浙江大学 2006-2007 春夏 线性代数

一、填空题（24 分）

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 3 \\ 3x & x & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & -1 & 3x & x \end{vmatrix}$ 中的 x^4 的系数是__4__，x^3 的系数是__－12__。

2. 向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$ 的极大线性无关组是________，用此极大线性无关组表示其余的向量________。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可以知道极大线性无关组可取为 α_1,α_2，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$。

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & a & 4 \\ 1 & 0 & a & 1 & 5 \\ 2 & a & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，且 $r(A)=4$，则 $a=$________。

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & a & 4 \\ 1 & 0 & a & 1 & 5 \\ 2 & a & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & a-4 & -2 \\ 1 & -1 & a-2 & -1 & 2 \\ 2 & a-2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a-4 & 1 \\ 1 & -1 & a-6 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 3 & 3-a & 3-a \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a-4 & 5-a \\ 1 & -1 & a-6 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 3 & 3-a & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a-4 & 5-a \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & (a-3)(a-5) & 3-a & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $r(A)=4$，所以 $a\neq 3,5$。

4. 设 A，B 都是 3 阶矩阵，满足 $E+B=AB$，且 A 的特征值为 2，3，0，则 B 的特征值是________。

解：$E+B=AB\Rightarrow E=(A-E)B$，故 B 的特征值为 1，$\dfrac{1}{2}$，－1.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T\begin{pmatrix}1&1&3\\3&6&1\\1&3&9\end{pmatrix}X$，它的矩阵是_________，它是______定二次型。

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&6&2\\2&2&9\end{pmatrix}$，$\Delta_1=1,\Delta_2=2,\Delta_3=6$，故为正定二次型。

二、计算题

1. （10 分）计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&a&b&a\\a&0&a&b\\b&a&1&a\\a&b&a&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b-1&0\\a&0&0&b\\b&a&1-b&0\\a&b&0&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+b&2a&0&0\\a&0&0&b\\b&a&1-b&0\\a&b&0&-b\end{vmatrix}$$

$$=(1-b)\begin{vmatrix}1+b&2a&0\\a&0&b\\a&b&-b\end{vmatrix}=(1-b)\begin{vmatrix}1+b&2a&0\\2a&b&0\\a&b&-b\end{vmatrix}=(1-b)(-b)\begin{vmatrix}1+b&2a\\2a&b\end{vmatrix}$$

$$=(1-b)(-b)[b(1+b)-4a^2]$$

2. （16 分）设欧氏空间 R^3 的一组向量 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(2,-1,1)^T,\alpha_3=(-2,1,5)^T$

（1） 求证：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基；

（2） 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 改造成 R^3 的标准正交基 β_1,β_2,β_3；

（3） 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

（4） 向量 δ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $(1,2,0)^T$，求向量 δ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。

解： （1） $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\0&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-5&5\\0&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，

可知秩为 3，从而线性无关。

（2）由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是相互正交的，因此只需单位化即得标准正交基

$$\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$$

（3） $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt6}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$。

（4）$\delta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt6}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

推出

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt5&0&0\\0&\sqrt6&0\\0&0&\sqrt{30}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt5\\2\sqrt6\\0\end{pmatrix}。$$

3. （10 分）设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求a的值及所有公共解。

上述两个方程组有公共解，即将其联立后的方程组有解。

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$$

相应的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&a-1&1-a\\0&0&a^2-1&3(1-a)\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1-a\\0&0&a-1&1-a\\0&0&a^2-1&3(1-a)\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}$$

当$a=1$时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，此时$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，方程组有无穷多解，

其通解为 $k(1,0,-1)^T$。

当$a\neq1$时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1-a\\0&0&1&-1\\0&0&a+1&-3\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2-a\\0&0&1&-1\\0&0&0&a-2\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}$

由此可知必须有$a=2$，此时$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，解为$(0,1,-1)^T$。

4. （10 分）设$\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，$A=\alpha\beta$，求 A 的特征值和特征向量。

解： 因为 $\beta\alpha=3$，$A\alpha=\alpha\beta\alpha=3\alpha$，所以 A 有特征值 3，特征向量为 $\eta_1=\alpha$。

又因为$r(A)=1$，A 的另外两个特征值为 0，0。

$$A=\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，从而有两个线性无关的特征向量

$\eta_2=(-1,2,0)^T,\eta_3=(-1,0,3)^T$。他们的线性组合为属于 0 的所有特征向量。

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$，属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为

$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(0,1,-1)^T$，求

（1） 属于特征值$\lambda_3=6$的特征向量；

（2） 矩阵 A。

解： （1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知$\alpha_1,\alpha_2$是线性无关的

令$\beta=(x,y,z)^T$是属于特征值 6 的特征向量，则

$$\begin{cases}\beta \perp \alpha_1 \\ \beta \perp \alpha_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=0 \\ x-z=0\end{cases} \Rightarrow x=y=z \Rightarrow \beta=(1,1,1)^T。$$

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10 & 4 & 4\\ 4 & 10 & 4\\ 4 & 4 & 10\end{pmatrix}$$

三、证明题：

1. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $A^3=2E, B=A^2-2A+E$，求证：B 可逆，并求出 B^{-1}。

证明： 因为 $A^3=2E,$ 所以 $A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=E$。于是 $(A-E)^{-1}=A^2+A+E$。

从而 $B=A^2-2A+E=(A-E)^2$ 可逆，且

$$B^{-1}=[(A-E)^{-1}]^2=[A^2+A+E]^2。$$

2. 设 V 是欧氏空间，β 是 V 中的非零向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 V 中的 s 个向量，且对于任意的 k，

$(\beta,\alpha_k)>0,$ 当 $i\neq j$ 时，$(\alpha_i,\alpha_j)\le 0$，求证：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性无关的。

证明：如果有数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\theta。$$

不妨假设 $x_1,x_2,\cdots,x_r\ge 0, x_{r+1},\cdots,x_s\le 0$，考虑 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=-x_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-x_s\alpha_s$。

于是有

$$\begin{aligned}0\le(\gamma,\gamma)&=(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r,-x_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-x_s\alpha_s)\\ &=-\sum_{j=r+1}^{s}\sum_{i=1}^{r}x_ix_j(\alpha_i,\alpha_j)\le 0\end{aligned}$$

从而 $\gamma=\theta$。由此可得

$$0=(\beta,\gamma)=(\beta,x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r)=\sum_{i=1}^{r}x_i(\beta,\alpha_i)\Rightarrow x_i=0,\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

$$0=(\beta,\gamma)=(\beta,-x_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-x_s\alpha_s)=-\sum_{j=r+1}^{s}x_j(\beta,\alpha_j)\Rightarrow x_j=0,\quad(j=r+1,\cdots,s)$$

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性无关的。