第10章（六）
重积分的应用

浙江大学数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

重积分在几何上和物理上的应用

二重积分的应用

(1) **几何上：** 平面图形 D 的**面积** $A(D)=\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

立体**体积** $V=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ [以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体体积]

(2) **物理上：** 平面薄片 D 的**质量** $M=\iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ [D 的面密度为 $\rho(x,y)$]

平面薄片 D 绕某轴 l 旋转的**转动惯量** $\mathrm{I}_l=\iint\limits_D d^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

[其中 $d(x,y)$ 为 (x,y) 到 l 的距离]

平面薄片 D 的**重心（质心）**，若密度 $\rho(x,y)$ 恒为常数时也称为**形心**.

$$x^*=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{M},\quad y^*=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{M}.$$

重积分在几何上和物理上的应用

三重积分的应用

(1) **几何上：** 立体 V 的**体积** $V=\iiint\limits_V 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

(2) **物理上：** 物体 V 的**质量** $M=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$ [V 的密度为 $\rho(x,y,z)$]

物体 V 绕某轴 l 旋转的**转动惯量** $\mathrm{I}_l=\iiint\limits_V d^2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

[其中 $d(x,y,z)$ 为 (x,y,z) 到 l 的距离]

物体 V 的**重心（质心）**，若密度 $\rho(x,y,z)$ 恒为常数时也称为**形心**.

$$x^*=\frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{M},\quad y^*=\frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\quad z^*=\frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

重积分的应用举例

例1 求由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=4-x^2-y^2$ 围成的立体体积.

解 两个曲面的交线为 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$，所以所求体积 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[(4-r^2)-r^2\right]r\mathrm{d}r=4\pi$.

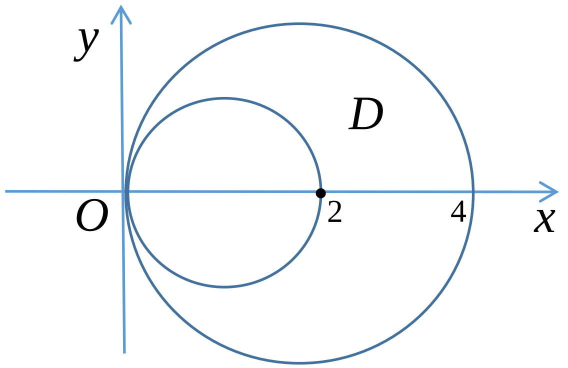
例2 求由 $x^2+y^2=2x$ 外部与 $x^2+y^2=4x$ 内部组成的平面薄片D 的质量以及D 分别绕x 轴和 y 轴的转动惯量. 其中某点密度与该点到原点的距离平方成正比，且在$(1,1)$点密度为2.

解 易知密度函数为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，所以所求质量为

$$M=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}r^2\cdot r\mathrm{d}r=120\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{90}{4}\pi.$$

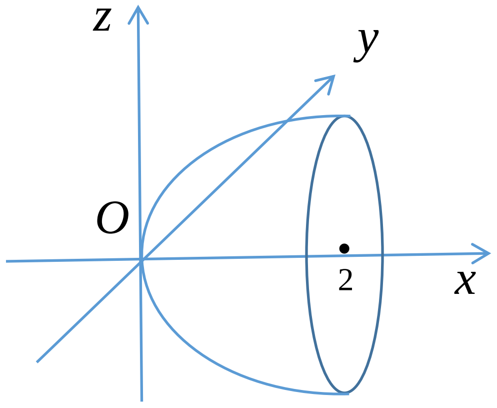
$$I_x=\iint\limits_D y^2\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}r^2\sin^2\theta\cdot r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{105}{4}\pi.$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}r^2\cos^2\theta\cdot r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{735}{4}\pi.$$



重积分的应用举例

例 3 求由曲面 $y^2+2z^2=4x$ 与 $x=2$ 围成的匀质（密度为ρ_0）立体 V 的质心坐标和立体 V 绕 z 轴的转动惯量.



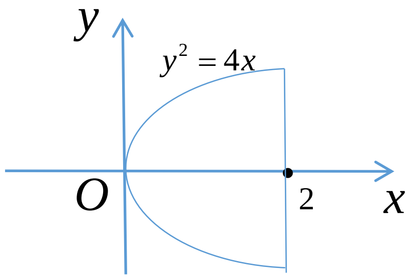
解 V 的图形如图所示,

由对称性知质心坐标(x^*, y^*, z^*)中的 $y^*=z^*=0$.

$$x^*=\frac{\iiint\limits_V x\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V},\quad \text{用x−截面法有 } x^*=\frac{\int_0^2 \pi\sqrt{4x}\cdot\sqrt{2x}\cdot x\,\mathrm{d}x}{\int_0^2 \pi\sqrt{4x}\cdot\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x}=\frac{4}{3},$$

即质心为$\left(\frac{4}{3},0,0\right)$.

$$I_z=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)\rho_0\mathrm{d}V=4\rho_0\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4x-y^2}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z=\frac{40}{3}\pi\rho_0.$$




谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY