级数— 常数项级数

浙江大学数学学院　薛儒英

数项级数的基本概念

- 有限个实数（或函数）可以相加，且其和为实数（或函数）。
- 问：无穷多个实数（或函数）是否仍可以相加？且其和仍为实数（或函数）？一个复杂函数是否能够用无穷多个简单函数来表示？

本章介绍的级数理论就是要回答这些问题。

定义： 给定数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，表达式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为（数项）级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其中a_n称为级数的通项(或一般项)；

例1. (1). 级数$1+2+3+4\cdots$，记为$\sum_{n=1}^{\infty} n$, 其中通项为$a_n = n$；

(2). 级数$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \cdots$，记为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$, 其中通项为$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$；

(3). 级数$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$，记为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 其中通项为$a_n = \frac{1}{n}$；

(4). 级数$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$，记为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, 其中通项为$a_n = (-1)^{n-1}$；

- 从级数的定义可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$相当于

  “无穷多个实数相加$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$”；

我们知道：有限多个实数可以相加，其和为一个实数。

问： 无限多个实数可以相加吗？其和为一个实数吗？无限多个实数相加的运算法则？

反例： 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty} n$, 如果

$$1 + 2 + 3 + \cdots = S,$$

则

$$\begin{aligned} S &= 1+2+3+4+\cdots > 2+4+6+8+\cdots \\ &= 2(1+2+3+4+\cdots) = 2S \end{aligned}$$

即$S > 2S$, 移项得$S < 0$，矛盾！

- 上面的反例说明，无穷多个实数相加并不一定总是有意义的。

定义： 给定级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，它的前n项之和(称为级数的部分和)为
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots;$$

- 如果部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$有极限S，即$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，常数$S$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad 或 \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S;$$

- 如果部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$没有极限，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

$\star$ 发散级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$仅仅是一个记号，没有具体的意义；只有收敛的级数才有意义；

$\star$ 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，其和$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. 从而，当$n$ 充分大时$S \approx S_n$; (即$S \approx S_{100}$，$S \approx S_{888}$ 等等)。

例2. 讨论下列级数的敛散性

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$?

解: 部分和

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots .
\end{aligned}
$$

由极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$收敛、且其和$S = 1$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

例2. 讨论下列级数的敛散性

(2). (几何)等比级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0?$$

解: 部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} na, \text{若} q = 1, \\ \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \text{若} q \neq 1, \end{cases}$$

- 当$|q| < 1$时有$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, 从而当$|q| < 1$时等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$收敛, 其和为$S = \frac{a}{1-q}$;
- 当$|q| > 1$时有$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty$,

  当$q = 1$时有$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$,

  当$q = -1$时有$S_n = \frac{a(1-(-1)^n)}{2}$无极限;

从而$|q| \geq 1$时部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$无极限, 等比级数发散;

牢记:

- 当$|q|<1$时等比级数收敛，其和为$S=\frac{a}{1-q}$；即
$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-q};$$
- 当$|q|\geq 1$时等比级数发散；

例2. 讨论下列级数的敛散性

(3). ($p-$级数) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$, p 为常数?

解: • 当$p=1$时，部分和

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\
&= \int_1^2 dx+\int_2^3\frac{1}{2}dx+\int_3^4\frac{1}{3}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx\\
&\geq \int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\\
&= \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1);\Longrightarrow S_n\geq\ln(n+1);
\end{aligned}
$$

从而$p=1$时，由$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$知: 部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$无极限，$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散;

注: 当$n\leq x\leq(n+1)$时有$\frac{1}{(n+1)}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$, 则定积分的性质

$$\frac{1}{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dx\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx=\frac{1}{n}.$$

例2. 讨论下列级数的敛散性

(3).($p-$级数) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$, p 为常数?

- 当$p<1$时, 部分和

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p} \\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &\geq \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1);\Longrightarrow S_n\geq\ln(n+1); \end{aligned}$$

从而$p<1$时, 由$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$知: 部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$无极限, $p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散;

- 当$p>1$时，部分和

$$S_{n+1}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^p}=S_n+\frac{1}{(n+1)^p}\geq S_n;$$

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\
&= 1+\int_1^2\frac{1}{2^p}dx+\int_2^3\frac{1}{3^p}dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{n^p}dx\\
&\leq 1+\int_1^2\frac{1}{x^p}dx+\int_2^3\frac{1}{x^p}dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x^p}dx\\
&= 1+\int_1^n\frac{1}{x^p}dx=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)\leq\frac{p}{p-1}.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow S_n\leq\frac{p}{p-1}$; $p>1$时，部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调、有界的，从而$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛；

牢记:

$p-$级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p};$$

- 当$p\leq 1$时，$p-$级数发散；
- 当$p>1$时，$p-$级数收敛；

$\star$ 不同于例2(1)、例2(2)，在例2(3)中部分和S_n不能得到具体的表达式，但是利用数列极限的判别准则，仍能得到级数的敛散性，这正是**级数敛散性判别法**的思想。

性质1. 改变级数的有限项（增加、删除或改变次序），不影响级数的敛散性；

证明： 考虑(去掉$k-1$项)二个级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+\cdots a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n;$$

$$a_k+\cdots a_n+\cdots=b_1+b_2+\cdots+b_{n-k+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n;\ b_n=a_{k-1+n};$$

它们的前面$n\,(n>k)$项部分和分别记为A_n及B_n, 则

$$B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{n+k-1}=A_{n+k-1}-\sum_{m=1}^{k-1}a_m.$$

二个级数的部分和A_n及B_n $(n>k)$, 满足

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = A_{n+k-1} - \sum_{m=1}^{k-1} a_m = A_{n+k-1} - A_{k-1}.$$

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = A \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_{n+k-1} - A_{k-1} = A - A_{k-1} \Longrightarrow \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{收敛};$$

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} B_n = B \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_{n-k+1} + A_{k-1} = B + A_{k-1} \Longrightarrow \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛};$$

从而，二个级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛（或发散）。

性质2. (线性性质） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛，α与β为给定常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$也收敛、且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

证明： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 的前面n项部分和分别记为A_n、B_n及C_n, 则

$$C_n=(\alpha a_1+\beta b_1)+(\alpha a_2+\beta b_2)+\cdots+(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A_n+\beta B_n;$$

级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛$\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} A_n=A,\ \lim_{n\to\infty} B_n=B$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} C_n=\lim_{n\to\infty}(\alpha A_n+\beta B_n)=\alpha A+\beta B$$

$\Longrightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B=\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

性质2. (线性性质）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛，α与β为给定常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$也收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

推论1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛;

推论2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$发散;

证明： (反证法)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$收敛，由线性性质知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}((a_n + b_n) - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛，这与条件$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散矛盾。

性质2. (线性性质）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛，α与β为给定常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$也收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时发散, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$不定(可能收敛也可能发散);

推论3. 同乘一个非零常数，不影响级数的收敛与发散；即当常数$C\neq 0$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$同时收敛、同时发散;

例3(1). 讨论级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-3\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right)$ 的敛散性;

解: 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 与$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$ 的公比分别为$q_1=\frac{1}{3}$ 与$q_2=-\frac{4}{5}$, 满足$|q_1|<1$与$|q_2|<1$; 从而, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 与$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$都收敛. 由线性性质, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-3\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}-3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$$

收敛, 且

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}-3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}-3\cdot\frac{1}{1-(-4/5)}=\frac{4}{3};$$

例3(2). 讨论级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n^p}-8\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right)$ 的敛散性;

解: 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$的公比$q=-\frac{4}{5}$, 满足$|q|<1$; 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$收敛;

- 当$p>1$时$p-$级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，由线性性质知，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n^p}-8\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}-8\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$$

收敛。

- 当$p\leq 1$时$p-$级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散，由线性性质知，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n^p}-8\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}-8\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$$

发散。

性质3. (结合律) 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则在级数中任意添加括号后所得的新级数也收敛、且它们的和不变；

例： 如果$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$, 则由

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \cdots$$

所得新级数$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$ 也收敛且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

- 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则结合律不一定成立. 如级数（发散）

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

利用结合律得级数（收敛）

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0;$$

利用结合律也可得级数（发散）

$$\begin{aligned} &1 + (-1 + 1 - 1) + 1 + (-1 + 1 - 1) + 1 + (-1 + 1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ; \end{aligned}$$

性质3. (结合律) 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则在级数中任意添加括号后所得的新级数也收敛且它们的和不变；

证明： 如果$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$, 其部分和记为$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 我们有$\lim_{n\to\infty} A_n = S$. 由

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \cdots$$

所得新级数$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$(部分和记为$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$)，其中

$$b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6, b_4 = a_7 + a_8, \cdots;$$

$$\Longrightarrow B_1 = A_2, B_2 = A_3, B_3 = A_6, B_4 = A_8, \cdots$$

即部分和数列$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$为数列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$的子数列，从而有$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n = S$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

性质4. (必要条件) 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

证明： 部分和记为$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 由级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛于$S$ 知: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

推论： 如果$n \to \infty$时a_n不趋于零（没有极限、或有极限但不等于零），则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

注意： 如果$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能收敛、也可能发散。性质4仅仅是一个**必要条件**，而不是充分条件。

反例: 考虑($p-$级数)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当$p > 0$时满足$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$;

- 当$0 < p \le 1$时$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$发散;
- 当$p > 1$时$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$收敛。

推论： 如果$n\to\infty$时a_n不趋于零（没有极限、或有极限但不等于零），则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

例3. 讨论下列级数的敛散性

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10n}{n^2+3}$?

解： $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-10n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{10}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} = 1 \neq 0$, 从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10n}{n^2+3}$发散。

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+10)\sin\frac{1}{n}$?

解： $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(3n+10)\sin\frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{10}{n}\right)\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 3 \neq 0,$$

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(3n+10)\sin\frac{1}{n}$发散。

例3. 讨论下列级数的敛散性

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$?

解法1: 分别考虑子列$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$及$\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}(-1)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1;$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}(-1)^{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -1 = -1;$$

从而$n\to\infty$时a_n无极限，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散。

- 上面利用：数列a_n有极限$a \iff$ 数列a_n的任何子列都有极限a;

解法2: $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$, 从而$n\to\infty$时$a_n$不趋于零，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散。

- 上面利用：$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$;反之不然;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0;$$

例3. 讨论下列级数的敛散性

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n+3}{2n}$?

解法1: 分别考虑子列$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$及$\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+3}{4k} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{-2k+4}{4k-2} = -\frac{1}{2};$$

从而$n\to\infty$时a_n无极限，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n+3}{2n}$发散。

解法2: 利用$n>3$时$\frac{n-3}{2n}\le\left|\frac{(-1)^n n+3}{2n}\right|\le\frac{n+3}{2n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2}$$

及夹逼准则得$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \frac{1}{2}\neq 0$. 从而$n\to\infty$时$a_n$不趋于零，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散。

正项级数的收敛性判别准则

基本思想：

$$\textbf{级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\textbf{收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{部分和数列}\{S_n\}_{n=1}^{\infty}\textbf{有极限}$$

- 部分和S_n的具体表达式很难求得，能否不通过部分和S_n的具体表达式来判别级数的敛散性？利用**数列极限存在准则!**

定义： 如果$a_n \geq 0\,(n = 1, 2, \cdots)$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$称为**正项级数**.

- 改变级数的有限项不影响敛散性. 当讨论级数的敛散性时，可以把某一项后非负（即$n \geq N_0$时$a_n \geq 0$）的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**作为正项级数处理**。如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^2+2} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{18} + \frac{2}{27} + \cdots.$$

正项级数的收敛性判别准则

定理: 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件为

$$部分和数列\{S_n\}_{n=1}^{\infty}有上界。$$

证明： 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，部分和为S_n, 则

$$0 \le S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le S_n + a_{n+1} = S_{n+1};$$

(充分性) 部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$有上界$\Longrightarrow$ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$单调、有界$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$存在$\Longrightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛于S;

(必要性) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在$\Longrightarrow$部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$有(上)界;

- 上述定理把部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限讨论**转化**为部分和数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$有上界讨论；(问：最大优点在哪里？)

定理(正项级数的比较判别法) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足

$$a_n \leq b_n, n \geq N_0;$$

(1). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散；

证明： 不妨假设$N_0 = 1$, 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和分别记为A_n与B_n，显然$A_n \leq B_n$;

(1). 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Longrightarrow$ 部分和B_n有上界$\Longrightarrow$ 部分和A_n有上界$\Longrightarrow$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

定理(正项级数的比较判别法) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足

$$a_n \leq b_n, n \geq N_0;$$

(1). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散；

证明： 不妨假设$N_0 = 1$, 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和分别记为A_n与B_n，显然$A_n \leq B_n$;

(1). 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Longrightarrow$ 部分和B_n有上界$\Longrightarrow$ 部分和A_n有上界$\Longrightarrow$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2). (反证法) 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，结论(1) $\Longrightarrow$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 矛盾！

定理(正项级数的比较判别法) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足

$$a_n \le b_n, n \ge N_0$$

(1). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散；

- 上述定理简单来说：

一般项比较大的正项级数**收敛** $\Longrightarrow$ 一般项比较小的正项级数**收敛**

一般项比较小的正项级数**发散** $\Longrightarrow$ 一般项比较大的正项级数**发散**

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+2}$?

解： $\frac{2n+3}{n^3+2} \le \frac{5n}{n^3} = \frac{5}{n^2}$, 而正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛，从而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+2}$收敛。

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3-10}$?

解： $n \ge 3$时有$\frac{1}{2}n^3 \ge 10$

$$0 \le \frac{2n+3}{n^3-10} = \frac{2n+3}{\frac{1}{2}n^3 + (\frac{1}{2}n^2 - 10)} \le \frac{5n}{\frac{1}{2}n^3} = \frac{10}{n^2},$$

而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，从而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3-10}$收敛。

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|2n-3|} \sin \frac{1}{n^2}$?

解： 利用 $|\sin x| \leq |x|$，当 $n \geq 3$ 时有

$$0 \leq \sqrt{|2n-3|} \sin \frac{1}{n^2} \leq \sqrt{2n} \cdot \frac{1}{n^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}},$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|2n-3|} \sin \frac{1}{n^2}$ 收敛.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right)$?

解： $0 \leq \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right) = 2 \sin^2 \left(\frac{3}{2n}\right) \leq 2 \left(\frac{3n}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \frac{1}{n^2}$，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，从而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right)$ 收敛。

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(5).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3\sin n}{(n-2\cos^2 n)^2}$?

解： 当$n\geq 3$时有

$$\frac{2n+3\sin n}{(n-2\cos^2 n)^2}=\frac{n+(n+3\sin n)}{(n-2\cos^2 n)^2}\geq\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n},$$

而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3\sin n}{(n-2\cos^2 n)^2}$发散.

(6).$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

解： 取$f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{2}x$，由$f(0)=0$及$f'(x)=\frac{1-x}{2(1+x)}\geq 0$ $(x\in[0,1]$时)得, $x\in[0,1]$时$\ln(1+x)\geq\frac{1}{2}x$. 在当$n\geq 1$时有

$$\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{4n}.$$

而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$发散，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散.

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(7). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$，其中$a>0$常数；

解： • 当$0<a<1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，由级数收敛的必要条件知：级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散；

• 当$a=1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$，由级数收敛的必要条件知：级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散；

• 当$a>1$时，$0\leq\frac{1}{1+a^n}\leq\frac{1}{a^n}$，且等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛。由正项级数的比较判别法，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛；

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(8). $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right),\quad (n \geq 1)$. 证明：

$$(A).\ \lim_{n\to+\infty} a_n\text{存在};\qquad (B).\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\text{收敛};$$

解: $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq 1,$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

得：$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$为单调递增、有下界数列；由单调有界准则知$\lim_{n\to+\infty} a_n = C$存在、且$C \geq 1$. 由

$$C = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(C + \frac{1}{C}\right)$$

及$C \geq 1$，得$C = 1$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(8). $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right),\quad (n \geq 1)$. 证明：

$$(A).\ \lim_{n\to+\infty} a_n\text{存在};\qquad (B).\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\text{收敛};$$

(B). 利用(A)的结论，

$$0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1} = b_n;$$

正项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$的部分和

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1},\qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = a_1 - C = 1;$$

由定义，正项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛；由正项级数的比判别法，正项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$收敛；

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(9). 取$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$之和，并证明：

- 对任意常数λ, 当$\lambda > 0$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛;
- 当$\lambda \leq 0$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$发散。

解： $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot d\tan x(\text{令}t = \tan x) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

它的部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

例1. 判别下列正项级数的敛散性：

(9). 取$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$之和，
并证明：• 对任意常数λ, 当$\lambda>0$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛;
• 当$\lambda\le 0$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$发散。

解： 令$t=\tan x$,

$$0\le a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n},$$

$\Rightarrow 0\le\frac{a_n}{n^\lambda}\le\frac{1}{n^{1+\lambda}}$, 而当$\lambda>0$时正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$收敛，由比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

$$\begin{aligned}0\quad\le\quad a_n&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx(令t=\tan x)=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt\\ \ge\quad&\frac{1}{2}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{2(n+1)}\ge\frac{1}{4n},\quad\Longrightarrow\frac{a_n}{n^\lambda}\ge\frac{1}{4n^{1+\lambda}},\end{aligned}$$

而当$\lambda\le 0$时正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$发散，由比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$发散。

定理(正项级数的比较判别法）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$满足

$$a_n \leq b_n, n \geq N_0,$$

(1). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散

思路总结: 对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，先**估计它的敛散性**:

定理(正项级数的比较判别法）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$满足

$$a_n \leq b_n, n \geq N_0,$$

(1). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2). 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散

思路总结： 对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，**先估计它的敛散性：**

- 如果认为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么想法找一个**一般项比a_n大且收敛的**正项级数;
- 如果认为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，那么想法找一个**一般项比a_n小且发散的**正项级数;

缺点： （1）证明收敛与发散的方法差异大;

（2）需比较一般项的大小（不等式证明），有难度！

正项级数极限形式的比较判别法

定理(极限形式比较判别法）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell, \quad 0 \le \ell \le +\infty.$$

(1). 若$\ell \neq 0$且$\ell \neq +\infty$, 则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$有相同的敛散性，即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛、或同时发散；

(2). 若$\ell = 0$, 则当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(3). 若$\ell = +\infty$, 则当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散时级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

- 上述定理简单来说：

若$n \to \infty$时一般项a_n与b_n是同阶无穷小量，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛、或同时发散;

正项级数极限形式的比较判别法

证明： (1). 若$\ell \neq 0$、$\ell \neq +\infty$且$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$，由极限性质知：存在常数$N_0$，$n \geq N_0$时$\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{1}{2}\ell$，即

$$n \geq N_0\text{时 } 0 \leq \frac{1}{2}\ell b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}\ell b_n.$$

- 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，由正项级数的比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\ell b_n$收敛，从而（利用$\frac{1}{2}\ell \neq 0$）$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛；
- 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，从而（利用$\frac{3}{2}\ell \neq 0$）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\ell b_n$收敛，由正项级数的比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；
- (2)、(3)的证明类似，省略。

例2. 判别下列正项级数的敛散性：

(1).$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{2n^2+5} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$?

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-4}{2n^2+5} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-4}{2n^2+5} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{3}{2} \neq 0;$$

且正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$收敛，利用极限形式的比较判别法，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{2n^2+5} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

例2. 判别下列正项级数的敛散性：

(2).$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, $\alpha>0$常数?

解： 由于$\alpha>0$时$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$, (当$x\to 0$ 时$\ln(1+x)\sim x$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=1\neq 0;$$

利用极限形式的比较判别法及$p-$正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$敛散性，

- 当$\alpha>1$ 时，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$收敛；
- 当$0<\alpha\leq 1$ 时，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$发散。

例2. 判别下列正项级数的敛散性：

(3).$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$?

解： • 当$p \leq 1$时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{1-p} \ln n = \infty,$$

而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，利用极限形式的比较判别法得，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$发散；

• 当$p > 1$时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n^{(1+p)/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}} = 0,$$

而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+p)/2}}$收敛(因为$(1+p)/2 > 1$)，利用极限形式的比较判别法得，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$收敛；

例2. 判别下列正项级数的敛散性：

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$?

解： 当$n\to\infty$时$\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)=\ln\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\sim\frac{3}{n-2}\sim\frac{3}{n}$;

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{p}\sim\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{p}=\frac{1}{2^{p}n^{p/2}};$$

$$\Longrightarrow\quad\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)\sim\frac{3}{2^{p}n^{1+p/2}}.$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)}{\frac{1}{n^{1+p/2}}}=\frac{3}{2^{p}}.$$

利用极限形式的比较判别法及p–级数的敛散性，

- 当$p>0$ 时正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$收敛；
- 当$p\le 0$时正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$ 发散。

例2. (5). 设是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$正项级数，则下列结论正确的是(　　)

(A). 若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(B). 若存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(C). 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$;

(D). 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$;

解：(B). 由$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} na_n = \lambda \neq 0$ 及（正项）级数极限形式的比较判别法得，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

例2. (5). 设是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$正项级数，则下列结论正确的是(　　)

(A). 若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(B). 若存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(C). 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$;

(D). 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$;

解：(B). 由$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} na_n = \lambda \neq 0$ 及（正项）级数极限形式的比较判别法得，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

- 取$a_n = \frac{1}{n\ln n}$, 则$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, 但级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$发散；
- 取$a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$收敛，但$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = +\infty$;
- 取$a_n = \frac{1}{n^{1/2}}$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ 发散，但$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$;

比值判别法: 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ $(0 \le \rho \le +\infty)$，

(1). 若$\rho < 1$，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(2). 若$\rho > 1$，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). 若$\rho = 1$，本判别法失效；

证明： (1). 若$\rho < 1$，取$\epsilon_0 = \frac{1}{2}(1-\rho)$，由$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$知: 存在常数$N_0$，当$n \ge N_0$时有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < \epsilon_0$,

$$\Longrightarrow n \ge N_0\text{时} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon_0 = \frac{1}{2}(1+\rho) = C,\ 0 < C < 1.$$

$$\Longrightarrow a_n < Ca_{n-1} < C^2 a_{n-2} < \cdots < C^{n-N_0} a_{N_0},\ n > N_0\text{时}.$$

而正项(等比)级数$\sum_{n=1}^{\infty} C^{n-N_0} a_{N_0}$收敛，利用比较判别法得，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

证明：(2). 若$\rho > 1$，取$\epsilon_0 = \frac{1}{2}(\rho - 1)$，由$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$知：存在常数$N_0$，当$n \geq N_0$时有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < \epsilon_0$，

$$\Longrightarrow\ n \geq N_0\text{时}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho - \epsilon_0 = \frac{1}{2}(1+\rho) = C,\ C > 1.$$

$$\Longrightarrow\ a_n > Ca_{n-1} > C^2 a_{n-2} > \cdots > C^{n-N_0} a_{N_0},\ n > N_0.$$

而正项(等比)级数$\sum_{n=1}^{\infty} C^{n-N_0} a_{N_0}$发散，利用比较判别法得，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). **(反例)** 讨论$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，其中$a_n = \frac{1}{n^p}$，计算得

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1.$$

但当$p > 1$时$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$收敛；当$p \leq 1$时$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$发散；

根值判别法： 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ (或$+\infty$)，

(1).若$\rho < 1$，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(2). 若$\rho > 1$，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). 若$\rho = 1$，本判别法失效；

证明： 类似于比值判别法，省略。

例3. 判别下列正项级数的敛散性：

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$?

解： $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

由比值判别法知：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$发散；

例3. 判别下列正项级数的敛散性：

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，其中$a$为正常数?

解： $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae$，比值判别知：

- 当$a > \frac{1}{e}$时，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$发散；
- 当$0 < a < \frac{1}{e}$时，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛；
- 当$a = \frac{1}{e}$时，$\rho = 1$不能用比值（根值）判别法。利用

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to\infty$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n-\frac{1}{2}+o(1)},\ n\to\infty,$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}+o(1)} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0,$$

从而，当$a = \frac{1}{e}$时正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$发散；

例3. 判别下列正项级数的敛散性：

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$?

解： 利用 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

由根值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2+\frac{1}{n})^n}$ 收敛。

(4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$?

解： $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$,

由比值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2+\frac{1}{n})^n}$ 收敛。

例3. 判别下列正项级数的敛散性：

(5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n^p+1}$，其中$\lambda$及$p$为常数且$\lambda>0$?

解： $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^{(n+1)}}{(n+1)^p+1}\frac{n^p+1}{\lambda^n}=\lambda$, 比值判别法:

•当$\lambda>1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n^p+1}$发散；

•当$\lambda<1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n^p+1}$收敛；

•当$\lambda=1$时不能用比值判别法,级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p+1}$；

当$p=0$时$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq0$;

当$p<0$时$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p+1}=1\neq0$, 必要条件知：

$\star$ $\lambda=1$且$p\leq0$时级数发散;

当$p>0$时$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{n^p+1}=1\neq0$, 极限形式的比较判别法知：

$\star\lambda=1$且$p>1$时级数收敛;

$\star\lambda=1$且$0<p\leq1$时级数发散;

综述： 当$\lambda<1$, 或$\lambda=1$且$p>1$时级数收敛;

当$\lambda>1$, 或$\lambda=1$且$p\leq1$时级数发散;

一般级数的敛散性判别

- 交错级数(莱布尼兹判别法）；
- 绝对收敛、条件收敛；
- （一般级数的）比值判别法、根值判别法；

交错级数： 一般项正、负交替出现的级数称为交错级数。

交错级数可以表示为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ (或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$),其中$u_n \geq 0$。如

$$1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1},$$

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

莱布尼兹定理： 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足

$$(1).\ u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \cdots; \quad (2).\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且级数之和$0 \leq S \leq u_1$;

莱布尼兹定理： 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足

$$(1). \, u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \cdots ; \quad (2). \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且级数之和$0 \leq S \leq u_1$；

证明： $0 \leq S_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2k-1} - u_{2k})$

$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} \leq u_1$$

$$S_{2(k+1)} = S_{2k} + (u_{2k+1} - u_{2k+2}) \geq S_{2k};$$

数列$\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$是单调递增、有界的，

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2k} = S, \text{ 且 } 0 \leq S \leq u_1;$$

$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S$$

从而$\lim_{n\to\infty} S_n = S$且$0 \leq S \leq u_1$, 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛且级数之和$0 \leq S \leq u_1$.

莱布尼兹定理： 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足

$$(1).\ u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \cdots; \quad (2).\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且级数之和$0 \leq S \leq u_1$；

- 条件“u_n单调递减”不可缺少！

反例： 取$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n\text{为奇数时} \\ \frac{2}{n-1}, & n\text{为偶数时} \end{cases}$，它满足$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，但是

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n-1} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \to -\infty. \end{aligned}$$

即当$n \to \infty$时部分和S_n无极限(为什么？)，从而交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$发散；

例1. 判别下列级数的敛散性：

(1). $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$?

解： 交错级数，$u_n = \sin\frac{\pi}{n}$单调递减且

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0;$$

由莱布尼兹定理知：交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$收敛；

(2). $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$?

解： 交错级数，$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$满足$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 取$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$，得$x \geq 1$时

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \leq 0$$

即$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$单调递减，由莱布尼兹定理知：交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$收敛；

例1. 判别下列级数的敛散性：

(3). （交错p–级数）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$?

解： • 当$p>0$时，$u_n=\frac{1}{n^p}$单调递减、且$\lim_{n\to\infty}u_n=0$. 由莱布尼兹定理知：交错p–级数收敛；

•当$p<0$时，$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right|=+\infty$;

当$p=0$时，$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right|=1$; 从而当$n\to\infty$ 时一般项$(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$不趋于零。由必要条件得：当$p\leq 0$时交错p– 级数发散；

综述:

- 当$p>0$时交错p–级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$收敛；
- 当$p\leq 0$时交错p–级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$发散；

二. 绝对收敛与条件收敛

定义： • 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$称为**绝对收敛**；

• 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛、但不是绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$称为**条件收敛**；

• 对于正项级数来说，“收敛”等于“绝对收敛”；

定理： 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

证明： $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛$\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛; 利用不等式$0\le|a_n|+a_n\le 2|a_n|$及正项级数的比较判别法得：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$收敛; $\Longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\text{ 收敛；}$$

• 绝对收敛$\Longrightarrow$ 收敛; • 收敛$\begin{cases}\text{绝对收敛;}\\\text{条件收敛;}\end{cases}$

比值判别法： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ $(0 \le \rho \le +\infty)$;

(1). 若$\rho < 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛；

(2). 若$\rho > 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). 若$\rho = 1$，本判别法失效；

证明： (1). 正项级数的比值判别法$\Longrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

比值判别法或根值判别法

比值判别法： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ $(0 \le \rho \le +\infty)$;

(1). 若$\rho < 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛；

(2). 若$\rho > 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). 若$\rho = 1$，本判别法失效；

证明： (1). 正项级数的比值判别法$\Longrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛$\Longrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛；

比值判别法： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ $(0 \le \rho \le +\infty)$;

(1). 若$\rho < 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛；

(2). 若$\rho > 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). 若$\rho = 1$，本判别法失效；

证明： (2). 若$\rho > 1$，取$\epsilon_0 = \frac{1}{2}(\rho - 1)$，由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$知: 存在常数$N_0$，当$n \ge N_0$时有$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \rho\right| < \epsilon_0$,

$$\Longrightarrow\ n \ge N_0\text{时}\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \rho - \epsilon_0 = \frac{1}{2}(1+\rho) = C > 1.$$

$$\Longrightarrow\ |a_n| > C^{n-N_0}\left|a_{N_0}\right| \to +\infty.$$

即当$n \to \infty$时一般项a_n无极限$\Longrightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

根值判别法

根值判别法： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho\,(0 \le \rho \le +\infty);$$

(1). 若$\rho < 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛；

(2). 若$\rho > 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

(3). 若$\rho = 1$，本判别法失效；

证明： 类似于比值判别法，省略。

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(1). 交错$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$？

解： $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，从而

- 当$p>1$时级数为绝对收敛；当$p\leq 1$时级数不是绝对收敛;

- 当$0<p\leq 1$时，由莱布尼兹判别法知交错$p-$级数收敛，从而交错$p-$级数为条件收敛；

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(1). 交错$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$?

解： $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 从而

- 当$p > 1$时级数为绝对收敛；当$p \leq 1$时级数不是绝对收敛;
- 当$0 < p \leq 1$时,由莱布尼兹判别法知交错$p-$级数收敛，从而交错$p-$级数为条件收敛;
- 当$p \leq 0$时一般项$(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$不趋于零，从而交错$p-$级数为发散;

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$?

解： • 利用

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2=2\neq 0,$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散；由(正项级数的)比较判别法知: 级数不是绝对收敛的；

• 当$n\geq 4$时$u_n=\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$单调递减且$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，由莱布尼兹判别法知: 交错级数收敛;

• **综述**: 原级数为条件收敛;

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(3). α、β为常数；$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$?

解： $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |\beta|$, 由比值判别法

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(3). α、β为常数；$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$?

解： $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |\beta|$, 由比值判别法

- $|\beta| > 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$发散;
- $|\beta| < 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$绝对收敛;
- $\beta = 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$:
  - $\alpha < -1$时级数（绝对）收敛；
  - $\alpha \geq -1$时级数发散；
- $\beta = -1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} n^{\alpha}$:
  - $\alpha < -1$时级数（绝对）收敛；
  - $-1 \leq \alpha < 0$时级数条件收敛；
  - $\alpha \geq 0$时级数发散；

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散?

(4). 函数$f(x)$在$x=0$有二阶导数，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$为绝对收敛。

解： $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0;$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0;$

利用带皮亚诺余项的泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)=\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2);$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}n^2\left|\frac{1}{2!}f''(0)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right|=\frac{1}{2!}\left|f''(0)\right|;$$

由极限形式的比较判别法，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})\right|$收敛$\Longrightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛。

例2. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(5). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi - \frac{1}{\ln n}\right)$?

解： $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi - \frac{1}{\ln n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$;

- $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}\right|$

  $= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{\ln n}\right| = +\infty,$

由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散知：$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right|$发散，即级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ 不是绝对收敛的；

- $u_n = \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$单调递减、且$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right) = 0$，由莱布尼兹判别法：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi - \frac{1}{\ln n}\right)$收敛；

- **综述：** 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi - \frac{1}{\ln n}\right)$是条件收敛；

例2(6). 设正项数列$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$单调递减，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$发散。试讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$的敛散性。

解： $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$单调递减、且$a_n \geq 0$, 数列极限的单调有界准则得：$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$存在、$a_n \geq a$且$a \geq 0$;

由级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$发散及（交错级数）的莱布尼兹判别法知：$\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$、$a_n \geq a$;

$\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1+a}\right)^n$、等比级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$收敛、以及正项级数的比较判别法知：原级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$收敛。

例2(7). 设n是正整数，证明：(A). 方程$x^n + nx - 1 = 0$存在唯一的正实根x_n; (B). α是一个实数，讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{\alpha}$的敛散性。

解： $f(x) = x^n + nx - 1$在区间$[0, +\infty)$内$f'(x) = n(x^{n-1} + 1) > 0$, 从而$f(x)$在在区间$[0, +\infty)$内最多只有一个零点；

$f(x)$在区间$[0, 1]$内连续、$f(0) = -1 < 0$、$f(1) = n > 0$, 由连续函数的零点定理，$f(x)$ 在区间$[0, 1]$ 内至少有一个零点；

从而方程$x^n + nx - 1 = 0$存在唯一的正实根x_n;

例2(7). 设n是正整数，证明：(A). 方程$x^n+nx-1=0$存在唯一的正实根x_n; (B). α是一个实数，讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^\alpha$的敛散性。

由$x_n>0$及$x_n^n+nx_n-1=0$得:

$$x_n=\frac{1-x_n^n}{n}<\frac{1}{n},\ x_n=\frac{1-x_n^n}{n}>\frac{1-(1/n)^n}{n};$$

利用$\lim_{n\to+\infty}(1/n)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{-n\ln n}=0$ 以及（极限)夹逼准则得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^\alpha}{(1/n)^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}(n\,x_n)^\alpha=1\neq 0;$$

由正项级数的比较判别法（极限形式），级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^\alpha$与$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$有相同的敛散性；从而

- 当$\alpha>1$时级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^\alpha$收敛；
- 当$\alpha\le 1$时级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^\alpha$发散；

例2(8). 判别级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散？并说明理由。

解： 由$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right| = 2 \neq 0$, 利用级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散、及正项级数的比较判别法（极限形式）得，原级数不是绝对收敛；

$a_n = \ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})$单调递减、且$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, 由交错级数的莱布尼兹判别法得，原级数为收敛；

综合： 级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})$ 是条件收敛的。

级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛、条件收敛或发散判别的一般思路：