# 浙江大学 2008-2009 学年春夏学期《线性代数》期末试卷

**一、解答题（本大题共 85 分。本题必须写出必要的解题步骤，只写答案不给分）**

1．（本题 6 分）计算排列$(2n-1)(2n-3)\cdots 31(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数。

**解** 排列$(2n-1)(2n-3)\cdots 31(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数为

$$
\begin{aligned}
&(2n-2)+(2n-4)+\cdots+4+2+(n-1)+\cdots+2+1\\
&=3\big((n-1)+\cdots+2+1\big)\\
&=\frac{3n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

2．（本题 7 分）计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1+x \\ 1+x & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \end{vmatrix}$。

**答案** $x^3(x+2)$

3．（本题 6 分）已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，把$A$的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得到矩阵$B$，再把$B$的第 1 列与第 2 列对调得到矩阵$\boldsymbol{C}$，求矩阵$\boldsymbol{C}^{-1}$。

**答案** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4．（本题 6 分）设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵且$\boldsymbol{A}^3=8\boldsymbol{E}$，求$|\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$的值。

**解** 因为$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$为$\boldsymbol{A}$的特征值。由此可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

因为$\boldsymbol{A}^3=8\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=8\boldsymbol{E}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^3\end{bmatrix} = 8\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P} = 8\boldsymbol{E}$$

所以$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$。由此可知$\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$的 3 个特征值为$2^2 + 3 \times 2 - 2$＝8，因此

$$|\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}| = 8^3 = 512$$

5．（本题 15 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

（1）求该线性方程组的通解（要求用该方程组的一个特解与对应导出组的基础解系的线性组合之和来表示）

（2）写出该方程组解向量集合的一组极大线性无关组

**答案** 特解

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix}5\\2\\3\\0\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\\3\end{bmatrix}$$

通解

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3$$

其中$k_1$，$k_2$，$k_3$为任意常数。

极大线性无关组为$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\eta}_3$。

6．（本题 15 分）$V = \{[a \quad b \quad c \quad d]^{\mathrm{T}} | a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$，设基 I 和基 II 分别为

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}，\boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}，\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

（1）求基 I 到基 II 的过渡矩阵；

（2）分别求向量$\boldsymbol{\alpha} = [4 \quad 3 \quad 2 \quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 和基 II 下的坐标；

（3）求一个向量$\boldsymbol{\beta}$，它在基 I 和基 II 下具有相同的坐标。

**解**

（1）因为$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$，则基 I 到基 II 的过渡矩阵

为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) 因为向量$\boldsymbol{\alpha}=[4\quad 3\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 I 下的坐标是$\boldsymbol{X}=\left[1，1，1，1\right]^{\mathrm{T}}$，则向量$\boldsymbol{\alpha}=[4\quad 3\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$在基 II 下的坐标是

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

(3) 设向量$\boldsymbol{\beta}$在两组基下具有相同的坐标$\boldsymbol{X}$，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}$，即$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，解之得

$$\boldsymbol{X}=k[1\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}，k\text{为任意常数}$$

所以$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\varepsilon}_1=k[1\quad 1\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}$。

7．(本题 15 分)设$\boldsymbol{A}$是 3 阶实对称矩阵，特征值是$2，2，3$，属于特征值 3 的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_1=\left[1，1，1\right]^{\mathrm{T}}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$。

**答案**

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}，\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

8．(本题 15 分) 实二次型$f\left(x_1，x_2，x_3\right)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩是 2。

(1) 写出二次型$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$的矩阵表示；

(2) 求参数$a$及二次型$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$的矩阵特征值；

(3) 指出方程$f\left(x_1，x_2，x_3\right)=1$表示何种二次曲面。

**答案**

(1) $f\left(x_1，x_2，x_3\right)=\left[x_1，x_2，x_3\right]\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

(2) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2-(6+a)\lambda+6a-18)$

因为二次型$f$的秩是 2，则$\lambda_1=0$是$\boldsymbol{A}$的特征值，且当$\lambda_1=0$时$|\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$。将$\lambda_1=0$代入上式可解得$a=3$，则二次型$f$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

由此可知$\boldsymbol{A}$的另两个特征值为：$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$

(3) $f(x_1，x_2，x_3)=1$是一个椭圆柱面。

**二、证明题（本大题 15 分。其中第 1 题 10 分，第 2 题 5 分）**

1.（本题 10 分）设$\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵，则$\boldsymbol{A}$既是正定矩阵又是正交矩阵的充分必要条件$\boldsymbol{A}$是单位矩阵。

**证** $\Rightarrow$ 因为$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$。又因为$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$。由此可知$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$。从而$\boldsymbol{A}$的特征值为 1 或-1。又因为$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$的特征值全大于 0，因此$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 1。故存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{E}$。

$\Leftarrow$ 因为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$。所以$\boldsymbol{A}$既是正定矩阵又是正交矩阵。

2.（本题 5 分）设$\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵且$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，若$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，试证明：$\boldsymbol{B}$可逆，并求出$\boldsymbol{B}^{-1}$。

**证** 因为$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$$

且$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$。再$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$可得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$。类似还可得到$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})=10\boldsymbol{E}$，所以$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})$。

故$\boldsymbol{B}$可逆，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}&=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\\&=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}^2+\frac{3}{10}\boldsymbol{A}+\frac{2}{5}\boldsymbol{E}\end{aligned}$$