期末复习题一

2019年12月9日 星期一 下午8:09

一、设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

试证明：$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} = D+\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}$

其中 A_{ij} 为D中元素 a_{ij} 的代数余子式

二、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 是某个线性空间中的4个向量，试证明：$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\beta-\alpha_3$ 线性无关当且仅当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

三、设A是一个 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，试求所有满足 $A^*=A$ 的方阵A，其中 A^* 为A的伴随矩阵

四、求向量组

$\alpha_1=(6,4,1,-1,2)^T$，$\alpha_2=(1,0,2,3,-4)^T$，$\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)^T$，$\alpha_4=(7,1,0,-1,3)^T$

的一个极大线性无关组和秩 3

五、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$，其中数 $\omega\neq 1$ 且 $\omega^3=1$

令 $V=\{f(A) \mid f$ 为复系数一元多项式$\}$

(1) 试证明V关于矩阵的加法和数乘运算构成复数域C上的一个线性空间

(2) 试求线性空间V的一组基和维数

六、设$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 3.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

(1) 求A的所有特征值与特征向量

(2) 问是否存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵？若存在，求出P；若不存在，请说明理由；

(3) 问是否存在正交矩阵Q，使得Q^TAQ为对角矩阵？若存在，则求出Q；若不存在，请说明理由；

七、设A为n阶实对称矩阵，试证明A半正定当且仅当$\forall c>0$，$cE+A$正定

八、设A为可逆的n阶实对称矩阵，B为n阶实反对称矩阵，且有$AB=BA$，试证明：$A-B$可逆