质点力学习题课

解题的一般注意事项如下：

①在认真复习的基础上解题。
②搞清题意，分清已知量、未知量，并用适当的符号来表示，且每一个符号只能代表一个物理量。
③画出简练正确的示意图，建立坐标系，进行受力分析，搞清各物理量之间的关系。
④选用最简便的定律或公式列方程（平时学习一定要注意各种定律及公式的适用条件和范围）。
⑤列联立方程，先用字母符号运算，最后代入原始数据。并对答案进行讨论。

质点力学习题课

质点运动的问题分成两类：

(1)、已知运动方程 $\vec{r}(t)$,求任一时刻的 $\vec{v}$、$\vec{a}$，
解题方法是求导；

(2)、已知 $\vec{v}$、$\vec{a}$及初始条件 $\vec{r}_0$、$\vec{v}_0$求运动方程，
解题方法是积分

质点力学习题课

【例1】已知质点运动方程 $\vec{r}=2t\vec{i}+(4-t^2)\vec{j}$ (SI)，求：

①质点的初速度和初加速度；

②质点从 t=1s 到 t=2s 的平均速度；

③t=1s时的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）、$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}-2t\vec{j}$, $\quad \vec{a}=-2\vec{j}$

故 $\vec{v}_0=2\vec{i}(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$, $\quad \vec{a}_0=-2\vec{j}(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

(2)、$\vec{r}_1=2\vec{i}+3\vec{j} \quad \vec{r}_2=4\vec{i}$

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=2\vec{i}-3\vec{j}$,

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=2\vec{i}-3\vec{j}(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

质点力学习题课

【例1】已知质点运动方程 $\vec{r} = 2t\vec{i} + (4 - t^2)\vec{j}$ (SI)，求：

①质点的初速度和初加速度；

②质点从 t=1s 到 t=2s 的平均速度；

③t=1s时的切向加速度和法向加速度的大小。

(3)、因为任一时刻的速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{2}(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{2}(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

质点力学习题课

【例2】一质点在xoy平面内作曲线运动，其加速度是时间的函数。已知a_x=2，a_y=36t^2 (SI)，当 t=0时质点静止在坐标原点，求：

①此质点的运动方程；②此质点的轨迹方程；③此质点在任一时刻的切向加速度和法向加速度的大小。

解:(1)、由定义有 $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$

$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t a_x \mathrm{d}t = \int_0^t 2\mathrm{d}t \Rightarrow v_x = 2t, \ldots v_y = 12t^3$$

同理有 $\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_x \mathrm{d}t = \int_0^t 2t\mathrm{d}t$ 得到

$$\vec{r} = t^2\vec{i} + 3t^4\vec{j}$$

(2)、消去时间得 $y = 3x^2$

质点力学习题课

【例2】一质点在xoy平面内作曲线运动，其加速度是时间的函数。已知$a_x=2$，$a_y=36t^2$ (SI)，当 t=0时质点静止在坐标原点，求：

①此质点的运动方程；②此质点的轨迹方程；③此质点在任一时刻的切向加速度和法向加速度的大小。

(3)、$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4t^2+144t^6}$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{8t+864t^5}{\sqrt{4t^2+144t^6}}$$

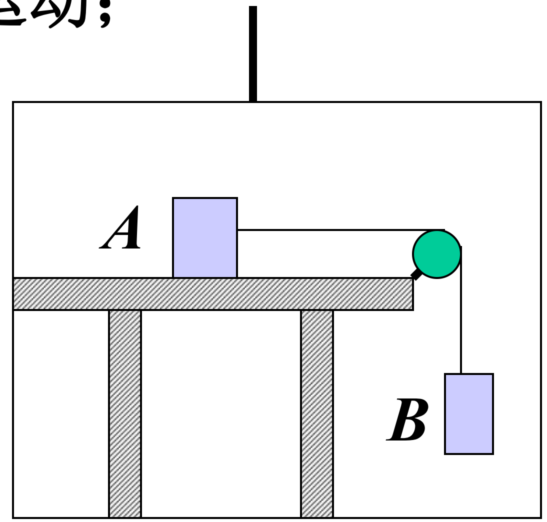
$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2-a_t^2}$$

质点力学习题课

【例3】如图所示，物体A、B的质量分别为 m_A=2kg，m_B=3kg。物体A放在水平桌面上，它与桌面的滑动摩擦系数为μ=0.25。物体B与物体A用轻质细绳并跨过一定滑轮相连，桌子固定在一吊车内。试求下列两种情况下绳内的张力（不计绳和滑轮的质量及轴承摩擦，绳不可伸长。）

①吊车以 a_0=2m/s² 的加速度竖直向上运动；

②吊车以 a_0=2m/s² 的加速度水平向左运动；



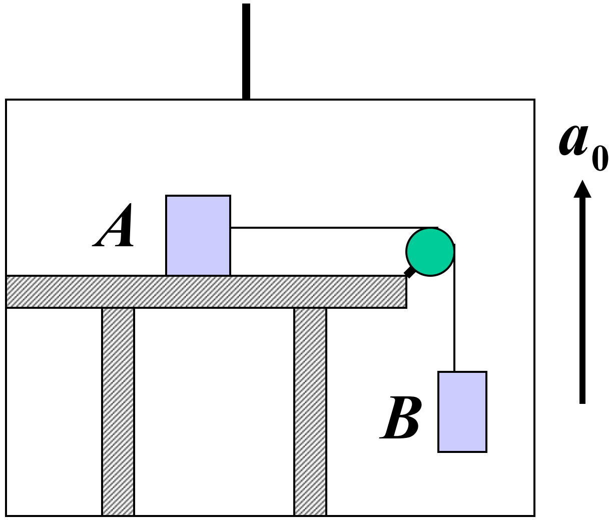
质点力学习题课

解：这类题通常应选非惯性系为参考系

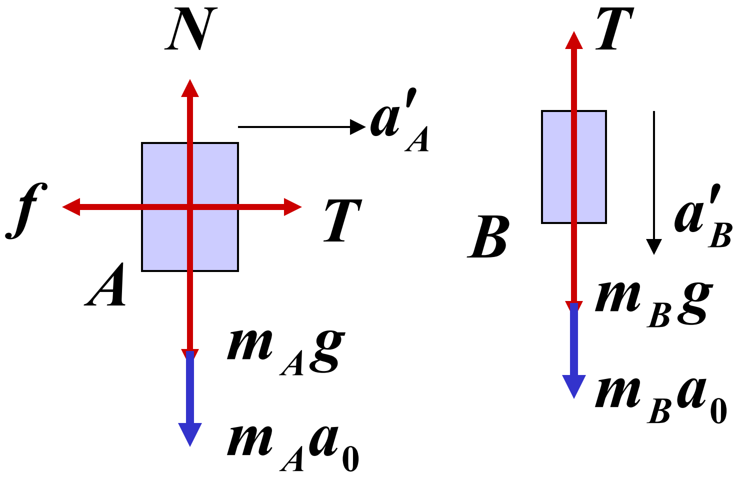
m_A=2kg ， m_B=3kg，

μ=0.25， a_0=2m/s²

①以吊车为参考系，则A、B均受到一个向下的惯性力



$$\begin{cases} T - f = m_A a'_A \\ m_A g + m_A a_0 - N = 0 \\ f = \mu N \\ m_B g + m_B a_0 - T = m_B a'_B \\ a'_A = a'_B \end{cases}$$



得 $T = 11.7\text{N}, a'_A = a'_B = 3.9\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

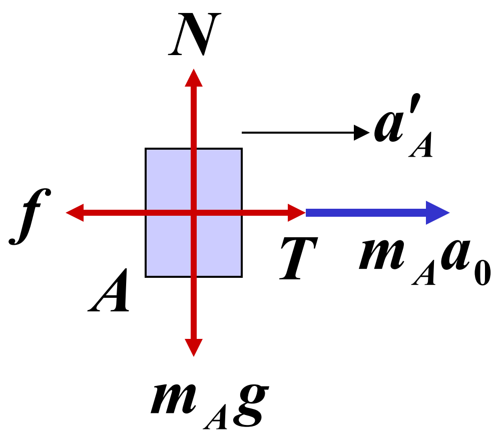
质点力学习题课

解：这类题通常应选非惯性系为参考系

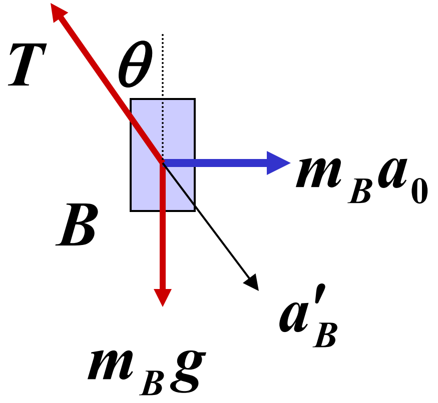
m_A=2kg ， m_B=3kg ，

μ=0.25， a_0=2m/s^2

②仍以吊车为参考系，则A、B均受到一个向右的惯性力

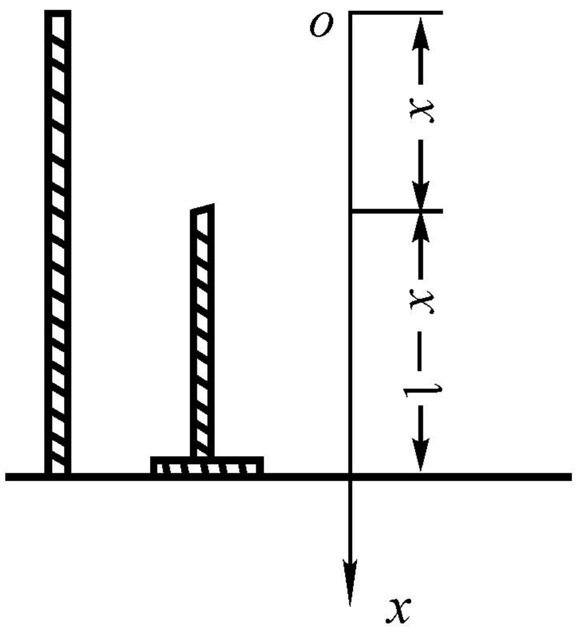


$$
\begin{cases}
T + m_A a_0 - f = m_A a'_A \\
N - m_A g = 0 \\
f = \mu N \\
m_B a_0 - T\sin\theta = m_B a'_B \sin\theta \\
m_B g - T\cos\theta = m_B a'_B \cos\theta \\
a'_A = a'_B
\end{cases}
$$



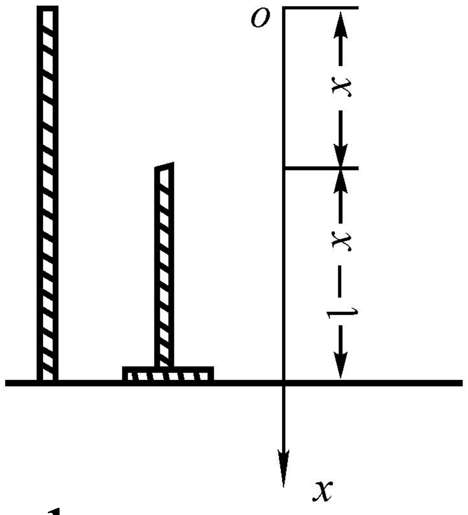
得$T = 12.1\text{N}$

例4 一质量M均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，长为L。绳的下端刚好触到水平地面上，如果把绳的上端放开，绳将由静止开始自由下落在地面上。求：绳已下落x长一段时，地面所受的压力。



解：取主体为地面上的绳子：

$m=M\,x/L$;流动物为$dm= M\,dx/L$ 。



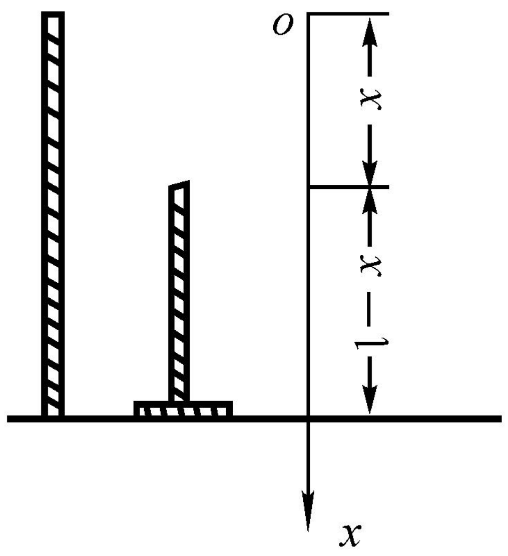
$$\because m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},\quad \therefore 0=(mg-N)+v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$m=\frac{M}{L}x,\;\; dm=\frac{M}{L}dx,\;\; v'=\sqrt{2gx,}$$

$$\therefore 0=\frac{M}{L}xg-N+\frac{M}{L}2gx=3gx\frac{M}{L}-N$$

$$N=3gx\frac{M}{L}$$

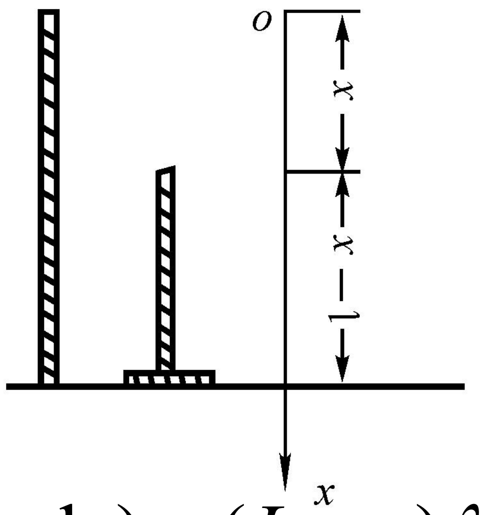
解：设t 时刻已有x 长的柔绳落至桌面，随后的dt 时间内将有质量为Mdx/L的柔绳以dx/dt的速率碰到桌面而停止，它的动量变化率为：



$$F\mathrm{d}t = \mathrm{d}P = 0 - \mathrm{d}mv = -\lambda \mathrm{d}xv = -\lambda v^2 \mathrm{d}t = -\frac{M}{L}2gx\mathrm{d}t$$

$$\therefore F = -2gx\frac{M}{L}, \quad N = gx\frac{M}{L} + 2gx\frac{M}{L} = 3gx\frac{M}{L}.$$

例4：



解：把链条看作质点系。

$$(Mg-N)\mathrm{d}t=\mathrm{d}P=(L-x-\mathrm{d}x)\lambda(v+\mathrm{d}v)-(L-x)\lambda v$$

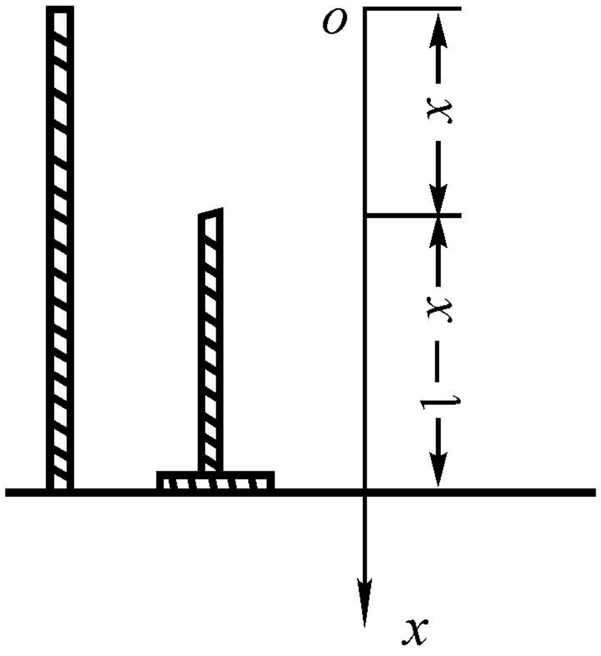
$$=\lambda[-v\mathrm{d}x+(L-x)\mathrm{d}v]$$

$$v^2=2gx,\quad \lambda=M/L$$

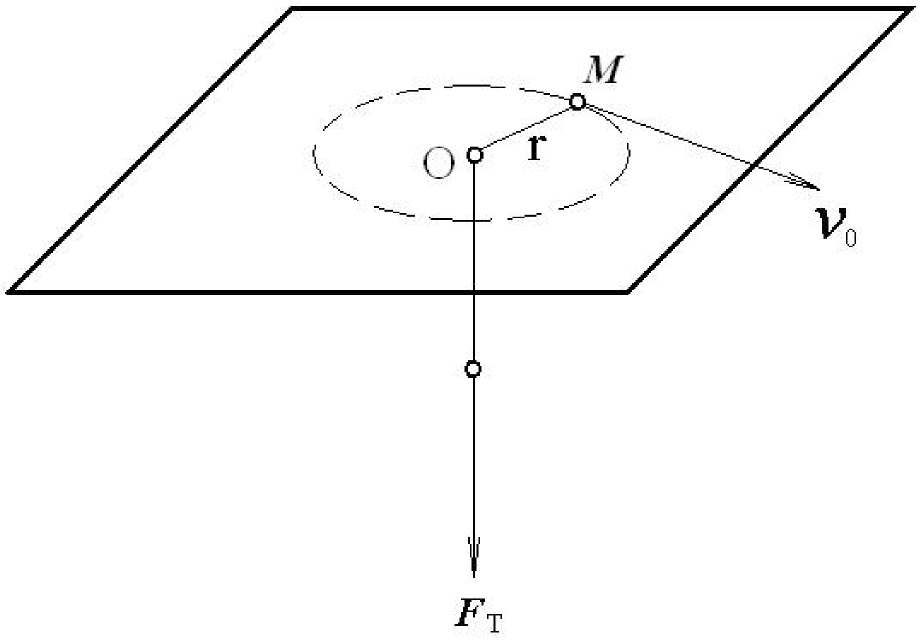
$$Mg-N=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\lambda[-v^2+(L-x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}]=-2gx\frac{M}{L}+g(L-x)\frac{M}{L}$$

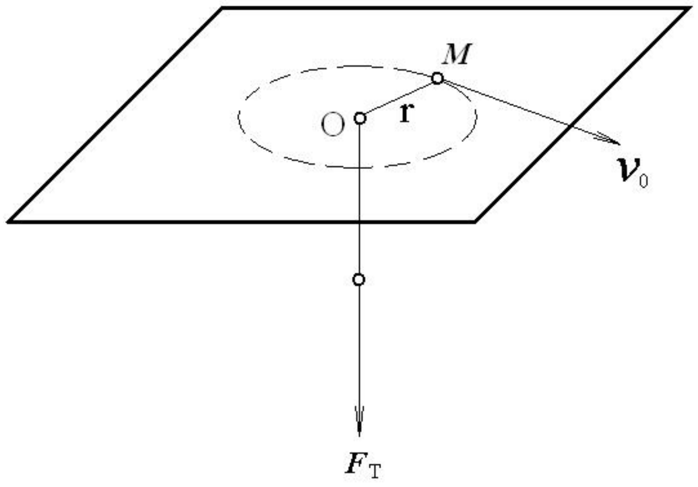
$$\therefore Mg - N = -3gx\frac{M}{L} + gL\frac{M}{L} = -3gx\frac{M}{L} + gM$$

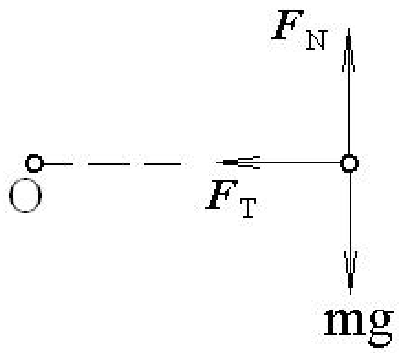
$$N = 3gx\frac{M}{L}, \quad N' = -N.$$



例5：如将绳下拉，使圆周半径缩小一半，求此时球的速度及绳的拉力。







对于小球，因为

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = 0$$

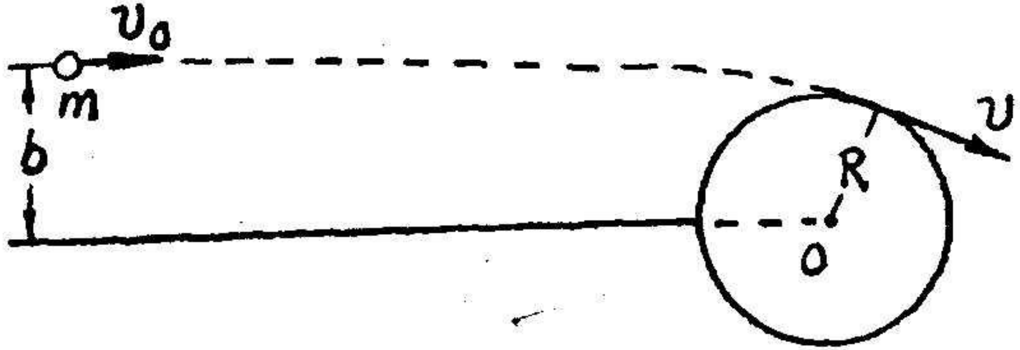
所以 小球对O点角动量守恒。

$$L_{O0} = mv_0 r \qquad L_{O1} = mv_1 \frac{r}{2}$$

$$L_{O0} = L_{O1} \Rightarrow v_1 = 2v_0$$

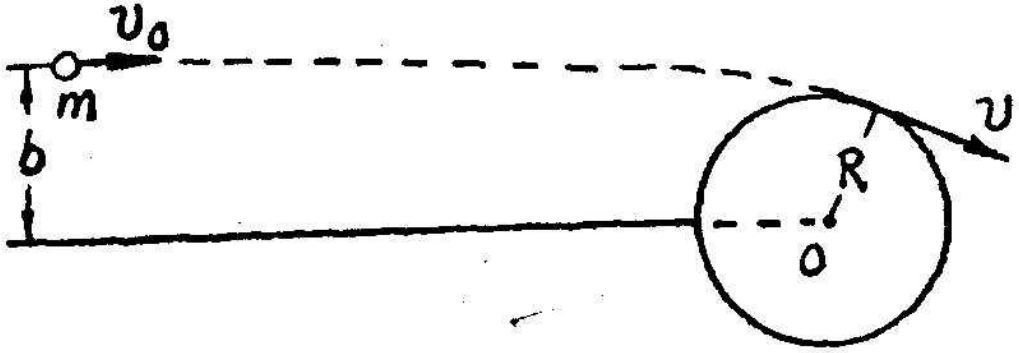
$$F_T = ma_n = m \cdot \frac{v_1^2}{\frac{r}{2}} = 8\frac{mv_0^2}{r}$$

习题2.128:质量为m的飞船关闭发动机后以速度V_0飞向质量为M、半径为R的遥远星球。过球心作一直线与V_0平行，问飞船与此直线间的垂直距离b多大时，飞船轨道恰好与星球表面相切，能在星球表面着陆？



解：角动量守恒

$$mvR = mv_0 b$$



机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{\infty}$$

解得：

$$b = R\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}}$$

作业

2.27　2.28　2.90　2.125