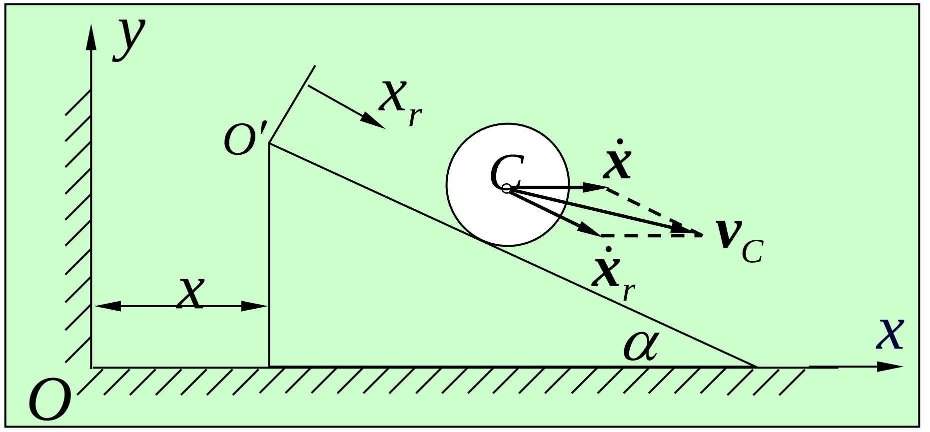
例2



系统的拉格朗日函数为:

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{3}{4}m\dot{x}_r^2+m\dot{x}\dot{x}_r\cos\alpha+mgx_r\sin\alpha$$

广义能量积分为

$$T+V=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{3}{4}m\dot{x}_r^2+m\dot{x}\dot{x}_r\cos\alpha-mgx_r\sin\alpha=E$$

机械能守恒

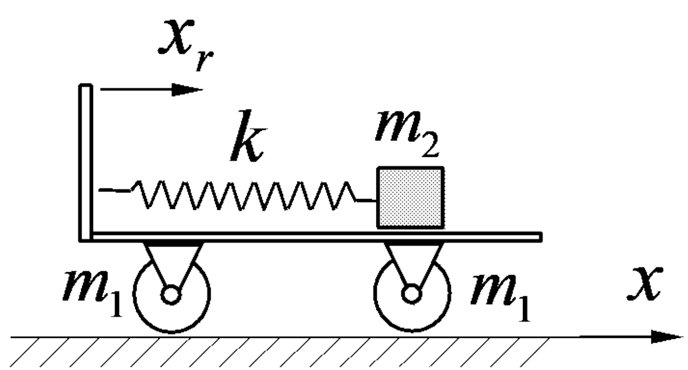
与循环坐标**x**相对应的循环积分为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(M+m)\dot{x}+m\dot{x}_r\cos\alpha=C$$

水平方向动量守恒

例3

小车的车轮在水平地面上作纯滚动，每个轮子的质量为$\boldsymbol{m_1}$，半径为$\boldsymbol{r}$，车架质量不计。车上有一质量弹簧系统，弹簧刚度系数为$\boldsymbol{k}$，物块质量为$\boldsymbol{m_2}$。试分析拉格朗日方程的首次积分。



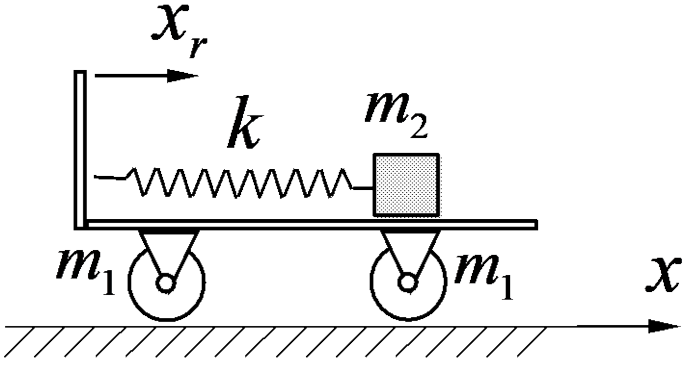
选取x和x_r为广义坐标。

$$T = 2\cdot[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1r^2\cdot(\frac{\dot{x}}{r})^2] + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)^2$$

$$= \frac{3}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx_r^2$$

$$L = \frac{3}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)^2 - \frac{1}{2}kx_r^2$$



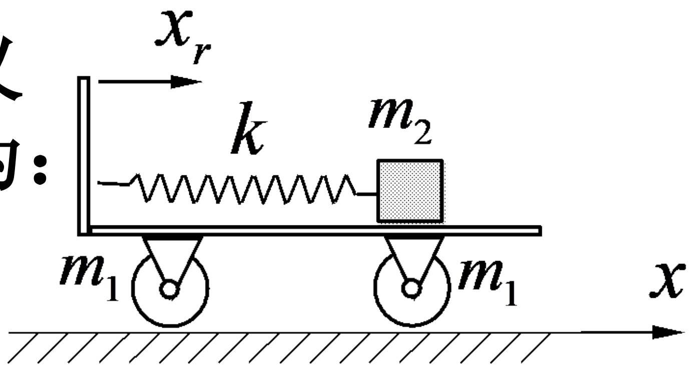
动量不守恒　广义动量守恒

$$L=\frac{3}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)^2-\frac{1}{2}kx_r^2$$

广义能量积分为（**L**不显含**t**，故存在广义能量积分，物理意义是机械能守恒）

$$T+V=\frac{3}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)^2+\frac{1}{2}kx_r^2=E$$

循环积分（**L**不显含**x**，存在广义动量积分，物理意义不明确）为：

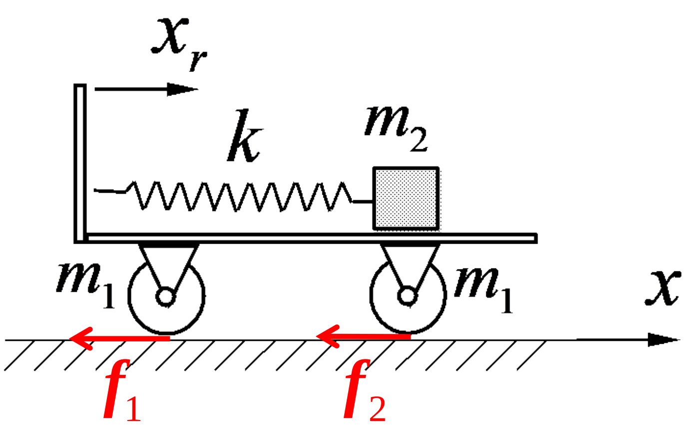


$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=3m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)=C$$

水平方向的动量不是守恒量：$2m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)=C-m_1\dot{x}$

$$3m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}+\dot{x}_r)=C$$

$$3m_1\ddot{x}+m_2(\ddot{x}+\ddot{x}_r)=0$$



$$2m_1\ddot{x}+m_2(\ddot{x}+\ddot{x}_r)=\dot{p}_x=-f_1-f_2$$ （动量定理）

$$\frac{1}{2}m_1r^2\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right)=\dot{L}_{O_1}=f_1r$$ （动量矩定理）

$$\frac{1}{2}m_1r^2\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right)=\dot{L}_{O_2}=f_2r$$ （动量矩定理）

第一积分有何用处？

- 数学：方程降阶与完全求解
- 物理：意义清晰与定性分析
- 动力学：代替运动微分方程
- 稳定性：**Lyapunov** 理论中的**Chetaev**方法

  （李雅普诺夫）
- 数值仿真：校核

  辛算法
- 对称性：时间、空间

守恒律与对称性

- 物理学（力学）中那么多定理、定律，它们的地位不是平等的，是有层次的。
- 如胡克定律，是经验性的，仅适用于一定的物料，一定的参量范围，这是较低层次的规律。
- 胡克定律→牛顿三定律→三大守恒律→时空对称性
- 1918年德国女数学家诺特（A.E. Noether,1882-1935）：每一自然界的对称性可得到一守恒定律；每一守恒定律均揭示蕴含其中的一种对称性
- 动量守恒定律：空间均匀性（空间平移对称性）

  角动量（动量矩）守恒定律：空间的各向同性（空间旋转对称性）

  能量守恒定律：时间的均匀性（时间平移不变性）

(1) 能量积分

若力学体系不存在任何特别的时间标记，即具有时间的均匀性，则其拉格朗日函数不显含时间。

当保守系统的拉格朗日函数L不显含时间t，$\partial L/\partial t=0$。

拉格朗日函数关于时间的全导数

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}+\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_j}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)$$

两边关于时间积分

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=h$$

拉格朗日方程的一个首次积分

不但适用于封闭系，也适用于外场不随时间变化的非封闭系。我们把机械能守恒的这两类力学体系称为保守系统。

运动积分（integrals of motion）

如果完整体系的位形由s个独立的广义坐标规定，则运动方程一般含有s个以时间为独立变量的二阶非线性微分方程，总共要引入$2s$个积分常数$C_1, C_2, \cdots, C_{2s}$，它们决定体系状态的$2s$个量q_α和$\dot{q}_\alpha$随时间如下变化：

$$\left\{\begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(t; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}), \\ \dot{q}_\alpha &= \dot{q}_\alpha(t; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}), \end{aligned}\right. \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s$$

从上述方程中消去t，保留一个积分常数待求，不妨设为C_{2s}，可以形式上解得：

$$C_i = C_i(q_1, q_2, \cdots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s), \qquad i = 1,2,\cdots,2s-1$$

这些由q_α和$\dot{q}_\alpha$组成的函数在运动过程中始终保持初值状态，称为运动积分。

原则上可以用运动积分来取代全部的运动方程，从而降低微分方程的阶数。即使只找到部分运动积分，原问题也在一定程度上被简化，便于进一步分析。特别是其中的一些运动积分，它们的不变性与时间和空间的均匀性和各向同性相联系；而且这些守恒量都具有可加性，即总体系的积分常量等于各个子体系内相应积分量之和。这个性质保证了这些守恒量能方便地用于求解子体系的运动状态。

从空间均匀性（空间平移对称性）推导动量守恒定律

如果一个力学体系不存在任何特别的空间标记，即当其整体在空间平移时，力学性质不变化，则其拉格朗日函数也必须不变。

在假想的整体空间平移过程中$\delta t = 0$,所以:

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha\right)$$

利用拉格朗日方程，上式变形为:

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \delta q_\alpha\right] = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha\right)$$

因为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i(q_1,q_2,\cdots q_s,t)=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

所以

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

于是

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

所以

$$\delta L=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha)$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot(\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha)=\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i)$$

设体系平移了一个无穷小距离ε，而拉格朗日函数不变。由于ε与时间无关，可以移出时间微商算符之外，所以

$$\delta L = (\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \varepsilon = 0$$

由于ε的任意性，为使$\delta L = 0$，要求

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

所以封闭体系中体系的总动量

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = const.$$

这就是质点系的动量守恒定律。

可据此推导出牛顿第三定律！

进一步讨论:

由表达式可知，动量也像能量一样具有可加性，且总动量矢量与体系内部质点间是否存在相互作用无关，这一点与总能量截然不同。

当存在外场时，显然空间均匀性遭到破坏，总动量不再守恒。但如果外场势能可以不依赖于某一个或两个笛卡尔坐标的分量，则相应的总动量分量仍然守恒。

从空间的各向同性（空间旋转对称性）推导角动量（动量矩）守恒定律

当力学体系不存在特殊的方向，即做空间转动时，体系的力学性质不变，因而其拉格朗日量也保持不变，这种整体对称性也有相应的守恒定律。

如图所示，当体系转动无限小角度$\delta\boldsymbol{\varphi}$时，第$i$个质点的位矢$\boldsymbol{r}_i$将运动到$\boldsymbol{r}_i+\delta\boldsymbol{r}_i$，其中

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i$$

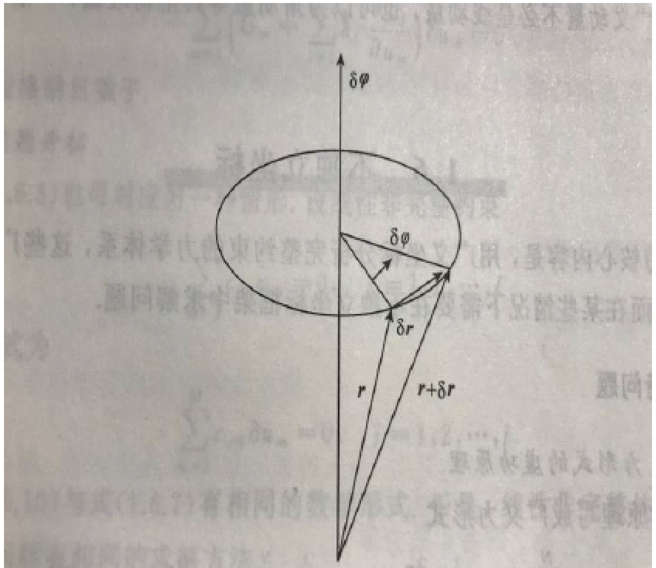


图 1.5.1 转动时虚位移与虚角位移的关系

注：有限转动不是矢量；无限小转动是矢量

代入

$$\delta L=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\right)$$

得:

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i)\right]=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{d\boldsymbol{J}}{dt}$$

由于$\delta\boldsymbol{\varphi}$的任意性，为使$\delta L=0$，要求体系的角动量

$$J=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i=const$$

由表达形式，角动量也具有可加性，且总角动量矢量与体系内部质点间是否存在相互作用无关。这一守恒定律不仅适用于封闭系统，当存在空间各向同性的外场时，总动量仍然守恒。退一步讲，如果外场不再各向同性，但具有旋转对称轴，则对于该对称轴的转动，系统的L不变，因此系统对于该轴角动量守恒。

作业

- 复习本节课讲过的例题（自行推导，无须写到作业本上）
- 做：2.5, 2.9