第 7 章　无穷级数：

1. **（级数收敛定义）** 设 $a_n>0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛．

证： 因为 $\frac{a_1}{1+a_1}=1-\frac{1}{1+a_1}$， 对 $k=2,3,\cdots$，有

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)},$$

所以级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},\ n=1,2,3,\cdots.$$

而 $a_n>0$，因此数列 $\left\{\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right\}$ 单调减少且有下界，因而收敛，由此可知，原级数部分和数列收敛，即原级数收敛.

2. **（比较判别法）** 设 $a_n\neq 0\ (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n+1}-a_n\right|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ 同时收敛或同时发散.

证： $u_n=\left|a_{n+1}-a_n\right|$， $v_n=\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$， $n=1,2,3,\cdots$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}-a_n\right|}{\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}a_n\right|=a^2\neq 0,$$

由比较判别法极限知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n+1}-a_n\right|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ 同时收敛或同时发散.

3. **（交错级数的莱布尼兹判别法）**设 $a_n>0,\quad a_n\ge a_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$ 收敛 .

证：记 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$，那么

$$b_n-b_{n+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+1})+\cdots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)}>0,$$

所以 $\{b_n\}$为单调减少数列，又因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，由莱布尼兹判别法知原级数是收敛的.

7. **（幂级数求和与展开）**将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成x的幂级数，

并求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 之和.

解： $$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\cdot\frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}=\frac{-2}{1+4x^2}$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

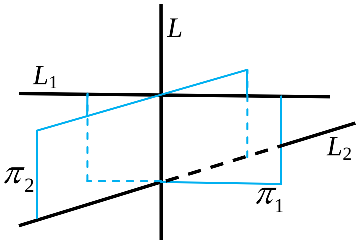
因为当$x=\dfrac{1}{2}$时，上述级数为 $\dfrac{\pi}{4}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，由莱布尼兹差别法知，此级数收敛，所以上述幂级数的和函数在$x=\dfrac{1}{2}$处连续，即有

$$\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=0,$$ 从而得 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

第 8 章　矢量代数与空间解析几何：

1. 求直线 L_1： $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 和 L_2： $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的**公垂线方程.**

解：设所求公垂线为 L ，则 L 与 L_1 和 L_2 皆垂直，



因此 L 的方向可取为 $\boldsymbol{u}=(1,0,-1)\times(2,1,1)=(1,-3,1)$，

于是 L 与 L_1 所在平面 π_1 的法向量可取为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-3,1)\times(1,0,-1)=(3,2,3),$$

于是 π_1 的方程为 $3(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$ ，即 $3x+2y+3z-16=0$.

同理，L 与 L_2 所在平面 π_2 的法向量可取为 $\boldsymbol{n}_2=(1,-3,1)\times(2,1,1)=(4,-1,-7)$，

于是 π_2 的方程为 $4(x+2)-(y-1)-7z=0$ ，即 $4x-y-7z+9=0$.

因此所求公垂线方程为 $\begin{cases}3x+2y+3z-16=0\\ 4x-y-7z+9=0\end{cases}$.

2. 求过直线 L： $\begin{cases}x+5y+z=0\\ x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成二面角 $\dfrac{\pi}{4}$ 的

平面方程 .

解：利用平面束方程，设平面方程为

$$x-z+4+\lambda(x+5y+z)=0,$$

由题设条件知向量 $(1+\lambda,\ 5\lambda,\ \lambda-1)$ 与 $(1,-4,-8)$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，所以有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\left|(1+\lambda,\ 5\lambda,\ \lambda-1)\cdot(1,-4,-8)\right|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+25\lambda^2+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{1+16+64}},$$

化简得 $\lambda(3\lambda+4)=0$，得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-\dfrac{4}{3}$，代入平面束方程得所求平面为

$$x+20y+7z-12=0 \text{ 或 } x-z+4=0.$$

【可验证平面 $x+5y+z=0$ 不是解】

第 9 章　多元函数微分学：

连续，偏导，可微.

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处

连续、偏导数存在，但不可微．

证： 因为 $|f(x,y)-0|=\left|\dfrac{xy^2\cdot y}{x^2+y^4}\right|\le\dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4}|y|\le\dfrac{1}{2}|y|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，

所以，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=2\varepsilon>0,$ 当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-0|\le\dfrac{1}{2}\delta=\varepsilon$，

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

由偏导数的定义，$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，

同理，$f'_y(0,0)=0$. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在.

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微 $\Leftrightarrow\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\Delta z-\left[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，

其中 $\Delta z=f(\Delta x,\ \Delta y)-f(0,\ 0)$.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z-\left[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta x\cdot(\Delta y)^3}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^4\right]\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

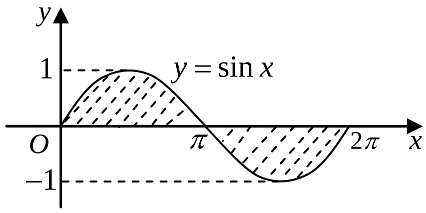
当 $\Delta x=(\Delta y)^2\to0$ 时，上述极限为 $\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4|\Delta y|\sqrt{(\Delta y)^2+1}}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{\Delta y}{|\Delta y|}$，此

极限不存在(左右极限分别等于 -1 和 1，不相等)，所以原极限不存在，于是

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

第 10 章　重积分：

1. 将 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$ **交换积分次序**.



解：积分区域如图所示.

$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的反函数如下：

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$x=\arcsin y$，$y\in[0,1]$；

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，$x=\pi-\arcsin y$，$y\in[-1,1]$；

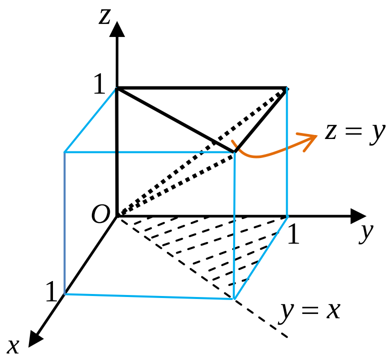
当 $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 时，$x=2\pi+\arcsin y$，$y\in[-1,0]$.

因此，原积分改变积分次序后为：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}z$.



解：积分区域如图所示. 投影到 yoz 平面，

交换成先对 x 后对 y 再对 z 的积分：

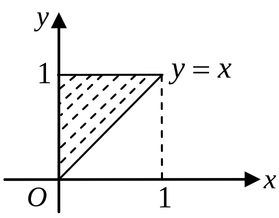
$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_0^y y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}z\int_0^z y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 z^3\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}z=\frac{1}{12}\mathrm{e}^{z^4}\bigg|_0^1=\frac{1}{12}(\mathrm{e}-1).$$

另解：通过 **3** 次二重积分的积分次序交换得到上述积分.

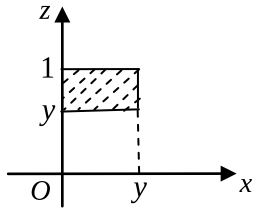
（**1**）先将 x 和 y 进行交换：

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x\int_y^1 y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}z$$



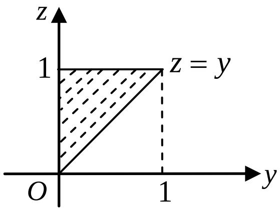
（**2**）然后将 x 和 z 进行交换：

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x\int_y^1 y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}z=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{d}z\int_0^y y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}x$$



（**3**）再将 y 和 z 进行交换：

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{d}z\int_0^y y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z \mathrm{d}y\int_0^y y\mathrm{e}^{z^4}\mathrm{d}x\,.$$

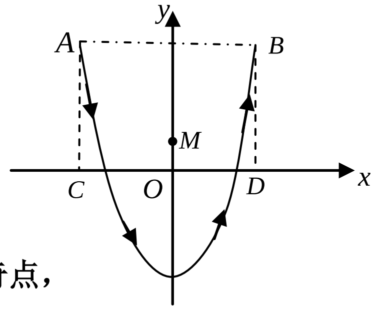


第 11 章　曲线积分：

1. **（曲线积分与路径无关性）**计算曲线积分 $\displaystyle\int_C \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}$ ，

其中 C 是从 $A(-3,5)$ 沿抛物线 $y=x^2-4$ 到 $B(3,5)$ 的曲线段.

解：记 $P=\dfrac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$， $Q=\dfrac{-x}{x^2+(y-1)^2}$ ，



则有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-(y-1)^2}{\left[x^2+(y-1)^2\right]^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以

积分与路径无关，注意到 $M(0,1)$ 为 P,Q 的奇点，

因此选择新路径（折线）***AC - CD - DB***. 有

$$\int_C \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}=\int_5^0 \frac{3}{9+(y-1)^2}\mathrm{d}y+\int_{-3}^{3}\frac{-1}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^5\frac{-3}{9+(y-1)^2}\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_0^5 \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y-1}{3}\right)}{\left(\frac{y-1}{3}\right)^2+1}-2\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-2\arctan\frac{4}{3}-\pi .$$

另解 ：直接计算易得（圆周取正向） $\displaystyle\oint_{x^2+(y-1)^2=a^2}\frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}=2\pi$， 于是

$$\oint_{C+BA}\frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}=-\oint_{x^2+(y-1)^2=a^2}\frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}=-2\pi$$

$$=\int_C \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}+\int_{BA}\frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\int_C \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}+\int_3^{-3}\frac{4\mathrm{d}x}{x^2+16}=\int_C \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}-2\arctan\frac{3}{4},$$

即得

$$\int_C \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}=-2\pi+2\arctan\frac{3}{4}=-2\pi+2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{4}{3}\right)$$

$$=-\pi-2\arctan\frac{4}{3}.$$

第 12 章　曲面积分：

1. **（高斯公式）**计算 $\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，

式中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

解：由 Guass 公式，

$$\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 为 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 围成的区域.

作变换 $u=x-y+z,\quad v=y-z+x,\quad w=z-x+y$，则

$\det J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-$，且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积为 $\frac{4}{3}$.

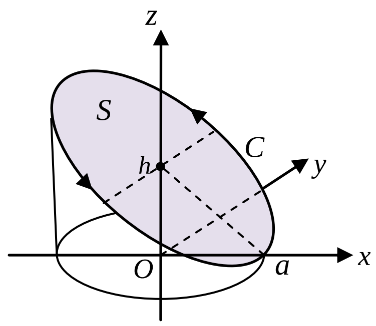
（此体积即为由 $u+v+w=1,\ u=0,\ v=0\ \ w=0$ 围成的四面体体积的 8 倍），于是

$$\iint\limits_S (x-y+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-z+x)$$

$$=\iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\le 1} 3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$$

2. **（斯托克斯公式）**计算 $\oint\limits_C (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$，式中 C 为椭圆周

$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1 \end{cases}\ (a>0,h>0)$，积分方向为从 x 轴正向看去沿此椭圆逆时针方向.



解：如图，记平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$，上 C 所包围的区域为 S，则 S 的法线方向为 $(h,0,a)$，且此法向与曲线 C 的方向符合右手法则，于是由 Stokes 定理得

$$\oint_C (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$$

$$=-2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\iint_S \mathrm{d}S$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\pi a\sqrt{a^2+h^2}=-2\pi(a+h).$$

（以上 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{S}$ 的法向量的三个方向余弦）.