浙江大学 2008-2009 学年秋冬学期《线性代数》期末试卷

一、填空题（每空 3 分，本大题共 24 分）

1．　在5阶行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$中包含$a_{13}a_{25}$的所有正项是____________。

答案 $a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$，$a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$，$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$

2．　设 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，那么$(2\boldsymbol{A})^*=$____________。

答案 $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

3．　设$\boldsymbol{A}$是 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|2\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{A}^{-1}|=$____________。

答案 $\frac{1}{2}$

4．　设$\boldsymbol{A}$是5×4矩阵，且$r(\boldsymbol{A})=2$，4 维列向量$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O}$，线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的 3 个解向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1，0，1，-1]^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_2=[2，-1，1，0]^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_3=[1，2，0，0]^{\mathrm{T}}$$

则线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是____________。

答案 因为$r(\boldsymbol{A})=2$，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$解空间的维数为 2。因为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解，容易验证$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以它是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系。因此线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解是：

$$\boldsymbol{\alpha}=[1，0，1，-1]^{\mathrm{T}}+k_1[1，-1，0，1]^{\mathrm{T}}+k_2[-1，3，-1，0]^{\mathrm{T}}$$

其中k_1，k_2为任意常数。

5．　在$\mathbf{R}^2$中，由基$\boldsymbol{\alpha}_1=[1，2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2，1]^{\mathrm{T}}$到基$\boldsymbol{\beta}_1=[1，1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[2，3]^{\mathrm{T}}$的过渡矩阵是____________。向量$\boldsymbol{\xi}=[3，1]^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$下的坐标是____________。

答案 $\boldsymbol{M}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\left[\frac{5}{3}，-\frac{1}{3}\right]^{\mathrm{T}}$

6. 设$\boldsymbol{A}$是元素全为 2 的n阶矩阵，则$\boldsymbol{A}$的特征值是____________。

答案 $2n$，$\overbrace{0，0，\cdots，0}^{n-1\text{个}}$

7. 参数a的取值范围是______________时，二次型$f(x_1，x_2，x_3) = 2x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$是正定二次型。

答案 $a > \frac{7}{5}$

二、解答题（本大题共 61 分）

8. (本题 10 分) 计算行列式$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & x \\ x & x & x & x+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$。

答案 $\boldsymbol{D} = \frac{1+10x}{24}$

9. (本题 10 分)设V是实数域$\mathbf{R}$上的全体2×2矩阵，即

$$V = \mathbf{R}^{2\times 2} = \left\{\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbf{R}\right\}$$

V的运算是普通矩阵的加法和数量乘法，V对于这两种运算成为线性空间，V的子集合

$$V_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a+b+c+d = 1；a,b,c,d \in \mathbf{R}\right\}$$

$$V_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a+b+c+d = 0；a,b,c,d \in \mathbf{R}\right\}$$

问V的子集合V_1和V_2对于V中的运算是否构成为V的子空间(要说明理由)？写出该子空间的一组基，并且求出它的维数。

解 因为V的零元素$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$不在$V_1$中，所以$V_1$不是$V$的子空间(或者说明$V_1$对于$V$的加法或数乘运算不封闭)。

V_2是V的子空间，理由如下：

(1) 零元素$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V_2$，所以$V_2$非空。

(2) 如$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in V_2 \Longrightarrow a_1+b_1+c_1+d_1 = 0$，$a_2+b_2+c_2+d_2 = 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix},$$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)$
$=(a_1+b_1+c_1+d_1)+(a_2+b_2+c_2+d_2)=0$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2$

(3) $k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$，则$ka_1+kb_1+kc_1+kd_1=k(a_1+b_1+c_1+d_1)=0$

$\Longrightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in V_2$

所以V_2是V的子空间。V_2的基是：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\dim(V_2)=3$。

10．(本题 10 分) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$是可逆矩阵，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$，已知矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21}+a_{31} & 4a_{22}+a_{32} & 4a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}，求\boldsymbol{M}^{-1}。$$

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\xrightarrow{4R_2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 4a_{22} & 4a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21}+a_{31} & 4a_{22}+a_{32} & 4a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\boldsymbol{M}$$

所以

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & \frac{1}{4}b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \frac{1}{4}b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & \frac{1}{4}b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} b_{11} & \frac{1}{4}b_{12} & -\frac{1}{4}b_{12}+b_{13} \\ b_{21} & \frac{1}{4}b_{22} & -\frac{1}{4}b_{22}+b_{23} \\ b_{31} & \frac{1}{4}b_{32} & -\frac{1}{4}b_{32}+b_{33} \end{bmatrix}
$$

11．(本题 15 分) 问参数a，b取何值时，线性方程组

$$
\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}
$$

有解？在有解时，有多少解，且求出所有解。

解

$$
\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}
$$

(1) 当$a\neq 1$时，有唯一解，解为

$$
x_1=\frac{b-a+2}{a-1}，x_2=\frac{a-2b-3}{a-1}，x_3=\frac{b+1}{a-1}，x_4=0
$$

(2) 当$a=1$，$b\neq -1$时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组无解。

(3) 当$a=1$，$b=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=2=r(\overline{\boldsymbol{A}})<4$，方程组有无穷多解，解为

$$
\begin{cases} x_1=-1+x_3+x_4 \\ x_2=1-2x_3-2x_4 \end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{\xi}=[-1，1，0，0]^{\mathrm{T}}+k_1[1，-2，1，0]^{\mathrm{T}}+k_2[1，-2，0，1]^{\mathrm{T}}
$$

其中k_1，k_2为任意常数。

12．(本题 16 分) 已知实二次型$f(x_1，x_2，x_3)=(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2$，其中$\overline{x}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$。

(1) 写出二次型$f(x_1，x_2，x_3)$的矩阵；

(2) 用正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$化二次型$f(x_1，x_2，x_3)$为标准形。

解

(1)

$$
f(x_1，x_2，x_3)=(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2
$$

$$=\sum_{i=1}^{3}x_i^2-2\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)\overline{x}+3\overline{x}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{3}x_i^2-\frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2-\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\frac{2}{3}(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

所以二次型矩阵是

$$\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \lambda-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \lambda-\frac{2}{3}\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$$

特征值是：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$。

属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的线性无关的特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

令

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}$$

则$f\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)=y_2^2+y_3^2$。

三、证明题（本题共 15 分）

13．(本题 8 分) 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，b是n维非零列向量，n维零列向量$\boldsymbol{\xi}_0$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$

的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的一个基础解系，求证：$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$解集合中的一个极大线性无关组。

证明 因为$\boldsymbol{A\xi}_0=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{A\xi}_0+\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{b}$，$i=1$，$2$，$\cdots$，s，
所以$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解。如果数$k_0$，$k_1$，$k_2$，$\cdots$，$k_s$使得

$$k_0\boldsymbol{\xi}_0+k_1(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s)=\boldsymbol{\theta} \qquad (1)$$

式(1)即为

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{\xi}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s=\boldsymbol{\theta} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{A}[(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{\xi}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s]=\boldsymbol{A\theta}=\boldsymbol{\theta}\Longrightarrow$$

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{A\xi}_0+k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\eta}_s=\boldsymbol{\theta}\Longrightarrow$$

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\theta}\Longrightarrow k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \qquad (3)$$

把(3)式代入(2)式，得$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s=\boldsymbol{\theta}$，
由于$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ (4)
把(4)式代入(3)式，得$k_0=0$，所以$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，
因此$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$线性无关。
假设$\boldsymbol{\xi}$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的任一个解，则存在数$l_1$，$l_2$，$\cdots$，$l_s$使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}&=\boldsymbol{\xi}_0+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\eta}_s\\&=(1-l_1-l_2-\cdots-l_s)\boldsymbol{\xi}_0+l_1(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+l_2(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+l_s(\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s),\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{\xi}$可以由$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$线性表示，
因此$\boldsymbol{\xi}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_s$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$解集合中的一个极大线性无关组。

12．(本题 7 分) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{X}$是$n\times m$实矩阵，且$r(\boldsymbol{X})=m(\le n)$，求证存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n-m} & \\ & \boldsymbol{O}_m\end{bmatrix}$，这里$\boldsymbol{E}_{n-m}$是$(n-m)$阶单位矩阵，$\boldsymbol{O}_m$是$m$阶零矩阵。

证明 因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵。其次

$$\boldsymbol{A}^2=[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^2=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

由于$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 0 和 1。另外

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})-\mathrm{tr}((\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\\&=n-\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_m)=n-m\end{aligned}$$

所以特征值 1 是$\boldsymbol{A}$的$n-m$重特征值，特征值 0 是$\boldsymbol{A}$的m重特征值，因此存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n-m} & \\ & \boldsymbol{O}_m\end{bmatrix}$。