第9章（三）
多元函数极值

浙江大学数学科学学院　卢兴江

多元函数的极值

定义 设 $f: R^n \supset D \to R$, 若 $\exists U(P_0) \subset D$, 使 $\forall P \in U(P_0)$, 有

$$f(P) \le f(P_0) \quad (或\ f(P) \ge f(P_0)),$$

则称 $f(P_0)$ 为的**极大值**(或**极小值**)，P_0 称为**极大值点**(或**极小值点**).

极大值与极小值统称为**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点** .

- 对二元函数 $z = f(x,y)$，在 $P_0(x_0,y_0)$ 点：

$f(x_0,y_0)$ 为极大值 $\Leftrightarrow$ $\exists U(P_0)$, 对 $\forall (x,y) \in U(P_0)$ 有 $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$.

$f(x_0,y_0)$ 为极小值 $\Leftrightarrow$ $\exists U(P_0)$, 对 $\forall (x,y) \in U(P_0)$ 有 $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$.

- **例如：** 上半锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 处有极小值 0.

  旋转抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$，在 $(0,0)$ 处有极大值 2.

多元函数的极值

定理 **(极值的必要条件)** 设 $f: R^n \supset D \to R$ 在 D 的内点 P_0 取到极值，且 f 在 P_0 点的偏导数存在，则 $f_i'(P_0)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

- 所有 f 的偏导数都为零的点称为 f 的**驻点**．
- 极值点必在驻点或偏导数不存在的点取到．
- P_0 不是 f 的极值点 $\Leftrightarrow$ $\forall U(P_0)$, $\exists P' \in U(P_0)$, $f(P') > f(P_0)$, 又 $\exists P'' \in U(P_0)$, $f(P'') < f(P_0)$.

定理 **(极值的充分条件)**设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续的二阶偏导数，且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}''(x_0,y_0)$, 则有

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时， $f(x_0,y_0)$ 为极值，且

当 $A>0 \ (C>0)$ 时， $f(x_0,y_0)$ 为极小值； 当 $A<0 \ (C>0)$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

求多元函数极值的例题

例 1 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

解： 显然函数 $f(x,y)$ 没有偏导不存在的点，

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=4x^3-2x-2y=0 \\ f_y'(x,y)=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $P_1(-1,-1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,0)$.

又有 $A=f_{xx}''=12x^2-2$, $B=f_{xy}''=-2$, $C=f_{yy}''=12y^2-2$.

对 $P_1(-1,-1)$： $B^2-AC=-96<0$, 且 $A=10>0$, 因此 $f(-1,-1)=-2$ 为极小值.

对 $P_2(1,1)$： $B^2-AC=-96<0$, 且 $A=10>0$, 因此 $f(1,1)=-2$ 也为极小值.

对 $P_3(0,0)$： $B^2-AC=0$. 从下面可知 $f(0,0)=0$ 不是极值.

(1) 在 $\forall U(P_3)$, 取 $(x,x)\in U(P_3)$, $0<|x|<\sqrt{2}$, 有 $f(x,x)=2x^2(x^2-2)<0=f(0,0)$.

(2) 在 $\forall U(P_3)$, 取 $(x,-x)\in U(P_3)$, $x\neq 0$, 有 $f(x,-x)=2x^4>0=f(0,0)$.

求多元函数极值的例题

例 2 求点 $P(1,-2,\ 0)$ 到曲面 $4y=x^2-z^2$ 最小距离.

解： 设曲面 $4y=x^2-z^2$ 上的一点为 $P'(x,y,z)$，P 与 P' 的距离为 d, 则

$d^2=(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=x^2-2x+y^2+4y+z^2+5$,将 $4y=x^2-z^2$ 代入得

$$d^2=2x^2-2x+y^2+5\triangleq f(x,y).$$

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=4x-2=0 \\ f_y'(x,y)=2y=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $P_0\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

又 $A=f_{xx}''(x,y)=4,\ B=f_{xy}''(x,y)=0,\ C=f_{yy}''(x,y)=2$, 所以 $B^2-AC=-8<0,\ A>0$,

因此 $f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{9}{2}$ 为极小值，也是最小值，于是所求的距离最小值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

- 以上问题可归结为：求满足条件 $4y=x^2-z^2$ 函数 $f(x,y)=(x-1)^2+(y+2)^2+z^2$ 的最小值.

条件极值

问题 求满足条件 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 下，求目标函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的极值.

这种含约束条件的极值问题称为**条件极值**.

- 如果能从 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 中解出一个变量，譬如 $x_n = h(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 代入 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中即转化为求 $f[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, h(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})]$ 的无条件极值.
- 但是，以上的“解出”往往非常困难。下面我们以二元函数为例来阐述如何求解条件极值：**求满足约束条件 $g(x, y) = 0$ 下目标函数 $f(x, y)$ 的极值.**

解： 假设 $g(x, y)$ 存在隐函数 $y = y(x)$, 那么即为求 $f[x, y(x)]$ 的极值了.

由一元函数极值的必要条件，在极值点 (x, y) 有： $\big(f[x, y(x)]\big)'_x = 0.$

即 $f'_x + f'_y \cdot y'(x) = 0,$ 再对 $g(x, y) = 0$ 两边对 x 求导得 $y'(x) = -\dfrac{g'_x}{g'_y}$,

条件极值

代入得 $f'_x - f'_y \cdot \dfrac{g'_x}{g'_y} = 0$. 记 $\lambda = -\dfrac{f'_y}{g'_y}$, 则有 $\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ ……(*).

若作函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, 那么(*)式即为 F **取极值的必要条件**.

即 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$

- $F(x,y,\lambda)$ 称为**拉格朗日函数**，λ 称为**拉格朗日乘数（乘子）**.
- 以上这种将条件极值转化为无条件极值的方法称为**拉格朗日乘数法**.

注 (1) 以上 (*) 式解出的“驻点”是否确为条件极值点，则需另行判断.

(2) 许多条件极值问题是一些具体实际问题，如果从问题本身易知解出的“驻点”必为所求极值点，那么我们不再从理论上进行极值的判断.

条件极值例题

- 对于其他多元函数的情形，以及有多个约束条件的情况可类似求解.

例如求在约束条件 $\varphi_1(x,y,z)=0,\ \varphi_2(x,y,z)=0$ 下求 $f(x,y,z)$ 的极值:

作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi_1(x,y,z)+\mu\varphi_2(x,y,z)$,

由 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}=0$ 可解出驻点，然后判断是否是所求极值点.

例 (1) 求原点到曲线 $\begin{cases}2z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的最短和最长距离.

(2) 求椭球面 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$ 上在第一卦限内的一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，使过 P 点，法向量为 $\left(\dfrac{x_0}{6},\dfrac{y_0}{3},\dfrac{z_0}{2}\right)$ 的平面与三个坐标平面围成的四面体体积最小.


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY