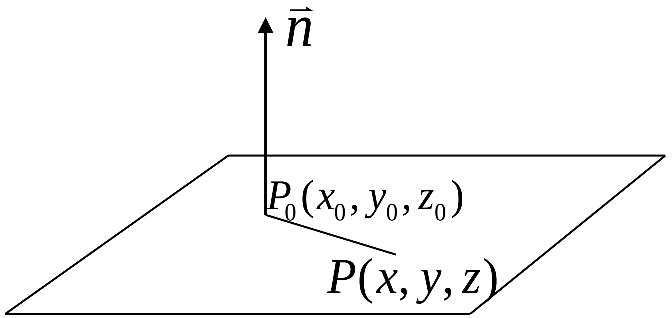
第8章（四）

§8.4 平面与空间直线

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

平面及其方程



定义 以某固定点为始点且与某固定矢量垂直的矢量终点的集合称为**平面**

平面方程 若满足方程 $f(x,y,z)=0$ 的点 (x,y,z) 皆落在平面 π 上，且平面 π 上的点皆满足此方程，则称 $f(x,y,z)=0$ 为平面 π 的方程

点法式 $\overrightarrow{PP_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$， $\vec{n}=(A,B,C)$， 由 $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$ 得

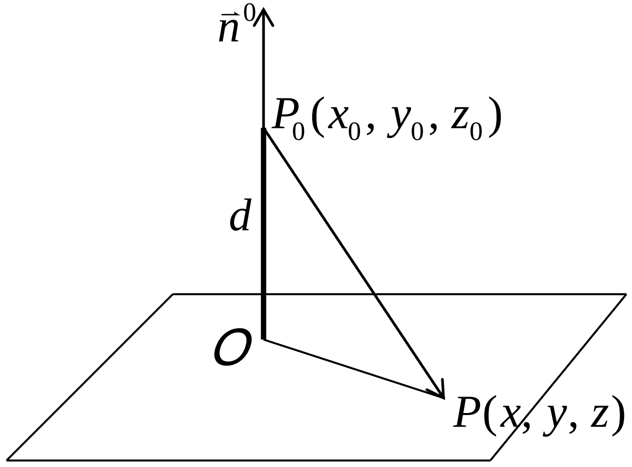
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

一般式 $Ax+By+Cz+D=0$ 平面方程为三元一次方程，三元一次方程必为平面方程

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ a,b,c 即为平面与三个坐标轴的截距

点到平面的距离

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **到平面** $Ax+By+Cz+D=0$ **的距离**



设平面上一点 $P(x,y,z)$, $\vec{n}=(A,B,C)$, 则

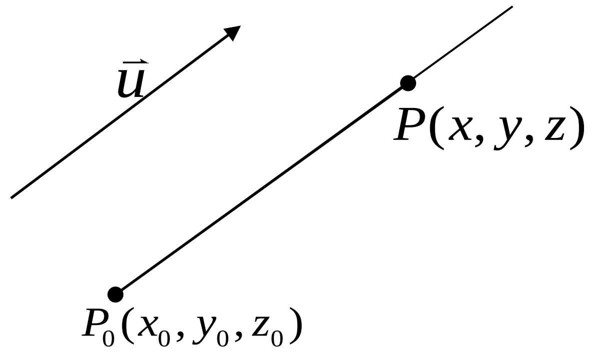
$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 由 $Ax+By+Cz=-D$ 有

$$d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}^0\right|=\frac{\left|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

两个平行平面 $Ax+By+Cz+D_i=0\ \ (i=1,2)$ **之间的距离：**

在 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 上取一点 (x_1, y_1, z_1), $d_{12}=\dfrac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{\left|D_2-D_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线及其方程



定义 以某固定点为始点且与某固定矢量平行的矢量终点的集合称为**直线**。

直线方程 若满足某方程的点皆落在直线上，且直线上的点皆满足此方程，则此方程为**直线方程**。

点向式

$\overrightarrow{PP_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$， $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$， 由 $\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{u}$ 得

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$$

一般式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

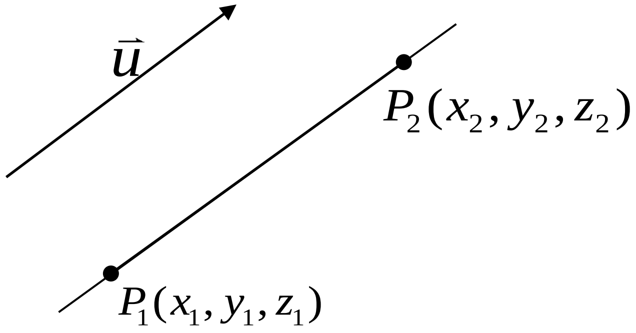
直线是两个平面的交线

截距式

$x=x_0+u_xt,\ y=y_0+u_yt,\ z=z_0+u_zt$， $t\in(-\infty,+\infty)$ 即 $P=P_0+\vec{u}t$.

空间直线及其方程

例: 过两点 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) 的直线方程.

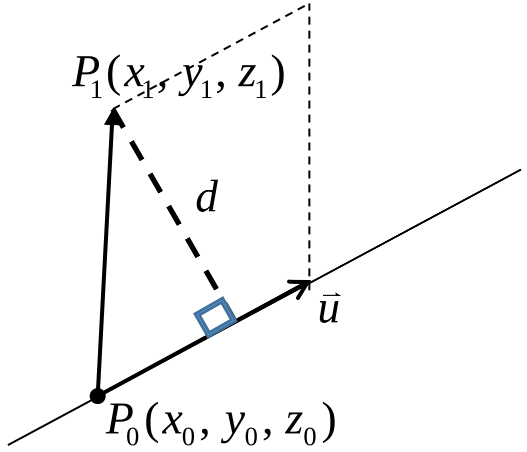


取 $\vec{u}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, 得直线方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ **(两点式)**

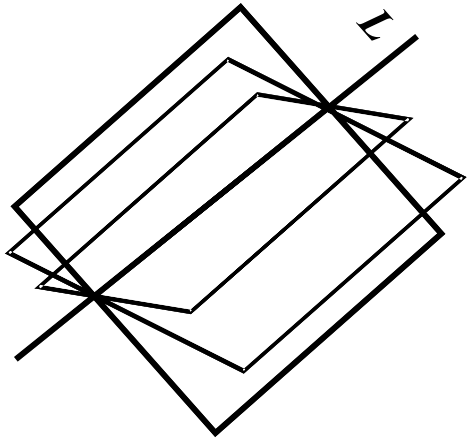
点到直线的距离

点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 $\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$ 的距离:



$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$ $\left(d \text{ 是以 } \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u} \text{ 为邻边的平行四边形的高}\right)$

平面束方程



平面束 通过某定直线的所有平面。

设平面束通过直线 $L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

则平面束方程为： $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$， $\lambda^2+\mu^2\neq 0$

(1) 直线 L 上的点皆在此平面上（即此平面通过 L），
(2) 通过直线 L 的平面皆可表示成此形式（即存在相应的 λ,μ）

例： 求过直线 $L:\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ 且与平面 $4x-2y+3z+5=0$ 垂直的平面方程。

平面、空间直线相互位置关系

平面与平面

$\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z_i + D_i = 0,\ \vec{n}_i = (A_i, B_i, C_i)\ \ (i = 1, 2)$

(1) 平行 $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$　(2)相交（夹角α）$\to$ 垂直$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

平面与直线

平面的法向：$\vec{n}$，直线方向：$\vec{u}$

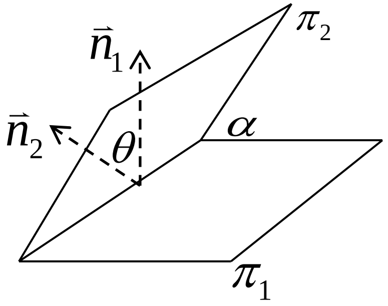
(1) 平行 $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$　(2)相交（夹角α）$\cdots$垂直 $\Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{u}$

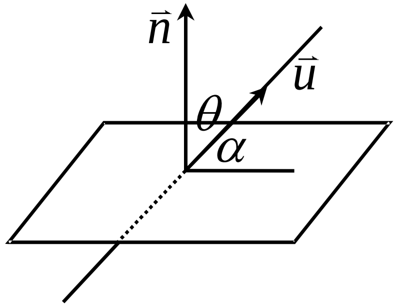
直线与直线

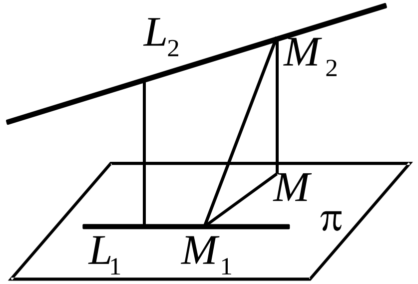
两直线的方向：$\vec{u}_i = (A_i, B_i, C_i)$，分别过点 P_i，$(i = 1, 2)$

(1) 平行 $\Leftrightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$　(2)相交（夹角α）$\Leftrightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2$ 的夹角

(3)垂直 $\Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$　(4)异面 $\Leftrightarrow (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$








谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY