浙江大学 2006-2007 秋冬 线性代数

一、填空题（20 分）

1. 设 A，B，C 是 n 阶矩阵，且 $AB=BC=CA=E$，则 $A^2+B^2+C^2=$ $\underline{(A+B+C)^2-6E}$。

2. 设 n 阶矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n),b_j\neq 0,(j=1,2,\cdots,n)$，

则 $r(B)=$ $\underline{\quad 1 \quad}$。

3. 设A是n阶矩阵，且 $A^2+2A-4E=0$, 则 $(A-E)^{-1}=$ $\underline{\quad A+3E \quad}$。

4. 设 $\alpha_1=(1,0,-1,2)^T,\alpha_2=(2,-1,-2,6)^T,\alpha_3=(3,1,a,4)^T,\beta=(4,-1,-5,10)^T$，已知 β 不能由

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $a=$ $\underline{\quad -3 \quad}$。

5. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$，则当 C＝$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$时，$C^TAC=B$。

二、解答题

1. （10 分）设 $\alpha=(1,0,2,4)^T,\beta=(2,-1,3,-1)^T$，$A=\alpha\beta^T$，计算 $|2E-A|$。

解：$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -2 \\ 8 & -4 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

$$|2E-A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 2 \\ -8 & 4 & -12 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \\ -8 & -12 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-8*(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-16.$$

2. （10 分）设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且适合 $2A^*B-AB=2E+A$，求矩阵 B。

解： 容易计算 $|A|=2$，则 $AA^*=2E$。由于 $2A^*B-AB=2E+A$，故

$(4E-A^2)B=(2E+A)A$。可以验证 $2E\pm A$ 都是可逆阵，则

$$B=(2E-A)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}。$$

3. （15 分）问 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2+x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 有唯一解、无解、无穷多解？在有解的情况下，求出其全部解。

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&k+1&1+k&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&0&\dfrac{1+k}{2}(4-k)&k(k-4)\\0&2&k-2&8\end{pmatrix}$$

由此可以知道

- $k=-1$， $r(A)=2,r(\overline{A})=3$，方程组无解；
- $k\neq-1,k\neq4$， $r(A)=3,r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，解为：

$$x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}，\quad x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}，\quad x_3=-\frac{2k}{k+1}。$$

- $k=4$， $r(A)=2,r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多解。此时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&0&0&0\\0&2&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}，其中 K 为任意常数。$$

4. （15 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$。

（1）写出该二次型的矩阵；（2）该二次型是否是正定二次型；（3）用非退化线性替换 $X=CY$ 化该二次型为标准型，并写出所用的线性替换。

解：（1） $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$；

（2）由于 1 阶顺序主子式为 $\Delta_1=0$，故 A 不是正定的；

（3） 设 $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Y$，则

$$f(X)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3$$

$$=y_1^2-(y_2^2-2y_2y_3+y_3^2)+y_3^2=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2$$

$$=z_1^2-z_2^2+z_3^2$$

其中 $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Z$。故所用的非退化线性替换为

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Z=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Z。$$

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，特征值 $1,-1,-1$，属于特征值 1 的特征向量为 $\beta=(1,0,-1)^T$，求

（1） 属于特征值 -1 的所有特征向量；（2）矩阵 A。 （3） 求 A^{10}。

解：（1）设属于－1 的特征向量为 $X=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$。故 $X\perp\beta$，即

$$x_1-x_3=0。$$

从而有两个线性无关的特征向量 $X_1=\left(0,1,0\right)^T,X_2=\left(1,0,1\right)^T$，而且有 $X_1\perp X_2$。

因此属于－1 的所有特征向量为 $k_1X_1+k_2X_2$，其中 k_1,k_2 为不全为零的任意常数。

（2）由（1）知道，取$U=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，有$U^TAU=\Lambda$。因此

$$A=U\Lambda U^T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

（3）$A^{10}=U\Lambda^{10}U^T=U\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}U^T=E$。

三、证明题：

1. （7 分）设 A 是 n 阶矩阵，满足$|A|\neq 0$，求证：（1）$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，（2）$\left(A^*\right)^*=\left|A\right|^{n-2}A$。

证明：（1） 由于 $AA^*=\left|A\right|E$，所以$\left|A\right|\left|A^*\right|=\left|A\right|^n$，即得$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$；

（2）由于$A^*(A^*)^*=\left|A^*\right|E=\left|A\right|^{n-1}E$，所以有

$$(A^*)^*=\left|A\right|^{n-1}\left(A^*\right)^{-1}=\left|A\right|^{n-1}\frac{1}{\left|A\right|}A=\left|A\right|^{n-2}A。$$

2. （8 分）设矩阵 A 与对角阵$diag(1,2,4)$相似，$B=(A-E)(A-2E)(A-4E)$，求证 B＝0。

证明：因为矩阵 A 与对角阵$diag(1,2,4)$相似，所以 A 的特征值为 1，2，4。从而 B 的特征值为 0，0，0，且矩阵 B 与对角阵 diag（0，0，0）相似。故 B = 0.