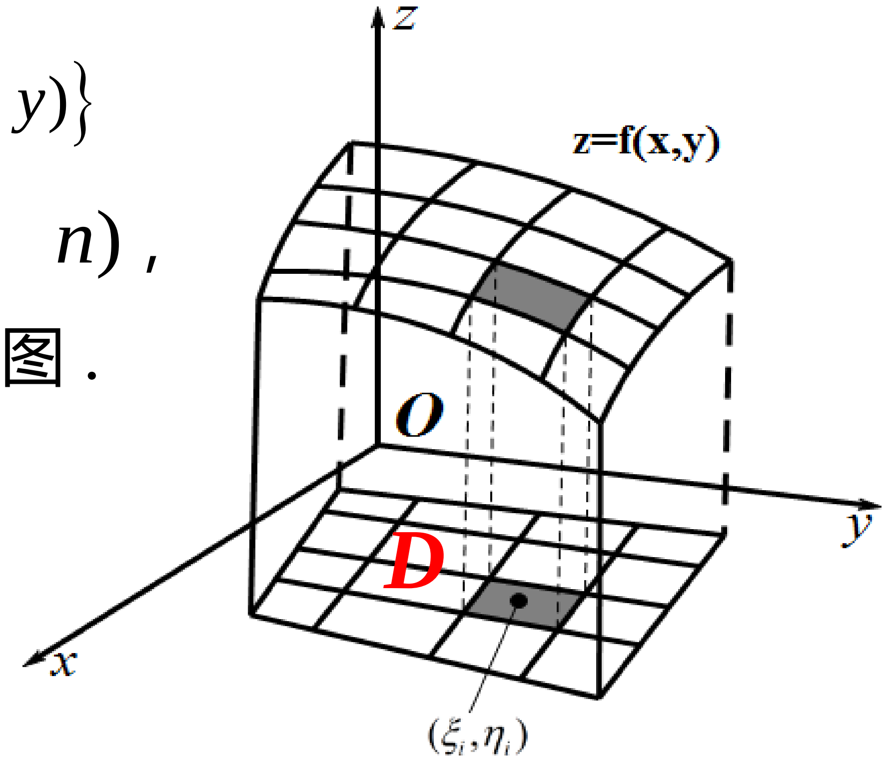
第10章（一）
二重积分概念及性质

浙江大学数学科学学院　卢兴江

ZHEJIANG UNIVERSITY

二重积分的意义

曲顶柱体的体积： $V=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ 0\le z\le f(x,y)\}$



（1）分割： 把 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,\ n)$，

记以 $\Delta\sigma_i$ 为底的小曲顶柱体为 ΔV_i ，如图．

（2）近似： 取介点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$ ，则

$$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

（3）作和： 曲顶柱体的体积： $V\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

（4）求极限： 记 $d(\Delta\sigma_i)=\sup\limits_{P、Q\in\Delta\sigma_i}\{|PQ|\}$ 为 $\Delta\sigma_i$ 的“直径”，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d(\Delta\sigma_i)\}$ ，

如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则定义曲顶柱体体积为 $V=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

二重积分的定义

定 义　设$f(x,y)$是有界闭区域 D 上的有界函数，如果存在$I\in \mathrm{R}$，对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于任何满足 $\lambda\le\delta$ 的分割和任意选取的介点 (ξ_i,η_i)，都成立 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i - I\right|\le\varepsilon,$　则称 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \quad \text{或} \quad \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**，$d\sigma=dxdy$ 称为**面积元素**，x 和 y 称为**积分变量**，D 称为**积分区域**，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为**积分和(或黎曼和)**.

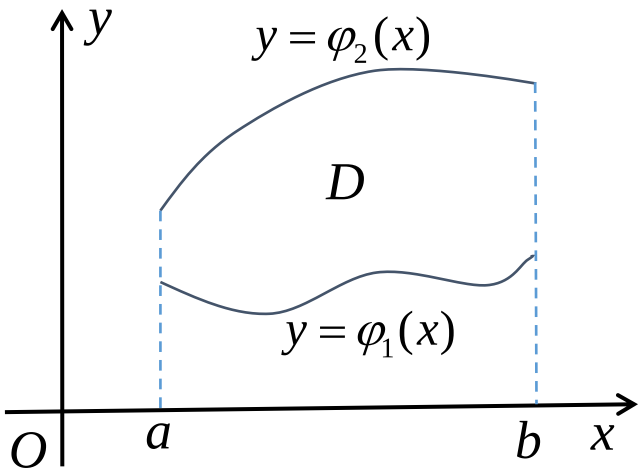
浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

二重积分的可积性

※ 二重积分可积性理论比定积分复杂，二重积分是否存在不仅与被积函数的性质有关，还与积分区域（特别是其“边界曲线”）的性质有关。

※ 如果常值函数 $f(x,y)=1$ 在 D 上可积，则称 D 为**可求面积**的，其积分值 $\iint\limits_D 1\,dxdy$ 即为 D 的面积。

定理（二重积分可积的充分条件） 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 $D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\right\}$ 上的连续函数，且 $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积 .



二重积分的性质

(1) 若 f 和 g 在 D 上都可积，α 和 β 为实数，则 $\alpha f+\beta g$ 在 D 上也可积，

并且 $\iint\limits_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))dxdy=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

(2) 若 $D=D_1\cup D_2$ ，其中 D_1,D_2 是两个无公共内点的有界闭区域，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

(3) 若 f 和 g 在 D 上都可积，如果在 D 成立 $f(x,y)\ge 0$ ，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy\ge 0$.

若在 D 上成立 $f(x,y)\ge g(x,y)$, 则有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\ge\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

二重积分的性质

(4) **(二重积分中值定理）** 若 D 是可求面积的，其面积记为$A(D)$ ， $f(x,y)$ 在 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$ ，使得 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\,A(D)$.

例 设 D 是可求面积的，证明 $f(x,y)=\begin{cases}1, & x,y\text{ 皆为有理数}\\ 0, & x\text{ 或 }y\text{ 为无理数}\end{cases}$ 在 D 上不可积.

证： 对 D 的任一分割，设介点为 (ξ_i,η_i) ， $i=1,2,\cdots,n$.

若取所有 ξ_i, η_i 为有理数（由有理数稠密性可得），则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = A(D)$.

同理，若取 ξ_i, η_i 至少有一个为无理数($i=1,2,\cdots,n$) ，则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = 0$.

两者不相等，由二重积分的定义知 $f(x,y)$ 在 D 上不可积 .


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY