第7章　级数（二）

§7.2 正项级数的收敛性判别

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

正项级数及其收敛性判别

☆ 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中 $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \cdots$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**正项级数**。

☆ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

比较判别法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，满足 $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$，那么

（I）$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；（II）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

例题 判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n+3} \right)^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)$$

正项级数及其收敛性判别

比较判别法极限形式： 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数，

（I）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散。

（II）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$，那么若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

（III）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$，那么若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

例题 判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln(n-1)}{\sqrt{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$$

正项级数及其收敛性判别

比值判别法（达朗贝尔）：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，$D_n \triangleq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，那么

（I）若 $D_n < q < 1,\ n \geq N \in \mathbb{Z}^+$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（II）若 $D_n \geq 1,\ n \geq N \in \mathbb{Z}^+$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

例题　判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

正项级数及其收敛性判别

达朗贝尔比值判别法极限形式： 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，那么

（I）若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

（II）若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。此时有$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

例题 判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$$

【注】 当$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r=1$或$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛与否须另行判别.

正项级数及其收敛性判别

根值判别法（柯西）：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，$C_n=\sqrt[n]{a_n}$，那么

（I）若 $C_n<q<1,\ n\ge N\in\mathbb{Z}^+$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（II）若 $C_n\ge 1,\ n\ge N\in\mathbb{Z}^+$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

例题 判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

柯西根值判别法极限形式： 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，那么

（I）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

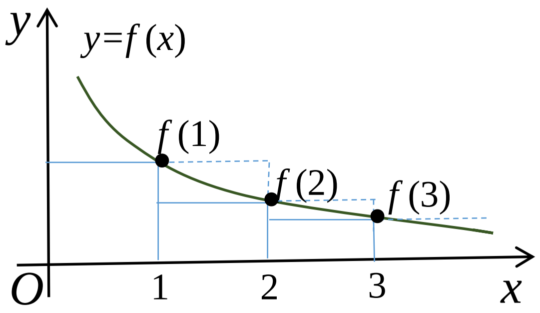
（II）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。此时有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

正项级数及其收敛性判别

积分判别法（柯西）设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒正且单调递减， $a_n \triangleq f(n), n=1,2,3,\cdots,$ 则

（I）若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；（II）若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

证：$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} f(n)$，所以有 $S_n-f(1)\le\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x\le S_n$，因此



（I）若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $S_n\le f(1)+\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，$\{S_n\}$有界，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

（II）若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $S_n\ge\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

例题

判别下列级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)},$$


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY