第11章（二）
第二类曲线积分

浙江大学数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

变力沿曲线做功

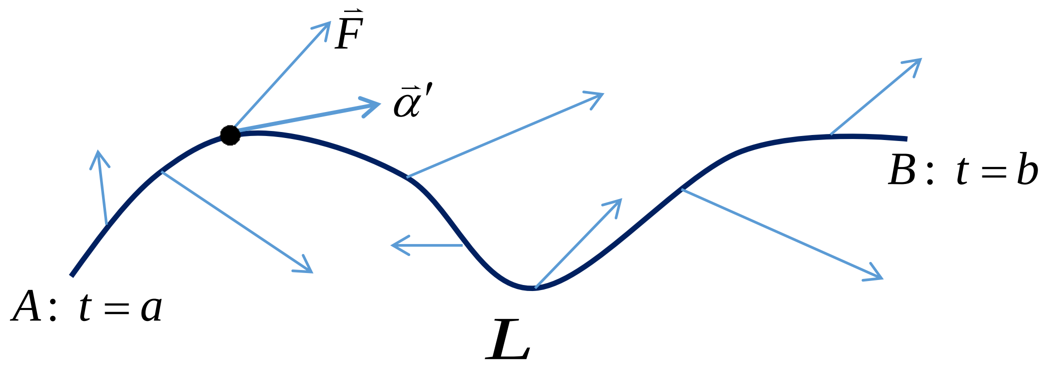
力场沿曲线所作的功

假设一质点在力场 $\vec{F}=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$ 的作用下沿着 R^3 中的曲线 L： $\vec{\alpha}:[a,b]\to\mathrm{R}^3,\quad \alpha(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$.

移动（从曲线一端 A 到另一端 B）所做的功为

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}}\mathrm{s}=\vec{F}\cdot\vec{\alpha}'\cdot\mathrm{dt}$$

$$W=\int_L\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}}\mathrm{s}=\int_a^b\big(\vec{F}\cdot\vec{\alpha}'\big)\mathrm{dt}=\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=0}^{n}\Big(\vec{F}(\xi_i)\cdot\vec{\alpha}'(t_{\xi_i})\Big)\Delta t_i\ ,\ [\text{对任意分割P和介点}\xi]$$



弧长微分 $\vec{\mathrm{d}}\mathrm{s}=\vec{\alpha}'\cdot\mathrm{dt}$

$=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\mathrm{dt}=\big(\mathrm{dx},\mathrm{dy},\mathrm{dz}\big)$

第二类曲线积分的概念与计算

定义 设 $\alpha:[a,b]\to R^3$ 为分段光滑曲线， $\vec{F}:\ R^3\supset D\to R^3$ 为连续的向量场，曲线 $C\subset D$, 则 $\vec{F}$ 沿 C 的曲线积分（**第二类曲线积分**）为

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\alpha=\int_a^b\left[\vec{F}\left(\alpha(t)\right)\cdot\alpha'(t)\right]\mathrm{d}t\,.$$

- 当 C 为闭曲线时，记为 $\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\alpha$, 此时注意曲线的方向.
- 设 $\vec{F}=\left(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\right)$， $\vec{\alpha}(t)=\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$， 则

$$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\alpha=\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b\left[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x'(t)+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot y'(t)+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot z'(t)\right]\mathrm{d}t\,.$$

- 两类曲线积分的关系 $\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\alpha=\int_C\left(\vec{F}\cdot\vec{\alpha}'^{0}\right)\mathrm{d}s$

第二类曲线积分的性质

(1) $\int_{C^-} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha^- = -\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha$

(2) $\int_C \left(k_1\vec{F} + k_2\vec{G}\right) \cdot \mathrm{d}\alpha = k_1\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha + k_2\int_C \vec{G} \cdot \mathrm{d}\alpha \quad (k_1, k_2 \in \mathrm{R})$

(3) $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha$ (C 由 C_1, C_2 按顺序拼接而成)

(4) 若 α, β 为曲线 C 的等价的参数表示，则 $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\beta$

第二类曲线积分例题

例 1 计算 $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$， 逆时针方向（正向）.

例 2 计算 $\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$，其中 C 为：

(1) 从 $(0,0)$ 沿 $y = x^2$ 到 $(1,1)$；

(2) 从 $(0,0)$ 沿 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 到 $(1,1)$；

(3) 沿折线从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$，再到 $(1,1)$.


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY