研究动力学问题的方法大体上可分为两类：一是以牛顿定律为基础的矢量力学方法，二是以变分原理为基础的分析力学方法。本章将介绍后一种方法。概括地讲，分析力学方法是以功和能这样的标量为基本概念，通过引入广义坐标描述系统的位形，运用数学分析的手段来建立系统的运动微分方程。

分析力学的主要组成部分：

1）拉格朗日力学

2）哈密顿方程

3）哈密顿原理

“运动的量度”之争：经典力学发展的两条路径

1638年，伽利略最先提出了对运动的两种量度。

牛顿力学（沿动量对时间微商建立动力学的路径）：$\dfrac{d(mv)}{dt} = f$

从1644年笛卡尔提出动量概念，至1687年牛顿的《原理》发表

分析力学：沿动能对时间（位移）的微商建立动力学的路径：

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{ds} = f \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

自1686年莱布尼茨提出活力定律开始（动能为“活力”，力是“死力”），经过200年的发展：伯努力、达朗贝尔、莫培督、欧拉、拉格朗日、哈密顿、雅可比、泊松

两条路径的异同

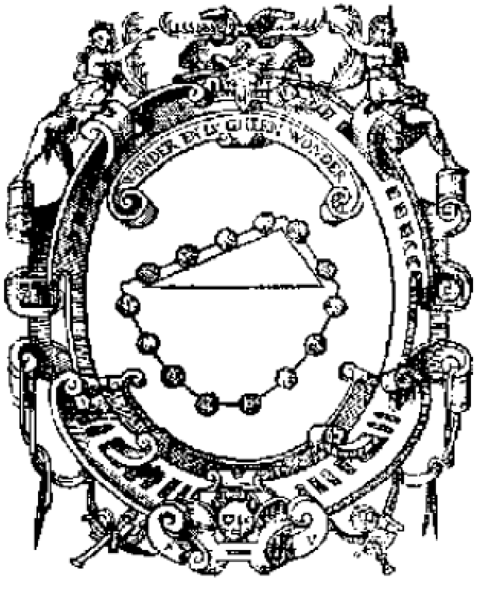
- 和事佬——达朗贝尔：整个争端不过是一场关于用语的无谓争论（1743《论动力学》）

$$\frac{d(mv)}{dt}=\frac{d(mv)}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d(mv)}{ds}v=\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{ds}=f$$

- 实际上，两条路径背后思想有很大不同，一为矢量，一为标量；一个认为第一因是动量（力），一个认为第一因是能量。

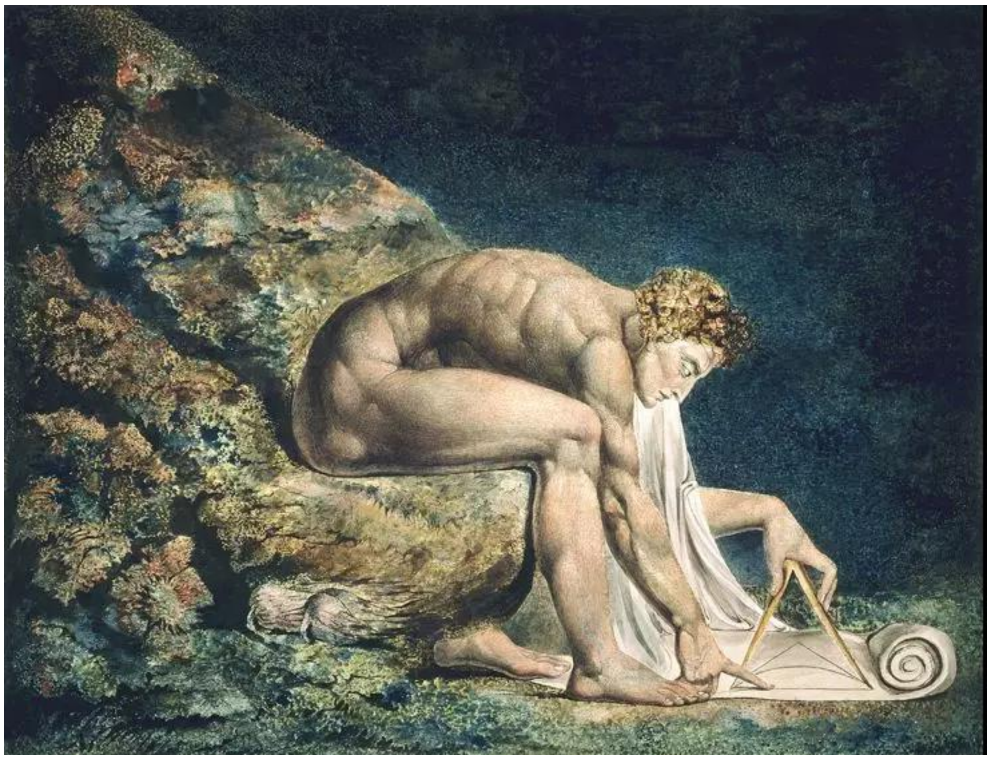
斯蒂芬(Simon Stevin, 1548-1620，荷兰人)

- 可能是文艺复兴以后第一个对力学问题深入钻研的人
- 近代静力学的奠基人（伽利略是动力学的开山鼻祖）
- 力的平行四边形法则<=>力是一个矢量
- 历史意义：由此可导出力的独立作用原理（力系中任何一个力的作用都与其它力的作用无关，力系的合作用是力系中每个力分别作用的叠加），成为牛顿力学除三个定律之外的附加公理
- 专著：《静力学》(右图为封页)



牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》(Principia Mathematica) 第三卷即最后一卷前言中的话：

现在我要演示世界体系的框架。



'Newton', William Blake, 1795-1805

自然与自然法则在黑暗中隐藏。
上帝说：让牛顿去吧。
于是一切都被照亮 。
——（亚历山大•蒲柏）

Nature and nature's laws lay hid in night;
God said "Let Newton be" and all was light.
—by Alexander Pope

分析力学

- 1788年（牛顿《原理》出版后的101年），拉格朗日出版了《分析力学》；全书不含任何插图；标志着力学发展的新阶段——分析力学的诞生。哈密顿称其把力学处理为“一种科学的诗”。
- 分析力学给出了力学系统在完全一般性的广义坐标下具有不变形式的动力学方程组，并突出了能量函数的意义。分析力学甚至概括了比牛顿力学广泛得多的系统，例如在电气系统、控制系统中的应用就是一个明显的例子。
- 分析力学的产生背景：微积分迅速发展；科学发展的内在需要；产业革命的发展对力学提出了更高的要求。

- 拉格朗日 (Lagrange,1736-1813, FR)
  - 创立变分法，严格导出 E-L 方程

$$\delta\left\{\int_a^b \Phi[x, y(x), y'(x)]dx\right\}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'}=0$$

  - 创立分析力学
    - 莫培督原理 $\overset{\text{启发}}{\Longrightarrow}$ 达朗贝尔 - 拉格朗日原理

$$\sum_j \left(\boldsymbol{F}_I^j+\boldsymbol{F}^j+\boldsymbol{F}_N^j\right)\cdot\delta\boldsymbol{R}_j=0$$

    - 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

T: 动能
q_j: 广义坐标
$\dot{q}_j$: 广义速度
Q_j: 广义力

有势系统 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

$L=T-V$: 拉氏函数

力学专著《分析力学》（全书没有出现一张图）

分析力学创始人

力学与几何

- 在哥白尼《天体运行论》第一版扉页上，出版商J. Petrius写道：“没有学过几何的人，不准入内！”
- 牛顿《原理》第一版序言：“几何学是建立在力学实践之上的，它无非是普通力学的一部分，能精确地提出并论证测量的方法。”
- 拉格朗日：“在这本书中找不到任何插图，我在这本书中阐述的方法，既无作图也无需几何或力学的推理，而仅仅是按照常规的统一的代数运算固有的过程。爱好分析的人将会高兴的看到力学已变为分析的一个新的分支，并将感谢我扩大了分析的应用范围。”
- 分析力学中引入的广义坐标实际上是最早的高维空间的概念。后来到了1854年，黎曼引进了黎曼几何、黎曼流形，才对力学上的广义坐标给了一个比较深刻的解释：分析力学是流形上的力学。拉格朗日使力学摆脱了古典欧氏几何的束缚，但没有脱离几何，而是使力学与更高层次的几何——流形几何或现代微分几何相联系。
- 哈密顿力学：辛几何。

引入广义坐标的缘起

- 牛顿的《原理》：质点的力学
- 刚体力学：欧拉
- 复杂的刚体系统，如五级齿轮传动系统：

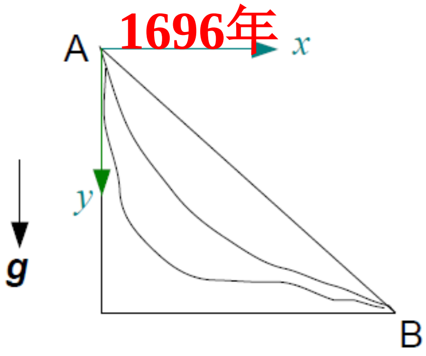
牛顿："我只会质点运动，你去问欧拉吧。"

欧拉："数十个方程联立，太复杂，我解决不了"

拉格朗日："只需要一个参量"

- 广义坐标：消除约束，简化计算。
- 分析力学：针对有大量约束的复杂系统的力学，也可以说是近代工业的力学。

- 伯努力 (Johann Bernoulli, 1667-1748,Swiss)
  - 虚功原理：$\delta W=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta \boldsymbol{r}_i=0 \Leftrightarrow$ static equilibrium
  - 最速落径问题：重力场，光滑面，小球从 A 出发，沿那条路径最先到达 B?



$$t_{AB}=\int_A^B \frac{ds}{v}$$

费马原理：光总是走最短时间的路线

$$=\int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$min\{t_{AB}\}$ 导致变分法产生的第一个重要问题

专著《新的力学或静力学》为分析力学的创立奠定基础

注：伯努力还是重要的数学家，洛比塔法则的发明人

约翰伯努利是欧拉、克莱姆、洛必塔、丹尼尔伯努利的老师。

发现上帝创世的秘密

- 莫培督 (Maupertuis, 1698-1759, FR)
  - 提出作用量

“作用的量”

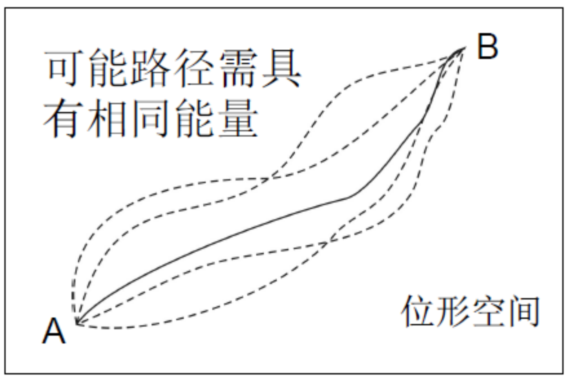
$$S=\int_A^B m\,v\,ds$$

速率

轨道弧长

最小作用量原理之父

  - 莫培督原理
    - 真实路径满足 S 极小



意义：自然界行为的简单性，这种简单性正是通过某个称为“作用”的量的最小化而展示出来。

主要著作：《论各种似乎不和谐的自然律间的一致性》
《宇宙论》

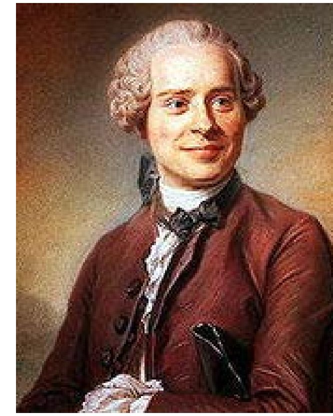
莫培督的初衷：为力学提供一种神学基础。这种企图或可被看作是中世纪经院哲学旨在达到调解信仰与理性这一目标的最后遗迹。

- 欧拉 (Euler， 1707-1783, Swiss)
  - 提出质点概念
  - 独立于莫培督获得了莫培督原理的数学表述
  - 有心力场的势函数
  - 刚体定点运动动力学
  - 创立变分法思想，得到 E-L 方程

著作《关于最小作用量原理》《力学，或解析地叙述运动的理论》《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》为分析力学诞生作了物理和数学上的准备

欧拉还是伟大数学家：数学著作《无穷小分析引论》《微积分原理》《积分学原理》《代数学完整引论》直到今天还是经典

达朗贝尔：投身启蒙运动的科学家



- 达朗贝尔（1717～1783），法国力学家、数学家，哲学家。又译达朗伯。他是圣让勒隆教堂附近的一个弃婴，被一位玻璃匠收养，后来这个教堂的名字就成了他的教名 。

- 从小在教会学校受教育，打下了坚实的数理基础。

- 投身启蒙运动：1746年，达朗贝尔与当时著名哲学家狄德罗一起编纂了法国《百科全书》，并负责撰写数学与自然科学条目，是法国百科全书派的主要首领。在百科全书的序言中，达朗贝尔表达了自己坚持唯物主义观点、正确分析科学问题的思想。在这一段时间之内，达朗贝尔还在心理学、哲学、音乐、法学和宗教文学等方面都发表了一些作品。
- 在其名著《动力学》中严厉批判莫培督、欧拉所表现出的神学和目的论色彩；其思想影响了其后的拉格朗日。

- 临终时，却因教会的阻挠没有举行任何形式的葬礼。

- 拉格朗日 (Lagrange,1736-1813, FR)
  - 创立变分法，严格导出 E-L 方程

$$\delta\left\{\int_a^b \Phi[x, y(x), y'(x)]dx\right\}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'}=0$$

  - 创立分析力学
    - 莫培督原理 $\xrightarrow{\text{启发}}$ 达朗贝尔 - 拉格朗日原理

$$\sum_j \left(\boldsymbol{F}_I^j+\boldsymbol{F}^j+\boldsymbol{F}_N^j\right)\cdot\delta\boldsymbol{R}_j=0$$

    - 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

T: 动能
q_j: 广义坐标
$\dot{q}_j$: 广义速度
Q_j: 广义力

有势系统 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

$L=T-V$: 拉氏函数

力学专著《分析力学》（全书没有出现一张图）

分析力学创始人

- 泊松 (Poisson, 1781-1840, FR)

  - 泊松括号

    For $u=u(q_j,p_j,t)$, $v=v(q_j,p_j,t)$

    定义：$$[u,v]=\sum_j\left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j}-\frac{\partial v}{\partial q_j}\frac{\partial u}{\partial p_j}\right)$$

  - 对易关系

    $$[q_j,q_k]=0,\ [p_j,p_k]=0,\ [q_j,p_k]=\delta_{jk}$$

  - 力学量的运动方程

    For $f=f(q_j,p_j,t)$: $$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]$$

很容易向量子力学过渡

专著《力学教程》

注：他还是伟大的数学家

- 哈密顿 (Hamilton,1805-1865,Ireland)
  - 通过与光学类比得到力学系统特征函数及其满足的微分方程

$$S(x,y,z,t)=\int_0^t mv\,ds \qquad \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}=-V$$

  - 拉格朗日 - 达朗贝尔原理 => 哈密顿原理

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad \delta S=0$$

被认为是物理学的最高原理

  - 哈密顿量与正则方程

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L \qquad \dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}\,,\quad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

注意：广义坐标与广义动量之间优美的对偶性

主要论著《论动力学的普遍办法》

《四元数基础》（杨看好）

哈密顿. W. R.

- 雅可比 (Jacobi, 1804-1851, DE)
  - 正则变换 (变换后正则方程形式不变)

$$\left.\begin{array}{c}(q_j, p_j)\to(\bar{q}_j, \bar{p}_j)\\ H\to\bar{H}\end{array}\right\}\Rightarrow \dot{\bar{q}}_j=\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{p}_j}\ ,\quad \dot{\bar{p}}_j=-\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{q}_j}$$

  - 雅可比原理

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{E-V(\boldsymbol{r}(\tau))}\,ds(\tau)=0$$ (类似于光学中的费马原理)

  - 哈密顿 - 雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right)=0\ \left\{\begin{array}{l}\text{光学类比：}\ S\ \text{可看成惠更斯的波前曲面函数}\\ \text{有利于求解正则方程（哈密顿 - 雅可比定理）}\end{array}\right.$$

力学著作《动力学讲义》

参考书目

- **力学与理论力学（下册）（第二版）秦敢，向守平，科学出版社**
- Goldstein et al.《Classical Mechanics》
- 朗道，栗弗席兹《力学》
- 《经典力学的数学方法》 第4版 中文版 阿诺尔德
- 《力学讲义》，赵亚溥，科学出版社
- 李俊峰、张雄《理论力学》，清华大学出版社