

第 10 章

动量定理

§ 10-1 动量与冲量

(1) 质点的动量

质点的质量 m 与速度 v 的乘积 mv 称为该质点的动量。

(2) 质点系的动量

质点系内各质点的动量的矢量和称为该质点系的动量主矢，简称为质点系的动量，并用 p 表示，即有

$$p = \sum m_i v_i$$

质点系内各质点的动量的矢量和称为该质点系的动量主矢，简称为质点系的动量。并用 p 表示，即有

$$p = \sum m_i v_i$$

质点系动量的投影式

以 p_x 、 p_y 和 p_z 分别表示质点系的动量在固定直角坐标轴 x 、 y 和 z 上的投影，则有

$$p_x = \sum m_i v_{ix} , p_y = \sum m_i v_{iy} , p_z = \sum m_i v_{iz}$$

(3) 基于质心速度的质点系（刚体）动量

质点系质心C的矢径的表达式（质心的定义）是

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad \Rightarrow \quad M \mathbf{r}_c = \sum m_i \mathbf{r}_i$$

当质点系运动时，它的质心一般也是运动的，将上式两端对时间求导数，即得

$$M \mathbf{v}_c = \sum m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{p}$$

可见，质点系的动量，等于质点系的总质量与质心速度的乘积。

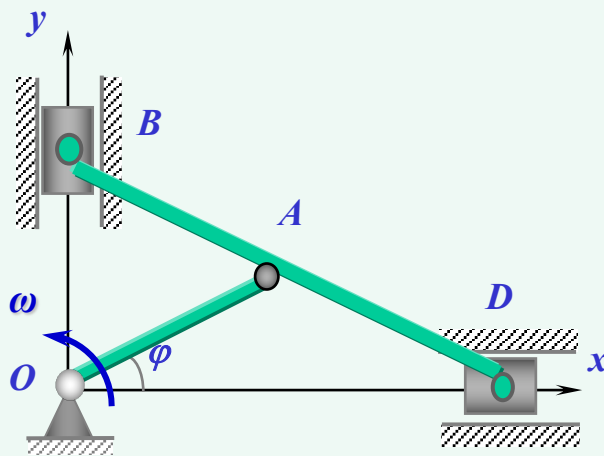
投影到各坐标轴上有

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = M v_{cx}$$

$$p_y = \sum m_i v_{iy} = M v_{cy}$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = M v_{cz}$$

例题10-1:画椭圆的机构由均质的曲柄 OA 、规尺 BD 以及滑块 B 和 D 组成，曲柄与规尺的中点 A 铰接。已知规尺长 $2l$ ，质量是 $2m_1$ ；两滑块的质量都是 m_2 ；曲柄长 l ，质量是 m_1 ，并以角速度 ω 绕定轴 O 转动。试求当曲柄 OA 与水平方向夹角为 φ 时整个机构的动量。

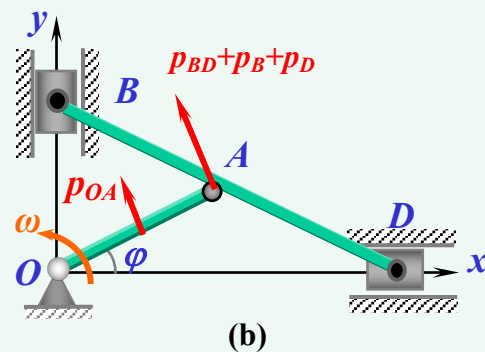
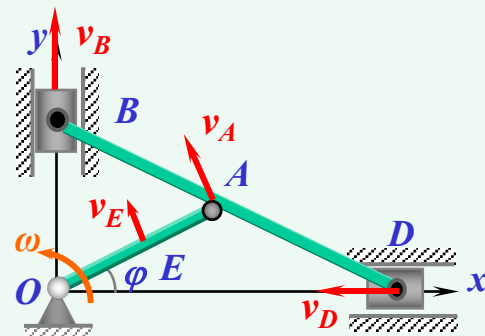


解： 因为规尺和两个滑块的公共质心在点A，它们的动量表示成

$$p' = p_{BD} + p_B + p_D = 2(m_1 + m_2)v_A$$

由于动量 p_{OA} 的方向也是与 v_A 的方向一致，所以整个椭圆机构的动量方向与 v_A 相同，而大小等于

$$\begin{aligned} p &= p_{OA} + p' = \frac{1}{2}m_1l\omega + 2(m_1 + m_2)l\omega \\ &= \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2)l\omega \end{aligned}$$



(1) 常力的冲量

常力 F 与作用时间 t 的乘积 Ft 称为常力的冲量。并用 I 表示，
即有 $I = Ft$

冲量是矢量，方向与力相同。

(2) 变力的冲量

若力 F 是变力，可将力的作用时间 t 分成无数微小时间段 dt ，在每个 dt 内，力 F 可视为不变。

元冲量 Fdt ——力 F 在微小时间段 dt 内的冲量称为力 F 的元冲量。

变力 F 在 t 时间间隔内的冲量为：
$$I = \int_0^t F dt$$

$$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F} \mathrm{d}t$$

上式为一矢量积分，具体计算时，可投影于固定坐标系上

$$I_x = \int_0^t F_x \mathrm{d}t, \quad I_y = \int_0^t F_y \mathrm{d}t, \quad I_z = \int_0^t F_z \mathrm{d}t$$

所以，变力 \boldsymbol{F} 的冲量又可表示为

$$\boldsymbol{I} = I_x \boldsymbol{i} + I_y \boldsymbol{j} + I_z \boldsymbol{k}$$

§ 11-2 动量定理

1. 动量定理

因为质点系的动量为 $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ ，对该式两端求时间的导数，有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\sum m_i \mathbf{v}_i}{dt} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_i$$

分析右端，把作用于每个质点的力 \mathbf{F} 分为内力 $\mathbf{F}^{(i)}$ 和外力 $\mathbf{F}^{(e)}$ ，则得

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}_i^{(i)} + \sum \mathbf{F}_i^{(e)}$$

因为内力总是成对出现的，且根据牛顿第三定律，每对内力求矢量和时会相互抵消，因此可得 $\sum \mathbf{F}_i^{(i)} = 0$

则有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma \mathbf{F}_i^{(e)}$$

即，质点系动量对时间的导数，等于作用于它上所有外力的矢量和，这就是质点系动量定理的微分形式，常称为动量定理。

在具体计算时，往往写成投影形式，即

$$\frac{dp_x}{dt} = \Sigma F_{ix}^{(e)} \quad \frac{dp_y}{dt} = \Sigma F_{iy}^{(e)} \quad \frac{dp_z}{dt} = \Sigma F_{iz}^{(e)}$$

即，质点系的动量在固定轴上的投影对时间的导数，等于该质点系的所有外力在同一轴上的投影的代数和。

动量定理 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma \mathbf{F}_i^{(e)}$

2. 冲量定理

设在 t_1 到 t_2 过程中，质点系的动量由 p_1 变为 p_2 ，则对上式积分，可得

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)} dt = \sum \mathbf{I}_i^{(e)}$$

可见，质点系的动量在一段时间内的变化量，等于作用于质点系的外力在同一段时间内的冲量的矢量和。这就是质点系动量定理的积分形式，也称为质点系的冲量定理。

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)} dt = \sum \mathbf{I}_i^{(e)}$$

具体计算时，将上式投影到固定直角坐标轴系上

$$p_{2x} - p_{1x} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{ix}^{(e)} dt = \sum I_{ix}^{(e)}$$

$$p_{2y} - p_{1y} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{iy}^{(e)} dt = \sum I_{iy}^{(e)}$$

$$p_{2z} - p_{1z} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{iz}^{(e)} dt = \sum I_{iz}^{(e)}$$

即，质点系动量在某固定轴上投影的变化量，等于作用于质点系的外力在对应时间间隔内的冲量在同一轴上的投影的代数和。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma \mathbf{F}_i^{(e)}$$

如果在上式中 $\Sigma \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{0}$ ，则有

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \text{常矢量}$$

其中： \mathbf{p}_0 为质点系初始瞬时的动量。

结论：在运动过程中，如作用于质点系的所有外力的矢量和始终等于零，则质点系的动量保持不变，这就是质点系的动量守恒定理。

$$\frac{dp_x}{dt} = \Sigma F_{ix}^{(e)}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \Sigma F_{iy}^{(e)}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \Sigma F_{iz}^{(e)}$$

如果在上式中 $\Sigma F_{ix}^{(e)}=0$ ，则有

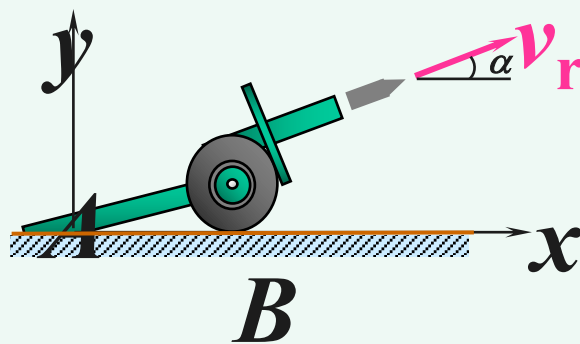
$$p_x = p_{x0} = \text{常量}$$

其中： p_{x0} 为质点系初始瞬时的动量在 x 轴上的投影。

结论

在运动过程中,如作用于质点系的所有外力在某一轴上的投影的代数和始终等于零，则质点系的动量在该轴上的投影保持不变。

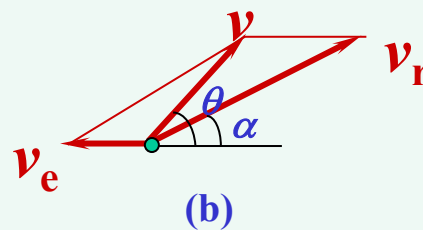
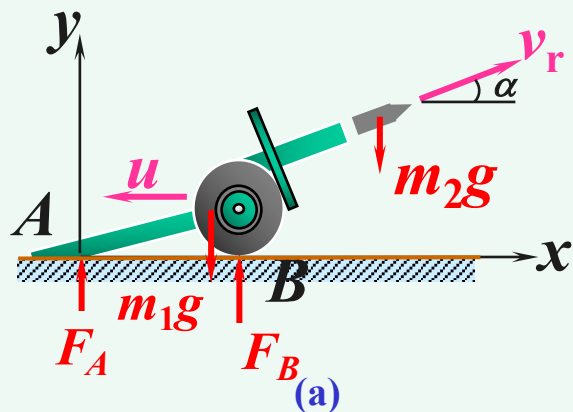
例题10-2 火炮（包括炮车与炮筒）的质量是 m_1 ，炮弹的质量是 m_2 ，炮弹相对炮车的发射速度是 v_r ，炮筒对水平面的仰角是 α 。设火炮放在光滑水平面上，且炮筒与炮车相固连，试求火炮的后坐速度和炮弹的发射速度。



解： 取火炮和炮弹（包括炸药）
这个系统作为研究对象。

设火炮的反座速度是 u ，炮弹
的发射速度是 v ，对水平
面的仰角是 θ （图b）。

炸药（其质量略去不计）的
爆炸力是内力，作用在系统
上的外力在水平轴 x 的投影
都是零，即有 $\Sigma F_x = 0$ 。



可见，系统的动量在轴 x 上的投影守恒，考虑到初始瞬时系统处于静止，即有 $p_{ox} = 0$ ，于是有

$$p_x = m_2 v \cos \theta - m_1 u = 0$$

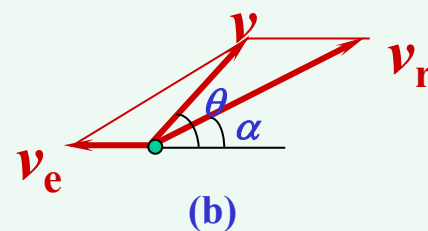
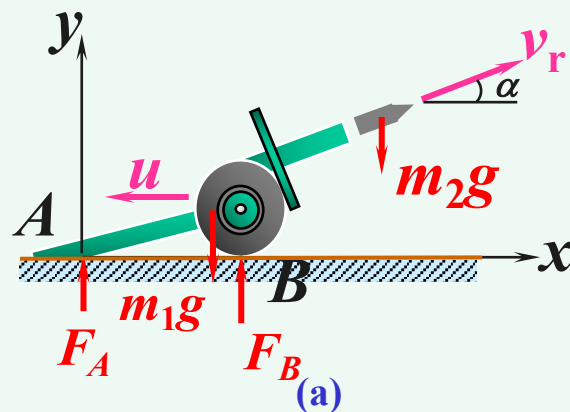
另一方面，对于炮弹应用速度合成定理，可得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

考虑到 $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{u}$ ，并将上式投影到轴 x 和 y 上，就得到

$$v \cos \theta = v_r \cos \alpha - u$$

$$v \sin \theta = v_r \sin \alpha$$



$$m_2 v \cos \theta - m_1 u = 0$$

$$v \cos \theta = v_r \cos \alpha - u$$

$$v \sin \theta = v_r \sin \alpha$$

联立求解上列三个方程，即得

$$u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \cos \theta$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{(2m_1 + m_2)m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \alpha} \times v_r$$

$$\tan \theta = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \tan \alpha$$

§ 10-3 质心运动定理

1. 质心运动定理

质点系动量定理的表达式

$$\frac{dp}{dt} = \sum F^{(e)}$$

(1) 定理表达式

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m}$$

把质点系动量的表达式 $p = \sum m v = M v_c$ 代入上式, 可得

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (M v_c) = \sum F^{(e)}$$

引入质心的加速度 $a_c = dv_c / dt$, 则上式可改写成

$$M a_c = \sum F^{(e)}$$

即, 质点系的总质量与其质心加速度的乘积, 等于作用在该质点系上所有外力的矢量和 (主矢), 这就是质心运动定理。

$$Ma_C = \sum F^{(e)}$$

(2) 系统质心运动定理表达式

假设 n 个质点组成的质点系由 N 个部分构成，则由式 $p = \sum mv = Mv_C$ ，可把质心运动定理表达式的左端表示成

$$Ma_C = \sum_{i=1}^n m_i a_i = M_1 a_{C1} + M_2 a_{C2} + \cdots + M_N a_{CN} = \sum_{j=1}^N M_j a_{Cj}$$

$$\sum_{j=1}^N M_j a_{Cj} = \sum F^{(e)}$$

(3) 投影表达式

具体计算时，常把质心运动定理表达式投影到固定直角坐标轴系上得

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_x^{(e)} \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_y^{(e)} \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_z^{(e)} \end{aligned}$$

质心运动定理 $Ma_C = \sum F^{(e)}$

2.质心运动守恒定理

(1) 如果 $\sum F^{(e)} \equiv 0$, 则由上式可知 $a_C = 0$, 从而有

$$v_C = \text{常矢量}$$

即 , 如作用于质点系的所有外力的矢量和 (主矢) 始终等于零, 则质心运动守恒, 即质心作惯性运动; 如果在初瞬时质心处于静止, 则它将停留在原处。

质心运动定理投影表达式

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_x^{(e)}, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_y^{(e)}, \quad M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum F_z^{(e)}$$

(2) 如果 $\sum F_x \equiv 0$, 则由上式可知 $d^2 x_C / dt^2 = a_{Cx} = 0$,

从而

$$dx_C / dt = v_{Cx} = \text{常量}$$

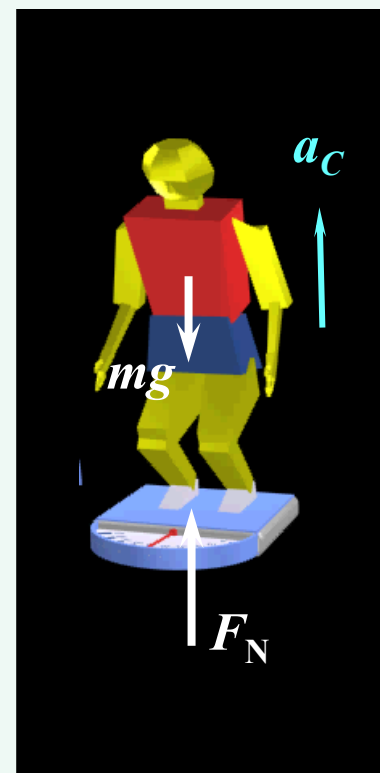
即, 如作用于质点系的所有外力在某固定轴上投影的代数和始终等于零, 则质心在该轴方向的运动守恒。

另, 如初瞬时质心的速度在该轴上的投影也等于零 (即 $v_{Cx} = 0$), 则质心沿该轴的位置坐标不变。即

$$x_C = x_{C0} = \text{常量}$$

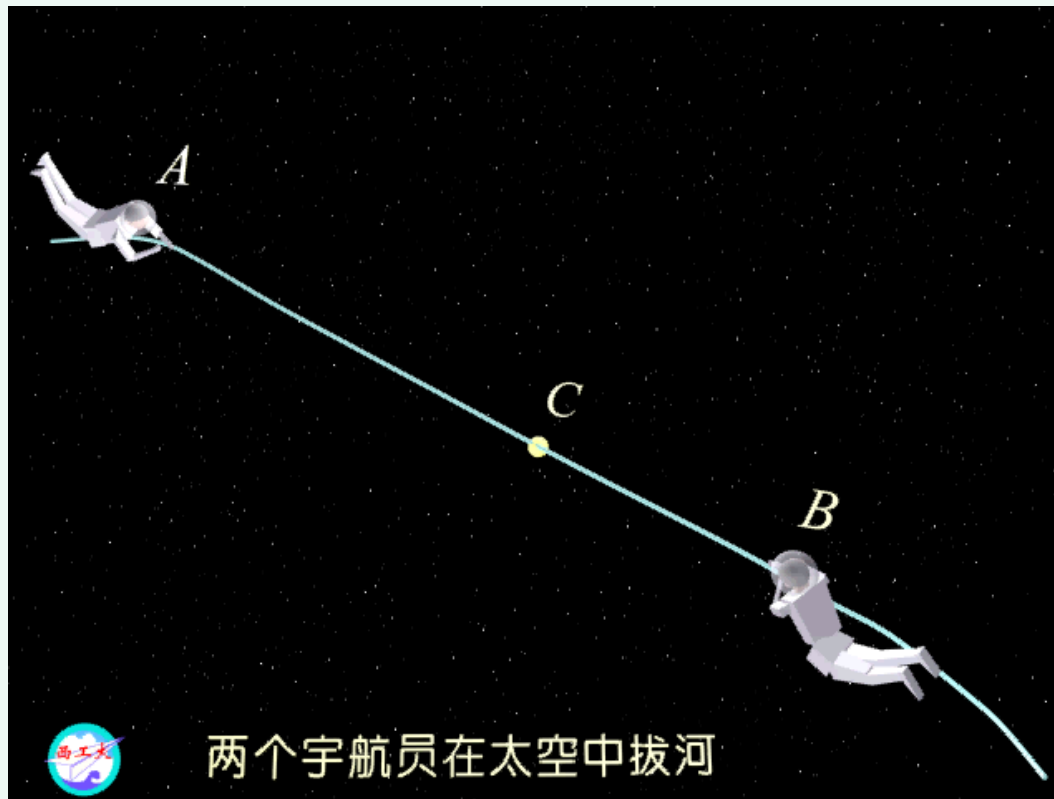
实例分析

人蹲在磅秤上再慢慢站起, 磅秤指针的变化。



$$ma_C = F_N - mg, \quad F_N = m(a_C + g)$$

实例分析：太空拔河



宇航员在太空拔河，开始静止。若 A 的力气大于 B 的力气，谁胜谁负？

动量守恒 $m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v_C = 0$

实例分析：汽车的启动与制动

质心运动定理实例



光滑地面 无摩擦力



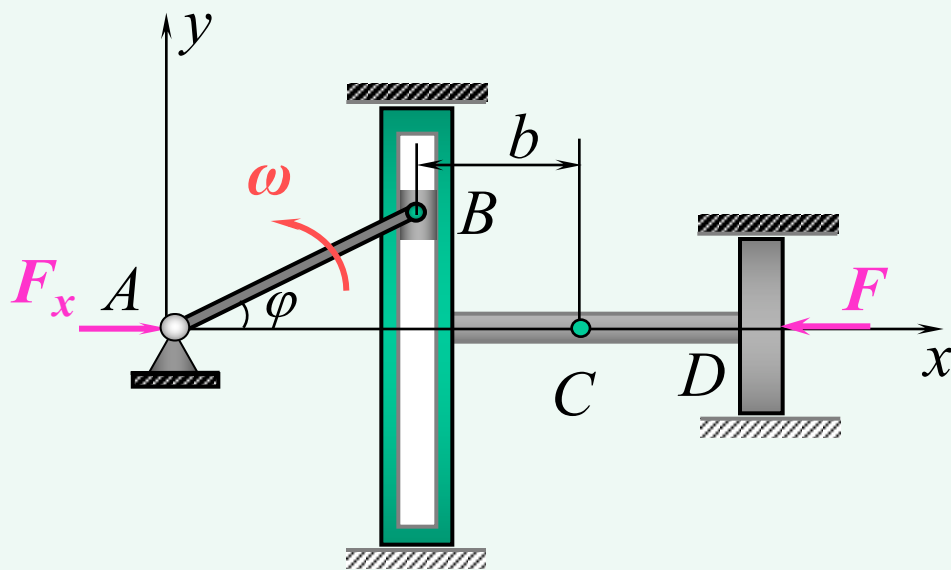
质心运动定理实例



粗糙地面 有摩擦力



例题10-3 均质曲柄 AB 长 r ，质量为 m_1 ，假设受力偶作用以不变的角速度 ω 转动，并带动滑槽连杆以及与它固连的活塞 D ，如图所示。滑槽、连杆、活塞总质量为 m_2 ，质心在点 C 。在活塞上作用一恒力 F 。滑块 B 质量为 m ，不计摩擦，试求作用在曲柄轴 A 处的水平反力 F_x 。



解：

选取整个机构为研究对象。

由质心运动定理

$$\sum_{j=1}^N M_j \mathbf{a}_{Cj} = \sum \mathbf{F}^{(e)}$$

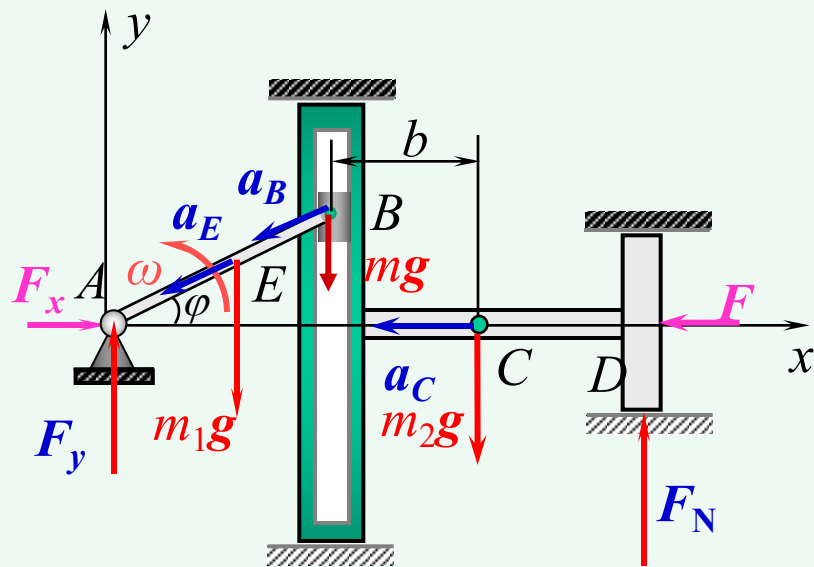
得

$$-m_1 a_E \cos \varphi - m a_B \cos \varphi - m_2 a_C = F_x - F$$

即
$$-m_1 \frac{r}{2} \omega^2 \cos \varphi - m r \omega^2 \cos \varphi - m_2 r \omega^2 \cos \varphi = F_x - F$$

求得作用在曲柄轴A处的水平反力

$$F_x = F - \left(\frac{1}{2} m_1 + m + m_2 \right) r \omega^2 \cos \varphi$$



思考题

如何求作用在曲柄轴A处的竖直反力？

解：选取杆AB和滑块B为研究对象。

由质心运动定理

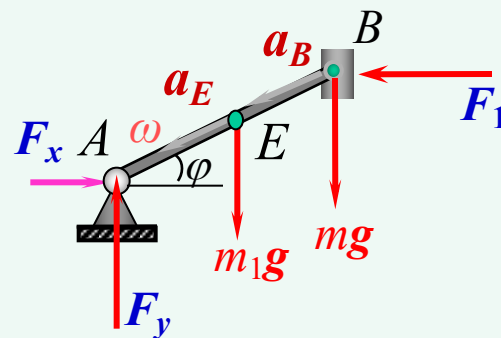
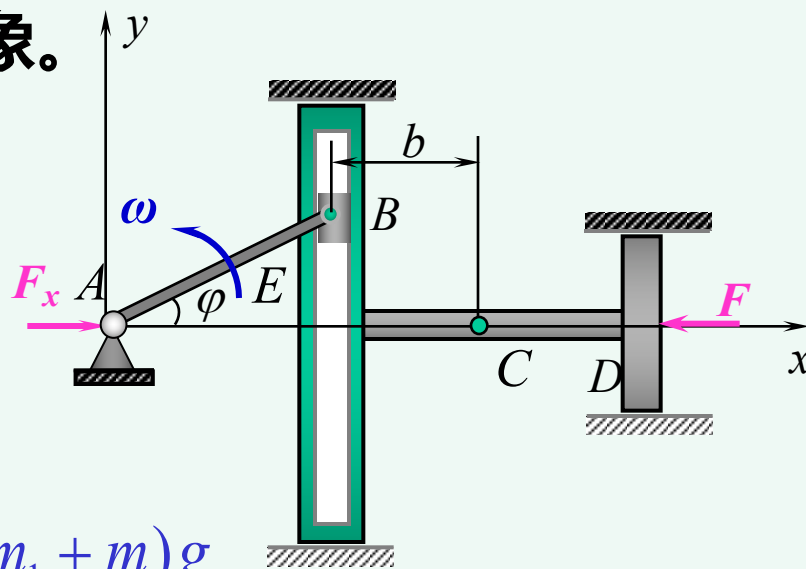
$$\sum_{j=1}^N M_j \mathbf{a}_{Cj} = \sum \mathbf{F}^{(e)}$$

得

$$-m_1 a_E \sin \phi - m a_B \sin \phi = F_y - (m_1 + m)g$$

求得作用在曲柄轴A处的竖直反力

$$F_y = (m_1 + m)g - \left(\frac{1}{2}m_1 + m\right)r\omega^2 \sin \phi$$



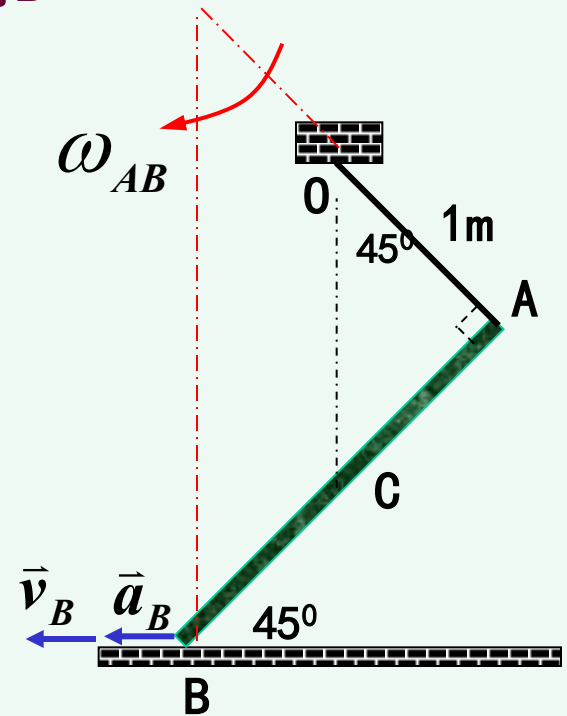
例10-4 质量 1 kg ，长度 2 m 的均质杆被绳索和光滑地面约束。已知在图示位置时B点的速度为 $\sqrt{2}\text{ m/s}$ ，加速度 $\sqrt{2}/2\text{ m/s}^2$ 。

试求绳索的拉力。

解：1、运动分析求质心加速度

$$\omega_{AB} = v_B / IB = \sqrt{2} / (2\sqrt{2}) = 0.5 \text{ rad} / \text{s}$$

$$v_A = \omega_{AB} IA = 0.5 \times 2 = 1 \text{ m} / \text{s}$$



$$\omega_{AB} = v_B / IB = \sqrt{2} / (2\sqrt{2}) = 0.5 \text{ rad} / s$$

$$v_A = \omega_{AB} IA = 0.5 \times 2 = 1 \text{ m} / s$$

2、 加速度分析（基点法）：

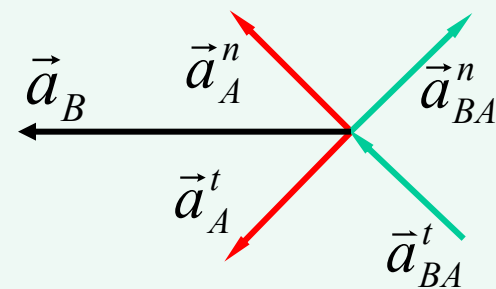
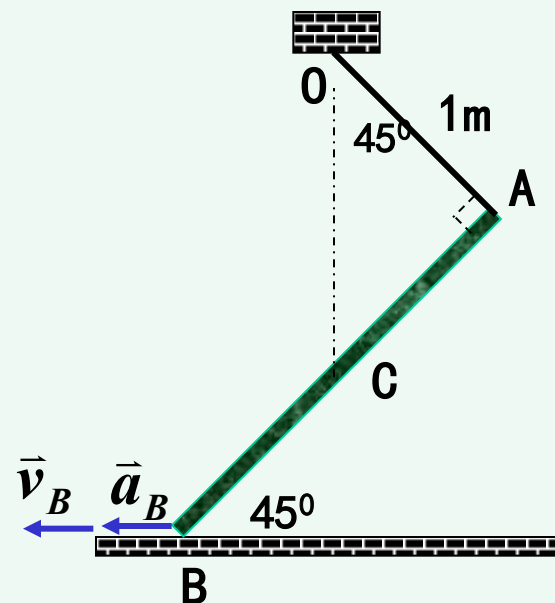
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

投影到OA方向：

$$a_B \cos 45^\circ = a_A^n + a_{BA}^t$$

$$a_{BA}^t = a_B / \sqrt{2} - v_A^2 / OA = 2 - 1 = 1 \text{ m} / s^2$$

$$\alpha_{AB} = a_{BA}^t / AB = 0.5 \text{ rad} / s^2$$



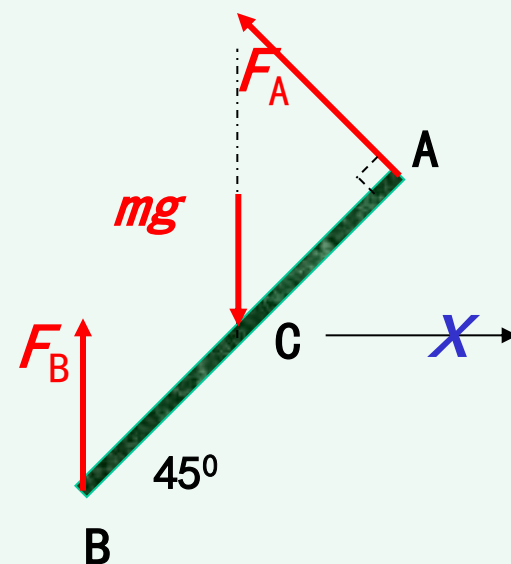
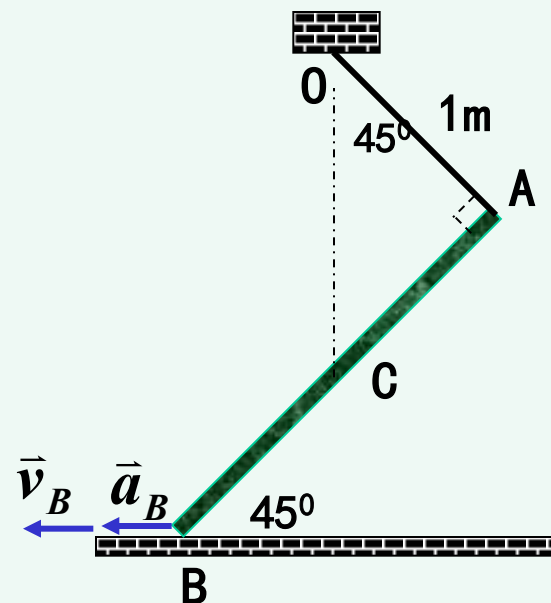
3、求质心加速度

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CA}^t + \vec{a}_{CA}^n$$

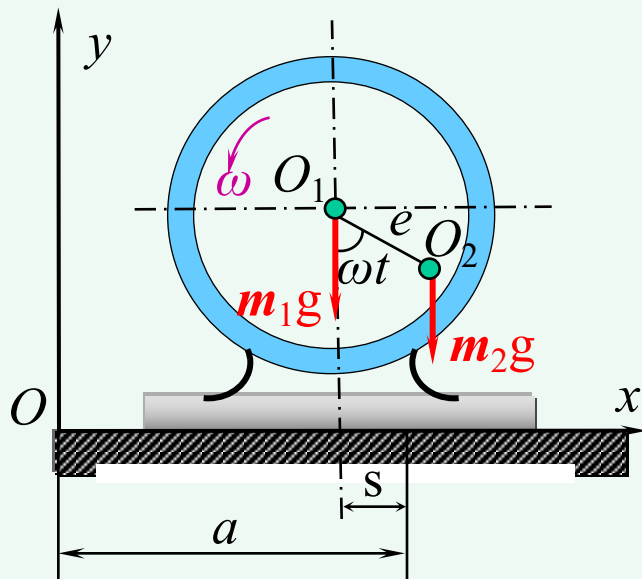
4、质心运动定理求约束力，受力分析

$$ma_{Cx} = \sum F_{ix}^E = -F_A \sin 45^\circ$$

$$ma_{Cy} = \sum F_{iy}^E = F_B - mg + F_A \cos 45^\circ$$



例题10-5 电动机的外壳放在光滑水平面上，定子的质量是 m_1 ，转子的质量是 m_2 ，转子的轴线通过定子的质心 O_1 。制造和安装的误差，使转子的质心 O_2 对它的轴线有一个很小的偏心距 e （图中有意夸张）。各处摩擦不计，初始时电动机静止， O_1 和 O_2 的横坐标均为 a 。试求：（1）转子以匀角速 ω 转动时电动机外壳在水平方向的运动方程；（2）电动机跳起的最小角速度。



(1) 电动机外壳在水平方向的运动方程

设电动机的水平位移为 s 。由于电动机不固定，且不计摩擦，故外力在水平轴上的投影之和等于零，即 $\sum F_x \equiv 0$ 。则有

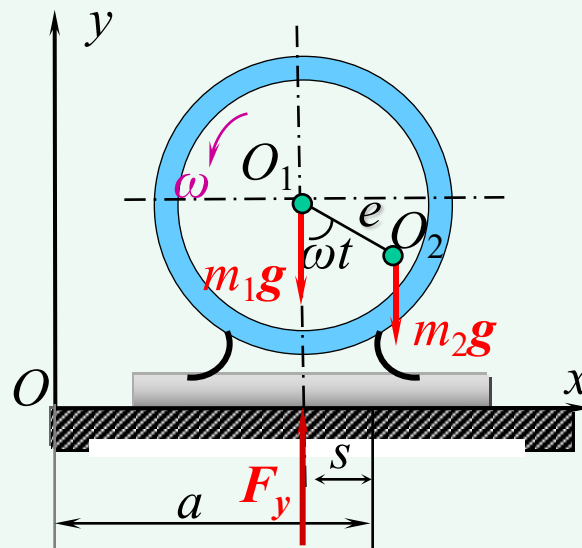
$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0} = \text{常量}$$

又因系统初瞬时静止，因此质心在水平轴上保持不变，即有

$$x_C = x_{C0} = \text{常量}$$

已知 $x_{C0} = a$ ，得

$$x_C = \frac{m_1(a - s) + m_2(a - s + e \sin \omega t)}{m_1 + m_2}$$



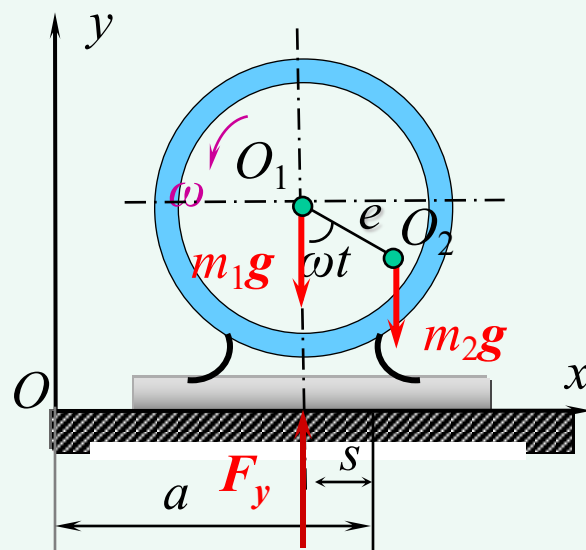
$$x_{C0} = a$$

$$x_C = \frac{m_1(a - s) + m_2(a - s + e \sin \omega t)}{m_1 + m_2}$$

由 $x_C = x_{C0}$ 解得电动机外壳在水平方向的运动方程：

$$s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e \sin \omega t$$

由此可见，当转子偏心的电动机未用螺栓固定时，将在水平面上作往复运动。



(2) 电动机跳起的最小角速度

由质心运动定理有

$$m_2 a_n \cos \omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

即
$$m_2 e \omega^2 \cos \omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

因此求得机座的铅直反力

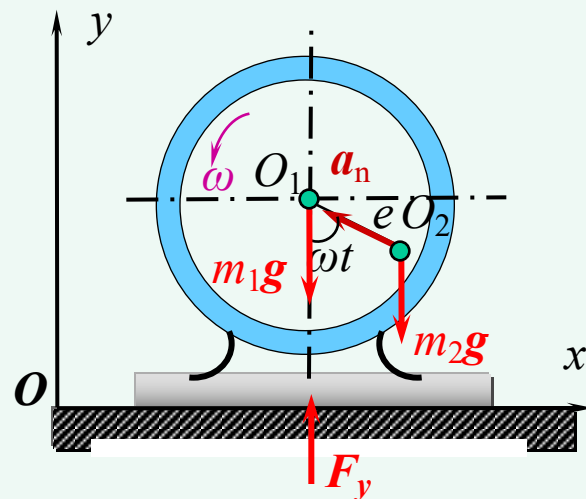
$$F_y = m_1 g + m_2 g + m_2 e \omega^2 \cos \omega t$$

而机座铅直反力的最小值
$$F_{y\min} = m_1 g + m_2 g - m_2 e \omega^2$$

电动机起跳的条件为
$$F_y = 0$$

由此求得电动机起跳的最小角速度

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2 e} g}$$



作业

9-14

10-6, 10, 15