第12章（四）
散度场与旋度场

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

向量场的散度场

设向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$

则 $\iint\limits_S \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_S \big(\vec{f}\cdot\vec{N}^0\big)\,\mathrm{d}S$ (其中 $\vec{N}^0$ 为 S 的单位法向量) 表示 $\vec{f}$ 通过 S 指定侧的流量（通量）.

- 若 S 为闭曲面，则当 $T\triangleq\iint\limits_S \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}>0$ 时，称 S 内有“**源**”；当 $T<0$ 时称 S 内有“**负源**”.
- 称 $\dfrac{T}{V}=\dfrac{\iint\limits_S \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{V}$ 为 $\vec{f}$ 在 S 内的**平均散度**.（其中 V 为 S 围成的立体）
- 若极限 $\lim\limits_{S\to M_0}\dfrac{\iint\limits_S \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{V}$ 存在，则称之为 $\vec{f}$ 在 M_0 点的**散度(divergence)**，记为 $\operatorname{div}\vec{f}\big|_{M_0}$.

设 $\vec{f}$ 连续可导，S 为分片光滑闭曲面，则 $\operatorname{div}\vec{f}\big|_{M_0}=\lim\limits_{S\to M_0}\dfrac{\iint\limits_S \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{V}=\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{M_0}$.

向量场的散度场

- (1) 对常数 α, β, $\operatorname{div}\left(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g}\right)=\alpha\operatorname{div}\vec{f}+\beta\operatorname{div}\vec{g}$.

  (2) 对数量场 u, $\operatorname{div}\left(u\vec{f}\right)=u\operatorname{div}\vec{f}+\nabla u\cdot\vec{f}$.

设 $\vec{f}$ 连续可导，S 为分片光滑闭曲面，则**高斯公式**可表示为 $\displaystyle\oiint_S \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V \operatorname{div}\vec{f}\,\mathrm{d}V$.

- (1) 若闭曲面 S 所围成的 V 中处处 $\operatorname{div}\vec{f}=0$, 则 $\displaystyle\oiint_S \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$.

  (2) 若闭曲面 S_1 所围成的 V_1 中某些点 $\operatorname{div}\vec{f}\neq 0$, 其他皆有 $\operatorname{div}\vec{f}=0$,

  设闭曲面 S_2 所围成的立体为 V_2，且 $V_2\supset V_1$，则 $\displaystyle\oiint_{S_2}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_{S_1}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

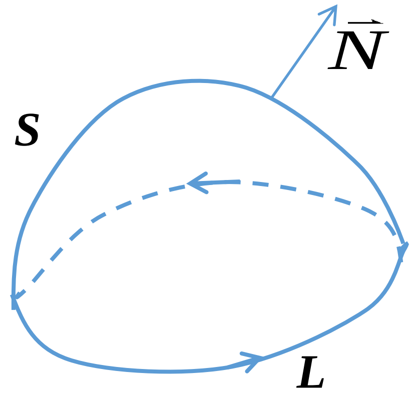
散度为零的向量场称为无源场

向量场的旋度场

设向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$

则 $\oint_L \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\iint_S\left(\vec{f}\cdot\vec{\tau}^{\,0}\right)\mathrm{d}s$ (其中 $\vec{\tau}^{\,0}$ 为闭曲线 L 的单位切向量)

表示 $\vec{f}$ 沿有向闭曲线 L 的**循环量（环流）**.



- 称 $\dfrac{\oint_L \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}}{S}$ 为 $\vec{f}$ 沿 L 绕法向量 $\vec{N}$ 的**平均环流（面）密度**.

（其中 L 为 S 的边界，S 为曲面面积，$\vec{N}$ 为 S 的法向，与 L 的方向成右手系）

- 若极限 $\lim\limits_{S\to M_0}\dfrac{\oint_L \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}}{S}$ 存在，则称之为 $\vec{f}$ 在 M_0 点的**环量（面）密度**.

向量场的旋度场

定义 称向量场 $\operatorname{rot}\vec{f} \triangleq \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ 为 $\vec{f}$ 的**旋度(旋度场)**.

- 设 S 为分片光滑曲面，其边界 L 为分段光滑闭曲线，$\vec{N}^0$ 为 S 的单位法向量，

  $\vec{f}$ 连续可导，那么有以下环量密度公式 $\lim\limits_{S\to M_0}\frac{\oint\limits_L \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}}{S}=\left(\operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{N}^0\right)\Big|_{M_0}$.

- $\vec{f}$ 沿旋度方向的环量密度最大，最大值为 $\left|\operatorname{rot}\vec{f}\right|$.

- 易知 $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)\equiv 0$，所以**任意向量场的旋度场为无源场**.

斯托克斯公式可表示为 $\oint\limits_L \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\iint\limits_S\left(\operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{N}^0\right)\mathrm{d}S$.

旋度为零的向量场称为无旋场

梯度场、散度场、旋度场及其性质

(1) 数量场 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**梯度场**为 $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right).$

(2) 向量场 $\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的**散度场**为 $\operatorname{div}\vec{f} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}.$

(3) 向量场 $\vec{f} = (P, Q, R)$ 的**旋度场**为 $\operatorname{rot}\vec{f} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right).$

有势场=保守场 ⟷ **无旋场** ⟷ **曲线积分与路径无关**

$\exists \varphi,\ \nabla\varphi = \vec{f} = (P, Q, R)$

$\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

对任意闭曲线 L, $\oint_L \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds} = 0$

- 若 $\vec{f} = (P, Q, R)$ 既是保守场又是无源场，则称 $\vec{f}$ 为**调和场**.

设 $\nabla\varphi = \vec{f}$, 则 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$ (Laplace**方程，调和方程**). φ 称为**调和函数**.


谢谢！
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY