第11章（三）
格林定理

浙江大学数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

约当曲线与区域

定义 设曲线 C 的参数表示为 $\alpha:[a,b]\to R^n$，如果 C 为闭曲线且 $\forall t_1\neq t_2,\quad \alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$，则称 C 为 **Jardan（约当）曲线**（或**简单曲线**）.

- 在 R^2 中，每条连续的约当曲线 C 将平面分为两个互不相交的区域，而 C 是它们共同的边界，其中有界的那个区域称为 C 的内部，无界的那个区域为 C 的外部.

定义 (1) 设 $G\subset\mathrm{R}^n$，如果对于任何 $a,b\in G$，存在有限多个点 $a=x_1,x_2,\cdots,x_m=b\in G$

使折线 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\overline{x_ix_{i+1}}$ 整个包含在 G 内，则称 G 为**折线连通的**.

(2) 如果 G 是 R^n 的开集并且 G 是折线连通的，则称 G 为 R^n 的**区域**.

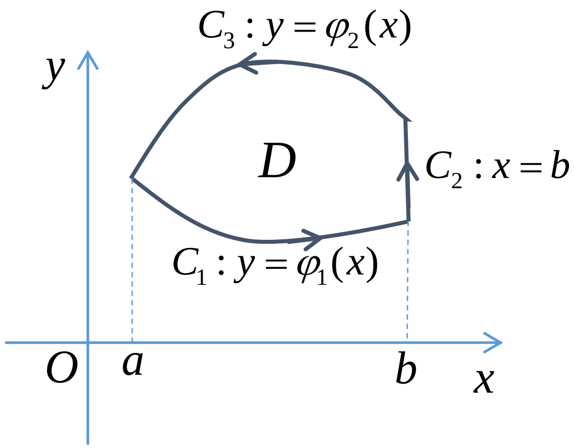
定义 设 D 是 R^2 的一个区域，如果对于 D 内任何一个约当曲线，其内部都包含在 D 内，则称是**单连通区域**.

格林（Green）定理

Green定理 设 $P,Q:\mathrm{R}^2\supset K\to\mathrm{R}$ 为连续可导的数量场，K 为 R^2 中的开集，C 为分段光滑的约当曲线, $D\subset K$，D 为 C 内部与 C 的并，则有

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.$$ 其中 C 取正向.

证明：我们对如图特殊的区域 D 加以证明.



$$-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y=-\int_a^b P[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x+\int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x.$$

$$\int\limits_{C_1}P\,\mathrm{d}x+\int\limits_{C_2}P\,\mathrm{d}x+\int\limits_{C_3}P\,\mathrm{d}x=\int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x+0-\int_a^b P[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x$$

因此，$-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_C P\,\mathrm{d}x.$ 同理可证 $\iint\limits_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_C Q\,\mathrm{d}y$，从而得证.

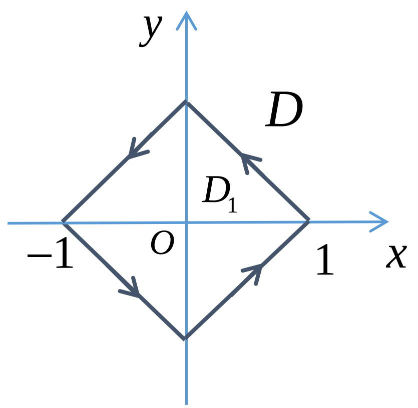
- 如果区域 G 可以分割为若干个以上特殊的这种区域 D, 则格林定理在 G 上仍然成立.

格林定理应用例题

例 1 计算 $\int_C (2x\sin y - y^2)\mathrm{d}x + x^2(x^3+\cos y)\mathrm{d}y$，其中 C 为 $|x|+|y|=1$，逆时针方向（正向）.

解： 由格林公式 $\int_C (2x\sin y - y^2)\mathrm{d}x + x^2(x^3+\cos y)\mathrm{d}y$

$$=\iint_D \left(5x^4 - x^2\sin y + 2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 20\iint_{D_1} x^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 20\int_0^1 x^4\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$$



例 2 计算曲线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 围成的平面图形 D 的面积.

解： 由格林公式知 $A(D) = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$. 沿 ∂D 正向.

所以，$A(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\sin^4 t\cos^2 t\right)\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{3\pi a^2}{8}$.


谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY