浙江大学 2014-15 秋冬学期《 微积分Ⅰ》期末考试参考答案

课程号：___061B0170____，开课院系：___数学系___

考试形式：闭卷，允许带___笔____入场

考试日期：____2015____年___1___月___24____日，考试时间：___120____分钟.

考生姓名：______________学号：__________________所属院系：___________________

题序	**1-2**	**3-4**	**5-6**	**7-8**	**9-10**	**11-12**	**13-14**	**总 分**
得分								
评卷人								

【注】：**第 1~9 题，每题均为 6 分；第 10~13 题，每题均为 10 分；第 14 题 6 分.**

1. 设$f(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)$，求：$f'(1)$.

【方法一】：$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)=-99!$.

【方法二】：$f(x)=(x-1)[(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)]$,

则：$f'(x)=(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)+(x-1)[(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)]'$

故，$f'(1)=(-1)(-2)\cdots(-99)=-99!$.

2. 设函数$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+2\end{cases}$所确定，求：曲线$y=y(x)$的凸凹区间(用参数$t$的区间表示，并且也用$x$的区间能表示)；并计算拐点坐标(用点$(x,\ y)$表示).

(1) $\dfrac{dx}{dt}=3t^2+3,\dfrac{dy}{dt}=3t^2-3$，则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

(2) 令$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}=0$，则：$t=0$.

当$t<0$，即$x<1$时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$；当$t>0$，即$x>1$时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$；

因此，$y=y(x)$的凸区间为$(-\infty,1)$；凹区间为$(1,+\infty)$，拐点为$(1,2)$.

3. 设函数$y=y(x)$是由方程 $x^2=\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt$ 确定，求:曲线 $y=y(x)$ 上 $x=0$ 处的曲率半径.

(1) 当 $x=0$ 时，$\int_0^y e^{-t^2}dt=0$，而$e^{-t^2}>0$，且为连续函数，则：$y=0$.

(2) 等式两边同时对 x 求导：$2x=e^{-(y-x)^2}\cdot(y'-1)$.

则：$y'=2xe^{(y-x)^2}+1$，且$y'(0)=1$.

(3) 在 (2) 两边再对 x 求导，则：$2=-2e^{-(y-x)^2}(y'-1)^2+e^{-(y-x)^2}\cdot y''$.

因此，$y''(0)=2$.

(4) 曲线 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的曲率 $r=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

故，曲线 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的曲率半径$R=\dfrac{1}{r}=\sqrt{2}$.

4. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$.

【方法一】：
$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

【方法二】：
$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2 x+x^2\cdot 2\cos x\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin 2x-2x\cos^2 x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x+2(1+x^2)\cos 2x-2\cos^2 x+2x\sin 2x}{12x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4(1+x^2)\sin 2x+4\sin 2x}{24x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{2}+0+0=\frac{2}{3}.$$

【方法三】：
$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)]^2-x^2[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]^2}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)]-x^2[1-x^2+o(x^2)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{2}{3}.$$

5. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n+1}+(a-1)x^n+1}{x^{2n}-ax^n+1}$在区间$(0,+\infty)$内连续，求：常数$a$的值.

由于$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ \dfrac{1+a}{2-a} & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$，而$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，

则:$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$；又$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，

故，$f(1)=\dfrac{1+a}{2-a}=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

6. 求曲线$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-e^x}$的所有渐近线的方程.

(1) 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{-x}=-1$，故,$\lim\limits_{x\to0}y=\infty$；故，$x=0$为其渐近线.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-e^x}=0$，故，$y=0$为其渐近线.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-e^x}=1$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x\overset{x=-u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{-u}{e^u}=0.$

因此，该曲线的斜渐近线为：$y=x$.

综上可得，曲线的所有渐近线为：$x=0$，$y=0$和$y=x$.

7. 求定积分:$\int_{-2}^{2}(x-1)^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

【方法一】：$I=\int_{-2}^{2}(x^2+1-2x)\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_0^2(x^2+1)\sqrt{4-x^2}\,dx$ （令$x=2\sin u$）

$=8\int_0^{\frac{p}{2}}(4\sin^2u+1)\cos^2u\,du=8\int_0^{\frac{p}{2}}(1+3\sin^2u-4\sin^4u)\,du$

$=8\cdot(\dfrac{p}{2}+3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}-4\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2})=4p$.

【方法二】：$I=\int_{-2}^{2}(x^2+1-2x)\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_0^2(x^2+1)\sqrt{4-x^2}\,dx$

$=2\int_0^2\left(5-(4-x^2)\right)\sqrt{4-x^2}\,dx=10\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx-2\int_0^2(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$ （令$x=2\sin u$）

$=10\cdot\dfrac{p}{4}\times2^2-2\cdot2^4\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^4u\,du=10p-32\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}=4p$.

8. 计算反常积分：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx.$

【方法一】： $I=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x d\frac{1}{x^2}=-\frac{\arctan x}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\frac{p}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

【方法二】： 令$\arctan x=u$，则：$x=\tan u$，$dx=\sec^2 udu.$

$$I=\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}u\csc^2 u\cot udu=-\frac{1}{2}\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}ud(\cot^2 u)=-\frac{1}{2}\left(u\cot^2 u\right)\Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}(\csc^2 u-1)du$$

$$=\frac{p}{8}+\frac{1}{2}(-\cot u-u)\Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}=\frac{1}{2}.$$

9. 设常数$a>0$，$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}dx$，讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 是条件收敛，绝对收敛还是发散？并给出论证过程.

(1) $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+1}dx=\frac{\sqrt{a+1}}{n}$，$a_n>\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a}dx=\frac{\sqrt{a}}{n}$.

因此，$\frac{\sqrt{a}}{n}<a_n<\frac{\sqrt{a+1}}{n}$；故，$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$

(2) $a_{n+1}=\int_0^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{a+x^n}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}dx=a_n$，则：$\{a_n\}$ 单调递减.

根据*Leibniz* 判别法，交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(3) 又 $a_n>\frac{\sqrt{a}}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.

从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

10. 设$f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，且$f(x)$在$x=0$处连续.求：$f(0)$及曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}}=e^2$，故，$f(0)=e^2$.

$$(2)\ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\sin 2x)}{x}}-e^2}{x}$$

$$=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\sin 2x)-2x}{x}}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)-2x}{x^2}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}-2}{2x}$$

$$=e^2\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos 2x-1)-2\sin 2x}{2x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}-e^2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=-2e^2.$$

(3) 曲线$y=f(x)$在点$(0，e^2)$处的切线方程为$y=-2e^2x+e^2$.

11. 摆线L的参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2p，a>0)$,曲线L与x轴所围成的区域为D，求：D绕直线$y=2a$旋转一周所得立体的体积.

【方法一】：$V=p\cdot(2a)^2\cdot 2p a-p\int_0^{2a}(2a-y)^2dx$

$$=8p^2a^3-p\int_0^{2p}a^2(1+\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt=8p^2a^3-p a^3\int_0^{2p}4\cos^4\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}dt$$

$$\overset{\frac{t}{2}=u}{=}8p^2a^3-16p a^3\int_0^{p}\cos^4 u(1-\cos^2 u)du=8p^2a^3-32p a^3\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^4 u(1-\cos^2 u)du$$

$$=8p^2a^3-32p a^3\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\right)=7p^2a^3.$$

【方法二】：利用“柱壳法”(套筒法)及对称性.

$$V=2\times 2p\int_0^{2a}(p a-x)(2a-y)dy=4p a^3\int_0^{p}(p-t+\sin t)(1+\cos t)\sin t dt$$

$$=4p a^3\int_0^{p}\left(p\sin t-t\sin t+\sin^2 t-t\sin t\cos t+p\sin t\cos t+\sin^2 t\cos t\right)dt$$

$$=4p a^3\left(2p-p+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}+0+0\right)=7p^2a^3.$$

【注】：• $\int_0^{p}t\sin t dt=\frac{p}{2}\int_0^{p}\sin t dt=p$，$\int_0^{p}\sin^2 t dt=\int_0^{p}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{p}{2}$,

• $\int_0^{p}t\sin t\cos t dt=\frac{1}{2}\int_0^{p}t d(\sin^2 t)=-\frac{1}{2}\int_0^{p}\sin^2 t dt=-\frac{p}{4}$.

12. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛半径、收敛域及和函数.

(1) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot\frac{2n+1}{4n^2+4n+3}=1.$

故，级数的收敛半径$r=1$；当$x=-1$或$x=1$时，级数的通项不趋向于零，故，级数发散；因此，该级数的收敛域为：$(-1,1)$.

(2) 记$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((2n+1)+\frac{2}{2n+1}\right)x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(2n+1)x^{2n}dx\right)'=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=S_2(0)+\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}dx=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

因此，$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & (-1<x<1\text{且}x\neq 0)\\ 3 & (x=0)\end{cases}$.

13. (1) 设 $0<x<+\infty$，证明：$\exists h\in(0,1)$ 使得$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+h}}$.

(2) 对上面所得h，求出h 关于 x的表达式$h=h(x)$，并确定当$0<x<+\infty$时，函数$h=h(x)$的值域.

【方法一】:(1) 记$f(x)=\sqrt{u}$，则：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，且$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

在区间$[x，x+1]$上应用*Lagrange*中值定理，$\exists h\in(0,1)$ 使得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+h}}.$$

又当 $x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$，故，上式所得$h$ 是唯一的；即h 为 x的函数.

(2) 由(1) 可得，$h=\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x$，且

$h'(x)=\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}})-1\geq 0$. (注：*Cauchy*不等式)

因此，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x\right)=\dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+2(\sqrt{x^2+x}-x)\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2}$.

因此，$h(x)$的值域为$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$.

【方法二】:(1) 由$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+h}}$可得，$h=\dfrac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x$.

因此，对任意$0<x<+\infty$均存在h 满足:$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+h}}$.

(2) 下面证明：$h\in(0,1)$. 当$x>0$时，有

$h=\dfrac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)>\dfrac{1}{4}$.

$h=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+(x+1)}{2}-x\right)=\dfrac{1}{2}$.

因此,$\dfrac{1}{4}<h<\dfrac{1}{2}$.【注意】：由此并不能得出$h(x)$的值域为$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$.

(3) $h'(x)=\dfrac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})-1\ge 0$. (注：*Cauchy*不等式)

因此，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x\right)=\dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+2(\sqrt{x^2+x}-x)\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2}$.

因此，$h(x)$的值域为$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$.

14. 证明:(1) $\displaystyle\int_0^{2p}\frac{\sin x}{x}dx>0$; (2) 对$\forall a\in(0,\dfrac{p}{2})$ 有,$\displaystyle\int_0^{2p}\frac{\sin x}{x}dx>\sin a\ln\frac{p^2-a^2}{a(2p-a)}$.

(1) $\displaystyle\int_0^{2p}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{p}\frac{\sin x}{x}dx+\int_p^{2p}\frac{\sin x}{x}dx\overset{x=p+u}{=}\int_0^{p}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^{p}\frac{-\sin u}{u+p}du$

$\displaystyle=\int_0^{p}\sin x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+p}\right)dx=p\int_0^{p}\frac{\sin x}{x(x+p)}dx>0$.

(2) 对$\forall a\in(0,\dfrac{p}{2})$,$\displaystyle\int_0^{2p}\frac{\sin x}{x}dx=p\int_0^{p}\frac{\sin x}{x(x+p)}dx>p\int_a^{p-a}\frac{\sin x}{x(x+p)}dx$

$\displaystyle>p\sin a\int_a^{p-a}\frac{dx}{x(x+p)}=\sin a\cdot\left(\ln x-\ln(x+p)\right)\Big|_a^{p-a}=\sin a\ln\frac{p^2-a^2}{a(2p-a)}$.

【注】：本题证明的关键在于在计算$\displaystyle\int_0^{p}\frac{\sin x}{x(x+p)}dx$时，如何消去被积函数中的$\sin x$，而当$a\in(a,2p-a)$时,$\sin x>\sin a$.