(3) 拉格朗日方程

一般地，质点系各个质点的矢量坐标可表示为广义坐标的函数，$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,q_2,\dots,q_k;t)$。质点速度相应地通过广义速度表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

两边关于广义速度 $\dot{q}_j$ 求偏导数，得到一个恒等关系式

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

消点规则

质点速度关于广义坐标的导数为

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

质点矢量坐标关于广义坐标的导数仍为广义坐标的函数，$\partial r_i / \partial q_j = \partial r_i / \partial q_j (q_1, q_2, \cdots, q_k; t)$。再将它关于时间求全导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

比较两等式，即得另一个恒等关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$$

交换关系

利用恒等式，可将广义惯性力表示为

$$Q_{gi}=-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

则广义惯性力

$$Q_{gi}=-\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

$$=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)$$

$$=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

广义惯性力可以通过动能的导数表达，形式简便，物理意义明确

将广义惯性力代入动力学普遍方程在广义坐标空间的形式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

第二类拉格朗日(Lagrange)方程/拉格朗日方程

拉格朗日方程形式简洁、便于应用，可用于建立质点系的一般动力学关系，特别是质点与约束均较多的复杂系统。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 它是常微分形式的方程，其数目等于系统的自由度数。二阶常微分方程组，通常是非线性的
- 该方程由系统动能与广义力确定，它们都是代数量、计算方便。 拉格朗日方程是标量方程
- 对于受理想约束的系统，该动力学方程不包含未知的约束力，故没有“多余”的动力学关系。是最少量方程
- 如果需求约束力，可解除相应的约束，将约束力转化为主动力，从而通过广义力进入拉格朗日方程，同时系统的自由度或方程数也随之增加。

只需要分析速度，不需分析加速度

基本不需要“技巧”

(4) 尼尔森 (Nielsen) 方程

不要求

质点系动能关于时间的全导数

$$\dot{T}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i\cdot\ddot{r}_i$$

质点加速度

$$\ddot{r}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial r_i}{\partial q_l}\ddot{q}_l+\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_l\partial q_m}\dot{q}_l\dot{q}_m+2\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_l\partial t}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}$$

关于广义速度 $\dot{q}_j$ 求偏导

$$\frac{\partial\ddot{r}_i}{\partial\dot{q}_j}=2\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_j}$$

于是，拉格朗日方程又可表示成

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_j}-2\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\qquad j=1,2,\cdots,k$$

本质与拉格朗日方程一致，形式上略有不同

——尼尔森方程

利用恒等式，可将拉格朗日方程左边第一项表示为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{r}_i\cdot\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}+\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{r}_i\cdot\dot{r}_i\right)-\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial \ddot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\cdot\dot{r}_i+\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)$$

$$=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-2\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}+\sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)$$

$$=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

(5) 广义速度表示的动能

利用速度表达式，可将质点系的动能表示为

$$T=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l v_l^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l\dot{\boldsymbol{r}}_l\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_l$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{k}b_i\dot{q}_i+c$$

$$=T_2+T_1+T_0$$

式中动能关于广义速度的二次项、一次项与零次项部分分别为

a_{ij}是广义坐标的函数，与速度无关

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad a_{ij}=\sum_{l=1}^{n}m_l\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_j}$$

a_{ij}具有对称性

$a_{ij}=a_{ji}$

$$T_1=\sum_{i=1}^{k}b_i\dot{q}_i \qquad b_i=\sum_{l=1}^{n}m_l\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial t}$$

$$Q(x_1,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$T_0=c=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}m_l\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial t}$$

$$Q(x_1,\cdots x_n)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

动能的广义速度二次项部分为广义速度的二次型

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}m_l\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}}_i\right)^2\geq 0$$

故动能T_2正定，即其系数矩阵$[a_{ij}]$对称正定

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{k}\left(\dot{a}_{ij} - \frac{\partial b_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_l + \dot{b}_j + \frac{\partial c}{\partial q_j} = Q_j$$

- 一般情况下，它组成k个关于广义坐标的二阶微分方程组，其二阶导数项的系数矩阵为$[a_{ij}]$，由$[a_{ij}]$的正定性知该方程组的二阶导数项可以解耦。

注解（1）：解耦问题等价于方阵是否可以对角化的问题；$[a_{ij}]$是实对称矩阵；实对称矩阵都可以对角化。（2）实际上，只要是真实系统，二阶导数项都可以解耦。

- 在定常约束、质点的矢量坐标不显含时间t的情况下，有$b_i=0$，$c=0$，从而$T_1=T_0=0$，此时质点系的动能只有广义速度的二次项，拉格朗日方程成为

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\ddot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_l = Q_j \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 当a_{ij}是广义坐标的函数时，拉格朗日方程具有广义速度的非线性项

二阶非线性微分方程

(6) 保守系统的拉格朗日方程

保守系统受到的主动力都是有势力，其相应的广义力可表示为负的势能的导数，则拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 注意到势能取决于质点系的位形，只是广义坐标及时间的函数 $V=V(q_1,q_2,\cdots,q_k;t)$，从而 $\partial V/\partial \dot{q}_j=0$。

引入函数

拉格朗日函数/动势

$$L=T-V$$

- $L=L(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k;q_1,q_2,\cdots,q_k;t)$

***L*是力学体系的特性函数，表征着约束、运动状态、相互作用等性质。**

则拉格朗日方程表示为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,k$$

上式称为**标准形式的拉格朗日方程**。此时，只需计算系统的动能与势能，而无需计算广义力。

括号内的项称为广义动量，后面一项称作拉格朗日力。

利用动能的表达式，可将拉格朗日函数表示成

$$L=T_2+T_1+T_0-V$$

- 在定常约束、$r_i=r_i(q_1,q_2,\cdots,q_k)$ 情况下，它退化为 $L=T_2-V$，表示系统的动能与有势力所作功之和。

非保守系统的拉格朗日方程

- 对于非保守系统，主动力可以分为有势力和非有势力两类，系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\tilde{Q}_j$$

$$j=1,\ 2,\ldots,k$$

其中 $\tilde{Q}_j$ 为非有势力相应的广义力。

2. 拉格朗日方程的应用

❖ 应用拉格朗日方程建立质点系的动力学关系的一般过程

(1)明确研究的系统对象及其约束的性质判断约束是否完整

(2)分析确定系统的自由度，选取适当的广义坐标

(3)计算系统的动能，并通过广义速度及广义坐标表示

(4)计算广义力，可以按照定义公式，也可利用虚功通过下式算得

$$Q_j = \frac{[\sum \delta W]_j}{\delta q_j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- ❖ 对于保守系统，可以先计算势能，再求导得到

(5)将动能与广义力代入拉格朗日方程，求导并整理得系统的运动微分方程组。

- ❖ 注意偏导数与全导数运算的区别

对广义坐标求偏导数与对时间求全导数的运算区别

$$T = a(t)\dot{q}_1 + b(t)q_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = b(t), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a(t)$$

$$\frac{dT}{dt} = \dot{a}\dot{q}_1 + a\ddot{q}_1 + \dot{b}q_1 + b\dot{q}_1$$

例2.1 水平面内的行星轮机构如图2.1所示，均质杆OA的质量为m_1，可绕铅直轴O转动，A端通过光滑铰与轮心A联接，均质小圆轮A的质量为m_2，半径为r，大圆轮固定，轮心位于O处，半径为R。当杆在力偶矩M作用下转动时，带动小轮运动，设小轮与大轮在接触点处无相对滑动。求：杆的角加速度。

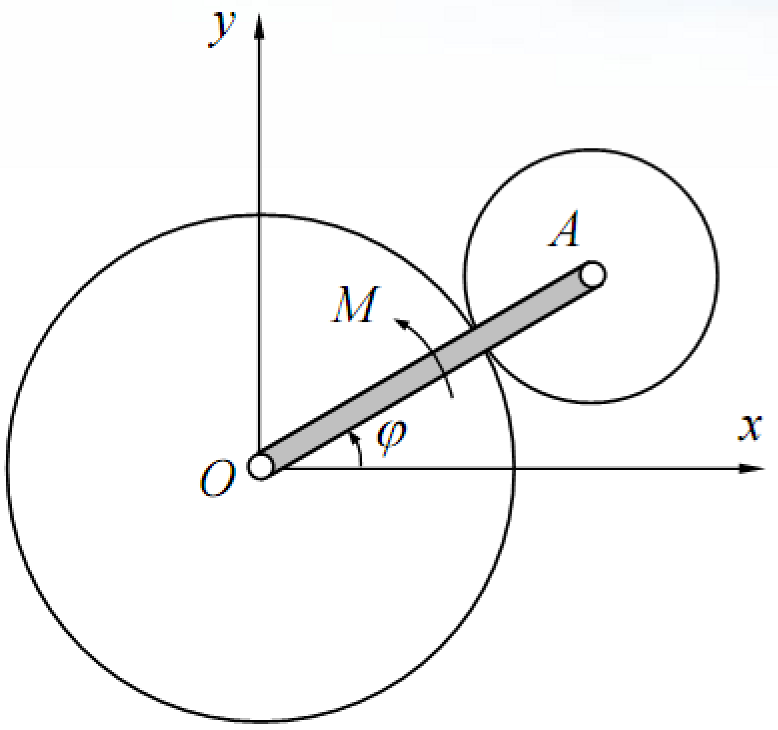

图2.1

解：以杆OA与小轮A组成的系统为研究对象，其自由度为1，选取杆的角坐标φ为广义坐标。

定轴转动的动能

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_1 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2$$

小轮平面运动，轮心速度 $v_A = (R+r)\dot{\varphi}$ ，角速度 $\omega_2 = v_A / r$，动能

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2$$

系统的动能及其导数为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{12}(2m_1 + 9m_2)(R+r)^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{6}(2m_1 + 9m_2)(R+r)^2\dot{\varphi}$$

系统受到定常约束，相应的动能只有广义速度$\dot{\varphi}$ 的二次项

系统的约束是理想的，只有主动力偶作功，利用虚功表达式或定义公式，可得广义力

$$Q_\varphi = \frac{M\delta\varphi}{\delta\varphi} = M$$

将广义力、动能及其导数的表达式代入拉格朗日方程，得

$$\frac{1}{6}(2m_1+9m_2)(R+r)^2\ddot{\varphi}=M$$

则杆的角加速度为

$$\ddot{\varphi}=\frac{6M}{(2m_1+9m_2)(R+r)^2}$$

拉格朗日方程是关于广义坐标φ的二阶微分方程。动能关于时间的全导数

$$\dot{T}=\frac{1}{6}(2m_1+9m_2)(R+r)^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

将广义力与动能代入尼尔森方程，结果与拉格朗日方程一致

例2.2 铅直平面内的摆如图2.2所示，小球质量为m，通过细绳悬挂，绳另一端绕在固定的圆柱上，圆柱半径为R。摆在铅直位置时，绳的直线部分长度为L，绳重不计。求：摆动微分方程。

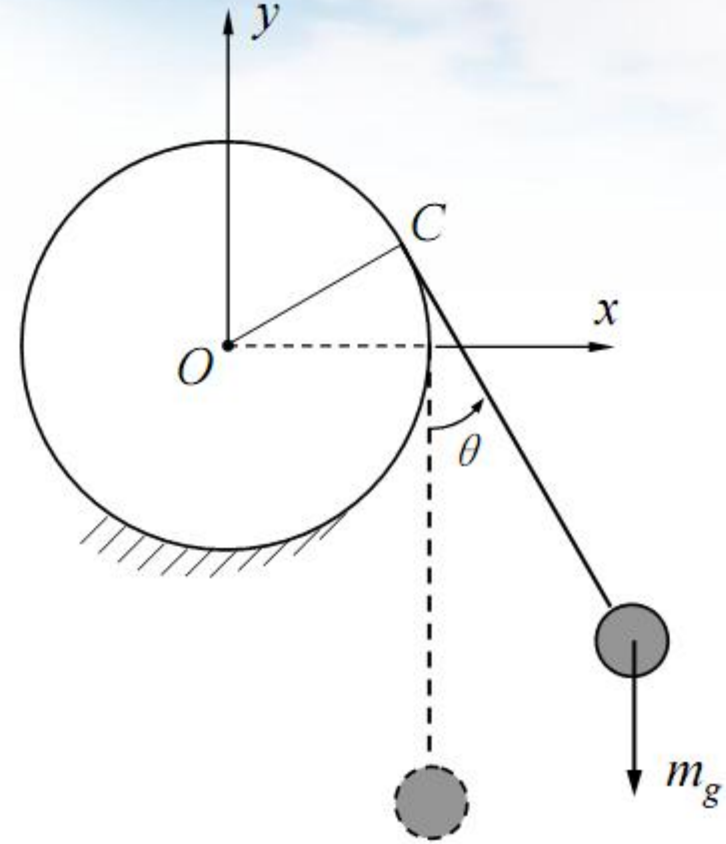

图2.2

解：以摆为研究对象，自由度为1，选取摆角θ为广义坐标。

绳与柱的切点C为速度瞬心，球的速度 $v=(L+R\theta)\dot{\theta}$，动能及其导数

$$T=\frac{1}{2}m(L+R\theta)^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m(L+R\theta)^2\dot{\theta}$$

摆长虽然随运动而改变，但其约束仍然是定常的，约束方程

$$(x-R\cos\theta)^2+(y-R\sin\theta)^2=(L+R\theta)^2$$

⇓

系统的动能只有广义速度的二次项

系统的约束是理想的，只有主动的重力做功，而重力是有势力，故广义力可通过势能的导数算得。设摆于平衡状态为零势位，势能

$$V = mg[(L + R\sin\theta) - (L + R\theta)\cos\theta]$$

显然，势能是广义坐标的函数，与广义速度无关。广义力

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mg(L + R\theta)\sin\theta$$

将广义力与动能及其导数的表达式代入拉格朗日方程，得到摆动微分方程

$$(L + R\theta)\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$$

❖**它是一个非线性的二阶常微分方程。由于动能关于广义速度的二次项参量** $a = m(L + R\theta)^2$**，而*a*为广义坐标*θ*的函数，故拉格朗日方程具有广义速度的二次非线性项。**