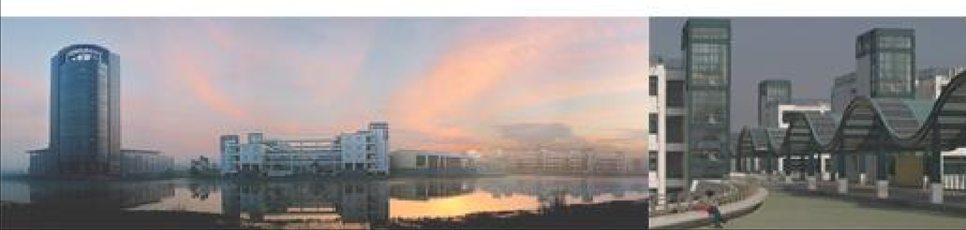
线性代数总复习



一、行列式

- 行列式
  - 概念
    - 不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变；
    - 某行有公因数 k，可把 k 提到行列式外；
    - 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和；
    - 两行互换行列式变号；
    - 某行的 k 倍加至另一行．行列式的值不变；
  - 展开式
    - $D_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ （按 i 行展开）
    - $D_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ （按 j 行展开）
    - 余子式、代数余子式
  - 计算
    - 给定 (i,j) 元的值
      - 化三角形一加边法、爪型行列式；
      - 公式法一特殊行列式、范德蒙德行列式；
      - 递推、数学归纳法；等
    - 未给定 (i,j) 元的值
      - 用行列式性质计算；
      - 用矩阵性质计算；
      - 用方阵的特征值；等
  - 应用
    - 克拉默法则；
    - 判断方阵的可逆，利用伴随几种求逆矩阵；
    - 线性相关性的判定；
    - 求矩阵的秩，并判断线性方程组的解存在情况；
    - 求方阵的特征值。

1、（主）对角行列式、上（下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{11} & a_{22} & & \\ & & & \\ a_{11} & a_{11} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & & a_{11} \\ & a_{22} & & a_{11} \\ & & & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2、（次）对角行列式、上（下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & & & \\ a_{n1} & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,n-1} & \\ & & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3、分块三角行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \times |B| \qquad \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{k \times n} |A| \times |B|$$

4、爪型行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots n).$$

方法：将D的第i+1列乘以 $-\frac{c_i}{a_i}(i=1,2,\quad,n)$

都加到第1列，得

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)$$

有些行列式经过适当的变化可以化为行列式，再采用上述方法计算。

上例中 D_n 称为爪型(或箭型)行列式，其它的爪型行列式还有：，，，均可仿上例求出其值.

5、范德蒙德行列式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^{2} & x_2^{2} & \cdots & x_{n-1}^{2} & x_n^{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{2} & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{2} & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^{2} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^{2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

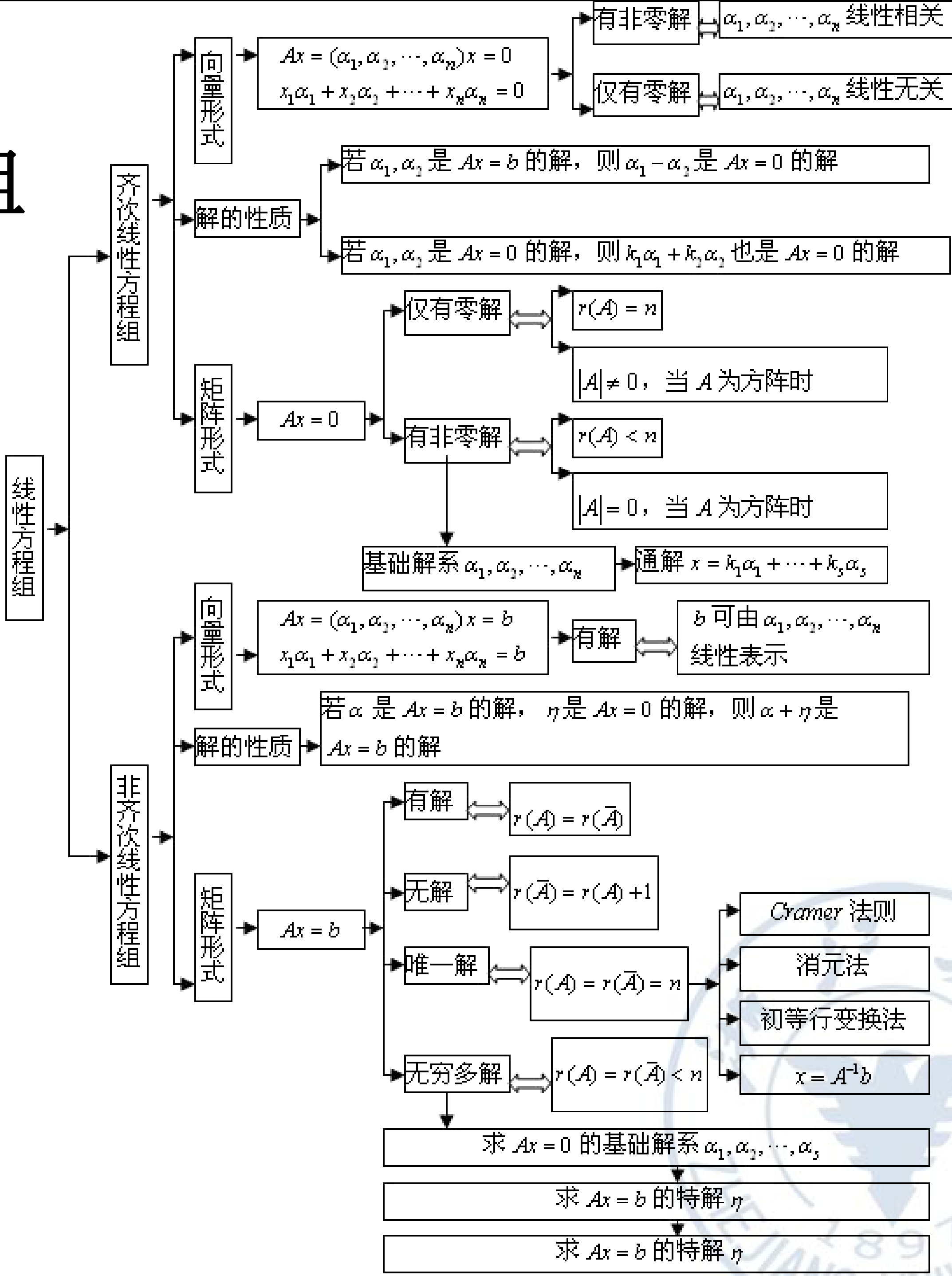
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{n-1\ge j\ge 1}(x_n-x_j)\cdot\prod_{n-2\ge j\ge 1}(x_{n-1}-x_j)\cdots\prod_{2\ge j\ge 1}(x_3-x_j)\prod_{1\ge j\ge 1}(x_2-x_j)$$

6、其他方法

加边法、递归方法

二、线性方程组


线性方程组
齐次线性方程组
向量形式
$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=0$
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$
有非零解
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关
仅有零解
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关
解的性质
若 α_1,α_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解
若 α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的解，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是 $Ax=0$ 的解
矩阵形式
$Ax=0$
仅有零解
$r(A)=n$
$|A|\neq 0$，当 A 为方阵时
有非零解
$r(A)<n$
$|A|=0$，当 A 为方阵时
基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$
通解 $x=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$
非齐次线性方程组
向量形式
$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=b$
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$
有解
b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
解的性质
若 α 是 $Ax=b$ 的解， η 是 $Ax=0$ 的解，则 $\alpha+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解
矩阵形式
$Ax=b$
有解
$r(A)=r(\bar{A})$
无解
$r(\bar{A})=r(A)+1$
唯一解
$r(A)=r(\bar{A})=n$
Cramer 法则
消元法
初等行变换法
$x=A^{-1}b$
无穷多解
$r(A)=r(\bar{A})<n$
求 $Ax=0$ 的基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$
求 $Ax=b$ 的特解 η
求 $Ax=b$ 的特解 η

二、线性方程组

定理2.3.1（Page 57）线性方程组$AX=b$有解

$$\Leftrightarrow r(\overline{A})=r=r(A)$$

在有解条件下,

(1)有唯一解 $\Leftrightarrow r(\overline{A})=r(A)=n$（未知量个数）.

(2)有无穷多个解 $\Leftrightarrow r(\overline{A})=r(A)<n$（未知量个数），此时解中有$n$-$r$个自由未知量.

定理2.3.2（Page 58）线性方程组$AX=O$

解的情况如下:

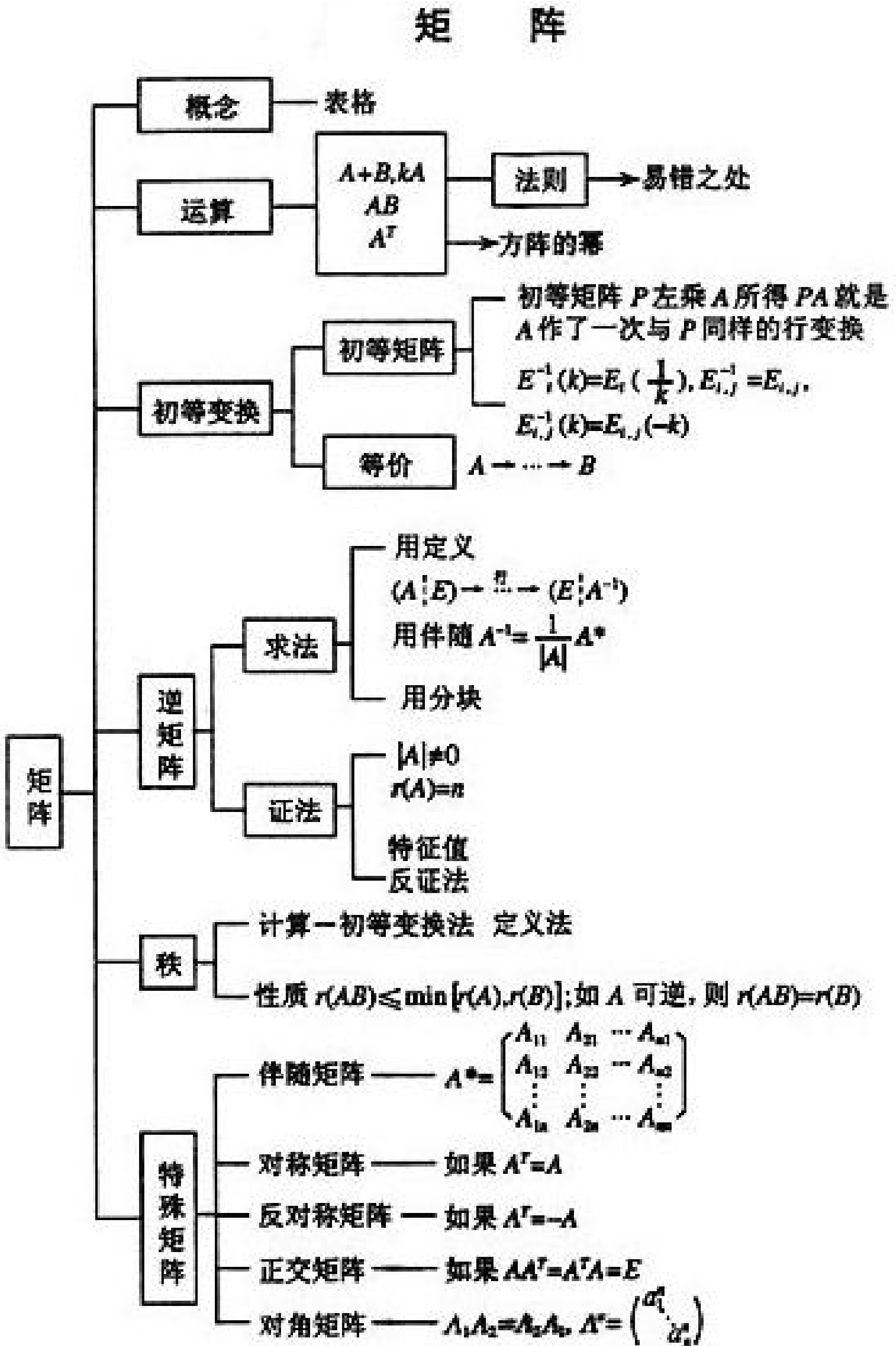
(1)只有零解$\Leftrightarrow r(A)=r=n$（未知量个数）.

(2)有非零解$\Leftrightarrow r(A)=r<n$（未知量个数），此时解中有n-r个自由未知量.

行化简算法：

1. 由矩阵最左的非零列开始．这是一个主元列，阶梯头在该列顶端；
2. 在主元列中选取一个非零元作为主元．如有必要的话，对换两行使这个元素移到阶梯头(该列顶端)位置上.
3. 用倍加变换将阶梯头所在列下面元素变成0;
4. 暂时不管包含阶梯头位置的行以及它上面的各行，对剩下的子矩阵使用上述的三个步骤直到没有非零行需要处理为止;
5. 由最右边的阶梯头开始，把每个阶梯头上方的个元素变成0. 若某个阶梯头不是1，用倍乘变换变成1.

三、矩阵



矩 阵
矩阵
概念
表格
运算
A+B,kA
AB
A^T
法则
易错之处
方阵的幂
初等变换
初等矩阵
初等矩阵 P 左乘 A 所得 PA 就是 A 作了一次与 P 同样的行变换
$E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k}), E_{i,j}^{-1}=E_{i,j}$,
$E_{i,j}^{-1}(k)=E_{i,j}(-k)$
等价
A → ⋯ → B
逆矩阵
求法
用定义
$(A \vdots E) \to \overset{行}{\cdots} \to (E \vdots A^{-1})$
用伴随 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
用分块
证法
$|A|\neq 0$
$r(A)=n$
特征值
反证法
秩
计算—初等变换法 定义法
性质 $r(AB)\leq\min[r(A),r(B)]$;如 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)$
特殊矩阵
伴随矩阵
$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
对称矩阵
如果 $A^T=A$
反对称矩阵
如果 $A^T=-A$
正交矩阵
如果 $AA^T=A^TA=E$
对角矩阵
$\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1$, $\Lambda^n=\begin{pmatrix} a_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^n \end{pmatrix}$

关于方阵的可逆 & 不可逆

n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$ （即A是非奇异方阵）

$\Leftrightarrow R(\mathbf{A}) = n$（即A是满秩方阵）

$\Leftrightarrow$ A可以表达成若干个初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{n\times n}x = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{n\times n}x = b$ 只有唯一解

$\Leftrightarrow$ A的n个特征值全不为0

n阶方阵A不可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0$（即A是奇异方阵）

$\Leftrightarrow R(\mathbf{A}) < n$（即A是降满秩方阵）

$\Leftrightarrow$ A不可以表达成若干个初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}_{n\times n}x = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{n\times n}x = b$ 没有解或者有无穷多解

$\Leftrightarrow$ A的n个特征值中至少有一个为0

例1 行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$ ____________.

例2 (1) $A^2=A$且$E-A$可逆，k为正整数，求行列式 $|E+A+\dots+A^k|$.

(2) 设 $\alpha=[1,0,2,4]^T, \beta=[2,-1,3,-1]^T, A=\alpha\beta^T$ 计算行列式$|2E-A|$.

例3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2^4-2^3 & 2^3-2^2 & 2^2-2 \\ 3^4-3^3 & 3^3-3^2 & 3^2-3 \\ 4^4-4^3 & 4^3-4^2 & 4^2-4 \end{vmatrix}$.

例4 设$(I):\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$, $(II):\begin{cases} x_1+2x_2+mx_3-x_4=-5 \\ 4x_2-x_3+nx_4=-11 \\ x_3-2x_4=t \end{cases}$.

(1)求（I）的导出方程组的基础解系，并写出通解;

(2)求m,n,t使（I）与（II）同解。

例5 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$

有公共解，求a的值及所有公共解。

例6 已知A为4阶非零方阵，$B=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 且$AB=0$

(1)求A与B的秩；

(2)求齐次线性方程组$AX=0$的通解.

例7 设A,B,C为三阶可逆矩阵，

(1)化简等式 $(BC^T-E)^T(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$；

(2)当$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$时，求出上式结果。

例8 (1)设A,B,C为n阶矩阵，且$AB=BC=CA=E$,则$A^2+B^2+C^2=$__________；

(2)设A为n阶方阵，且$A^2+2A-4E=O$,则$(A-E)^{-1}=$______；

(3)设A,B分别是m阶，n阶可逆矩阵，且$|A|=a$, $|B|=b$,若 $C=\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$,则$C^*=$__________。

例9 设三阶矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 且$2A^*B-AB=2E+A$,

求矩阵B。

例10 设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $|A|>0$ 且满足

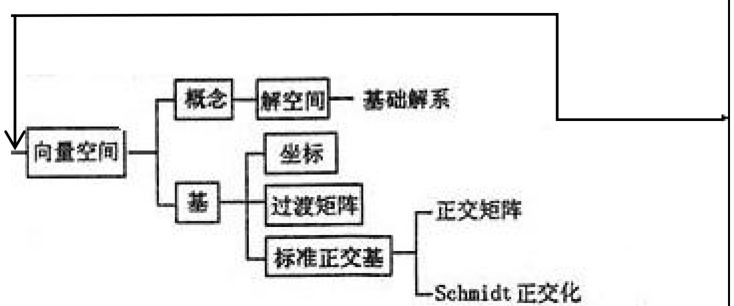
$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求B。

例11 设A是n阶矩阵，满足$|A|\neq 0$，求证：

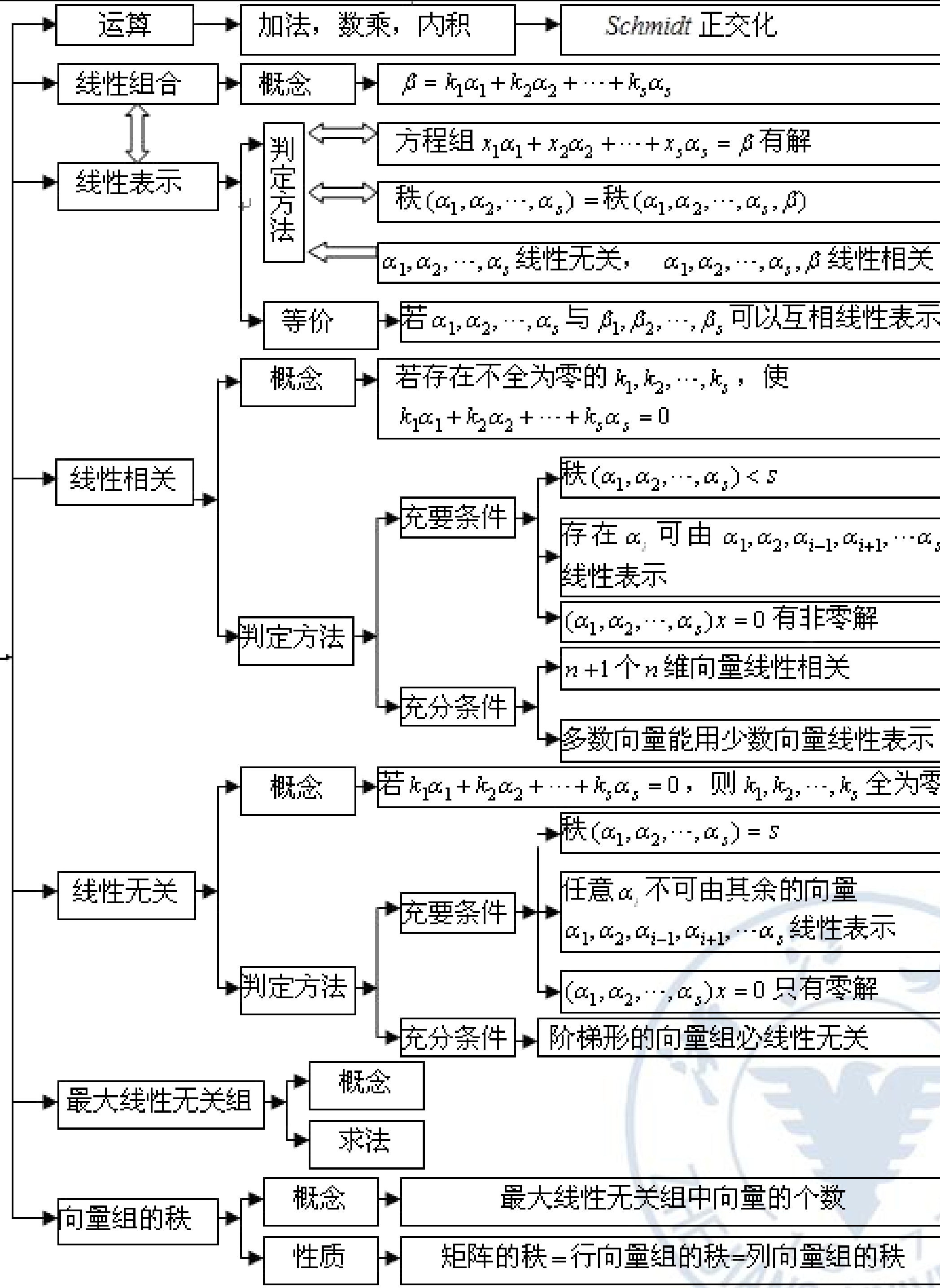
(1) $|A^*|=|A|^{n-1}$； (2)$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$.

例12 设4阶矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则$\left(A^*\right)^*=$________.

四、线性空间



向量空间
概念
解空间
基础解系
基
坐标
过渡矩阵
标准正交基
正交矩阵
Schmidt 正交化



运算
加法，数乘，内积
Schmidt 正交化
线性组合
概念
$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$
线性表示
判定方法
方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解
秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ = 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关
等价
若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以互相线性表示
线性相关
概念
若存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$
判定方法
充要条件
秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$
存在 α_i 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots\alpha_s$ 线性表示
$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x = 0$ 有非零解
充分条件
$n+1$ 个 n 维向量线性相关
多数向量能用少数向量线性表示
线性无关
概念
若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零
判定方法
充要条件
秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = s$
任意 α_i 不可由其余的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots\alpha_s$ 线性表示
$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x = 0$ 只有零解
充分条件
阶梯形的向量组必线性无关
最大线性无关组
概念
求法
向量组的秩
概念
最大线性无关组中向量的个数
性质
矩阵的秩＝行向量组的秩=列向量组的秩

判断向量组线性相关的方法

1．$\alpha = 0 \Leftrightarrow \quad \alpha$线性相关

2．α与β的对应分量成比例 $\quad \Leftrightarrow \quad$ α与β线性相关

3．含有零向量的向量组是线性相关的

4．向量组 $\alpha_1,\alpha_2 \quad \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 该组中至少有一个向量可由其余的向量线性表出

5．部分相关则整体相关

6．设向量组$\alpha_1,\alpha_2 \quad \alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2 \quad \beta_s$线性表出

(1) 如果$r>s$,则 $\alpha_1,\alpha_2 \quad \alpha_r$线性相关；

(2) 如果$\alpha_1,\alpha_2 \quad \alpha_r$线性无关，则 $r \leq s$

7．n+1个n维向量必线性相关(个数大于维数)

8．向量组的秩小于它所含向量的个数

$\Leftrightarrow$ 该向量组是线性相关的

9．n个n维的向量构成的行列式=0

$\Leftrightarrow$ 该向量组是线性相关的

10．线性相关向量组中每个向量截短之后还相关

判断向量组线性无关的方法

1. $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$ 线性相关
2. α与β的对应分量不成比例 $\Leftrightarrow$ α与β线性无关
3. 向量组$\alpha_1,\alpha_2 \quad \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性无关

   $\Leftrightarrow$ 该组中任何一个向量都不能由其余向量线性表出
4. 整体无关则部分无关
5. 该向量组的秩等于它所含向量的个数

   $\Leftrightarrow$ 该向量组是线性无关的
6. n个n维的向量构成的行列式≠0

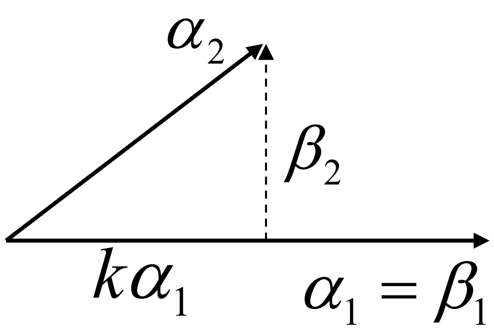
   $\Leftrightarrow$ 该向量组是线性无关的
7. 线性无关向量组中每个向量加长之后还无关

施密特正交化

将任意给定的线性无关的非零向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$

化为正交向量组的方法——施密特正交化

二维几何空间



$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-k\beta_1\end{cases}$$

显然 $(\beta_1,\beta_2)=0$

$$\boxed{\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_r,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\qquad-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}}$$

五、特征值与特征向量

- 特征值
  - 定义
    - $Ax=\lambda x$， $x\neq 0$
  - 性质
    - 不同特征值对应的特征向量线性无关
    - k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量
    - $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$
    - $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$
  - 求法
    - 特征值
      - 定义法
      - 特征多项式法 $|\lambda E-A|=0$
    - 特征向量
      - 定义法
      - 基础解系法 $(\lambda E-A)x=0$
  - 相似矩阵
    - 定义
      - 若 $P^{-1}AP=B$，则 A 与 B 相似
    - 性质
      - 若 A 与 B 相似，则 $r(A)=r(B)$
      - 若 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|$
      - 若 A 与 B 相似，则 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
      - 若 A 与 B 相似，则特征值相同
    - 可对角化
      - A 与 B 有 n 个线性无关的特征向量
      - $r(\lambda_i E-A)=n-k_i$，λ_i 为 k_i 重特征值
      - A 有 n 个不同的特征值
      - A 是实对称矩阵
  - 实对称矩阵的性质
    - 一定与对角矩阵相似
    - A 可用可逆矩阵和正交矩阵对角化
    - 不同特征值的特征向量必正交
    - 特征值为实数，特征向量为实向量

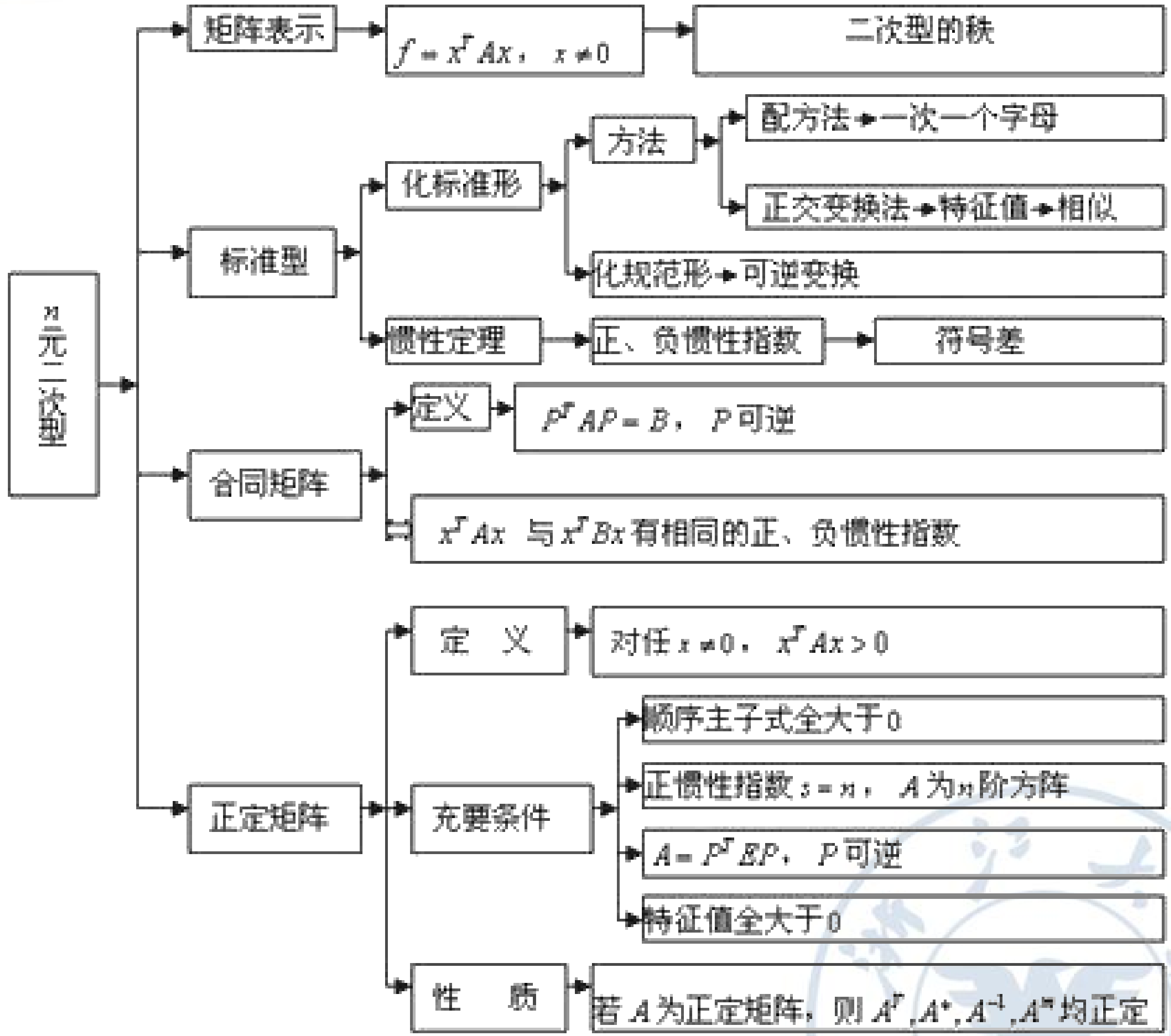
矩阵可对角化的性质与判定

$$n\text{阶矩阵}A\text{可对角化}\begin{cases}\Leftrightarrow A\text{有}n\text{个线性无关的特征向量}\\ \Leftrightarrow \text{对于}A\text{的每个特征值}\lambda_i,\text{其重数}k_i=n-r\left(\lambda_i E-A\right)\\ \Leftarrow A\text{有}n\text{个不同的特征值}\\ \Leftarrow A\text{为实对称矩阵}\end{cases}$$

矩阵相似的性质与判定

$$\text{矩阵}A\text{、}B\text{具有许多相同的性质}\begin{cases}r\left(A\right)=r\left(B\right)\\ A\text{、}B\text{具有相同的特征多项式，即}\left|\lambda E-A\right|=\left|\lambda E-B\right|\\ A\text{、}B\text{具有相同的特征值}\\ \left|A\right|=\left|B\right|\\ tr\left(A\right)=tr\left(B\right),\text{即:}\sum a_{ii}=\sum b_{ii}\\ A^{-1}\sim B^{-1},A^{T}\sim B^{T},A^{*}\sim B^{*},\ f(A)\sim f(B),\ \text{其中}f(x)\text{为关于}x\text{的多项式}\end{cases}$$

六、二次型



n元二次型
矩阵表示
$f = x^T A x$， $x \neq 0$
二次型的秩
标准型
化标准形
方法
配方法→一次一个字母
正交变换法→特征值→相似
化规范形→可逆变换
惯性定理
正、负惯性指数
符号差
合同矩阵
定义
$P^T A P = B$， P可逆
$x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数
正定矩阵
定 义
对任 $x \neq 0$， $x^T Ax > 0$
充要条件
顺序主子式全大于0
正惯性指数 $s = n$， A为n阶方阵
$A = P^T EP$， P可逆
特征值全大于0
性 质
若A为正定矩阵，则 A^T, A^*, A^{-1}, A^m 均正定

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤：

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^T Ax$,求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \quad, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特 征向量$\xi_1, \xi_2, \quad, \xi_n$;

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \quad, \xi_n$正交化,单位化,得 $\eta_1, \eta_2, \quad, \eta_n$,记$C = (\eta_1, \eta_2, \quad, \eta_n)$;

5. 作正交变换 $x = Cy$,则得 f的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

矩阵合同的性质与判定

$$A与B合同\begin{cases}\Leftrightarrow \exists 可逆矩阵C，使得C^{T}AC=B \\ \Leftrightarrow x^{T}Ax与x^{T}Bx有相同的正负惯性指数 \\ \Leftrightarrow A与B的特征值中，正特征值个数相等，负特征值个数相等 \\ \Rightarrow r(A)=r(B) \\ \Rightarrow |A|=|B| \end{cases}$$

n阶是实称矩阵正定的性质与判定

$$A为正定矩阵\begin{cases}\Leftrightarrow 合同于单位矩阵，即\exists 可逆矩阵C，使得A=C^{T}C \\ \Leftrightarrow A的正惯性指数等于n \\ \Leftrightarrow A的特征值全为正数 \\ \Leftrightarrow A的顺序主子式全大于0 \\ \Rightarrow 0<|A|\le a_{11}a_{22}\qquad a_{nn} \\ \Rightarrow a_{ii}>0,i=1,2,\qquad ,n. \end{cases}$$

矩阵的等价、合同和相似之间的联系与区别

1、**矩阵等价：**

a. 同型矩阵而言

b. 一般与初等变换关

c. 秩是矩阵等价的不变量，其次，两同型矩阵等价的本质是秩相等

2、**矩阵相似：**

a. 针对方阵而言

b. 秩相等是必要条件

c. 本质是二者有相等的不变因子(即特征值和不变子空间)

3、**矩阵合同：**

a. 针对方阵而言，一般是对称矩阵

b. 秩相等是必需条件

c. 本质是秩相等且正惯性指数相等，即标准型相同

例13 设欧式空间R^3的一组向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}$.

(1)求证：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是R^3的一组基；

(2)把$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 改造成R^3的一组正交基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ；

(3)求由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(4)向量σ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标是$[1,2,0]^T$,求向量$\sigma$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标。

例14 设R^n中有两组向量

$$(I)\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_k\},(II)\{\beta_1,\beta_2,...\beta_{n-k+1}\}(1\le k\le n)$$

证明：若(I)中的每一个向量与(II)中的每一组向量皆正交，则$(I)(II)$两组向量必有一组为线性相关。

例15 设3.已知向量组$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\-1\end{bmatrix}$, $\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$与向量组

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$

线性表示，求a,b的值，并写出可由线性表示的表示式（只需写出一种表示式）.

例16 设$\alpha=[1,2,3]^T,\beta=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]^T,A=\alpha\beta^T$, 求$A$的特征值和特征向量。

例17 设α,β为n维单位正交列向量，矩阵 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$ 求证：$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$都是A的特征向量，并分别求出它们对应的特征值。

例18 设A是3阶实对称矩阵，特征值为1，-1，-1,属于特征值1的特征向量为$\beta=[1,0,-1]^{T}$,求

(1)属于特征值-1的特征向量;

(2)矩阵A;

(3) A^{10}。

例19 设A与对角矩阵$diag(1,2,4)$相似，

$B=(A-E)(A-2E)(A-4E)$, 求证：$B=0$。

例20 设A是3阶实对称矩阵，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$，属于$\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为$\alpha_1=[1,-1,0]^T,\alpha_2=[1,0,-1]^T,\alpha_3=[0,1,-1]^T$，求：

(1)属于特征值-1的特征向量;

(2)矩阵A。

例21 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$，
(1)写出二次型的矩阵A;
(2)用正交线性替换$X=QY$化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$为标准形;
(3)求实对称矩阵B,使得$A=B^3$.

例22 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$，
经正交变换 $X=PY$ 化成 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_3^2$
其中P是3阶正交矩阵，试求常数a,b。

例23 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1{}^2+ax_2{}^2+(a-1)x_3{}^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ ，

(1)求二次型f的矩阵的所有特征值；

(2)若二次型的规范形为 $y_1{}^2+y_2{}^2$，求a的值。

例24 求二次型 $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+4\sum_{1\le i\le j=n}x_ix_j$ 的秩与符号差。

例25 设二次型

$$f_n=\frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\ldots x_n^{\ 2}}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n}\right)^2,$$

的正惯性指数为p，秩为r，证明：$p=r<n$。

例26 设二次型 $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(1-b_i)x_i^{\ 2}+2\sum\limits_{1\le i\le j=n}x_ix_j$ 的矩阵为B，

其中 $b_i>0,i=1,2,\ldots n$ 且 $1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}>0$ 。问f正定？负定？还是不定？

例27 设A为n阶正交矩阵 且$|A|=-1$,求证：$|A+E|=0$。

例28 设A,B都是n阶正交矩阵且$|A|=-|B|$,
求证：秩$(A+B)^*\leq 1$。

例29 设A,B为n阶实对称矩阵， 且A是正定矩阵,证明：存在实可逆矩阵P,使$P^TAP=E$且P^TBP为对角阵。

例30 设A,B都是n阶正定矩阵, 证明:

$$|A+B|\geq|A|+|B|.$$

例31 设$f=X^TAX$, $g=X^TBX$是两个实二次型且B正定。

证明：(1)存在满秩线性变换$X=CY$,使

$$\begin{cases} f=\lambda_1 y_1^{\ 2}+\lambda_2 y_2^{\ 2}+\ldots+\lambda_n y_n^{\ 2} \\ g=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+\ldots+y_n^{\ 2} \end{cases}$$

(2)上述的 λ_1, $\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 为$|\lambda \mathrm{B}-\mathrm{A}|=0$ 的实根。

例32 (1)设$D=\begin{bmatrix} A_{m\times m} & C_{m\times n} \\ C^T & B_{n\times n} \end{bmatrix}$为正定矩阵, 其中A,B为对称矩阵，计算$P^TDP$,其中$P=\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix}$;

(2)证明：$|\mathrm{D}|\le d_{11}d_{22}\ldots d_{nn}$，其中$d_{ij}$为$D$的主对角线元素。