浙江大学 2009-2010 学年秋冬学期《线性代数》期末试卷

一、计算题（要求写出必要的解题步骤，本大题共 85 分）

1． (本题 5 分)确定 8 级排列$63i72j84$中数字i和j的值，使得排列是偶排列。

答案 当$i=1$，$j=5$时，$\tau(63172584)=12$。

2． (本题 10 分)计算行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 5\\ 4 & 9 & 17 & 25\\ 8 & 27 & 65 & 125\end{vmatrix}$。

答案 $\boldsymbol{D}=60$。

3． (本题 10 分)向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\a\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\c\end{bmatrix}$$

决定数a，c的值，使得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩最小，并求出向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组，并用此极大线性无关组表示其它的向量。

答案 $[\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_4]\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -4\\ 0 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 0 & a+18 & c-11\end{bmatrix}$

当$a=-18$，$c=11$时秩最小，这时$r(\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_4)=2$。
极大线性无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，且$\boldsymbol{\alpha}_3=7\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$。

4． (本题 10 分)设$\boldsymbol{A}$是4阶矩阵，特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，$\lambda_4=3$，求

(1) $|2\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{A}^{-1}|$；

(2) $|\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$；

(3) $|(\boldsymbol{A}^*)^*|$。

答案

(1) $|\boldsymbol{A}|=-12$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-12\boldsymbol{A}^{-1}$

$|2\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{A}^{-1}|=|-24\boldsymbol{A}^{-1}-3\boldsymbol{A}^{-1}|=|-27\boldsymbol{A}^{-1}|=-\dfrac{3^{11}}{4}$

(2) 因为$\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$有一个特征值$3^3-23^2-23-3=0$，所以

$|\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=0$

(3) $|(\boldsymbol{A}^*)^*|=|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}=(-12)^{3^2}=-12^9$。

5． (本题 10 分)求满足关系式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵$\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\0 & 2 & 1 & 3\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

解 因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{A}[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0\\1 & -2 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

6. (本题 10 分)解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-2x_4=1\\x_1+x_2-2x_3-x_4=-4\\x_1+x_2+x_3-4x_4=-1\end{cases}$$

(要求用该方程组的一个特解与对应导出组的基础解系的线性组合之和来表示)

答案

$$\boldsymbol{\xi}_0=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

通解

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0+k\boldsymbol{\eta}$$

其中k为任意常数。

7. (本题 15 分)在线性空间V中，设基 I 和基 II 分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

(1) 求基 I 到基 II 的过渡矩阵；
(2) 分别求向量$\boldsymbol{\alpha}=[2\quad 3\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 和基 II 下的坐标；
(3) 求一个向量$\boldsymbol{\beta}$，它在基 I 和基 II 下具有相同的坐标。

答案

(1) $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$

(2) 向量$\boldsymbol{\alpha}=[2\quad 3\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 和基 II 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(3) $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}k & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中$k\neq 0$。

8. (本题 15 分)设二次型$f(x_1，x_2，x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，经过正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$后变为$f(x_1，x_2，x_3)=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$，且$\boldsymbol{Q}$的最后一列是$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

(1) 求正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$；

(2) 求二次型$f(x_1，x_2，x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$；

(3) 问上述所求的二次型是否唯一，请说明理由。

解

(1) f的特征值是$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$，

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

设属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，这里$x^2+y^2+z^2=1$。

由$(\boldsymbol{\alpha}，\boldsymbol{\alpha}_3)=0$可得$x+y+z=0$，解之得属于特征值 2 的标准正交特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

正交线性替换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$f(x_1，x_2，x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

(3) 上面所求的二次型是唯一的。

如果还有一个正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{RY}$，使得$f=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$。这里$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{\eta}_1 \quad \boldsymbol{\eta}_2 \quad \boldsymbol{\eta}_3]$，其中$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$是属于特征值 2 的标准正交的特征向量，$\boldsymbol{\eta}_3$是属于特征值$-1$的标准特征向量。则

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{21}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\eta}_2=k_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\eta}_3=k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{\eta}_1 \quad \boldsymbol{\eta}_2 \quad \boldsymbol{\eta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{21} & 0\\ k_{12} & k_{22} & 0\\ 0 & 0 & k_{33}\end{bmatrix}=\boldsymbol{QS}$$

这里$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{21} & 0\\ k_{12} & k_{22} & 0\\ 0 & 0 & k_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & 0\\ 0 & k_{33}\end{bmatrix}$，由于$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{Q}$都是正交矩阵，所以$\boldsymbol{S}$也是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{KK}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_2，k_{33}^2=1$$

由$f\left(x_1，x_2，x_3\right)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{RY}=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$推得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{R\Lambda R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{QS\Lambda}(\boldsymbol{QS})^{\mathrm{T}}&=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & 0\\ 0 & k_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\boldsymbol{E}_2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & k_{33}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\ &=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}2\boldsymbol{KK}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & -k_{33}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}2\boldsymbol{E}_2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{T}=\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

因此二次型$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$是唯一的。

二、证明题（本大题共 15 分）

9. (本题 9 分)设$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$是正定矩阵，其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别是$m$阶和$n$阶实对称矩阵，$\boldsymbol{C}$是$m\times n$矩阵。

   (1) 计算$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP}$其中$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$；

   (2) 利用(1)的结果判断矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是否为正定矩阵，并证明你的结论。

解

(1) $$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(2) 矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是正定矩阵。

由于$\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$合同，所以$\boldsymbol{M}$正定。因为对$m$维列向量$\boldsymbol{X}=\underbrace{[0，0，\cdots，0]}_{m}{}^{\mathrm{T}}$和任意的$n$维非零实列向量$\boldsymbol{Y}=\underbrace{[y_1，y_2，\cdots，y_n]}_{n}{}^{\mathrm{T}}$，令$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{Z}\neq 0$，且$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MZ}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}>0$，所以$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$正定。

10．(本题6分) 设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵，如果对任何n维非零向量$\boldsymbol{X}$，都有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$，求证：$|\boldsymbol{A}| > 0$。

证明 因为对于任意的n维非零列向量$\boldsymbol{X}$，有$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$。

(1) 如果λ_0是$\boldsymbol{A}$的一个实特征值，$\boldsymbol{X}_0 \neq 0$是对应的一个实特征向量，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \lambda_0\boldsymbol{X}_0$，由此可得$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \lambda_0\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0 > 0$，而$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0 > 0$，所以$\lambda_0 > 0$。

(2) 如果λ_0是$\boldsymbol{A}$的一个虚特征值$a+bi$，a，b是实数，$b \neq 0$，由于虚根成对出现，所以$a-bi$也是$\boldsymbol{A}$的一个特征值，所以$(a+bi)(a-bi) > 0$。

由(1)和(2)知$|\boldsymbol{A}| > 0$。