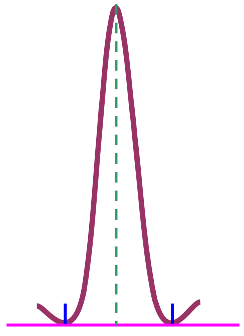
$$N(a+b)\sin\theta_2 = (kN+1)\lambda$$

$$N(a+b)(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = 2\lambda$$



$$N(a+b)(\sin\theta_2-\sin\theta_1)=2\lambda$$

$$N(a+b)2\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}=2\lambda$$



$$N(a+b)2\cos\theta_k\cdot\frac{\theta_2-\theta_1}{2}=2\lambda$$

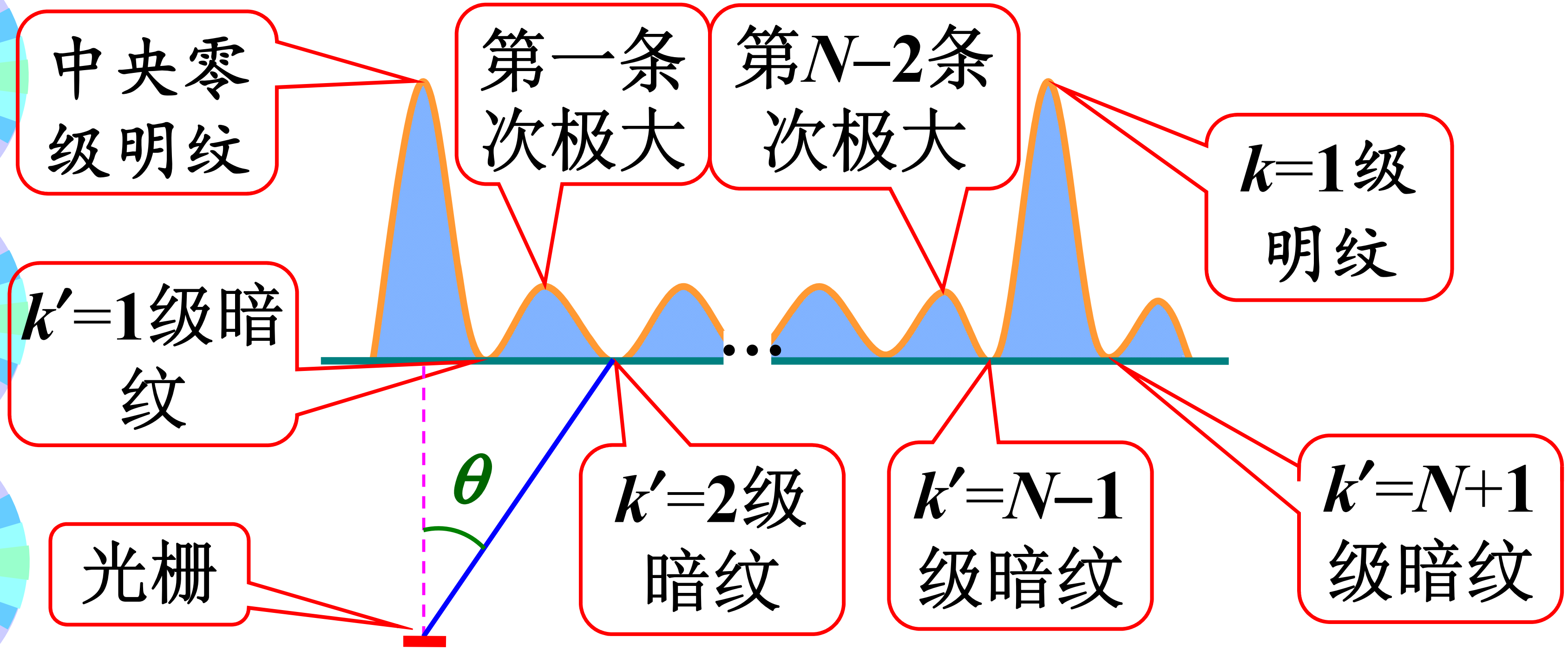
$$N(a+b)\cos\theta_k\cdot\Delta\theta_k=2\lambda$$

主极大(明纹)的宽度

$$\boxed{\Delta\theta_k=2\frac{\lambda}{N(a+b)\cos\theta_k}}$$

$$N\uparrow\rightarrow\Delta\theta_k\downarrow$$

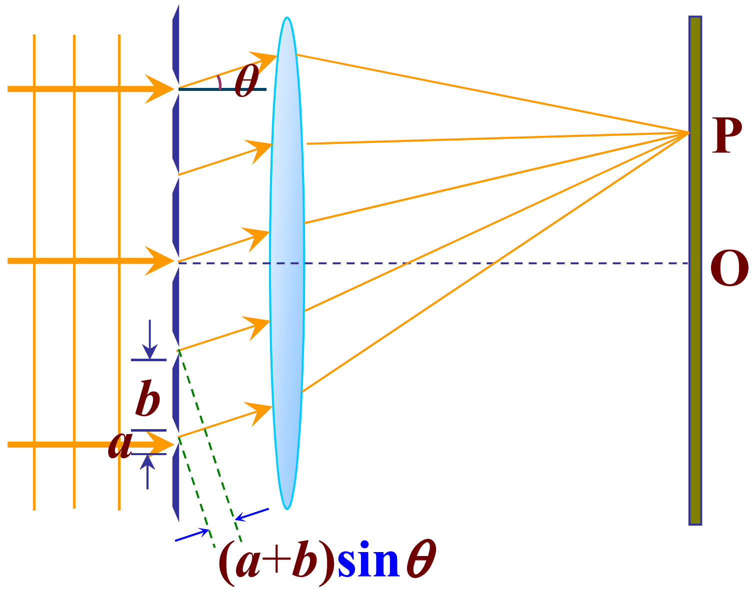
光栅狭缝数越多, 衍射条纹主极大 (明纹)就越细锐, 明亮.



(4) 次极大

两相邻主极大之间有$N-1$条暗纹, 则两暗纹之间还存在次明纹, 此明纹强度很小, 仅为主极大的4%, 在$N-1$条暗纹之间有$N-2$条次明纹, N越大, 次极大越多, 明纹越细亮.

2. 单缝衍射的影响 缝内干涉



(1) 缺级:

P点的衍射角θ同时满足:

(a) 光栅方程主极大

(b) 单缝衍射的极小出现

$$d\sin\theta = k_2\lambda \qquad k_2 = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

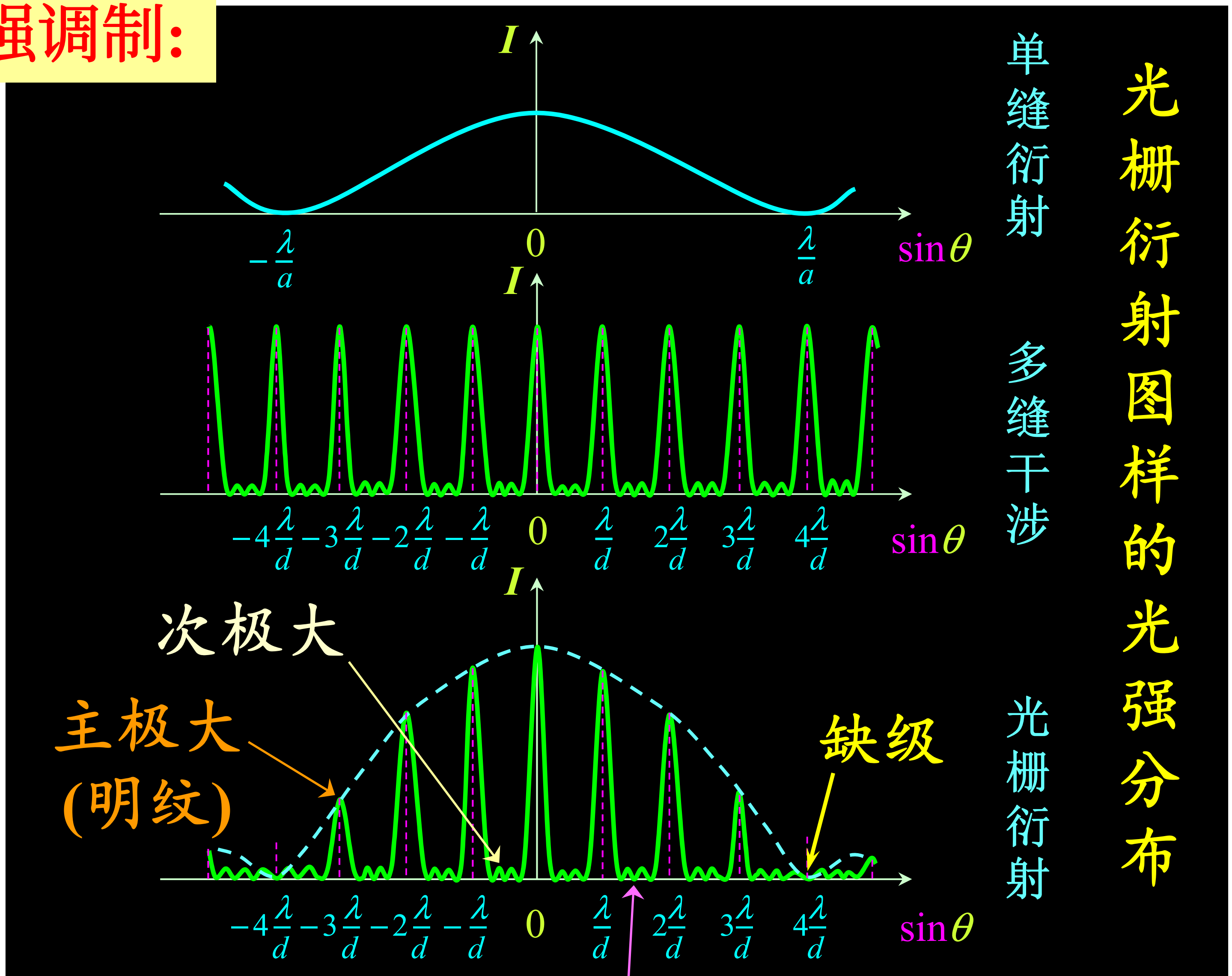
$$a\sin\theta = 2k_1\frac{\lambda}{2} = k_1\lambda \qquad k_1 = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

则: $$\boxed{k_2 = \frac{d}{a}k_1 \qquad k_1 = \pm1, \pm2, \cdots}$$ 缺级方程

与波长无关!

如$d = 4a$, 则$k_2 = \pm4, \pm8, \cdots$等主极大缺级.

(2)光强调制:



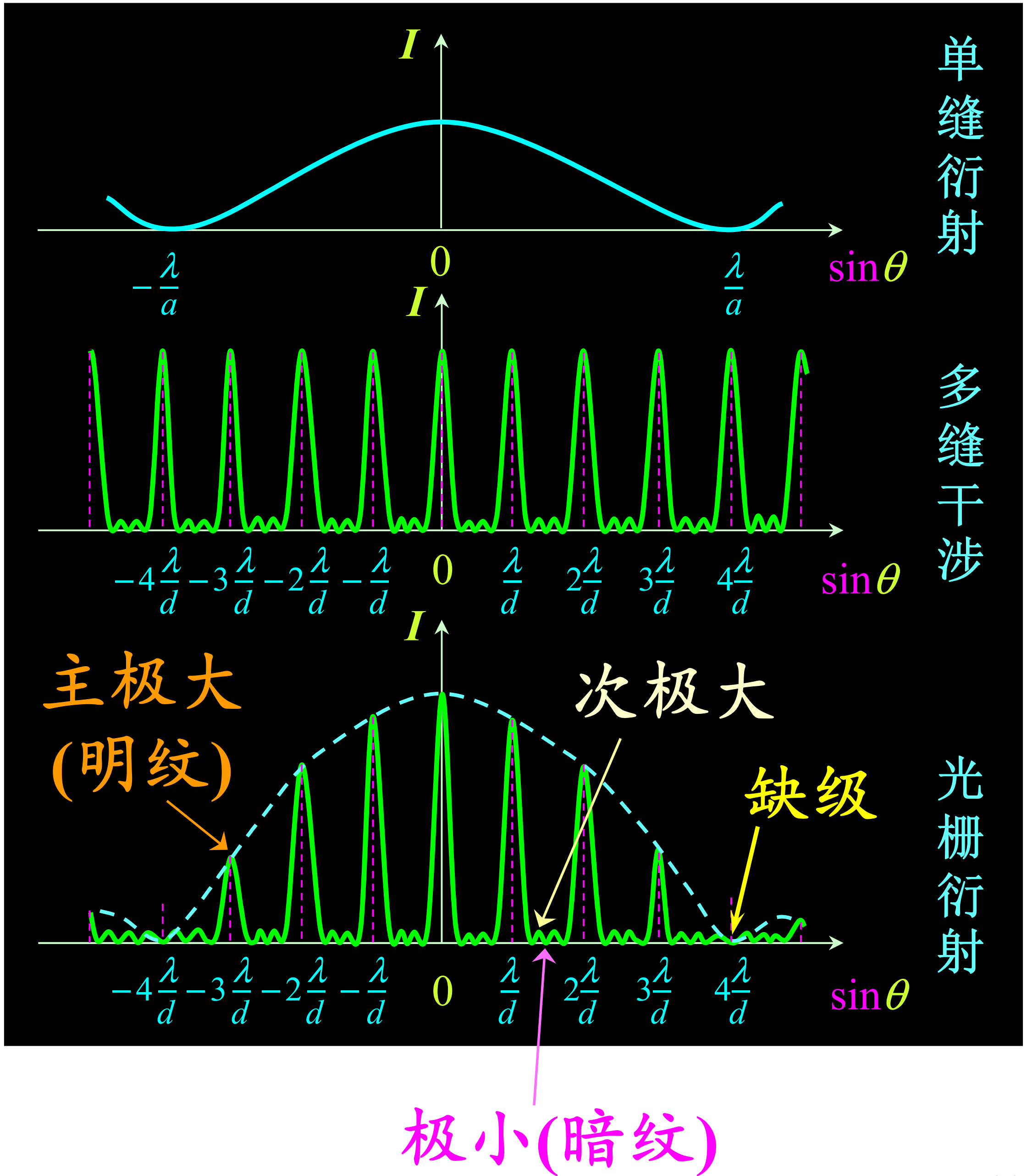
极小(暗纹)

该光栅有几条狭缝?

在两相邻主极大之间有3条暗纹. 有4条狭缝

思考题:

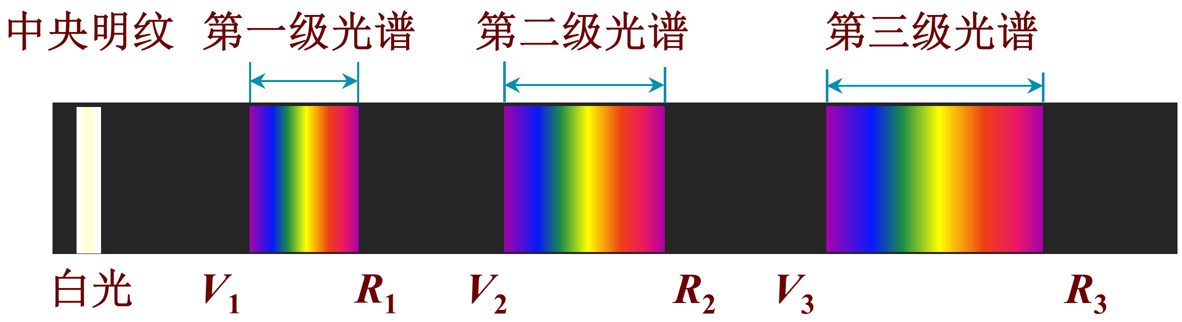
(1)如何求解单缝衍射中央亮条纹中包含的光栅衍射条纹数目?



三、光栅光谱

$$d\sin\theta = k\lambda;\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(1) 根据光栅方程, d 不变, $\lambda\downarrow$, $\theta\downarrow$



(2) d 不变时

$$d\cos\theta\, d\theta = k\, d\lambda \qquad d\theta = \frac{k\,d\lambda}{d\cos\theta}$$

$d\lambda$相同时, $k\uparrow$, $\sin\theta\uparrow$, $\cos\theta\downarrow$, $\rightarrow d\theta\uparrow$

故 k 越大, 谱线分得越开

注意这个特点!!!

例：波长$\lambda = 500$nm的单色平行光正入射在光栅常数为$d = 2.1\ \mu$m, 缝宽为$a = 0.700\ \mu$m的光栅上, 求能看到哪几级衍射谱线? 以入射角为$i = 30°$斜入射时情况又怎样?

解：(1) 若i=0的正垂直入射时　　$d\sin\theta = k\lambda$

$$k < \frac{d\sin 90°}{\lambda} = \frac{2.1\times10^{-6}\times1}{500\times10^{-9}} = 4.2 \qquad k_{max} = 4$$

但由于光栅缺级方程应满足

$$d\sin\theta = k\lambda \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$a\sin\theta = 2k'\cdot\lambda/2 \qquad k' = \pm1, \pm2, \ldots$$

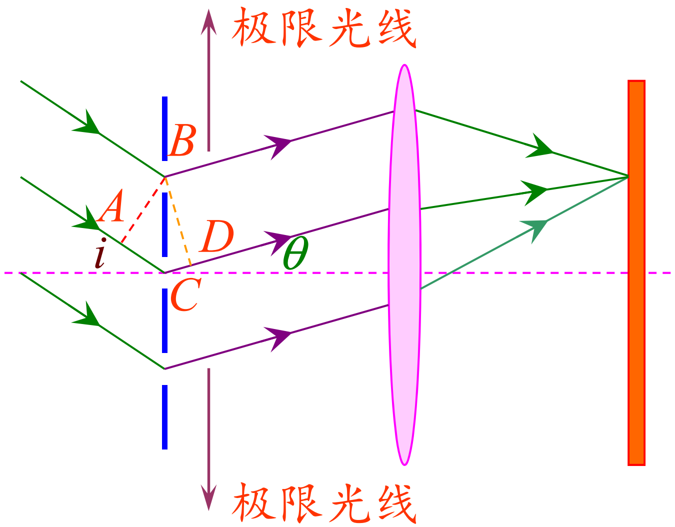
$$k = \frac{d}{a}k' = \frac{2.1}{0.7} = 3k' \qquad k' = \pm1, \pm2, \ldots$$

两边谱线对称

由于衍射光谱线第±3, ±6, ±9,…级缺级, 观察屏上实际呈现的谱线是: −4,−2,−1,0,1, 2,4级,也是共7条

(2) 如光线斜入射, 这时光栅方程变为:

情形一: $d\sin\theta + d\sin i = k\lambda \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$



对应于 $i = 30°, \theta = 90°$

$$d(\sin 90° + \sin 30°) = k\lambda$$

$$k < \frac{d(\sin 90° + \sin 30°)}{\lambda}$$

$$= \frac{2.1\times10^{-6}(1+0.5)}{500\times10^{-9}} = 6.3$$

$$k_{1\max} = 6$$

对应于 $i = 30°, \theta = -90°$

$$k > \frac{(a+b)(\sin(-90°) + \sin 30°)}{\lambda} = -2.1 \qquad k_{2\max} = -2$$

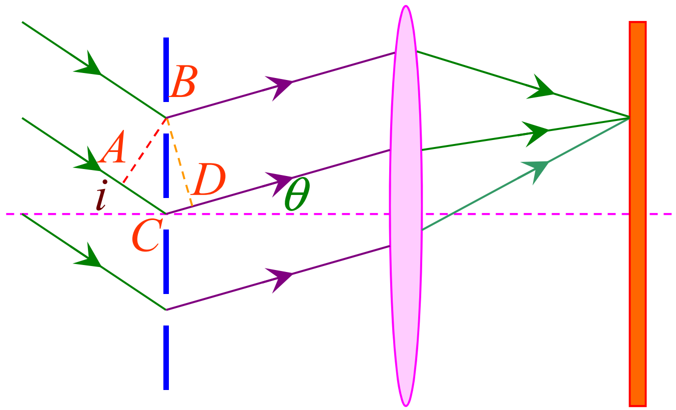
但由于光栅缺级方程应满足

$$d(\sin\theta+\sin i)=k\lambda \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$a(\sin\theta+\sin i)=2k'\cdot\lambda/2 \qquad k'=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$k=\frac{d}{a}k'=\frac{2.1}{0.7}=3k' \qquad k'=\pm1,\pm2,\ldots$$

同样衍射光谱线第 ±3, ±6, ±9,…级缺级. 故观察屏上实际呈现的谱线是: –2,–1,0,1,2,4,5级, 共7条



屏上两边观察到的谱线不对称!

情形二:

$$d\sin\theta - d\sin i = k\lambda \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

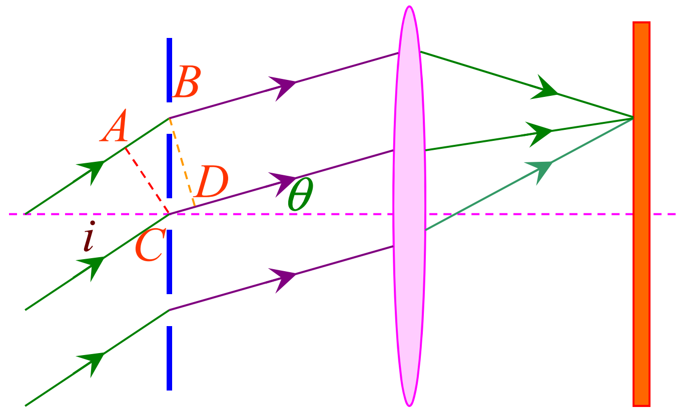
对应于$i = 30°, \theta = 90°$

$$d(\sin 90° - \sin 30°) = k\lambda$$

$$k < \frac{d(\sin 90° - \sin 30°)}{\lambda}$$

$$= \frac{2.1\times 10^{-6}(1-0.5)}{500\times 10^{-9}} = 2.1$$

$$k_{1\max} = 2$$



对应于$i = 30°, \theta = -90°$

$$k > \frac{(a+b)(\sin(-90°) - \sin 30°)}{\lambda} = -6.3 \qquad k_{2\max} = -6$$

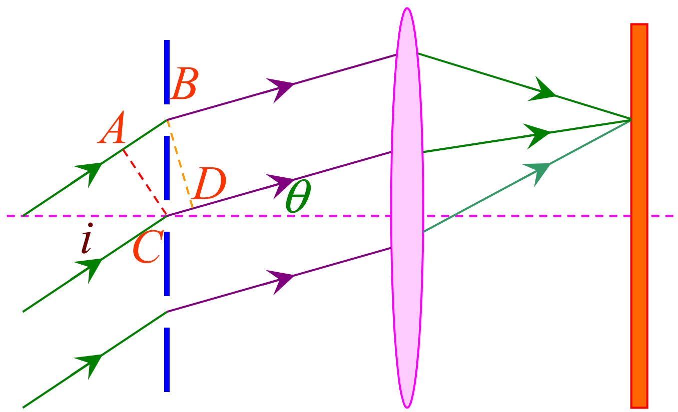
但由于光栅缺级方程应满足

$$d(\sin\theta-\sin i)=k\lambda \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$a(\sin\theta-\sin i)=2k'\cdot\lambda/2 \qquad k'=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$k=\frac{d}{a}k'=\frac{2.1}{0.7}=3k' \qquad k'=\pm1,\pm2,\ldots$$

同样衍射光谱线第±3, ±6, ±9,…级缺级. 故观察屏上实际呈现的谱线是: 2,1,0,–1,–2,–4,–5级, 共7条

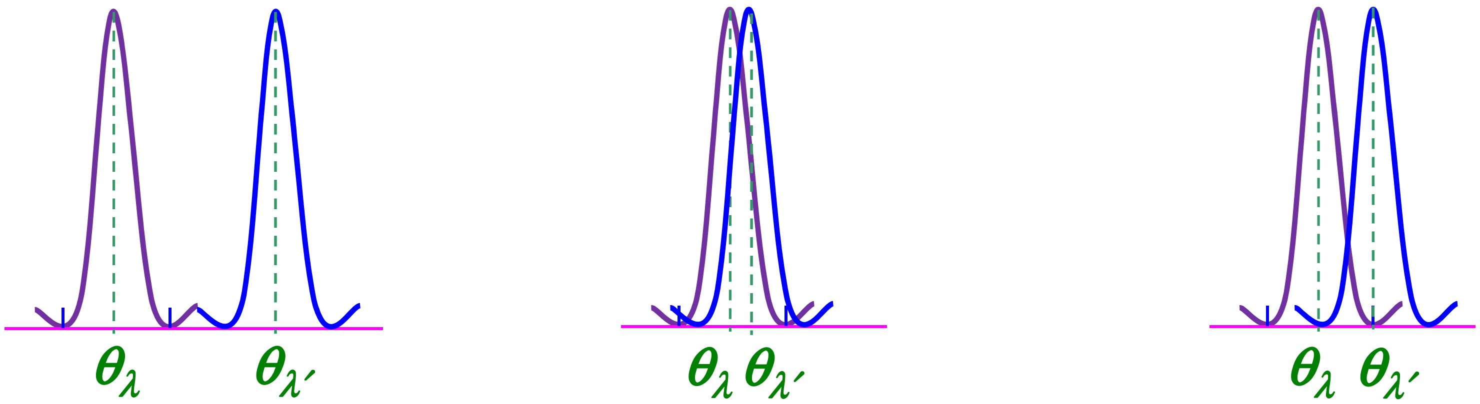


屏上两边观察到的谱线不对称!

四、光栅的分辨本领

1. 光栅的分辨本领的定义

(1)分辨本领: 是指把靠的很近的两条谱线分辨清楚的能力.



分辨清楚的条件 $\theta_{\lambda'}-\theta_\lambda \geq \Delta\theta/2$

(2)光栅的分辨本领的定义:

在光栅的衍射条纹中恰能分辨的两条谱线的平均波长 λ 与两谱线波长差 $\Delta\lambda$ 之比.

$$R=\frac{\bar{\lambda}_{\text{恰能分辨}}}{\Delta\lambda_{\text{恰能分辨}}}$$

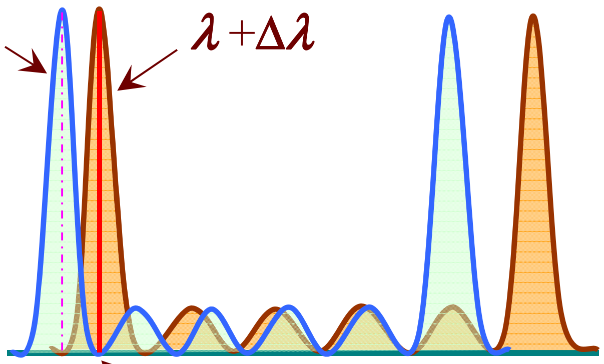
2. 光栅分辨本领的计算

分辨λ与$\lambda+\Delta\lambda$，则要求$\lambda+\Delta\lambda$的第k级明纹与λ的$kN+1$级暗纹重合，此时认为恰好能分辨.

(a)衍射角 θ 处为$\lambda+\Delta\lambda$ 的第k级明纹，同时恰好又是λ的$(kN+1)$级暗纹

(b)第$k+1$级明纹更能分辨.

第$k-1$级明纹却不能分辨.



根据光栅方程和暗纹公式：

(i) $\lambda+\Delta\lambda$ 的第k级明纹

$$d\sin\theta=k(\lambda+\Delta\lambda)=k\lambda+k\Delta\lambda$$

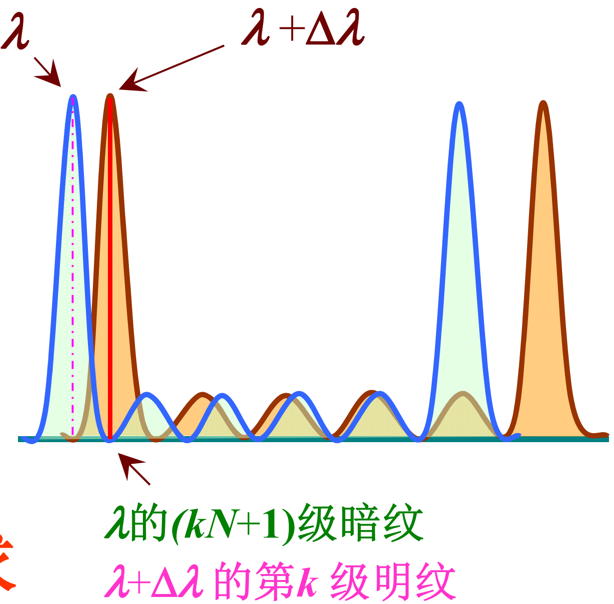
两边乘以N，得： $Nd\sin\theta=kN\lambda+kN\Delta\lambda$

(ii) λ的$(kN+1)$级暗纹

$$Nd\sin\theta=(kN+1)\lambda=kN\lambda+\lambda$$

$$\boxed{\lambda=kN\Delta\lambda}$$

可以解得: $R=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$



光栅的分辨本领与光栅的总缝数N及衍射级数k成正比, 与光栅常数无关.

讨论:

$\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$ 是为分辨这两个波长要求光栅必须达到的分辨本领

kN 第k级明纹可以达到的分辨本领

$kN\geq\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$ 时, 第k级明纹可以分辨这两个波长

思考题: 除了用分辨本领外, 光栅中对谱线能否分辨的问题有没有其它判断方法?

例: 设计一光栅, 要求

(1) 能分辨钠光谱的 5.890×10^{-7} m 和 5.896×10^{-7} m的第二级谱线;

(2) 第二级谱线的衍射角 $\theta\leq30°$;

(3) 第三级谱线缺级.

解: 设计光栅, 即确定光栅的 N, a, b

(1) 按光栅的分辨本领:

光栅可以达到

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\leq kN$$

要求达到

得: $N\geq\dfrac{\lambda}{k\Delta\lambda}=\dfrac{5.893\times10^{-7}}{2\times0.006\times10^{-7}}=491$

即 $N\geq491$ 条

(2) 由$(a+b)\sin\theta=k\lambda$可得:

$$a+b=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times5.893\times10^{-7}}{\sin30^\circ}$$

$$=2.36\times10^{-3}\ \text{(mm)}$$

因 $\theta\leq30^\circ$，故 $a+b\geq2.36\times10^{-3}$ (mm)

(3) 缺级条件:

$$d\sin\theta=k_2\lambda \qquad k_2=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$a\sin\theta=2k_1\cdot\lambda/2 \qquad k_1=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$k_2=\frac{d}{a}k_1 \qquad k_1=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$ 缺级方程

$$\frac{a+b}{a}=\frac{k_2}{k_1}$$

第三级谱线缺级，$k_2=3$

$k_1<k_2$

解一：　取$k_1=1$，而 $k_2=3$

$$a=\frac{a+b}{3}=0.79\times10^{-3}(\mathrm{mm})$$

$$b=2.36\times10^{-3}-0.79\times10^{-3}=1.57\times10^{-3}\,(\mathrm{mm})$$

解二：　也可取$k_1=2$，而 $k_2=3$

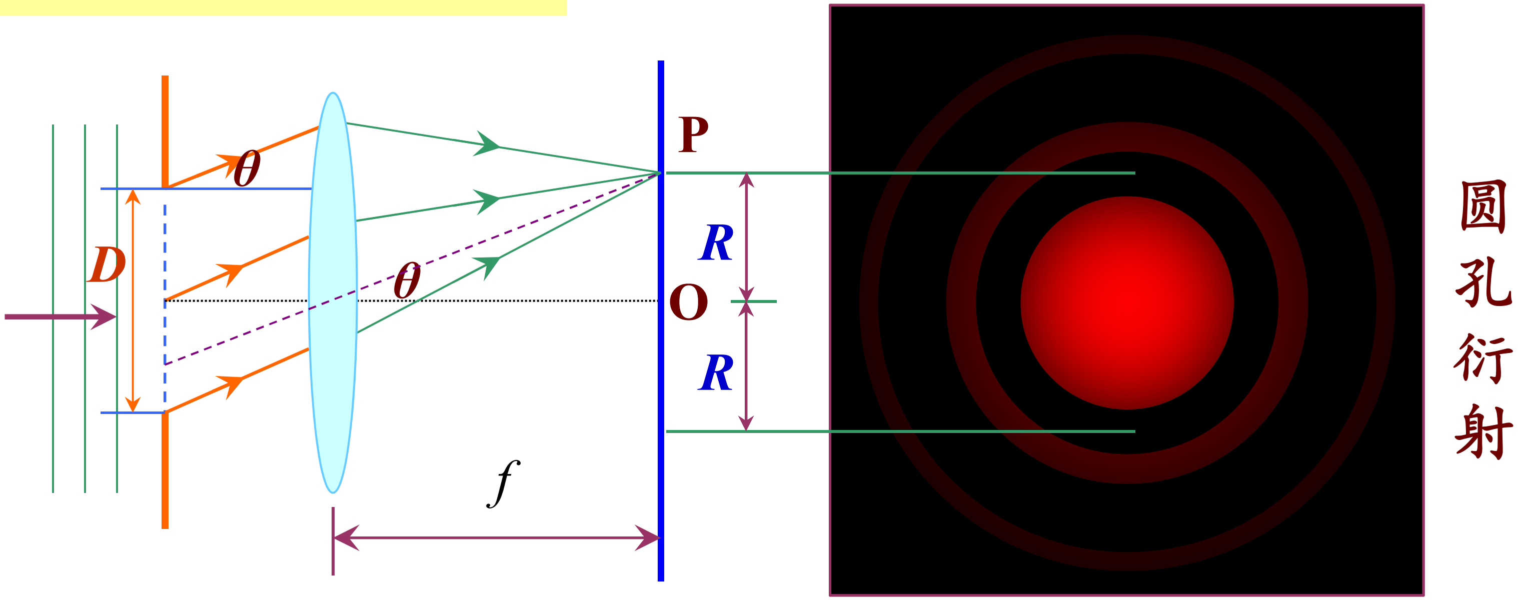
$$a=2\cdot\frac{a+b}{3}=1.57\times10^{-3}(\mathrm{mm})$$

$$b=2.36\times10^{-3}-1.57\times10^{-3}=0.79\times10^{-3}\,(\mathrm{mm})$$

思考题：如果光栅衍射的第四级谱线缺级？

§ 17-5 圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

一、圆孔夫琅禾费衍射

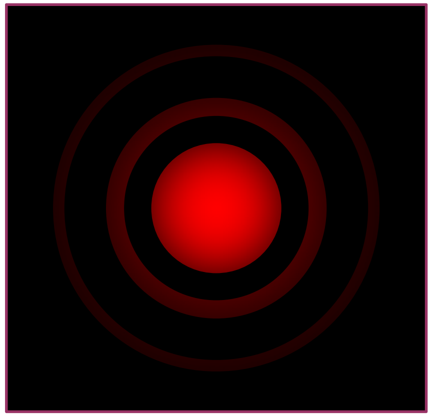


设圆孔直径为D, 满足第一级暗环的衍射角为:

$$\sin\theta_1 \approx \theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

一级暗环所包围得中央圆斑称为爱里斑(Airy), 爱里斑的角半径即为θ_1. 爱里斑的半径R为:

$$R = f\tan\theta_1 \approx f\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}f$$

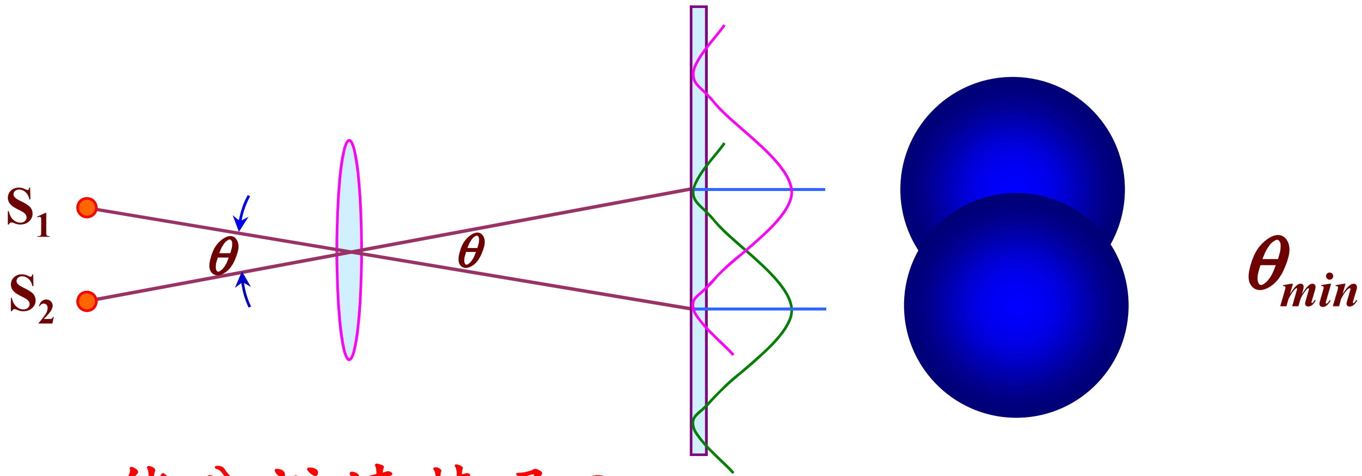


圆孔衍射

当 $\dfrac{\lambda}{D} \ll 1$ 时，衍射现象可以忽略.

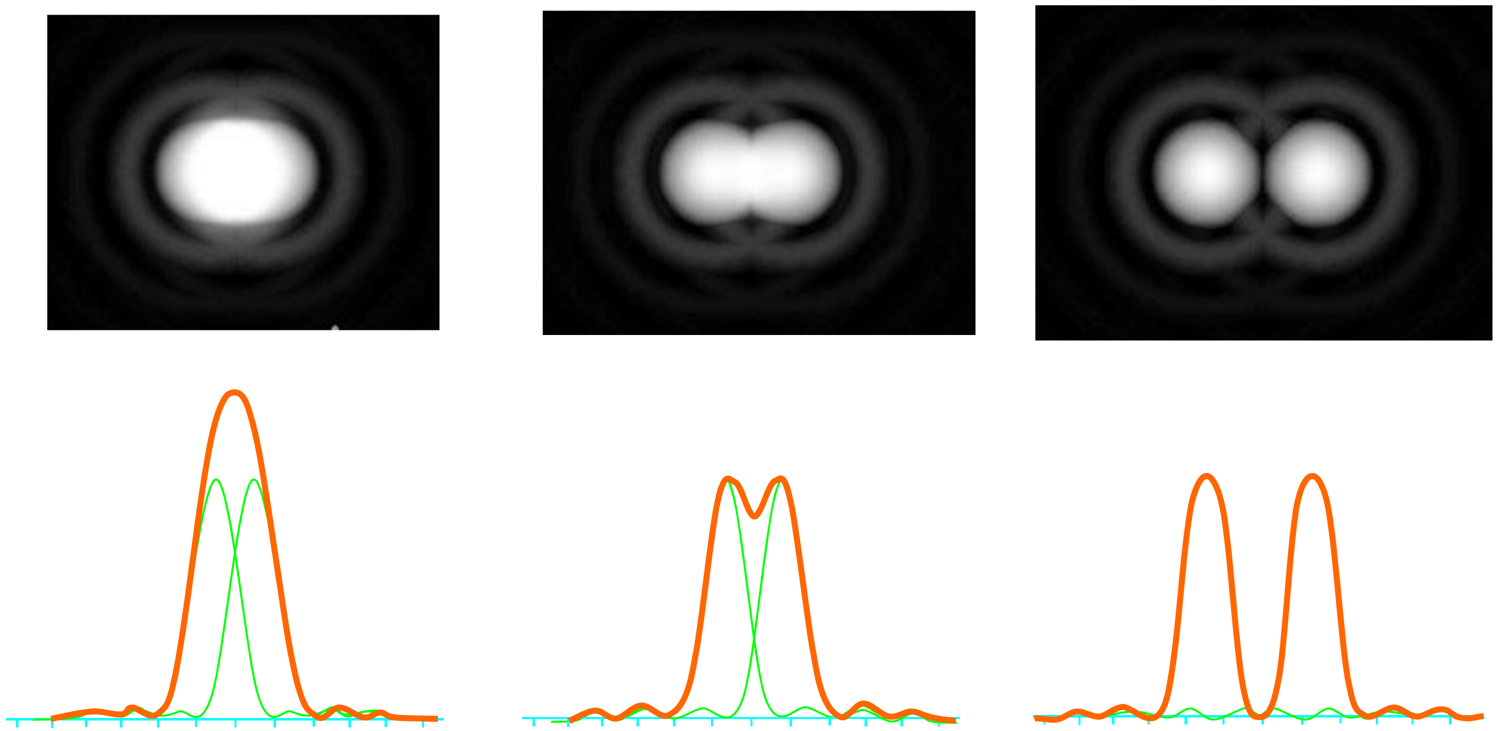
★ 光学仪器镜头(包括眼睛) → 小孔 (产生圆孔衍射)

有两个相距较近的物体，放在光学仪器镜头前



能分辨清楚吗？

二、光学仪器的最小分辨角



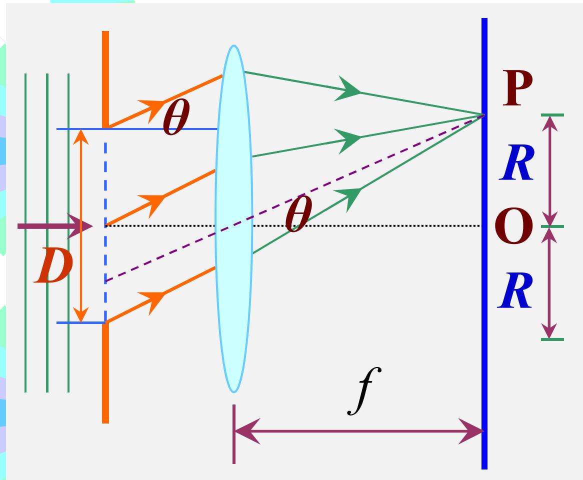
不能分辨　　恰能分辨　　能分辨

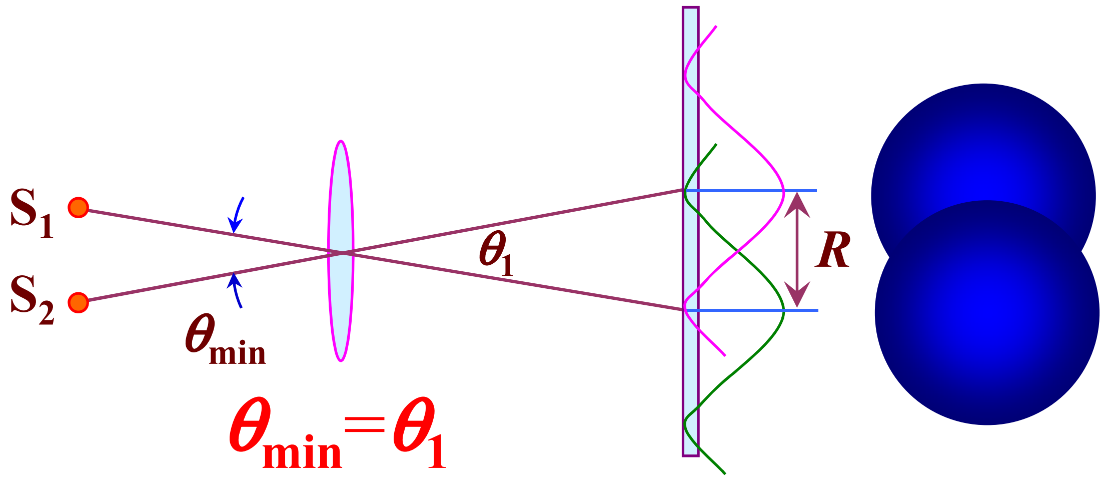
1. 瑞利判据

当一个点的圆孔衍射图样的中央主极大恰好与另一个点的圆孔衍射图样的第一级极小相重合时，这两点就处于恰能 分辨的位置．此时合成曲线的最小强度为最大强度的80%.

2. 最小分辨角

满足瑞利判据时两物点对透镜中心的张角称为最小分辨角 θ_{min}：





$$\theta_{min}=\theta_1$$

3.最小分辨角的求法

$$\theta_{\min}=\theta_1=1.22\frac{\lambda}{D}$$

4. 光学仪器的分辨本领

一般定义为:

$$\text{分辨本领}=\frac{1}{\text{最小分辨角}}$$

$$R=\frac{1}{\theta_{\min}}=\frac{1}{\theta_1}=\frac{D}{1.22\lambda}$$

与λ成反比

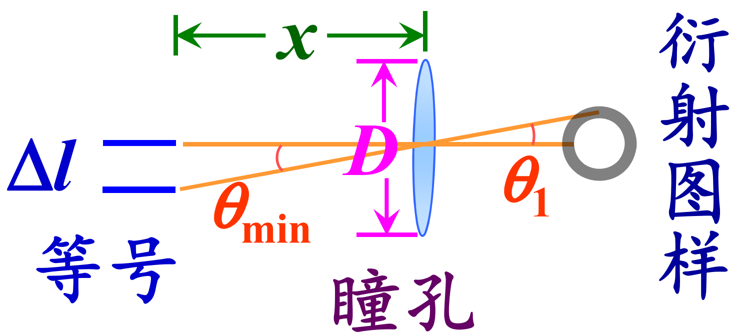
电子显微镜

例：在通常亮度下，人眼瞳孔直径约为3 mm，若视觉感受最灵敏的光波波长为550 nm, 则人眼最小分辨角为 __2.24×10⁻⁴__ rad; 在教室的黑板上, 画的等号的两横线相距 2 mm, 则只有坐在距黑板 __8.9__ m内的同学才能看得清.

解:

$$\theta_{\min} = \theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} = 2.24\times10^{-4}\ \ (\text{rad})$$

$$x = \Delta l \cot\theta_{\min} = \frac{\Delta l}{\theta_{\min}} = \frac{\Delta l}{\theta_1} = 8.9\ \ (\text{m})$$



§ 17-6 X射线在晶体上的衍射

X射线是伦琴(W.K.Rontgen)在1895年发现的. X射线管中加速电子撞击阳极A即产生X射线.

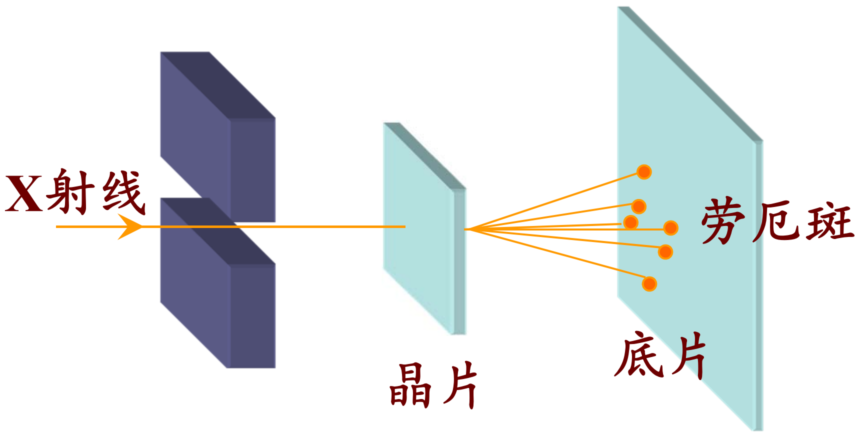
X射线管

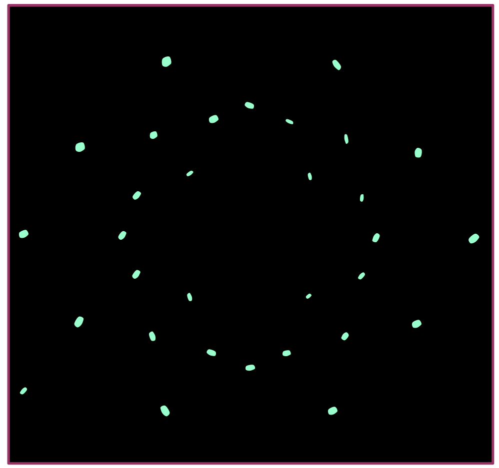
由于X射线的波长范围在$10^{-7} \sim 10^{-13}$范围,所以很难制成人工的光栅对其进行研究.

如λ=0.1 nm, d=300 nm, 每毫米3333条栅纹

第一主极大角：$\theta_1 \approx 0.019°$

1912年劳厄(M.Von Laue)根据对晶体结构的研究,提出用天然晶体作为三维光栅的设想,其实验装置与衍射图样见下图:





劳厄斑

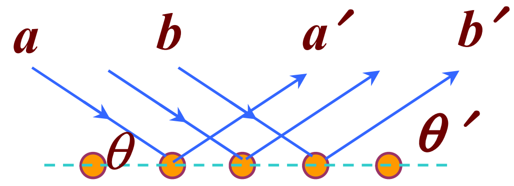
一、布喇格公式

1913年, 英国的布拉格父子提出一种研究X射线衍射的方法, 即把晶体的空间点阵当作反射光栅处理, 想像晶体是由一系列平行的原子层构成, 设原子层间距为 d, 称晶面间距, 当X射线掠入射时.

a、同一晶面反射

任意两条光线光程差 $\delta = 0$

只有$\theta = \theta'$方向上加强

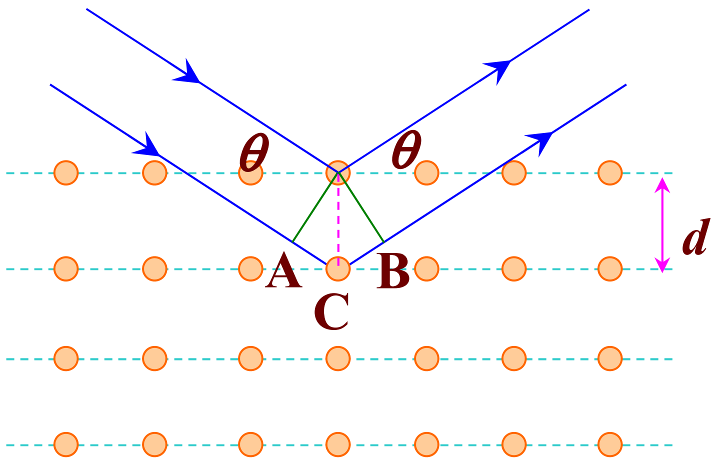


注意θ是掠射角

b、不同晶面反射

$$\delta = AC + CB = 2d\sin\theta$$

各散射层在反射方向形成干涉加强的条件:

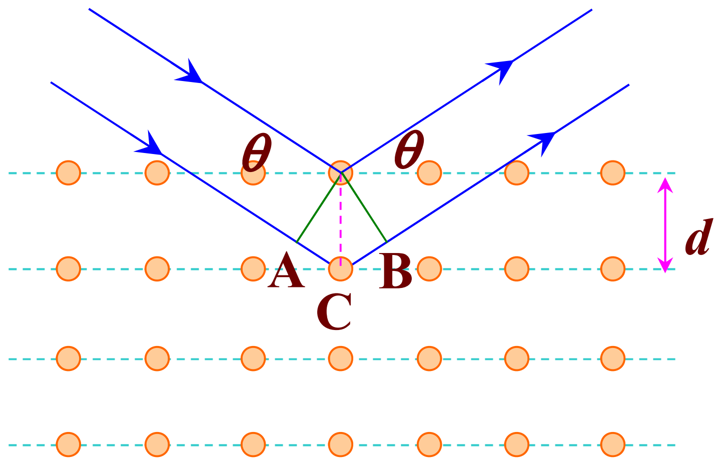


$$2d\sin\theta = k\lambda,$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

上式称为布喇格公式.

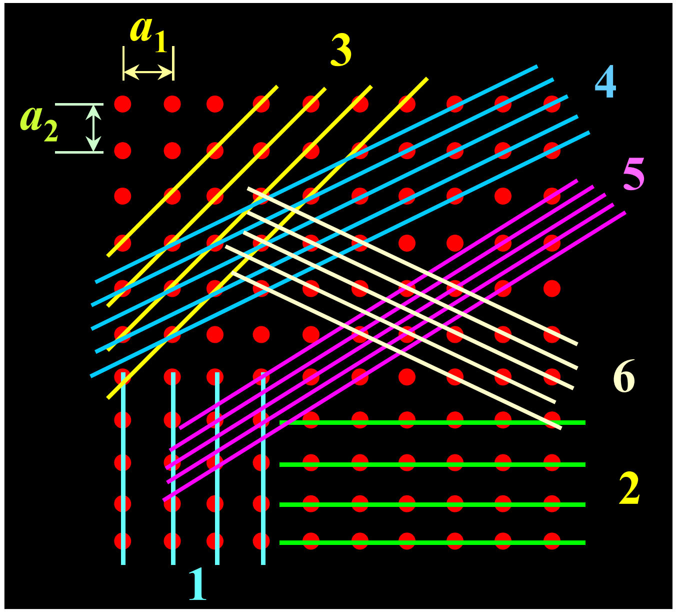
对于单色X射线以任意角θ掠入射, 一般得不到反射加强图案, 因为不一定满足上式, 对连续X射线, 满足反射强得波长为:

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k}, \quad k=1,2,3,\ldots$$



二、布喇格公式的用途

①应用布拉格公式可以解释劳厄实验,劳厄实验中的众多斑点是由于晶体中存在众多不同取向的原子层造成的.



晶体内不同取向的原子层面

②证明X射线具有波动性

③证明晶体原子排列具有周期性

三、X射线衍射的应用

1. 已知晶格常数, 测X射线的波长.
2. 已知X射线波长, 研究晶体的结构.

本章结束!