电路分析与电子技术基础

非正弦分析

（6.1～6.2）

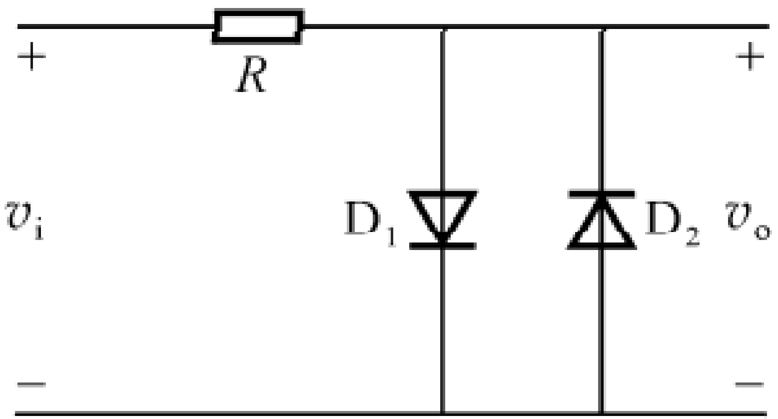
n 非正弦分析

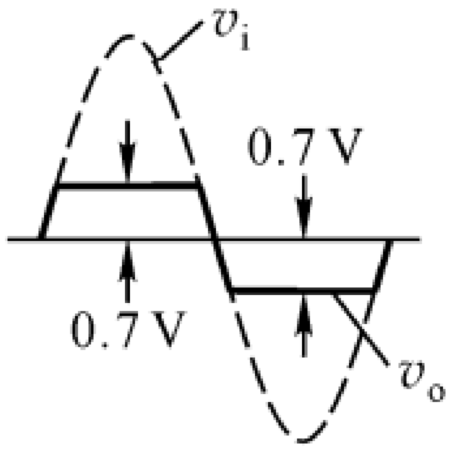
- ü 实际应用中，以非正弦信号为主。

- v 非正弦周期信号（6.1.1）
- v 傅里叶级数分解（6.1.2）
- v 有效值、平均值（6.1.3）
- v 功率（6.1.4）
- v 稳态计算（6.2）

v 非正弦周期信号

- ü 存在的现实：
  （1）激励（信号）源是非正弦的，或非理想的正弦；
  （2）电路中存在非线性元件。





- ü 特点：非正弦、周期性变化。

- ü 可以利用傅里叶级数分解为一系列不同频率的正弦分量。
（直流信号和各次谐波信号的叠加）

- 傅里叶级数分解

Ø 傅里叶级数

- ü 满足狄里赫利条件的周期函数均可分解为傅里叶级数。

- ü 狄里赫利条件：
  在一个周期内，具有有限个极值点、有限个间断点和绝对可积。

- ü 利用傅里叶级数，可以将非正弦周期信号分解为一系列不同频率的正弦分量（或者说：直流信号和各次谐波信号的叠加）。
  利用傅里叶级数，可求得非正弦周期信号的频谱。

- ü 非周期信号，可以利用傅里叶积分变换作类似分析 ...
  （假设非周期信号的周期为无穷大，将时间域信号转换到频率域中）

Ø 傅里叶级数（三角函数形式）

ü 定义一周期信号：$f(t)=f(t+kT)$ ，其中 T 为周期，k 为任意整数。对应的傅里叶级数（三角函数形式）为：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(a_{\mathrm{n}}\cos n w_1 t+b_{\mathrm{n}}\sin n w_1 t)$$

其中，$w_1=\frac{2p}{T}$ 称为基波角频率，a_0、a_{n}、b_{n} 称为傅里叶系数。

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad 或 \quad \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n w_1 t\,dt \quad 或 \quad \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n w_1 t\,dt$$

$$b_{\mathrm{n}}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n w_1 t\,dt \quad 或 \quad \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n w_1 t\,dt$$

Ø 傅里叶级数（三角函数形式）

ü 利用傅里叶级数，可以将非正弦周期信号分解为一系列不同频率的正弦分量（或者说：直流信号和各次谐波信号的叠加）。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(a_{\mathrm{n}}\cos nw_1t+b_{\mathrm{n}}\sin nw_1t)$$

ü 傅里叶级数的另种表示方式：

$$f(t)=A_0+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}A_{\mathrm{n}}\cos(nw_1t+j_{\mathrm{n}})$$

其中，$A_0=\dfrac{a_0}{2}$ 称为直流分量；$A_1\cos(w_1t+j_1)$ 称为基波分量；

$n\geqslant 2$ 以后的分量分别称为二次、三次 ...（高次）谐波分量；

$A_{\mathrm{n}}=\sqrt{a_{\mathrm{n}}^2+b_{\mathrm{n}}^2}$ 和 $j_{\mathrm{n}}=-tg^{-1}\dfrac{b_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}}$ 分别是第 n 次谐波的幅值和初相角。

Ø 傅里叶级数（三角函数形式）

ü 利用傅里叶级数，可以将非正弦周期信号分解为一系列不同频率的正弦分量（或者说：直流信号和各次谐波信号的叠加）。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(a_\mathrm{n}\cos nw_1 t+b_\mathrm{n}\sin nw_1 t)$$

ü 傅里叶级数的另种表示方式：

$$f(t)=A_0+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}A_\mathrm{n}\cos(nw_1 t+j_\mathrm{n})$$

$$f(t)=A_0+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}A_\mathrm{n}\sin(nw_1 t+j'_\mathrm{n})$$

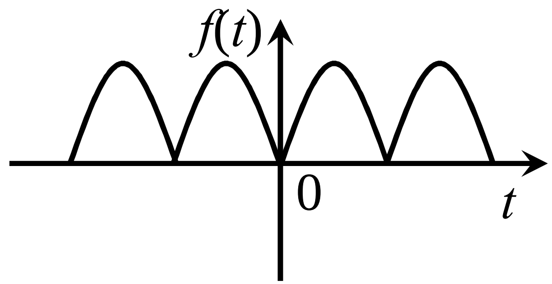
其中，$j'_\mathrm{n}=tg^{-1}\dfrac{a_\mathrm{n}}{b_\mathrm{n}}$

ü 谐波分析：将周期信号分解为直流、基波和高次谐波。

Ø 傅里叶级数（谐波分析）

- 针对偶函数（偶对称，纵轴对称）：$f(t)=f(-t)$

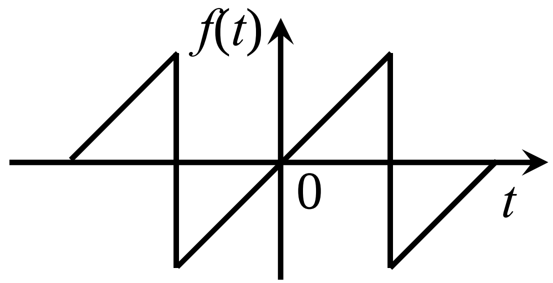
  傅里叶级数中的 $b_n=0$。



$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nw_1 t\,dt$$

- 针对奇函数（奇对称，原点对称）：$f(t)=-f(-t)$

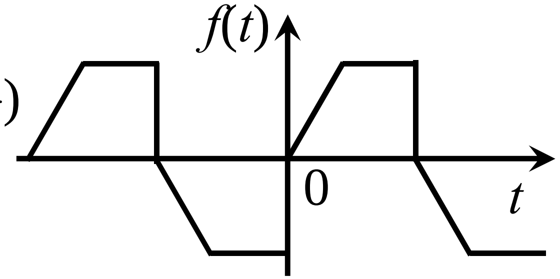
  傅里叶级数中的 $a_0=0$，$a_n=0$。



$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin nw_1 t\,dt$$

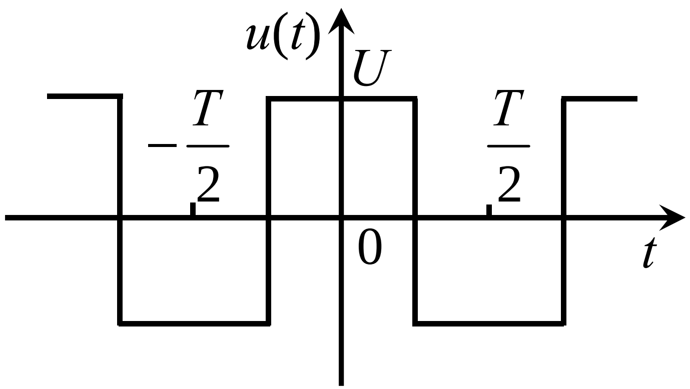
- 针对横轴半波对称（镜像对称）：$f(t)=-f(t+\frac{T}{2})$

  傅里叶级数中只含奇次谐波，即 $A_{2k}=0$。



【例5.1】

右图所示（对称方波）信号波形。



波形表达式：

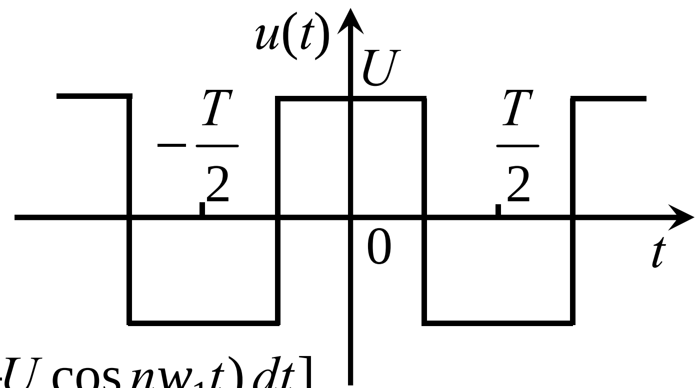
$$u(t)=\begin{cases} -U & -\frac{T}{2}<t<-\frac{T}{4} \\ U & -\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4} \\ -U & \frac{T}{4}<t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

求：此信号的傅里叶级数展开式。

解：$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)\,dt=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}(-U)\,dt+\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}U\,dt+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}(-U)\,dt]=0$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)\cos nw_1t\,dt$$

$$=\frac{2}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}(-U\cos nw_1t)\,dt+\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}U\cos nw_1t\,dt+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}(-U\cos nw_1t)\,dt]$$



$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} (-U\cos nw_1 t)\,dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} U\cos nw_1 t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (-U\cos nw_1 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{U}{nw_1}\cdot\left[(-\sin nw_1 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + (\sin nw_1 t)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + (-\sin nw_1 t)\Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{U}{nw_1}\cdot\left[4\sin(nw_1\cdot\frac{T}{4}) - 2\sin(nw_1\cdot\frac{T}{2})\right]$$

$$= \frac{4U}{np}\cdot\sin(n\frac{p}{2})$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

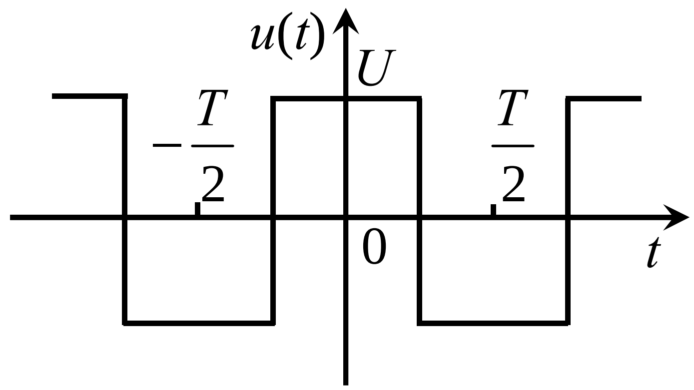
$$w_1 = \frac{2p}{T}$$

因此，当 n 为偶数时：$a_n = 0$；

当 n 为奇数时：$a_n = \pm\frac{4U}{np}$ （1,5,9...为正，3,7,11...为负）

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\sin nw_1 t\,dt = 0$$ （也可由偶函数推得）

$a_0=0$， $a_n=\pm\dfrac{4U}{n\pi}$ （n 为奇数时）， $b_n=0$



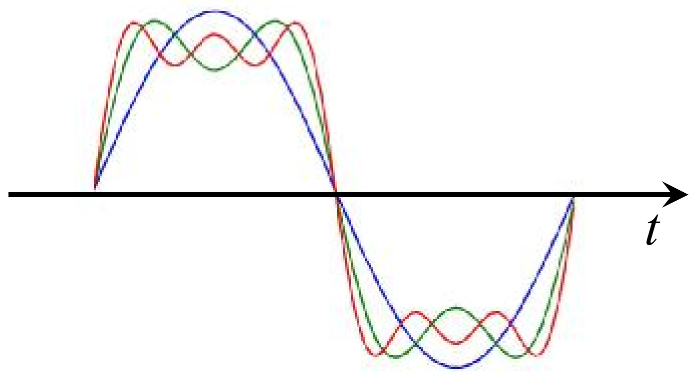
所求信号的傅里叶展开式为：

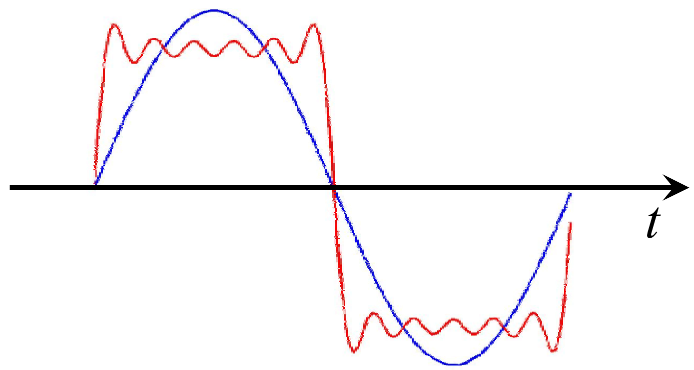
$$u(t)=\frac{4U}{\pi}\cdot[\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t+\cdots]$$

傅里叶展开为无穷级数，在工程实际应用中，应根据：展开后的收敛性、电路频率特性以及精度要求等，确定项数。

基波　基波+3次谐波　基波+3次谐波+5次谐波

基波+3次谐波+5次谐波+7次谐波





Ø 傅里叶级数（频谱）

ü 基于周期信号的傅里叶级数（三角函数形式），定义：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n w_1 t + j_n)$$

振幅频谱：谐波（从 0 开始计）幅值 A_n 与角频率 ω 关系；
相位频谱：谐波（从 0 开始计）初相角 j_n 与角频率 ω 关系。

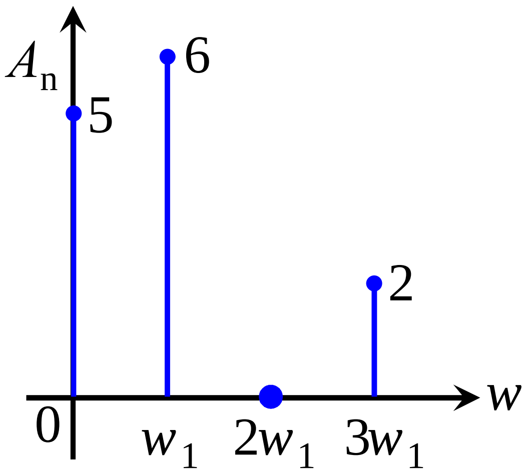
ü 频谱图：包括振幅频谱图（幅频特性图）、相位频谱图（相频特性图）。
纵坐标分别是谐波幅值、初相角；横坐标是角频率。

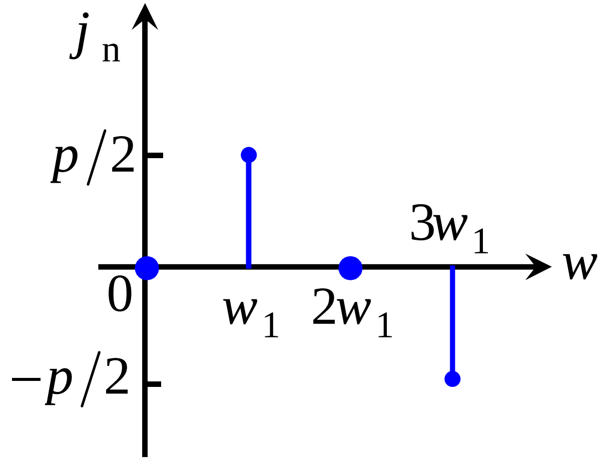
【例5.2】

已知信号：$f(t)=5+6\cos(w_1 t+\frac{p}{2})+2\cos(3w_1 t-\frac{p}{2})$

求：信号的频谱图。

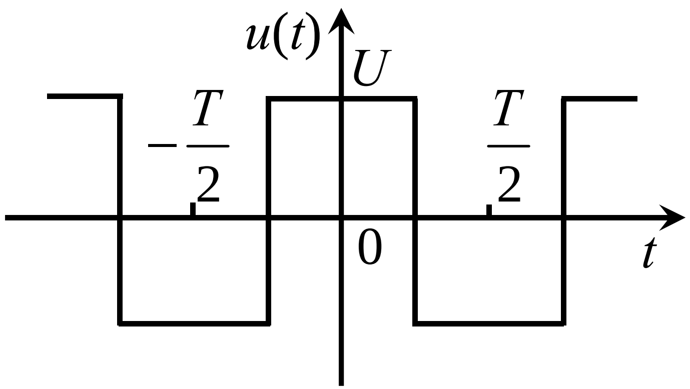
解：振幅频谱图和相位频谱图分别如下所示。





【例5.3】

求：【例5.1】所示信号的频谱图。

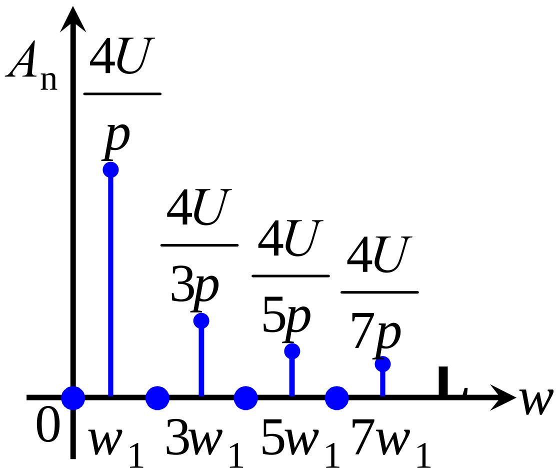


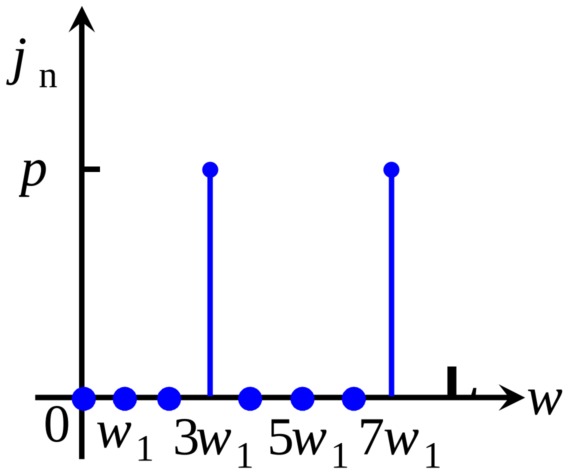
解：所求信号的傅里叶展开式为：

$$u(t)=\frac{4U}{\pi}\cdot[\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t+\cdots]$$

$$=\frac{4U}{\pi}\cdot[\cos\omega_1 t+\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t+\pi)+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t+\frac{1}{7}\cos(7\omega_1 t+\pi)+\cdots]$$

所以，振幅频谱图和相位频谱图分别如下所示。





傅里叶级数（复指数形式）

- 周期信号对应的傅里叶级数（三角函数形式）为：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nw_1t+b_n\sin nw_1t)$$

- 利用欧拉公式：$\begin{cases}\cos nw_1t=\dfrac{e^{jnw_1t}+e^{-jnw_1t}}{2}\\[2ex]\sin nw_1t=\dfrac{e^{jnw_1t}-e^{-jnw_1t}}{2j}\end{cases}$

经过计算，可得：$f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{F}_n e^{jnw_1t}$

- 复指数形式：将周期信号表示成一系列以 jnw_1t 为指数的函数形式；（周期信号的频域表达式）

Ø 傅里叶级数（复指数形式）

- ü 周期信号对应的傅里叶级数（指数形式）为：$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_n e^{jnw_1 t}$

- ü 频谱函数：$\dot{F}_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2} = \dfrac{A_n}{2} e^{jj_n}$ 可以表述各谐波分量的所有信息。

模：等于对应谐波分量幅值的一半；
幅角（n 为正时）：等于对应谐波分量的初相角。

- ü 振幅频谱：$\dot{F}_n$ 的幅值与角频率 ω 关系（偶函数）；
  相位频谱：$\dot{F}_n$ 的幅角 j_n 与角频率 ω 关系（奇函数）。

- ü 双边频谱 —— 单边频谱

（双边振幅频谱负部以纵轴为对称对折，对应振幅相加后得单边振幅频谱）

Ø 傅里叶级数（复指数形式）

ü 频谱函数的计算：$F_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2} = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot(\cos nw_1 t - j\sin nw_1 t)\,dt$

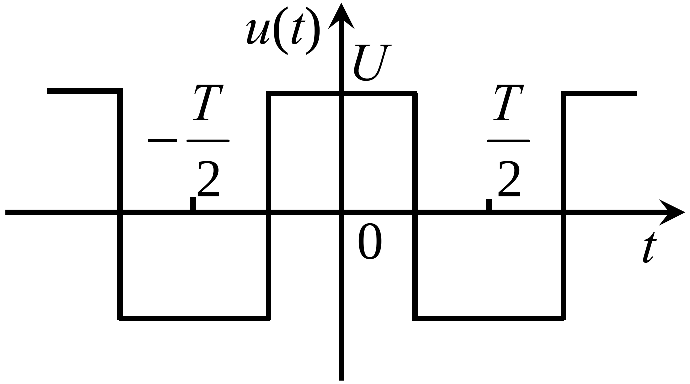
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jnw_1 t}\,dt$$

$$或 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jnw_1 t}\,dt$$

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$或 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

【例5.4】



求：【例5.1】所示信号的
复指数形傅里叶级数展开式及其频谱图。

解：$\dot{F}_n = \dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt = \cdots = \dfrac{2U}{n\pi}\sin(n\dfrac{\pi}{2})$

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,dt = 0$$

因此，当 n 为偶数时：$\dot{F}_n = 0$ ；

当 n 为奇数时：$\dot{F}_n = \pm\dfrac{2U}{n\pi}$ （1,5,9...为正，3,7,11...为负）

傅里叶级数展开式：$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega_1 t}$

频谱函数的计算过程？

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$e^{-jx} + e^{jx} = 2\cos x$$

$$e^{-jx} - e^{jx} = -j2\sin x$$

$$w_1 = \frac{2p}{T}$$

频谱函数的计算过程?

以 $w_1 t$ 为积分变量

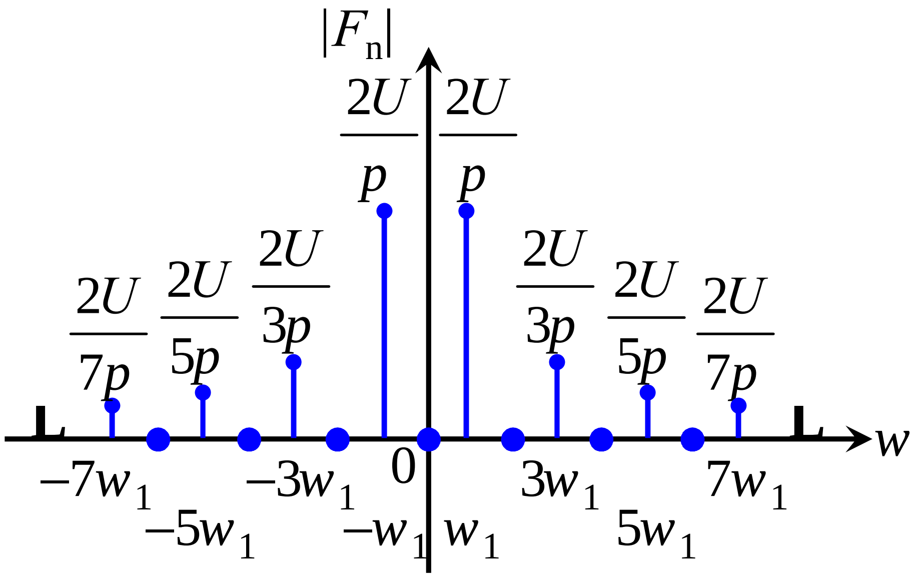
$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

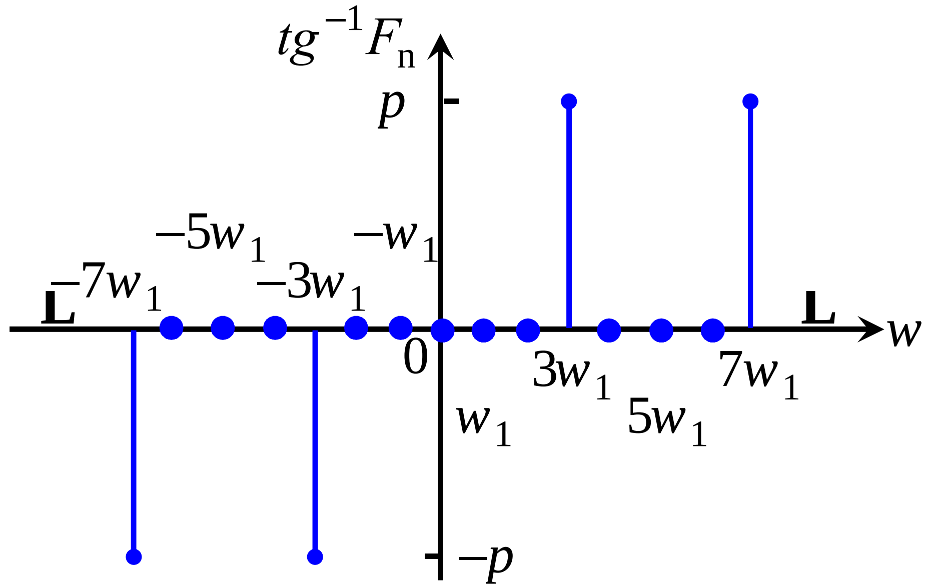
$$e^{-jx} + e^{jx} = 2\cos x$$

$$e^{-jx} - e^{jx} = -j2\sin x$$

频谱（双边）图

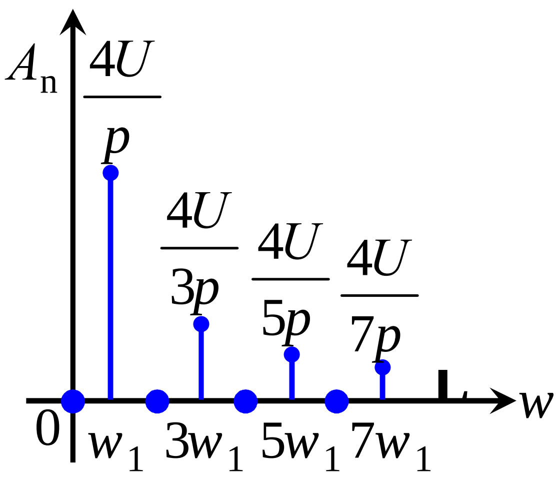
$F_0 = 0 \quad \dot{F}_n = \pm\dfrac{2U}{n\pi}$（奇数）

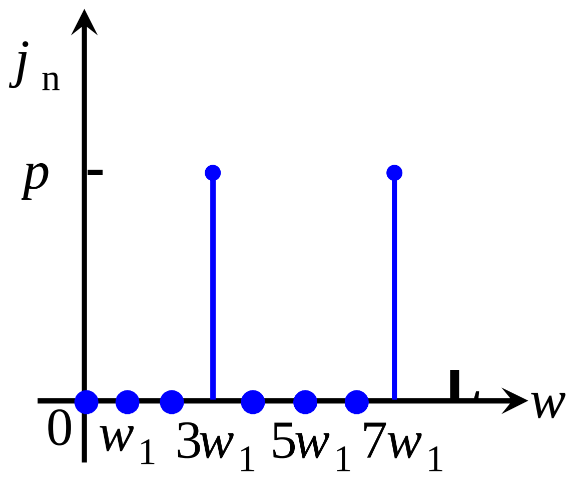




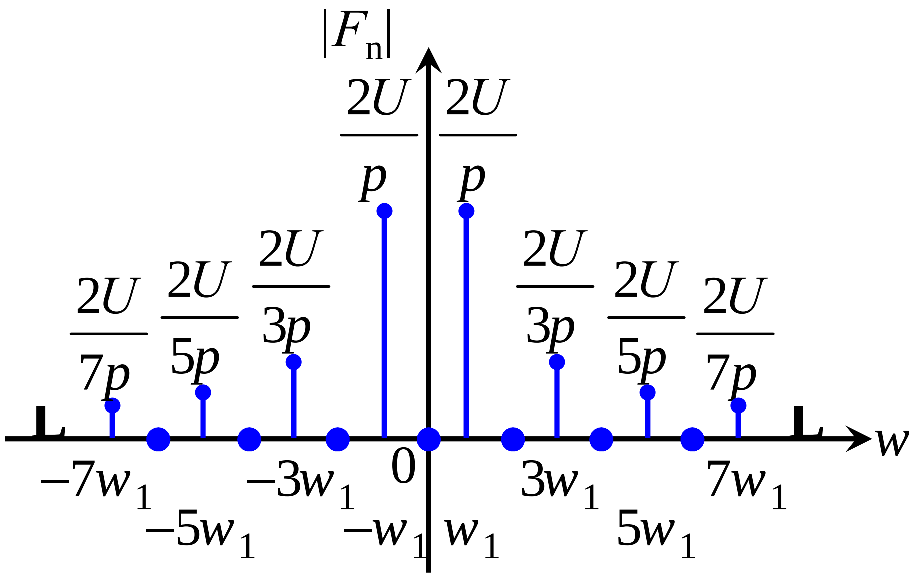
（双边振幅频谱负部以纵轴为对称对折，对应振幅相加后得单边振幅频谱）

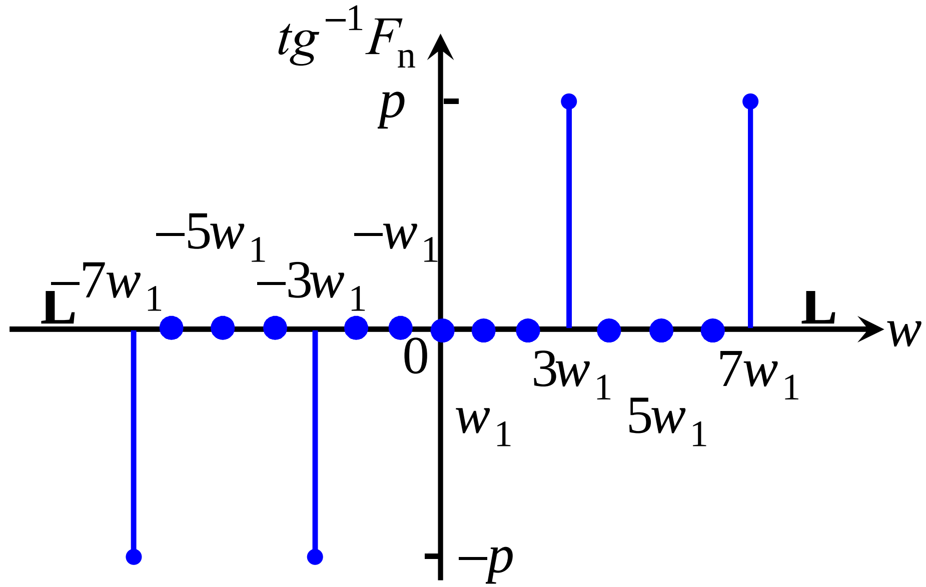
（对应原单边频谱图）



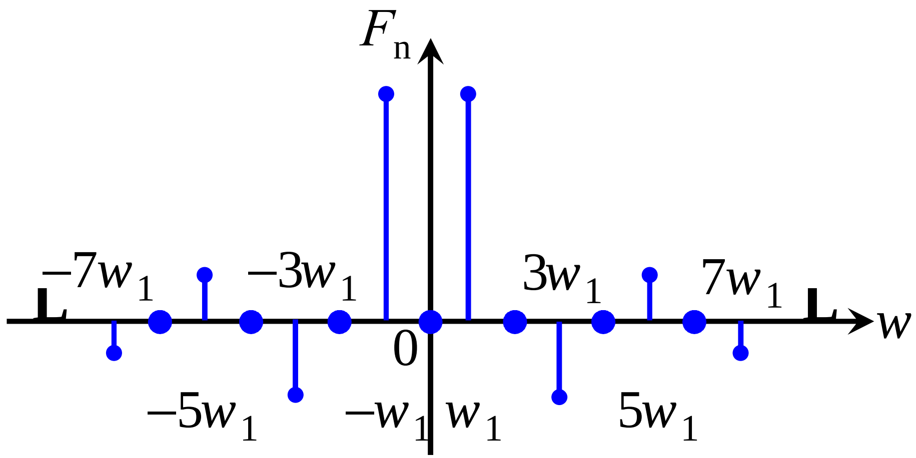


频谱（双边）图



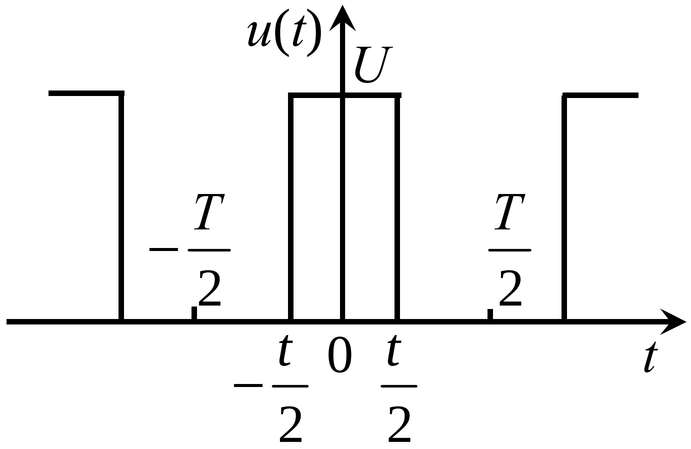


当 F_n 为实数，即各谐波分量的相位为 0 或 ±π时，可将频谱图合并。



【例5.5】

右图所示（周期脉冲）信号波形。



波形表达式：

$$u(t)=\begin{cases}0 & -\frac{T}{2}<t<-\frac{t}{2}\\ U & -\frac{t}{2}<t<\frac{t}{2}\\ 0 & \frac{t}{2}<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

求：此信号的频谱函数，并作频谱图。

解：$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)e^{-jnw_1t}\,dt=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}Ue^{-jnw_1t}\,dt\right]=\frac{U}{T}\cdot\frac{1}{-jnw_1}\cdot\left[e^{-jnw_1t}\Big|_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\right]$$

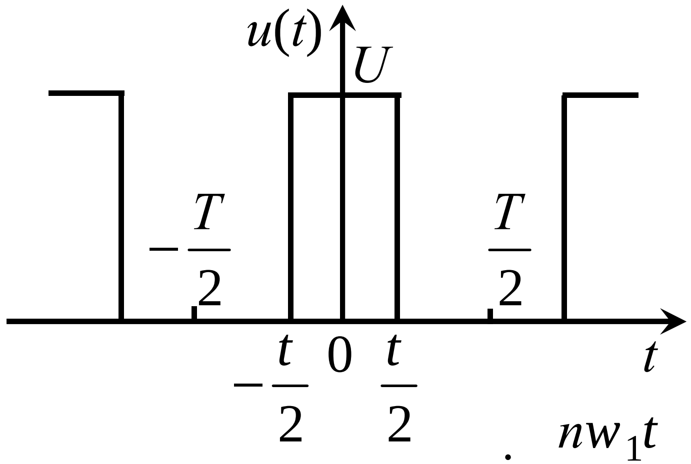
$$=\frac{tU}{T}\cdot\frac{\sin\frac{nw_1t}{2}}{\frac{nw_1t}{2}}$$

$$F_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)\,dt=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}U\,dt\right]=\frac{tU}{T}$$

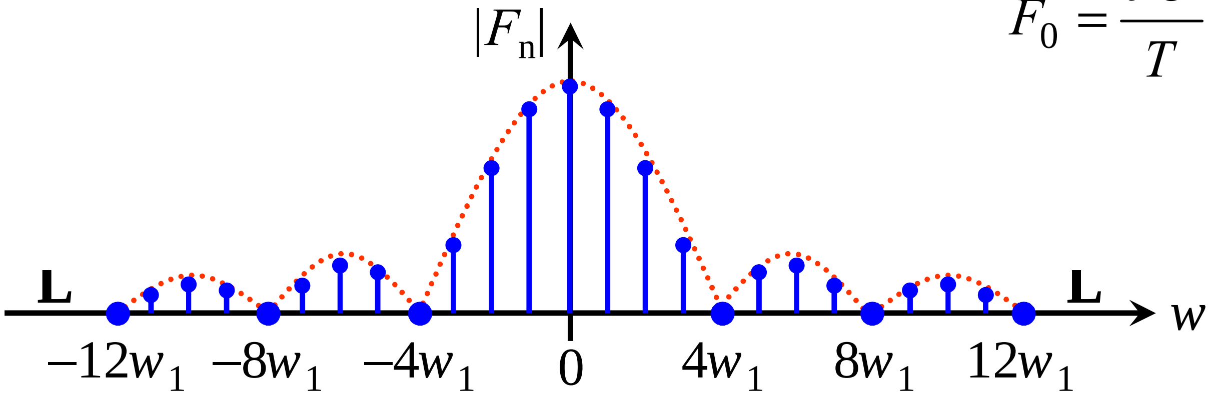
令：$t = \frac{T}{4}$

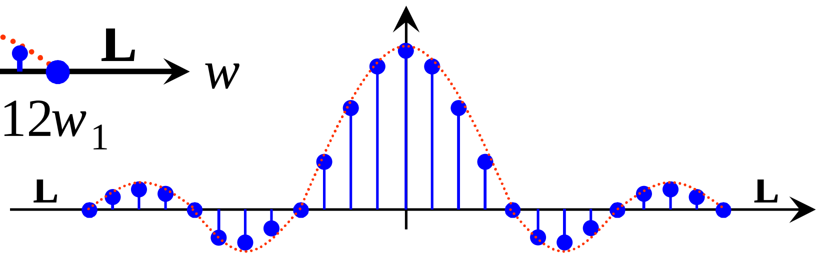
则：$F_0 = \frac{U}{4}$ $\quad \dot{F}_n = \frac{U}{4} \cdot \frac{\sin\frac{np}{4}}{\frac{np}{4}}$

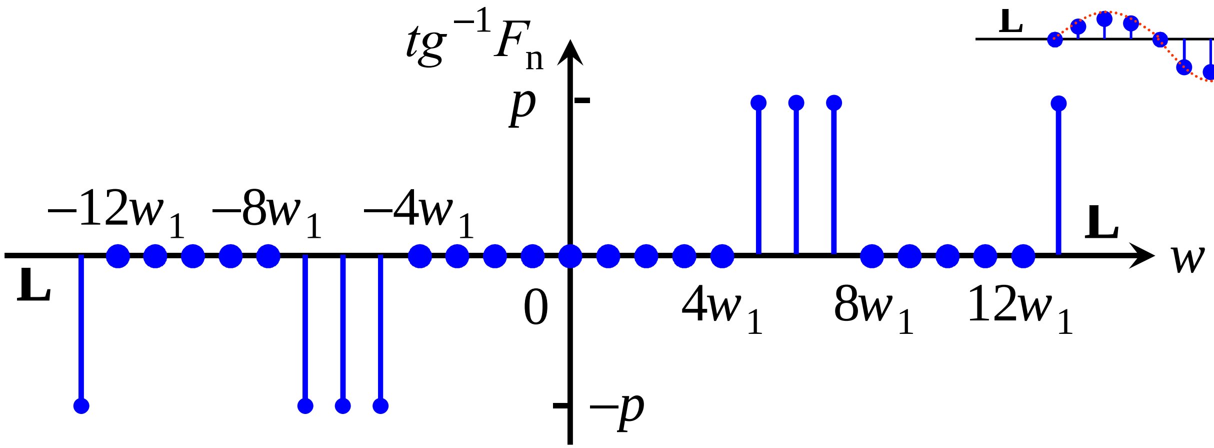
由此可作出频谱图。



$$F_0 = \frac{t\,U}{T} \qquad \dot{F}_n = \frac{t\,U}{T} \cdot \frac{\sin\frac{nw_1 t}{2}}{\frac{nw_1 t}{2}}$$

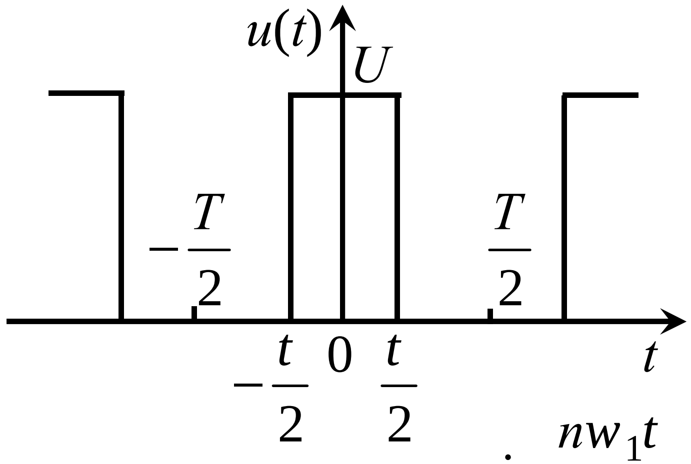




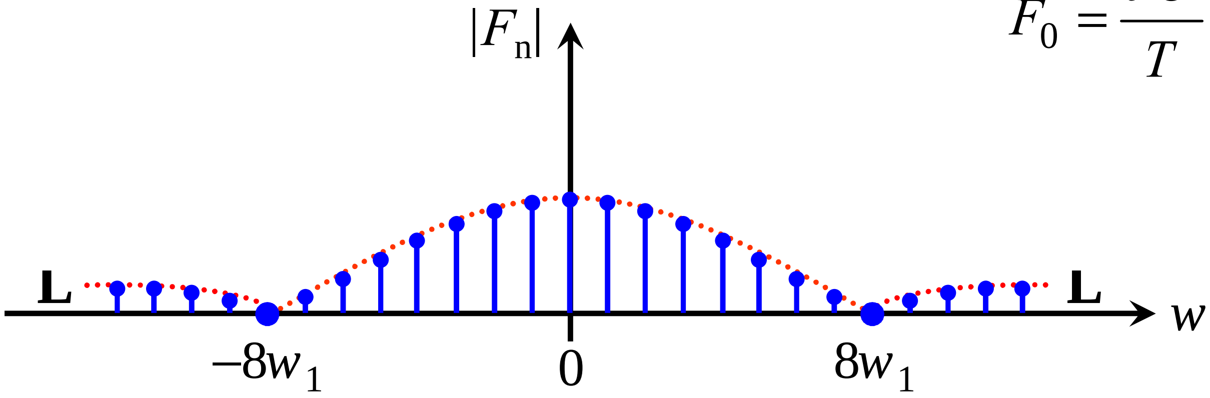


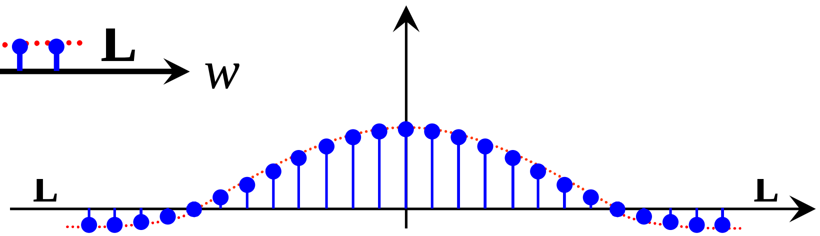
$$令：t = \frac{T}{8}$$

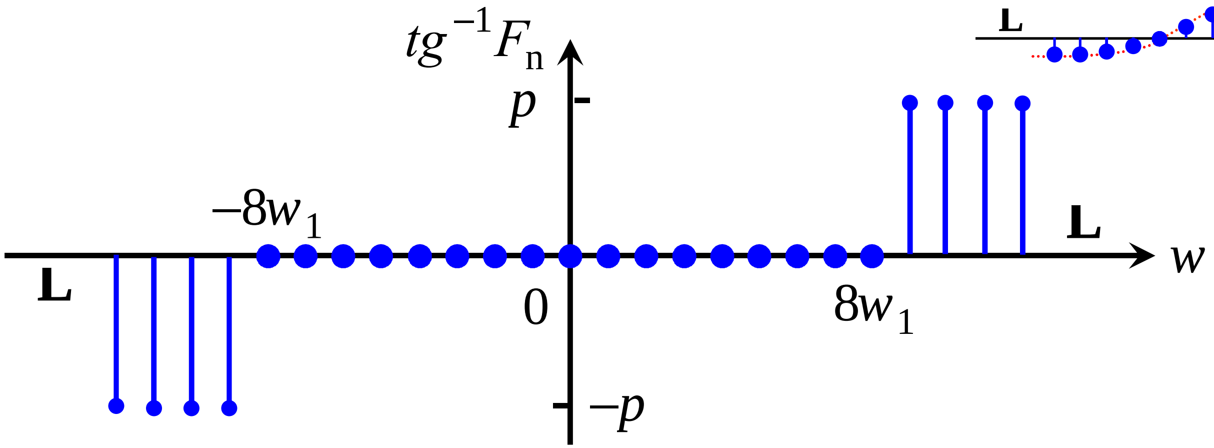
$$则：F_0 = \frac{U}{8} \quad F_n = \frac{U}{8} \cdot \frac{\sin\frac{np}{8}}{\frac{np}{8}}$$



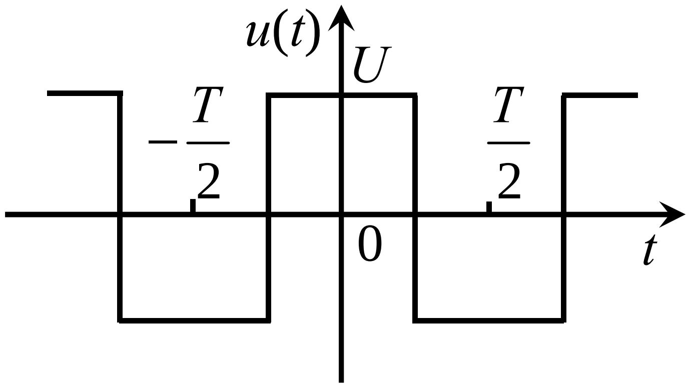
$$F_0 = \frac{tU}{T} \quad F_n = \frac{tU}{T} \cdot \frac{\sin\frac{nw_1 t}{2}}{\frac{nw_1 t}{2}}$$



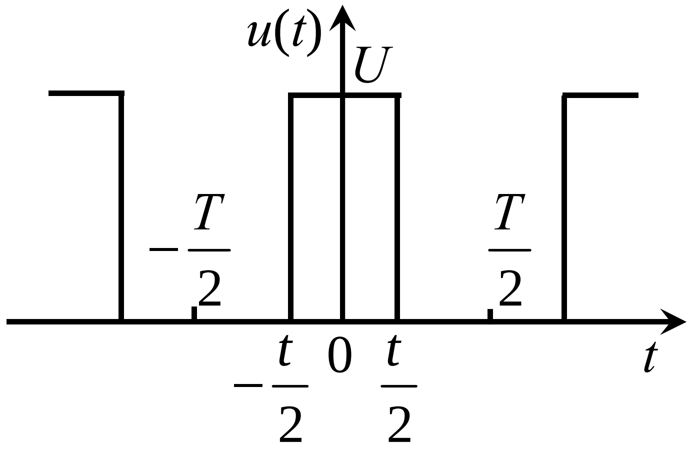




$$令：t = \frac{T}{m} \; ？$$

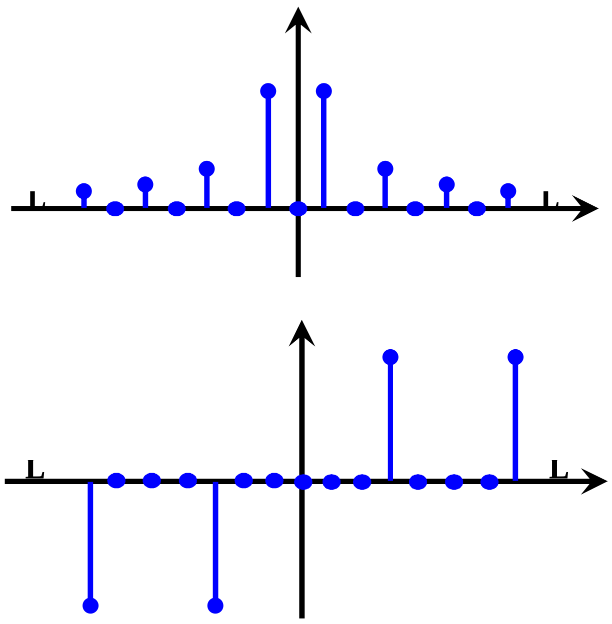


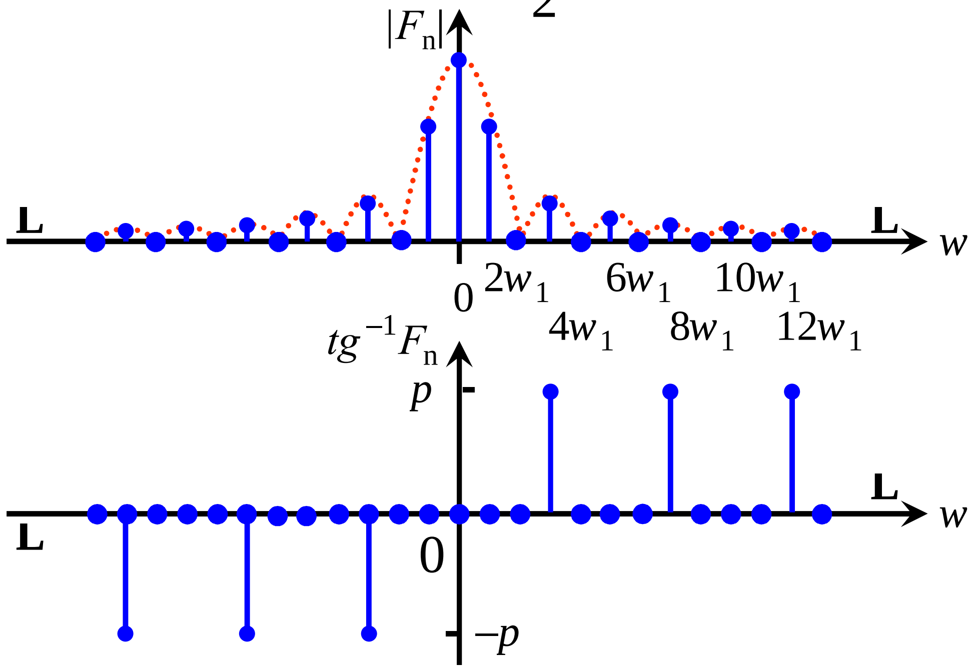
$$t = \frac{T}{2}$$



$$F_0 = 0 \quad \dot{F}_n = \frac{2U}{np}\sin(n\frac{\pi}{2})$$

$$F_0 = \frac{U}{2} \quad \dot{F}_n = \frac{U}{2}\cdot\frac{\sin\frac{np}{2}}{\frac{np}{2}} = \frac{U}{np}\cdot\sin\frac{np}{2}$$





Ø 傅里叶级数（频谱特征）

ü 离散性：

频谱图由一系列的离散谱线组成的，所有谱线都出现在基波频率 ω_1 的整数倍频率上（即：谱线间隔为 ω_1 ）。

ü 包络性和收敛性（针对振幅频谱）：

包络性：谱线高度受 sinc 函数制约；

收敛性：频率增加时，谱线高度总体趋势逐渐减小，最后收敛于零。

ü 频谱函数代表的是一个时域信号，信号分析常对频谱函数进行。

Ø 傅里叶级数（频谱特征）

ü 零振幅频率：

当 $w = \frac{2kp}{t} (k = \pm 1, \pm 2 \mathbf{L})$，即 $w = k\frac{T}{t}w_1$ 时，振幅为零。

ü 有效频谱宽度（信号的占有频率）：

$w = 0 \sim \frac{2p}{t}$ （或 $\frac{T}{t}w_1$）是信号能量的主要分布区；
这是研究信号与系统频率特性的重要内容。

ü 在保持脉冲宽度 $\boldsymbol{\tau}$ 不变的情况下，若增大脉冲周期 T，则基波频率 ω_1 变小，谱线变密，同时振幅减小，收敛速度降低；

若无限增大脉冲周期 T，则谱线间隔趋于零，振幅趋于零；（此时，离散频谱过渡为连续频谱，周期信号过渡为非周期信号）

ü 在保持脉冲周期 T 不变的情况下，若减少脉冲宽度 $\boldsymbol{\tau}$，则振幅减小，收敛速度降低，但有效频谱宽度及相邻零振幅频率间隔增大。

Ø 傅里叶级数（功率谱）

ü 周期信号的平均功率（在 1Ω电阻上的消耗），即：

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt$$

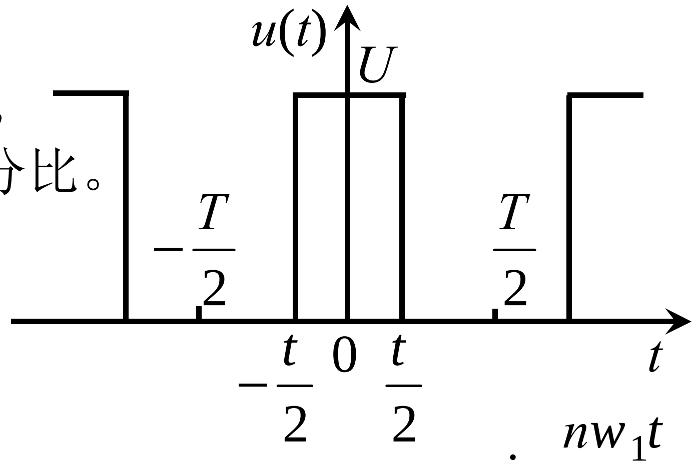
根据周期信号的复指数表达方式，有：$P=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\dot{F}_n|^2$

说明：周期信号在时域的平均功率等于频域中各分量（包括直流和各次谐波）平均功率之和。

ü 功率谱：$|\dot{F}_n|^2$ 与角频率ω 关系（离散频谱）。

【例5.6】

求：【例5.5】所示信号在有效频谱宽度内，谐波分量平均功率占信号总平均功率的百分比。



解：定义 $t = \dfrac{T}{m}$，则信号的平均功率为：

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{U^2}{T}\cdot t\Big|_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} = \frac{U^2}{m}$$

$$F_0 = \frac{tU}{T} \qquad \dot{F}_n = \frac{tU}{T}\cdot\frac{\sin\frac{nw_1 t}{2}}{\frac{nw_1 t}{2}}$$

有效频谱宽度为 mw_1，谐波分量平均功率为：

$$P_x = \sum_{n=-(m-1)}^{m-1}|\dot{F}_n|^2 = |\dot{F}_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{m-1}|\dot{F}_n|^2 = \left(\frac{U}{m}\right)^2 + 2\left(\frac{U}{m}\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{m-1}\left(\sin c\frac{np}{m}\right)^2$$

以 m 分别为 3、5、7 为例，

信号功率分别为：$\frac{1}{3}U^2, \frac{1}{5}U^2, \frac{1}{7}U^2$

谐波功率分别为：$0.3011U^2, 0.1806U^2, 0.1290U^2$

功率比为 90%。

v 有效值

- ü 有效值：从能量等效的概念出发，衡量周期性交流信号大小的量。

  周期信号的有效值：$F=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt}$

- ü 非正弦周期信号：$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}A_n\sin(nw_1t+j_n)$

  有效值：$F=\sqrt{A_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2}$

  非正弦周期函数的有效值：

直流分量与各次谐波分量有效值平方和的方根值。

v 平均值

- ü 周期信号的平均值：$f_{\mathrm{AV}} = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$
- ü 非正弦周期信号：$f(t) = A_0 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \sqrt{2} A_{\mathrm{n}} \sin(n w_1 t + j_{\mathrm{n}})$
- ü 正弦周期信号的平均值：$f_{\mathrm{AV}} = 0$

  非正弦周期信号的平均值：$f_{\mathrm{AV}} = A_0$

- ü （整流）平均值：$f_{\mathrm{AVR}} = \dfrac{1}{T}\int_0^T |f(t)|dt$

  正弦周期信号的（整流）平均值：$f_{\mathrm{AVR}} = \dfrac{2A_{\mathrm{m}}}{p}$

v 功率

$$u(t)=U_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}U_n\sin(nw_1t+j_{un})$$

$$i(t)=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}I_n\sin(nw_1t+j_{in})$$

- ü 瞬时功率：$p(t)=u(t)\cdot i(t)$
- ü 平均功率：$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=U_0I_0+\sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\cos j_n=P_0+\sum_{n=1}^{\infty}P_n$

非正弦周期信号的平均功率：直流分量与各次谐波分量平均功率之和。

不同次谐波不能产生功率。

v 稳态计算

ü 非正弦周期信号激励的稳态电路，无法直接采用直流或正弦电路的分析方法。

ü 基本思路：

（1）将非正弦周期信号分解为傅里叶级数表达式，根据所需精度及各项收敛性，确定高次谐波的项数；

（2）分别计算在直流和各次谐波分量激励作用下的电路响应；

直流作用：直流电路分析法（电感短路，电容开路）；

谐波作用：正弦交流电路分析法（电感/感抗 ... 电容/容抗 ... ）

（3）应用叠加定理将相应响应进行叠加。

叠加原则：按频率叠加；

叠加对象：有效值、瞬时值（不能是相量）。

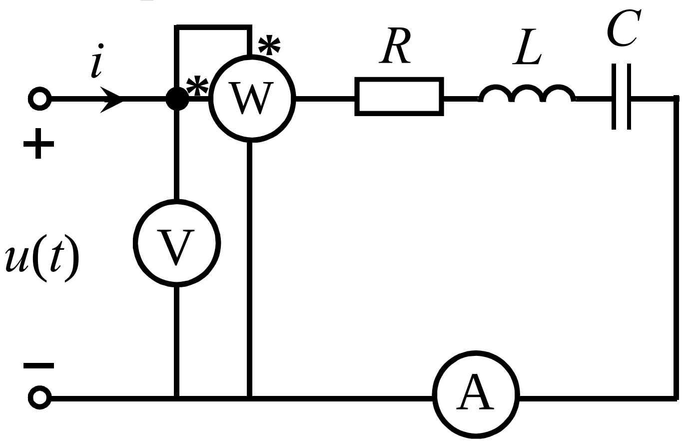
【例5.7】

右下图所示电路。

已知：$u(t)=180\sin(w_1 t-30^{\circ})+18\sin 3w_1 t+9\sin(5w_1 t+30^{\circ})\mathrm{V}$

$$R=6\Omega \quad w_1 L=2\Omega \quad \frac{1}{w_1 C}=18\Omega$$

求：电压表、电流表和功率表的读数。



解：激励源中仅包含 1、3、5 次谐波。

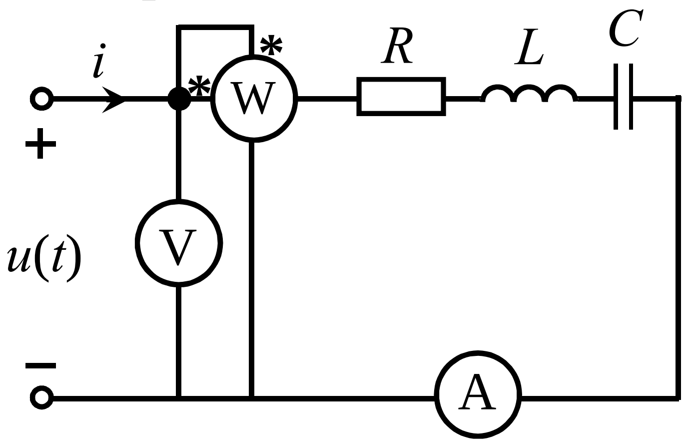
针对 1 次谐波单独分析，有：

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R+jw_1 L-j\dfrac{1}{w_1 C}}=\frac{\dfrac{180}{\sqrt{2}}\angle-30^{\circ}}{6+j2-j18}=7.45\angle 39.4^{\circ}\,\mathrm{A}$$

右下图所示电路。

已知：$u(t)=180\sin(w_1 t-30^{0})+18\sin 3w_1 t+9\sin(5w_1 t+30^{0})\text{V}$

$$R=6\Omega \quad w_1 L=2\Omega \quad \frac{1}{w_1 C}=18\Omega$$



求：电压表、电流表和功率表的读数。

同理，分别单独分析 3、5 次谐波，有：

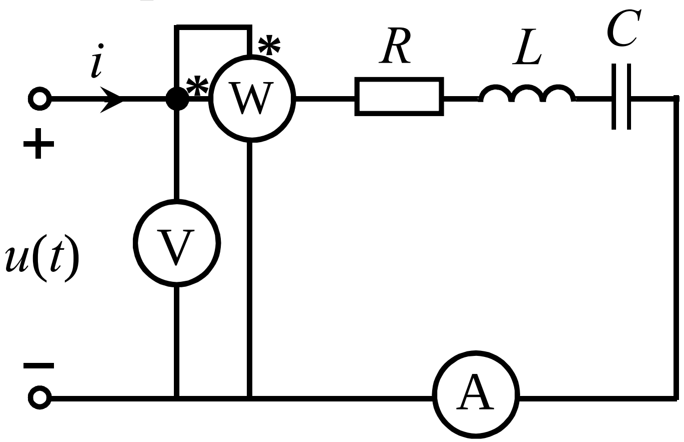
$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_3}{R+j3w_1L-j\dfrac{1}{3w_1C}}=\frac{\dfrac{18}{\sqrt{2}}\angle-0^{0}}{6+j3\times2-j\dfrac{18}{3}}=2.12\angle0^{0}\,\text{A}$$

$$\dot{I}_5=\frac{\dot{U}_5}{R+j5w_1L-j\dfrac{1}{5w_1C}}=\frac{\dfrac{9}{\sqrt{2}}\angle30^{0}}{6+j5\times2-j\dfrac{18}{5}}=0.73\angle-16.8^{0}\,\text{A}$$

右下图所示电路。

已知：$u(t)=180\sin(\omega_1 t-30^{\circ})+18\sin 3\omega_1 t+9\sin(5\omega_1 t+30^{\circ})\mathrm{V}$

$$R=6\Omega \quad \omega_1 L=2\Omega \quad \frac{1}{\omega_1 C}=18\Omega$$



求：电压表、电流表和功率表的读数。

$$\dot{I}_1=7.45\angle 39.4^{\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_3=2.12\angle 0^{\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_5=0.73\angle -16.8^{\circ}\,\mathrm{A}$$

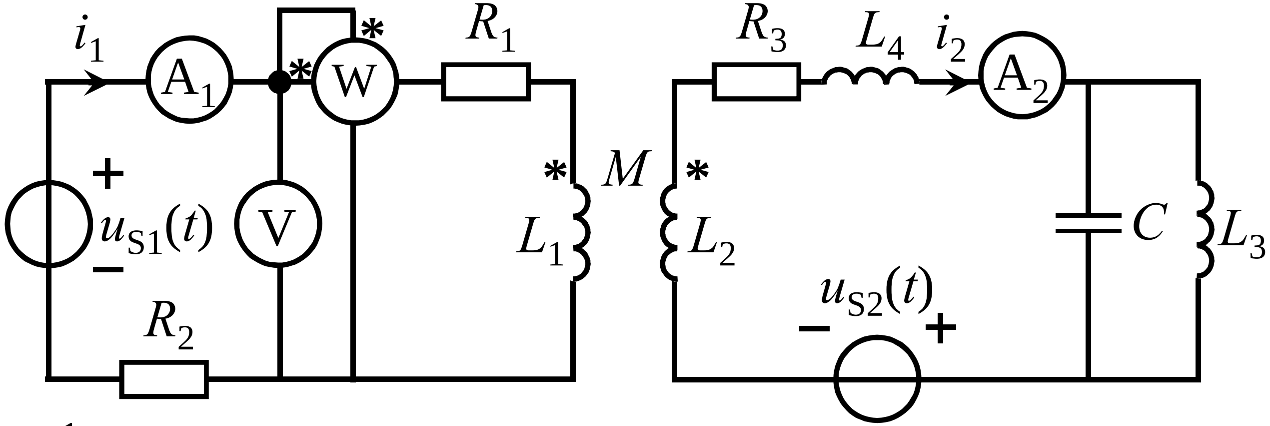
叠加：$i(t)=7.45\sqrt{2}\sin(\omega_1 t+39.4^{\circ})+2.12\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t+0.73\sqrt{2}\sin(5\omega_1 t-16.8^{\circ})\mathrm{A}$

$$I=\sqrt{I_1^2+I_3^2+I_5^2}=7.78\mathrm{A}$$

所以：$U=\sqrt{U_1^2+U_3^2+U_5^2}=128.97\mathrm{V}$

$$P=P_1+P_3+P_5=U_1 I_1\cos\varphi_1+U_3 I_3\cos\varphi_3+U_5 I_5\cos\varphi_5=363.16\mathrm{W}$$

【例5.8】



右图所示电路。

已知：

$R_1 = R_2 = 10\Omega$，

$R_3 = 20\Omega$，

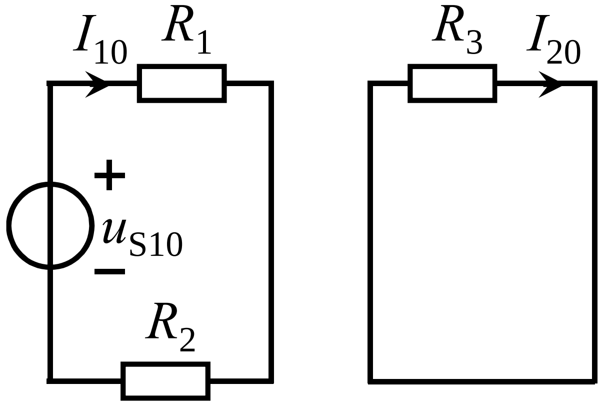
$$w_1 L_1 = w_1 L_2 = w_1 L_3 = \frac{1}{w_1 C} = 20\Omega，\ w_1 L_4 = 2.5\Omega，\ w_1 M = 10\Omega$$

$$u_{S1}(t) = 10 + 60\sqrt{2}\sin w_1 t\ \text{V}，\ u_{S2}(t) = 40\sqrt{2}\sin w_1 t + 30\sqrt{2}\sin 3w_1 t\ \text{V}$$

求：电压表、电流表和功率表的读数。

解：电路中有两个激励源，包含直流、1、3 次谐波。

单独分析直流（电路图如右所示）：

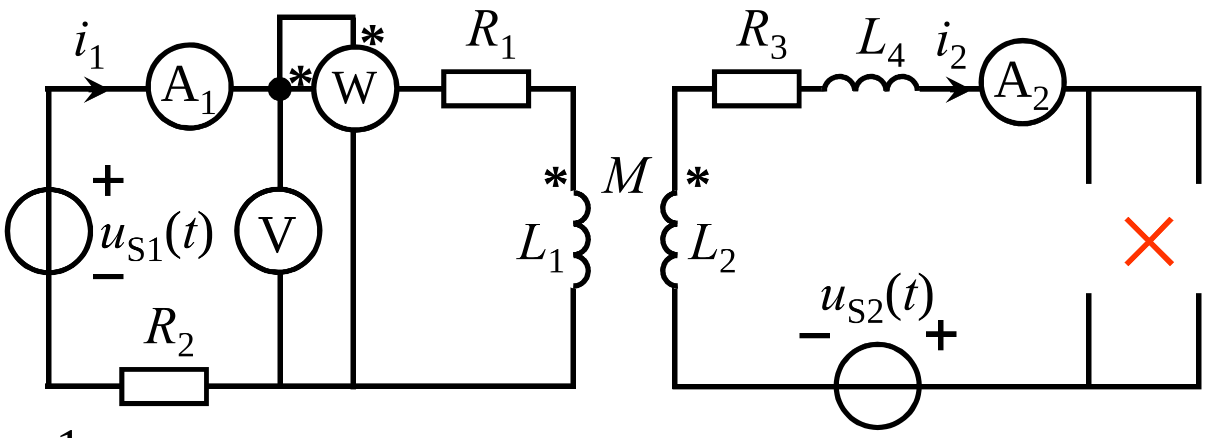


$$I_{10} = \frac{U_{S10}}{R_1 + R_2} = 0.5\text{A}$$

$$I_{20} = 0\text{A}$$

$$U_0 = I_{10} R_1 = 5\text{V}$$

右图所示电路。



已知：

$R_1 = R_2 = 10\Omega$，

$R_3 = 20\Omega$，

$w_1 L_1 = w_1 L_2 = w_1 L_3 = \dfrac{1}{w_1 C} = 20\Omega$，$w_1 L_4 = 2.5\Omega$，$w_1 M = 10\Omega$

$u_{S1}(t) = 10 + 60\sqrt{2}\sin w_1 t \text{ V}$，$u_{S2}(t) = 40\sqrt{2}\sin w_1 t + 30\sqrt{2}\sin 3w_1 t \text{ V}$

单独分析 1 次谐波时：$jw_1 L_3 // \dfrac{1}{jw_1 C} \to \infty$

即，L_3C 发生并联谐振（如上）。

有：$\dot{I}_{11} = \dfrac{\dot{U}_{S11}}{R_1 + R_2 + jw_1 L_1} = \dfrac{60\angle 0^{\circ}}{20 + j20} = 1.5\sqrt{2}\angle -45^{\circ} \text{ A}$

$\dot{I}_{21} = 0\text{A}$

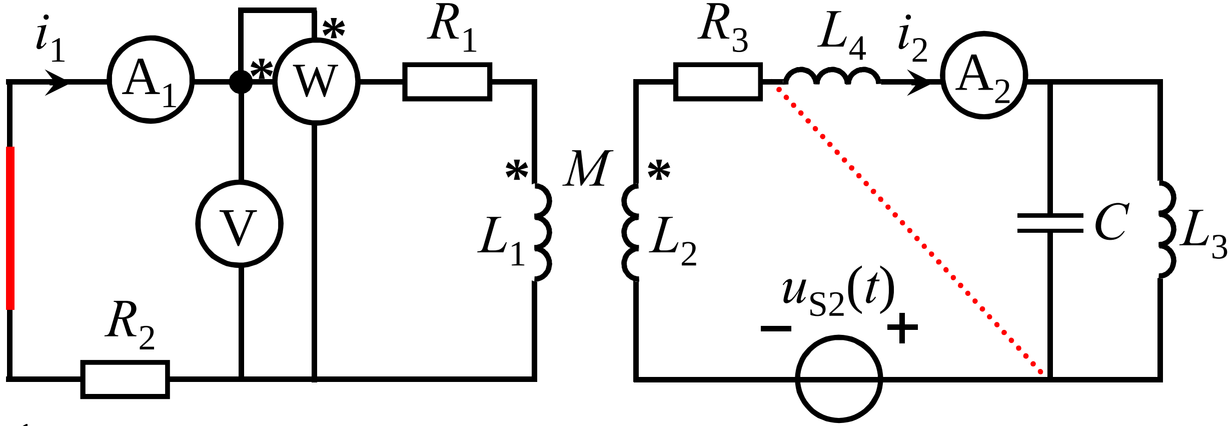
$\dot{U}_1 = \dot{I}_{11} \cdot (R_1 + jw_1 L_1) = 1.5\sqrt{2}\angle -45^{\circ} \times (10 + j20) = 47.4\angle 18.4^{\circ} \text{ V}$

右图所示电路。

已知：

$R_1 = R_2 = 10\Omega$，

$R_3 = 20\Omega$，



$$\omega_1 L_1 = \omega_1 L_2 = \omega_1 L_3 = \frac{1}{\omega_1 C} = 20\Omega，\ \omega_1 L_4 = 2.5\Omega，\ \omega_1 M = 10\Omega$$

$$u_{S1}(t) = 10 + 60\sqrt{2}\sin \omega_1 t \text{ V}，\ u_{S2}(t) = 40\sqrt{2}\sin \omega_1 t + 30\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t \text{ V}$$

单独分析 3 次谐波时：$j3\omega_1 L_4 + j3\omega_1 L_3 // \dfrac{1}{j3\omega_1 C} = 0$

即，L_4 与 L_3C 发生串联谐振（如上）。

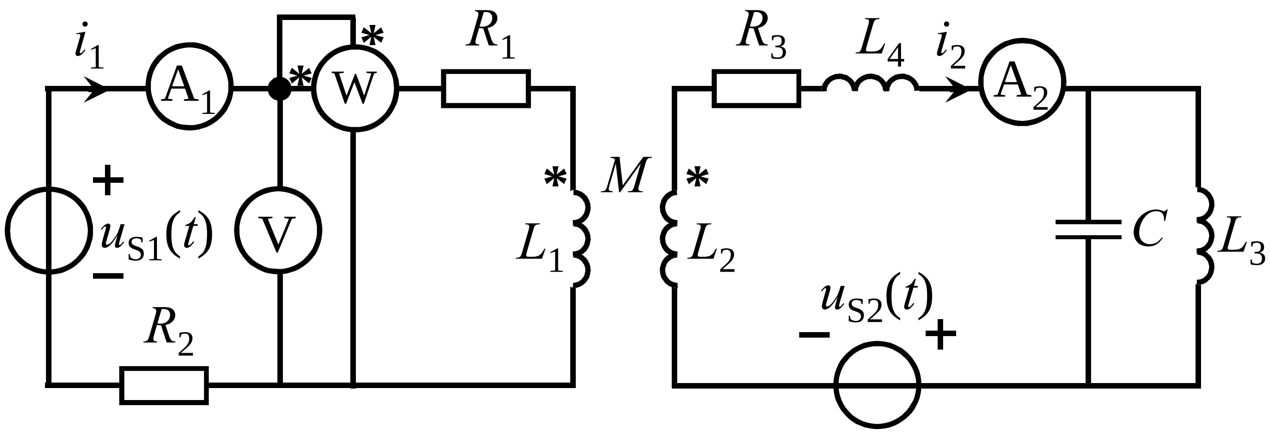
根据回路电流方程：$\dot{I}_{13} \cdot (R_1 + R_2 + j3\omega_1 L_1) - \dot{I}_{23} \cdot j3\omega_1 M = 0$

$$\dot{I}_{23} \cdot (R_3 + j3\omega_1 L_2) - \dot{I}_{13} \cdot j3\omega_1 M = -\dot{U}_{S23}$$

解得：$\dot{I}_{13} = 0.27\angle -44^{\circ}$ A

$\dot{I}_{23} = 0.57\angle -62.4^{\circ}$ A

$\dot{U}_3 = -\dot{I}_{13} R_2 = 2.7\angle 136^{\circ}$ V



叠加： $i_1(t) = 0.5 + 3\sin(w_1 t - 45^{\circ}) + 0.27\sqrt{2}\sin(3w_1 t - 44^{\circ})$ A

$i_2(t) = 0.57\sqrt{2}\sin(3w_1 t - 62.4^{\circ})$ A

$u(t) = 5 + 47.4\sqrt{2}\sin(w_1 t + 18.4^{\circ}) + 2.7\sqrt{2}\sin(3w_1 t + 136^{\circ})$ V

有效值： $I_1 = \sqrt{I_{10}^2 + I_{11}^2 + I_{13}^2} = 2.2$ A

$I_2 = \sqrt{I_{20}^2 + I_{21}^2 + I_{23}^2} = 0.57$ A

$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = 47.7$ V

功率表： $P = P_0 + P_1 + P_3 = U_0 I_{10}\cos j_0 + U_1 I_{11}\cos j_1 + U_3 I_{13}\cos j_3 = 46.79$W

【例5.9】

右图所示电路。

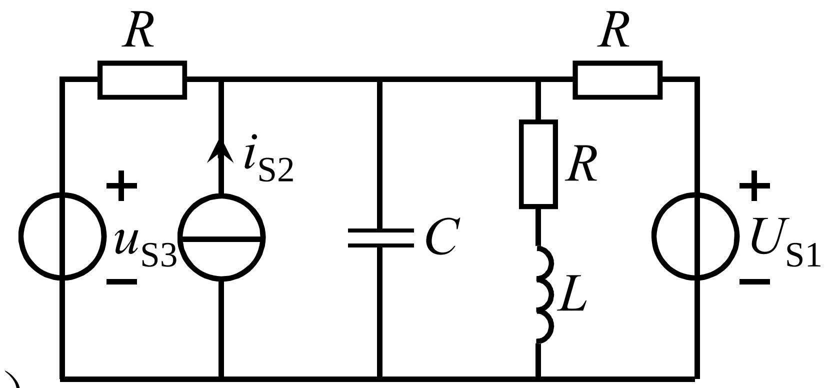
已知：$U_{S1}=30\text{V}$，发出 60W 功率；

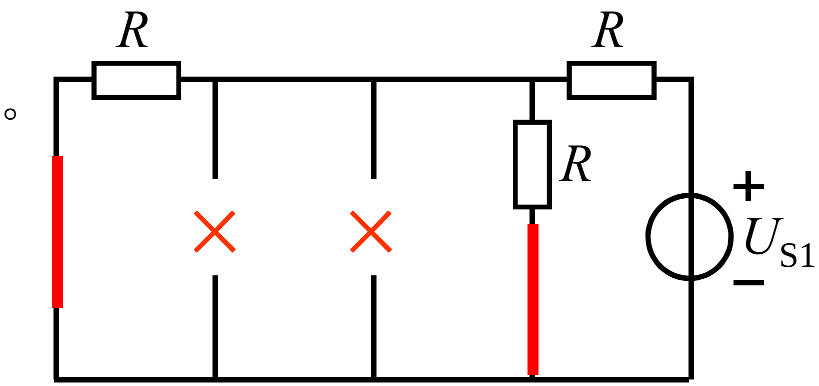
$$i_{S2}(t)=5\sqrt{2}\sin 1000t\ \text{A}$$

发出 100W 有功功率（无无功功率）；

$$u_{S3}(t)=40\sqrt{2}\sin 2000t\ \text{A}$$

求：R、L、C 的值及 u_{S3} 发出的有功功率。





解：当直流源 U_{S1} 单独作用时（右图）。

U_{S1} 发出功率为：

$$P=\frac{U_{S1}^2}{R+0.5R}=60\text{W}$$

所以，$R=10\Omega$

右图所示电路。

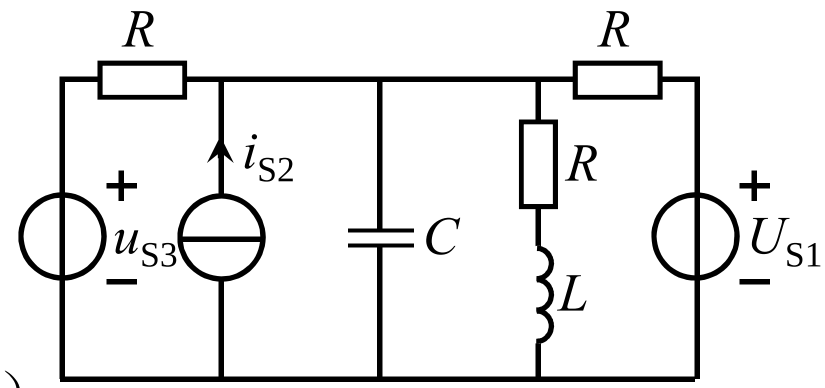
已知：$U_{S1}=30\text{V}$，发出 60W 功率；

$$i_{S2}(t)=5\sqrt{2}\sin 1000t\ \text{A}$$

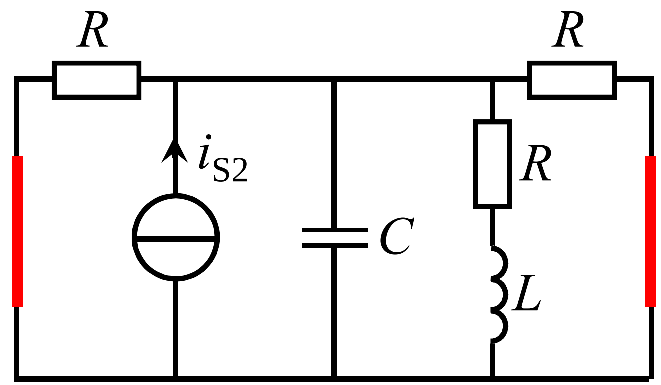
发出 100W 有功功率（无无功功率）；

$$u_{S3}(t)=40\sqrt{2}\sin 2000t\ \text{A}$$

求：R、L、C 的值及 u_{S3} 发出的有功功率。



解：当电流源 i_{S2} 单独作用时（右图）。



由于电流源 i_{S2} 只发出有功功率，

所以 C 与 R 、L 发生并联谐振，即：

$$(R+jwL)//\frac{1}{jwC}=\text{实数}\quad\Rightarrow\quad\frac{wL}{R^2+(wL)^2}=wC$$

其等效阻抗为：$R_p=\dfrac{R^2+(wL)^2}{R}$

另，电流源 i_{S2} 发出的有功功率为：$I_{S2}^2\cdot\left(\dfrac{R^2+(wL)^2}{R}//\dfrac{R}{2}\right)=100$

联立上述两方程，得：$C=50\mu\text{F}$，$L=10\text{mH}$

右图所示电路。

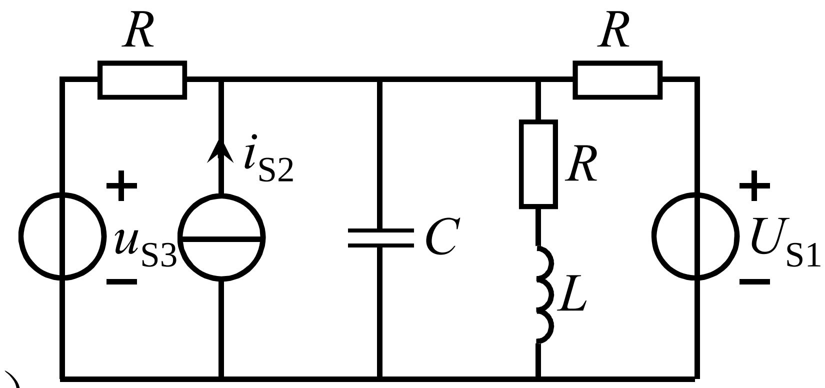
已知：$U_{S1}=30\text{V}$，发出 60W 功率；

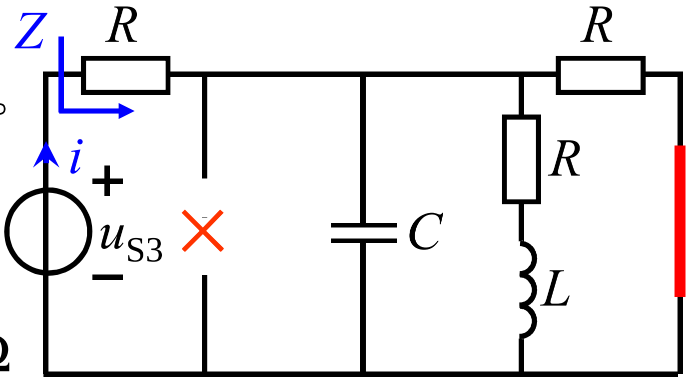
$$i_{S2}(t)=5\sqrt{2}\sin 1000t\ \text{A}$$

发出 100W 有功功率（无无功功率）；

$$u_{S3}(t)=40\sqrt{2}\sin 2000t\ \text{A}$$

求：R、L、C 的值及 u_{S3} 发出的有功功率。





解：当电压源 u_{S3} 单独作用时（右图）。

$$Z=R+j\frac{1}{2\omega C}//(R+j2\omega L)//R=17\angle-11.3^{0}\,\Omega$$

所以：$\dot{I}=\dfrac{\dot{U}_{S3}}{Z}=\dfrac{40\angle 0^{0}}{17\angle-11.3^{0}}=2.35\angle 11.3^{0}\ \text{A}$

$$P=U_{S3}I\cos\varphi=92.2\text{W}$$

本节作业

- 习题 6（P295）

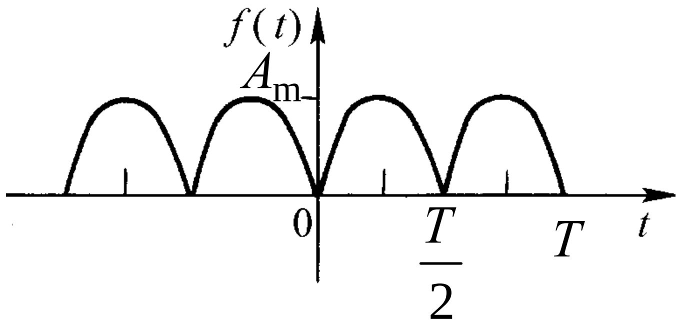
  2、3（频谱）

  10、11、12（非正弦计算）

- 题6.3 ...试求该信号的~~指数形式~~傅里叶级数**展开式**，...

  定义：

$$f(t)=\begin{cases} A_m \sin wt & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ -A_m \sin wt & \dfrac{T}{2}<t<T \end{cases}$$



所有的题目，需要有解题过程（不是给一个答案即可）。