电路分析与电子技术基础

正弦分析

（5.1.1 ~ 5.1.8）

n 正弦分析

ü 稳定响应：稳定电路中，在外加的直流或交流信号（也称作激励）作用下，电路中各参量（电压、电流）的变化情况。

ü 在线性时不变电路中，稳态响应与外加激励源的变化规律相同。

ü 求解稳态参数的常规方法：
解根据 KCL、KVL 建立的方程组（相对繁琐）。

ü 本章节方法：相量法

便于分析、简化运算；
是分析和计算稳态电路的常用且便捷的求解方法。

- 正弦分析

  - 正弦信号（5.1.1 ~ 5.1.3）
  - 相量（5.1.4 ~ 5.1.6）
  - 参数分析（5.1.7）
  - 功率计算（5.1.8）
  - 正弦交流电路的计算

v 正弦信号

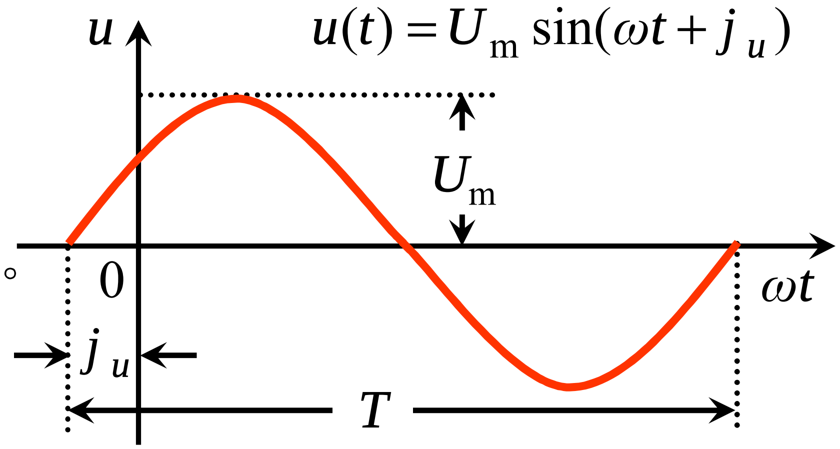
- ü 直流信号：信号大小与时间无关；
  交流信号：信号大小随时间变化。

- ü 正弦（交流）信号：按正弦规律变化的信号。
  （单一频率的信号）

- ü 正弦交流电路：以正弦信号作为激励源。
  （电路中各电参量为同频率的正弦量）

- ü 正弦信号是最基本的周期信号：
  任意周期或非周期信号，都可以表示为某些正弦信号的叠加。

Ø 正弦信号（基本参数）



ü 正弦信号的三要素：

振幅 （幅值）U_m、角频率 ω、初相 j_u 。

ü 周期 T （单位：秒，s）

频率 f （单位：赫兹，Hz）： $f = \frac{1}{T}$

（工频，市电：50Hz）

角频率 ω（单位：弧度/秒，rad/s）：$w = 2p f = \frac{2p}{T}$

初相 j_u（单位：弧度，rad）：取值范围 $-p \sim p$，习惯用度作单位。

相位 $wt + j_u$。

ü 信号的参考方向

只有给定了参考方向，才能明确某时刻信号的实际方向。

Ø 正弦信号（有效值）

ü 有效值：从能量等效的概念出发，衡量周期性交流信号大小的量。

ü 定义：周期为 T 的交流信号 $u_1(\mathrm{t})$ ～直流信号 U_2；

在一个周期 T 内，两个信号在同一个电阻 R 上产生的热量分别为：

$$W_1 = \int_0^T \frac{u_1(t)^2}{R} dt \qquad W_2 = \frac{U_2^2}{R} \cdot T$$

令 $W_1 = W_2$，则：$U_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_1(t)^2 dt}$ （有效值）

ü 有效值（方均根值）：瞬时值平方在一个周期内的平均值的平方根值。

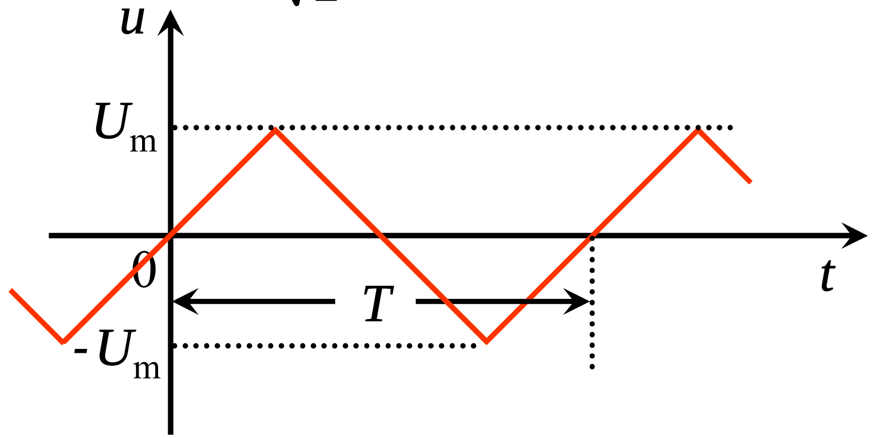
Ø 正弦信号（有效值）

- ü 有效值 / 幅值： $u(t)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+j_u)$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+j_u)]^2dt}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

- ü 三角波

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{U_{\mathrm{m}}}{T/4}t & 0\le t\le T/4\\ -\dfrac{U_{\mathrm{m}}}{T/4}(t-\dfrac{T}{2}) & T/4\le t\le T/2\end{cases}$$



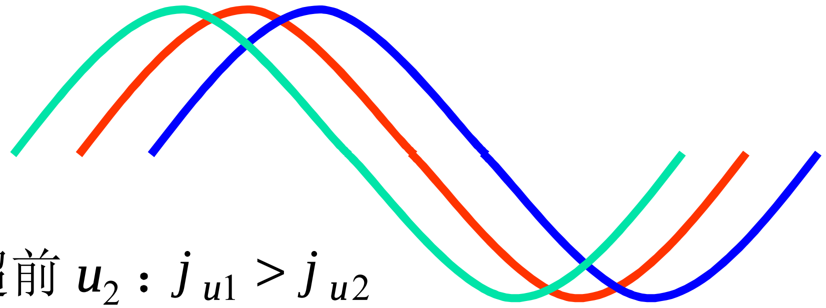
$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2dt}=\sqrt{\frac{2}{T}\{\int_0^{T/4}(\frac{U_{\mathrm{m}}}{T/4}t)^2dt+\int_{T/4}^{T/2}[-\frac{U_{\mathrm{m}}}{T/4}(t-\frac{T}{2})]^2dt\}}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{3}}$$

常用电参量，一般都是指有效值。

Ø 正弦信号（相位差）

ü 相位差：两个正弦量的相位之差，表示两个信号在时间上的先后性。

（针对同频率的两个正弦量，即为初相之差）



$u_1(t) = U_{1\mathrm{m}} \sin(\omega t + j_{u1})$

$u_2(t) = U_{2\mathrm{m}} \sin(\omega t + j_{u2})$

$u_3(t) = U_{3\mathrm{m}} \sin(\omega t + j_{u3})$

u_1 超前 u_2：$j_{u1} > j_{u2}$

u_1 滞后 u_3：$j_{u1} < j_{u3}$

同相（$\Delta j_u = 0$）、反相（$\Delta j_u = p$）、正交（$\Delta j_u = \pm\frac{p}{2}$）

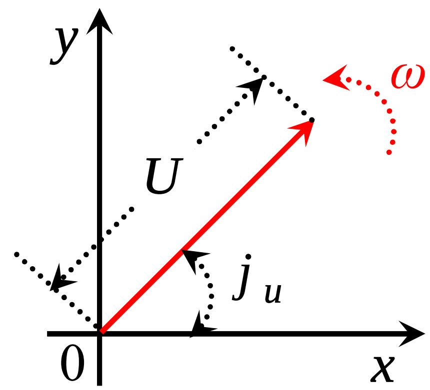
ü 相位差的范围：- π ～ π 。

ü 例：$\begin{cases} u_1(t) = U_{\mathrm{m}1} \sin(\omega t + 135^0) \\ u_2(t) = U_{\mathrm{m}2} \sin(\omega t - 90^0) \end{cases}$，$u_1$ 超前 u_2 225°，实际是滞后 135°。

v 相量

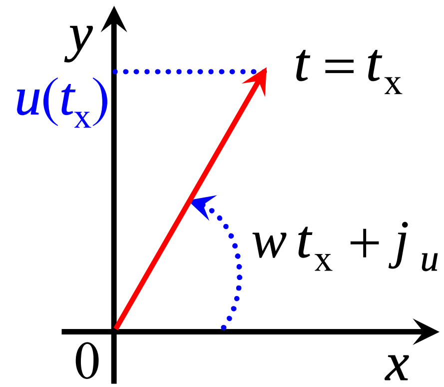
- ü 极坐标 $u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+j_u)\quad t=0$

  线段长度＝有效值（也可以用振幅表示）
  线段与横坐标夹角＝初相角
  逆时针旋转速率＝角频率



- ü $t=t_x$ 时

  线段在纵坐标的投影＝信号值
  线段与横坐标夹角＝相角



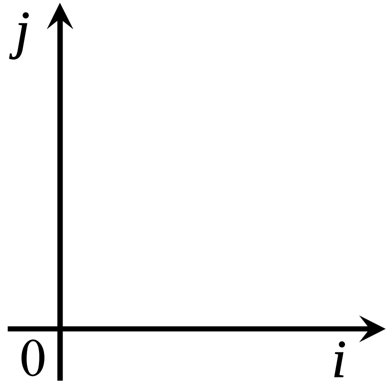
- ü 正弦信号的相量表示：$\dot{U}=U\angle j_u$

$$u(t)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}e^{jwt}]$$

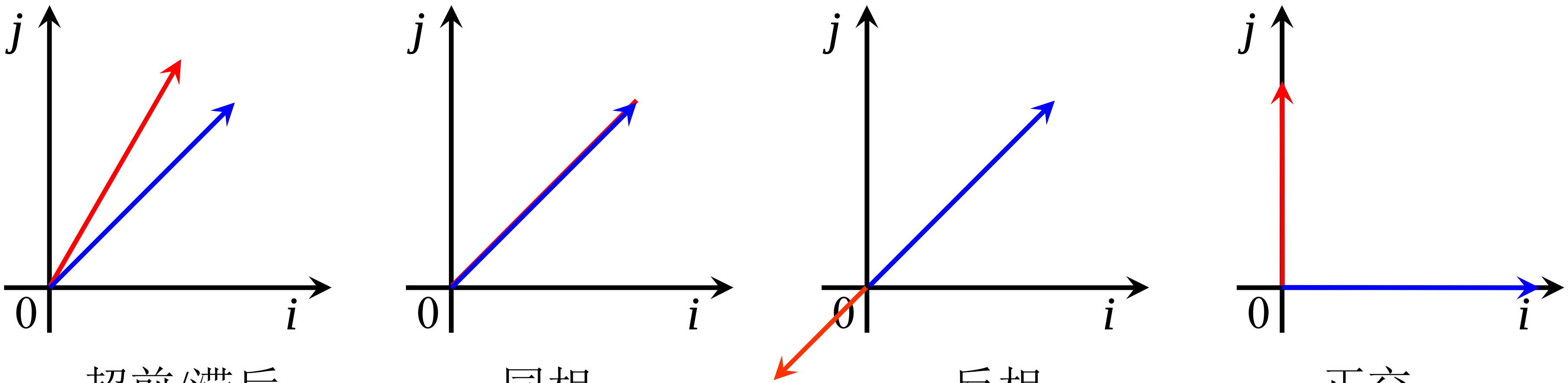
（其中，e^{jwt} 称为旋转因子）

相量（相量图）

- 相量图：在复平面上表示正弦量位置的图。



- 相量图上很容易反映各个相量之间的超前、滞后关系。



超前/滞后　　同相　　反相　　正交

- 相量图中，一般省略实轴和虚轴，只画出各相量间的相对位置；选择其中某一相量（参考相量）作为原实轴。

【例1.1】

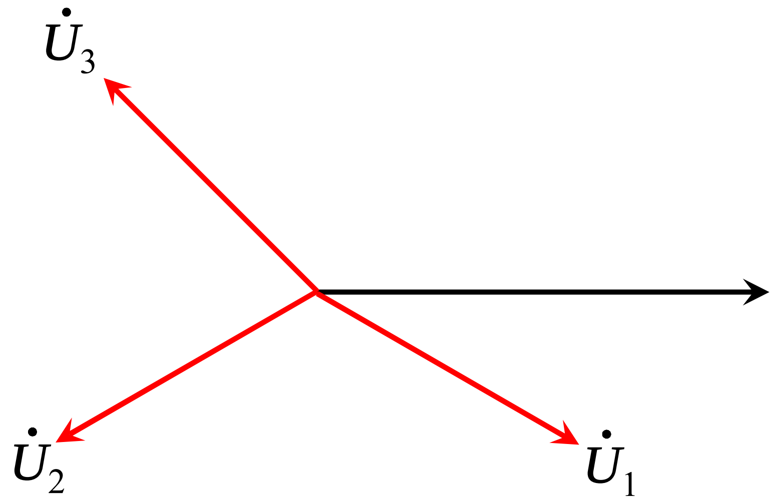
已知三个正弦信号表达式：

$$u_1(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t-30^0)$$

$$u_2(t)=-\sqrt{2}U\sin(\omega t+30^0)$$

$$u_3(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+45^0)$$

求其相量表示式，并在相量图中画出。



解：相量式为：

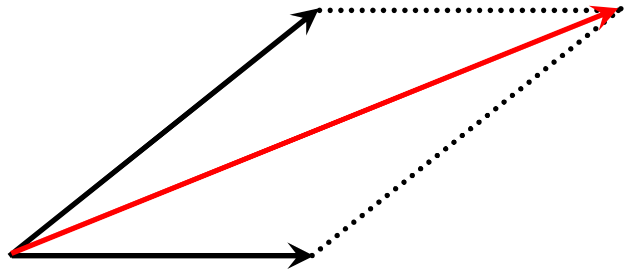
$$\dot{U}_1=U\angle-30^0$$

$$\dot{U}_2=-U\angle30^0=U\angle-150^0$$

$$u_3(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+45^0)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+135^0)$$

$$\dot{U}_3=U\angle135^0$$

相量图（如右上所示）



Ø 相量（计算）

ü 相量图中，同频率正弦信号量的叠加。

$$u_1(t)=\sqrt{2}U_1\sin(\omega t+\varphi_1) \qquad u_2(t)=\sqrt{2}U_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

$$\begin{aligned}u_1(t)+u_2(t)&=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_1e^{j\omega t}]+\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_2e^{j\omega t}]\\&=\mathrm{Im}[\sqrt{2}(\dot{U}_1+\dot{U}_2)e^{j\omega t}]\\&=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}]\\&=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)\end{aligned}$$

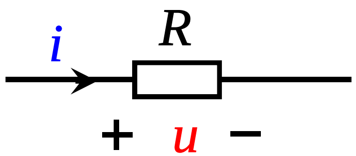
ü 其中：$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=U\angle\varphi_u$

ü 例：$10\angle 30^0+5\angle -45^0=8.66+j5+3.54-j3.54=12.2+j1.46=12.3\angle 6.8^0$

仅适用于同频率信号。

相量模型（电阻）

- 右图所示电阻，及其电压电流（关联）参考方向。



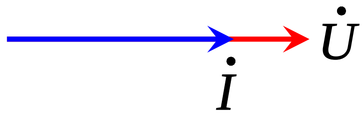
- 瞬时值：$u = i \cdot R$

  例：设 $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$，则：$u = R \cdot \sqrt{2} I \sin \omega t = \sqrt{2} U \sin \omega t$

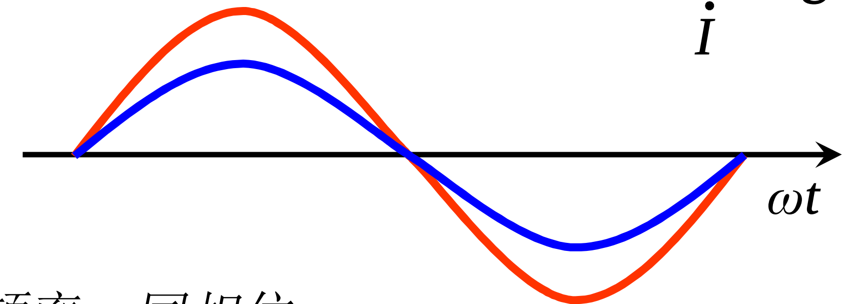
- 有效值：$U = I \cdot R$

  相量：$\dot{U} = \dot{I} \cdot R$，$U \angle j = I \angle j \cdot R$

  相量图（右）：



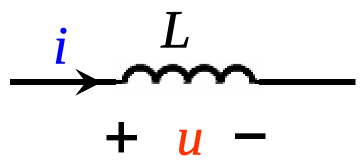
  波形图（右）：



电阻的电压电流信号：同频率、同相位。

Ø 相量模型（电感）

ü 右图所示电感，及其电压电流（关联）参考方向。

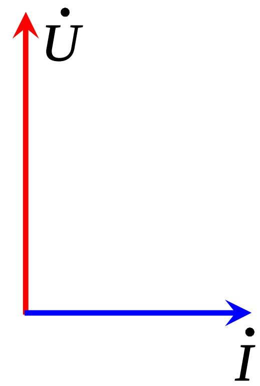


ü 瞬时值：$u = L\cdot\dfrac{di}{dt}$

例：设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$，则：$u = L\cdot\dfrac{d(\sqrt{2}I\sin\omega t)}{dt} = \omega L\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t+90^{0})$

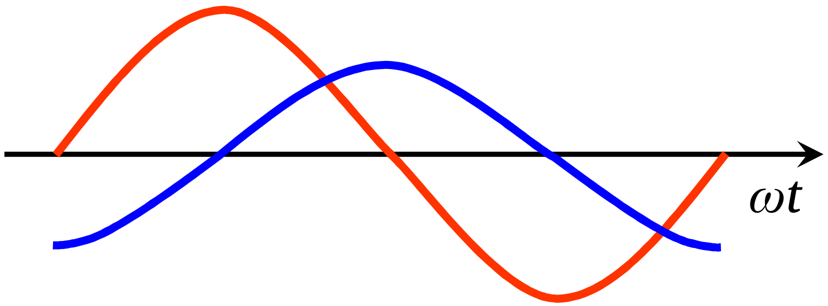
ü 有效值：$U = wL\cdot I$

相量：$\dot{U} = jwL\cdot\dot{I}$，$U\angle j = wL\cdot I\angle(j+90^{0})$



相量图（右）：

波形图（右）：

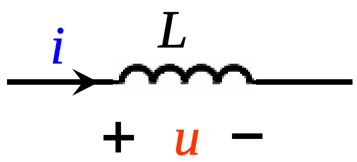


<u>电感的电压电流信号：同频率、电压超前电流 90^{o}。</u>

【例1.2】

右图所示电路，$L=0.127\text{H}$，$i=\sqrt{2}\times 0.01\sin(\omega t+30^{\circ})\text{A}$

求：当 f 分别等于 50、5000Hz 时的 u 。



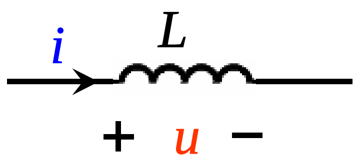
解：$u=\omega L\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t+120^{\circ})$

$$当\ f=50\text{Hz}\ 时，u=2p\times 50\times 0.127\times\sqrt{2}\times 0.01\sin(2p\times 50t+120^{\circ})$$
$$=0.4\sqrt{2}\sin(314t+120^{\circ})\text{V}$$

$$当\ f=5000\text{Hz}\ 时，u=2p\times 5000\times 0.127\times\sqrt{2}\times 0.01\sin(2p\times 5000t+120^{\circ})$$
$$=40\sqrt{2}\sin(31400t+120^{\circ})\text{V}$$

Ø 相量模型（电感）

$$U = wL \cdot I$$



ü 感抗（电感电抗）：$X_{\mathrm{L}} = wL = 2p\,f\,L$

代表电感电压与电流的有效值（或幅值）之比。

ü 感抗单位：欧姆（Ω）。

ü 感抗与频率成正比：直流电路中，感抗为零（电感相当于短路）。

ü 感纳（电感电纳，感抗的倒数）：$B_{\mathrm{L}} = \dfrac{1}{X_{\mathrm{L}}} = \dfrac{1}{wL} = \dfrac{1}{2p\,f\,L}$

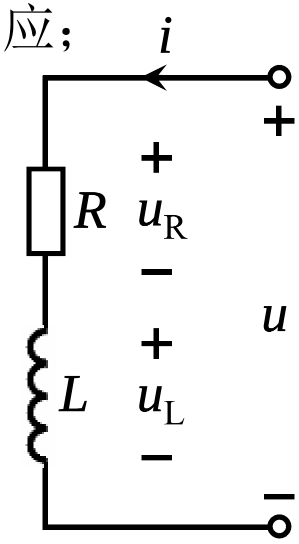
单位：西门子（S）。

Ø 相量模型（电感）

ü 实际电感：一般不可忽略其电阻。

（1）要考虑：线圈建立的磁场效应、发热消耗的电能效应；

（2）用 *R*-*L* 串联电路来等效。

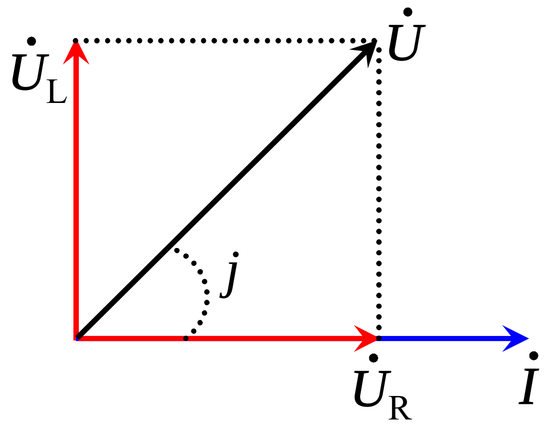


$$u = u_R + u_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R \cdot \dot{I} + j\omega L \cdot \dot{I} = (R + j\omega L) \cdot \dot{I}$$

ü 复数阻抗：$Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L$

（实部是电阻，虚部是感抗）

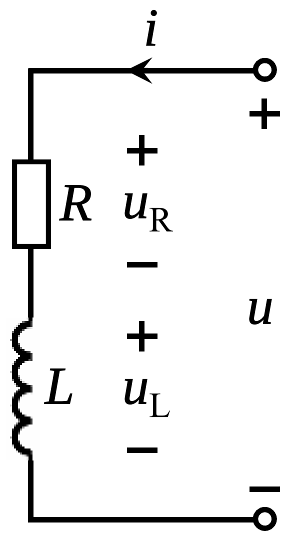


ü 相量图（以电流为参考相量，如右图所示）

$$\varphi = arctg \frac{\omega L}{R}$$

【例1.3】

实际电感（等效电路如右下图所示），其中 $R=30\Omega$，$L=40\text{mH}$。
已知：u 是有效值为 10V 的正弦波（初相为零），$\omega=1000\text{rad/s}$。
求：（1）电流 i；（2）当 $u=10\sqrt{2}\text{V}$ 时，求此时的电流 i。



解：（1） $Z=R+jwL=30+j40=50\angle 53.1^0\,\Omega$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{10\angle 0^0}{50\angle 53.1^0}=0.2\angle -53.1^0\,\text{A}$$

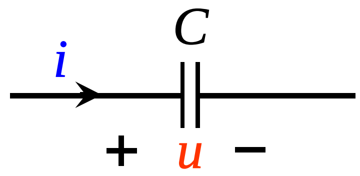
$$i=0.2\sqrt{2}\sin(\omega t-53.1^0)\text{A}$$

（2）当 $u=10\sqrt{2}\text{V}$ 时，说明此时的 $w\,t=\frac{p}{2}$

所以：$i=0.2\sqrt{2}\sin(90^0-53.1^0)=0.17\text{A}$

Ø 相量模型（电容）

ü 右图所示电容，及其电压电流（关联）参考方向。



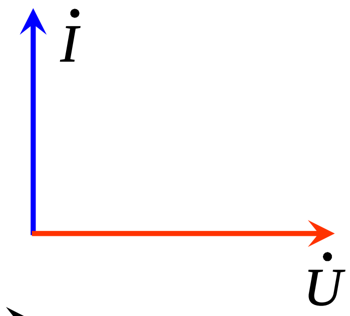
ü 瞬时值：$i = C \cdot \frac{du}{dt}$

例：设 $u = \sqrt{2}U\sin\omega t$，则：$i = C \cdot \frac{d(\sqrt{2}U\sin\omega t)}{dt} = \omega C \cdot \sqrt{2}U\sin(\omega t + 90^{0})$

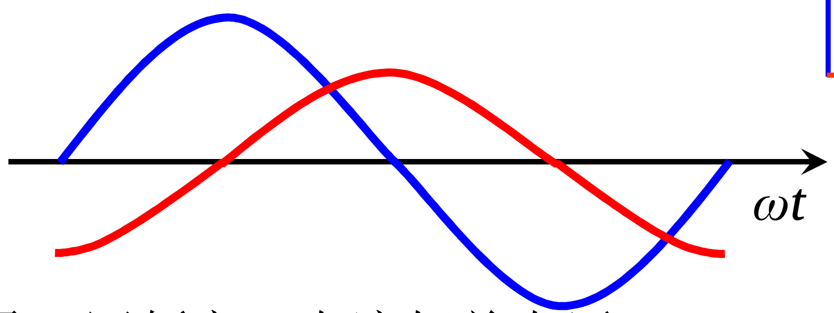
ü 有效值：$I = w C \cdot U$

相量：$\dot{I} = j w C \cdot \dot{U}$，$I\angle j = w C \cdot U\angle(j + 90^{0})$

相量图（右）：



波形图（右）：

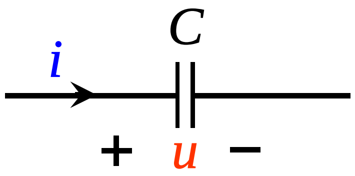


电容的电压电流信号：同频率、电流超前电压 90^{o}。

【例1.4】

右图所示电路，$C = 4.75\ \mu\text{F}$，$u = 10\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$

求：当 f 分别等于 50、5000Hz 时的 i 。



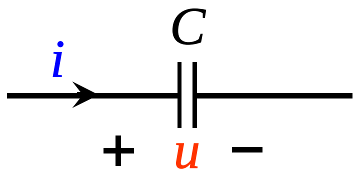
解：$i = \omega C \cdot \sqrt{2}U\sin(\omega t + 90^{0})$

$$\text{当 } f = 50\text{Hz 时}, i = 2p \times 50 \times 4.75 \times 10^{-6} \times 10\sqrt{2}\sin(2p \times 50t + 90^{0})$$
$$= 0.015\sqrt{2}\sin(314t + 90^{0})\text{A}$$

$$\text{当 } f = 5000\text{Hz 时}, i = 2p \times 5000 \times 4.75 \times 10^{-6} \times 10\sqrt{2}\sin(2p \times 5000t + 90^{0})$$
$$= 1.5\sqrt{2}\sin(31400t + 90^{0})\text{A}$$

相量模型（电容）

$$I = \omega C \cdot U$$



- 容抗（电容电抗）：$X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f C}$

  代表电容电压与电流的有效值（或幅值）之比。

- 容抗单位：欧姆（Ω）。

- 容抗与频率成反比：直流电路中，容抗为无穷大（电容相当于断路）。

- 容纳（电容电纳，容抗的倒数）：$B_C = \dfrac{1}{X_C} = \omega C = 2\pi f C$

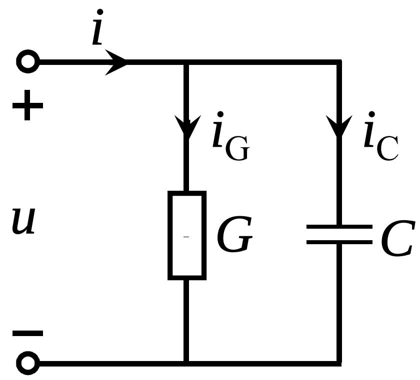
  单位：西门子（S）。

相量模型（电容）

- 实际电容：一般不可忽略其电阻。

  （1）要考虑：储存电能、漏电流；

  （2）用 G-C 并联电路来等效。



$$i = i_G + i_C = G \cdot u + C \cdot \frac{du}{dt}$$

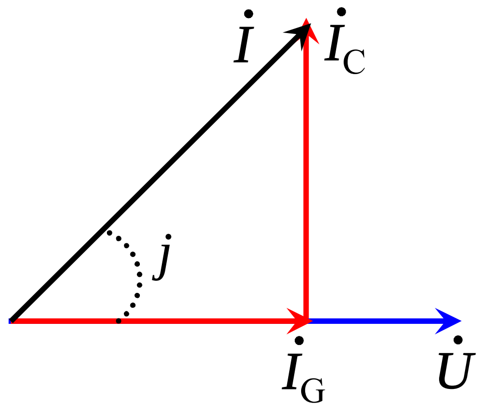
$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C = G \cdot \dot{U} + j\omega C \cdot \dot{U} = (G + jB_C) \cdot \dot{U}$$

- 复数导纳：$Y = \dfrac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + jB_C$

  （实部是电导，虚部是容纳）

- 相量图（以电压为参考相量，如右图所示）

$$\varphi = arctg\frac{B_C}{G}$$

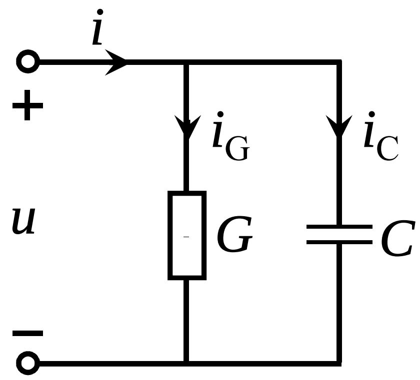


【例1.5】

实际电容（等效电路如右下图所示）。

已知：$G=0.00312\text{S}$，u 是有效值为 10V 的正弦波，$\omega=314\text{rad/s}$，测得电流有效值为 0.1A 。

求：（1）电容 C；（2）以电压为参考相量，写出电流 i 的时间函数。



解：（1）根据
$$\begin{cases} Y=G+jwC \\ |Y|=\left|\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}\right|=\dfrac{0.1}{10}=0.01 \end{cases}$$

得：$0.01^2=0.00312^2+(wC)^2$

所以：$C=30.3\mu\text{F}$

（2）$Y=G+jwC=0.01\angle 71.8^0$

$i=0.1\sqrt{2}\sin(314t+71.8^0)\text{A}$

相量（基尔霍夫定律）

- KVL：$\sum U = 0$ 。

- 针对一个具有 n 条支路（或 n 个元件）的闭合回路，KVL 可以写成：

$$\sum_{k=1}^{n} u_{\mathrm{k}}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2} U_{\mathrm{k}} \sin(\omega t + \varphi_{k}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_{\mathrm{k}}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}[\sqrt{2} \dot{U}_{\mathrm{k}} e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{\mathrm{k}} \right) e^{j\omega t}] = 0$$

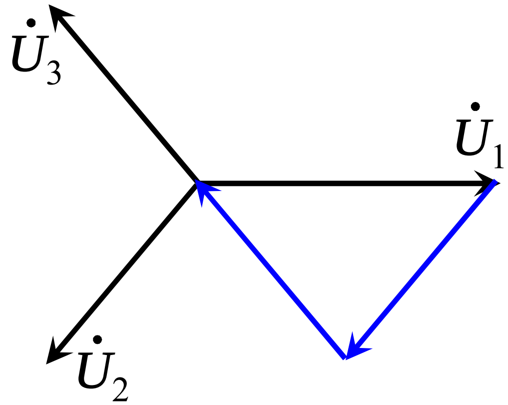
$$\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{\mathrm{k}} = \dot{U}_{1} + \dot{U}_{2} + \cdots + \dot{U}_{\mathrm{n}} = 0$$

- 基尔霍夫电压定律的相量形式：在正弦交流电路中，沿任一闭合回路绕行一周，各部分电压相量的代数和恒为零。

Ø 相量（基尔霍夫定律）

ü 基尔霍夫电压定律的相量形式：在正弦交流电路中，沿任一闭合回路绕行一周，各部分电压相量的代数和恒为零。

在相量图上，任一闭合回路中各部分电压相量构成一闭合多边形。



ü KCL 的相量形式：流入（流出）正弦交流电路中任一节点的各支路电流相量的代数和恒为零。

$$\sum_{k=1}^{n} i_{\mathrm{k}}(t)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2}I_{\mathrm{k}}\sin(\omega t+\varphi_k)=0$$

$$\sum_{k=1}^{n} i_{\mathrm{k}}(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_{\mathrm{k}}e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{\mathrm{k}}\right)e^{j\omega t}]=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{\mathrm{k}}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\cdots+\dot{I}_{\mathrm{n}}=0$$

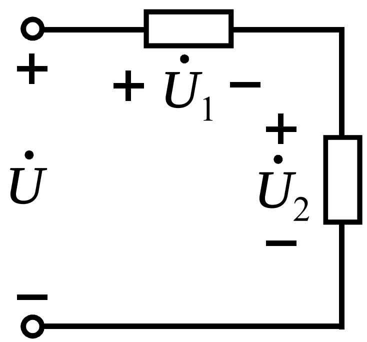
ü 在相量图上，任一节点处各支路电流相量构成一闭合多边形。

【例1.6】

右图所示正弦交流电路。

已知：$\dot{U}=220\angle 0^{\circ}\text{V}$，$\dot{U}_1=100\angle 60^{\circ}\text{V}$ 。

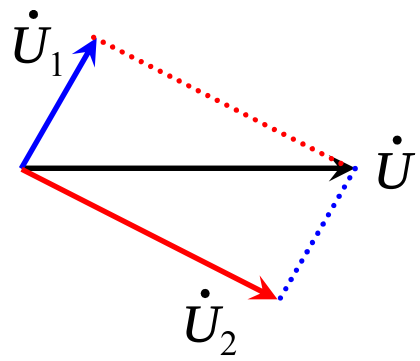
求：$\dot{U}_2$



解：根据 KVL，有：

$$\dot{U}_2=\dot{U}-\dot{U}_1=220\angle 0^{\circ}-100\angle 60^{\circ}=191\angle -27^{\circ}$$

相量图如右所示。

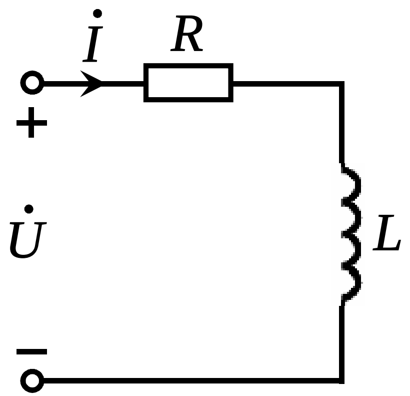


【例1.7】

右图所示正弦交流电路。

已知：$R = \omega L = 100\Omega$，电流的有效值为 1A 。

求：$\dot{U}$

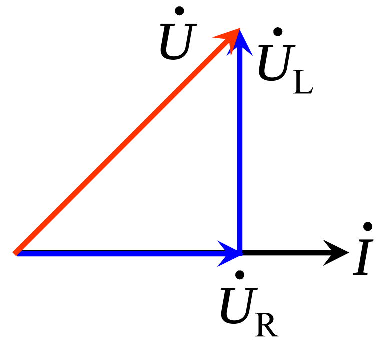


解：定义 $\dot{I} = 1\angle 0^{0}$

则：$\dot{U}_{R} = 100\angle 0^{0}$，$\dot{U}_{L} = 100\angle 90^{0}$

所以：$\dot{U} = \dot{U}_{R} + \dot{U}_{L} = 100\sqrt{2}\angle 45^{0}$

相量图如右所示。



在交流电路中，有效值不满足 KVL（KCL）；

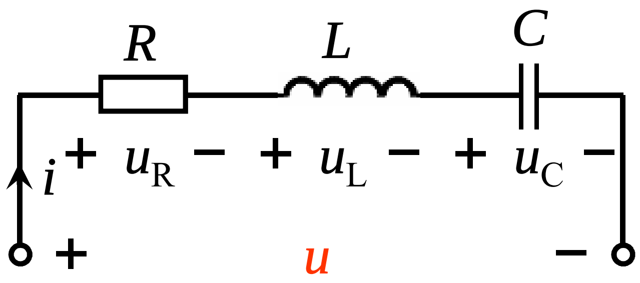
本题中：U、U_R 和 U_L 的有效值分别等于144，100和100；

所以，分析交流电路应按相量关系的 KVL（KCL）。

【例1.8】

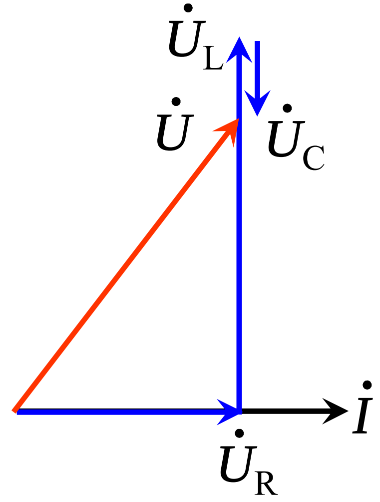
分析下图所示正弦交流电路（电流 i 及各元件参数已知）。

已知：u_R 、u_L 和 u_C 的有效值分别为 6 、10 和 2V 。



解：按相量关系分析

（以电流为参考相量，如右图所示）。

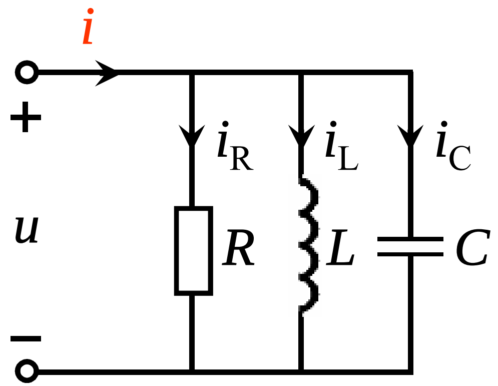


注：图中各相量长度正比于有效值。

【例1.9】

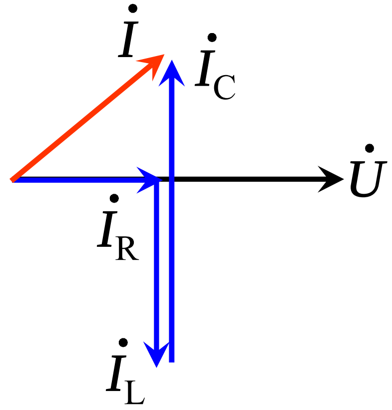
分析下图所示正弦交流电路（电压 u 及各元件参数已知）。

已知：i_R、i_L 和 i_C 的有效值分别为 4 、5 和 8A 。



解：按相量关系分析

（以电压为参考相量，如右图所示）。



注：图中各相量长度正比于有效值。

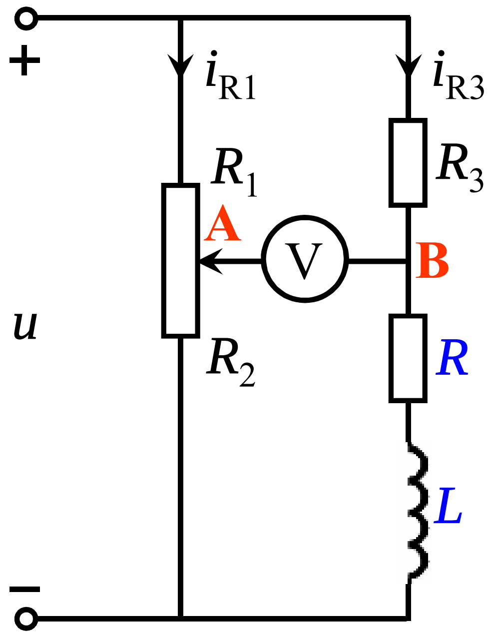
【例1.10】

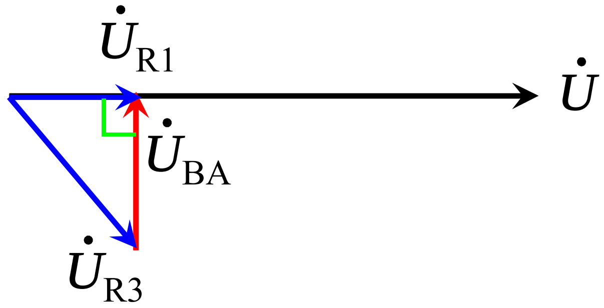
右图所示正弦交流电路。

外加正弦电压有效值 100V，频率 50Hz；
电压表 A 端可在滑动电阻上移动；

当 $R_1=5\Omega$，$R_2=15\Omega$，$R_3=65\Omega$ 时，
测得电压表 U_{BA} 的最小读数值为30V。

求：电阻 R 与电感 L 的值。





解：以外加电压为参考相量 $\dot{U}=100\angle 0^0$

根据电阻分压关系，有：$\dot{U}_{R1}=25\angle 0^0$

当电压表 A 端在滑动电阻上移动时：

（1）B 端的电压（数值、相位）是不变的；

（2）根据 KVL，相量 U_{R3}、U_{BA} 与 U_{R1} 组成一闭合多边形；

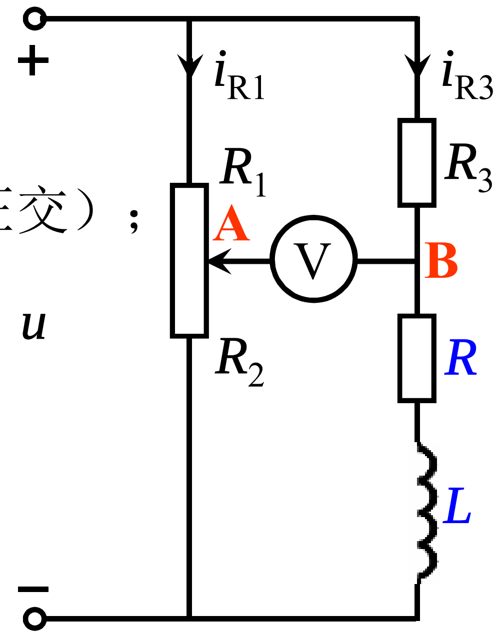
因此，只有相量 U_{BA} 与 U_{R1} 正交时，才能获得 U_{BA} 的最小读数（上图）。

即：$\dot{U}_{BA}=30\angle 90^0$

所以：$\dot{U}_{R3}=\dot{U}_{R1}-\dot{U}_{BA}=25\angle 0^0-30\angle 90^0=39\angle -50^0$

$$\dot{I}_{R3} = \frac{\dot{U}_{R3}}{R_3} = 0.6\angle -50^0$$

由此，可获得相量 U_R（与 I_{R3} 同相）、U_L（与 U_R 正交）；且，相量 U_R、U_L、U_{BA} 与 U_{R2} 组成一闭合多边形。



（1）根据相量图，有：$\dfrac{U_R + U_{R3}}{U} = \dfrac{U_{R1}}{U_{R3}}$

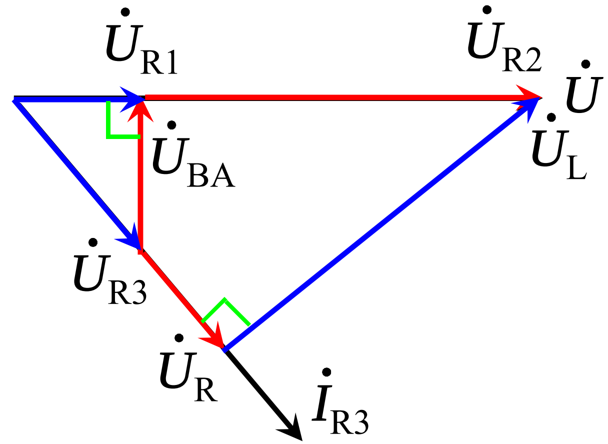
得：$U_R = U \times \dfrac{U_{R1}}{U_{R3}} - U_{R3} = 25.1\text{V}$

$$R = \frac{U_R}{I_{R3}} = 41.8\Omega$$

（2）根据相量图，有：$\dfrac{U_L}{U} = \dfrac{U_{BA}}{U_{R3}}$

得：$U_L = U \times \dfrac{U_{BA}}{U_{R3}} = 76.9\text{V}$

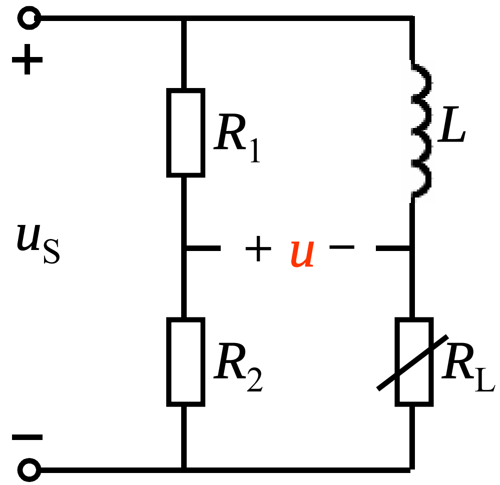
$$L = \frac{U_L}{wI_{R3}} = 0.408\text{H}$$



此电路可用来测量线圈电感和电阻。

$$\dot{U}_{R3} = \dot{U}_{R1} - \dot{U}_{BA} = 25\angle 0^0 - 30\angle 90^0 = 39\angle -50^0$$

【例1.11】



右图所示正弦交流电路。

要求：当负载 R_L 变化时（以电压源 u_S 为参考）电压 u 的幅值不变，相位变化范围为 $0 \sim 180^o$ 。

解：以电压源 u_S 为参考，可获得相量 U_{R1} 、U_{R2} 。

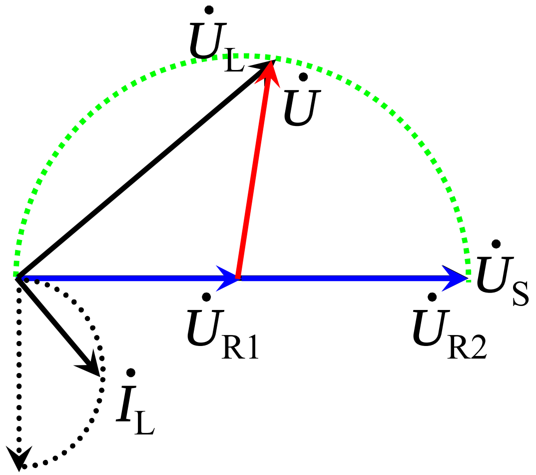
（1）任意定义 R_L 的数值，可获得相量 I_L 、U_L 。

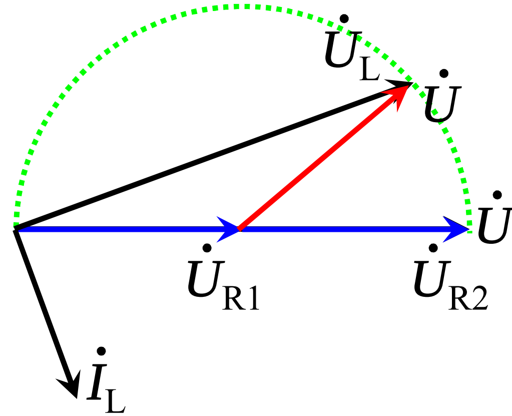
根据 KVL（$\dot{U}_{R1}+\dot{U}=\dot{U}_L$），可获得相量 U 。

（2）若改变 R_L 的数值，按前述分析过程，可再次获得相量 U 。

（3）当 R_L 从零变至无穷，相量 I_L 的变化如图（左下黑虚线，半圆）。

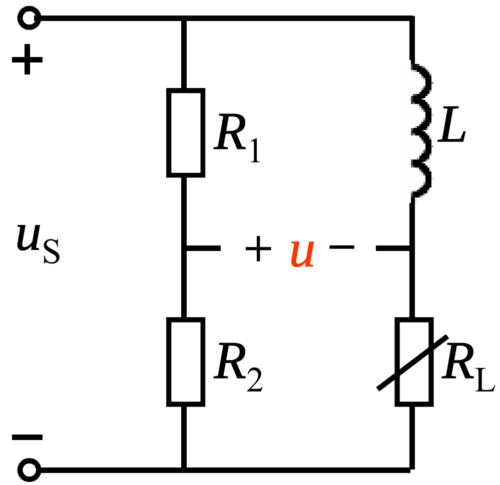
因此，根据题意对 u 幅值/相位要求，u 的变化范围应为半圆（如图绿线）。

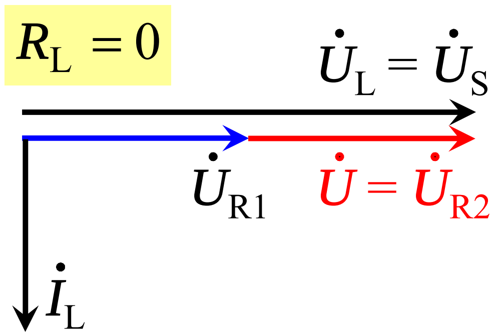


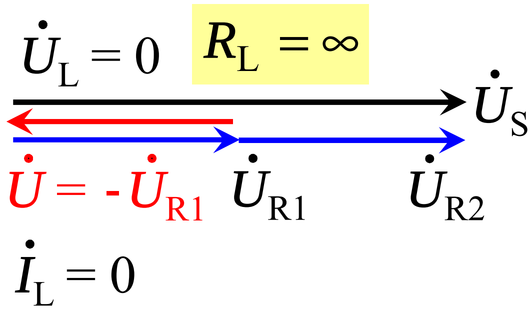


右图所示正弦交流电路。

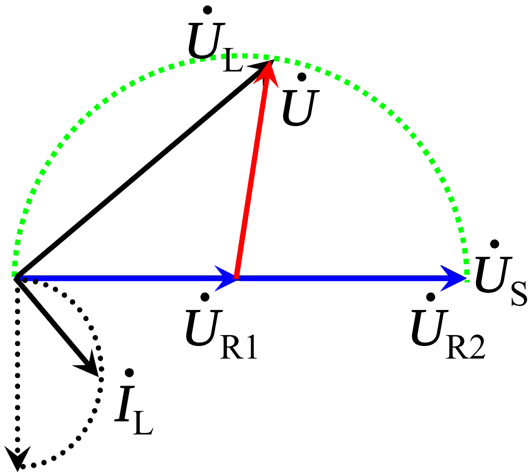
要求：当负载 R_L 变化时（以电压源 u_S 为参考）电压 u 的幅值不变，相位变化范围为 $0 \sim 180^\circ$。

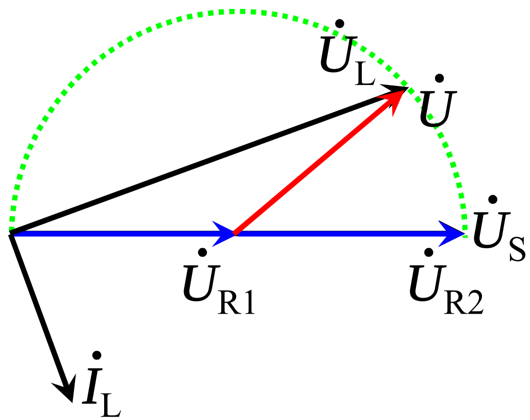






因此，根据题意对 u 幅值/相位要求，u 的变化范围应为半圆（如图绿线）。





- 参数分析
  - 阻抗和导纳
  - 等效转换

Ø （器件）阻抗

- 阻抗：（线性二端）器件的端电压相量与流过它的电流相量比值。

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I}\angle(\varphi_{u} - \varphi_{i}) = |Z|\angle\varphi$$

  其中，阻抗的模（相量有效值之比）$|Z|$，阻抗角（相量相位差）φ 。

- 阻抗是复数（非相量），其量纲为Ω。

- 常见器件的阻抗形式：

  电阻：$Z_{R} = R$

  电感：$Z_{L} = j\omega L = jX_{L}$

  电容：$Z_{C} = \dfrac{1}{j\omega C} = -jX_{C}$

  X_{L} 和 X_{C} 分别称为感抗和容抗，统称电抗。

Ø （无源一端口网络）阻抗

ü 设端口电压与端口电流为关联方向，则在正弦激励下，两者频率相同：

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(wt+j_{\mathrm{u}})\quad i(t)=\sqrt{2}I\sin(wt+j_{\mathrm{i}})$$

所以，等效阻抗为：$Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{U}{I}\angle(j_{\mathrm{u}}-j_{\mathrm{i}})=|Z|\angle j$

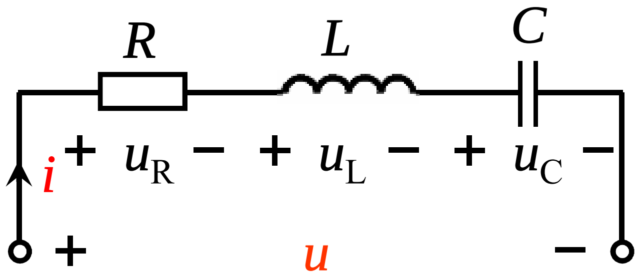
ü 等效阻抗与频率有关（非纯电阻情况下）。

ü 阻抗串联和并联的计算方法，在表述形式上与电阻串联和并联的计算方法相似（只是各变量采用相量形式）。

ü KCL、KVL 及欧姆定律，在表述形式上也是相似的。（只是各变量采用相量或复数形式）：

$$\dot{U}=Z\dot{I}\quad \sum\dot{I}=0\quad \sum\dot{U}=0$$

阻抗计算



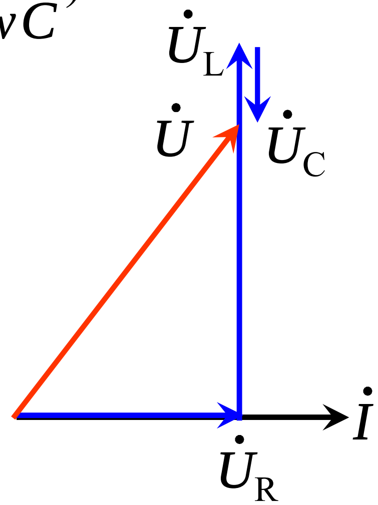
- 串联电路例： $\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C$

$$=R\dot{I}+j\omega L\dot{I}+\frac{1}{j\omega C}\dot{I}=R\dot{I}+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})\dot{I}$$

$$=R\dot{I}+j(X_L-X_C)\dot{I}=(R+jX)\dot{I}$$

- 所以，等效阻抗为： $Z=R+jX$

- 相量关系：



- $R\geq 0$，阻抗角 φ 在第一、四象限；

若 $X>0$：$\varphi>0$（第一象限），$\varphi_u>\varphi_i$（相量 U 超前相量 I），感性负载；

若 $X<0$：$\varphi<0$（第四象限），$\varphi_u<\varphi_i$（相量 U 滞后相量 I），容性负载；

若 $X=0$：$\varphi=0$（ 横坐标 ），$\varphi_u=\varphi_i$（相量 U 同相相量 I），阻性负载。

Ø （器件）导纳

ü 导纳：阻抗的倒数，用于分析端口电流相量与端口电压相量的关系。

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{I}{U}\angle-(\varphi_{\mathrm{u}}-\varphi_{\mathrm{i}})=|Y|\angle-\varphi$$

其中，导纳的模（相量有效值之比）$|Y|$，导纳角（相量相位差）φ。

ü 导纳是复数（非相量），其量纲为 S（西门子）。

ü 常见器件的导纳形式：

电阻：$Y_{\mathrm{R}}=\frac{1}{R}=G$

电感：$Y_{\mathrm{L}}=\frac{1}{j\omega L}=-j\frac{1}{X_{\mathrm{L}}}=-jB_{\mathrm{L}}$

电容：$Y_{\mathrm{C}}=j\omega C=j\frac{1}{X_{\mathrm{C}}}=jB_{\mathrm{C}}$

G 称为电导，B_{L} 和 B_{C} 分别称为感纳和容纳，统称电纳。

Ø （无源一端口网络）导纳

ü 设端口电压与端口电流为关联方向，则在正弦激励下，两者频率相同：

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_{u})\quad i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_{i})$$

所以，等效阻抗为：$Y=\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}=\dfrac{I}{U}\angle-(\varphi_{u}-\varphi_{i})=|Y|\angle-\varphi$

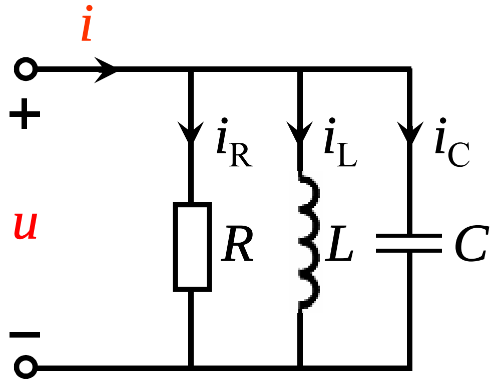
ü 等效导纳与频率有关（非纯电阻情况下）。

ü 导纳串联和并联的计算方法，在表述形式上与电导串联和并联的计算方法相似（只是各变量采用相量形式）。

ü KCL、KVL 及欧姆定律，在表述形式上也是相似的。（只是各变量采用相量或复数形式）：

$$\dot{I}=Y\dot{U}\quad \sum\dot{I}=0\quad \sum\dot{U}=0$$

Ø 导纳计算



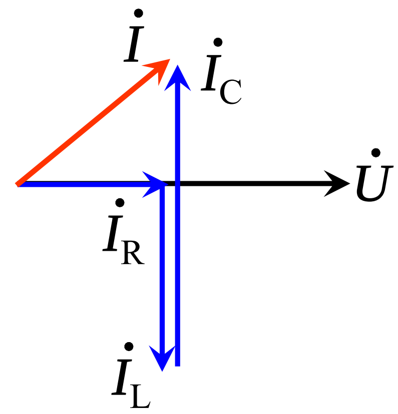
ü 并联电路例：$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$

$$= \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{j\omega L} + j\omega C\dot{U} = G\dot{U} - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C)\dot{U}$$

$$= G\dot{U} - j(B_L - B_C)\dot{U} = (G - jB)\dot{U}$$

ü 所以，等效导纳为：$Y = G - jB$

ü 相量关系：



ü $G \geq 0$，导纳角 φ 在第一、四象限；

若 $B > 0$：$\varphi > 0$（第一象限），$\varphi_u > \varphi_i$（相量 U 超前相量 I），感性负载；

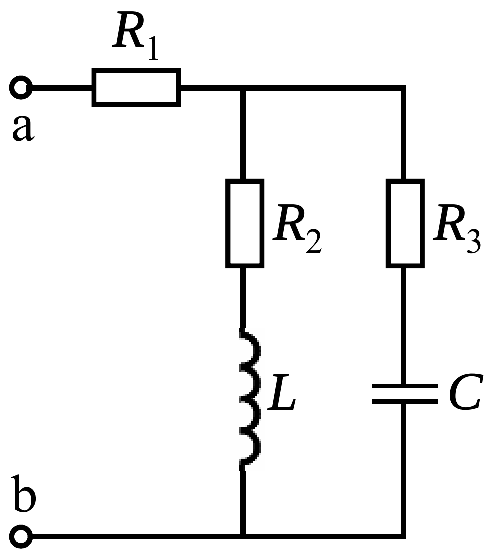
若 $B < 0$：$\varphi < 0$（第四象限），$\varphi_u < \varphi_i$（相量 U 滞后相量 I），容性负载；

若 $B = 0$：$\varphi = 0$（ 横坐标 ），$\varphi_u = \varphi_i$（相量 U 同相相量 I），阻性负载。

【例1.12】

右图所示电路。

求：等效阻抗 Z_{ab} 。

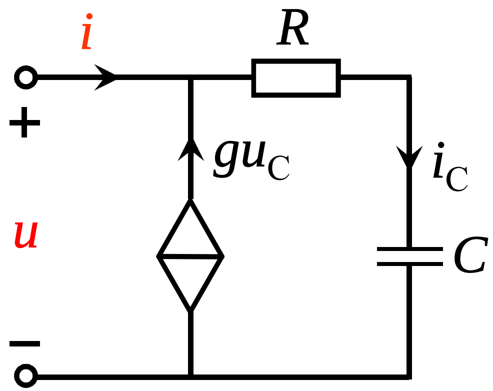


解：$Z_{ab} = R_1 + (R_2 + jw\,L)//(R_3 + \dfrac{1}{jw\,C})$

【例1.13】

右图所示电路。

求：等效阻抗 Z 。



解：由图得：$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_C=\dot{I}_C(R+\frac{1}{jwC})$

$$\dot{I}=\dot{I}_C-g\dot{U}_C=\dot{I}_C-g\frac{1}{jwC}\dot{I}_C=[1-\frac{g}{jwC}]\dot{I}_C$$

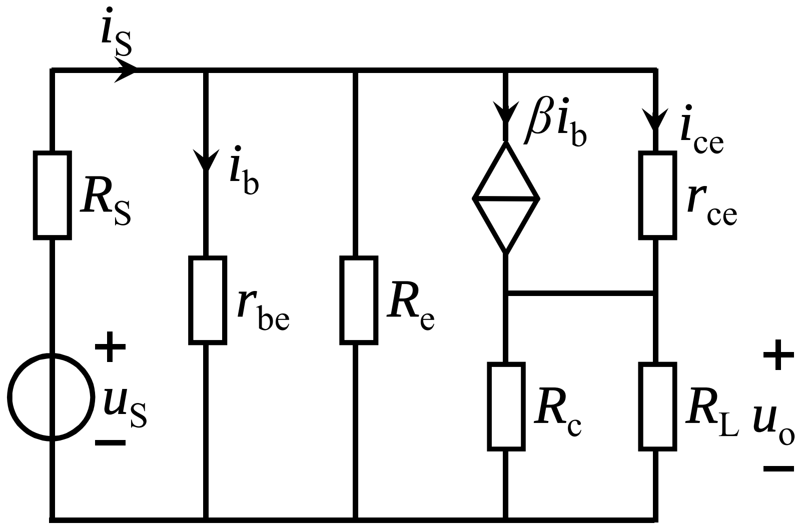
所以，等效阻抗为：

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{R+\frac{1}{jwC}}{1-\frac{g}{jwC}}$$

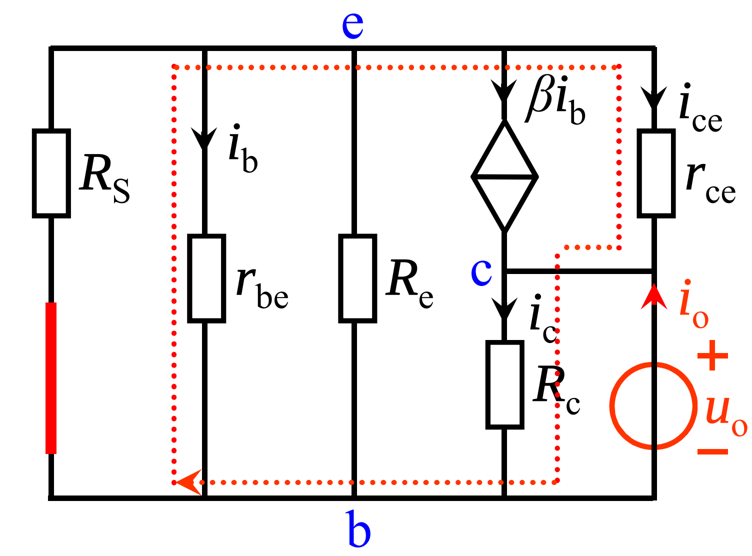
【例1.14】

右图所示电路。

求：等效阻抗 R_o（除 R_L 外）。



解：调整电路为右下所示。



针对 e 点，KCL 方程为：

$$\frac{\dot{I}_b r_{be}}{R_S} + \dot{I}_b + \frac{\dot{I}_b r_{be}}{R_e} + b\,\dot{I}_b + \dot{I}_{ce} = 0$$

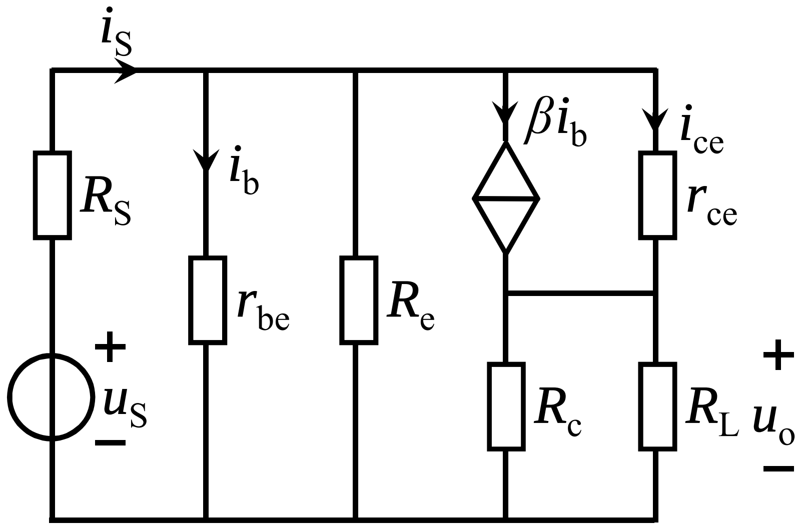
针对回路，KVL 方程为：

$$-\dot{I}_b r_{be} + \dot{I}_{ce} r_{ce} + \dot{I}_c R_c = 0$$

由此，可求得相量 i_{ce} 和 i_c 分别关于相量 i_b 的正比例函数。

右图所示电路。

求：等效阻抗 R_o（除 R_L 外）。

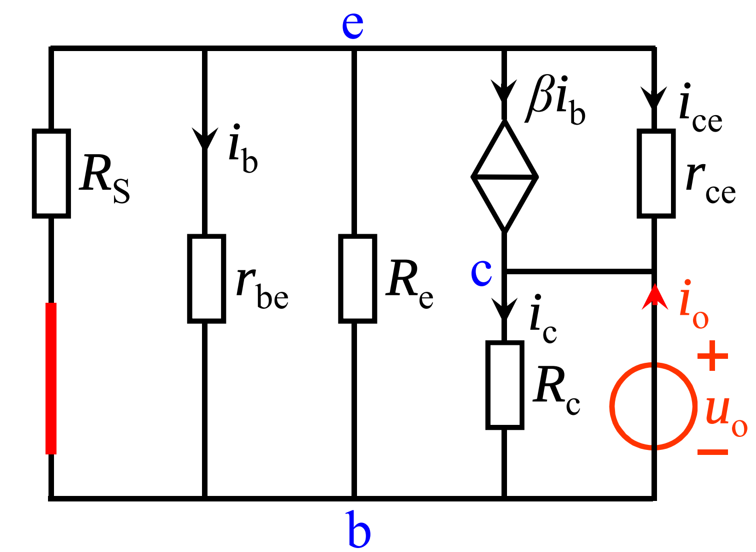


由电路，得：

$$\begin{cases} \dot{I}_o = \dot{I}_c - \beta \dot{I}_b - \dot{I}_{ce} \\ \dot{U}_o = \dot{I}_c R_c \end{cases}$$

均是关于相量 i_b 的正比例函数，所以：

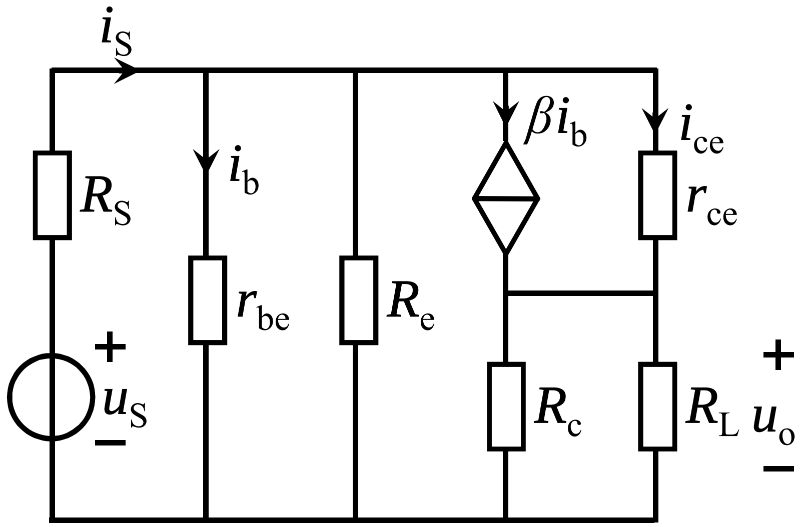
$$R_o = \frac{\dot{U}_o}{\dot{I}_o} = \cdots$$

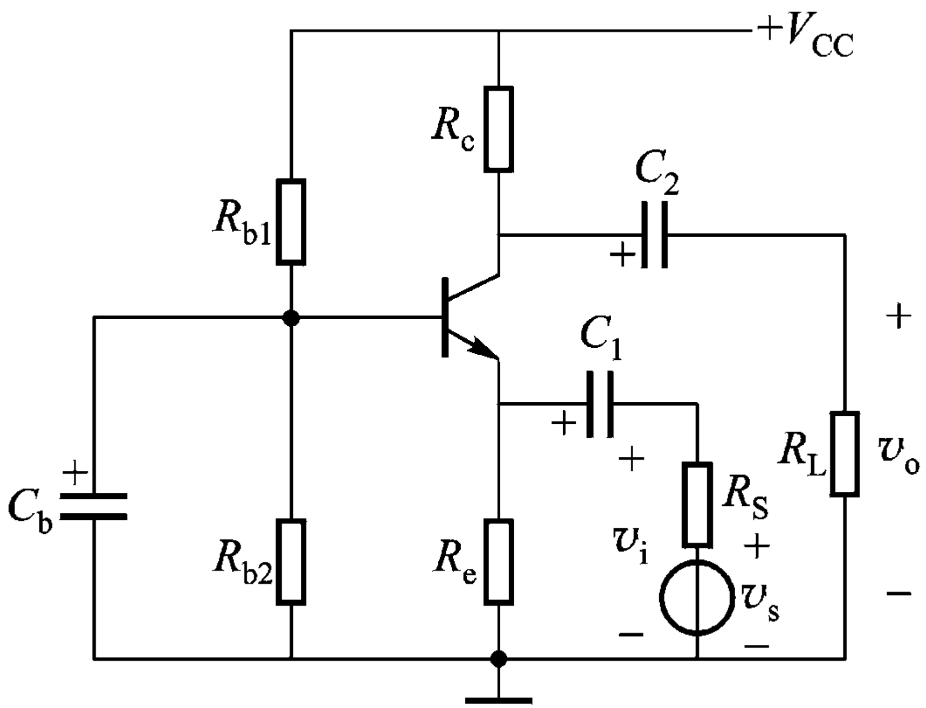


由此，可求得相量 i_{ce} 和 i_c 分别关于相量 i_b 的正比例函数。

右图所示电路。

求：输出电阻 R_o 。





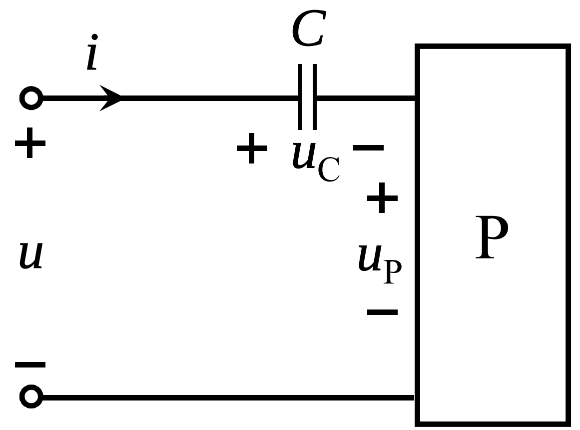
【例1.15】

右图所示电路。

已知：$\omega = 1000\text{rad/s}$，

有效值 I=2A，有效值 U=U_C=U_P=30V。

求：网络 P 的等效并联参数。



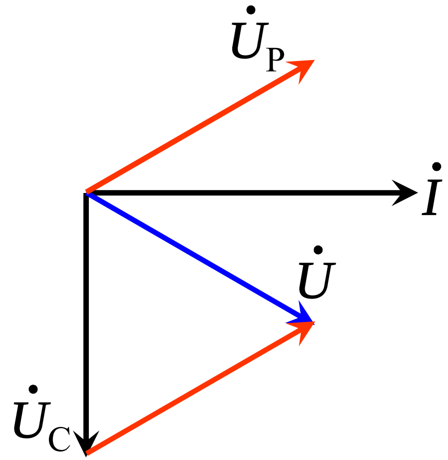
13Ω串联7.5mH

解：以电流为参考相量 $\dot{I} = 2\angle 0^0$

则：$\dot{U}_C = 30\angle -90^0$

由于相量 U、U_C 和 U_P 组成一闭合多边形，且 U=U_C=U_P=30V；

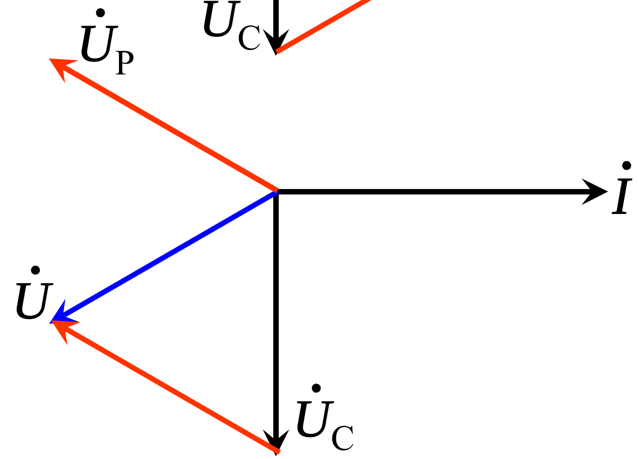
所以：$\dot{U}_P = 30\angle 30^0$（相量图如右所示）。



$$\text{等效导纳为：} Y_P = \frac{\dot{I}}{\dot{U}_P} = \frac{2\angle 0^0}{30\angle 30^0} = \frac{1}{15}\angle -30^0$$

<u>*感性负载*</u>

$$= 0.0577 - j0.0333(\text{S})$$



（相当于17.33Ω并联30mH）

$Y_P = -0.0577 - j0.0333(\text{S})$（一般不太可能）

Ø 阻抗～导纳

ü 阻抗、导纳，互为倒数：$Z=\dfrac{1}{Y}$

ü 若已知 $Z=R+jX$ ，则：$Y=\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{R+jX}=\dfrac{R-jX}{R^2+X^2}=G-jB$

所以，有：$G=\dfrac{R}{R^2+X^2}$ $B=\dfrac{X}{R^2+X^2}$

ü 若已知 $Y=G-jB$ ，则：$Z=\dfrac{1}{Y}=\dfrac{1}{G-jB}=\dfrac{G+jB}{G^2+B^2}=R+jX$

所以，有：$R=\dfrac{G}{G^2+B^2}$ $X=\dfrac{B}{G^2+B^2}$

（1）一般情况下：G 与 R，B 与 X 不互为倒数；
（2）针对无源一端口网络，B、X 与 j 的符号相同（同为正或负），可用于判断负载属性。

v 功率计算

ü 电路的目的是实现电能（电信号）的传输与分配，因此功率计算是电路分析的一项重要任务。

ü 在正弦交流电路中：阻性负载消耗能量，感性/容性负载储存能量（并能与外界进行交换）。因此，功率的种类比较多。

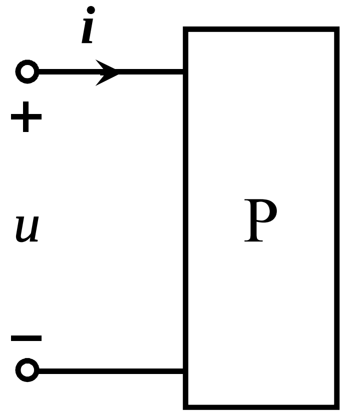
Ø 瞬时功率

Ø 有功功率、无功功率与视在功率

Ø 复数功率

Ø 功率因数的提高

Ø 瞬时功率



ü 右图所示一端口网络。

ü 瞬时功率：$p = u \cdot i$

ü 针对正弦交流电路，瞬时功率为：

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2}U\sin(wt + j_{\mathrm{u}}) \cdot \sqrt{2}I\sin(wt + j_{\mathrm{i}})$$

$$= UI\cos(j_{\mathrm{u}} - j_{\mathrm{i}}) - UI\cos(2wt + j_{\mathrm{u}} + j_{\mathrm{i}})$$

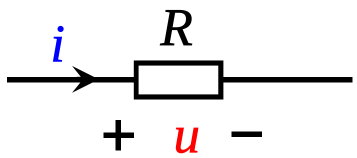
即：由一恒定分量和一两倍角频率变化的余弦分量组成。

ü 瞬时功率为正时，说明此一端口网络在吸收功率；否则为输出功率。

在关联参考方向时，若功率计算结果为正值，说明该元件（电路）吸收功率（相当于负载）；若结果为负值，说明该元件（电路）发出功率（相当于电源）。

Ø 瞬时功率（电阻）

ü 右图所示电阻电路（参考方向）。



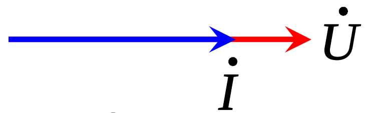
定义电流：$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

则电压为：$u = R \cdot \sqrt{2} I \sin \omega t = \sqrt{2} U \sin \omega t$

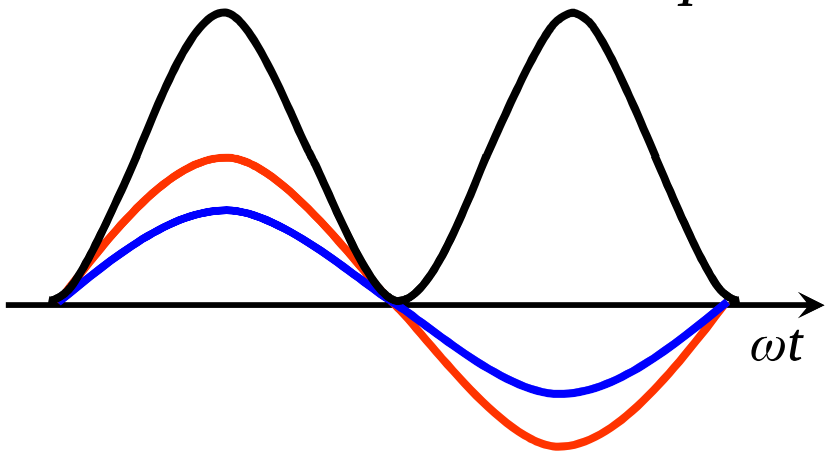
ü 瞬时功率：$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} U \sin wt \cdot \sqrt{2} I \sin wt$

$$= UI - UI \cos 2wt$$

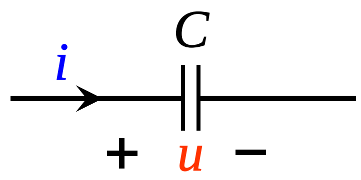
（瞬时功率始终大于零，说明电阻是耗能元件）



ü 能量：$W = \int_0^t p dt = UIt - UI \dfrac{\sin 2wt}{2w}$



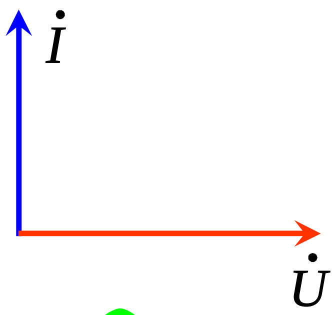
Ø 瞬时功率（电容）



ü 右图所示电容电路（参考方向）。

定义电压：$u=\sqrt{2}U\sin\omega t$

则电流为：$i=\omega C\cdot\sqrt{2}U\sin(\omega t+90^{0})=\sqrt{2}I_{\mathrm{C}}\sin(\omega t+90^{0})$



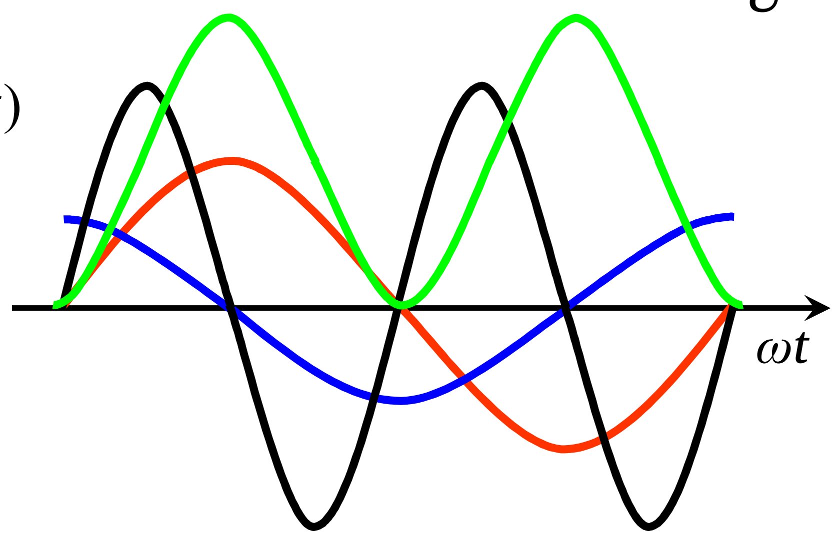
ü 瞬时功率：$p(t)=u(t)\cdot i(t)=UI_{\mathrm{C}}\sin 2wt$

（瞬时功率正负交替，说明电容交替吸收、发出功率）

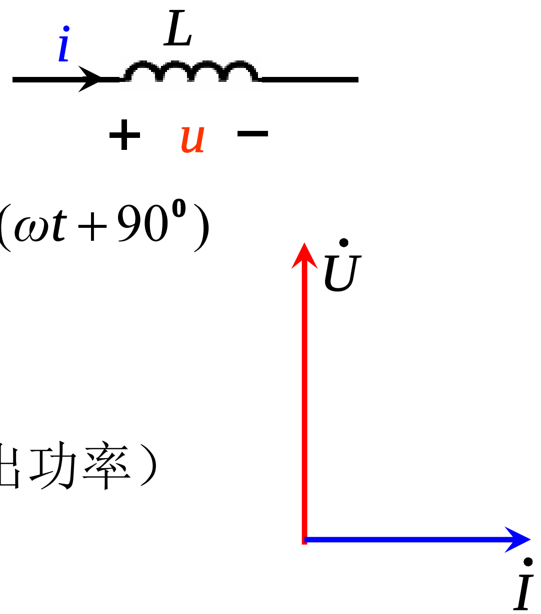
ü 能量：

$$W_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}C\cdot u^{2}=\frac{1}{2}CU^{2}(1-\cos 2wt)$$

（本身不消耗能量）



Ø 瞬时功率（电感）



ü 右图所示电感电路（参考方向）。

定义电流： $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$

则电压为： $u=\omega L\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t+90^{0})=\sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\sin(\omega t+90^{0})$

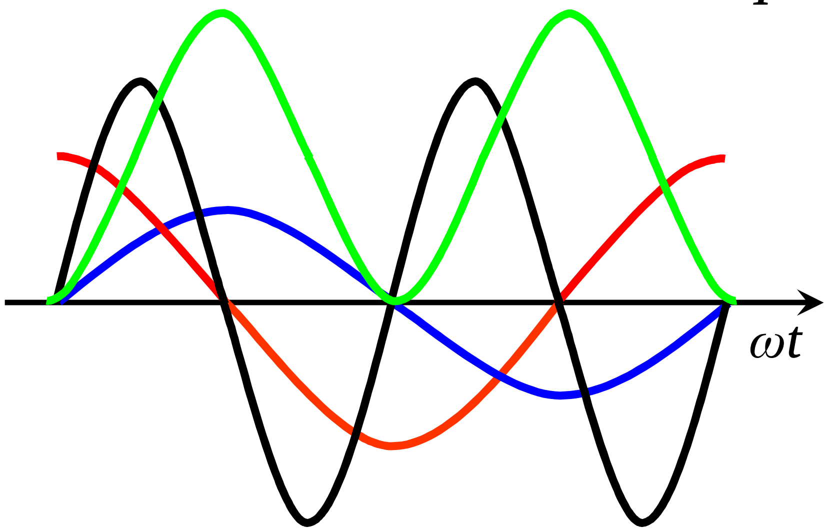
ü 瞬时功率： $p(t)=u(t)\cdot i(t)=U_{\mathrm{L}}I\sin 2wt$

（瞬时功率正负交替，说明电感交替吸收、发出功率）

ü 能量：

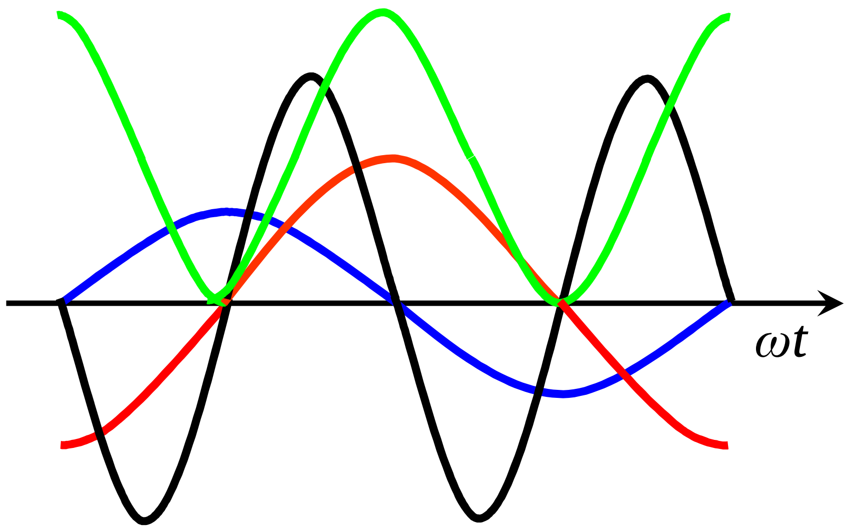
$$W_{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}L\cdot i^{2}=\frac{1}{2}L\cdot I^{2}(1-\cos 2wt)$$

（本身不消耗能量）

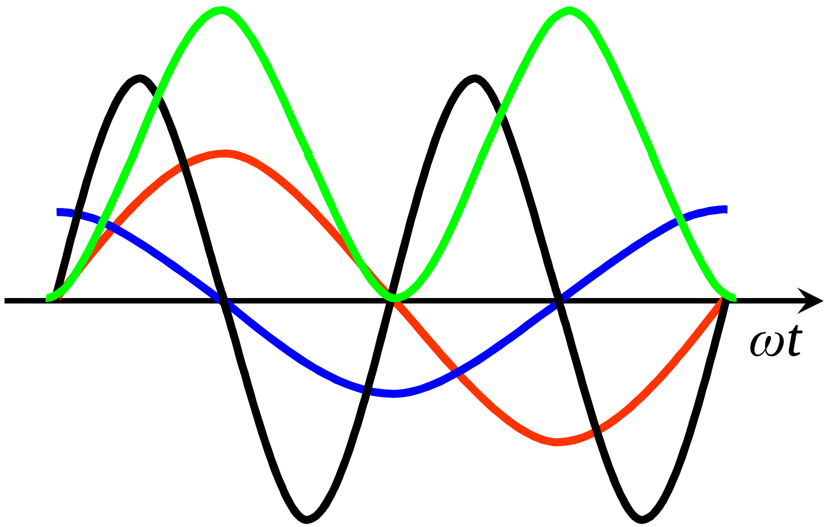


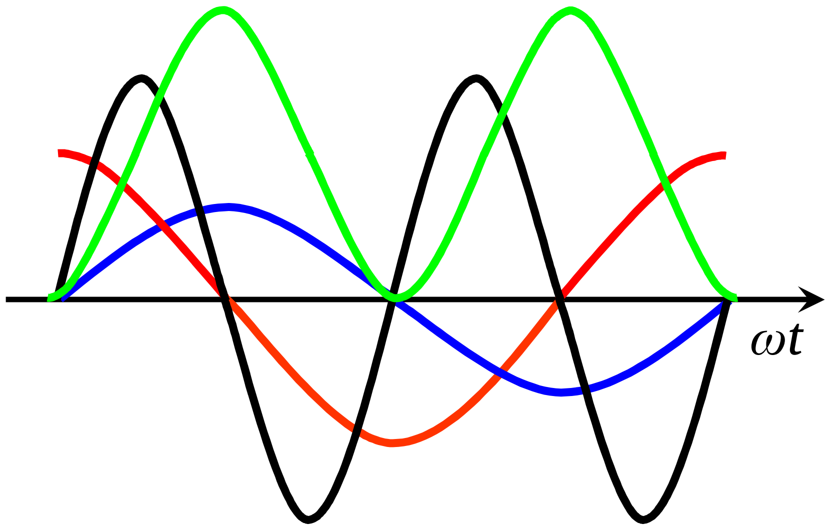
Ø 瞬时功率（电容电感）

ü 电容（以电压为基准）
电感（以电流为基准）



ü 电容（以电流为基准）





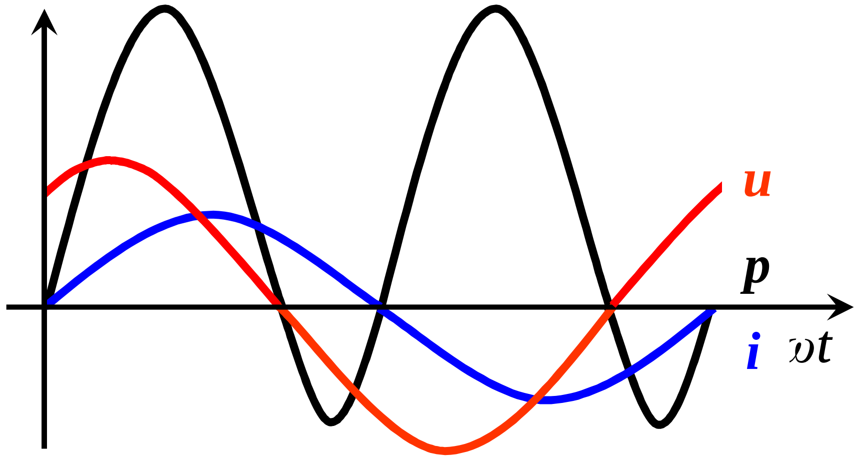
Ø 瞬时功率（任意负载）

ü 定义电流：$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$
则电压为：$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + j\ )$

ü 瞬时功率：$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI\cos j\ - UI\cos(2w\,t + j\ )$

ü 若 $j \in (0, 90^{0})$，感性负载；
若 $j \in (-90^{0}, 0)$，容性负载；

<ins>*感性负载*</ins>



Ø 有功功率

ü （有功）功率：瞬时功率在一周期内的平均值，$P = \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} p(t)dt$
表示实际消耗功率，一般针对周期信号或一段时间，又称平均功率。

ü 正弦交流电路的瞬时功率：$p(t) = UI\cos(j_{\mathrm{u}} - j_{\mathrm{i}}) - UI\cos(2wt + j_{\mathrm{u}} + j_{\mathrm{i}})$
有功功率：$P = UI\cos(j_{\mathrm{u}} - j_{\mathrm{i}}) = UI\cos j$，单位：W（瓦）。
j 称作功率因数角，$\cos j$ 称为功率因数。

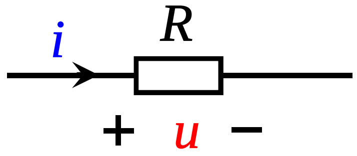
ü 当电压电流的参考方向一致时，$|j| \leq \frac{p}{2}$：
若 $P > 0$，消耗有功功率；
若 $P < 0$，产生有功功率。

参考方向不一致时 ...

Ø 有功功率（器件）

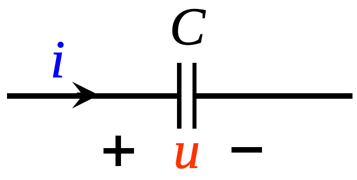
ü 瞬时功率（电阻）：$p(t)=UI-UI\cos 2wt$

平均功率：$P=UI$ （消耗能量）



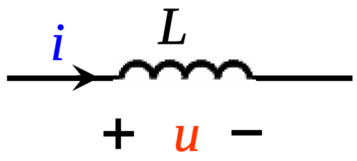
ü 瞬时功率（电容）：$p(t)=UI_{\mathrm{C}}\sin 2wt$

平均功率：$P=0$ （不消耗能量）



ü 瞬时功率（电感）：$p(t)=U_{\mathrm{L}}I\sin 2wt$

平均功率：$P=0$ （不消耗能量）

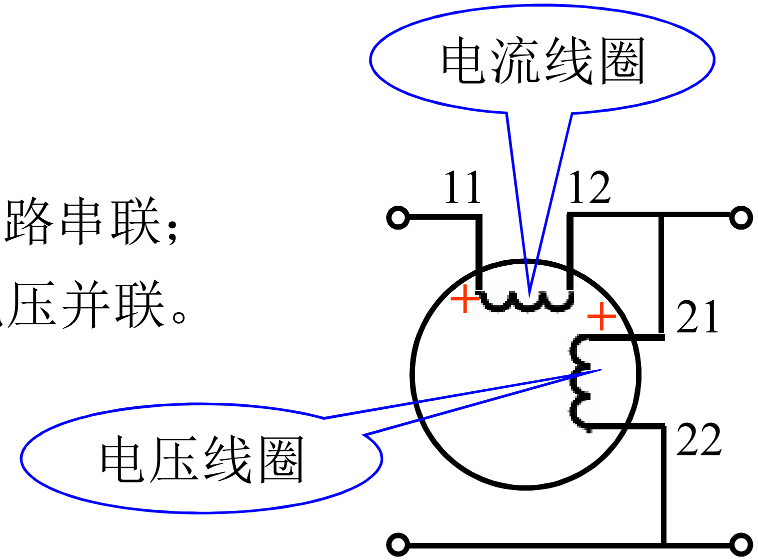


ü 瞬时功率（任意）：$p(t)=UI\cos j-UI\cos(2wt+j)$

平均功率：$P=UI\cos j$

Ø 有功功率（测量）

ü 采用功率表测量有功功率。



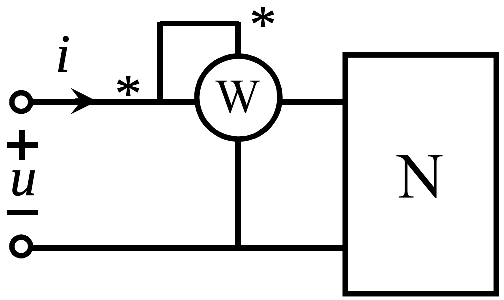
ü 电流线圈（11-12）：与被测电流回路串联；
电压线圈（21-22）：与被测端口电压并联。

ü 功率表极性标志：* 或 + 。

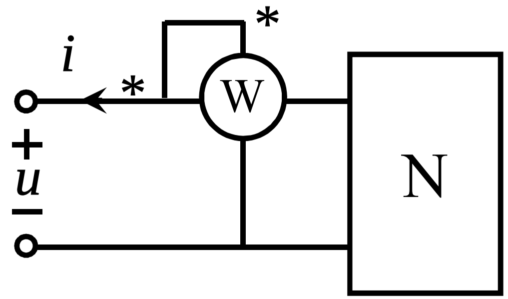
ü 功率表读数：电压有效值×电流有效值×（参考方向时）相位差的余弦

$$W = UI\cos j$$

Ø 有功功率（测量）



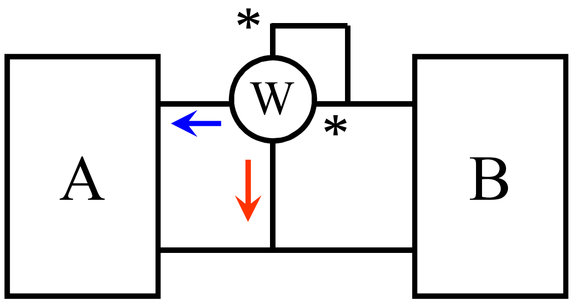
$W = UI\cos j$



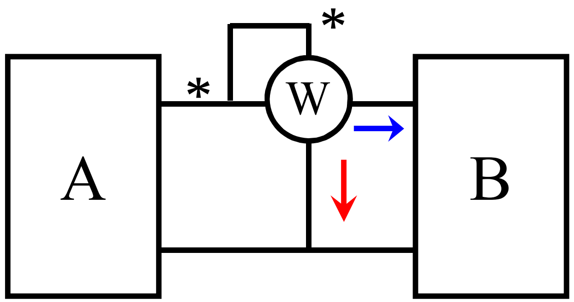
$W = -UI\cos j$

ü 若功率小于零，则功率表无法读数（模拟式）或为负数（数字式）。（可对调电流线圈端钮）

ü 功率表的正负性，可用于判断功率传输方向。



读数为正时：B $\rightarrow$ A

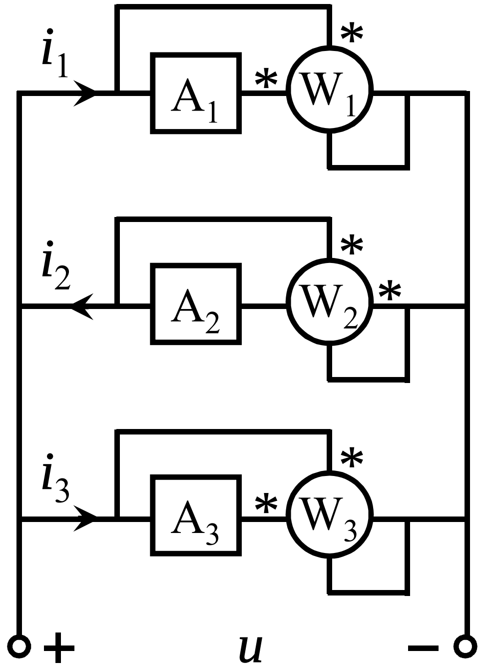


A $\rightarrow$ B

【例1.16】

右图所示电路中，A_1、A_2、A_3 为有源一端口网络。电路中各电压电流的相量图如右下所示。

判断：各一端口网络的功率传输方向。



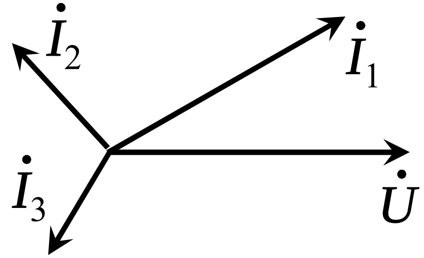
解：

（1）相量 U 和 I_1 为关联参考方向，且相位差 $< 90^o$；

所以：$P_1 = UI_1\cos j_1 > 0$ ，即：消耗功率。

（2）相量 U 和 I_2 为非关联参考方向，且相位差 $> 90^o$；

所以：$P_2 = UI_2\cos j_2 < 0$，即：消耗功率。



（3）相量 U 和 I_3 为关联参考方向，且相位差 $> 90^o$；

所以：$P_3 = UI_3\cos j_3 < 0$ ，即：发出功率。

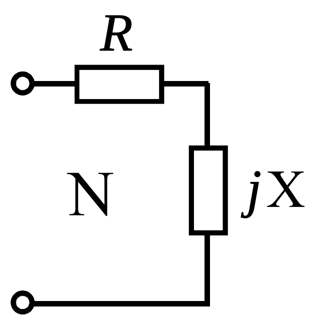
【例1.17】

右下图所示电路。

已知：$U = 100\text{V}$，$I = 2\text{A}$，$P = 120\text{W}$，$\omega = 500\text{rad/s}$；

若：并联小电容 C_0 后，电流表读数变大。

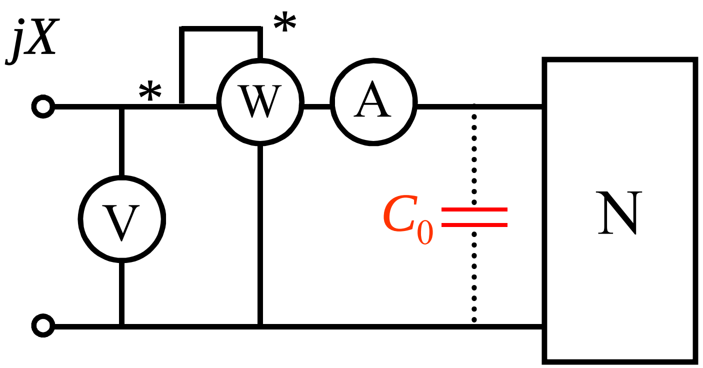
求：N 的串联等效电路。



解：N 的串联等效电路如右上所示：$Z = R + jX$

其中：$R = \dfrac{P}{I^2} = 30\Omega \quad |Z| = \dfrac{U}{I} = 50\Omega$

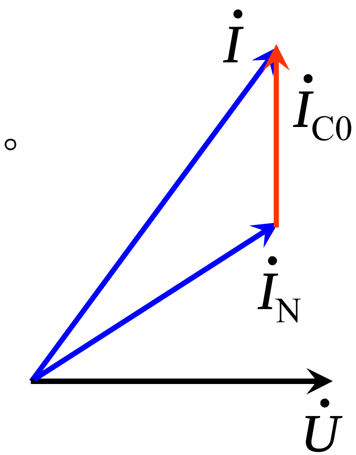
$$|X| = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = 40\Omega$$



并联小电容 C_0 后，根据叠加原理：

$$\dot{I} = \dot{I}_N + \dot{I}_{C0}$$

所以，要使电流表读数变大，相量图必然如右所示。

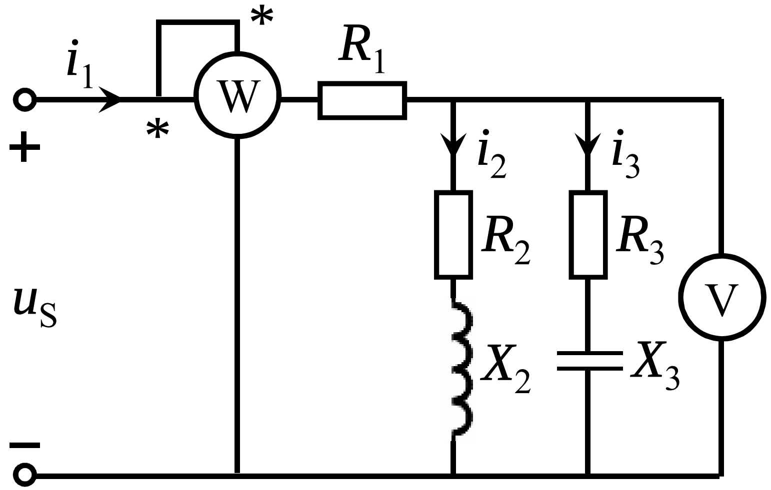


由此可得，X 为容性，其等效电容为：

$$C = \frac{1}{w X} = 50\mu\text{F}$$

【例1.18】

右下图所示电路。



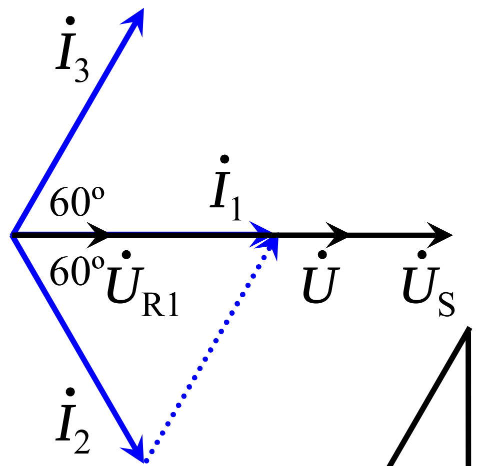
已知：$I_1 = I_2 = I_3$，$R_1 = R_2 = R_3$，

$U_S = 150\text{V}$，$P = 1500\text{W}$；

求：R_1、R_2、R_3、X_2、X_3、U。

解：针对 i_2、i_3 两条并联支路，由于其 I、R 分别相等，所以 $|X_2| = |X_3|$。

由于 $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$，因此电流相量图如右。

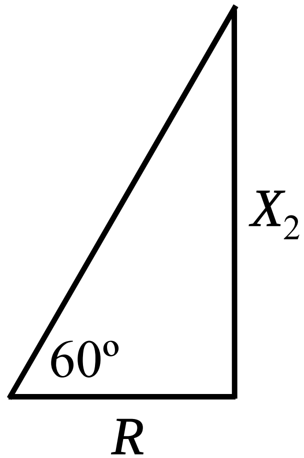


整体相量图如右。

所以：$I_2 = I_3 = I_1 = \dfrac{P}{U_S} = 10\,\text{A}$

由于：$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$

所以：$R_2 = R_3 = R_1 = \dfrac{P}{3I_1^2} = 5\Omega$



由于：$U = U_S - U_{R1} = 100\text{V}$ 且：$U = I_2\sqrt{R_2^2 + X_2^2}$

所以：$X_2 = 5\sqrt{3}\Omega$　$X_3 = 5\sqrt{3}\Omega$

（由阻抗三角形或相量图，也可得：$X_2 = R_2 tg60^0 \cdots$）

Ø 无功功率

ü 正弦交流电路瞬时功率：

$$p(t)=UI\cos(j_{\mathrm{u}}-j_{\mathrm{i}})-UI\cos(2wt+j_{\mathrm{u}}+j_{\mathrm{i}})$$

$$=UI\cos j\,[1-\cos(2wt+2j_{\mathrm{i}})]+UI\sin j\,\sin(2wt+2j_{\mathrm{i}})$$

前半式表示电网络实际消耗的功率，其平均值等于有功功率；

后半式表示电源与电网络（电抗）之间的能量交换，其平均值为零。

ü 无功功率：瞬时功率中无功分量的最大值，$Q=UI\sin j$

（用于度量电源与电网络之间能量交换的速率，量纲与有功功率一致）

单位 var （无功伏安，简称乏，区别有功功率）。

ü 当电压电流的参考方向一致时，$|j|\le\frac{p}{2}$ ：

$j>0\quad Q>0$ 感性；$j<0\quad Q<0$ 容性；$j=0\quad Q=0$ 阻性。

Ø 无功功率（器件）

ü 无功功率（电阻）：$Q=0$（与电源无能量交换）

ü 无功功率（电容）：$Q=-UI$（向外部释放能量）

ü 无功功率（容性）： 由于功率因数角<0，所以无功功率$Q<0$， 表示容性负载，发出无功功率。

ü 无功功率（电感）：$Q=UI$ （从外部吸收能量）

ü 无功功率（感性）： 由于功率因数角>0，所以无功功率$Q>0$， 表示感性负载，吸收无功功率。

Ø 视在功率

- ü 视在功率：$S = UI$

  一般用于表述电力设备的容量，单位 V·A（伏安）。

  （为计算方便引入）

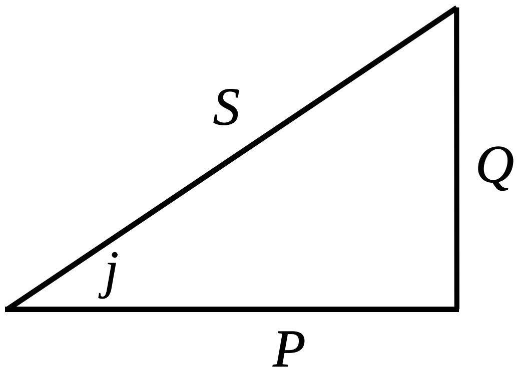
- ü 各类功率关系：

$$P = UI\cos j\ = S\cos j$$

$$Q = UI\sin j\ = S\sin j$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad j\ = tg^{-1}\frac{Q}{P}$$

- ü 功率三角形：



复数功率

- 复数功率：电压相量乘以电流相量的共轭复数，$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{\dot{I}}$

$$\tilde{S} = S\cos\varphi + jS\sin\varphi$$

  实部：有功功率；虚部：无功功率；模：视在功率；

  单位：V·A（伏安）。

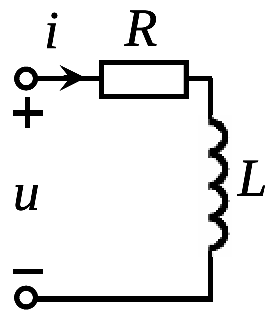
- 例（无源一端口网络）等效阻抗 Z：$\tilde{S} = I^2 Z = I^2 R + jI^2 X$

  等效导纳 Y：$\tilde{S} = U^2 \overset{*}{Y} = U^2 G + jU^2 B$

- 复数功率不是相量，只是一个复数。

【例1.19】

右图所示电路。



已知：$R=\omega L=10\Omega$，$U=200\text{V}$ 。

求：有功功率、无功功率、视在功率、复数功率、功率因数。

解：$\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{R+jwL}=\dfrac{200\angle 0^{0}}{10+j10}=10\sqrt{2}\angle-45^{0}$

$$P=UI\cos j\ =200\times 10\sqrt{2}\times\cos 45^{0}\ =2000\text{W}$$

$$Q=UI\sin j\ =200\times 10\sqrt{2}\times\sin 45^{0}\ =2000\text{var}$$

$$S=UI\ =200\times 10\sqrt{2}\ =2000\sqrt{2}\text{VA}$$

$$\tilde{S}==\dot{U}\overset{*}{\dot{I}}=200\times 10\sqrt{2}\angle 45^{0}\ =2000+j2000(\text{VA})$$

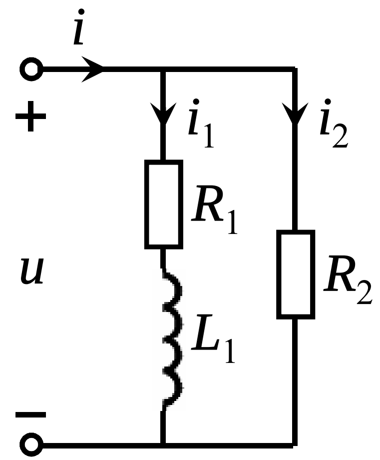
$$\cos j\ =\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例1.20】

右下图所示电路。

已知：功率为 40W，功率因数为 0.5 的日光灯（R_1L_1 支路），和功率为 100W 的白炽灯（R_2 支路），并联在 220V、50Hz 的交流电源上。

求：总的功率因数。



解：$$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{40}{220\times 0.5} = \frac{4}{11}\text{A}$$

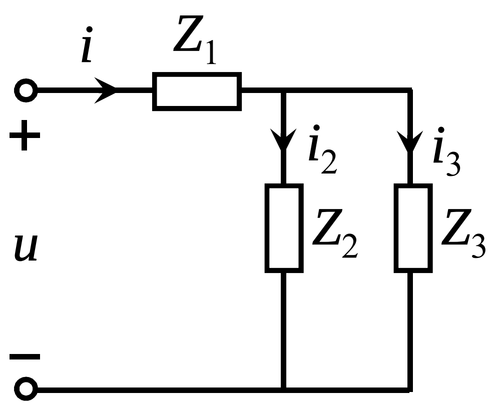
以电压为参考相量，有：

$$\dot{I}_1 = \frac{4}{11}\angle -60^\circ \quad \dot{I}_2 = \frac{5}{11}\angle 0^\circ$$

所以：$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0.71\angle -25.3^\circ$$

功率因数为：$\cos 25.3^\circ = 0.904$

【例1.21】



右图所示电路。

已知：Z_1，Z_2，Z_3，有效值 U 。

求：检验功率平衡。

解：电路的整体阻抗：$Z = Z_1 + Z_2 // Z_3$

由电路，可求得：$\dot{I} = \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}}{Z}$ $\dot{I}_2 = \dot{I} \cdot \dfrac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$ $\dot{I}_3 = \dot{I} \cdot \dfrac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$

有：$\tilde{S} = \dot{U} \overset{*}{\dot{I}}$ $\tilde{S}_1 = I_1^2 Z_1$ $\tilde{S}_2 = I_2^2 Z_2$ $\tilde{S}_3 = I_3^2 Z_3$

由此，可验证：$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3$

由于：$\tilde{S} = P + jQ$

由此，可验证：$P = P_1 + P_2 + P_3$ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

功率的另种求解：$P = I^2 R_d$ $Q = I^2 X_d$ $(Z = R_d + jX_d)$

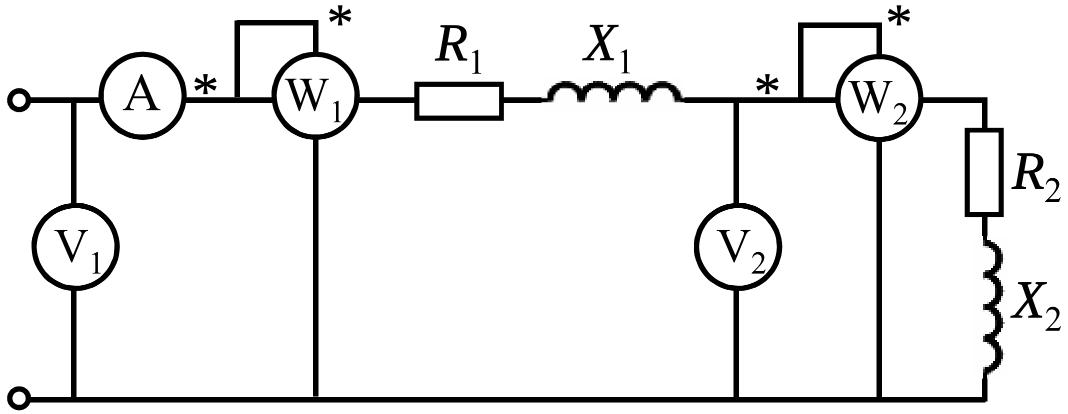
交流正弦电路中，有功功率、无功功率和复数功率守恒，视在功率不守恒。

【例1.22】 $P = I^2 R_d \quad Q = I^2 X_d \quad (Z = R_d + jX_d)$

下图所示电路。

已知：各表读数分别为 I_A 、U_1 、U_2、P_1 、P_2 。

求：电路参数 R_1、X_1、R_2、X_2 。



解：根据有功功率的测量，有：$R_2 = \dfrac{P_2}{I_A^2} \quad R_1 = \dfrac{P_1 - P_2}{I_A^2}$

根据功率三角形，有：$S_2 = U_2 I_A \quad Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} \quad X_2 = \dfrac{Q_2}{I_A^2}$

同理，有：$S = U_1 I_A \quad Q = \sqrt{S^2 - P_1^2} \quad Q_1 = Q - Q_2 \quad X_1 = \dfrac{Q_1}{I_A^2}$

Ø 功率因数

ü 有功功率表示实际消耗功率。

ü 在正弦电路中，有功功率是瞬时功率中的恒定分量：$P = UI\cos\varphi$
φ 称作功率因数角，$\cos\varphi$ 称作功率因数。

ü 提高功率因数：

（1）充分利用电气设备的容量

例：某设备容量 100VA

若功率因数为 1，输出功率为 100W；若功率因数 0.8，则只能输出 80W 。

（2）减少传输损耗，提高传输效率

例：某设备最大输出功率 P ，传输等效电阻 R 。

则传输损耗为：$P_R = I^2 R = \left(\frac{P}{U\cos\varphi}\right)^2 R$

Ø 功率因数（提高）

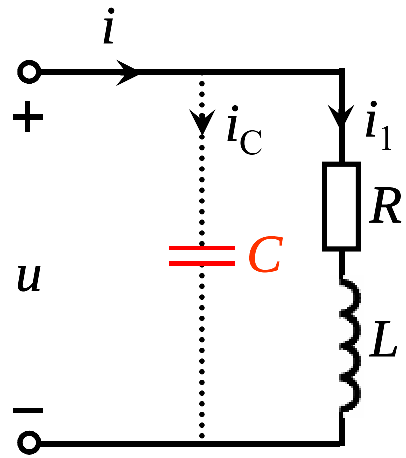
ü 电流补偿法。

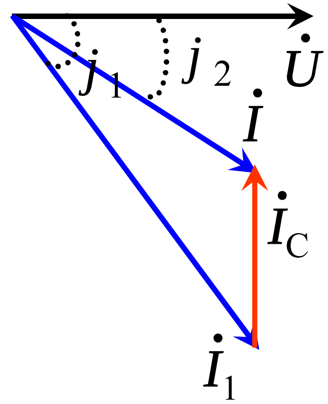
采用电容（或同步补偿器）与负载并联。

补偿后的相量图如右下所示。

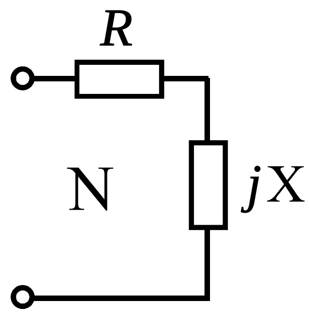
由图，原功率因数角 j_1 大于补偿后 j_2 ，即功率因数被提高了。

<u>*电力系统的大量负载是感性负载，如电动机。*</u>





【复例1.17】



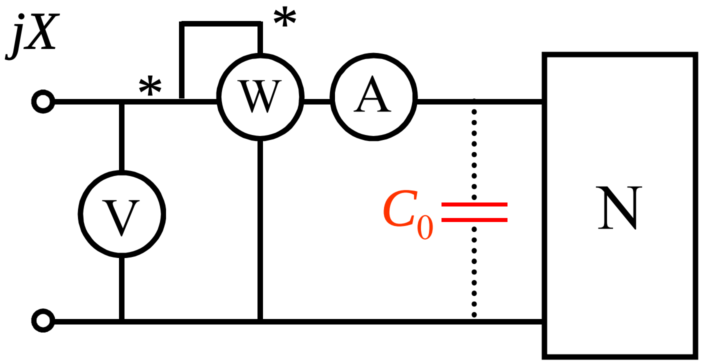
右下图所示电路。

已知：$U = 100\text{V}$，$I = 2\text{A}$，$P = 120\text{W}$，$\omega = 500\text{rad/s}$；

若：并联小电容 C_0 后，电流表读数变大。

求：N 的串联等效电路。

解：N 的串联等效电路如右上所示：$Z = R + jX$



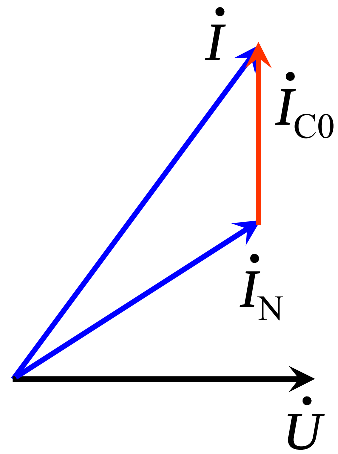
其中：$R = \dfrac{P}{I^2} = 30\Omega \quad |Z| = \dfrac{U}{I} = 50\Omega$

$$|X| = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = 40\Omega$$

并联小电容 C_0 后，根据叠加原理：

$$\dot{I} = \dot{I}_N + \dot{I}_{C0}$$

所以，要使电流表读数变大，相量图必然如右所示。



由此可得，X 为容性，其等效电容为：

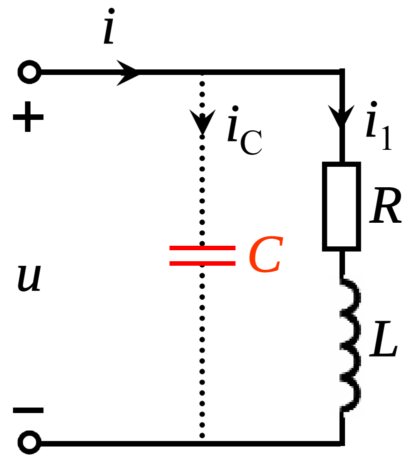
$$C = \frac{1}{w X} = 50\mu\text{F}$$

【例1.23】

右图所示电路。

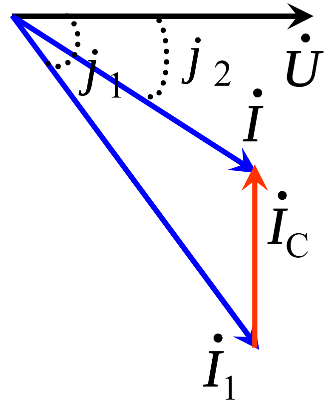
已知：线路电压 10kV，有功功率 1000kW、功率因数 0.8（感性），角频率 314rad/s 。

求：将功率因数提高至 0.95，并联电容 C 的大小。



解：原电流：$I_1 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1} = \dfrac{1000\text{k}}{10\text{k}\times 0.8} = 125\text{A}$

新电流：$I = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2} = \dfrac{1000\text{k}}{10\text{k}\times 0.95} = 105\text{A}$



由相量图，得：$I_C = I_1\sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$

$$= 125\times 0.6 - 105\times 0.31 = 42.2\text{A}$$

所以：$C = \dfrac{I_C}{U\omega} = \dfrac{42.2}{10\text{k}\times 314} = 13.4\mu\text{F}$

Ø 功率因数（提高）

ü 从功率三角形的观点看。

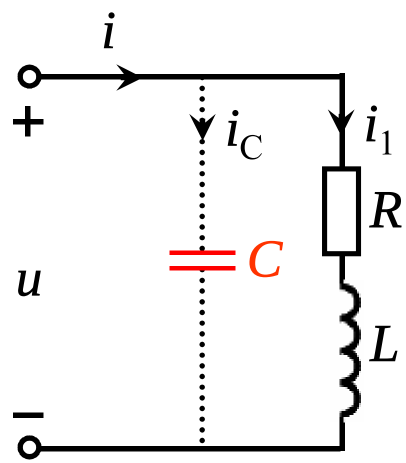
有功功率不变；

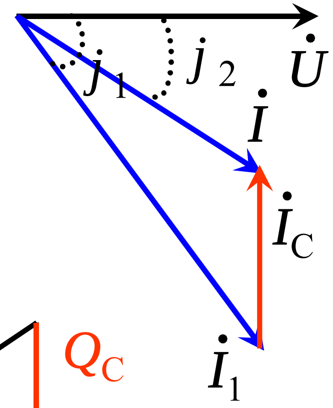
无功功率变化：$Q_1 = UI_1 \sin\varphi \quad Q_C = -UI_C$

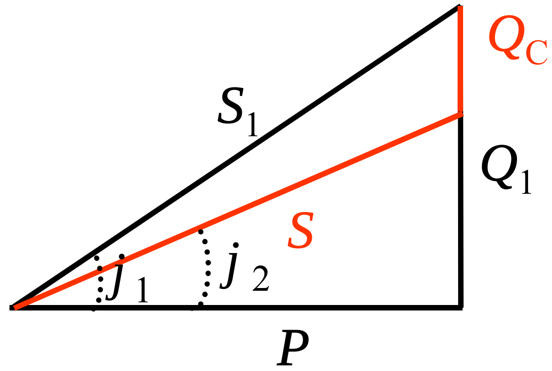
所以：$Q = Q_1 + Q_C < Q_1$

即：功率因数角减小了，功率因数提高了。

<u>又称无功功率补偿法。</u>

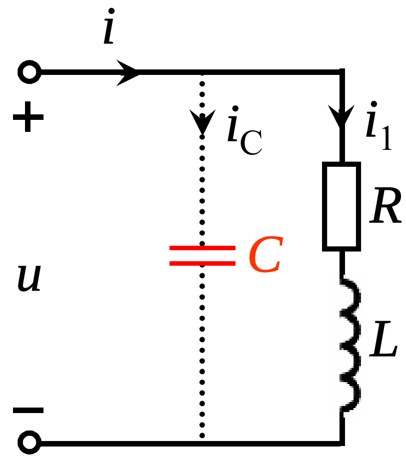






【复例1.23】

右图所示电路。

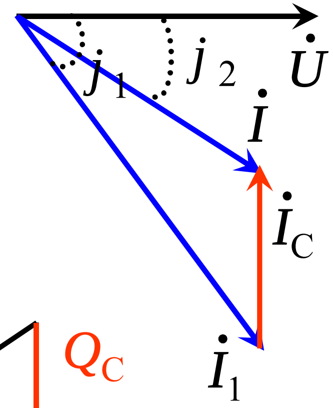


已知：线路电压 10kV，有功功率 1000kW、功率因数 0.8（感性），角频率 314rad/s 。

求：将功率因数提高至 0.95，并联电容 C 的大小。

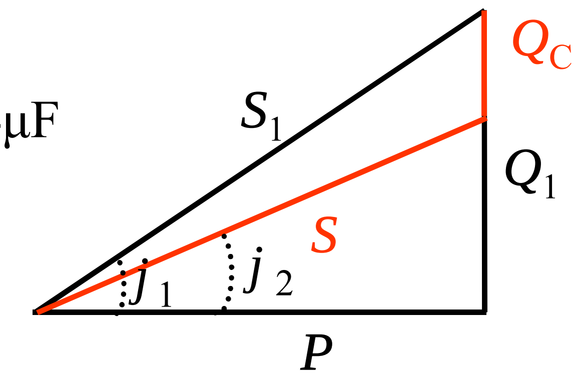
解：原无功功率：$Q_1 = P\,\mathrm{tg}\,j_1 = 1000\,\mathrm{k}\times 0.75 = 750\,\mathrm{kvar}$

新无功功率：$Q_2 = P\,\mathrm{tg}\,j_2 = 1000\,\mathrm{k}\times 0.328 = 328\,\mathrm{kvar}$



由功率三角形，得：$Q_C = Q_2 - Q_1 = -422\,\mathrm{kvar}$

所以：$C = \dfrac{Q_C}{U^2 w} = \dfrac{422k}{(10\,\mathrm{k})^2 \times 314} = 13.4\mu\mathrm{F}$



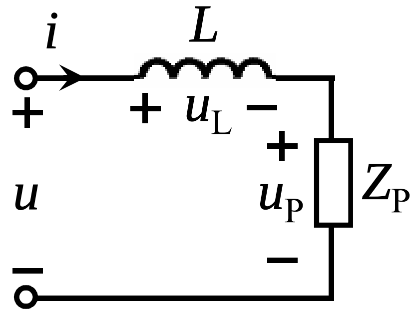
- 正弦交流电路的计算

  - 已知电路结构参数，求各支路电流、电压。

  - 已知电路结构及某些条件，推求电路参数。
（一般均要借助相量图求解）

【例1.24】

右图所示电路。



已知：$U = 380\text{V}$，$X_L = 22\Omega$，

Z_P 为感性负载，其阻抗角为30º，$U_P = U_L$。

求：电流 i、u_P。

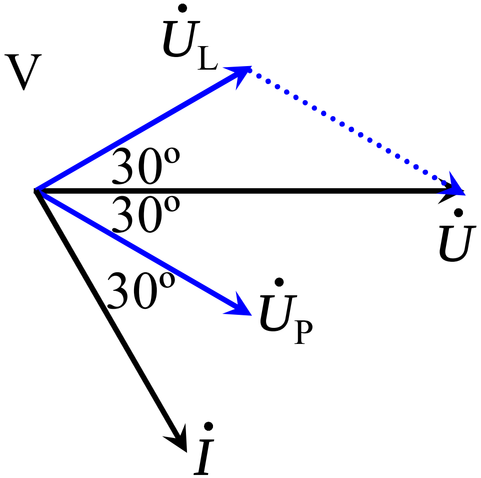
解：根据题意，有：$Z_P = 22\angle 30^0\Omega$

总负载为：$Z = jX_L + Z_P = j22 + 22\angle 30^0 = 38\angle 60^0\Omega$

以电压为参考相量，得：$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{Z} = \dfrac{380\angle 0^0}{38\angle 60^0} = 10\angle -60^0\text{A}$

所以：$\dot{U}_P = \dot{I}\cdot Z_P = 10\angle -60^0 \times 22\angle 30^0 = 220\angle -30^0\text{V}$

相量图如右所示。

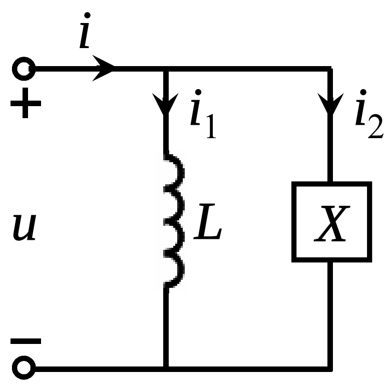


【例1.25】

右图所示电路。

已知：$\omega = 100\text{rad/s}$，$L = 0.3\text{mH}$ 。

求：当 $I =\ I_1$ 时，X 代表什么元件（R、L、C）。

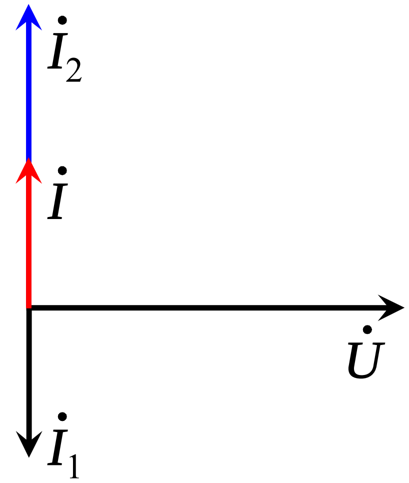


解：当 $I = I_1$ 时，X 只能代表电容 C（相量图右下）。

由相量图，得：$\dot{I}_2 = 2\dot{I}_1$

$$\left|\frac{\dot{U}}{\frac{1}{jw\,C}}\right| = 2\left|\frac{\dot{U}}{jw\,L}\right|$$

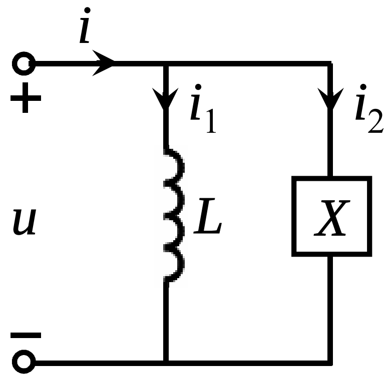
所以：$C = \dfrac{2}{w^2 L} = \dfrac{2}{3}\text{F}$



右图所示电路。

已知：$\omega = 100\text{rad/s}$，$L = 0.3\text{mH}$ 。

求：当 $I = 2I_1$ 时，X 代表什么元件（R、L、C）。



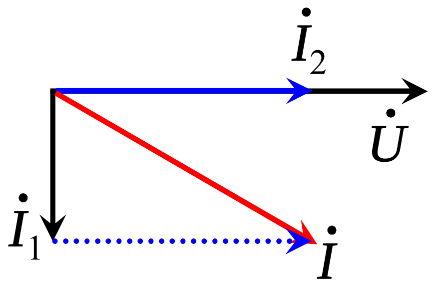
解：X 有可能代表电阻 R（下左相量图）

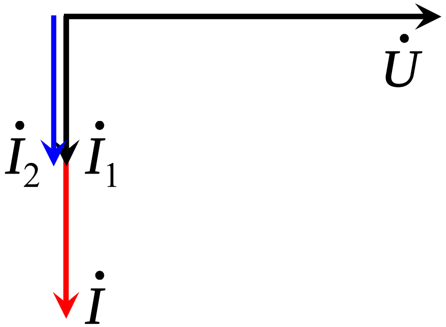
$$\sqrt{3}\left|\frac{\dot{U}}{jw L}\right| = \left|\frac{\dot{U}}{R}\right| \quad \Rightarrow \quad R = 0.017\Omega$$

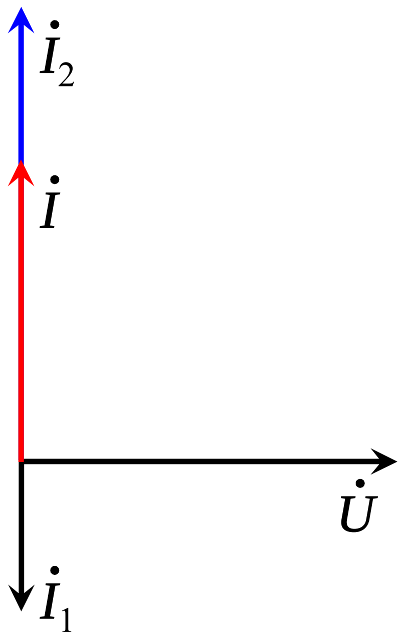
X 有可能代表电感 L（下中相量图）$L = 0.3\text{mH}$

X 有可能代表电容 C（右相量图）

$$3\left|\frac{\dot{U}}{jw L}\right| = \left|\frac{\dot{U}}{\dfrac{1}{jw C}}\right| \quad \Rightarrow \quad C = 1\mu\text{F}$$





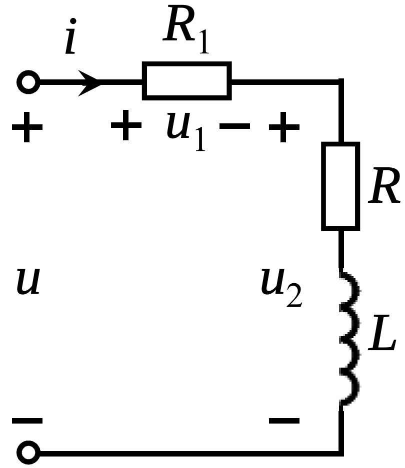


【例1.26】

右图所示电路。

已知：$U=65\text{V}$，$U_1=30\text{V}$，$U_2=50\text{V}$， $R_1=2\Omega$。

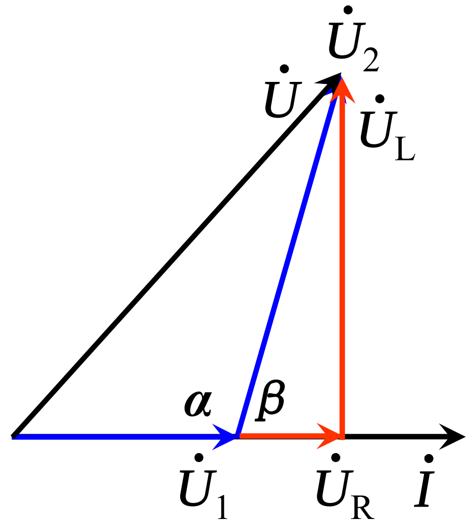
求：X_L， R 。



解：以电流为参考相量，相量图如右下所示。

根据余弦定理：$\cos a = -\dfrac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} = -0.275$

得：$a = 106^0 \quad b = 74^0$



根据相量图，有：$U_R = U_2 \cos b = 13.75\text{V}$

$U_L = U_2 \sin b = 48.07\text{V}$

且 $I = \dfrac{U_1}{R_1} = 15\text{A}$

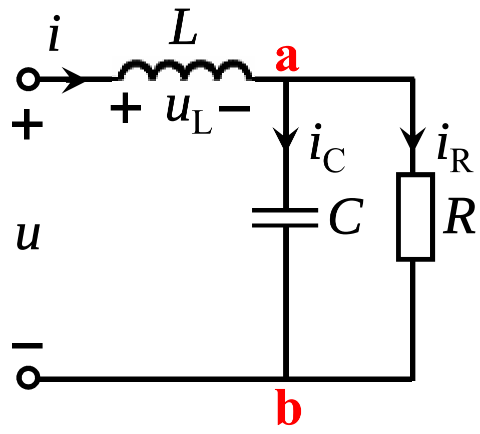
所以：$X_L = \dfrac{U_L}{I} = 3.205\Omega \quad R = \dfrac{U_R}{I} = 0.917\Omega$

【例1.27】

右图所示电路。

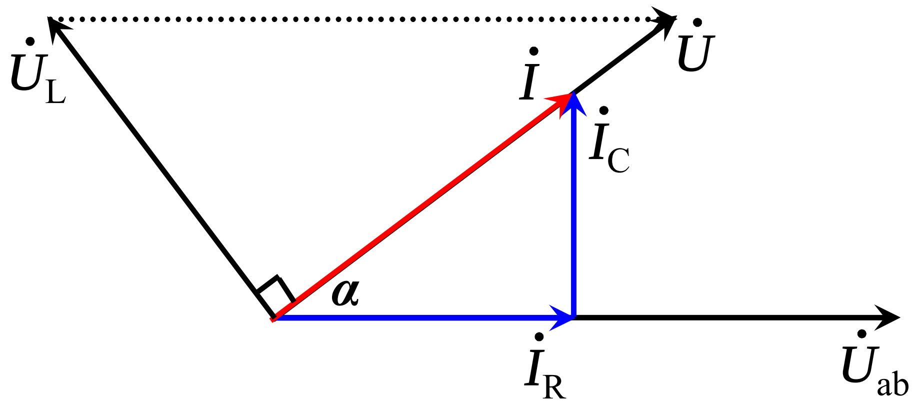
已知：$I_C = 6A$，$I_R = 8A$，$X_L = 10\Omega$，且 U 、I 同相。

求：R、X_C 。



解：以 u_{ab} 为参考相量，作相量图如右下所示。

根据相量图，有：$a = tg^{-1}\dfrac{I_C}{I_R} = 36.9^0$



则：$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 10A$

$$U_L = I \cdot X_L = 100V$$

$$U_{ab} = \frac{U_L}{\sin a} = \frac{500}{3}V$$

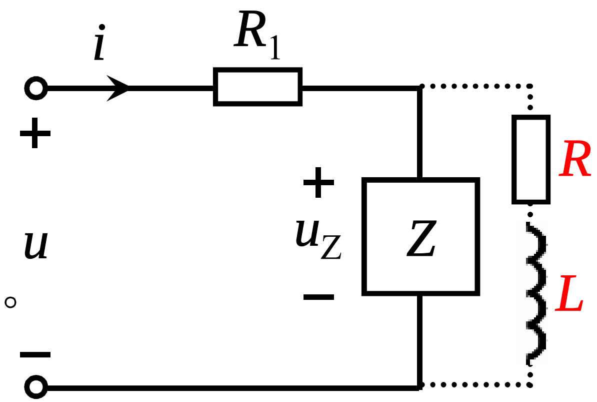
所以：$R = \dfrac{U_{ab}}{I_R} = 20.83\Omega$　$X_C = \dfrac{U_{ab}}{I_C} = 27.78\Omega$

【例1.28】

右图所示电路。

已知：相量 u 和 u_Z 的相位差为 30°，$R_1=10\Omega$，
Z 消耗的有功功率和无功功率分别为 4W、12var。

求：Z、端口电流 I。

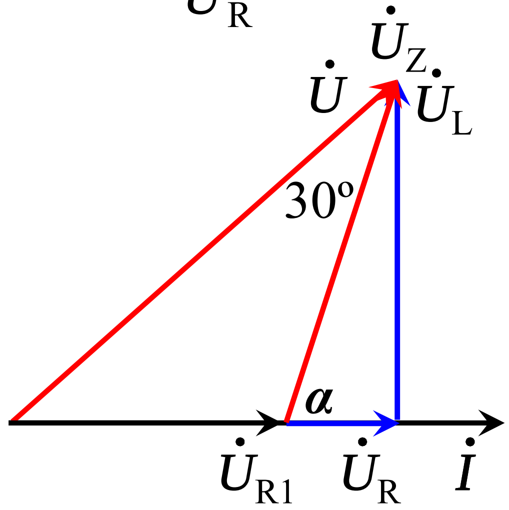


解：由于无功功率为 12var，所以 Z 为感性，可定义为：$Z=R+jX_L$

根据题意 $I^2R=4 \quad I^2X_L=12$，有：$X_L=3R$。

以电流 i 为参考相量，作相量图如右下，有：$a=tg^{-1}\dfrac{U_L}{U_R}=71.6^0$

根据正弦定理，有：$\dfrac{U_{R1}}{\sin 30^0}=\dfrac{U_Z}{\sin(a-30^0)}$



由于（根据相量图及电路图可得）：

$U_{R1}=I\cdot R_1$

$U_Z=\sqrt{U_R^2+U_L^2}=I\sqrt{R^2+X_L^2}=\sqrt{10}\cdot I\cdot R$

所以：

$R=4.2\Omega \quad X_L=12.6\Omega \quad I=0.976\text{A}$

- 本节作业
  - 习题 5（P245）

    5（有效值）

    7（相量）

所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。

本节作业

- 习题 5（P245）
  13、14、15（阻抗等效）
  20、22（正弦电路分析的相量应用）

  所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。

本节作业

- 习题 5（P247）
  24（功率、功率因数）

<u>所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。</u>