幂 级 数

一、函数项级数的一般概念

1. 定义:

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在$I \subseteq R$上的函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为定义在区间I上的(函数项) 无穷级数.

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

2. 收敛点与收敛域:

如果$x_0 \in I$, 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**收敛点**,

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为**收敛域**,

所有发散点的全体称为**发散域**.

3. 和函数:

在收敛域上, 函数项级数的和是x的函数$s(x)$,

称$s(x)$为函数项级数的**和函数**.

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$ (定义域是?)

函数项级数的部分和 $s_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$

余项 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$ (x在收敛域上)

注意 函数项级数在某点x的收敛问题,实质上是数项级数的收敛问题.

例 1 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$的收敛域.

解　由达朗贝尔判别法

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{|1+x|} \to \frac{1}{|1+x|} \quad (n \to \infty)$$

(1) 当 $\frac{1}{|1+x|} < 1,\ \Rightarrow |1+x| > 1,$

即 $x > 0$ 或 $x < -2$ 时，　原级数绝对收敛.

(2) 当 $\frac{1}{|1+x|} > 1,\ \Rightarrow |1+x| < 1,$

即 $-2 < x < 0$ 时，　原级数发散.

(3) 当$|1+x|=1$, $\Rightarrow x=0$或$x=-2$,

当$x=0$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

当$x=-2$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

故级数的收敛域为$(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.

二、幂级数及其收敛性

1. 定义:形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的级数称为幂级数.

当$x_0=0$时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 其中$a_n$为幂级数系数.

2. 收敛性:

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

当$|x| < 1$时, 收敛;　　当$|x| \geq 1$时, 发散;

收敛域$(-1,1)$;　　发散域$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

定理 1 (Abel 定理)

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则

它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切x处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足

不等式$|x| > |x_0|$的一切x处发散.

证明 (1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$收敛, $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n x_0{}^n = 0,$

$\exists M$, 使得$|a_n x_0{}^n| \le M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0{}^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0{}^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

$\because$当$\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$时, 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$收敛,

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$收敛，即级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛;

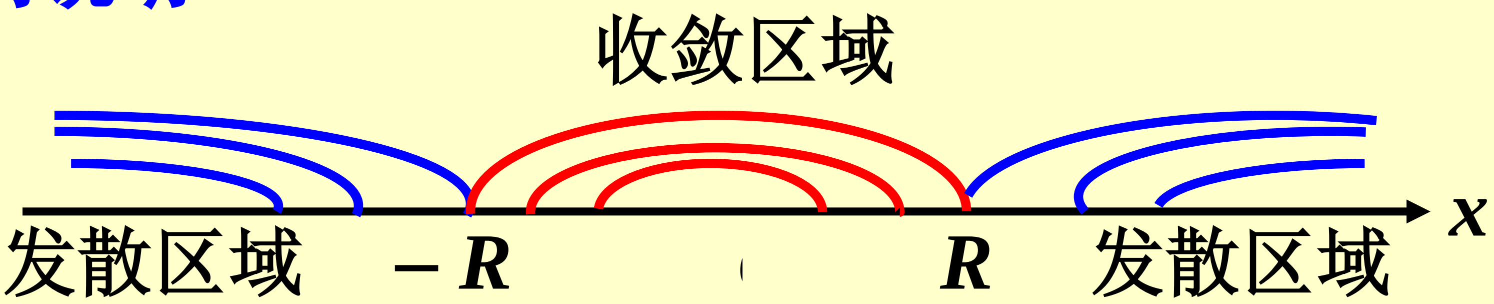
(2) 假设当$x = x_0$时发散,

而有一点x_1适合$\left|x_1\right| > \left|x_0\right|$使级数收敛,

由(1)结论　则级数当$x = x_0$时应收敛,

这与所设矛盾.

几何说明



这是幂级数收敛的特性

推论

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数R存在，它具有下列性质：

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散；

当$x=R$与$x=-R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

定义：正数R称为幂级数的收敛半径.

$(-R,R)$, 称为幂级数的收敛区间,

收敛域 = 收敛区间 + 收敛的端点

可能是 $(-R,R)$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R]$.

规定 (1) 幂级数只在 $x=0$ 处收敛,

$R=0$, 收敛区间 $x=0$;

（2） 幂级数对一切 x 都收敛,

$R=+\infty$, 收敛区间 $(-\infty,+\infty)$.

问题 如何求幂级数的收敛半径?

定理2 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

(1) 则当$\rho \neq 0$时, $R = \frac{1}{\rho}$; (2) 当$\rho = 0$时, $R = +\infty$;

(3) 当$\rho = +\infty$时, $R = 0$.

证明 对级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x|,$$

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\ (\rho \neq 0)$存在,

由比值审敛法，当$|x| < \dfrac{1}{\rho}$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛.

当$|x| > \dfrac{1}{\rho}$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散,

并且从某个n开始 $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n|$, $|a_n x^n| \not\to 0$

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散.

(2) 如果$\rho = 0$, $\forall x \neq 0$,

有$\dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} \to 0\,(n \to \infty)$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛. 收敛半径 $R = +\infty$;

(3) 如果$\rho = +\infty$,

$\forall x \neq 0$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$必发散.

(否则由定理1知将有点$x \neq 0$使$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛)

收敛半径 $R = 0$.

定理证毕.

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处收敛 则 $R \geq |x_0|$

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处发散 则 $R \leq |x_0|$

③ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处条件收敛 则 $R = |x_0|$

这是幂级数收敛的特性

注 利用该定理求收敛半径要求所有的 $a_n \neq 0$

或只有有限个 $a_n = 0$

例2　求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

解　(1) $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad \therefore R=1$

当$x=1$时，　级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，　该级数收敛

当$x=-1$时，　级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，　该级数发散

故收敛区间是$(-1,1]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

$$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \qquad \therefore R = o,$$

级数只在$x=0$处收敛,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0, \quad \therefore R = +\infty,$$

收敛区间$(-\infty,+\infty)$.

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$$

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2\quad \therefore R=\frac{1}{2},$$

即$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$收敛，　$x\in(0,1)$收敛，

当$x=0$时，　级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，　发散

当$x=1$时，　级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，　收敛

故收敛区间为$(0,1]$.

注： 如缺项，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 必不存在，

但幂级数并不是没有收敛半径，此时不能套用定理，可考虑直接用比值法或根值法求收敛半径

例3 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径R=1

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径

解 任取 $x_0\in(0,1)$ 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_0^n$ 收敛知

$$\lim_{n\to\infty}a_n x_0^n=0 \qquad \Rightarrow |a_n x_0^n|\le M$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \quad \le M\,\frac{1}{n!}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

由检比法易得 $\sum_{n=1}^{\infty} M\,\frac{1}{n!}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$

故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$

内绝对收敛　　故收敛半径 $R = +\infty$

注意收敛半径为1，并不意味着` $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

三、幂级数的运算

1. 代数运算性质:

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$,

$$R = \min\{R_1, R_2\}$$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x\in(-R,R)$$

(其中 $c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1} + \cdots + a_n\cdot b_0$)

(3) 除法 (收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

(相除后的收敛区间比原来两级数的收敛区间小得多)

2. 和函数的分析运算性质:

(1) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内连续,在端点收敛,则在端点单侧连续.

(2) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可积,且对$\forall x \in (-R, R)$可逐项积分.

即 $$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$ (收敛半径不变)

(3) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x)=(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' \quad =\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$

(收敛半径不变)

例 4 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$的和函数.

解 $\because s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},$ 显然 $s(0)=0,$

$$s'(x) = 1 - x + x^2 - \cdots = \frac{1}{1+x}, \quad (-1 < x < 1)$$

两边积分得 $\int_0^x s'(t)dt = \ln(1+x)$

即 $s(x) - s(0) = \ln(1+x)$ $\therefore s(x) = \ln(1+x),$

又 $x = 1$时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$收敛.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x). \quad (-1 < x \le 1)$$

例5 求和函数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和

解 收敛域为 $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

记 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} \quad -1 < x < 1$

则 $$s_1(x) = \int_0^x s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\Rightarrow \int_0^x s_1(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

故 $$s_1(x)=\left[\frac{x^2-1+1}{1-x}\right]'=[-x-1+\frac{1}{1-x}]'$$

$$=-1+\frac{1}{(1-x)^2}\qquad -1<x<1$$

$$\Rightarrow s(x)=s_1'(x)\quad=\frac{2}{(1-x)^3}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=8$$

常用已知和函数的幂级数

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$;　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$;

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$;

常数项级数求和的一种重要方法

幂级数法或Abel法

记住几个常见级数的和

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad (|q|<1)$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

四、小结

1.函数项级数的概念:

2.幂级数的收敛性: 收敛半径**R**

3.幂级数的运算: 分析运算性质

思考题

幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变？

思考题解答

不一定.

例 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$,

$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$, 它们的收敛半径都是1,

但它们的收敛域各是 $[-1,1]$, $[-1,1)$, $(-1,1)$

练 习 题

一、求下列幂级数的收敛区间：

1、$\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$；

2、$\dfrac{2}{2}x+\dfrac{2^2}{5}x^2+\cdots+\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$；

3、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；

4、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}\qquad(a>0,b>0)$.

二、利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数:

1、$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$;

2、$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

练习题答案

一、1、$(-\infty,+\infty)$;

2、$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$;

3、$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;

4、$(-c,c)$, 其中$c=\max\{a,b\}>0$.

二、1、$\dfrac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$;

2、$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1<x<1)$.