

## 第九章 多元函数积分学

二重积分、三重积分第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念也是从实践中抽象出来的数学概念，它们是定积分的推广，其中的数学思想与定积分一样，也是一种“和式的极限”。所不同的是：定积分的被积函数是一元函数，积分范围是一个区间；而二重积分的被积函数是二元函数，积分范围是平面上的一个区域；三重积分的被积函数是三元函数，积分范围是空间中的一个区域，第一类曲线积分的积分区域是一条曲线段，第一类曲面积分是一个曲面块。它们之间存着密切的联系，二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分可通过定积分来计算。

这一章将介绍二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念，以及它们的计算方法和应用。

### §1 二重积分的概念

#### §1.1 二重积分的概念

我们知道，柱体的体积等于底面积乘以高。如顶部不是平面而是曲面，即所谓的曲顶柱体，如何计算它的体积呢？

**问题 1** 曲顶柱体的体积

设一曲顶柱体  $V$ ，它的底面是  $Oxy$  平面上的一个有界闭区域  $\sigma$ ，它的顶面是曲面  $z=f(x,y)$ ，其中  $f(x,y)$  在  $\sigma$  上连续， $f(x,y) \geq 0$ ，侧面是一个母线平行于  $Oz$  轴的柱面，求它的体积  $V$  (图 9-1)。

有了求曲边梯形面积的经验，我们仍然采用分割、近似、作和、取极限这四个步骤。

第一步：分割。用若干条分段光滑曲线（称为曲线网）将区域  $\sigma$  分成  $n$

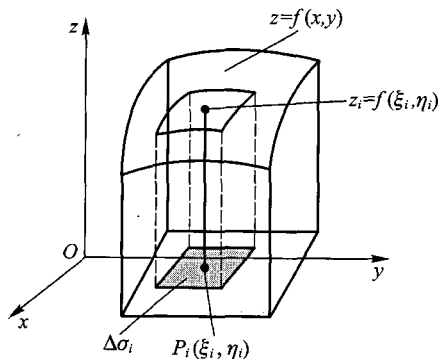


图 9-1

、个小区域  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ , 仍以  $\Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$  表示小区域  $\Delta\sigma_i$  的面积. 过每一小区域的边界线作母线平行于  $Oz$  轴的柱面, 这样柱体  $V$  就被这些小柱面划分成  $n$  个小柱体 (图 9-1 中只画出一个小区域  $\Delta\sigma_i$  上的小曲顶柱体  $\Delta V_i (i=1, 2, \dots, n)$ ), 为了便于考察, 我们画得稍大一些, 实际上当  $n$  很大时, 这些小柱体看上去像一条线段一样).

第二步: 近似. 由于  $f(P)$  在有界闭区域  $\sigma$  上连续, 当  $\Delta\sigma_i$  很小时, 区域  $\sigma_i$  上的函数值相差很小, 几乎一样. 从而  $\Delta V_i$  几乎是一个柱体, 这个柱体的底面积是  $\Delta\sigma_i$ , 把  $P_i(\xi_i, \eta_i)$  点的竖坐标  $z_i = f(\xi_i, \eta_i) \geq 0$  作为这个柱体的高, 于是

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

上式称为积分元.

第三步: 作和.  $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  称为积分和式.

第四步: 取极限. 设  $\lambda_i$  ①表示  $\Delta\sigma_i$  的直径, 令  $\lambda = \max\{\lambda_i; 1 \leq i \leq n\}$ . 当  $\lambda$  越小,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  就越无限地接近于立体  $V$  的体积, 于是

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \quad (9.1)$$

## 问题 2 平面薄板的质量

定义 9.1 设  $\sigma$  是一个平面薄板,  $\forall P_0(x_0, y_0) \in \sigma$ , 取包围  $P_0$  的小区域  $\Delta\sigma$ , 质量为  $\Delta m$ , 若  $\lim_{\Delta\sigma \rightarrow P_0} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma}$  存在, 该极限值称为在  $P_0$  处的面密度, 简称为密度.

设平面薄板的密度函数为连续函数  $\rho = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma$ ,  $\sigma$  为有界闭区域, 求平面薄板的质量  $M$  (实际上  $\sigma$  就是平面薄板在  $Oxy$  平面上的投影区域). 与求曲顶柱体体积  $V$  的过程完全一样, 在这个过程中只要把  $V$  换成  $M$ ,  $\Delta V_i$  换成  $\Delta M_i$ , 把立体体积换成质量, 小曲顶柱体换成小平面薄板, 其余都不改, 将得到

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

实际上, 物理学、力学、电学等学科中的一些量的计算, 都可归结为求形如 (1.1) 这样的和式极限. 为了使得定义适合更多的函数, 在定义中把函数连续及非负这些条件去掉, 一般有如下定义:

① 设集合  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $d = \max\{\rho(P_1, P_2), P_1, P_2 \in D\}$  称为点集  $D$  的直径. 若  $D$  有界, 则  $d < +\infty$ .

**定义 9.2** 设二元函数  $f(P) = f(x, y)$  在平面有界闭区域  $\sigma$  上有界, 用曲线网将区域  $\sigma$  任意分成  $n$  个(彼此无公共内点的)小闭区域  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ , 仍以  $\Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$  记为小区域  $\Delta\sigma_i$  的面积.  $\forall P_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i, f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  称为积分元, 而  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  称为积分和式. 设  $\lambda_i$  是小区域  $\Delta\sigma_i$  的直径, 令  $\lambda = \max\{\lambda_i; 1 \leq i \leq n\}$ . 若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

存在且此极限与区域  $\sigma_i$  的分法及点  $P_i$  的取法无关, 则称这个极限值为函数  $f(x, y)$  在区域  $\sigma$  上的二重积分, 记作

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \quad \text{或} \quad \iint_{\sigma} f(P) d\sigma,$$

即

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \quad (9.2)$$

这里的  $f(P) = f(x, y)$  称为被积函数,  $\sigma$  称为积分区域,  $f(x, y) d\sigma$  称为被积表达式,  $x, y$  称为积分变量,  $d\sigma$  称为面积元素(注意: 元素是没有大小的).

二重积分又称为函数  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上的黎曼积分, 若这个积分存在, 称函数  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上黎曼可积, 或简称可积.

**定理 9.1** 若  $f(x, y)$  在有界闭区域  $\sigma$  上连续, 则  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上可积.

**注意:** 本章中, 除特别声明外, 总是假定被积函数  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上是连续的.

因此, 问题 1 中的体积  $V = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ , 问题 2 中的质量  $M = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ . 特别地, 若问题 1 的曲顶柱体中的曲面方程  $f(x, y) \equiv 1$ , 则

$$V = \iint_{\sigma} 1 d\sigma \triangleq \iint_{\sigma} d\sigma.$$

由实际问题知, 这时曲顶柱体是一个柱体, 其体积  $V = \text{底面积} \times \text{高} = \sigma$ , 因此

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \sigma.$$

所以利用二重积分可计算平面图形的面积.

如果二重积分存在, 则二重积分值与区域的分法无关. 为了计算方便, 我们作特殊的分法, 用若干条平行于  $x$  轴、 $y$  轴的直线网将  $\sigma$  分成  $n$  个小区域, 其中, 中间有规则的小区域都是矩形, 其余的是靠在  $\sigma$  边界上的非矩形小区域(图 9-2). 矩形小区域的面积

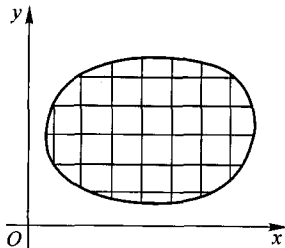


图 9-2

$$\Delta\sigma = \Delta x \Delta y, \quad \text{即} \quad d\sigma = dx dy.$$

由  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上可积, 知  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上有界. 即存在常数  $M > 0$ , 对一切  $(x, y) \in D$ , 有  $|f(x, y)| \leq M$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum^{(1)} f(x, y) \Delta\sigma + \sum^{(2)} f(x, y) \Delta\sigma \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum^{(1)} f(x, y) \Delta x \Delta y + \sum^{(2)} f(x, y) \Delta\sigma \right) \end{aligned}$$

注意:  $\sum^{(1)}$  代表对矩形小区域求和,  $\sum^{(2)}$  代表对非矩形小区域求和.

由于

$$0 \leq \left| \sum^{(2)} f(x, y) \Delta\sigma \right| \leq M \sum^{(2)} \Delta\sigma,$$

而当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 边界上的不完整的非矩形小区域面积之和趋于区域边界曲线的面积, 由于边界曲线面积为 0, 所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} M \sum^{(2)} \Delta\sigma = 0, \quad \text{从而} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum^{(2)} f(x, y) \Delta\sigma = 0.$$

于是

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum^{(1)} f(x, y) \Delta x \Delta y = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy. \quad \square$$

几何意义: 若  $f(x, y)$  在有界闭区域  $\sigma$  上可积, 且  $f(x, y) \geq 0$ , 则  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  表示一个以区域  $\sigma$  为底, 以曲面  $z = f(x, y)$  为顶, 侧面是一个柱面 (它的准线是  $\sigma$  的边界, 母线平行于  $Oz$  轴) 的曲顶柱体的体积.

## § 1.2 二重积分的性质

可类比一元函数定积分的性质, 可以证明二重积分具有如下一些基本性质.

设  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  在有界闭区域  $\sigma$  上的二重积分存在.

性质 1 
$$\iint_{\sigma} [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \pm \iint_{\sigma} g(x, y) d\sigma.$$

性质 2 
$$\iint_{\sigma} k f(x, y) d\sigma = k \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

性质 3 
$$\iint_{\sigma} 1 d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = \sigma \quad (\text{其中 } \sigma \text{ 表示区域 } \sigma \text{ 的面积}).$$

由性质 3 知, 利用二重积分可计算平面图形的面积.

性质 4 若  $\sigma$  可分解为两个不共内点的区域  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ , 记作  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  (图

9-3), 则有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 5 若  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  存在,  $f(x, y) \geq 0$ , 则

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \geq 0.$$

若  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma$ , 则  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq$

$$\iint_{\sigma} g(x, y) d\sigma.$$

性质 6 若  $f(x, y) \geq 0$ ,  $f(x, y) \neq 0$ ,  $(x, y) \in \sigma$  且  $f(x, y)$  连续, 则  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma > 0$ .

若  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $f(x, y) \neq g(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma$  且  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  连续, 则

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma < \iint_{\sigma} g(x, y) d\sigma.$$

性质 7  $\left| \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y)| d\sigma.$

性质 8 (二重积分中值定理) 若  $f(x, y)$  在有界闭区域  $\sigma$  上连续, 则在  $\sigma$  上至少存在一点  $P(x^*, y^*)$ , 使得

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = f(x^*, y^*) \sigma.$$

证 由于  $f(x, y)$  在有界闭区域  $\sigma$  上连续, 所以  $f(x, y)$  必在  $\sigma$  上取到它的最大值  $M$  和最小值  $m$ , 即有  $m \leq f(x, y) \leq M$ ,  $(x, y) \in \sigma$ . 由性质 (5), (2), (3), 有

$$m\sigma = \iint_{\sigma} m d\sigma \leq \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq \iint_{\sigma} M d\sigma = M\sigma,$$

除以面积  $\sigma$ , 得

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq M.$$

即  $\frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  是介于连续函数  $f(x, y)$  在  $\sigma$  上的最小值  $m$  与最大值  $M$  之间的一个数. 由介值定理知, 至少存在一点  $P(x^*, y^*) \in \sigma$ , 使得

$$\frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = f(x^*, y^*),$$

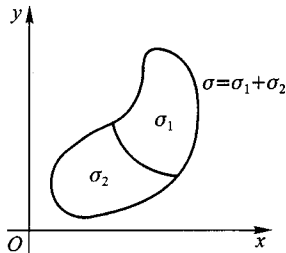


图 9-3

于是

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = f(x^*, y^*) \sigma. \quad \square$$

上述函数值  $f(x^*, y^*)$  称为函数  $f(x, y)$  在区域  $\sigma$  上的 平均值 或 中值.

推论  $m\sigma \leq \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$ .

几何意义: 若  $f(x, y) \geq 0$ , 则二重积分  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  所表示的曲顶柱体的体积, 等于以  $\sigma$  为底,  $f(x^*, y^*)$  为高的一个柱体的体积.

利用几何意义, 可得到底部是  $Oxy$  平面上的有界闭区域  $\sigma_{xy}$ , 顶部曲面方程为  $z = f(x, y)$ , 侧面是以  $\sigma_{xy}$  的边界为准线, 母线平行于  $Oz$  轴的柱面 (特殊情形下, 柱面可退缩为曲面与  $Oxy$  平面的交线) 的曲顶柱体体积  $V = \iint_{\sigma_{xy}} |f(x, y)| d\sigma$ .

例 1 判断积分  $\iint_{\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$  的符号.

解 由于  $\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ , 所以  $\ln(x^2 + y^2) \leq 0$ . 且当  $x^2 + y^2 < 1$  时,  $\ln(x^2 + y^2) < 0$ , 于是, 由性质 6 知

$$\iint_{\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0.$$

### 习题 9-1

1. 判断下列积分的符号:

$$(1) \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy; \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{4-x^2-y^2} dx dy.$$

$$2. \text{ 证明: } \frac{200}{102} \leq \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{200}{100}.$$

$$3. \text{ 设 } f(x, y) \text{ 为连续函数, 求 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy.$$

4. 比较下列二重积分的大小:

$$(1) \iint_D xy dx dy \text{ 与 } \iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$$

$$(2) \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} x^2 y^4 \sin \frac{1}{y^2} dx dy \text{ 与 } \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} 2x^2 dx dy;$$

## §2 二重积分的计算

### §2.1 在直角坐标系中计算二重积分

#### 一、 $x$ -型区域与 $y$ -型区域

若垂直于 $x$ 轴的直线 $x=x_0$ 至多与区域 $D$ 的边界交于两点(垂直 $x$ 轴的边界除外), 则称 $D$ 为 $x$ -型区域, 且 $x$ -型区域 $D$ 一定可表示为平面点集

$$D = \{(x, y) : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

如图9-4所示, 即由曲线 $y=\varphi_1(x)$ ,  $y=\varphi_2(x)$ 及直线 $x=a$ ,  $x=b$ 所围成的区域.

若垂直于 $y$ 轴的直线 $y=y_0$ 至多与区域 $D$ 的边界交于两点(垂直于 $y$ 轴的边界除外), 则称 $D$ 为 $y$ -型区域, 且 $y$ -型区域 $D$ 一定可表示为平面点集

$$D = \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

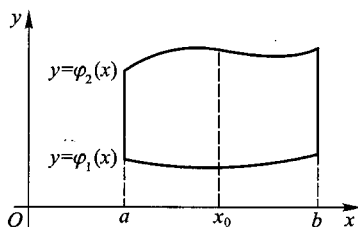


图9-4

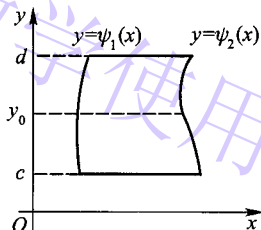


图9-5

如图9-5所示, 即由曲线 $x=\psi_1(y)$ ,  $x=\psi_2(y)$ 及直线 $y=c$ ,  $y=d$ 所围成.

许多常见的区域都可分割为有限个无公共内点的 $x$ -型区域或 $y$ -型区域. 如图9-6所示的区域 $D$ 既不是 $x$ -型区域, 也不是 $y$ -型区域, 但可分割为三个区域, 其中 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 为 $x$ -型区域,  $\sigma_2$ 为 $y$ -型区域. 因此, 解决了 $x$ -型区域和 $y$ -型区域上二重积分的计算方法, 一般区域上的二重积分计算问题也就得到了解决.

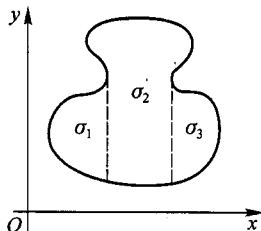


图9-6

## 二、在直角坐标系中计算二重积分

设二重积分  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  存在, 其中积分区域为  $x$ -型区域:

$$\sigma = \{(x, y) : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

不妨设  $f(x, y) \geq 0$ , 则二重积分  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  值在几何上可以表示为一曲顶柱体的体积. 设该曲顶柱体的体积为  $V$  (图 9-7), 它的顶部曲面是  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma$ , 底面是  $\sigma$ , 侧面是柱面, 且准线是  $\sigma$  的边界, 母线平行于  $z$  轴, 该曲顶柱体可以看成是夹在两平行平面  $x = a$ ,  $x = b$  之间的立体. 设  $a \leq x_0 \leq b$ , 过点  $(x_0, 0, 0)$  处作垂直于  $x$  轴的平面  $x = x_0$  与立体相截, 设截面积为  $A(x_0)$ , 平面  $x = x_0$  与区域  $\sigma$  的边界交于两点  $(x_0, \varphi_1(x_0), 0)$ ,  $(x_0, \varphi_2(x_0), 0)$ , 截面可看成平面  $x = x_0$  上的曲边梯形 (如图 9-7 中阴影所示). 在此曲边梯形内,  $y \in [\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ , 曲线  $z = f(x_0, y)$ , 截面积

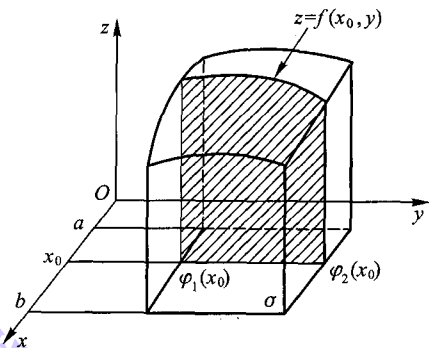


图 9-7

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy, \quad x_0 \in [a, b],$$

从而

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b].$$

由夹在两平行平面间立体体积的公式知

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &\triangleq \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (9.3)$$

上式右边是一个先对  $y$  (这时把  $x$  看成常数) 积分后, 再对  $x$  积分的两次积分, 称之为累次积分.

当去掉  $f(x, y) \geq 0$ ,  $(x, y) \in \sigma$  的限制, 仍然可以证明公式 (9.3) 成立, 只不过证明过程要复杂得多 (在此从略).

由于二重积分是一元函数定积分的直接推广, 所以常把定积分叫做一重积分或单积分. 式 (9.3) 把二重积分转化为两次单积分, 即先固定  $x$  (看成常数),



对  $y$  从  $\varphi_1(x)$  到  $\varphi_2(x)$  积分, 然后对  $x$  从  $a$  到  $b$  积分. 注意这里积分限的确定应从小到大. 如在对  $y$  积分时, 应顺着平行于  $Oy$  轴并沿该轴正向穿过区域  $\sigma$  的直线(如图 9-8 中虚线所示), 以穿入点的纵坐标  $\varphi_1(x)$  为下限(简称下曲线), 穿出点的纵坐标  $\varphi_2(x)$  为上限(称为上曲线)(图 9-8).

设积分区域  $\sigma$  为  $y$ -型区域  $\sigma = \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$ . 不妨设  $f(x, y) \geq 0$ . 在区间  $[c, d]$  内取一点  $y_0$ , 作平面  $y = y_0$  与曲顶柱体相截, 设截面积为  $B(y_0)$ , 截面是平面  $y = y_0$  上的曲边梯形(如图 9-9 中阴影部分所示). 在此曲边梯形内,  $x \in [\psi_1(y_0), \psi_2(y_0)]$ , 曲线  $z = f(x, y_0)$  (图 9-9), 截面积

$$B(y_0) = \int_{\psi_1(y_0)}^{\psi_2(y_0)} f(x, y_0) dx, \quad y_0 \in [c, d],$$

从而

$$B(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

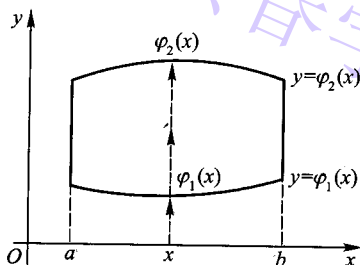


图 9-8

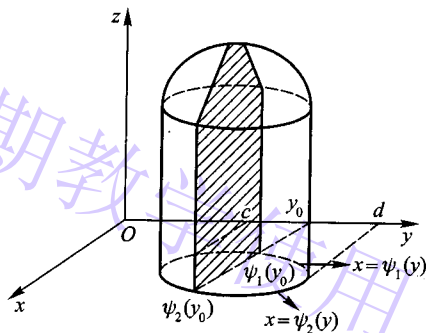


图 9-9

于是

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_c^d B(y) dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \\ &\triangleq \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (9.4) \end{aligned}$$

上式右边是一个先对  $x$  (这时把  $y$  看成常数) 积分, 后对  $y$  积分的两次定积分, 又称为累次积分. 计算时, 先固定  $y$  (看成常数) 对  $x$  积分, 这时, 应顺着平行于  $x$  轴正向的直线(如图 9-10 中虚线所示), 以穿入点的横坐标  $\psi_1(y)$  为下限(称为左曲线), 穿出点的横坐标  $\psi_2(y)$  为上限(称为右曲线)积分, 然后再以  $c$  为下限,  $d$  为上限( $c < d$ )

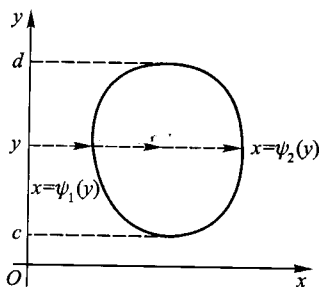


图 9-10

(图 9-10) 对  $y$  积分.

上面的积分是用平行于坐标轴的直线去分割区域  $\sigma$ , 有  $d\sigma = dx dy$ , 因此, (9.3) 式又可写成

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

(9.4) 式又可写成

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  的几何意义: 当  $f(x, y) \geq 0$  时,  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  表示平面  $x = x_0$  (固定  $x$ ) 与立体  $V$  相截所得的截面面积.

$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$  的几何意义: 当  $f(x, y) \geq 0$  时,  $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$  表示平面  $y = y_0$  (固定  $y$ ) 与立体  $V$  相截所得的截面面积.

若积分区域

$$\begin{aligned} \sigma &= \{(x, y) : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\} \\ &= \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}, \end{aligned}$$

即  $\sigma$  既是  $x$ -型区域又是  $y$ -型区域(图 9-11)

时, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy &= \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \end{aligned}$$

如果平行于坐标轴的直线与  $\sigma$  的边界线相交多于两点(不包括边界线垂直于坐标轴的情形), 则可以将  $\sigma$  适当分割成几个部分

区域, 使这些部分区域或者是  $x$ -型区域或者是  $y$ -型区域. 例如图 9-7 所示的区域  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , 其中  $\sigma_1, \sigma_3$  是  $x$ -型区域,  $\sigma_2$  是  $y$ -型区域. 利用二重积分的性质, 有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_3} f(x, y) d\sigma.$$

根据以上分析, 可得计算二重积分的步骤如下:

- (1) 画出积分区域  $\sigma$  的边界曲线, 确定是哪一类型的区域;
- (2) 若  $\sigma$  是  $x$ -型区域, 按公式(9.3)计算; 若  $\sigma$  是  $y$ -型区域, 则按公式(9.4)计算; 若  $\sigma$  既是  $x$ -型又是  $y$ -型区域, 则选择较方便的一种;

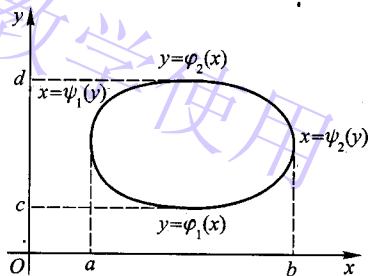


图 9-11

(3) 若  $\sigma$  是一般区域, 可以将  $\sigma$  分割成几个部分区域, 使得每一个部分区域或是  $x$ -型区域或是  $y$ -型区域, 然后化成部分区域上的积分之和.

例1 求函数  $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$  在正方形:  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$  内的平均值.

解 设平均值为  $I_0$ , 则

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} \sin^2 x \sin^2 y dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^\pi \sin^2 x dx \right]^2 = \frac{1}{\pi^2} \left[ \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi \right]^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例2 计算  $\iint_{\sigma} \frac{x^2}{y^2} d\sigma$ , 其中  $\sigma$  是由  $y = \frac{1}{x}, x = 2, y = x$  所围成的区域.

解 由于  $\sigma: \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2$  为  $x$ -型区域(图9-12所示), 所以, 由(9.3)式得

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{x^2}{y^2} d\sigma &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy \\ &= \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^x \right) dx = \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{x} + x \right) dx \\ &= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left( -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

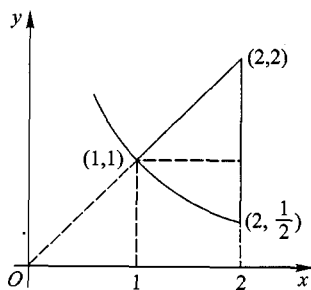


图9-12

虽然  $\sigma$  也是  $y$ -型区域, 但左曲线是一个分段函数

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

因此需要把区域  $\sigma$  分成两个  $y$ -型区域  $\sigma_1, \sigma_2$ , 其中  $\sigma_1: \frac{1}{y} \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq 1$ ;  $\sigma_2: y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ , 有

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{x^2}{y^2} d\sigma &= \iint_{\sigma_1} \frac{x^2}{y^2} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{x^3}{3y^2} \right) \Big|_{\frac{1}{y}}^2 dy + \int_1^2 \left( \frac{x^3}{3y^2} \right) \Big|_y^2 dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy + \int_1^2 \left( \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3} \right) dy = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

这个例子说明, 二重积分计算的繁简与积分的次序有关. 有的二重积分, 如果不更换成恰当的积分次序, 将无法进行计算, 所以在计算二重积分时, 必须适当地选取积分次序.

例3 计算积分  $\int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$ .

分析 显然这个累次积分不能直接计算出来, 因为  $e^{-y^2}$  的原函数不能用初等函数表示. 因此, 有必要把它还原成二重积分, 转化为另一顺序的累次积分进行求解.

解 由题意知,  $\sigma = \{(x, y) : x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ , 画出  $\sigma$  的图形(图 9-13). 由于  $\sigma$  可写成  $y$ -型区域:  $0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy &= \iint_{\sigma} x^2 e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 \left[ e^{-y^2} \frac{1}{3} x^3 \right]_0^y dy = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-y^2} y^3 dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 e^{-y^2} y^2 dy^2 \xrightarrow{\text{令 } y^2 = t} \frac{1}{6} \int_0^1 e^{-t} t dt, \end{aligned}$$

由分部积分法, 可得

$$\text{原式} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}.$$

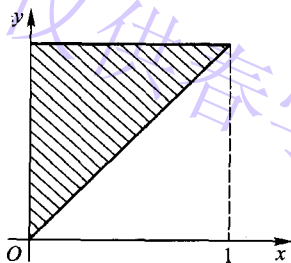


图 9-13

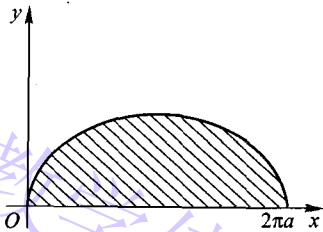


图 9-14

例4 计算  $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$ , 其中  $\Omega$  是由  $x$  轴和摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的第一拱所围成的区域.

解 由于  $\Omega$  为  $x$ -型区域:  $0 \leq y \leq y(x)$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi a$  (图 9-14), 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy \\ &= \int_0^{2\pi a} \left( \frac{1}{3} y^3 \right)_0^{y(x)} dx = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3(x) dx \\ &\xrightarrow{\text{令 } x = a(t - \sin t)} \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 a (1 - \cos t) dt \\ &= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} 16 \sin^8 \frac{t}{2} dt \xrightarrow{\text{令 } \frac{t}{2} = u} \frac{16a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u \cdot 2 du \\ &= \frac{32a^4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du = \frac{64a^4}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{12} \pi a^4. \end{aligned}$$

例5 求曲线  $(x-y)^2 + x^2 = a^2 (a>0)$  所围成的平面图形的面积.

解 由于所求面积的区域为

$$\sigma: x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a,$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\sigma} d\sigma = \int_{-a}^a dx \int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} dy \\ &= \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2-x^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx. \\ &\stackrel{x=asin t}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt = 4a^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2. \end{aligned}$$

例6 求由曲面  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$  所围立体的体积  $V$ .

解 由于所围立体的底部为区域  $\sigma: x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1$ , 顶部是曲面  $z = x^2 + y^2$  (图 9-15), 所以

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{x^2}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + x^2 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \frac{88}{105}. \end{aligned}$$

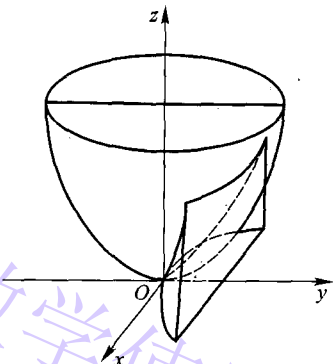


图 9-15

## §2.2 在极坐标系中计算二重积分

在一元函数定积分中可利用变量代换来简化定积分的计算, 在二重积分的计算中也有类似方法, 我们称为坐标变换.

由于圆  $x^2 + y^2 = R^2$  在极坐标  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  变换下为  $r = R$ , 而  $x^2 + y^2$  为  $r^2$ , 有时可使被积函数简单化. 因此, 我们想到可利用极坐标变换来简化二重积分的计算.

设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $\sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta \sigma.$$

极坐标与直角坐标之间的关系为  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 于是

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

现用一族以原点  $O$  为中心的圆  $r = r_i$  和一族以原点为起点的射线  $\theta = \theta_i$  将区域  $\sigma$

分割成若干个小区域(图 9-16), 其中有规则的小区域为曲边扇环(图 9-17):

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}\Delta\theta(r^2+2r\Delta r+\Delta r^2) - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \\ &= r\Delta\theta\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\theta.\end{aligned}$$

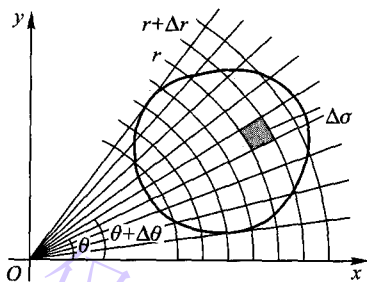


图 9-16

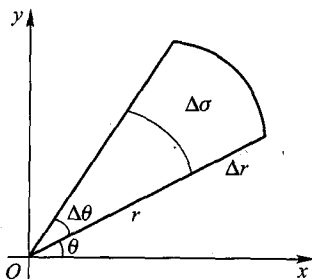


图 9-17

由于  $\frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\theta$  是  $\Delta\theta\Delta r$  的高阶无穷小 ( $\Delta r \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0$ ), 所以有  $d\sigma = r dr d\theta$ , 于是

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{\text{扇环小区域}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \Delta r \Delta\theta + \sum_{\text{非扇环小区域}} f(x, y) \Delta\sigma \right),\end{aligned}$$

可以证明  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\text{非扇环小区域}} f(x, y) \Delta\sigma = 0$ , 由  $f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$  是连续函数, 知

$$\boxed{\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.} \quad (9.5)$$

这就是把二重积分从直角坐标变换为极坐标的变换公式. 在极坐标系中面积元素  $d\sigma = r dr d\theta$ , 在(9.5)式右边的二重积分中, 它的被积函数  $f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$  是  $r, \theta$  的函数, 而这时  $\sigma$  的边界曲线需用极坐标  $r, \theta$  表示.

利用前面讲过的二重积分化为累次积分的方法, 就可以将它化成关于  $r, \theta$  的累次积分, 一般都采用  $\theta$ -型区域来计算.

1. 若  $\sigma$  是  $\theta$ -型区域:  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , 即由曲线  $r = r_1(\theta)$  (称为下曲线),  $r = r_2(\theta)$  (称为上曲线), 及射线  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  所围成的区域(图 9-18), 则

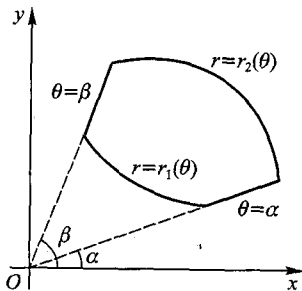


图 9-18

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(1) 若极点  $O$  在区域  $\sigma$  外部,  $\sigma$  可表示为:  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  (图 9-18), 则有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(2) 若极点  $O$  在区域  $\sigma$  的边界上,  $\sigma$  可表示为:  $0 \leq r \leq r(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  边界(下曲线为退缩曲线  $r=0$ , 上曲线为边界封闭曲线  $r=r(\theta)$ ,  $[\alpha, \beta]$  为  $r(\theta)$  的定义域)上(图 9-19), 则

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(3) 若极点  $O$  在区域  $\sigma$  内部,  $\sigma$  可表示为:  $0 \leq r \leq r(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  内部(因为是从极点出发的射线, 下曲线依然是  $r=0$ , 上曲线为边界封闭曲线  $r=r(\theta)$ )(图 9-20), 则

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

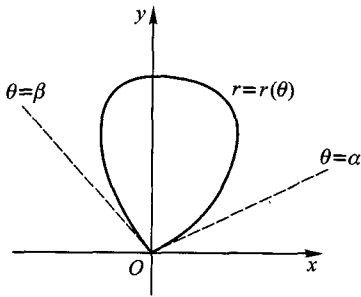


图 9-19

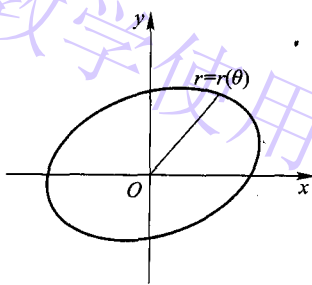


图 9-20

注意: 在区域  $\theta$  的变化区间  $[\alpha, \beta]$  内, 过极点作射线, 此射线穿过区域  $\sigma$ , 穿入点的极径  $r=r_1(\theta)$  为下限(下曲线), 穿出点的极径  $r=r_2(\theta)$  为上限(上曲线)。

2. 有时也可以把  $\sigma$  表示为  $r$ -型区域:  $\theta_1(r) \leq \theta \leq \theta_2(r)$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , 即由曲线  $\theta=\theta_1(r)$ ,  $\theta=\theta_2(r)$  与圆  $r=r_1$ ,  $r=r_2$  所围成的区域. 在  $r$  的变化区间  $[r_1, r_2]$ , 以  $O$  为心, 以  $r$  为半径作圆, 曲线按逆时针方向穿过区域  $\sigma$  (图 9-21), 穿入点的极角  $\theta=\theta_1(r)$  为下限(称为小角曲线), 穿出点的极角  $\theta=\theta_2(r)$  为上限(称为大角曲线), 有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta.$$

特别地, 若区域  $\sigma$  为:  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , 其中  $\alpha, \beta, r_1, r_2$  均为常数, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta. \end{aligned}$$

3. (1) 若  $\sigma$  是由曲线  $x^2 + y^2 = R^2$  所围成的区域 (图 9-22). 经极坐标变换, 方程为:  $r = R$ , 属于 1(3) 的情形, 有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

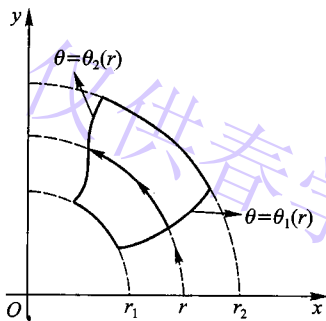


图 9-21

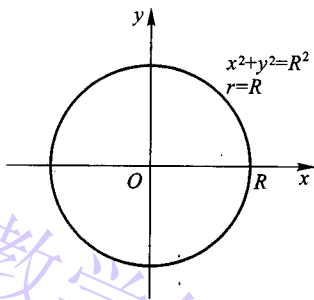


图 9-22

(2) 若  $\sigma$  是由曲线  $x^2 + y^2 = 2xR$  所围成的区域 (图 9-23). 经极坐标变换, 方程为:  $r = 2R \cos \theta$ , 属于 1(2) 情形, 由  $\sigma$ :  $0 \leq r \leq 2R \cos \theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 知

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(3) 若  $\sigma$  是由曲线  $x^2 + y^2 = 2Ry$  所围成的区域 (图 9-24). 经极坐标变换, 曲线方程为:  $r = 2R \sin \theta$ , 属于 1(2) 情形, 由  $\sigma$ :  $0 \leq r \leq 2R \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , 知

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2R \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

从上面分析可以看出, 当被积函数中含有  $x^2 + y^2$  的表达式和积分区域是圆域或圆域的一部分时, 利用极坐标变换可以简化计算.



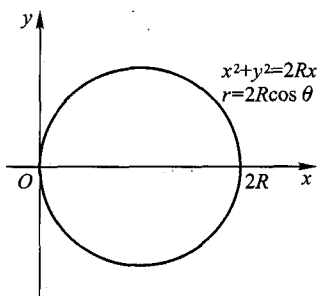


图 9-23

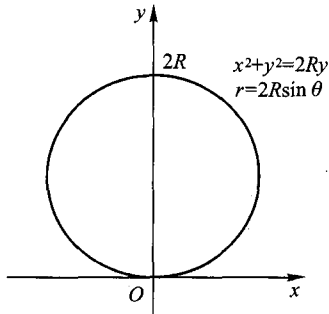


图 9-24

例 7 计算积分  $\iint_{\sigma} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ , 其中  $\sigma$  是由圆  $x^2 + y^2 = R^2$  所围成的区域.

解 经极坐标变换  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  得  $\sigma: 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^R e^{-r^2} r dr = -\pi \int_0^R e^{-r^2} d(-r^2) \\ &= -\pi \left( e^{-r^2} \Big|_0^R \right) = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

例 8 计算  $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  为第一象限内由  $x^2 + y^2 = \pi^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4\pi^2$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$  所围成的区域(图 9-25).

解 经极坐标变换, 边界曲线方程为  $r = \pi$ ,  $r = 2\pi$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \arctan 2$ , 有

$$\sigma: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan 2, \pi \leq r \leq 2\pi,$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \sin \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr \\ &= \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \int_{\pi}^{2\pi} r d(-\cos r) \\ &= \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left( -r \cos r \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos r dr \right) \\ &= -3\pi \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

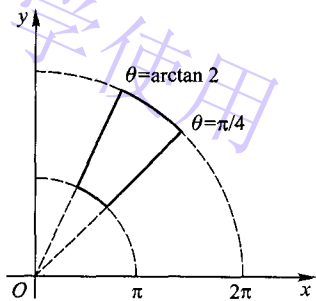


图 9-25

**例 9** 求球面  $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ 、圆柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  及平面  $z = 0$  所围成立体的体积 (在圆柱体内部的部分).

**解** 由于两个曲面关于  $Ozx$  平面对称, 所以, 所围空间形体  $V$  关于坐标平面  $Ozx$  平面对称. 因此, 只需求第 I 卦限内的体积再乘以 2 即可 (图 9-26), 这一部分是以曲面为  $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$  为顶, 以半圆区域  $\sigma$  (图 9-27) 为底的曲顶柱体体积  $V_1$ .

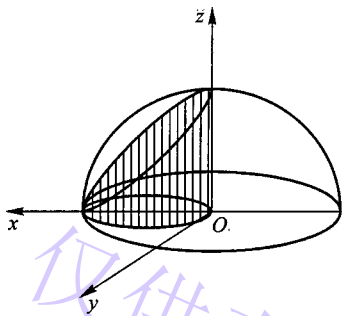


图 9-26

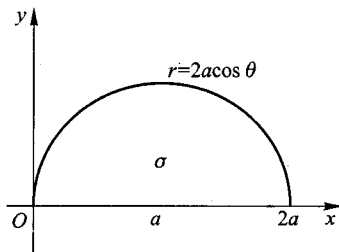


图 9-27

由于  $\sigma: 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_{\sigma} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{8}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

于是,  $V = 2V_1 = \frac{16}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$ .

**例 10** 计算概率积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**解** 这是一个广义积分, 由于  $e^{-x^2}$  的原函数不能用初等函数表示, 因此, 利用一元函数广义积分无法计算. 现利用二重广义积分来计算, 其思想与一元函数的广义积分一样.

设  $I(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx$ , 其平方

$$I^2(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy$$

$$= \iint_{\substack{0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

区域  $\sigma$  为:  $0 \leq x \leq R$ ,  $0 \leq y \leq R$ , 设  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  分别表示圆域  $x^2 + y^2 \leq R^2$  与  $x^2 + y^2 \leq 2R^2$  位于第一象限的两个扇形(图 9-28). 由于

$$\iint_{\sigma_1} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma \leq I^2(R) \leq \iint_{\sigma_2} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma.$$

由例 7 的计算过程可知

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq I^2(R) \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

当  $R \rightarrow \infty$  时, 上式两端都以  $\frac{\pi}{4}$  为极限, 由夹逼定理知

$$\left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) \right]^2 = \lim_{R \rightarrow +\infty} I^2(R) = \frac{\pi}{4},$$

因此  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 即  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

这一结果在概率论与数理统计中经常要用到.

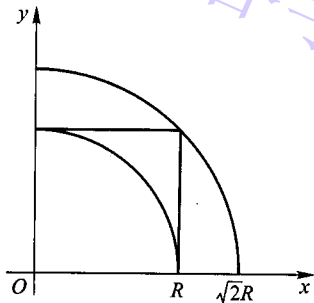


图 9-28

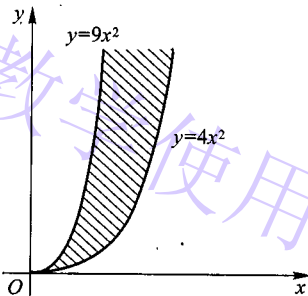


图 9-29

**例 11** 计算二重积分  $\iint_D x e^{-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是曲线  $y = 4x^2$  和  $y = 9x^2$  在第一象限所围成的区域(图 9-29).

**解** 由于先积分  $y$  时,  $e^{-y^2}$  的原函数求不出来, 因此把  $D$  表示成  $y$ -型区域

$$D: \frac{1}{3}\sqrt{y} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq +\infty,$$

有

$$\iint_D x e^{-y^2} dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{\frac{1}{3}\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{y}} x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{4}y - \frac{1}{9}y \right) e^{-y^2} dy = \frac{5}{72} \int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy \\
 &= -\frac{5}{144} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} d(-y^2) = -\frac{5}{144} \left( e^{-y^2} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{5}{144}.
 \end{aligned}$$

### \*§ 2.3 在一般曲线坐标中计算二重积分

仅用直角坐标和极坐标来计算二重积分是不够的, 我们还需要更一般的坐标变换. 设有坐标变换函数组  $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$  具有连续的偏导数且

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则有二重积分的一般换元公式

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (9.6)$$

其中记号  $d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$  表示曲线坐标下的面积元素. 右边的区域  $\sigma$  的边界曲线要用  $u, v$  来表示.

利用这一公式, 我们来验证一下极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . 由

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

知  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$ , 所以

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

因此, 如果区域  $\sigma$  能用某种曲线坐标表示, 使得积分简单, 就可以经过坐标变换化为 (9.6), 再进一步化成累次积分.

**例 12** 求椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积.

**解** 由对称性知, 所求体积为

$$V = 8 \iiint_{\sigma} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d\sigma, \text{ 其中, } \sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

令  $a = \arccos \theta, y = br \sin \theta$  (称为广义极坐标变换), 有  $\sigma: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 且} \\ 0 \leq r \leq 1, \end{cases}$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a r \sin \theta \\ b \sin \theta & b r \cos \theta \end{vmatrix} = a b r,$$

得到  $|J| = abr$ , 于是

$$\begin{aligned} V &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = 8abc \cdot \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \int_0^1 \sqrt{1-r^2} d(1-r^2) \\ &= \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

特别地, 当  $a=b=c$  时, 则球体的体积为  $\frac{4}{3}\pi a^3$ .

**例 13** 求曲线  $xy=a^2$ ,  $xy=2a^2$ ,  $y=x$ ,  $y=2x$  ( $x>0, y>0$ ) 所围平面图形的面积.

**分析:** 如果在直角坐标下计算, 需要求曲线的交点, 并画出平面图形, 还需分割成几块小区域来计算面积, 很麻烦, 现在可巧妙地作曲线坐标变换.

**解** 作变换  $xy=u$ ,  $\frac{y}{x}=v$ , 则有  $a^2 \leq u \leq 2a^2$ ,  $1 \leq v \leq 2$ . 由于

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x} = 2v,$$

而  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$ , 有

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{1}{2v} \right| = \frac{1}{2v}.$$

于是

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{1}{2v} dv = \frac{a^2}{2} \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{a^2}{2} \ln 2.$$

**注意:** 这里求  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ , 避免从  $\begin{cases} xy=u, \\ \frac{y}{x}=v. \end{cases}$  中解  $x=x(u, v)$ ,  $y=y(u, v)$ . 当然也可解出来,

再求

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

## 习题 9-2

1. 设  $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$  连续, 计算  $I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy$ .

2. 设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 试证明:

$$(1) \int_a^b dy \int_y^b f(x) dx = \int_a^b (x-a)f(x) dx; \quad (2) \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b}} f(x)f(y) dx dy = \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2;$$

$$(3) \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx; \quad (4) \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2, \text{ 其中 } f(x) > 0;$$

$$(5) \int_a^b dy \int_y^b f(x)f(y) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

3. 在下列积分中改变积分的顺序:

$$(1) \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy; \quad (2) \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^{2a} dy \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0); \quad (4) \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

4. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x^2 y dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由双曲线 } x^2 - y^2 = 1 \text{ 及直线 } y = 0, y = 1 \text{ 所围成的平面区域};$$

$$(2) \iint_D e^{x^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是第一象限中由直线 } y = x \text{ 和曲线 } y = x^3 \text{ 所围成的平面区域};$$

$$(3) \iint_D y dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } x \text{ 轴, } y \text{ 轴及曲线 } \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \text{ 所围成的区域 } (a > 0, b > 0);$$

$$(4) \iint_D y dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由直线 } x = -2, y = 0, y = 2 \text{ 及曲线 } x = -\sqrt{2y - y^2} \text{ 所围成的平面区域}.$$

$$5. \text{ 计算 } \int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx.$$

$$6. \text{ 计算 } \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy.$$

7. 利用极坐标计算下列积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\};$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 2x\};$$

$$(3) \iint_D (x + y) dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x + y + 1\};$$

$$(4) \iint_D \sqrt{x} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\};$$

$$(5) \iint_D \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是 } x^2 + y^2 = 1, x = 0 \text{ 及 } y = 0 \text{ 所围区域在第一象限部分}.$$

8. 用适当方法计算下列积分:

$$(1) \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} |y - x^2| \max\{x, y\} dx dy; \quad (2) \iint_D \sqrt{\frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2x + 2}} dx dy,$$

其中  $D$  为第一象限内由  $x^2 + y^2 = 2x, y = x - 1, y = 0$  围成的区域;

$$(3) \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq R^2;$$

$$(4) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4.$$

9. 求由曲线  $y = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 (p > 0, q > 0)$  所围平面区域的面积.

10. 求抛物线  $y = x^2$  与直线  $y = x + 2$  所围的平面图形的面积.

11. 求由心形线  $r = a(1 - \cos \theta)$  及圆  $r = a$  所围成(在心形线外部)的平面图形的面积.

12. 求曲线  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq a^2$  所围平面区域的面积.

13. 求曲线  $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$  与直线  $x=0, y=0 (a>0, b>0)$ , 所围平面图形的面积.

14. 求下列曲面所围成立体的体积:

(1)  $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0;$

(2)  $z=xy, x+y+z=1, z=0;$

(3)  $z=x^2+y^2, x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x, z=0;$

(4)  $z=x^2+y^2, z=1.$

## §3 三重积分

### §3.1 三重积分的概念

**定义 9.3** 设  $V$  为一空间立体,  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ , 取包含  $P_0$  的  $\Delta V$ , 质量为  $\Delta m$ , 若  $\lim_{\Delta V \rightarrow P_0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$  存在, 该极限值称为在  $P_0$  处的体密度, 简称密度.

读者同样可给出曲线线密度与曲面面密度的定义.

与求平面薄板的质量类似, 求密度为连续函数  $u=f(x, y, z)$  的空间立体  $V$  的质量  $M$  可表示为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

由此引入三重积分的定义如下:

**定义 9.4** 设  $f(x, y, z)$  是空间有界闭区域  $V$  上的有界函数, 将  $V$  任意分成  $n$  个小闭区域

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n,$$

其中  $\Delta V_i$  是第  $i$  个小闭区域, 也表示它的体积. 在每个  $\Delta V_i$  上任意取一点  $(\xi_i,$

$\eta_i, \zeta_i)$ , 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 再求和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ . 如

果当各小闭区域直径中的最大值  $\lambda$  趋于零时该和式的极限总存在, 则称此极限值为函数  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上的 三重积分. 记作  $\iiint_V f(x, y, z) dV$ , 或

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \quad (9.7)$$

其中  $dV$  叫做 体积元素.

在直角坐标系中, 如果用平行于坐标面的平面来划分  $V$ , 那么除了包含  $V$

的边界点的一些不规则小闭区域外, 得到的小闭区域  $\Delta V_i$  为长方体. 设小长方体  $\Delta V_i$  的边长为  $\Delta x_i$ 、 $\Delta y_i$ 、 $\Delta z_i$ , 则  $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ . 因此在直角坐标系中, 有时也把体积元素  $dV$  记作  $dx dy dz$ , 而把三重积分记作

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

其中  $dx dy dz$  叫做直角坐标系中的体积元素.

三重积分也具有二重积分的八条性质(略).

### § 3.2 在直角坐标系中计算三重积分

#### 一、投影法

设  $u = f(x, y, z)$  在有界闭区域立体  $V$  上连续, 则  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  存在. 不妨设  $f(x, y, z) \geq 0$ . 由三重积分的物理意义可知, 密度为  $f(x, y, z)$  的空间立体  $V$  的质量为

$$M = \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

(1) 若平行  $Oz$  轴的直线与立体  $V$  的边界曲面至多有两个交点(母线平行于  $Oz$  轴的侧面除外), 设  $V$  在  $Oxy$  平面上的投影区域为  $\sigma_{xy}$ , 在  $\sigma_{xy}$  内的点作平行  $Oz$  轴的直线, 此直线沿  $Oz$  轴正向穿过区域  $V$ , 穿入边界曲面点的竖坐标为  $z = z_1(x, y)$ , 穿出边界曲面点的竖坐标为  $z = z_2(x, y)$ , 有  $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma_{xy}$ . 即积分区域  $V$  可表示为:

$$V = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in \sigma_{xy}\}.$$

这时  $V$  的边界面有上面  $z = z_2(x, y)$ , 下面  $z = z_1(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma_{xy}$  (此外还可能有一部分是以  $\sigma_{xy}$  的边界为准线且母线平行  $Oz$  轴的侧面), 如图 9-30、图 9-31 所示两种情况.

这时立体  $V$  的质量可看成密度不均质平面薄板  $\sigma_{xy}$  的质量  $M$ , 我们只要求出  $\sigma_{xy}$  的面密度函数  $\mu$  即可.  $\forall (x, y) \in \sigma_{xy}$ ,  $\mu(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ , 有

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma_{xy}} \mu(x, y) d\sigma \\ &= \iint_{\sigma_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma \\ &\triangleq \iint_{\sigma_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$



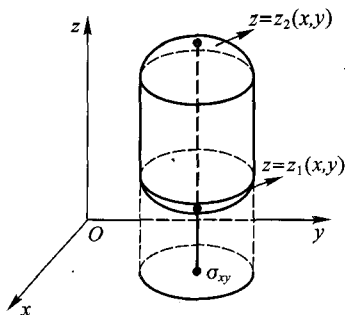


图 9-30

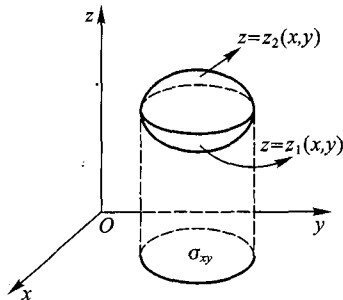


图 9-31

若  $\sigma_{xy}$  是  $x$ -型区域:  $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , 则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

若  $\sigma_{xy}$  为  $y$ -型区域:  $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , 则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

(2) 若立体  $V$  在  $Oxz$  平面上的投影区域为有界闭区域  $\sigma_{xz}$ , 则立体  $V$  的边界曲面有左曲面  $y = y_1(x, z)$ , 右曲面  $y = y_2(x, z)$  ( $y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)$ ,  $(x, z) \in \sigma_{xz}$ ) (也可能还包括以  $\sigma_{xz}$  的边界为准线, 母线平行于  $y$  轴的侧面), 即  $V = \{(x, y, z) : y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z), (x, z) \in \sigma_{xz}\}$ , 有

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma_{xz}} d\sigma \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy.$$

若  $\sigma_{xz}$  是  $x$ -型区域:  $z_1(x) \leq z \leq z_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , 则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy$$

(3) 若立体  $V$  在  $Oyz$  平面上的投影区域为  $\sigma_{yz}$ , 且立体  $V$  的边界面有后曲面  $x = x_1(y, z)$ , 前曲面  $x = x_2(y, z)$  ( $x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)$ ,  $(y, z) \in \sigma_{yz}$ ) (还可能包括以  $\sigma_{yz}$  的边界为准线, 母线平行于  $x$  轴的侧面), 即  $V = \{(x, y, z) : x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in \sigma_{yz}\}$ , 则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma_{yz}} d\sigma \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx.$$

以上化累次积分的方法, 我们称为投影法.

**例 1** 计算  $\iiint_V xyz dV$ , 其中  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与第 I 卦限内的三个坐标平面所围成的立体区域 (图 9-32).

**解** 由于区域  $V: 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, (x, y) \in \sigma_{xy}: 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ , 所以

$$\begin{aligned}\iiint_V xyz dV &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

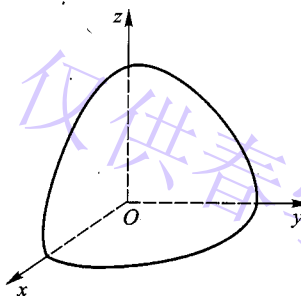


图 9-32

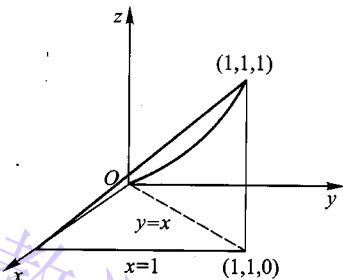


图 9-33

**例 2**  $\iiint_V xy^2 z^3 dV$ , 其中  $V$  是由曲面  $z=xy, y=x, x=1, z=0$  所围成的区域 (图 9-33).

**解** 由于区域  $V: 0 \leq z \leq xy, (x, y) \in \sigma_{xy}: 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ , 所以

$$\begin{aligned}\iiint_V xy^2 z^3 dV &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \int_0^1 x dx \int_0^x \frac{1}{4} y^2 \cdot x^4 y^4 dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} \int_0^1 x^5 \cdot x^7 dx = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx \\ &= \frac{1}{28} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{364}.\end{aligned}$$

**注意:** 对有些较难画的曲面, 关键是要画出曲面与曲面的交线, 交线与交线的交点, 并确定投影区域及上、下曲面方程.

**例 3** 求由曲面  $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$  所围立体的体积.

**解** 由于投影区域为  $\sigma_{xy}: x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ , 如图 9-34 所示. 下曲面为  $z=x^2+y^2$ , 上曲面为  $z=2x^2+2y^2$ , 即

$$V: x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2), (x, y) \in \sigma_{xy}: x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1,$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 \right) dx = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

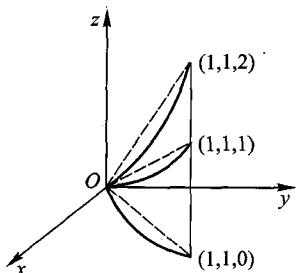


图 9-34

注意: 对较难画的区域, 只要画出投影区域, 并确定上、下曲面方程.

## 二、平面截割法

设  $f(x, y, z)$  在  $V$  上连续,  $f(x, y, z) \geq 0$ , 由三重积分的物理意义可知, 密

度为  $f(x, y, z)$  的空间立体  $V$  的质量  $M$  为  $\iiint_V f(x, y, z) dV = M$ .

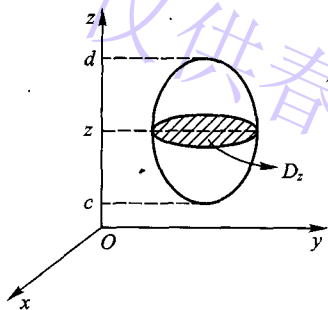


图 9-35

(1) 设立体  $V$  介于两平面  $z = c$ 、 $z = d$  之间 ( $c < d$ ). 过  $(0, 0, z)$ ,  $z \in [c, d]$ , 作垂直于  $z$  轴的平面与立体相截, 截面区域为  $D_z$ . 即区域  $V = \{(x, y, z): (x, y) \in D_z, c \leq z \leq d\}$  (图 9-35). 我们把立体  $V$  看成区间  $[c, d]$  上的一根密度不均质的细棒, 只要能求出  $[c, d]$  上任意一点  $z$  处的线密度  $\mu(z)$ , 就可求出  $V$  的质量. 由  $\mu(z) =$

$$\iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma, \text{ 得}$$

$$M = \iiint_V f(x, y, z) dV = \int_c^d \mu(z) dz = \int_c^d \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma \right] dz = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma.$$

即

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma}$$

在二重积分  $\iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma$  中, 应把  $z$  视为常数, 确定  $D_z$  是  $x$ -型区域还是

$y$ -型区域, 再化成累次积分. 若  $D_z$  为  $x$ -型区域:  $y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)$ ,  $x_1(z) \leq x \leq x_2(z)$ , 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_c^d dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy.$$

当  $f(x, y, z)$  仅是  $z$  的表达式, 而  $D_z$  的面积又容易计算时, 可使用这种方法. 因为这时  $f(x, y, z) = g(z)$ , 有

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \iiint_V g(z) dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} g(z) dx dy \\ &= \int_c^d g(z) dz \iint_{D_z} dx dy = \int_c^d g(z) S_{D_z} dz. \end{aligned}$$

这里  $S_{D_z}$  表示  $D_z$  的面积, 一般是  $z$  的函数, 从而简化计算.

(2) 若区域  $V = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_y, c \leq y \leq d\}$ , 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_c^d dy \iint_{D_y} f(x, y, z) d\sigma = \int_c^d dy \iint_{D_y} f(x, y, z) dz dx.$$

(3) 若区域  $V = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_x, a \leq x \leq b\}$ , 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \iint_{D_x} f(x, y, z) d\sigma = \int_a^b dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz.$$

例 4 求  $I = \iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV$ , 其中  $V$  是椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  (图 9-36).

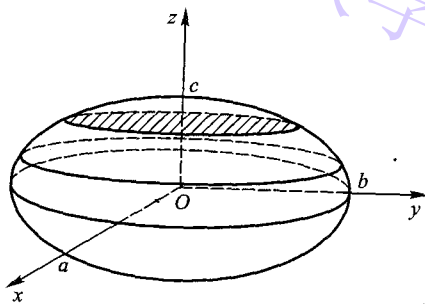


图 9-36

解 用投影法计算较复杂, 应改用平面截割法. 由于

$$I = \iiint_V \frac{x^2}{a^2} dV + \iiint_V \frac{y^2}{b^2} dV + \iiint_V \frac{z^2}{c^2} dV = I_1 + I_2 + I_3,$$

所以, 下面我们先计算  $I_3$ . 由  $V: (x, y) \in D_z, -c \leq z \leq c$ , 且  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}$ , 有

$\frac{z^2}{c^2}$ , 有

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} \leq 1.$$

$D_z$  的面积为

$$\pi \left( a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} \right) \left( b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} \right) = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right),$$

于是

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} \frac{z^2}{c^2} dx dy = \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz \\ &= \frac{2\pi ab}{c^2} \int_0^c \left( z^2 - \frac{z^4}{c^2} \right) dz = \frac{4}{15} \pi abc. \end{aligned}$$

同理,  $I_1 = \frac{4}{15} \pi abc$ ,  $I_2 = \frac{4}{15} \pi abc$ , 故  $I = \frac{4}{5} \pi abc$ .

### §3.3 在柱面坐标系、球面坐标系及一般曲面坐标系中计算三重积分

#### 一、柱面坐标变换

在计算三重积分  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  时, 若  $f(x, y, z)$  中含有  $x^2 + y^2$ ,  $V$  在  $Oxy$

平面上的投影区域是圆域或圆域的一部分时, 联想平面上二重积分的极坐标变换, 使我们想到对这一类的积分可以作适当的坐标变换, 即柱面坐标变换.

##### 1. 柱面坐标系

设  $M(x, y, z)$  为空间一点, 并设  $M$  在  $Oxy$  平面上的投影  $M'$  的极坐标为  $(r, \theta)$ , 则数组  $(r, \theta, z)$  就叫做点  $M$  的柱坐标 (图 9-37). 其中  $r$  是  $M$  到  $z$  轴的距离,  $\theta$  是通过  $Oz$  轴与点  $M$  的半平面与包含  $x$  轴正向的半平面  $Ozx$  所成的二面角,  $r, \theta, z$  的变化范围分别为:

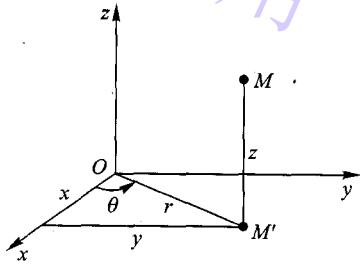


图 9-37

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (或 } -\pi \leq \theta \leq \pi), -\infty < z < +\infty.$$

##### 2. 柱面坐标变换

容易得出, 点  $M$  的直角坐标  $(x, y, z)$  与柱坐标  $(r, \theta, z)$  之间的关系为:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z.$$

下述三族曲面, 称为柱面坐标系中的坐标曲面:

(1) 一族以  $Oz$  轴为对称轴的圆柱面:  $r = r_i$  (常数), 即  $x^2 + y^2 = r_i^2$ ;

(2) 一族通过  $Oz$  轴的半平面:  $\theta = \theta_i$  (常数), 即

$$y = x \tan \theta_i;$$

(3) 一族垂直  $Oz$  轴的平面  $z = z_i$  (常数),

若用这三族坐标曲面把空间区域  $V$  分成若干个小区域, 这样得到的小区域中, 有规则的小区域(图 9-38)的体积为

$$\Delta V \approx S_{\text{扇环}} \cdot \Delta z,$$

由平面极坐标变换知,  $S_{\text{扇环}} \approx r \Delta \theta \Delta r$ , 有  $\Delta V \approx r \Delta \theta \Delta r \Delta z$ , 而  $f(x, y, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ , 于是

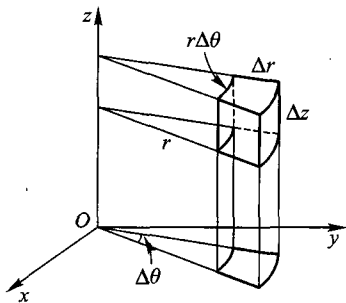


图 9-38

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(x, y, z) \Delta V$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{\text{规则区域}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \Delta \theta \Delta r \Delta z + \sum_{\text{不规则区域}} f(x, y, z) \Delta V \right)$$

且  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\text{不规则区域}} f(x, y, z) \Delta V = 0$ , 因此

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (9.8)$$

这就是三重积分从直角坐标变换为柱面坐标的换元公式. 柱面坐标系中的体积元素为  $r dr d\theta dz$ . 为了把上式右端化成累次积分, 设平行于  $Oz$  轴的直线与区域  $V$  的边界最多只有两个交点. 设  $V$  在  $Oxy$  平面上的投影区域为  $\sigma_{xy}$ , 区域  $\sigma_{xy}$  用  $r, \theta$  表示. 区域  $V$  关于  $Oxy$  平面的投影柱面将  $V$  的边界曲面分为上、下两部分, 其方程表示为  $z$  是  $r, \theta$  的函数, 即上曲面:  $z = z_2(r, \theta)$ , 下曲面:  $z = z_1(r, \theta)$ ,  $z_1(r, \theta) \leq z \leq z_2(r, \theta)$ ,  $(r, \theta) \in \sigma_{xy}$ , 于是

$$\iiint_V f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz = \iint_{\sigma} r dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz.$$

注意: 在这里可以看到, 采用柱面坐标按上述公式计算三重积分, 实际上是对  $z$  采用直角坐标进行积分, 而对另外两个变量采用平面极坐标交换进行积分.

**例 5** 计算  $\iiint_V z dV$ , 其中  $V$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  及抛物面  $3z = x^2 + y^2$  所围成(在抛物面内的那一部分)的立体区域(图 9-39).

**解法一** 按直角坐标系计算, 两曲面交线的方程为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

该曲线在  $Oxy$  平面上的投影曲线方程

$$\text{为 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z = 0. \end{cases}$$

由此可知  $V$  在  $Oxy$  平面的投影区域为圆域.

$$\text{下曲面: } z = \frac{x^2 + y^2}{3},$$

$$\text{上曲面: } z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

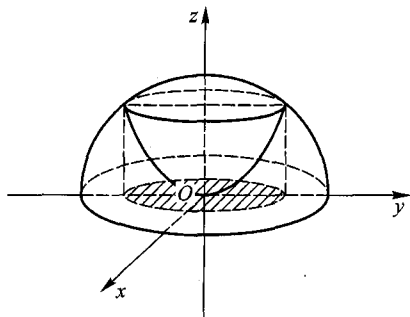


图 9-39

有

$$V: \frac{x^2 + y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in \sigma_{xy}: x^2 + y^2 \leq 3,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_V z dV &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 3} d\sigma \int_{\frac{x^2 + y^2}{3}}^{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} z dz \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 3} \frac{1}{2} \left[ 4 - x^2 - y^2 - \left( \frac{x^2 + y^2}{3} \right)^2 \right] d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \left[ 4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right] r dr = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left( 4r - r^3 - \frac{r^5}{9} \right) dr \\ &= \pi \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{54} \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{13}{4} \pi. \end{aligned}$$

**解法二** 经柱面坐标变换, 上曲面方程为  $r^2 + z^2 = 4$ , 即  $z = \sqrt{4 - r^2}$ . 下曲面方程为  $3z = r^2$ , 即  $z = \frac{r^2}{3}$ . 有

$$V: \frac{r^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}, \quad (r, \theta) \in \sigma_{xy}: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{3},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_V z dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4 - r^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} r \left( 4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left( 4r - r^3 - \frac{r^5}{9} \right) dr = \frac{13}{4} \pi. \end{aligned}$$

通常利用柱面坐标变换时, 首先求出  $V$  在  $Oxy$  平面上的投影区域  $\sigma_{xy}$ , 确定上、下曲面. 然后用柱面坐标变换, 把上、下曲面表示成  $r, \theta$  的函数, 投影区域用  $r, \theta$  的不等式来表示.

若被积函数中含有  $y^2 + z^2$ ,  $V$  在  $Oyz$  平面上的投影区域是圆域或部分圆域时, 可用柱面坐标变换:  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ ,  $x = x$ .

若被积函数中含有  $z^2 + x^2$ ,  $V$  在  $Ozx$  平面上的投影区域是圆域或部分圆域时, 可用柱面坐标变换:  $z = r \cos \theta$ ,  $x = r \sin \theta$ ,  $y = y$ .

## 二、球面坐标变换

利用微元法知

$$Q = \iiint_V f(x, y, z) dV \Leftrightarrow dQ = f(x, y, z) dV.$$

注意: 这里  $Q$  既代表一个所求的量, 又代表该量的值.

由柱面坐标变换, 使我们想到若三重积分被积函数含有  $x^2 + y^2 + z^2$  时, 可对这一类积分作适当的坐标变换, 如下面的球面坐标变换.

### 1. 球面坐标系

设  $M$  为空间一点, 球面坐标  $(\theta, \varphi, \rho)$  规定如下:  $\rho$  为原点到  $M$  点的距离,  $\varphi$  是矢量  $\overrightarrow{OM}$  与  $Oz$  轴的正向所夹的角,  $\theta$  是过  $Oz$  轴及点  $M$  的半平面与包含  $x$  轴正向的半平面  $Ozx$  所成的角 (其实  $\theta$  就是  $M$  在  $Oxy$  平面上投影点  $M'$  的极角  $\theta$ ),  $\rho, \varphi, \theta$  的变化范围分别是 (图 9-40).

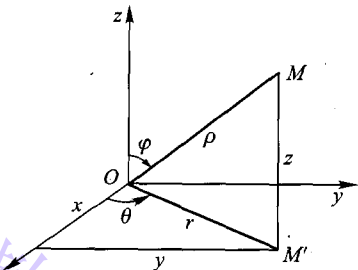


图 9-40

$$0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (或 } -\pi \leq \theta \leq \pi).$$

### 2. 球面坐标变换

从图上容易看出, 点  $M$  的直角坐标  $(x, y, z)$  与球面坐标  $(\theta, \varphi, \rho)$  之间的关系为

$$\begin{cases} x = OM' \cos \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = OM' \sin \theta = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

下述三族曲面称为球面坐标系中的坐标曲面:

(1) 一族中心在原点的球面  $\rho = r_i$  (常数), 即

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_i^2.$$

(2) 一族顶点在原点而对称轴与  $Oz$  轴重合的圆锥面  $\varphi = \varphi_i$  常数, 即

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \varphi_i = 0.$$

(3) 一族通过  $Oz$  轴的半平面  $\theta = \theta_i$  (常数), 即  $y = x \tan \theta_i$ .

若这三族坐标曲面把一个空间区域  $V$  分成几个小区域, 这样得到的小区



域中, 有规则的小区域(图 9-41)的体积  $\Delta V$  近似地为

$$\Delta V \approx AB \cdot AD \cdot \Delta\rho \approx \rho \Delta\varphi \cdot \rho \sin \varphi \Delta\theta \cdot \Delta\rho = \rho^2 \sin \varphi \cdot \Delta\rho \Delta\theta \Delta\varphi,$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

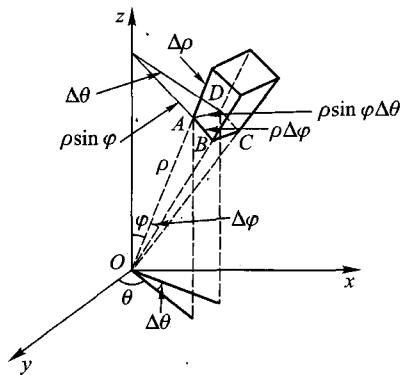


图 9-41

由于

$$f(x, y, z) = f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi),$$

而  $Q = \iiint_V f(x, y, z) dV$ , 有

$$dQ = f(x, y, z) dV = f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

从而

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

(9.9)

上式可化为先对  $\rho$ , 再对  $\varphi$ , 后对  $\theta$  的累次积分来进行计算.

这就是三重积分从直角坐标变换为球面坐标的换元公式. 球面坐标系中的体积元素为.

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

我们还可以利用二次柱面坐标变换来证明球面坐标变换公式.

为了得到从直角坐标系的三重积分化为球面坐标系的三重积分公式, 只要从直角坐标化为球面坐标.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

看作是两次直角坐标化为柱面坐标

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} z = \rho \cos \varphi, \\ r = \rho \sin \varphi, \\ \theta = \theta \end{cases}$$

的复合, 于是

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

再把  $(z, r, \theta)$  看作直角坐标, 而把  $(\theta, \varphi, \rho)$  看成对应的柱面坐标, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz \\ &= \iiint_V f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

从而利用直角坐标系的三重积分化为柱面坐标系的三重积分, 得到从直角坐标系的三重积分化为球面坐标系的三重积分的公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

当被积函数含有  $x^2 + y^2 + z^2$  或积分区域是球面围成的区域或由球面及锥面围成的区域, 或其他在球面坐标变换下, 区域用  $\rho, \varphi, \theta$  表示比较简单时, 用球面坐标变换.

化成球面坐标系下的三重积分, 然后再化成累次积分, 一般都化成先积  $\rho$ , 后积  $\varphi$ , 最后积  $\theta$ , 即把立体  $V$  用球面坐标系下下面的不等式表示

$$\begin{aligned} \rho_1(\theta, \varphi) &\leq \rho \leq \rho_2(\theta, \varphi) \\ V: \varphi_1(\theta) &\leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ \alpha &\leq \theta \leq \beta \end{aligned}$$

如何把如图 9-42 所示的立体  $V$  表示成上面的不等式, 即立体中任意一点,  $M(\theta, \varphi, \rho)$  所满足的不等式, 设  $M(\theta, \varphi, \rho) \in V$ , 首先找出立体  $V$  在  $Oxy$  平面上的投影区域  $\sigma_{xy}$ , 然后找出  $\sigma_{xy}$  在平面极坐标系下  $\theta$  范围,  $[\alpha, \beta]$  有

$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

其次在  $Oxy$  平面上射线  $\theta = \theta$  与  $Oz$  轴组成的半平面与立体  $V$  相交有一个截面区域, 设为  $S$ , 找出  $S$  的最小  $\varphi$  值  $\varphi_1(\theta)$  与最大  $\varphi$  值  $\varphi_2(\theta)$ , 有

$$\varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta)$$

如果  $\theta$  不论在  $[\alpha, \beta]$  上任何一点,  $Oxy$  平面上的射线  $\theta = \theta$  与  $Oz$  轴组成的半平面立体的截面形状都完全相同, 知  $\varphi_1(\theta)$  与  $\varphi_2(\theta)$  与  $\theta$  的位置无关均是常数, 就选特殊的  $\theta$ , 若  $\alpha \leq \frac{\pi}{2} \leq \beta$ , 取  $\theta = \frac{\pi}{2}$  与  $Oz$  轴组成的半平面 ( $Oyz$  右半平面正对着我们, 观察起来更清楚) 与立体的截面, 这时, 最小的  $\varphi$  值  $\varphi_1$  与  $\theta$  无关是常数, 最大的  $\varphi$  值  $\varphi_2$  与  $\theta$  也无关是常数, 有

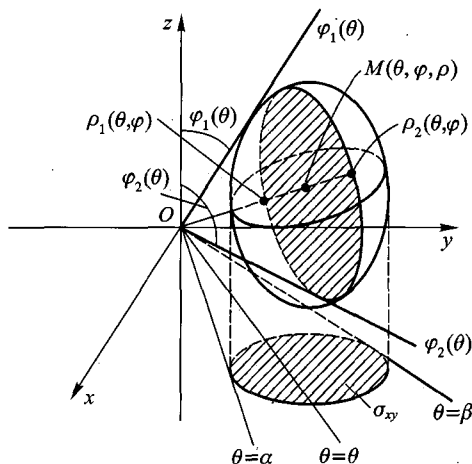


图 9-42

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

连接  $OM$  与截面区域  $S$  的边界有两个交点.

极径小的交点若落在同一个曲面上, 这个曲面方程表示为  $\rho = \rho_1(\theta, \varphi)$  称为下曲面, 极径大的交点若落在同一个曲面上, 这个曲面方程表示为  $\rho = \rho_2(\theta, \varphi)$  称为上曲面, 有

$$\rho_1(\theta, \varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \varphi)$$

(若极径小的点是原点, 有  $\rho_1(\theta, \varphi) = 0$ , 即

$$0 \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \varphi)$$

则:  $V: \rho_1(\theta, \varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \varphi)$

$$\varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta)$$

$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

**例 6** 计算密度函数为  $\rho = x^2 + y^2 + z^2$  的立体  $V$  的质量  $M$ ,  $V$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的区域(锥面的内部)(图 9-43).

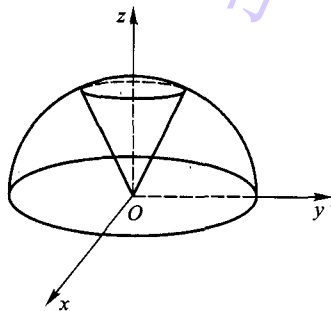


图 9-43

**解** 由题意知  $M = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$ . 用球

面坐标变换,  $V: 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 于是

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^R \rho^4 d\rho \\
 &= 2\pi \cdot \left( -\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \left( \frac{1}{5} \rho^5 \Big|_0^R \right) = \frac{2\pi R^5}{5} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

**例 7** 计算  $\iiint_V z^2 dV$ ,  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$  所围成的立体区域 (图 9-44).

**解法一** 用球面坐标变换. 由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{R}{2}, \\ x^2 + y^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} R \right)^2. \end{cases}$$

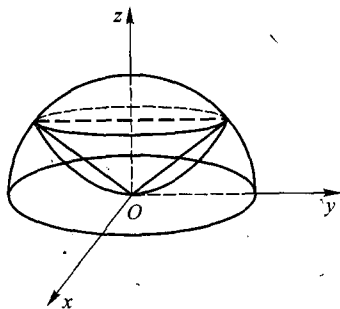


图 9-44

且  $\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}$ , 得  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . 以锥面  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  为分界面, 分上下两立体, 上面的立体为  $V_1$ , 下面的立体为  $V_2$ . 有

$$V = V_1 + V_2,$$

$$V_1: 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$V_2: 0 \leq \rho \leq 2R \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_V z^2 dV &= \iiint_{V_1} z^2 dV + \iiint_{V_2} z^2 dV \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R \rho^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^R \rho^4 d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho^4 d\rho \\
 &= 2\pi \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) \cdot \frac{1}{5} R^5 + 2\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \frac{1}{5} (2R)^5 \cos^5 \varphi \\
 &= \frac{7}{60} \pi R^5 + \frac{2^6}{5} \pi R^5 \left( -\frac{1}{8} \cos^8 \varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{7}{60} \pi R^5 + \frac{\pi R^5}{160} = \frac{59}{480} \pi R^5.
 \end{aligned}$$

**解法二 (平面截割法)** 以平面  $z = \frac{R}{2}$  为界, 上面的立体为  $V_3$ , 下面的立体为  $V_4$ , 有

$$\begin{aligned}
 \iiint_V z^2 dV &= \iiint_{V_3} z^2 dV + \iiint_{V_4} z^2 dV \\
 &= \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \\
 &= \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 (R^2 - z^2) \pi dz + \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 (2Rz - z^2) \pi dz \\
 &= \pi \left( \frac{1}{3} z^3 R^2 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R + \pi \left( \frac{1}{2} R z^4 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^{\frac{R}{2}} \\
 &= \frac{59}{480} \pi R^5.
 \end{aligned}$$

大家也可用柱面坐标变换去计算, 比较一下哪一个更方便.

### \* 三、三重积分的一般曲面坐标变换

求  $\iiint_V f(x, y, z) dV$ , 其中  $f(x, y, z)$  连续. 设变换  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  具有连续的偏导数, 且

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \neq 0,$$

则

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.} \quad (9.10)$$

令  $dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$  表示曲面坐标下的体积元素. 右边的区域  $V$  要用变量  $u, v, w$  表示. 我们可以验证在柱面坐标变换下:  $|J| = r$ , 在球面坐标变换下:  $|J| = \rho^2 \sin \varphi$ , 与我们分析的结果一致.

**例 8** 计算  $\iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV$ , 其中,  $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

**解** 用广义球面坐标变换

$$\begin{cases} x = a \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = b \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = c \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

有

$$|J| = abc \rho^2 \sin \varphi, \quad V: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是

$$\text{原式} = abc \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4}{5} \pi abc.$$

比我们前面的解决方法要简单得多.

**例 9** 求曲面  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  所围立体的体积.

**解** 显然这个曲面我们不容易画出来, 但是这个曲面关于三个坐标平面对称. 因此, 该立体也是关于三个坐标平面对称, 只需计算第 I 卦限的体积, 乘以 8 便得所求, 即

$$V = 8 \iiint_{V_1} dV.$$

$V_1$  是第 I 卦限的形体, 用广义球面坐标变换:

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = c\rho \cos \varphi, \end{cases}$$

则  $|J| = abc\rho^2 \sin \varphi$ . 经广义球面坐标变换, 曲面方程为  $\rho = \sin \varphi$ . 因此

$$V_1: 0 \leq \rho \leq \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} abc\rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}abc \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{4}{3}\pi abc \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}abc. \end{aligned}$$

#### \* 四、重积分换元公式的证明

##### 1. 二重积分的换元公式

在平面上, 设由函数组  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  ( $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  是单值函数且有连续的偏导数) 可以唯一地确定一对单值反函数

$$x = x(u, v), y = y(u, v). \quad (9.11)$$

因此, 变数  $(x, y)$  与变数  $(u, v)$  构成一一对应, 平面上的点  $M(x, y)$  的位置就可由一对新变数  $(u, v)$  来确定, 这对  $(u, v)$  叫做  $M$  的 曲线坐标.

分别给  $u$ ,  $v$  以所有可能的常数量值, 在  $Oxy$  平面上就得到两族曲线  $u(x, y) = \text{常数}$ ,  $v(x, y) = \text{常数}$  (图 9-45), 这两族曲线叫做 坐标曲线.

极坐标是最常见的一种曲线坐标, 在这里  $u = r$ ,  $v = \theta$ , 极坐标与直角坐标的关系是

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

极坐标的两族坐标曲线是  $r = \text{常数}$  (一族以原点为中心的同心圆),  $\theta = \text{常数}$  (一族以原点为起点的射线).

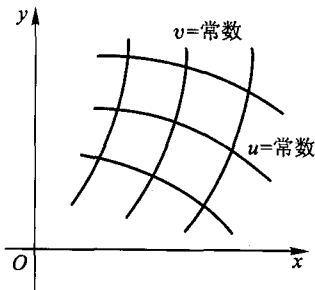


图 9-45

现在来考虑二重积分  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$  在曲线坐标  $(u, v)$

下的表达式.

用两族坐标曲线将区域  $\sigma$  分成若干个小区域, 再求其中有规则的小区域的面积 (图 9-46). 设小区域  $M_1M_2M_4M_3$  是由两对邻近坐标线所围成, 因  $du$ 、 $dv$  很小, 所以可将该小区域看成是一个平行四边形. 这个平行四边形的顶点  $M_4$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  的坐标 (不计高阶无穷小) 分别是

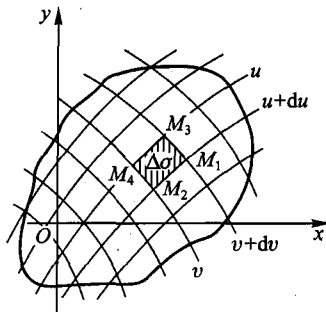


图 9-46

$$M_4: \begin{cases} x_1 = x(u, v), \\ y_1 = y(u, v); \end{cases}$$

$$M_2: \begin{cases} x_2 = x(u + du, v) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du, \\ y_2 = y(u + du, v) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du; \end{cases}$$

$$M_3: \begin{cases} x_3 = x(u, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ y_3 = y(u, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \end{cases}$$

因此,

$$\overrightarrow{M_4M_2} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du \right) i + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du \right) j, \quad \overrightarrow{M_4M_3} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) i + \left( \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) j$$

$$\overrightarrow{M_4M_2} \times \overrightarrow{M_4M_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} du dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv k$$

通常记

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

叫做  $x, y$  关于  $u, v$  的雅可比 (Jacobi) 行列式. 于是, 小区域  $M_1M_2M_4M_3$  的面积取为

$$|\overrightarrow{M_4M_2} \times \overrightarrow{M_4M_3}| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

又由  $f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$ , 得

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (9.12)$$

其中右边的  $\sigma$  用  $u, v$  的不等式来表示.  $\square$

这就是二重积分从直角坐标  $(x, y)$  变换为曲线坐标  $(u, v)$  的换元公式, 曲线坐标下的面积元素为

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$

例如极坐标的情况,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  (在这里  $u = r, v = \theta$ ), 有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

由(9.12)式得

$$\iint_{\sigma} f(x,y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

又如对于广义极坐标:  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ , 有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \sin \theta & -a \cos \theta \\ b \cos \theta & b \sin \theta \end{vmatrix} = ab.$$

从而

$$\iint_{\sigma} f(x,y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(a \cos \theta, b \sin \theta) ab r dr d\theta$$

这就是二重积分从直角坐标变换为广义极坐标的换元公式.

## 2. 三重积分的换元公式

在空间中, 设由函数组

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z) \quad (9.13)$$

( $u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$  是单值函数, 且具有连续偏导数) 可以唯一地确定一组单值反函数.

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w). \quad (9.14)$$

通过上述关系, 空间中点  $M(x,y,z)$  的位置就可以用新的一组数  $(u,v,w)$  来确定, 这组数  $(u,v,w)$  叫做点  $M$  的曲面坐标. 给  $u, v, w$  以所有可能的常数值, 在空间中就得到三族曲面:  $u(x,y,z) = \text{常数}$ ,  $v(x,y,z) = \text{常数}$ ,  $w(x,y,z) = \text{常数}$ , 这三族曲面叫做坐标曲面, 它们两两的交线叫做坐标曲线. 柱面坐标及球面坐标是最常见的二种曲面坐标. 如柱面坐标中的三族坐标曲面是:

$r = \text{常数}$  (一族以  $z$  轴为对称轴的圆柱面),

$\theta = \text{常数}$  (一族  $Ozx$  平面与正半平面 ( $x > 0$ ) 夹角为定值的半平面),

$z = \text{常数}$  (一族垂直于  $z$  轴的半平面).

球面坐标中的三族坐标曲面是:

$\rho = \text{常数}$  (一族以原点为球心的球面),

$\theta = \text{常数}$  (一族与  $Ozx$  正半平面 ( $x > 0$ ) 夹角为定值的半平面),

$\varphi = \text{常数}$  (一族以  $O$  为顶点, 以  $Oz$  轴为对称轴的锥面).

现在来考虑三重积分  $\iiint_V f(x,y,z) dV$  在曲面坐标  $(u,v,w)$  下的表达式.



用三族坐标曲面将立体  $V$  分成若干个小立体区域, 再求其中有规则小立体区域的体积(图 9-47).

设立体小区域是由三对相邻的坐标曲面所围成.

因  $du, dv, dw$  很小, 可将该小区域看成一个平行六面体, 这个平行六面体的顶点  $M_1$  与相邻的三个顶点  $M_2, M_4, M_5$  的坐标 (不计高阶无穷小) 分别是

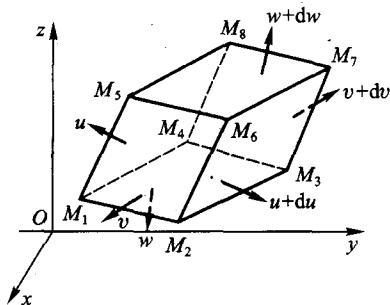


图 9-47

$$M_1: \begin{cases} x_1 = x(u, v, w), \\ y_1 = y(u, v, w), \\ z_1 = z(u, v, w); \end{cases}$$

$$M_2: \begin{cases} x_2 = x(u + du, v, w) = x(u, v, w) + \frac{\partial x}{\partial u} du, \\ y_2 = y(u + du, v, w) = y(u, v, w) + \frac{\partial y}{\partial u} du, \\ z_2 = z(u + du, v, w) = z(u, v, w) + \frac{\partial z}{\partial u} du; \end{cases}$$

$$M_4: \begin{cases} x_4 = x(u, v + dv, w) = x(u, v, w) + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ y_4 = y(u, v + dv, w) = y(u, v, w) + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \\ z_4 = z(u, v + dv, w) = z(u, v, w) + \frac{\partial z}{\partial v} dv, \end{cases}$$

$$M_5: \begin{cases} x_5 = x(u, v, w + dw) = x(u, v, w) + \frac{\partial x}{\partial w} dw, \\ y_5 = y(u, v, w + dw) = y(u, v, w) + \frac{\partial y}{\partial w} dw, \\ z_5 = z(u, v, w + dw) = z(u, v, w) + \frac{\partial z}{\partial w} dw, \end{cases}$$

因此,

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial z}{\partial u} du \right) \mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{M_1 M_4} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{M_1 M_5} = \left( \frac{\partial x}{\partial w} dw \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial w} dw \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial z}{\partial w} dw \right) \mathbf{k},$$

$$(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_4}) \cdot \overrightarrow{M_1 M_5} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du dv dw = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du dv dw$$

通常记

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

称为  $x, y, z$  关于  $u, v, w$  的三阶雅可比 (Jacobi) 行列式, 于是规则小立体区域的体积.

$$dV = |(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_4}) \cdot \overrightarrow{M_1 M_5}| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw \right| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw,$$

又  $f(x, y, z) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ , 于是可以得到三重积分从直角坐标  $(x, y, z)$  变换为曲面坐标  $(u, v, w)$  的换元公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (9.15)$$

其中右边的立体  $V$  用  $u, v, w$  不等式来表示区域.

### 习题 9-3

1. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$ , 其中  $V$  是由曲面  $z = xy$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$  所围成的立体;

(2)  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $V$  是由曲面  $x+y+z=1$ ,  $z=0$ ,  $y=0$ ,  $x=0$  所围成的立体;

(3)  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , 其中  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  所围成的第 I 卦限内的立体;

(4)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , 其中  $V$  是由曲面  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z=1$  所围成的立体.

2. 利用适当方法计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z=2$  所围成的立体;

(2)  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$ , 其中  $V: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ,  $z \geq 0$ ;

(3)  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z) dV$ , 其中  $V$  是由曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ , 绕  $z$  轴旋转一周所成的曲面与平面  $z=4$  所围成的立体;

(4)  $\iiint_\Omega (x+z) dV$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  所围成的区域;

(5)  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$ , 其中  $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

3. 求函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$  内的平均值.  
 4. 证明: 若函数  $f(x, y, z)$  于域  $V$  内是连续的且对于任何区域  $W \subset V$ , 都有

$$\iiint_W f(x, y, z) dV = 0,$$

则当  $(x, y, z) \in V$  时,  $f(x, y, z) \equiv 0$ .

5.  $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $f$  为可微函数, 其中  $t > 0$ , 求  $F'(t)$ .

6. 求由下列曲面所界的体积:

- (1)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ ,  $y = x$ ,  $y = x^2$ ;  
 (2)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ,  $x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$  ( $0 < a < b$ );  
 (3)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ,  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $a > 0$ ;

7. 计算积分  $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dV$ , 其中  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

## §4 第一类曲线积分与第一类曲面积分

### §4.1 第一类曲线积分

由已知曲线  $\Gamma$  的线密度, 求曲线  $\Gamma$  的质量可引入第一类曲线积分的定义 (请读者自己分析).

**定义 9.5** 设函数  $f(P) = f(x, y, z)$  是定义在以  $A, B$  为端点的空间光滑曲线  $\Gamma$  上的有界函数, 在曲线  $\Gamma$  上任意取点:

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B,$$

将曲线分成  $n$  个部分. 记弧  $\overline{M_{i-1}M_i}$  的长度为  $\Delta s_i$ , 并在  $M_{i-1}M_i$  上任取一点  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 作和

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i.$$

记  $\lambda = \max \{ \Delta s_i : 1 \leq i \leq n \}$ . 当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 若上述和式的极限存在, 且此极限值与曲线的分法及点  $P_i$  的取法无关, 则称此极限值为函数  $f(P)$  沿曲线  $\Gamma$  的第一类曲线积分, 记作

$$\int_{\Gamma} f(P) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i.$$

第一类曲线积分也具有二重积分的八条性质.

若  $f(P) \equiv 1$ , 则显然有

$$\int_{\Gamma} 1 ds \stackrel{\text{记作}}{=} \int_{\Gamma} ds = s,$$

其中,  $s$  是曲线的弧长.

设  $\Gamma$  为光滑曲线, 其方程为:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \text{ (即 } x'(t), y'(t), z'(t) \text{ 连续且不同时为 } 0\text{)}. \\ z = z(t), \end{cases}$$

设  $Q = \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$ , 则  $dQ = f(x, y, z) ds$ . 在区间  $[t, t + \Delta t]$  上, 由于

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx \sqrt{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2 + [y(t + \Delta t) - y(t)]^2 + [z(t + \Delta t) - z(t)]^2} \\ &= \sqrt{x'^2(\xi_1) + y'^2(\xi_2) + z'^2(\xi_3)} \Delta t \quad (t < \xi_1, \xi_2, \xi_3 < t + \Delta t) \\ &\approx \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \Delta t \quad (\text{与求平面上弧长增量类似}), \end{aligned}$$

所以

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

从而

$$dQ = f(x, y, z) ds = f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

于是

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.}$$

若  $\Omega$  是平面曲线  $\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$  为光滑曲线. 设  $Q = \int_{\Gamma} f(x, y) ds$ ,

$\alpha \leq t \leq \beta$ , 则  $dQ = f(x, y) ds$ . 由  $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ , 知

$$dQ = f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

则

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

若曲线  $\Gamma$  的方程为:  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx.$$

若曲线  $\Gamma$  的方程为:  $x = \psi(y)$ ,  $y \in [c, d]$ , 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_c^d f(\psi(y), y) \sqrt{1 + \psi'^2(y)} dy.$$

若曲线  $\Gamma$  的方程为:  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)} d\theta.$$

第一类曲线积分也具有点函数积分的八个性质.

**例 1** 求  $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$ , 其中  $C$  为内摆线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$  的弧.

**解** 由于曲线  $C$  关于两坐标轴对称, 且被积函数关于  $x$  是偶函数且关于  $y$  是偶函数, 所以

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds = 4 \int_{C_1} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds,$$

其中,  $C_1$  是第一象限内的曲线, 设  $C_1: \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds &= 4a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a \cos t \sin t dt \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^5 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos t dt \right] \\ &= 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos t dt = 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \sin t dt \\ &= 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

**例 2** 计算  $\int_L x^2 ds$ , 其中  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $x + y + z = 0$  所截得的圆周.

**解** 由对称性知

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds,$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_L ds = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

## §4.2 第一类曲面积分

由已知曲面的面密度, 求曲面的质量可引入第一类曲面积分的定义(请读者自己分析).

**定义 9.6** 设  $f(P) = f(x, y, z)$  是定义在有界光滑曲面  $S$  上的有界函数. 用曲线网将  $S$  任意分成  $n$  部分:

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n.$$

仍用  $\Delta S_i$  记  $\Delta S_i$  的面积. 在  $\Delta S_i$  上任取点  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 作和

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i.$$

以  $\lambda$  表示  $\Delta S_i$  直径中的最大者. 当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 若上述和式的极限存在, 且此极限值与曲面的分法及点  $P_i$  的取法无关, 则称此极限值为函数  $f(P)$  沿曲面  $S$  的第一类曲面积分, 记作

$$\iint_S f(P) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i.$$

第一类曲面积分也具有二重积分的八条性质.

可以证明: 若函数  $f(P) = f(x, y, z)$  在曲面  $S$  上连续, 则曲面积分存在. 若  $f(P) \equiv 1$ , 则显然有

$$\iint_S 1 dS \stackrel{\text{记作}}{=} \iint_S dS = S.$$

其中,  $S$  是曲面的面积.

若曲面  $S$  为光滑曲面:

$z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma_{xy}$  ( $\sigma_{xy}$  是曲面  $S$  在  $Oxy$  平面上的投影).

设  $Q = \iint_S f(x, y, z) dS$ ,  $(x, y) \in \sigma_{xy}$ , 则  $dQ = f(x, y, z) dS$ .

在曲面  $S$  上取微元  $dS$ , 设点  $P(x, y, z(x, y)) \in dS$ , 则在该点处曲面  $S$  的法线矢量为  $\mathbf{n} = \pm \{z'_x, z'_y, -1\}$ ,  $\mathbf{n}$  与  $z$  轴正向的夹角  $\gamma$  的余弦为

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}.$$

由图 9-48 知

$$d\sigma = |\cos \gamma| \cdot dS \quad \text{或} \quad dS = \frac{1}{|\cos \gamma|} d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma, \quad (9.16)$$

所以

$$dQ = f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma$$

于是

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) dS = Q = \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma.} \quad (9.17)$$

特别地, 若  $f(x, y, z) \equiv 1$ , 则  $\iint_S dS = \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma = S$ .

注意: 现证明(1.1)式.

证 由于  $dS$  很小, 所以可把  $dS$  看成一个平面, 它的面积仍记为  $dS$  (图 9-48).  $\mathbf{n}$  是平面  $dS$  的法矢量, 平面  $\sigma_{xy}$  的法矢量是  $z$  轴, 因此, 平面  $dS$  与

平面  $\sigma_{xy}$  的夹角(锐角)  $\theta$  的余弦为:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}} = |\cos \gamma| \quad (\theta \text{ 为常数}).$$

如图 9-49 建立坐标系,  $d\sigma$  中  $x$  的变化范围是  $x \in [a, b]$ . 过  $x$  作垂直于  $x$  轴的直线交  $d\sigma$  于  $A_1$  与  $B_1$ , 设  $|A_1 B_1| = h(x)$ , 有

$$d\sigma = \int_a^b h(x) dx.$$

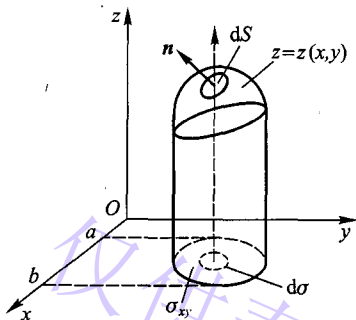


图 9-48

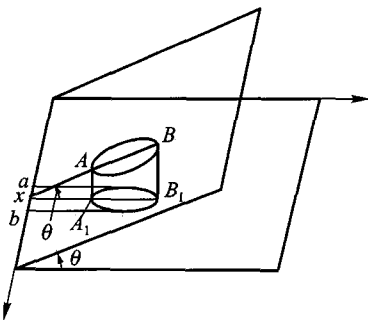


图 9-49

设  $A_1$  与  $B_1$  分别是区域  $dS$  中两点  $A, B$  在  $d\sigma$  上的投影点, 则

$$|AB| \cos \theta = |A_1 B_1|, \quad \text{或} \quad |AB| = \frac{1}{\cos \theta} |A_1 B_1| = \frac{1}{\cos \theta} h(x).$$

于是

$$dS = \int_a^b |AB| dx = \int_a^b \frac{1}{\cos \theta} h(x) dx = \frac{1}{\cos \theta} \int_a^b h(x) dx = \frac{1}{\cos \theta} d\sigma,$$

得  $\cos \theta dS = d\sigma$ . 即

$$|\cos \gamma| dS = d\sigma \quad \text{或} \quad dS = \frac{1}{|\cos \gamma|} d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma. \quad \square$$

同理, 若曲面  $S: y = y(x, z), (x, z) \in \sigma_{xz}$ , 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} d\sigma. \quad (9.18)$$

特别地, 若  $f(x, y, z) \equiv 1$ , 则  $\iint_S dS = \iint_{\sigma_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} d\sigma = S$ .

若曲面  $S: x = x(y, z), (y, z) \in \sigma_{yz}$ , 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} d\sigma. \quad (9.19)$$

特别地, 若  $f(x, y, z) \equiv 1$ , 则  $\iint_S dS = \iint_{\sigma_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} d\sigma$ .

若曲面  $S$  由方程  $F(x, y, z) = 0$  给出, 且确定隐函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma_{xy}$ .

并且  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$  连续, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}{|F'_z|} d\sigma.$$

而一般曲面可分割成若干块, 使得每一块可利用公式 (1.2)、(1.3)、(1.4) 进行计算.

**例 3** 计算  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $S$  为立体  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$  的边界.

**解** 曲面  $S$  由两部分组成, 一部分为  $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 它在  $Oxy$  平面上的投影为  $x^2 + y^2 \leq 1$ ; 另一部分为  $S_2: z = 1$ , 它在  $Oxy$  平面上的投影也是  $x^2 + y^2 \leq 1$ . 对于这两部分, 分别有:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,$$

在极坐标变换下,  $\sigma_{xy}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \end{cases}$  有

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{2} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= (\sqrt{2} + 1) \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= (\sqrt{2} + 1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $\iint_{\Sigma} z dS$ , 其中  $\Sigma$  为曲面  $z =$

$\sqrt{x^2 + y^2}$  在柱体  $x^2 + y^2 \leq 2x$  内部分 (图 9-50).

**解**  $\Sigma$  在  $Oxy$  平面上的投影区域为  $D: x^2 + y^2 \leq 2x$ . 有

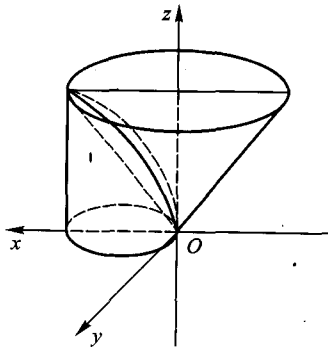


图 9-50



$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} d\sigma = \sqrt{2} d\sigma,$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} d\sigma = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr \\ &= \frac{16}{3} \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{9} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

### 习题 9-4

1. 计算下列第一类曲线积分:

- (1)  $\int_C y^2 ds$ , 其中  $C$  为摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一拱;
- (2)  $\int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$ , 其中  $C$  为由曲线  $\gamma = a$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ( $\gamma$  和  $\varphi$  是极坐标) 所围的凸围线;
- (3)  $\int_C |y| ds$ , 其中  $C$  为双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  的弧;
- (4)  $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , 其中  $C$  为螺线  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );
- (5)  $\int_C (x^2 + y^2 + 1) ds$ , 其中  $C$  为曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ z = x^2 + y^2 + 1. \end{cases}$

2. 计算曲线  $x = 3t$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 2t^3$  从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(3, 3, 2)$  一段弧长.

3. 计算下列第一类曲面积分:

- (1)  $\iint_S (x + y + z) dS$ , 其中  $S$  为曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ ;
- (2)  $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$ , 其中  $S$  为四面体  $x + y + z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  的边界;
- (3)  $\iint_S |xyz| dS$ , 其中  $S$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $z = 1$  所割下的部分;
- (4)  $\iint_S (ax + by + cz + d)^2 dS$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

4. 求抛物面壳  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的质量, 此壳的密度按规律  $\rho = z$  而变更.

## §5 点函数积分的概念、性质及应用

### 一、点函数积分的概念

我们知道, 定积分可看作求密度不均质线段(棒子)的质量的数学概念,

二重积分可看作求密度不均质平面图形(平面薄板)的质量的数学概念, 三重积分可看作求密度不均质立体的质量的数学概念, 那么求空间密度不均质的曲线或直线段的质量或一张有界曲面或平面的质量会导出什么样的数学形式?

为方便起见, 我们把一段直线和曲线, 一张有界平面或曲面, 一个有界立体(包括边界点)统称为空间的有界闭形体  $\Omega$ .  $\Omega$  的度量仍记为  $\Omega$ , 代表它的长度或面积或体积的大小.

设  $\Omega$  是空间有界闭形体, 它的密度为  $\rho = f(P)$  为  $\Omega$  上的连续函数, 求  $\Omega$  的质量  $M$ .

第一步: 分割. 把  $\Omega$  分成  $n$  个小的有界闭形体  $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ , 其中  $\Delta\Omega_i$  的度量仍记为  $\Delta\Omega_i$ . 设  $\lambda_i = \max\{\rho(P_1, P_2) : P_1, P_2 \in \Delta\Omega_i\}$ , 称为  $\Delta\Omega_i$  的直径. 令  $\lambda = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

第二步: 近似.  $f(P)$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续, 所以当  $\Delta\Omega_i$  的直径很小时,  $\Delta\Omega_i$  上任意两点的密度相差很小, 几乎一样. 因此, 可近似把  $\Delta\Omega_i$  看成密度均质的形体,  $\forall P_i \in \Omega_i$ , 视  $f(P_i)$  为  $\Delta\Omega_i$  的平均密度, 从而,  $\Delta\Omega_i$  的质量  $M_i$  可近似表示为

$$M_i \approx f(P_i) \Delta\Omega_i.$$

第三步: 作和.  $M = \sum_{i=1}^n M_i \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i$ .

第四步: 取极限. 当  $\lambda$  越小, 每一个  $\Delta\Omega_i$  都越小, 则  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i$  与  $M$  越无限接近, 于是

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i.$$

而且这个极限值是唯一的且与  $\Omega$  的分法和点  $P_i$  的取法无关. 由此, 我们得出点函数积分的概念.

**定义 9.7** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}$  或  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  或  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , 且  $\Omega$  为有界闭区域. 设  $u = f(P)$ ,  $P \in \Omega$  为  $\Omega$  上的有界点函数. 任用一种分割法将  $\Omega$  分成  $n$  个子闭形体  $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ , 这些子形体的度量仍记为  $\Delta\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 设  $\lambda_i = \max\{\rho(P_1, P_2) : P_1, P_2 \in \Omega_i\}$  为  $\Delta\Omega_i$  的直径, 令  $\lambda = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ .  $\forall P_i \in \Delta\Omega_i$ , 称  $f(P_i) \Delta\Omega_i$  为 积分元, 称  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i$  为 积分和式. 若极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i$  存在且与  $\Omega$  的分法与点  $P_i$  的取法无关, 则称该极限值为点函数  $f(P)$  在  $\Omega$  上的积分, 记作  $\int_{\Omega} f(P) d\Omega$ , 即

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i.$$

其中  $\Omega$  称为积分区域,  $f(P)$  称为被积函数,  $P$  称为积分变量,  $f(P) d\Omega$  称为被积表达式,  $d\Omega$  称为  $\Omega$  的度量元素.

物理意义: 当  $f(P) \geq 0$  时,  $\int_{\Omega} f(P) d\Omega$  表示密度为  $\rho = f(P)$  的空间形体的质量  $M$ . 特别地, 当  $f(P) \equiv 1$  时,  $\int_{\Omega} d\Omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i = \Omega$  (度量).

**定理 9.2** 若  $f(P)$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则  $f(P)$  在  $\Omega$  上可积.

## 二、点函数积分的性质

设  $f(P)$ ,  $g(P)$  在有界闭区域  $\Omega$  上都可积, 有

$$\text{性质 1} \quad \int_{\Omega} [f(P) \pm g(P)] d\Omega = \int_{\Omega} f(P) d\Omega \pm \int_{\Omega} g(P) d\Omega.$$

$$\text{性质 2} \quad \int_{\Omega} kf(P) d\Omega = k \int_{\Omega} f(P) d\Omega \quad (k \text{ 为常数}).$$

上面两条性质称为线性运算法则.

$$\text{性质 3} \quad \int_{\Omega} f(P) d\Omega = \int_{\Omega_1} f(P) d\Omega + \int_{\Omega_2} f(P) d\Omega, \text{ 其中 } \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \text{ 且 } \Omega_1 \text{ 与 } \Omega_2$$

无公共内点.

$$\text{性质 4} \quad \text{若 } f(P) \geq 0, P \in \Omega, \text{ 则 } \int_{\Omega} f(P) d\Omega \geq 0.$$

$$\text{若 } f(P) \text{ 连续, } f(P) \geq 0, f(P) \neq 0, f(P) \text{ 连续, } P \in \Omega, \text{ 则 } \int_{\Omega} f(P) d\Omega > 0.$$

$$\text{性质 5} \quad \text{若 } f(P) \leq g(P), P \in \Omega, \text{ 则 } \int_{\Omega} f(P) d\Omega \leq \int_{\Omega} g(P) d\Omega.$$

$$\text{若 } f(P), g(P) \text{ 连续, } f(P) \leq g(P), f(P) \neq g(P), f(P), g(P) \text{ 连续, } P \in \Omega, \text{ 则 } \int_{\Omega} f(P) d\Omega < \int_{\Omega} g(P) d\Omega.$$

$$\text{性质 6} \quad f(P) \text{ 连续 } \left| \int_{\Omega} f(P) d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |f(P)| d\Omega.$$

**性质 7** 若  $f(P)$  在积分区域  $\Omega$  上满足  $m \leq f(P) \leq M$ , 其中  $m, M$  均为常数. 则

$$m\Omega \leq \int_{\Omega} f(P) d\Omega \leq M\Omega.$$

**性质 8 (中值定理)** 若  $f(P)$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则至少有一点  $P^* \in \Omega$ , 使得

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = f(P^*) \cdot \Omega.$$

$f(P^*) = \frac{\int_{\Omega} f(P) d\Omega}{\Omega}$  称为函数  $f(P)$  在  $\Omega$  上的平均值.

### 三、点函数积分的分类

(1) 若  $\Omega = [a, b] \subset \mathbf{R}$ , 这时  $f(P) = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.20)$$

这是一元函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分.

(2) 若  $\Omega = s \subset \mathbf{R}^2$ , 且  $s$  是平面曲线, 这时  $f(P) = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in s$ , 于是

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \int_s f(x, y) ds. \quad (9.21)$$

$f(P) \equiv 1$  时,  $\int_s ds = s$  是曲线的弧长. (9.21) 式称为对弧长  $s$  的曲线积分或第一类平面曲线积分.

(3) 若  $\Omega = s \subset \mathbf{R}^3$ , 且  $s$  是空间曲线, 这时  $f(P) = f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in s$ , 则

$$\int_s f(P) d\Omega = \int_s f(x, y, z) ds. \quad (9.22)$$

$f(P) \equiv 1$  时,  $\int_s ds = s$  是曲线的弧长. (9.22) 式称为对弧长  $s$  的曲线积分或第一类空间曲线积分.

(2)、(3) 的特殊情形是  $s$  为一直线段, 而直线段上的点函数积分本质上就是一元函数的定积分, 这说明  $\int_s f(x, y) ds$ ,  $\int_s f(x, y, z) ds$  可用一次定积分计算, 因此用了一次积分号.

(4) 若  $\Omega = \sigma \subset \mathbf{R}^2$ , 且  $\sigma$  是平面区域, 这时  $f(P) = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \sigma$ , 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \quad (9.23)$$

(9.23) 式称为二重积分.

(5) 若  $\Omega = S \subset \mathbf{R}^3$ , 且  $S$  是空间曲面, 这时  $f(P) = f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in S$ , 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \iint_S f(x, y, z) dS \quad (9.24)$$

(9.24)式称为对面积  $S$  的曲面积分或第一类曲面积分. 若  $f(P) \equiv 1$ ,  $\iint_S dS = S$  是空间曲面的面积.

由于(5)的特殊情形是平面区域上的二重积分, 说明该积分可化为两次定积分的计算, 因此用二重积分号.

(6) 若  $\Omega = V \subset \mathbf{R}^3$ , 且  $V$  是空间立体, 这时  $f(P) = f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in V$ , 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \iiint_V f(x, y, z) dV. \quad (9.25)$$

(9.25)式称为三重积分. 若  $f(P) \equiv 1$ , 则  $\iiint_V dV = V$  是空间立体的体积.

#### 四、对称区域上点函数的积分

(1) 设  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ,  $\Omega$  或曲线或曲面或立体.

(i) 若  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ , 且  $\Omega_1, \Omega_2$  关于  $Oxy$  平面对称, 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \text{ 即 } f \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数,} \\ 2 \int_{\Omega_1} f(P) d\Omega, & \text{当 } f(x, y, -z) = f(x, y, z), \text{ 即 } f \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

(ii) 若  $\Omega = \Omega_3 + \Omega_4$  且  $\Omega_3, \Omega_4$  关于  $Oyz$  平面对称, 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x, y, z) = -f(x, y, z), \text{ 即 } f \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数,} \\ 2 \int_{\Omega_3} f(P) d\Omega, & \text{当 } f(-x, y, z) = f(x, y, z), \text{ 即 } f \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

(iii) 若  $\Omega = \Omega_5 + \Omega_6$ , 且  $\Omega_5, \Omega_6$  关于  $Ozx$  平面对称, 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, -y, z) = -f(x, y, z), \text{ 即 } f \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数,} \\ 2 \int_{\Omega_5} f(P) d\Omega, & \text{当 } f(x, -y, z) = f(x, y, z), \text{ 即 } f \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

(2) 设  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ,  $\Omega$  是平面曲线或平面图形.

(i) 若  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ , 且  $\Omega_1, \Omega_2$  关于  $x$  轴对称, 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, -y) = -f(x, y), \text{ 即 } f \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数;} \\ 2 \int_{\Omega_1} f(P) d\Omega, & \text{当 } f(x, -y) = f(x, y), \text{ 即 } f \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

(ii) 若  $\Omega = \Omega_3 + \Omega_4$ , 且  $\Omega_3, \Omega_4$  关于  $y$  轴对称, 则

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x, y) = -f(x, y), \text{ 即 } f \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数,} \\ 2 \int_{\Omega_3} f(P) d\Omega, & \text{当 } f(-x, y) = f(x, y), \text{ 即 } f \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

简单地说,若  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  关于坐标平面对称,当  $f(P)$  关于垂直该平面坐标轴的坐标是奇函数时为 0; 是偶函数时, 为平面一侧区域积分的 2 倍.

若  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  关于坐标轴对称, 当  $f(P)$  关于垂直该轴的坐标是奇函数则为 0; 是偶函数时, 则为该轴一侧区域积分的 2 倍.

事实上, 若两个点函数积分的被积函数与积分区域相同, 则两个点函数积分相同, 至于被积函数用什么字母表示是没有关系的. 下面, 我们给出 (1) (i) 中当  $\Omega = V$  时的证明.

证 不妨设立体  $V = V_+ + V_-$ , 且  $V_+$ ,  $V_-$  关于  $Oxy$  平面对称, 有

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_+} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_-} f(x, y, z) dV$$

则  $V_+$ ,  $V_-$  的边界关于平面  $Oxy$  对称. 若  $V_-$  区域中的  $z$  用  $-z$  代替, 则为  $V_+$ ,  $f(x, y, z)$  中的  $z$  用  $-z$  代替, 得  $|J| = 1$ . 有

$$\begin{aligned} \iiint_{V_-} f(x, y, z) dV &= \iiint_{V_+} f(x, y, -z) dV \\ &= \begin{cases} \iiint_{V_+} -f(x, y, z) dV, & \text{若 } f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ \iiint_{V_+} f(x, y, z) dV, & \text{若 } f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y, z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iiint_{V_+} f(x, y, z) dV, & \text{若 } f(x, y, z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

同理可得, 若  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  关于  $z$  轴对称, 当  $f(-x, -y, z) = -f(x, y, z)$  时, 积分为 0; 当  $f(-x, -y, z) = f(x, y, z)$  时, 积分为  $z$  轴一侧区域上积分的 2 倍. 若  $\Omega$  关于原点对称, 当  $f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$  时, 积分为 0; 当  $f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$  时, 积分为原点一侧区域上积分的 2 倍, 其他情形读者可自己给出.

**例 1** 计算  $\iiint_{\Omega} (1 + 2xyz) dV$ . 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = a^2 - x^2 - y^2$  与  $z = 0$  所围成的区域 (如图 9-51).

**解** 由于  $z = a^2 - x^2 - y^2$  与  $z = 0$  的交线在  $Oxy$  平面上的投影曲线为:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

所以

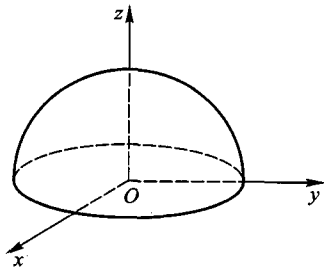


图 9-51

$$V: 0 \leq z \leq a^2 - x^2 - y^2, (x, y) \in \sigma_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2,$$

由于  $V$  关于  $Oxz$  平面对称, 且  $2xyz$  关于  $y$  是奇函数, 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (1 + 2xyz) dV &= \iiint_{\Omega} dV + \iiint_{\Omega} 2xyz dV = \iiint_{\Omega} dV \\ &= \iint_{\sigma_{xy}} d\sigma \int_0^{a^2 - x^2 - y^2} dz = \iint_{\sigma_{xy}} (a^2 - x^2 - y^2) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = 2\pi \left[ \frac{1}{2} a^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right] \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$

## 五、重心

设密度函数为  $\rho = \mu(P) = \mu(x, y, z)$  连续, 求空间形体  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  的重心坐标 ( $\Omega$  是曲线、曲面或空间立体), 设  $\Omega$  的重心坐标为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

由中学物理知识: 求平面上  $n$  个质点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  质量分别是  $m_1, m_2, \dots, m_n$  构成的质点系的重心坐标  $(\bar{x}, \bar{y})$  为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{aligned}$$

我们采用下面方法求  $\Omega$  的重心坐标.

第一步: 分割. 把  $\Omega$  分割成  $n$  个小的形体  $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ .

第二步: 近似.  $\forall P_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta\Omega_i$ , 把  $\Delta\Omega_i$  近似看成一个质点, 质量近似为  $\mu(P_i)\Delta\Omega_i$ , 位于  $P_i$ . 求  $n$  个质点重心坐标的公式为

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i}, \quad \bar{y} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i y_i}{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i}, \quad \bar{z} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i z_i}{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i}.$$

第三步: 取极限.

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \mu(P_i) \Delta\Omega_i} = \frac{\int_{\Omega} \mu(P) x d\Omega}{\int_{\Omega} \mu(P) d\Omega} = \frac{\int_{\Omega} \mu(P) x d\Omega}{M},$$

同理

$$\bar{y} = \frac{\int_{\Omega} \mu(P) y d\Omega}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int_{\Omega} \mu(P) z d\Omega}{M},$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  是  $\Omega$  的重心.

特别  $\rho = \text{常数}$  时,

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} x d\Omega}{\Omega}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\Omega} y d\Omega}{\Omega}, \quad \bar{z} = \frac{\int_{\Omega} z d\Omega}{\Omega}.$$

其中  $M$  是  $\Omega$  的质量,  $\Omega$  是  $\Omega$  的度量.

当  $\rho = \text{常数}$ ,  $\Omega$  关于  $Oxy$  平面对称,  $z$  关于  $z$  是奇函数, 有  $\int_{\Omega} z d\Omega = 0$ , 则  $\bar{z} = 0$ . 同理, 当  $\rho = \text{常数}$ ,  $\Omega$  关于  $Ozx$  平面对称, 则  $\bar{y} = 0$ . 当  $\rho = \text{常数}$ ,  $\Omega$  关于  $Ozy$  平面对称, 则  $\bar{x} = 0$ .

同理, 当  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  ( $\Omega$  是曲线或平面区域), 设密度函数为  $\rho = \mu(P) = \mu(x, y)$  连续, 设重心坐标为  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 有

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} \mu(P) x d\Omega}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\Omega} \mu(P) y d\Omega}{M}.$$

当  $\rho = \text{常数}$  时,

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} x d\Omega}{\Omega}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\Omega} y d\Omega}{\Omega}.$$

当  $\rho = \text{常数}$ ,  $\Omega$  关于  $x$  轴对称, 有  $\bar{y} = 0$ ,  $\Omega$  关于  $y$  轴对称, 有  $\bar{x} = 0$ .

## 六、转动惯量

设  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  或  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  的密度函数  $\rho = \mu(P)$  连续, 求该物体的动能和关于  $L$  轴的转动惯量.

利用微元法, 取  $\Omega$  的微元  $d\Omega$ ,  $\forall P \in d\Omega$ .  $d\Omega$  的质量  $dM = \mu(P) d\Omega$  看成集中在点  $P$  处, 又设点  $P$  至  $L$  的距离为  $\overline{PP_L}$ , 于是  $dM$  绕  $L$  轴旋转的转动惯量为

$$dI = \overline{PP_L^2} dM = \overline{PP_L^2} \mu(P) d\Omega,$$

于是

$$I = \left( \int_{\Omega} \overline{PP_L^2} \mu(P) d\Omega \right)$$

若  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  ( $\Omega$  是空间曲线或曲面或立体),



$$\text{当 } L \text{ 是 } z \text{ 轴时, } I_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(P) d\Omega = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) d\Omega.$$

$$\text{当 } L \text{ 是 } x \text{ 轴时, } I_x = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(P) d\Omega = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) d\Omega.$$

$$\text{当 } L \text{ 是 } y \text{ 轴时, } I_y = \int_{\Omega} (z^2 + x^2) \mu(P) d\Omega = \int_{\Omega} (z^2 + x^2) \mu(x, y, z) d\Omega.$$

若  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  ( $\Omega$  是平面曲线或平面区域),

$$\text{当 } L \text{ 是 } x \text{ 轴时, } I_x = \int_{\Omega} y^2 \mu(P) d\Omega = \int_{\Omega} y^2 \mu(x, y) d\Omega.$$

$$\text{当 } L \text{ 是 } y \text{ 轴时, } I_y = \int_{\Omega} x^2 \mu(P) d\Omega = \int_{\Omega} x^2 \mu(x, y) d\Omega.$$

## 七、引力

设  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ,  $\Omega$  的密度函数  $u = \mu(P) = \mu(x, y, z)$  连续.  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是一质点, 质量为  $m$ , 求  $\Omega$  对质点  $P_0$  的引力.

利用微元法, 取  $\Omega$  的微元  $d\Omega$ ,  $\forall P \in d\Omega$ ,  $d\Omega$  的质量  $dM = \mu(P) d\Omega$ , 看作集中在点  $P$  处,  $d\Omega$  对质点  $P_0$  的引力  $d\mathbf{F}$  的大小为:

$$|d\mathbf{F}| = k \frac{m\mu(P) d\Omega}{r^2}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

由  $d\mathbf{F} \parallel \overrightarrow{P_0P}$ , 且  $d\mathbf{F}$ ,  $\overrightarrow{P_0P}$  方向相同, 有

$$d\mathbf{F}^0 = \frac{\overrightarrow{P_0P}}{|\overrightarrow{P_0P}|} = \frac{1}{r} [(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}],$$

于是

$$d\mathbf{F} = |d\mathbf{F}| d\mathbf{F}^0 = \frac{km}{r^3} [\mu(P)(x-x_0) d\Omega \mathbf{i} + \mu(P)(y-y_0) d\Omega \mathbf{j} + \mu(P)(z-z_0) d\Omega \mathbf{k}],$$

从而

$$\mathbf{F} = \left[ \int_{\Omega} \frac{km\mu(P)(x-x_0)}{r^3} d\Omega \mathbf{i} + \int_{\Omega} \frac{km\mu(P)(y-y_0)}{r^3} d\Omega \mathbf{j} + \int_{\Omega} \frac{km\mu(P)(z-z_0)}{r^3} d\Omega \mathbf{k} \right]$$

即

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k},$$

其中

$$\begin{aligned} F_x &= km \int_{\Omega} \frac{\mu(P)(x-x_0)}{r^3} d\Omega, \\ F_y &= km \int_{\Omega} \frac{\mu(P)(y-y_0)}{r^3} d\Omega, \\ F_z &= km \int_{\Omega} \frac{\mu(P)(z-z_0)}{r^3} d\Omega. \end{aligned}$$

同理, 若  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ,  $\Omega$  的密度函数  $\rho = \mu(P) = \mu(x, y)$  连续,  $P_0(x_0, y_0)$  是一质点, 质量为  $m$ , 则  $\Omega$  对质点  $M_0$  的引力为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j},$$

其中

$$\begin{aligned} F_x &= km \int_{\Omega} \frac{\mu(P)(x-x_0)}{r^3} d\Omega = km \int_{\Omega} \frac{\mu(x, y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} d\Omega, \\ F_y &= km \int_{\Omega} \frac{\mu(P)(y-y_0)}{r^3} d\Omega = km \int_{\Omega} \frac{\mu(x, y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} d\Omega. \end{aligned}$$

**例 2** 已知均匀半球体的半径为  $a$ , 在该半球体的底圆的一旁, 拼接一个半径与球的半径相等, 材料相同的均匀圆柱体, 使圆柱体的底圆与半球的底圆相重合, 为了使拼接后的整个立体重心恰是球心, 问圆柱的高应是多少?

**解** 如图 9-52 建立坐标系, 设所求的圆柱体的高度为  $H$ , 使圆柱体与半球的底圆在  $Oxy$  平面上. 圆柱体的中心轴为  $z$  轴, 设整个立体为  $\Omega$ , 其体积为  $\Omega$ , 重心坐标为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . 由题意知  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ . 由立体  $\Omega$  均质, 且关于  $Ozx$  平面及  $Oyz$  平面对称, 显然有  $\bar{y} = \bar{x} = 0$ , 且

$$\bar{z} = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} z dV,$$

由题意知  $\bar{z} = 0$ , 即

$$\iiint_{\Omega} z dV = 0.$$

设圆柱体与半球分别为  $\Omega_1, \Omega_2$ , 分别用柱面坐标与球面坐标, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \int_0^H z r dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a \rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a r dr \cdot \int_0^H z dz + \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^a \rho^3 d\rho \end{aligned}$$

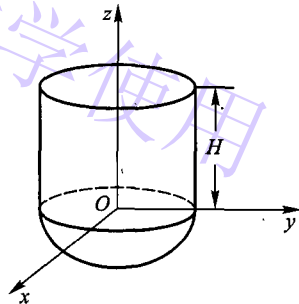


图 9-52

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}H^2 + 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{4}a^2(2H^2 - a^2) = 0.$$

得  $H = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 就是所求圆柱的高.

**例3** 求高为  $h$ , 半顶角为  $\frac{\pi}{4}$ , 密度为  $\mu$  (常数) 的正圆锥体绕对称轴旋转的转动惯量.

**解** 以对称轴为  $Oz$  轴, 以顶点为原点, 如图建立坐标系 (图 9-53), 则

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu dV,$$

利用平面截割法, 有

$$\Omega: 0 \leq z \leq h, (x, y) \in D_z: x^2 + y^2 \leq z^2,$$

于是

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^h dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) \mu dx dy = \mu \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z r^2 \cdot r dr \\ &= \mu \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} z^4 d\theta = \frac{\mu}{4} \cdot 2\pi \int_0^h z^4 dz = \frac{\pi\mu}{10} h^5. \end{aligned}$$

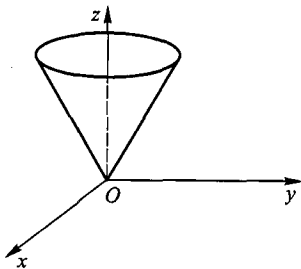


图 9-53

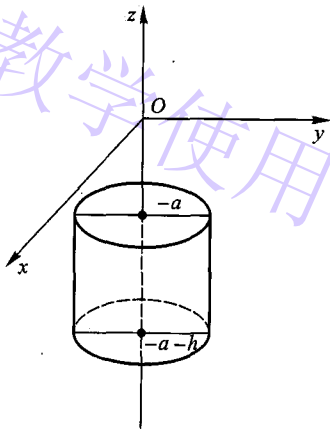


图 9-54

**例4** 一个半径为  $R$ , 高为  $h$  的均匀正圆柱体, 在其对称轴上距上底为  $a$  处有一质量为  $m$  的质点, 试求圆柱体对质点的引力.

**解** 如图建立坐标系 (图 9-54), 由于

$$F_x = \iiint_{\Omega} \frac{km\mu x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dV,$$

且  $\Omega$  关于  $Oyz$  平面对称, 被积函数关于  $x$  为奇函数, 有  $F_x = 0$ , 同理  $F_y = 0$ .

$$F_z = \iiint_{\Omega} \frac{km\mu z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dV,$$

用柱面坐标变换,

$$\begin{aligned} F_z &= km\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{-(a+h)}^{-a} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= -2\pi km\mu \int_0^R r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{-(a+h)}^{-a} dr \\ &= -2\pi km\mu \int_0^R r[(r^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - (r^2 + (a+h)^2)^{-\frac{1}{2}}] dr \\ &= 2\pi km\mu [\sqrt{R^2 + (a+h)^2} - \sqrt{R^2 + a^2} - h]. \end{aligned}$$

则引力  $\mathbf{F} = F_z \mathbf{k}$ .

**例 5** 设  $I_l$  为物体  $\Omega$  对于某轴  $l$  的转动惯量,  $I_{l_0}$  为对于平行于  $l$  并通过物体重心的轴  $l_0$  的转动惯量,  $d$  为轴  $l$  与  $l_0$  之间的距离,  $M$  为物体的质量. 证明:

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

**证** 以重心坐标为原点  $O$ ,  $Oz$  轴与  $l_0$  重合,  $l$  与  $Oxy$  平面的交点为  $(x_0, y_0, 0)$ , 如图 9-55 所示.

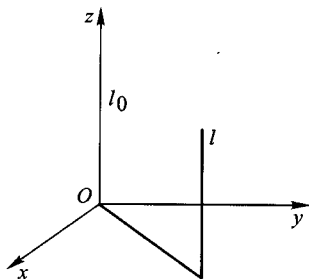


图 9-55

$$\begin{aligned} I_l &= \iiint_{\Omega} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \mu(x, y, z) dV \\ &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dV + \iiint_{\Omega} (x_0^2 + y_0^2) \mu(x, y, z) dV \\ &\quad - 2x_0 \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dV - 2y_0 \iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (9.26)$$

由于重心在原点, 故  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$ ,

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dV = 0, \quad \text{即} \quad \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dV = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dV = 0, \quad \text{即} \quad \iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dV = 0.$$

并且

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV, \quad d^2 = x_0^2 + y_0^2$$

代入(9.26), 有

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

**例 6** 求螺旋线  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 对  $z$  轴的转动惯

量, 设曲线的密度为  $\mu$  (常数).

$$\begin{aligned} \text{解 } I_z &= \int_r (x^2 + y^2) \mu ds = \mu \int_0^{2\pi} a^2 (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \mu a^2 (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \mu. \end{aligned}$$

例7 求密度为  $\rho_0$  的均匀球壳  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$  对  $Oz$  轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho_0 dS \\ &= \rho_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\sigma = R \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi R \rho_0 \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \stackrel{r = R \sin \theta}{=} 2\pi R^4 \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi R^2 \rho_0. \end{aligned}$$

### 习题 9-5

1. 求圆形均质薄板关于 (i) 切线的转动惯量; (ii) 过圆周上一点且垂直于圆平面的轴的转动惯量.

2. 求由抛物线  $y = \sqrt{ax}$  及  $x = a$  ( $a > 0$ ),  $y = 0$  围成的均质薄板的重心.

3. 设有一半径为  $R$  的均质薄圆片  $D$ , 密度为  $\mu$ , 求此圆片对于中心垂线上距圆片中心为  $h$ , 质量为  $m$  的质点的引力.

4. 求曲面  $x^2 + z^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$  ( $z > 0$ ) 所围均质立体的重心坐标.

5. 设球在动点  $P(x, y, z)$  的密度与该点至球心距离成正比, 求质量为  $M$  的非均质球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  对于其直径的转动惯量.

6. 求由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$  所围成的均质立体对质点  $A(0, 0, 0)$  质量为  $m$  的引力, 其中体密度为  $\mu$ .

7. 计算球面上的三角形  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) 围线的重心坐标.

8. 求螺线  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = \frac{h}{2\pi} t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一段对于  $x$  轴及  $z$  轴的转动惯量.

9. 均匀分布在圆  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $y \geq 0$ ) 的上半部的质量  $M$  以怎样的力吸引质量为  $m$  位于  $(0, 0)$  的质点.

10. 求密度为  $\rho_0$  的均匀球壳  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ) 对于  $Oz$  轴的转动惯量.

11. 密度为  $\rho_0$  的均匀锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  位于  $0 < b \leq z \leq a$  部分以怎样的力吸引质量为  $m$  位于  $O(0, 0, 0)$  点的质点.

12. 求均匀曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被曲面  $x^2 + y^2 = ax$  所割下部分的重心坐标.

13. 在过点  $O(0, 0)$  和  $A(\pi, 0)$  的曲线族  $y = a \sin x$  ( $a > 0$ ) 中, 求一条曲线  $L$ , 使沿该曲

线从  $O$  到  $A$  的积分  $\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$  的值最小.

## 第九章综合题

1. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ , 其中  $\Omega$  是由曲线  $y^2 = 2x$ ,  $x+y=4$ ,  $x+y=12$  所围成的平面图形;

(2)  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy$ ; (3)  $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2) dx dy$ ;

(4)  $\iint_{\substack{|x|\leq 1 \\ 0\leq y\leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ ; (5)  $\iint_{x^2+y^2\leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) dx dy$ ;

(6)  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} |x+y| dx dy$ .

2. 设  $f(x,y)$  连续, 且  $f(x,y) = xy + \iint_D f(u,v) du dv$ , 其中  $D$  是由  $y=0$ ,  $y=x^2$ ,  $x=1$  所围的平面区域, 计算  $\iint_D f(x,y) dx dy$ .

3. 物体在椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  上的压力的分布由公式  $p = p_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$  所给出, 求物体在此面上的平均压力.

4. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V xy dV$ , 其中  $V$  由曲面  $z=xy$ ,  $x+y=1$  及  $z=0$  所围成的立体;

(2)  $\iiint_V (x+y+z) dV$ , 其中  $V: x^2+y^2+z^2 \leq R^2$  且  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ;

5. 计算  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ .

6. 求下列曲面所围成立体的体积:

$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$  ( $a > 0$ ).

7. 计算下列积分:

(1)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$ ;

(2)  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_1^{\sqrt{1-x^2-y^2}+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz$ .

8. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 证明

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz = \frac{1}{3!} \left[ \int_0^1 f(t) dt \right]^3.$$

9. 已知两个球的半径分别为  $a$  和  $b$  ( $a > b$ ), 且小球球心在大球球面上, 试求小球在大

球内部部分的体积.

10. 求曲面  $x^2 + y^2 + az = 4a^2$  将球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$  分成两部分的体积之比 ( $a > 0$ ).

11. 求均匀的圆柱  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $0 \leq z \leq h$  对质点  $P(0, 0, b)$  的引力, 设圆柱的质量等于  $M$ , 而点的质量为  $m$ .

12. 在高为  $H$ , 底半径为  $R$  的旋转抛物体内部作内接正圆柱体 (它们有相同的中心轴), 使此圆柱体对中心轴的转动惯量为最大, 试求圆柱体的高与半径.

13. 计算下列广义三重积分:

$$(1) \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3};$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

仅供春学期教学使用

## 第十章 第二类曲线积分与第二类曲面积分

### §1 第二类曲线积分

#### §1.1 第二类曲线积分的概念

##### 一、第二类曲线积分概念的引入

设有一个力场①, 场的力为  $F(M) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ ,  $M(x, y, z) \in \Gamma$  设  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  在  $\Gamma$  上连续. 一质点在力场的作用下, 沿着一条光滑曲线  $\Gamma$  自  $A$  点移动到  $B$  点, 试求此力场(图 10-1)所做的功.

第一步: 分割. 在  $A$  与  $B$  之间, 按从  $A$  到  $B$  的方向任意插入  $n-1$  分点  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , 将曲线分割成  $n$  个部分  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_i, \dots, \Delta s_n$ , 仍以  $\Delta s_i$  记  $\Delta s_i$  的长度.

第二步: 近似. 由于  $\Delta s_i$  的长度很小, 可近似地将它看成直线段, 在  $\Delta s_i$  上任取一点  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ , 设  $T^0(P_i) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) |_{P_i}$ , 其中  $T^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)_{P_i}$  为点  $(x, y, z)$  处的单位切矢量(是  $x, y, z$  的矢量函数), 指向质点运动的方向. 把  $T^0(P_i)$  看成质点在  $\Delta s_i$  上的运动方向.

则  $\Delta s_i = \Delta s_i T^0(P_i)$ . 由于  $\Delta s_i$  很小, 且  $F(P)$  在  $\Delta s_i$  上连续, 因此,  $F(P)$  在  $\Delta s_i$  变化也很小, 在其上每一点所受力近似为  $F(P_i)$ . 于是, 力场沿  $\Delta s_i$  所作的功  $\Delta W_i$  近似地为

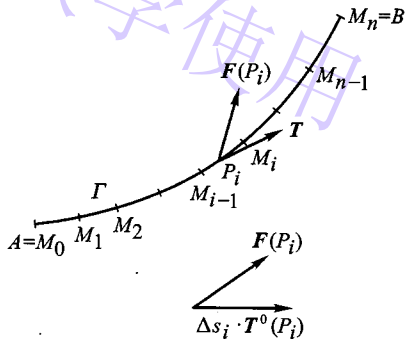


图 10-1

① 如果空间(或部分空间)中的每一点都对应着一个力, 则称在这个空间中确定了一个力场.



$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(P_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i = \mathbf{F}(P_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i \mathbf{T}^0(P_i) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0)_{P_i} \Delta s_i.$$

第三步：作和. 力场沿  $\Gamma$  从  $A$  到  $B$  所作的功  $W$  近似地为

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(P_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0)_{P_i} \Delta s_i.$$

第四步：取极限. 设  $\lambda = \max\{\Delta s_i: 1 \leq i \leq n\}$ , 当  $\lambda$  越小, 每一个  $\Delta s_i$  也越小, 则

$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0)_{P_i} \Delta s_i$  越接近于  $W$ . 所以, 当  $\lambda \rightarrow 0$ , 每一个  $\Delta s_i \rightarrow 0$ , 有

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(P_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0)_{P_i} \Delta s_i.$$

此极限与曲线  $\Gamma$  的分法及点  $P_i$  的取法无关. 由于

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0 &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma \end{aligned}$$

是曲线  $\Gamma$  上关于  $x, y, z$  的连续函数, 记作  $G(x, y, z)$ . 即

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0)_{P_i} \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

按第一类曲线积分的意义, 有

$$W = \int_{\Gamma} G(x, y, z) ds = \int_{\Gamma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0) ds.$$

当质点的运动方向相反时, 此时  $\mathbf{T}^0$  的方向也相反, 故所作的功改变符号, 可见这种积分与曲线的方向有关. 此外, 这类曲线积分是特殊的第一类曲线积分, 一般的第一类曲线积分  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$  中的被积函数是数量函数, 而  $\int_{\Gamma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^0) ds$  中的被积函数是两个矢量函数的点乘积形式, 且  $\mathbf{T}^0$  是曲线上点  $P(x, y, z)$  处切线的单位矢量(与指定方向一致), 因此, 有别于一般形式的第一类曲线积分, 我们称它为第二类曲线积分.

## 二、第二类曲线积分的定义

**定义 10.1** 设  $\Gamma$  是以  $A, B$  为端点的光滑曲线, 并指定从  $A$  到  $B$  的曲线方向, 在  $\Gamma$  上每一点  $M$  处作曲线的单位切矢量.

$$\mathbf{T}^0(M) = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  分别是  $\mathbf{T}^0$  与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴正向的夹角), 其方向与指定的曲线方向一致, 又设

$$\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

其中  $P, Q, R$  是定义在曲线  $\Gamma$  上的有界函数, 则函数

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

在曲线  $\Gamma$  上的第一类曲线积分

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 ds = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

称为函数  $A(P) = A(x, y, z)$  沿曲线  $\Gamma$  从  $A$  到  $B$  的第二类曲线积分.

由于这一类曲线积分的被积函数是一个矢量与单位切矢量的数量积  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0$ , 当积分路径的方向改变为相反方向时, 即沿  $\Gamma$  从  $A$  到  $B$  改为从  $B$  到  $A$  时, 单位切矢量  $\mathbf{T}^0$  的方向与原来切矢量的方向相反, 因而第二类曲线积分的数值正好相差一个符号, 即有

$$\text{性质 1} \quad \int_{I_{AB}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds = - \int_{I_{BA}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds. \text{ 或者我们把 } \Gamma_{AB} \text{ 看成正方向, 记}$$

成  $\Gamma^+$ , 则  $\Gamma_{BA} = \Gamma^-$ , 有

$$\int_{\Gamma^+} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds = - \int_{\Gamma^-} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds.$$

注意: 左、右两端的单位切矢量正好相差一个符号.

性质2 若有向曲线  $\Gamma$  是由有向曲线  $\Gamma_1, \Gamma_2$  首尾衔接而成, 则

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds = \int_{\Gamma_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds.$$

记  $ds = \mathbf{T}^0 ds$ , 称为曲线的有向弧元素 (简称有向弧元), 它是一个矢量, 这个矢量在三个坐标轴上的投影分别为  $\Delta x = dx, \Delta y = dy, \Delta z = dz$ . 即

$$\Delta x = dx = \cos \alpha ds \left( 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } dx > 0; \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \right.$$

$$\left. dx = 0; \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \text{ 时, } dx < 0 \right),$$

$$\Delta y = dy = \cos \beta ds \left( 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } dy > 0; \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \right.$$

$$\left. dy = 0; \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi \text{ 时, } dy < 0 \right),$$

$$\Delta z = dz = \cos \gamma ds \left( 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } dz > 0; \gamma = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \right.$$

$$\left. dz = 0; \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi \text{ 时, } dz < 0 \right).$$

$$ds = \mathbf{T}^0 ds = ds \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$$

$$= \{ \cos \alpha ds, \cos \beta ds, \cos \gamma ds \} = \{ dx, dy, dz \},$$

于是

$$\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 ds = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T}^0 ds) = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot ds$$

$$= \int_{\Gamma_{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \int_{\Gamma_{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

所以第二类曲线积分可以四种形式出现, 即

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 ds &= \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \\ &= \int_{\Gamma_{AB}} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned}$$

这是第二类曲线积分的特征, 并注意  $\Gamma_{AB}$  是有方向的. 而最后一个积分显然可以分解成如下三个积分之和

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y, z) dx &= \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y, z) \cos \alpha ds; \\ \int_{\Gamma_{AB}} Q(x, y, z) dy &= \int_{\Gamma_{AB}} Q(x, y, z) \cos \beta ds; \\ \int_{\Gamma_{AB}} R(x, y, z) dz &= \int_{\Gamma_{AB}} R(x, y, z) \cos \gamma ds. \end{aligned}$$

它们分别称为函数  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  沿曲线  $\Gamma$  从  $A$  到  $B$  关于弧长有向投影  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  的第二类曲线积分.

### 三、第二类曲线积分的计算

**定理 10.1** 设光滑曲线  $\Gamma_{AB}$  的方程为:  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$  点  $A$  对应的参数为  $t_A$ , 点

$B$  对应的参数为  $t_B$  ( $t_A, t_B$  谁大谁小不受限制), 且函数  $\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  的分量  $P, Q, R$  在  $\Gamma$  上连续, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 ds &= \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{\Gamma_{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \int_{\Gamma_{AB}} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + \int_{t_A}^{t_B} Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt + \\ &\quad \int_{t_A}^{t_B} R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ &\quad R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt \end{aligned}$$

\* 证 我们只证明

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

其他两个同理可证, 从而可得结论成立.

(1) 当  $t_A < t_B$  时, 在  $t_A$  与  $t_B$  之间插入  $n-1$  个分点:

$$t_A = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_B,$$

有  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$ , 设  $\lambda = \max \{ |\Delta t_i| : 1 \leq i \leq n \}$ ,  $(x_i, y_i, z_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] [x(t_i) - x(t_{i-1})] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] x'(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) \quad (t_{i-1} < \xi_i < t_i) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] x'(t_i) \Delta t_i, \text{ 其中 } \Delta t_i > 0. \end{aligned}$$

按一元函数定积分的定义, 有

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

(2) 当  $t_A > t_B$  时, 在  $t_A$  与  $t_B$  之间插入  $n-1$  个分点:

$$t_A = t_0 > t_1 > t_2 > \cdots > t_{i-1} > t_i > \cdots > t_{n-1} > t_n = t_B,$$

有  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < 0$ , 设  $\lambda = \max \{ |\Delta t_i| : 1 \leq i \leq n \}$ , 与(1)的证法类似, 有

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] x'(t_i) \Delta t_i, \text{ 这里 } \Delta t_i < 0,$$

从而

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] x'(t_i) |\Delta t_i|$$

按一元函数定积分的定义, 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] x'(t_i) |\Delta t_i| = \int_{t_B}^{t_A} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt,$$

于是

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = - \int_{t_B}^{t_A} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

因此, 不论  $t_A, t_B$  谁大谁小, 都有

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt. \quad \square$$

从证明过程, 我们可以再一次清楚地看到:

$$\int_{I_{AB}} P(x, y, z) dx = - \int_{I_{BA}} P(x, y, z) dx,$$

即

$$\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds = - \int_{\Gamma_{BA}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds.$$

此外, 必须注意, 公式中的  $t_A, t_B$  一定要与曲线的起点  $A$  终点  $B$  相对应. 即化成  $t$  函数的定积分时, 积分的下限必须是起点  $A$  对应的参数, 积分的上限必须是终点  $B$  对应的参数, 至于上、下限谁大谁小不受限制, 这一点, 与第一类曲线积分的下限必须小于上限的限制是不同的.

同样地, 在平面上有平面曲线  $\Gamma$  的第二类曲线积分.

**定义 10.2** 设  $\Gamma$  是平面上以  $A, B$  为端点的光滑曲线, 并指定从  $A$  到  $B$  的曲线方向. 在  $M(x, y)$  处作曲线的单位切矢量  $\mathbf{T}^0(M) = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j}$  ( $\alpha, \beta$  分别是  $\mathbf{T}^0$  与  $x$  轴、 $y$  轴正向的夹角), 其方向与指定的曲线方向一致. 设  $\mathbf{A}(M) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ , 其中  $P(x, y), Q(x, y)$  是在曲线  $\Gamma$  上的有界函数, 则函数  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 = P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta$  在曲线  $\Gamma$  上的第一类曲线积分

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0 ds &= \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_{AB}} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds \\ &= \int_{\Gamma_{AB}} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

称为函数  $\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(x, y)$  沿曲线  $\Gamma_{AB}$  从  $A$  到  $B$  的第二类曲线积分 (或把平面曲线上的第二类曲线积分看作是空间曲线上第二类曲线积分的特殊情形).

若平面曲线  $\Gamma_{AB}$  为光滑曲线:  $x = x(t), y = y(t)$ , 起点  $A$  对应参数  $t_A$ , 终点  $B$  对应参数  $t_B$ , 则

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

**例 1** 计算  $\int_c (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$ , 设  $x = t, y = t^2, z = t^3 (0 \leq t \leq 1)$ .

式中  $c$  的方向依参数增加的方向.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\ &= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

**例 2** 质点  $P$  沿以  $AB$  为直径的半圆周, 从点  $A(1, 2)$  运动至点  $B(3, 4)$  的过程中受到变力  $\mathbf{F}$  的作用 (图 10-2),  $\mathbf{F}$  的大小等于点  $P$  与原点  $O$  之间的距离, 其方向垂直于线段  $OP$ , 且与  $y$  轴正向的夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ , 求变力  $\mathbf{F}$  对质点所作的功.

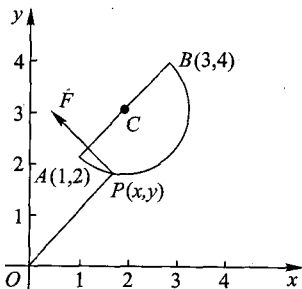


图 10-2

分析 关键是求出变力  $F$  与曲线  $\Gamma_{AB}$  的方程. 求  $F$  时, 只要求出  $|F|$  和  $F^0$ , 则  $F = |F|F^0$ .

解 由题意知,  $|F| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 且  $F^0$  与  $y$  轴正向的夹角  $\beta$  小于  $\frac{\pi}{2}$ , 即  $\cos \beta > 0$ . 由

$$(-y) \cdot x + x \cdot y = 0, \quad \text{即} \quad (-y, x) \perp \overrightarrow{OP}$$

有

$$\left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \perp \overrightarrow{OP}, \quad \text{且} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \beta > 0,$$

则

$$F^0 = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

于是

$$F = |F|F^0 = (-y, x).$$

设  $AB$  的中点为  $C$ , 则  $C(2, 3)$  为圆心, 半径

$$R = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2}}{2} = \sqrt{2}.$$

圆弧  $\Gamma_{AB}$  的方程为:  $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = 3 + \sqrt{2} \sin \theta. \end{cases}$  起点  $A$  对应的参数  $\theta_A = -\frac{3}{4}\pi$ , 简写为

$A \rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4}$ ; 终点  $B$  对应的参数  $\theta_B = \frac{\pi}{4}$ , 简写为  $B \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ , 于是变力  $F$  所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma_{AB}} -y dx + x dy = \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3 + \sqrt{2} \sin \theta) \sin \theta + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2} \cos \theta) \cos \theta] d\theta \\ &= 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

### 例 3 计算

$$(1) \int_L xy dx + (y - x) dy; \quad (2) \int_L y dx + x dy,$$

其中  $L$  分别为图 10-3 中路线: (i) 直线  $\overline{AB}$ ; (ii) 抛物线  $\widehat{ACB}$ :  $y = 2(x-1)^2 + 1$ ; (iii) 三角形  $\triangle ADBA$ .

解 (1) (i) 直线  $\overline{AB}$  的方程为  $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \end{cases}$  有

$A \rightarrow t = 0, B \rightarrow t = 1$ , 于是

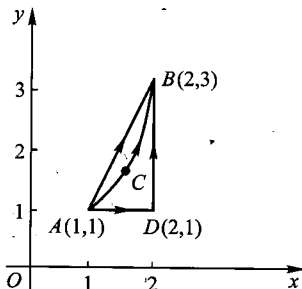


图 10-3

$$\begin{aligned}\int_{\overline{AB}} xydx + (y-x)dy &= \int_0^1 [(1+t)(1+2t) + 2t] dt = \int_0^1 (1+5t+2t^2) dt \\ &= \frac{25}{6}.\end{aligned}$$

(ii) 抛物线  $\widehat{ACB}$  的方程为  $y=2(x-1)^2+1$ , 有  $A \rightarrow x=1$ ,  $B \rightarrow x=2$ , 于是

$$\int_{\widehat{ACB}} xydx + (y-x)dy = \int_1^2 \{x[2(x-1)^2+1] + [2(x-1)^2 +$$

$$1-x]4(x-1)\} dx = \int_1^2 (10x^3 - 3x^2 + 35x - 12) dx = \frac{10}{3}.$$

(iii) 三角形  $\triangle ADBA = \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BA}$ , 其中,

$$\overline{AD}: x=x, y=1, A \rightarrow x=1, D \rightarrow x=2;$$

$$\overline{DB}: x=2, y=y, D \rightarrow y=1, B \rightarrow y=3,$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_{\triangle ADBA} xydx + (y-x)dy &= \int_{\overline{AD}} xydx + (y-x)dy + \int_{\overline{DB}} xydx + (y-x)dy + \int_{\overline{BA}} xydx + (y-x)dy \\ &= \int_1^2 xdx + \int_1^3 (y-2)dy - \int_{\overline{AB}} xydx + (y-x)dy = \frac{3}{2} + 0 - \frac{25}{6} = -\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

(2) (i)  $\int_{\overline{AB}} ydx + xdy = \int_0^1 [(1+2t) + 2(1+t)] dt = \int_0^1 (3+4t) dt = 5.$

(ii)  $\int_{\widehat{ACB}} ydx + xdy = \int_1^2 [2(x-1)^2+1 + x \cdot 4(x-1)] dx$

$$= \int_1^2 (6x^2 - 8x + 3) dx = (2x^3 - 4x^2 + 3x) \Big|_1^2 = 5.$$

(iii)  $\oint_{\triangle ADBA} ydx + xdy = \int_{\overline{AD}} ydx + xdy + \int_{\overline{DB}} ydx + xdy + \int_{\overline{BA}} ydx + xdy$

$$= \int_1^2 dx + \int_1^3 2dy - \int_{\overline{AB}} ydx + xdy = 1 + 4 - 5 = 0.$$

注意:  $\oint$  表示封闭曲线上的第二类曲线积分.

## §1.2 格林公式

设区域  $D$  的边界是由一条或几条光滑曲线所围成, 边界曲线  $\Gamma$  的正向规定

为: 当人沿边界行走时, 区域  $D$  总在他的左边(图 10-4), 若与上述的方向相反, 则称为负方向, 并记为  $-\Gamma$ .

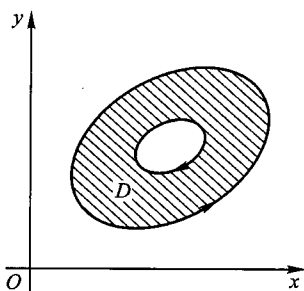


图 10-4

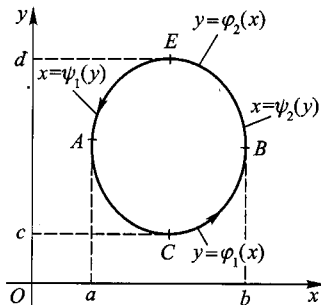


图 10-5

**定理 10.2** 若函数  $P$ 、 $Q$  在有界闭区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上连续且具有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy. \quad (10.1)$$

这里  $\Gamma$  为区域  $D$  的边界曲线, 并取正向. 公式(10.1)称为格林(Green)公式.

证 根据区域  $D$  的不同形状, 分三种情形来证.

(i) 若区域  $D$  既是  $x$ -型区域又是  $y$ -型区域(图 10-5), 这时区域  $D$  可表示为

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \quad \text{或} \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d,$$

这里  $y = \varphi_1(x)$  和  $y = \varphi_2(x)$  分别是曲线  $\widehat{ACB}$  和  $\widehat{BEA}$  的方程, 而  $x = \psi_1(y)$  和  $x = \psi_2(y)$  分别是曲线  $\widehat{EAC}$  和  $\widehat{CBE}$  的方程, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy \\ &= \int_{\widehat{CBE}} Q(x, y) dy - \int_{\widehat{CAE}} Q(x, y) dy = \int_{\widehat{CBE}} Q(x, y) dy + \int_{\widehat{EAC}} Q(x, y) dy \\ &= \oint_{\widehat{CBEAC}} Q(x, y) dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy \quad (\text{令 } \Gamma = \widehat{CBEAC}) - \\ &\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx + \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\ &= - \int_{\widehat{AEB}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{ACB}} P(x, y) dx = \int_{\widehat{BEA}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{ACB}} P(x, y) dx \end{aligned}$$



$$= \oint_{\widehat{BEACB}} P(x, y) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx \quad (\text{令 } \Gamma = \widehat{BEACB}),$$

因此,

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

(ii) 若区域  $D$  是由一条按段光滑闭曲线  $\Gamma$  围成, 则用几段光滑曲线将  $D$  分成有限个既是  $x$ -型区域又是  $y$ -型区域的区域. 然后逐块用(i)中的方法推得它的格林公式, 再相加就得(10.1)区域的共同边界, 因取向相反, 它们的积分值正好互相抵消. 如图 10-6 所示, 可将  $D$  分成三个既是  $x$ -型区域又是  $y$ -型区域  $D_1, D_2, D_3$ , 于是

$$\begin{aligned} & \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{\widehat{EFAE}} P dx + Q dy + \oint_{\widehat{CDEC}} P dx + Q dy + \oint_{\widehat{ABCEA}} P dx + Q dy \\ &= \oint_{\widehat{EFABCDE}} P dx + Q dy + \oint_{\widehat{CEA}} P dx + Q dy + \oint_{\widehat{AEC}} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

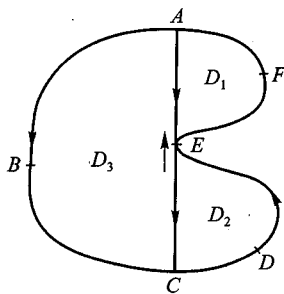


图 10-6

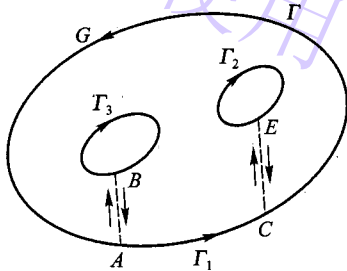


图 10-7

(iii) 若区域  $D$  由几条曲线所围成(图 10-7).  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ , 连接  $AB$ 、 $CE$ , 则  $D$  的边界曲线为  $AB, \Gamma_3, BA, AC, CE, \Gamma_2, EC, CGA$ . 由(ii)知

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\overline{AB} + \Gamma_3 + \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CE} + \Gamma_2 + \overline{EC} + \overline{CGA}} P dx + Q dy \\ &= \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy. \quad \square \end{aligned}$$

格林公式也可借助行列式来记忆.

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy. \quad (10.2)$$

例 4 求  $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$ , 其中  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  依反时针方向 (图 10-8).

解 由题意知,  $P = -x^2 y$ ,  $Q = xy^2$ ,  $C$  为区域边界正向. 由格林公式知.

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 r dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

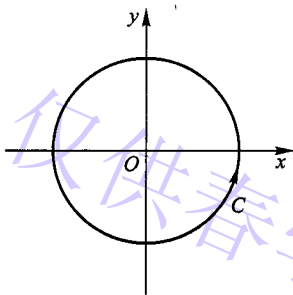


图 10-8

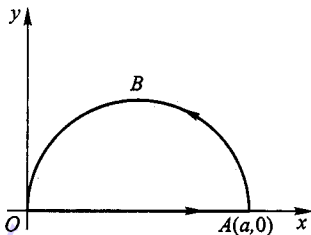


图 10-9

例 5 计算曲线积分

$$\int_{ABO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中  $\widehat{ABO}$  为由点  $A(a,0)$  到点  $O(0,0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$  (图 10-9).

解 在  $Ox$  轴上连接点  $O(0,0)$  与点  $A(a,0)$ , 这样, 便构成封闭的半圆形  $\widehat{ABOA}$ , 于是

$$\int_{ABO} = \oint_{ABOA} - \int_{OA},$$

由格林公式, 有

$$\begin{aligned} & \int_{ABOA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy \\ &= \iint_D [e^x \cos y - (e^x \cos y - m)] dx dy \\ &= \iint_D m dx dy = m \frac{1}{2} \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi m a^2}{8}, \end{aligned}$$

由于  $OA$  方程为  $y=0$ , 所以

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0,$$

于是

$$\int_{ABO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{\pi n a^2}{8}.$$

注意: 若加上一个很简单的直线(或曲线)可构成封闭曲线, 然后利用格林公式化成二重积分容易计算时, 便可施行这种方法, 即加一个简单直线(或曲线)再减一个简单直线(或曲线).

在格林公式中, 令  $P = -y$ ,  $Q = x$ , 可得到计算平面区域的面积  $S$  的公式. 若  $\Gamma$  是区域  $D$  边界曲线正向, 由于

$$\oint_{\Gamma} -y dx + x dy = \iint_D [1 - (-1)] dx dy = 2S$$

因此

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy.$$

例 6 求双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  所围区域的面积(图 10-10).

解 由于双纽线关于两个坐标轴对称, 因此只需计算第一象限内的面积再乘以 4 即得所求面积.

利用极坐标变换  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , 则双纽线方程为:

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \text{ 或 } r = a \sqrt{\cos 2\varphi},$$

$$x = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, y = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi},$$

$\Gamma = OA + ABO$ , 在  $OA$  上,  $-y dx + x dy = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{ABO} -y dx + x dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2. \end{aligned}$$

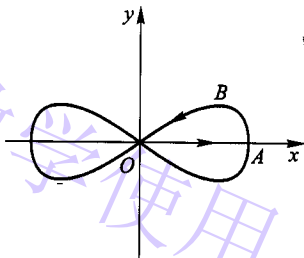


图 10-10

### § 1.3 平面曲线积分与路径无关性

回想本章 § 1.1 中计算第二类曲线积分例 3 中的两个例子, 在第 (1) 个例子中, 以  $A$  为起点  $B$  为终点的曲线积分, 若所沿的路径不同, 则其积分值也不同, 且封闭曲线  $\widehat{ADBA}$  上的积分也不为零; 在第 (2) 个例子中, 以  $A$  为

起点  $B$  为终点的曲线积分, 只与起点和终点有关而与路径无关, 且在封闭曲线  $\widehat{ADBA}$  上的积分为 0. 这里面是偶然的巧合, 还是具有一定的规律?

下面先介绍平面单连通区域.

若对于平面区域  $D$  内任一封闭曲线, 皆可不经  $D$  以外的点, 而连续收缩于  $D$  中的一点, 通俗地说, 若  $D$  内任一封闭曲线所包围的区域均包含于  $D$  内, 则这个“没有洞”的区域称为平面单连通区域, 否则称为平面复连通区域 (即有洞的区域).

我们仔细研究例 3 中的 (1), (2), 并利用格林公式. 在 (1) 中,

$$P = xy, Q = y - x, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \frac{\partial P}{\partial y} = x, \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y},$$

而在 (2) 中,

$$P = y, Q = x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

有

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

而,

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{ACB}} ydx + xdy - \int_{\widehat{ADB}} ydx + xdy \\ &= \int_{\widehat{ACB+BDA}} ydx + xdy = \oint_{\widehat{ACBDA}} ydx + xdy \\ &= \iint_D (1 - 1) dx dy = 0. \end{aligned}$$

因此, 第二类曲线积分在满足一定的条件下, 即满足  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 则该第二类曲线积分与积分路径无关, 且在封闭曲线上的积分为 0.

**定理 10.3** 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是平面单连通区域, 若函数  $P, Q$  在区域  $D$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿  $D$  中任一按段光滑的闭曲线  $L$ , 有  $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ ;

(2) 对  $D$  中任一按段光滑曲线  $L$ , 曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  与路径无关, 只与  $L$  的起点和终点有关;

(3)  $Pdx + Qdy$  是  $D$  内某一函数  $u$  的全微分, 即在  $D$  内存在一个二元函数  $u(x, y)$ , 使  $du = Pdx + Qdy$ , 即  $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$ ;

(4) 在  $D$  内每一点处, 有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

证 (1)  $\Rightarrow$  (2). 设  $\widehat{ARB}$  与  $\widehat{ASB}$  为联结点  $A, B$  的任意两条光滑曲线 (图 10-11), 由 (1) 推得

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy - \int_{\widehat{ASB}} Pdx + Qdy &= \int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{BSA}} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{\widehat{ARBSA}} Pdx + Qdy = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{ASB}} Pdx + Qdy.$$

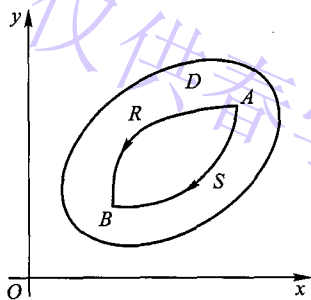


图 10-11

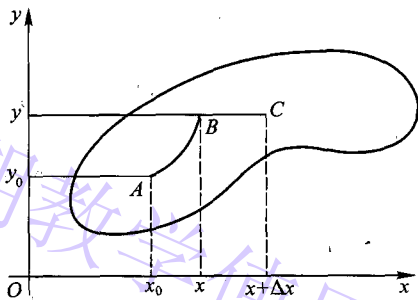


图 10-12

(2)  $\Rightarrow$  (3). 设  $A(x_0, y_0)$  为  $D$  内某定点,  $B(x, y)$  为  $D$  内任意一点. 由 (2), 曲线积分  $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$  与路径的选择无关, 故当  $B(x, y)$  在  $D$  内变动时, 其积分值是点  $B(x, y)$  的函数, 即有

$$u(x, y) = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy.$$

取  $\Delta x$  充分小, 使  $C(x + \Delta x, y) \in D$ , 则函数  $u$  对于  $x$  的偏增量 (图 10-12):

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{\widehat{AC}} Pdx + Qdy - \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy.$$

因为在  $D$  内, 曲线积分与路径无关, 所以

$$\int_{\widehat{AC}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{BC}} Pdx + Qdy.$$

由于直线段  $\overline{BC}$  平行于  $x$  轴, 所以  $\overline{BC}: x = t, t \in [x, x + \Delta x], y = y$  (常数), 因而  $dy = 0$ , 且

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{\overline{BC}} P dx + Q dy = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

对上式右端应用积分中值定理, 得

$$\Delta u = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, 0 < \theta < 1.$$

再依  $P$  在  $D$  上的连续性, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y).$$

同理可证  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ . 于是有

$$du = P dx + Q dy.$$

(3)  $\Rightarrow$  (4). 设存在函数  $u$ , 使得

$$du = u'_x(x, y) dx + u'_y(x, y) dy = P dx + Q dy,$$

故

$$P(x, y) = u'_x(x, y), \quad Q(x, y) = u'_y(x, y)$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

因为  $P, Q$  在区域  $D$  内具有一阶连续偏导数, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

从而在  $D$  内每一点都有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1). 设  $L$  为  $D$  中任一按段光滑闭曲线, 记  $L$  所围的区域为  $\sigma$ . 由于  $D$  内恒有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 应用格林公式就得到

$$\oint_L P dx + Q dy = \pm \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad \square$$

这个定理也告诉我们:

(1) 若计算在封闭分段光滑曲线  $\Gamma$  上的第二类曲线积分,  $P, Q$  在以  $\Gamma$  为边界曲线包围的连通区域  $D$  上具有连续的偏导数, 且  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则该积分为 0;

(2) 若  $\int_L P dx + Q dy$  是在某一按段光滑曲  $L$  上的第二类曲线积分, 且  $L$  的

路径比较复杂. 如果  $P, Q$  在区域  $D$  上具有连续的偏导数,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 且

$L \subset D$ . 则可化为与  $L$  起点、终点相同的简单曲线上的第二类曲线积分. 比如可用折线段或直线段, 等等;

(3) 我们知道, 一元函数  $f(x)$  只要在区间上连续, 必有原函数. 但在二元函数中,  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  不一定是某一个函数  $u(x, y)$  的全微分, 换句话说  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  中的  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  即便是连续, 也不一定具有原函数. 由定理的证明过程知, 如果  $P, Q$  在某一单连通区域  $D$  上具有连续的偏导数, 且  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则  $Pdx + Qdy$  必有原函数;

(4) 反过来, 一个第二类曲线积分中的  $P, Q$  若具有连续的偏导数, 且满足定理中(1)或(2)或(3), 则必有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

例7 若第二类曲线积分  $\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  与路径无关, 我们可用一元函数的定积分来表示.

为此, 取  $C(x_1, y_0)$ , 可沿折线段  $\widehat{ACB}$  (图 10-13) 积分, 由于

$$AC: \begin{cases} x = x, \\ y = y_0, \end{cases} \quad A \rightarrow x = x_0, C \rightarrow x = x_1,$$

有

$$\int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx.$$

且  $CB: \begin{cases} x = x_1, \\ y = y, \end{cases} \quad C \rightarrow y = y_0, B \rightarrow y = y_1,$  有

$$\int_{BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy.$$

于是

$$\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy$$

(10.3)

这个结果, 我们可作为一个计算公式记住.

由定理证明过程可知, 若  $P, Q$  满足定理的条件, 则二元函数

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

满足  $du(x, y) = Pdx + Qdy$ , 我们称  $u(x, y)$  为  $Pdx + Qdy$  的一个原函数. 按公式

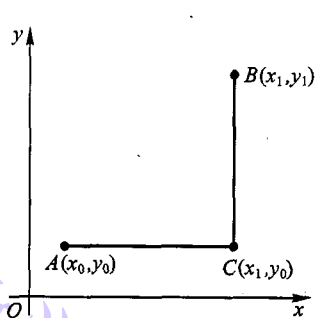


图 10-13

(10.3), 把  $x_1$  换成  $x$ ,  $y_1$  换成  $y$ , 有

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C$$

是  $Pdx + Qdy$  的全体原函数.

若  $(0, 0) \in D$ , 我们又把  $Pdx + Qdy$  全体原函数写成

$$\int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy + C,$$

用这个公式计算则更方便.

我们还可以证明: 若  $du(x, y) = Pdx + Qdy$ , 其中  $P, Q$  具有连续的偏导数, 则

$$\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} Pdx + Qdy = u(x, y) \Big|_A^B = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

这个公式称为曲线积分的牛顿-莱布尼茨公式.

设光滑曲线  $\Gamma$  的方程  $x = x(t), y = y(t), A \rightarrow t_0, B \rightarrow t_1$ , 由于曲线积分与路径无关, 所以

$$\begin{aligned} & \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [u(x(t), y(t))] ' dt = u(x(t), y(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = u(B) - u(A). \quad \square \end{aligned}$$

**例 8** 计算  $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ .

**解** 由题意知  $P = x^4 + 4xy^3, Q = 6x^2y^2 - 5y^4$ , 显然  $P, Q$  在全平面上具有连续的偏导数且  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$ , 因此曲线积分与路径无关. 所以

$$\text{原式} = \int_0^1 x^4 dx + \int_0^2 (6y^2 - 5y^4) dy = \frac{1}{5} + (2y^3 - y^5) \Big|_0^2 = \frac{1}{5} - 16 = -\frac{79}{5}.$$

**例 9** 计算  $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 积分沿不通过坐标原点的路径.

**解** 显然, 当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,  $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d \sqrt{x^2 + y^2}$  是全微分, 于是



$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} d \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

**例 10** 设函数  $Q(x, y)$  在  $Oxy$  平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分与路径无关, 并且对任意  $t$ , 总有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy,$$

求  $Q(x, y)$ .

**解** 由曲线积分与路径无关的条件知  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ , 于是  $Q(x, y) = x^2 + C(y)$ , 其中  $C(y)$  为待定函数.

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_0^1 (t^2 + C(y)) dy = t^2 + \int_0^1 C(y) dy,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_0^t (1 + C(y)) dy = t + \int_0^t C(y) dy,$$

由题意可知

$$t^2 + \int_0^1 C(y) dy = t + \int_0^t C(y) dy.$$

两边对  $t$  求导, 得

$$2t = 1 + C(t), \quad \text{或} \quad C(t) = 2t - 1.$$

所以  $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$ .

**例 11** 利用曲线积分, 求  $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$  的原函数.

**解** 由题意知

$$P = x^2 + 2xy - y^2, Q = x^2 - 2xy - y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

取  $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$ , 有

$$\begin{aligned} z &= \int_0^x (x^2 + 0 - 0) dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C. \end{aligned}$$

设在复连通区域  $D$  内,  $P, Q$  具有连续的偏导数且  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 我们来研究曲线积分

$$\oint_l P dx + Q dy \quad (10.4)$$

的性质.

(1) 若闭曲线  $l$  内部没有洞 (图 10-14), 这时所包围的区域为  $\sigma$ . 利用格林公式, 可知积分 (10.4) 为 0.

(2) 若  $l$  内部有洞(图 10-15), 这时  $l$  所包围的区域  $\sigma$  不全在  $D$  内. 因此,

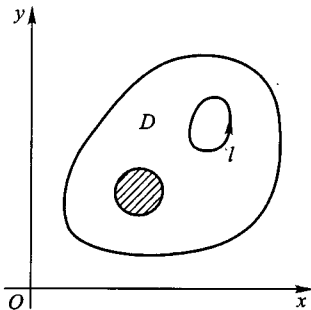


图 10-14

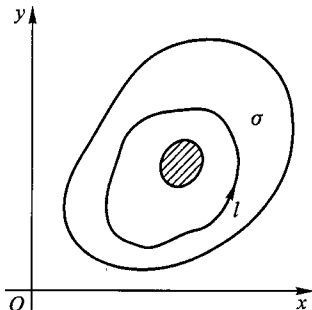


图 10-15

对  $\sigma$  及  $l$  不能使用格林公式, 从而不能断言积分(10.4)是否为 0, 但我们有下面的定理.

**定理 10.4** 设在复连通区域  $D$  内,  $P, Q$  具有连续的偏导数且  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则环绕同一些洞(图 10-16)的任何两条闭曲线(取同方向)上的曲线积分都相等.

**证** 如同 10-16 所示, 设  $l_1, l_2$  是环绕同一些洞(图中画出了两个洞)的两条闭曲线. 用辅助线段  $AB$  将它们连接起来, 得到闭曲线  $\Gamma = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^-$ , 在闭曲线  $\Gamma$  所包围的区域  $\sigma$  上, 格林公式仍然成立, 即

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz = 0,$$

得到

$$\oint_{\Gamma_1^+} + \oint_{\Gamma_2^-} = 0, \text{ 有 } \oint_{\Gamma_1^+} - \oint_{\Gamma_2^+} = 0$$

即

$$\oint_{\Gamma_1^+} = \oint_{\Gamma_2^+}$$

这就是说, 环绕同一些洞的闭曲线(取正向)的积分是一个确定的常数(叫做环绕这个洞的循环常数); 若取负向, 积分是循环常数的相反数. 利用这一结论, 我们可以简化第二类曲线积分的计算.  $\square$

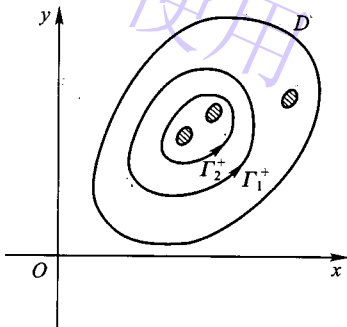


图 10-16

**例 12** 计算  $I = \oint_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2}$ , 其中  $C$  为单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  的正向.

**解** 由于  $C$  所包围的区域中有洞  $(0,0)$ , 因此不能用格林公式, 如果直接

用曲线  $C$  的参数方程  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ , 则积分比较烦琐. 利用上面定理, 环绕同一些洞的闭曲线(同方向)的积分相同进行计算就比较方便.

取椭圆  $C_1$ :  $x = \cos \theta$ ,  $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ , 取正向, 取  $\theta = 0$  为起点,  $\theta = 2\pi$  为终点. 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + 4y^2 - 8xy}{(x^2 + 4y^2)^2},$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{(x^2+4y^2)} \\ &= \int_{C_1} \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2+4y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ (\cos \theta + 2\sin \theta) \frac{1}{2} \cos \theta + \left( \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) (-\sin \theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi. \end{aligned}$$

例 13 计算  $I = \oint_C \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$ , 其中  $C$  为

(1) 圆周  $x^2 + y^2 = 2y$  的正向(图 10-17);

(2) 曲线  $|x| + |y| = 2$  的正向(图 10-18).

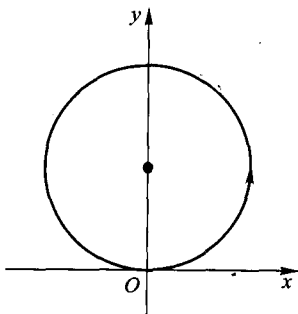


图 10-17

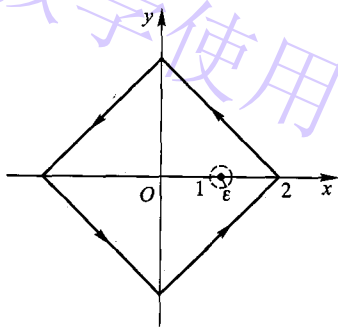


图 10-18

解 由题意知,

$$P = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \quad Q = -\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

(1) 在圆周  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  上及该圆内部, 函数  $P$ ,  $Q$  具有连续的偏导数, 由格林公式有

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0.$$

(2) 由于曲线  $C$  内部有洞  $(1, 0)$ , 所以以点  $(1, 0)$  为中心, 在  $C$  的内部作用圆周  $l: (x-1)^2 + y^2 = \varepsilon^2$ , 沿正向,  $\varepsilon$  充分小, 使  $l$  在  $C$  的内部. 由上述定理知

$$I = \oint_l \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2},$$

设  $l$  的参数方程是  $x = 1 + \varepsilon \cos \theta$ ,  $y = \varepsilon \sin \theta$ , 起点  $\theta = 0$ , 终点  $\theta = 2\pi$ , 则

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \sin \theta (-\varepsilon \sin \theta) - \varepsilon \cos \theta \cdot \varepsilon \cos \theta}{\varepsilon^2} d\theta = \int_0^{2\pi} -d\theta = -2\pi.$$

### 习题 10-1

1. 计算下列第二类曲线积分:

(1)  $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , 其中  $C$  为曲线  $y = 1 - |1 - x|$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 沿参数增加的方向;

(2)  $\oint_C (x+y) dx + (x-y) dy$ , 其中  $C$  为依反时针方向通过  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

(3)  $\oint_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$ , 其中  $C$  为依反时针方向通过圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ ;

(4)  $\oint_\Gamma \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , 其中  $\Gamma = ABCDA$  为以  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(-1, 0)$ ,  $D(0, -1)$  为顶点的正方形的围线;

(5)  $\oint_{\widehat{OABCO}} \arctan \frac{y}{x} dy - dx$ , 其中  $\widehat{OAB}$  为抛物线段  $y = x^2$ ,  $\widehat{BCO}$  为直线段  $y = x$ , 其中  $B$  点坐标为  $(1, 1)$ .

2. 计算下列第二类曲线积分:

(1)  $\int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$ , 式中  $C$  为依参数增加的方向进行的曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  ( $0 \leq t \leq 1$ );

(2)  $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , 式中  $C$  为维维安尼曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = ax$  ( $z \geq 0$ ,  $a > 0$ ) 若从  $Ox$  轴的正向看去, 此曲线是沿逆时针方向进行的;

(3)  $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ , 式中  $C$  为球面的一部分  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$  围线, 当沿着它的正方向进行时, 该曲面的外面保持在左方.

3. 弹性力的方向向着坐标原点, 力的大小与质点距坐标原点的距离成正比例, 设此点依反时针方向描绘出椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的正四分之一, 求弹性力所做的功.

4. 利用格林公式计算下列第二类曲线积:

(1)  $\oint_C (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$ , 其中  $C$  依正方向经过以  $A(1,1)$ ,  $B(3,2)$ ,  $C(2,5)$  为顶点的三角形  $\triangle ABC$  的围线;

(2)  $\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy$ , 式中  $C$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  沿正向;

(3)  $\oint_C e^x [(1-\cos y) dx - (\dot{y} - \sin y) dy]$ , 式中  $C$  为域  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \sin x$  的正方向的围线;

(4)  $\int_{\widehat{ABO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ , 其中  $\widehat{ABO}$  为由点  $A(a,0)$  至点  $O(0,0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$ ;

5. 计算  $I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , 式中  $C$  为依正向进行而不过坐标原点的简单封闭曲线.

6. 设位于点  $(0,1)$  的质点  $A$  对质点  $M$  的引力大小为  $\frac{k}{r^2}$  ( $k > 0$  为常数,  $r$  为质点  $A$  与  $M$  之间的距离), 质点  $M$  沿曲线  $y = \sqrt{2x-x^2}$  自  $B(2,0)$  运动到  $O(0,0)$ , 求在此过程中质点  $A$  对质点  $M$  的引力所作的功.

7. 利用第二类曲线积分计算下列曲线所界的面积:

(1) 星形线  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = b \sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );

(2) 双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ;

8. 计算下列第二类曲线积分:

(1)  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy$ ; (2)  $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ ;

(3)  $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$  沿着不与直线  $y = x$  相交的路径.

9. 求原函数  $u$ :

(1)  $du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ ; (2)  $du = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ .

## §2 第二类曲面积分

### §2.1 第二类曲面积分的概念

#### 一、定侧曲面

在第二类曲线积分中, 要规定曲线的方向. 在下面即将讨论的第二类曲面

积分中,也要规定曲面的法线方向. 考虑一个光滑的曲面  $S$ , 在  $S$  上取定一点  $M_0$ , 并在这点处引一法线, 这法线有两种可能的方向, 我们认定其中的一个方向, 在曲面上画一个始自点  $M_0$  而又回到  $M_0$  的闭路(封闭曲线), 并假定此闭路不跨越曲面的边缘. 令点  $M$  绕着这闭路环行, 并在其经过的各个位置上给予法线一个方向, 这些方向就是由起点  $M_0$  处所选定的那个法线方向连续地转变来的. 这时, 下面两种情形必有一种发生: 令点  $M$  环行一周再回到  $M_0$  时, 法线的方向或与出发时所定者相同, 或与出发时所定者相反. 如果对于某一点  $M_0$  及通过  $M_0$  的某一闭路, 后一种情形发生, 则称这种曲面为单侧的; 另一种情形的曲面称为双侧的. 即假定不论  $M_0$  是怎样的点, 不论通过  $M_0$  而不跨越曲面边缘的曲线是怎样的闭路, 沿此闭路环行一周回到起点  $M_0$  时, 法线的方向恒与起初所定者相同, 这种曲面称为双侧的.

我们指出, 单侧曲面是存在的. 所谓的默比乌斯带就是这类曲面的一个典型例子. 如果把一长方形纸条  $ABCD$  先扭一次, 再粘起来, 使  $A$  点与  $C$  点相合,  $B$  点  $D$  点相合. 这样就可得到它的一个模型. 假若用颜色来涂它, 那就可以不跨它的边缘而用这种颜色涂遍该带的全部(图 10-19), 本书不讨论单侧曲面.

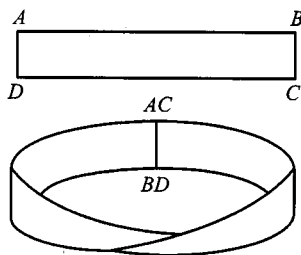


图 10-19 默比乌斯带

假定曲面  $S$  是双侧的, 在  $S$  上任意取定一点  $M_0$ , 并给在这点处的法线一个确定的方向, 对于  $S$  上任意其他一点  $M_1$ , 我们任意用一条在  $S$  上但不跨越边缘的曲线  $\Gamma$ , 把  $M_0$  与  $M_1$  连接起来, 令点  $M$  沿  $\Gamma$  从  $M_0$  移动到  $M_1$ , 并令法线的方向也连续地变化, 则点  $M$  到达  $M_1$  的位置时, 就带着一个完全确定的法线方向. 由此可见, 双侧面上一个点的法线方向, 可以完全决定其他各点的法线方向. 这种指定法线方向的(双侧)曲面, 称为定侧曲面.

## 二、第二类曲面积分的定义

下面来研究一个实际问题, 以引出第二类曲面积分.

设已知一流速场, 速度为

$$\mathbf{v} = v_x(x, y, z)\mathbf{i} + v_y(x, y, z)\mathbf{j} + v_z(x, y, z)\mathbf{k},$$

流体的密度为  $\mu(x, y, z)$ , 求流体通过曲面  $S$  指定侧的流量  $Q$  (即单位时间内沿定侧法线方向通过曲面  $S$  的流体质量, 以后凡讲到“通过曲面  $S$  指定侧”均是这个意思), 这里假定  $S$  是光滑曲面,  $v_x, v_y, v_z, \mu$  在场中连续.

将  $S$  任意分成  $n$  部分  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n, \Delta S_i$  的面积仍记为  $\Delta S_i$ . 在  $\Delta S_i$  上任取一点  $P_i$ , 易知流体通过指定侧的流量近似为(图 10-20)

$$[\mu |v| \cos(v, n^0)]_{P_i} \Delta S_i = [\mu v \cdot n^0]_{P_i} \Delta S_i,$$

其中  $n^0$  是定侧曲面  $S$  的单位法线矢量, 而  $P_i \in \Delta S_i$ , 故通过  $S$  指定的侧的流量近似地为

$$\sum_{i=1}^n [\mu v \cdot n^0]_{P_i} \Delta S_i,$$

而流量

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\mu v \cdot n^0]_{P_i} \Delta S_i,$$

由第一类曲面积分的定义, 上述极限可

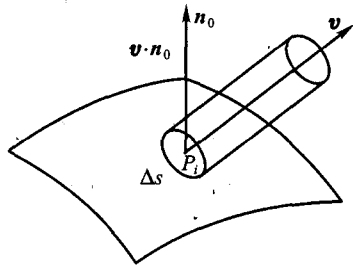


图 10-20

表成  $Q = \iint_S \mu v \cdot n^0 dS$ . 设  $n^0 = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$ , 于是

$$Q = \iint_S \mu v \cdot n^0 dS = \iint_S \mu [v_x(x, y, z) \cos \alpha + v_y(x, y, z) \cos \beta + v_z(x, y, z) \cos \gamma] dS.$$

注意: 当  $n^0$  改为相反的方向时, 流量  $Q$  要改变符号. 一般地, 有如下的定义

**定义 10.3** 设  $S$  是光滑有界的定侧曲面, 记  $S$  上每点  $M(x, y, z)$  处沿曲面定侧的单位法线矢量为

$$n^0(M) = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k.$$

又设

$$A(M) = A(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k, \quad M(x, y, z) \in S.$$

其中  $P, Q, R$  是定义在  $S$  上的有界函数, 则函数

$$A \cdot n^0 = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

在  $S$  上的第一类曲面积分

$$\iint_S A \cdot n^0 dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (10.5)$$

称为函数  $A(P) = A(x, y, z)$  沿定侧曲面  $S$  的第二类曲面积分.

第二类曲面积分与曲面的法线方向有关, 若把定侧曲面的一侧记为  $S^+$ , 另一侧记为  $S^-$ , 则积分的数值正好改变一个符号, 即

$$\iint_{S^+} A \cdot n^0 dS = - \iint_{S^-} A \cdot n^0 dS.$$

其中被积式中的  $n^0$  分别是曲面  $S$  对应一侧的单位法线矢量.

若曲面  $S$  由两个无公共内点的曲面块  $S_1, S_2$  所组成, 且  $S_1, S_2$  的侧与  $S$  的侧一致, 则

$$\iint_S A \cdot n^0 dS = \iint_{S_1} A \cdot n^0 dS + \iint_{S_2} A \cdot n^0 dS.$$

与第二类曲线积分类似,  $\mathbf{n}^0 dS$  称为有向面积元素, 常将它记成  $dS$ . 它的三个投影分别记为

$$\cos \alpha dS = dydz, \cos \beta dS = dzdx, \cos \gamma dS = dxdy,$$

于是第二类曲面积分 (10.5) 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}^0 dS &= \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \quad (10.6) \end{aligned}$$

请大家注意, 采用这种记法时, 这里的  $dydz$ ,  $dzdx$ ,  $dxdy$  可能为正也可能为负, 甚至为零, 而且当  $\mathbf{n}^0$  改变方向时, 它们都要改变符号, 与二重积分的面积元素  $dxdy$  总取正值是不相同的.

## § 2.2 第二类曲面积分的计算

由于第二类曲面积分

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + \iint_S Q(x, y, z) dzdx + \iint_S R(x, y, z) dxdy \end{aligned}$$

是三项之和, 因此我们分别研究每一项的计算方法. 先来计算

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy.$$

首先我们可证明当  $0 \leq \gamma \leq \pi$  时

$$\cos \gamma = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) |\cos \gamma|, \text{ 其中: } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

事实上: (1) 当  $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$  时

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) |\cos \gamma| = 1 \cdot \cos \gamma = \cos \gamma;$$

(2) 当  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  时,

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \left|\cos \frac{\pi}{2}\right| = 0 \cdot 0 = 0 = \cos \frac{\pi}{2};$$

(3) 当  $\frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi$  时,



$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) |\cos \gamma| = -1 \cdot (-\cos \gamma) = \cos \gamma.$$

$$\text{故 } \cos \gamma = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) |\cos \gamma|.$$

由于  $|\cos \gamma| dS = d\sigma$  ( $d\sigma$  是  $dS$  在  $Oxy$  平面上投影区域面积)

$$\begin{aligned} \text{于是 } dxdy &= \cos \gamma dS = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) |\cos \gamma| dS \\ &= \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) d\sigma \end{aligned}$$

设光滑曲面  $S$  与平行于  $Oz$  轴的直线至交于一点, 即  $S: z = z(x, y)$ , 它在  $Oxy$  平面上的投影区域为  $\sigma_{xy}$  (有界闭区域) 且曲面上任一点法矢量与  $Oz$  轴正向的夹角  $\gamma$  或者都为锐角或者都为钝角或者都为  $\frac{\pi}{2}$ , 从而

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS$$

(这时为第一类曲面积分, 然后化成二重积分)

$$= \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) d\sigma$$

(此时在前面的规定下,  $\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$  为常数)

$$= \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y)) d\sigma$$

即  $\gamma$  均为锐角时,

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y)) d\sigma$$

$\gamma$  均为钝角时,

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = - \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y)) d\sigma$$

$\gamma$  均为  $\frac{\pi}{2}$  时,

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = 0 \cdot \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y)) d\sigma = 0$$

如果曲面做不到上述的要求, 可以把曲面分成几块, 使得每一块都符合上述的要求, 然后按照第二类曲面积分的可加上, 化成每一个小曲面上第二类曲面积分之和, 对每一个小曲面上的第二类曲面积分再按上面的步骤去计算.

**注意:** 曲面上个别曲线上每一点的法矢量与  $Oz$  轴的夹角是什么角不影响上面的计算.

同理对于计算

$$\iint_S P(x, y, z) dydz$$

如果光滑曲面  $S: x = x(y, z), (y, z) \in \sigma_{yz}$ .

( $\sigma_{yz}$  是曲面  $S$  在  $O_{yz}$  平面上的投影区域图有界闭区域), 曲面上每一点处的法矢量与  $Ox$  轴正向的夹角  $\alpha$  或者都为锐角或者都为钝角或者都为  $\frac{\pi}{2}$ , 则

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \iint_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) d\sigma$$

当  $\alpha$  场是锐角时,

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = \iint_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) d\sigma$$

当  $\alpha$  场是钝角时,

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = - \iint_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) d\sigma;$$

当  $\alpha$  场是  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\iint_S P(x, y, z) dydz = 0$ .

对于计算  $\iint_S (x, y, z) dydz$ ,

如果光滑曲面  $S: y = y(x, z), (x, z) \in \sigma_{xz}$

$\beta$  或者都为锐角或者都为钝角或者都为  $\frac{\pi}{2}$ , 则

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z) d\sigma.$$

当  $\beta$  场是锐角时,

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z) d\sigma;$$

当  $\beta$  场是钝角时,

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = - \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z) d\sigma;$$

当  $\beta$  场是  $\frac{\pi}{2}$  时,

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = 0.$$

**例 1** 计算积分  $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$ , 其中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的外侧.

解 根据轮换对称, 只要计算  $\iint_S z dx dy$ . 上半球面  $S_1: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , 应取上侧 ( $\gamma$  为锐角); 下半球面  $S_2: z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , 应取下侧 ( $\gamma$  为钝角), 于是

$$\begin{aligned}\iint_S z dx dy &= \iint_{S_1} z dx dy + \iint_{S_2} z dx dy \\&= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma - \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma \\&= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi R^3.\end{aligned}$$

于是

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 4\pi R^3.$$

例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

的上侧,  $a$  为大于零的常数 (图 10-21).

解 由  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 有  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 所以

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\&= \iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{a} \\&= \iint_{\Sigma} x dy dz + \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dx dy = I_1 + I_2\end{aligned}$$

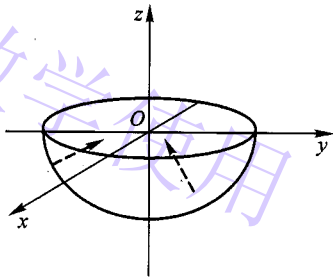


图 10-21

对于  $I_1$ ,  $\Sigma$  分成  $\Sigma_{\text{前}}: x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$  ( $\alpha$  为钝角);  $\Sigma_{\text{后}}: x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$  ( $\alpha$  为锐角), 有

$$\begin{aligned}I_1 &= \iint_{\Sigma_{\text{前}}} x dy dz + \iint_{\Sigma_{\text{后}}} x dy dz \\&= - \iint_{\sigma_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} d\sigma + \iint_{\sigma_{yz}} -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} d\sigma \\&= -2 \iint_{\substack{y^2+z^2 \leq a^2 \\ z \leq 0}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} d\sigma \\&= -2 \int_{-\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = -\frac{2}{3} \pi a^3.\end{aligned}$$

对于  $I_2$ ,  $\Sigma: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $\gamma$  为锐角),  $(x, y) \in \sigma_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2$ , 有

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a} \iint_{\sigma_{xy}} [a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}]^2 dx dy \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2) r dr = \frac{\pi}{6} a^3. \end{aligned}$$

因此

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} a^3.$$

### § 2.3 高斯公式

格林公式建立了沿封闭曲线的第二类曲线积分与二重积分的关系. 类似地, 沿空间闭曲面的第二类曲面积分和三重积分之间也有类似的关系, 这就是高斯(Gauss)公式.

**定理 10.5** 设空间区域  $V$  由分片光滑的双侧封闭曲面  $S$  围成, 若函数  $P, Q, R$  在  $V$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (10.7)$$

其中  $S$  取外侧, (10.7) 式称为高斯公式.

证 下面只证  $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_S R dx dy$ .

读者可类似地证明

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_S P dy dz,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_S Q dz dx.$$

这些结果相加便得到了高斯公式(10.7).

先设  $V$  是一个  $xy$ -型区域, 即其边界曲面  $S$  由曲面  $S_2$  (上侧):  $z = z_2(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ ,  $S_1$  (下侧):  $z = z_1(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ , 及垂直于  $D_{xy}$  的边界的柱面  $S_3$  (外侧) 组成 (图 10-22), 其中  $z_1(x, y)$

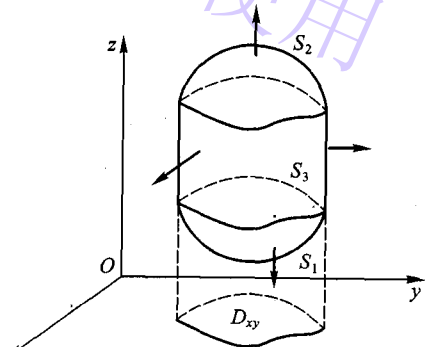


图 10-22

① 若  $S$  为封闭曲面, 则曲面积的积分号用  $\oiint$  表示.

$\leq z_2(x, y)$ . 于是按三重积分的计算方法有

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) d\sigma - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) d\sigma \\ &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

其中  $S_2$  取上侧,  $S_1$  取下侧, 又由于  $S_3$  上每一点法向量与  $Oz$  轴正向夹角全为  $\frac{\pi}{2}$  或者说在坐标面  $Oxy$  上的投影区域面积为零, 所以

$$\iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{S_2} R dx dy + \iint_{S_1} R dx dy + \iint_{S_3} R dx dy \\ &= \oiint_S R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

其中  $S$  取外侧, 对于不是  $xy$ -型区域的情形, 则用有限个光滑曲面将它分成若干个  $xy$ -型区域来讨论, 与推导格林公式过程类似, 请读者自证.  $\square$

**例 3** 计算  $\oiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , 式中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的内侧.

**解** 由高斯公式知

$$\begin{aligned} \oiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy &= -3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a \rho^4 \sin \varphi d\rho \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^a \rho^4 d\rho \\ &= -3 \cdot 2\pi \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi \cdot \frac{1}{5} a^5 = -\frac{12}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

例 4 计算  $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$ ,

式中  $S$  为圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的一部分,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为此曲面外法线的方向余弦.

解 设曲面  $S_1: z = h, x^2 + y^2 \leq h^2$  (法线朝上侧) (图 10-23), 则

$$\begin{aligned} & \iint_{S+S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ &= 2 \iiint_V (x + y + z) dV \quad (\text{利用柱面坐标}) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r dr \int_r^h [r(\cos \theta + \sin \theta) + z] dz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \int_0^h r^2 dr \int_r^h dz + 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r dr \int_r^h z dz \\ &= 4\pi \int_0^h r \frac{1}{2} (h^2 - r^2) dr = 2\pi \int_0^h (h^2 r - r^3) dr = \frac{\pi h^4}{2}. \end{aligned}$$

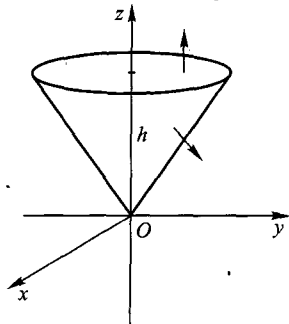


图 10-23

又

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{S_1} z^2 \cos 0 dS = \iint_{S_1} z^2 dS = \iint_{S_1} h^2 dS = \pi h^4, \end{aligned}$$

于是

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

例 5 若  $S$  为封闭的简单曲面,  $l$  为任何固定方向, 则  $\oiint_S \cos(n, l) dS = 0$ ,

其中  $n$  是曲面的法线矢量.

证 设  $n^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ,  $l^0 = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ , 其中  $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$  为常数, 有  $(n \cdot l) = (n^0 \cdot l^0)$ , 则

$$\cos(n \cdot l) = \cos(n^0 \cdot l^0) = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta_1 \cos \beta + \cos \gamma_1 \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1}}$$

$$= \cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta_1 \cos \beta + \cos \gamma_1 \cos \gamma,$$

利用高斯公式, 不妨设  $S$  的法方向朝外, 于是

$$\begin{aligned} \oiint_S \cos(n \cdot l) dS &= \oiint_S (\cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta_1 \cos \beta + \cos \gamma_1 \cos \gamma) dS \\ &= \iiint_V (0 + 0 + 0) dV = 0. \end{aligned}$$

## §2.4 散度场

**定义 10.4** 设  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  为空间区域  $V$  上的向量函数, 对  $V$  上每一点  $(x, y, z)$ , 称函数  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  为向量函数  $A$  在点  $M(x, y, z)$  处的散度, 记作

$$\operatorname{div} A(x, y, z),$$

即

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (\operatorname{div} \text{ 是 divergence (散度) 一词的缩写}).$$

设  $n^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为曲面的单位法向量, 则  $dS = n^0 dS$  称为曲面的面积元素, 则高斯公式可写成如下形式

$$\iiint_V \operatorname{div} A dV = \oiint_S A \cdot dS. \quad (10.8)$$

在  $V$  中任取一点  $M_0$ , 对 (10.8) 式中的三重积分应用中值定理, 得

$$\iiint_V \operatorname{div} A dV = \operatorname{div} A(M^*) \cdot \Delta V = \oiint_S A \cdot dS$$

其中  $M^*$  为  $V$  中某一点, 于是有

$$\operatorname{div} A(M^*) = \frac{\oiint_S A \cdot dS}{\Delta V}.$$

令  $V$  收缩到点  $M_0$  (记成  $V \rightarrow M_0$ ), 则  $M^*$  也趋向点  $M_0$ , 因此

$$\operatorname{div} A(M_0) = \lim_{V \rightarrow M_0} \frac{\oiint_S A \cdot dS}{\Delta V}. \quad (10.9)$$

这个等式可以看作是散度的另一种定义形式, (10.9) 式右边的分子、分母都与坐标系选取无关. 因此它的极限值也与坐标系选值无关, 所以散度  $\operatorname{div} A$  与坐标系选取无关, 因此向量场  $A$  的散度  $\operatorname{div} A$  所构成的数量场, 称为散度场.

散度场的物理意义: 联系本章中提到当流速为  $A$  的不可压缩流体, 经过封闭曲面  $S$  的流量是  $\oiint_S A \cdot dS$ . 于是 (10.9) 表明  $\operatorname{div} A$  是流量对体积  $V$  的变化率, 并称它为  $A$  在点  $M_0$  的流量密度. 若  $\operatorname{div} A(M_0) > 0$ , 说明在每一单位时间内有一定数量的流体流出这一点, 则称这一点为源; 相反, 若  $\operatorname{div} A(M_0) < 0$ , 说明流体在这一点被吸收, 则称这点为汇. 若在向量场  $A$  中每一点皆有  $\operatorname{div} A = 0$ , 则称  $A$  为无源场.

推论 1 若在封闭曲面  $S$  所包围的区域  $V$  中处处有  $\operatorname{div} A = 0$ , 则

$$\oiint_S A \cdot dS = 0.$$

由高斯公式, 此推论显然成立.

推论 2 如果仅在区域  $V$  中某些点(或子区域上)  $\operatorname{div} A \neq 0$ , 或  $\operatorname{div} A$  不存在, 其他的点都有  $\operatorname{div} A = 0$ , 则通过包围这些点或子区域(称为洞)的  $V$  内任一封闭曲面积分(物理意义为流量)都是相等的, 即是一个常数, 有

$$\oiint_{S_1} A \cdot n^0 dS = \oiint_{S_2} A \cdot n^0 dS.$$

其中  $S_1, S_2$  是包围散度不等于 0, 或不存在的点(或区域)的任意两个封闭曲面, 其法线单位矢量  $n^0$  向外(图 10-24), 图中阴影部分上  $\operatorname{div} A \neq 0$ .

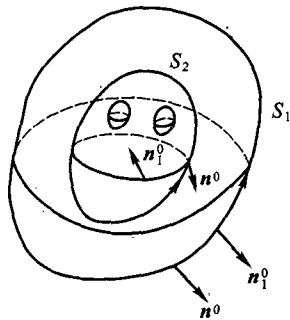


图 10-24

证 由假设, 在  $S_1 + S_2$  为界面的区域  $V$  上(其界面的外法线单位矢量记为  $n_1$ )有  $\operatorname{div} A = 0$ . 由高斯公式, 得

$$\oiint_{S_1+S_2} A \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} A dV = 0,$$

由于

$$\oiint_{S_1+S_2} A \cdot dS = \oiint_{S_1} A \cdot n_1^0 dS + \oiint_{S_2} A \cdot n_1^0 dS = 0,$$

$$\oiint_{S_1} A \cdot n_1^0 dS = - \oiint_{S_2} A \cdot n_1^0 dS$$

由于在  $S_1$  各点有  $n^0 = n_1^0$ ,  $S_2$  的各点有  $n^0 = -n_1^0$ , 所以

$$\oiint_{S_1} A \cdot n^0 dS = \oiint_{S_1} A \cdot n_1^0 dS = - \oiint_{S_2} A \cdot n_1^0 dS = \oiint_{S_2} A \cdot n^0 dS. \quad \square$$

## 习题 10-2

1. 计算下列第二类曲面积分:

(1)  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , 式中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  外侧;

(2)  $\iint_\Sigma y z dz dx + 2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  外侧在  $z \geq 0$  的部分;

(3)  $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$ , 其中  $S$  为圆锥曲面  $x^2 + y^2 = z^2$



( $0 \leq z \leq h$ ) 的外侧面.

2. 利用高斯公式计算下列第二类曲面积分:

(1)  $\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , 其中  $S$  为立体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  的边界的外表面;

(2)  $\oiint_S 2xyz dydz + yzdzdx - z^2 dxdy$ , 其中  $S$  是由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  所围立体的表面外侧;

(3)  $\iiint_{\Sigma} (8y + 1) x dydz + 2(1 - y^2) dzdx - 4yzdxdy$ , 其中  $\Sigma$  是由曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{y - 1}, \\ x = 0, \end{cases} \quad (1 \leq y \leq 3)$$

绕  $y$  轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与  $y$  轴正向的夹角大于  $\frac{\pi}{2}$ ;

(4)  $\iint_S -y dzdx + (z + 1) dxdy$ , 其中  $S$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = 4$  被平面  $x + z = 2$  和  $z = 0$  所截出部分的外侧.

3. 证明: 曲面  $S$  所包围的体积等于  $V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$ . 式中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的外法线的方向余弦.

4. 证明:

$$\left[ \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS = 0,$$

其中  $S$  是简单的闭曲面,  $P, Q, R$  具有二阶连续偏导数.

5. 证明:

(1)  $\operatorname{div}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{u} \pm \operatorname{div} \mathbf{v}$ ;

(2)  $\operatorname{div}(c\mathbf{u}) = c \operatorname{div} \mathbf{u}$ ; 其中  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  为矢量函数,  $c$  为常数;

(3)  $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$  ( $\mathbf{a}$  为常矢量,  $u$  为数量函数).

## §3 斯托克斯公式、空间曲线积分与路径无关性

### §3.1 斯托克斯公式

斯托克斯(Stokes)公式建立了沿空间双侧曲面  $S$  的积分与沿  $S$  的边界曲线  $L$  的积分之间的联系.

在介绍下述定理之前, 先对双侧曲面  $S$  的侧与其边界曲线  $L$  的方向作如下

规定: 设有人站在  $S$  上指定的一侧, 若沿  $L$  行走, 指定的侧总在人的左方, 则人的前进方向为边界线  $L$  的正向, 这个规定方法也称为右手法则; 若沿  $L$  行走, 指定的侧总在人的右方, 则人的前进方向为边界线  $L$  的负向 (图 10-25).

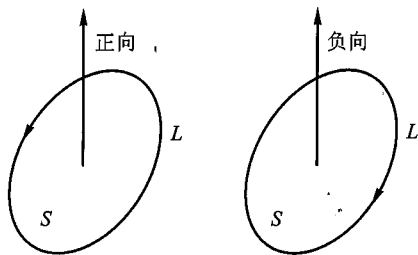


图 10-25

**定理 10.6** 设光滑曲面  $S$  的边界  $L$  是按段光滑的连续曲线, 若函数  $P, Q, R$  在  $S$  (连同  $L$ ) 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (10.10)$$

其中  $S$  的侧面与  $L$  的方向按右手法则确定. 公式 (10.10) 称为 斯托克斯公式.

证 先证

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx, \quad (10.11)$$

其中曲面  $S$  由方程  $z = z(x, y)$  确定, 它的正侧法线方向数为  $(-z'_x, -z'_y, 1)$  (即法矢量与  $Oz$  轴正向夹角为锐角), 单位矢量为  $\left( \frac{-z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \right)$ , 又方向余弦为  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 得  $\cos \alpha = \frac{-\partial z}{\partial x} \cos \gamma$ ,  $\cos \beta = \frac{-\partial z}{\partial y} \cos \gamma$ , 而  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$ , 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

若  $S$  在  $Oxy$  平面上的投影区域为  $D_{xy}$ ,  $L$  在  $Oxy$  平面上的投影曲线记为  $\Gamma$ , 现由第二类曲线积分定义及格林公式有

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dxdy.$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y},$$

所以

$$- \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$

从而

$$\begin{aligned} \text{原式} &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy \\ &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) \frac{dx dy}{\cos \gamma} = - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) dS \\ &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

综上所述, 便得所要证明的 (10.7) 式.

同样对于曲面  $S$  表示  $x = x(y, z)$  和  $y = y(z, x)$ , 可得

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \oint_L Q dy, \quad (10.12)$$

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx = \oint_L R dz. \quad (10.13)$$

将 (10.11)、(10.12)、(10.13) 三式相加即得斯托克斯公式 (10.10).

如果曲面  $S$  不能以  $z = z(x, y)$  的形式给出, 则用一些光滑曲线把  $S$  分割为若干小块, 使每一小块都能用这种形式表示, 这时斯托克斯公式也能成立.  $\square$

**注意:** 由证明过程可知, 只要以  $\Gamma$  为边界且符合定理条件的曲面  $S$ , 结论都成立. 从而我们利用 Stokes 公式时, 寻找以  $\Gamma$  为边界较简单的曲面  $S$ , 以有利于解决问题.

为了便于记忆, 斯托克斯公式也常写成如下形式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

**例 1** 计算  $\oint_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ , 其中  $C$  为椭圆

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \quad (a > 0, h > 0),$$

若从  $Ox$  轴正向看去, 此椭圆是顺着反时针方向前进的.

**解** 椭圆如图 10-26 所示, 把平面  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  上  $C$  所包围的区域记为  $S$ ,

则  $S$  的法线方向为  $\{h, 0, a\}$ , 注意到  $S$  的法线和曲线  $C$  的方向是正向联系的, 可知  $S$  的法线与  $z$  轴正向的夹角为锐角, 因此,

$$\mathbf{n}^0 = \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right),$$

于是, 由斯托克斯公式知

$$\begin{aligned} & \oint_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= -2 \iint_S dydz + dx dz + dx dy \\ &= -2 \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS \\ &= -2 \iint_S \left( \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) dS \\ &= -2 \frac{h + a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iint_S dS \\ &= -2 \frac{h + a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} d\sigma \\ &= -2 \frac{h + a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \pi a^2 = -2\pi a(h + a). \end{aligned}$$

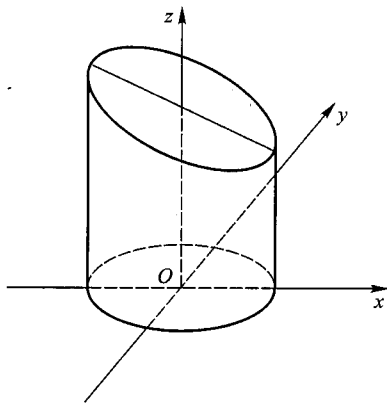


图 10-26

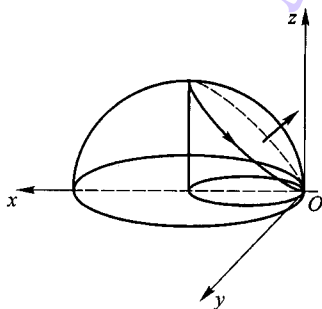


图 10-27

**例 2** 计算  $\oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$ , 式中  $C$  是曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ,  $x^2 + y^2 = 2rx$  ( $0 < r < R, z > 0$ ). 此曲线是顺着如下方向前进的: 由它所包围在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  上的最小区域保持在左方(图 10-27).

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x-R}{R}, \cos \beta = \frac{y}{R}, \cos \gamma = \frac{z}{R},$$

由斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \iint_S [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] dS \\ &= 2 \iint_S \left[ (y-z) \left( \frac{x}{R} - 1 \right) + (z-x) \frac{y}{R} + (x-y) \frac{z}{R} \right] dS = 2 \iint_S (z-y) dS, \end{aligned}$$

由于曲面  $S$  关于  $Ozx$  平面对称,  $y$  关于  $y$  是奇函数, 有  $\iint_S y dS = 0$ . 于是

$$\text{原式} = 2 \iint_S z dS = 2 \iint_S R \cos r dS = 2 \iint_S R dx dy = 2R \iint_{x^2+y^2 \leq 2Rx} d\sigma = 2\pi r^2 R.$$

### §3.2 空间曲线积分与路径无关性

**定理 10.7** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  为空间单连通区域, 若函数  $P, Q, R$  在  $\Omega$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则以下四个条件是等价的:

(1) 对于  $\Omega$  内任一按段光滑的封闭曲线  $L$ , 有  $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ;

(2) 对于  $\Omega$  内任一按段光滑的曲线  $\Gamma$ , 曲线积分  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$  与路线无关, 仅与起点、终点有关;

(3)  $Pdx + Qdy + Rdz$  是  $\Omega$  内某一函数  $u(x, y, z)$  的全微分, 即存在  $\Omega$  上的函数  $u(x, y, z)$ , 使

$$du = Pdx + Qdy + Rdz; \quad (10.14)$$

(4)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$  在  $\Omega$  内处处成立.

这个定理的证明与平面曲线积分与路径无关性的证明类似, 而且定理的应用也与平面曲线积分与路径无关的应用类似.

**注意:** 所谓空间单连通区域指的是这样的空间区域  $V$ , 对  $V$  中任意的封闭曲线  $L$ , 若  $L$  不越过  $V$  的边界曲面可连续收缩成  $V$  中的一点, 例如两个同心球面所围成的区域就是单连通区域. 还有一种被称为空间面单连通区域, 若对  $V$  中的任一封闭曲面不越过  $V$  的边界曲面, 可以连续收缩为  $V$  中的一点.

若曲线积分  $I = \int_{r_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  与路径无关, 设  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B(x_1, y_1, z_1)$ , 则沿着折线段  $ACDB$  (图 10-28) 积分, 有

$$I = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{z_1} R(x_1, y_1, z) dz.$$

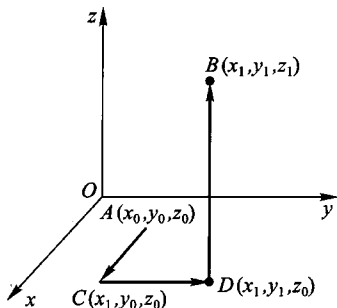


图 10-28

若  $P, Q, R$  在  $V$  上具有连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (x, y, z) \in V,$$

则  $Pdx + Qdy + Rdz$  的全体函数为

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C$$

若  $(0, 0, 0) \in V$ , 则取  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ , 使得计算方便.

### § 3.3 旋度场

**定义 10.5** 设  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  为空间区域  $V$  上的向量函数, 对  $V$  上一点  $M(x, y, z)$ , 定义向量函数  $\left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ , 称它为向量函数  $A$  在点  $M(x, y, z)$  处的旋度, 记作  $\text{rot } A$  ( $\text{rot}$  是 rotation(旋度)一词的缩写). 为便于记忆,  $\text{rot } A$  可形式地写作

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

设  $T^0$  是曲线  $L$  上在点  $M(x, y, z)$  处与指定的方向一致的单位切线向量, 向量  $ds = T^0 ds$  称为弧长元素向量, 于是斯托克斯公式可写成如下向量形式:

$$\iint_S \text{rot } A \cdot dS = \oint_L A \cdot ds. \quad (10.15)$$

为了说明旋度与坐标系的选取无关, 我们在场  $V$  中任意取一点  $M_0$ , 通过  $M_0$  点作一平面, 在该平面上围绕  $M_0$  作任一封闭曲线  $L$ , 记  $L$  所围区域为  $D$  面积仍记为  $D$  (图 10-29), 则由 (10.15) 式有

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_L (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^0) ds, \quad (10.16)\end{aligned}$$

对左端二重积分应用中值定理可得

$$\iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}^0 dS = (\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}^0)_{M_0} \cdot D = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s},$$

即

$$(\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}^0)_{M_0} = \lim_{D \rightarrow M_0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{D} \quad (10.17)$$

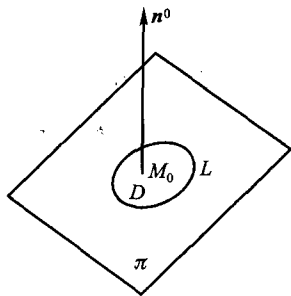


图 10-29

(10.17)式左端为  $\mathbf{rot} \mathbf{A}$  在法线方向上的投影, 因此它也确定了  $\mathbf{rot} \mathbf{A}$  的本身, 从而(10.17)也可作为旋度的另一个定义形式. 由于(10.17)式右边的极限与坐标系的选取无关, 故  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  也与坐标系选取无关. 由向量函数  $\mathbf{A}$  的旋度  $\mathbf{rot} \mathbf{A}$  所定义的向量场, 称为旋度场. 在流量问题中, 我们称  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  为沿闭曲线  $L$  的环流量, 它表示流速为  $\mathbf{A}$  的不可压缩流体在单位时间内沿曲线  $L$  的流体总量, 反映了流体沿  $L$  时的旋转强弱程度. 当  $\mathbf{rot} \mathbf{A} = 0$  时, 沿任意封闭曲线的环流量为零, 即流体流动时不形成漩涡, 这时称向量场  $\mathbf{A}$  为无旋场. 公式(10.16)表明向量场在曲面边界线上的切线投影对弧长的曲线积分等于向量场的旋度的法线投影在曲面上对面积的曲面积分. 它的物理意义可以说成是: 流体的速度场的旋度的法线投影在曲面上对面积的曲面积分等于流体在曲面边界上的环流量.

### \* § 3.4 势量场

我们知道

$$\mathbf{grad} u(P) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) P$$

这种矢量场是一个数量  $u(P)$  的梯度场. 实际上, 这样的矢量场是大量存在的, 是一类重要的矢量场, 下面就来研究这种矢量场.

**定义 10.6** 设有矢量场  $\mathbf{A} = Pi + Qj + Rk$ , 如果存在单值函数  $u(P)$ , 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{grad} u, \quad (10.18)$$

则称场  $\mathbf{A}(P)$  为势量场或保守场,  $u(P)$  称为场  $\mathbf{A}(P)$  的势函数.

例如, 在由点电荷所产生的静电场中, 其电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{与电位} \quad v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

有以下关系

$$\mathbf{E} = \text{grad}(-v)$$

因而  $\mathbf{E}$  是一个势量场,  $-v$  是它的一个势函数.

$$Pi + Qj + Rk = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k \quad \text{或} \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (10.19)$$

由 (10.19) 式容易知道: 场  $\mathbf{A}(P)$  是势量场的充要条件是表达式  $Pdx + Qdy + Rdz$  为某一单值函数  $u(P)$  的全微分, 即

$$Pdx + Qdy + Rdz = du.$$

既然“场  $\mathbf{A}(P)$  为势量场”与“ $Pdx + Qdy + Rdz$  为全微分”等价, 由前面的讨论, 定理可写成下面的形式.

**定理 10.8** 设矢量场  $\mathbf{A}(P) = Pi + Qj + Rk$ ,  $P, Q, R$  在场中的线单连通区域  $D$  内具有连续的一阶偏导数, 则在  $D$  内, 下述四个断语是等价的: (1)  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ ; (2)  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$ ,  $L$  是  $D$  内任意一条封闭曲线; (3) 线积分  $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  与路径无关; (4)  $\mathbf{A}$  是一个势量场.

当矢量场  $\mathbf{A}(P) = Pi + Qj + Rk$  是势量场时, 势函数可以由公式

$$u = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz \quad (10.20)$$

求得, 其中定点  $(x_0, y_0, z_0)$  可以任意取定. 在这里因线积分与路径无关, 故常取平行于坐标轴的直线段 (图 10-30) 作为积分路径.

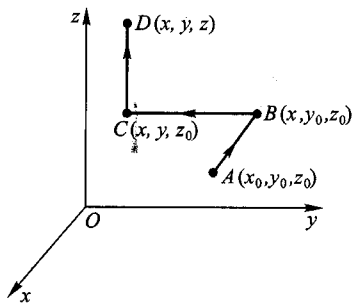


图 10-30

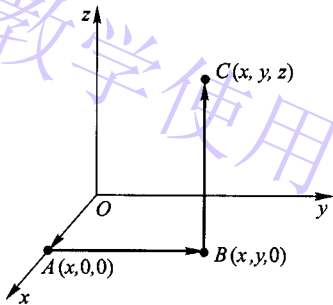


图 10-31

**例 3** 证明  $\mathbf{A} = 2xyz^2\mathbf{i} + (x^2y^2 + z\cos yz)\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos yz)\mathbf{k}$  为势量场, 并求其势函数.

**解** 因为

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2 + z\cos yz & 2x^2yz + y\cos yz \end{vmatrix} = 0,$$

所以  $\mathbf{A}$  是一个势量场.

$$u = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} 2xyz^2 dx + (x^2z^2 + z\cos yz) dy + (2x^2yz + y\cos yz) dz$$

是它的一个势函数, 取积分路线如图 10-31, 得



$$\begin{aligned}
 u &= \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BC} = 0 + 0 + \int_0^{\pi} (2x^2yz + y\cos yz) dz \\
 &= [x^2yz^2 + \sin yz]_0^{\pi} = x^2yz^2 + \sin yz.
 \end{aligned}$$

还可以用以下方法来求, 被积表达式可写成

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= (2xyz^2 dx + x^2z^2 dy + 2x^2yz dx) + (z\cos yz dy + y\cos yz dz) \\
 &= dx^2yz^2 + d\sin yz = d(x^2yz^2 + \sin yz),
 \end{aligned}$$

于是

$$u = x^2yz^2 + \sin yz.$$

**例4** 证明中心场  $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{r}$  ( $r > 0$ ) 是一个势量场, 其中函数  $f(r)$  是具有连续导数, 并求其势函数.

**解** 由假设  $\mathbf{A} = f(r)x\mathbf{i} + f(r)y\mathbf{j} + f(r)z\mathbf{k}$ , 因而

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r)y = yf'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = yf'(r) \frac{x}{r} = \frac{xy}{r} f'(r)$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y} f(r)x = \frac{xy}{r} f'(r), \quad \frac{\partial}{\partial z} f(r) = \frac{xz}{r} f'(r), \dots,$$

因此

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0 \quad (\text{当 } r > 0).$$

由于所讨论的区域是原点除外的整个空间, 这是一个线单连通区域, 即知  $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{r}$  是一个势量场, 其势函数为

$$\begin{aligned}
 u &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} f(r)xdx + f(r)ydy + f(r)zdz \\
 &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} f(r)[xdx + ydy + zdz] = \int_{r_0}^r f(r)rdr, \quad \text{其中 } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.
 \end{aligned}$$

例如引力场是一个中心场, 因而它是一个势量场.

### \* §3.5 向量微分算子

向量微分算子  $\nabla$  的定义为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

它又称为那勃勒 (Nabla) 算子或哈密顿 (Hamilton) 算子. 运用向量微分算子, 我们有

(1) 设  $u = u(x, y, z)$ , 则

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \text{grad } u;$$

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \text{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

我们引入二阶微分算子

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ 记为 } \Delta,$$

于是

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

(2) 设  $A = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ , 则

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} A; \end{aligned}$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } A.$$

现在, 高斯公式和斯托克斯公式可分别写成

$$\iiint_V \nabla \cdot A dV = \oiint_S A \cdot dS,$$

$$\iint_S (\nabla \times A) \cdot dS = \oint_C A \cdot ds.$$

### 习题 10-3

1. 利用斯托克斯公式计算下列第二类曲线积分:

$\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ , 式中  $C$  为依参数  $t$  增大方向通过的椭圆:

$$x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

2. 设  $C$  为位于平面  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$  ( $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为平面之法线的方向余弦) 上并包围面积为  $S$  的封闭曲线, 其中围线  $C$  是依正方向进行的. 证明

$$\oint_C (z \cos \beta - y \cos \gamma) dx + (x \cos \gamma - z \cos \alpha) dy + (y \cos \alpha - x \cos \beta) dz = 2S$$

3. 计算下列第二类曲线积分:

$$(1) \int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz;$$

$$(2) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi_1(x) dx + \varphi_2(y) dy + \varphi_3(z) dz, \text{ 其中 } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \text{ 有连续的导数.}$$

$$4. \text{ 证明 } \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz) = \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u) du \quad (\text{其中 } f'(u) \text{ 为连续函数}).$$

5. 求下列函数的原函数:

$$(1) du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz;$$

$$(2) du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

6. 当单位质量从点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  移动到点  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  时, 作用于单位质量的引力  $F$  的大小为  $|F| = \frac{k}{r^2}$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ), 方向指向原点  $O$ , 求引力所作的功.

## 第十章综合题

1. 设  $l$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长记为  $a$ , 计算  $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$ .

2. 设半径为  $R$  的球面  $\Sigma$  的球心, 在定球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 上, 问当  $R$  取何值时, 球面  $\Sigma$  在定球面内部的那部分的面积最大?

3. 设  $S$  为椭圆球面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$  的上半部分, 点  $P(x, y, z) \in S$ ,  $\pi$  为  $S$  在点  $P$  处的切平面,  $\rho(x, y, z)$  为点  $O(0, 0, 0)$  到平面  $\pi$  的距离, 求  $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ .

4. 在过点  $O(0, 0)$  和  $A(\pi, 0)$  的曲线族  $y = a \sin x$  ( $a > 0$ ) 中, 求一条曲线  $L$ , 使沿该曲线从  $O$  到  $A$  的积分  $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$  最小.

5. 求  $I = \int_L (e^x \sin y - b(x + y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$ . 其中  $a, b$  为正常数,  $L$  为从点  $L(2a, 0)$  沿曲线  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  到点  $O(0, 0)$  的弧.

6. 设  $f(u)$  具有一阶连续导数, 证明对任何光滑闭曲线  $L$ , 有

$$\oint_L f(xy)(y dx + x dy) = 0.$$

7. 在变力  $F = yzi + xzj + xyk$  的作用下, 质点沿直线运动到椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上第 I 卦限的点  $M(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $\xi, \eta, \zeta$  取何值时, 力  $F$  所作的功  $W$  最大? 并求出  $W$  的最大值.

8. 计算曲线积分  $\oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$ , 其中  $C$  是曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$  从  $Oz$  轴正向往  $Oz$  轴负向看去  $C$  方向是顺时针的.

9. 证明  $\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM$ , 式中  $L$  为积分路径的长及  $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

10. 设  $I_R = \oint_{x^2 + y^2 = R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ , 证明:  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ .

11. 为了使线积分  $\int_{A \rightarrow B} F(x, y)(y dx + x dy)$  与积分路径的形状无关, 则可微分函数  $F(x, y)$  应满足怎样的条件?

12. 计算曲面积分  $\iint_S \frac{xdydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$ , 其中  $S$  是曲面  $x^2 + y^2 = R^2$  与两平面  $z = R, z = -R$  ( $R > 0$ ) 所围成立体表面的外侧.

13. 设矢量函数  $F$  的分量在以曲面  $S$  为边界的有界闭区域  $V$  上具有二阶连续偏导数,  $n$  是  $S$  的单位外法线矢量, 证明  $\oint_S \text{rot} F \cdot n dS = 0$ .

14. 设  $\Omega$  是空间,  $S$  是  $\Omega$  的边界曲面, 函数  $u(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上有二阶连续偏导数,  $n$  是  $S$  的外法矢量,  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  证明:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta u dV = \iint_S u \text{grad} u \cdot n dS - \iiint_{\Omega} (\text{grad} u)^2 dV.$$

15. 计算  $I = \oint_S \frac{\cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{r^2} dS$ , 其中,  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $S$  为不经过原点的椭球面  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$ ,  $n$  为  $S$  的单位外法线矢量.

仅供春学期教学使用