刚体力学习题课

一、刚体的转动惯量

二、刚体定轴转动中轴对杆的作用力

三、纯滚动、摩擦力和附加条件相关

四、质点和刚体的碰撞相关

五、陀螺仪的定点运动相关

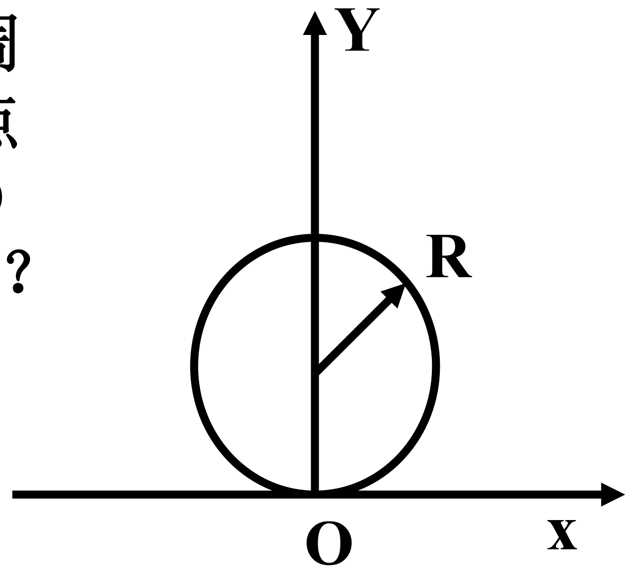
1. 已知某质点的运动方程为 $\vec{r} = (10-5t^2)\vec{i} + 10t\vec{j}\,(SI)$，则在t=1s时该质点的切向加速度和法向加速度的大小各为多少？

$$\vec{\upsilon} = -10t\vec{i} + 10\vec{j} \qquad \upsilon = 10\sqrt{t^2+1} \qquad a = 10(m/s)$$

$$a_t = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{10t}{\sqrt{t^2+1}} = 5\sqrt{2}(m/s^2)$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 5\sqrt{2}(m/s^2)$$

2. 一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动，有一力 $\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$ 作用在质点上。在该质点从坐标原点运动到（0, 2R）位置的过程中，力F对它所作的功为多少？



$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy)$$

$$= \int_0^0 F_x dx + \int_0^{2R} F_y dy = 2F_0 R^2$$

3. 质量分别为m和M的两个粒子，最初处在静止状态，并且彼此相距无穷远。以后，由于万有引力的作用，它们彼此接近。求：当它们之间的距离为d时，它们的相对速度多大？

$$mv_1 - Mv_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{d} = 0$$

$$v = v_1 - (-v_2)$$

$$v_1 = M\sqrt{\frac{2G}{(M+m)d}}$$

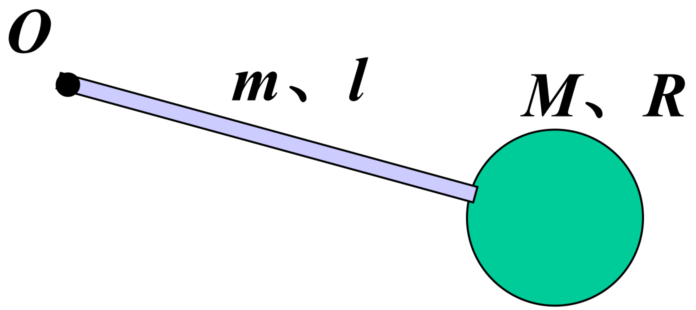
$$v = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{d}}$$

$$v_2 = m\sqrt{\frac{2G}{(M+m)d}}$$

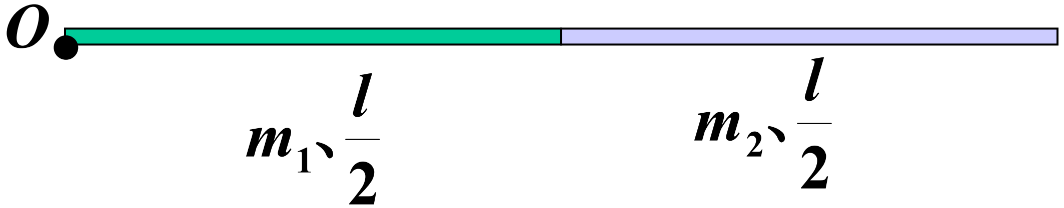
刚体力学习题课

一、刚体的转动惯量

【例题1】计算下列刚体对O轴的转动惯量J_O:



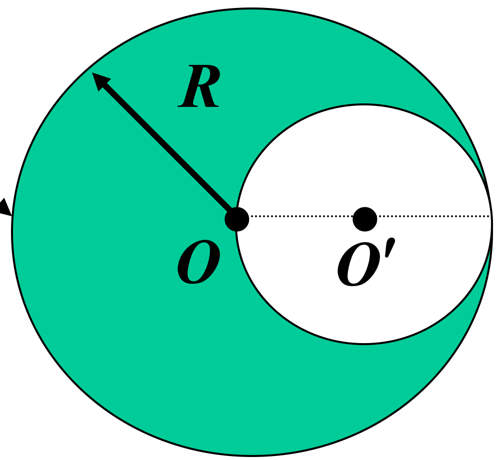
$$J_O=\frac{1}{3}ml^2+\frac{1}{2}MR^2+M(l+R)^2$$



$$J_O=\frac{1}{3}m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2+\frac{1}{12}m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2+m_2\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{4}\right)^2$$

刚体力学习题课

剩余部分的质量为 m



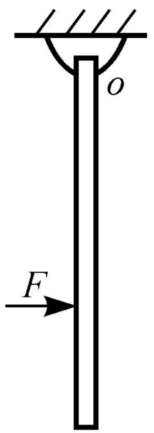
$$m_{总} = \frac{4}{3}m, \qquad m_{孔} = \frac{1}{3}m$$

$$J_0 = J_1 - J_2$$

$$= \frac{1}{2}m_{总}R^2 - \left[\frac{1}{2}m_{孔}\left(\frac{1}{2}R\right)^2 + m_{孔}\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]$$

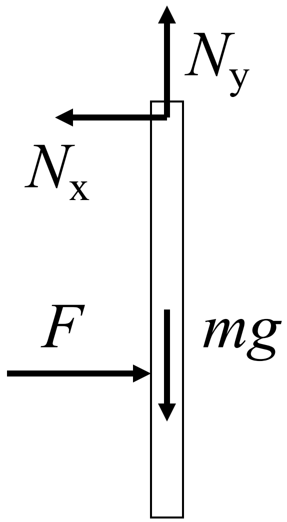
$$= \frac{13}{24}mR^2$$

二、刚体定轴转动中轴对杆的作用力



例2:设棒长为l。问力F作用在棒的什么位置时，轴对杆的水平作用力等于零?

假设力F的作用点离轴距离为l'。



$$Fl' = \frac{1}{3}ml^2\beta$$

$$F - N_x = ma_{cx} = m\beta\frac{l}{2}$$

$$N_y - mg = ma_{cy} = 0$$

$$N_x = F(1 - \frac{3l'}{2l}),$$

$$N_y = mg$$

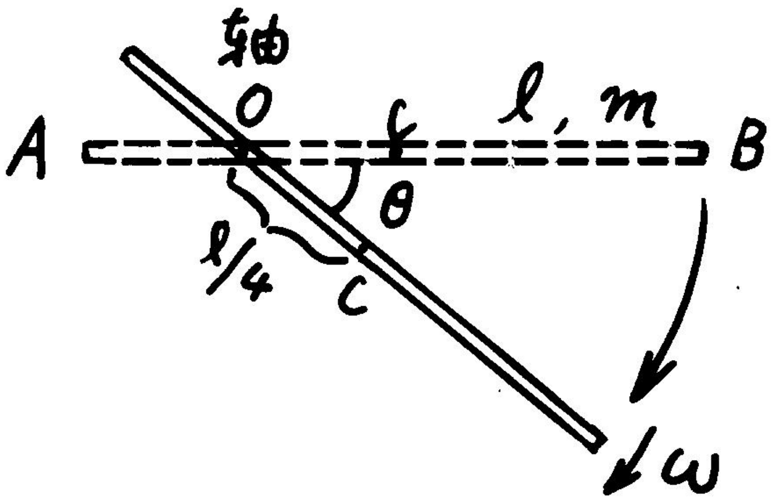
$$\because N_x = 0, \ \therefore l' = \frac{2}{3}l$$

[例3]已知：均匀直杆m，长为l，初始水平静止，轴光滑，

$\overline{AO}=\dfrac{l}{4}$ 。 求：杆下摆 θ 角后，角速度 ω =?

轴对杆作用力 $\vec{N}$ =?

解：杆+地球系统， ∵只有重力作功，∴E守恒。



初始： $E_{k1}=0$，

令 $E_{P1}=0$

末态： $E_{k2}=\dfrac{1}{2}J_o\omega^2$，

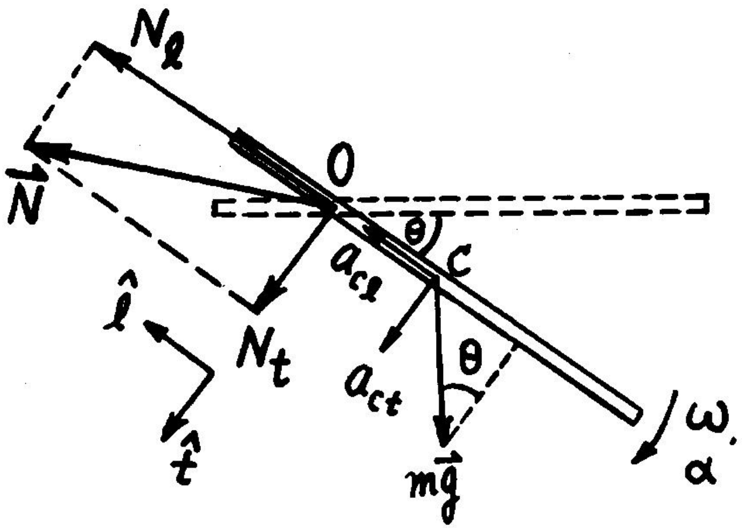
$$E_{P2}=-mg\frac{l}{4}\sin\theta$$

则： $$\frac{1}{2}J_o\omega^2-mg\frac{l}{4}\sin\theta=0 \qquad (1)$$

由平行轴定理

$$J_o = J_c + mh^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2$$

$$= \frac{7}{48}ml^2 \qquad (2)$$



由(1)、(2)得：$\omega = 2\sqrt{\dfrac{6g\sin\theta}{7l}}$

应用质心运动定理：$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_c$

$\hat{l}$方向：$-mg\sin\theta + N_l = ma_{cl}$ (3)

$\hat{t}$方向：$mg\cos\theta + N_t = ma_{ct}$ (4)

定轴转动定律：$M = \dfrac{l}{4}mg\cos\theta = J_o\beta$

$$a_{cl} = \frac{l}{4}\omega^2 = \frac{6}{7} g \sin\theta \qquad (5)$$

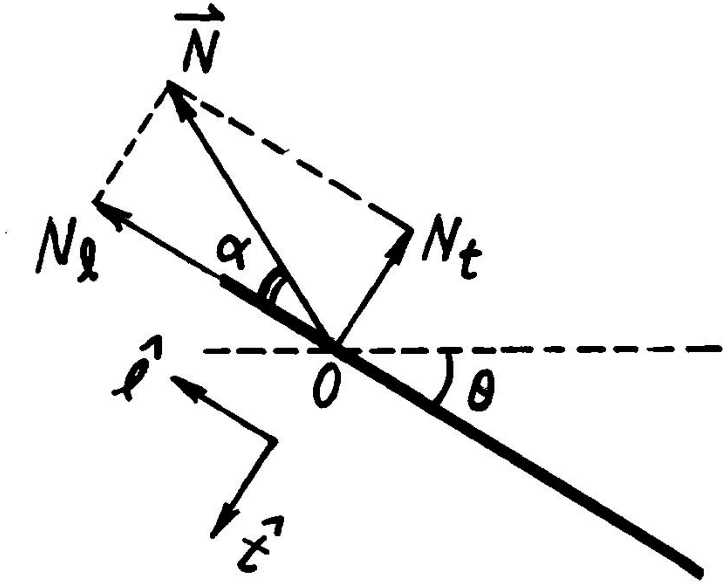
$$a_{ct} = \frac{l}{4}\beta = \frac{l}{4}\,\frac{\frac{l}{4} mg\cos\theta}{J_o} = \frac{3g\cos\theta}{7} \qquad (6)$$

由(3)(4)(5)(6) 可解得：

$$N_l = \frac{13}{7} mg \sin\theta,$$

$$N_t = -\frac{4}{7} mg \cos\theta$$

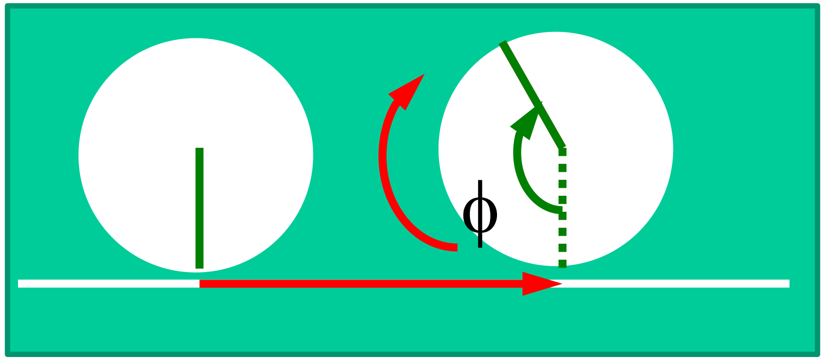
$$\vec{N} = \frac{13}{7} mg\sin\theta\ \hat{l} - \frac{4}{7} mg\cos\theta\ \hat{t}$$



三、纯滚动、摩擦力和附加条件相关

滚动 $\begin{cases} \text{有滑动滚动：接触面之间有相对滑动的滚动。} \\ \text{无滑动滚动（纯滚动）：接触面之间无相对滑动的滚动。} \end{cases}$

1.纯滚动（无滑摩擦）的运动学判据



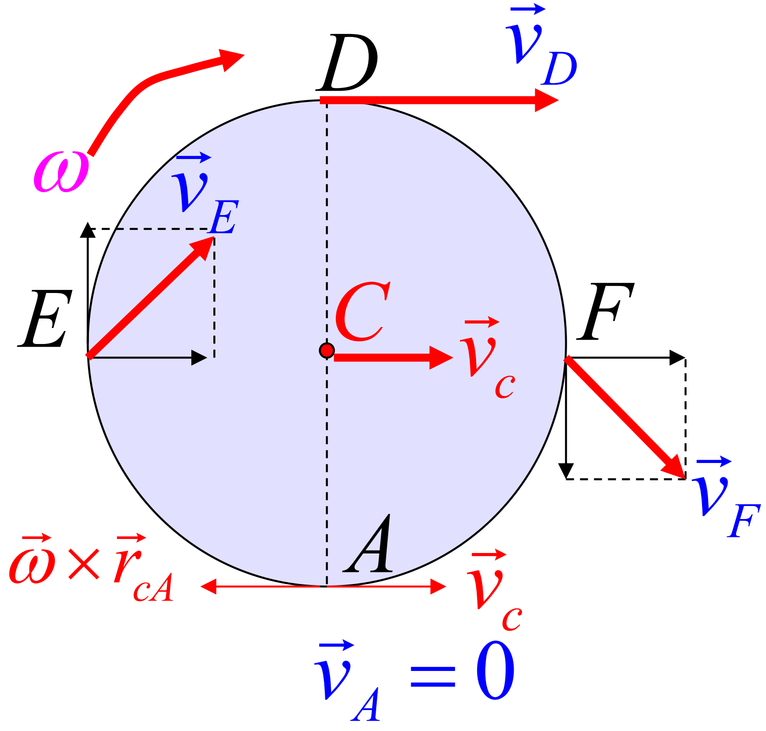
$$x = R\phi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = R\frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow v_c = R\omega$$

$$\Rightarrow a_c = R\beta$$

纯滚动运动学判据 $\begin{cases} v_c = R\omega \\ a_c = R\beta \end{cases}$

2.纯滚动接触点的速度为零



以质心C为基点，任一点E的速度为:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{CE}$$

最高点D的速度为

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{CD} = 2\vec{v}_C$$

接触点A的速度为

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{CA} = \vec{v}_C - \vec{v}_C = 0$$

如纯滚动有摩擦力则为静摩擦力

3.纯滚动中的瞬心和瞬轴

以接触点A为基点：

$$\vec{v}_A = 0$$

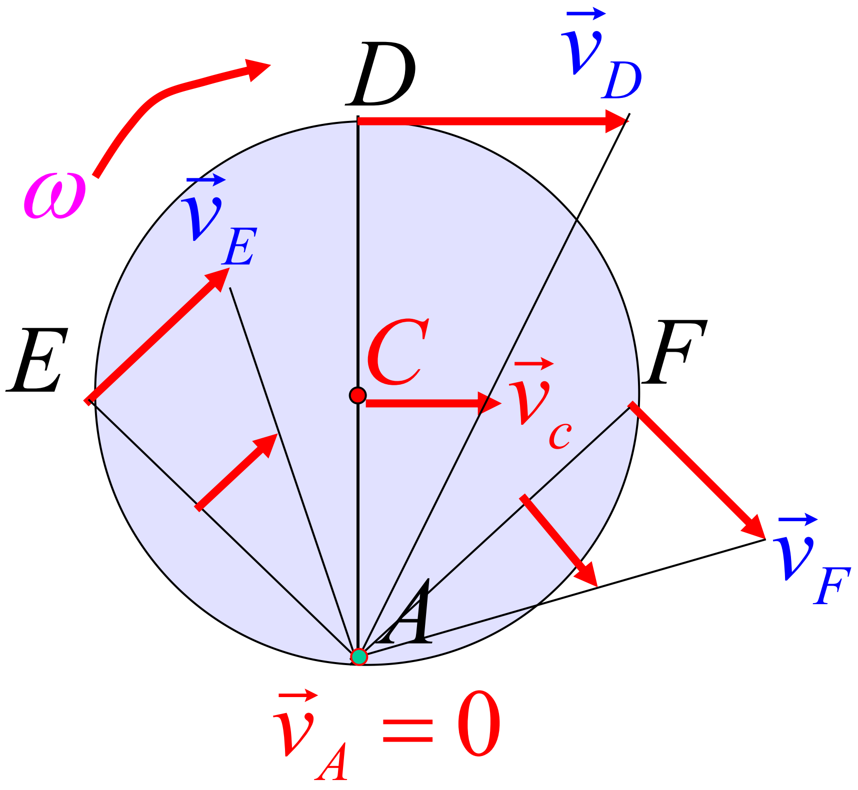
任一点 P 的速度为

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

例如： $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC}$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AD}$$

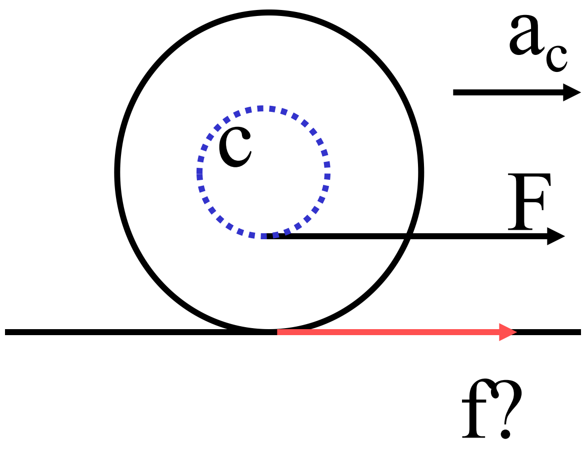


对于纯滚动，若取接触点A 为基点，在某瞬时刚体的平面运动，可视为对A点的单纯转动。

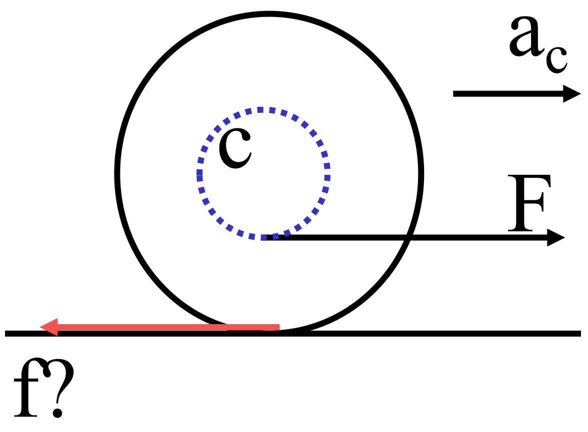
刚体力学习题课

纯滚动中的摩擦力

习题 3.45



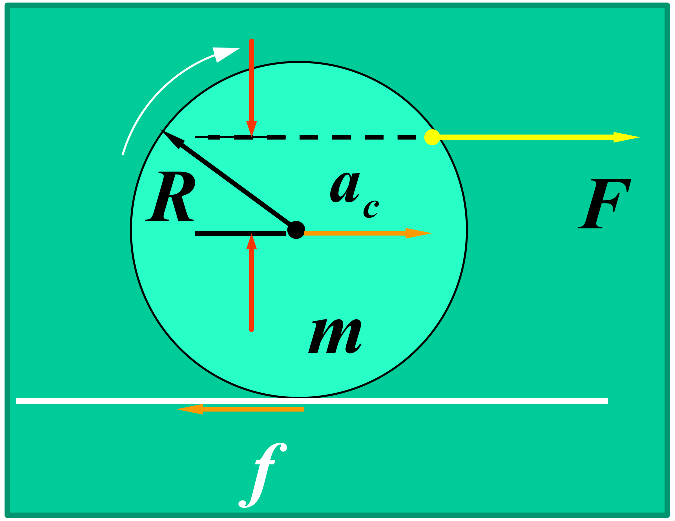
$$\begin{cases} F + f = ma_c \\ F.r + f.R = -J\beta \\ a_c = R\beta \end{cases}$$



$$\begin{cases} F - f = ma_c \\ F.r - f.R = -J\beta \\ a_c = R\beta \end{cases}$$

例4 一质量为m, 半径为R的均质圆柱, 在水平外力F作用下, 在粗糙的水平面上作纯滚动, 力的作用线与圆柱中心轴线的垂直距离为l. 求: 质心的加速度和圆柱所受的静摩擦力.

解: 设静摩擦力f的方向如图所示, 则由质心运动方程 $F - f = ma_C$



圆柱对质心的转动定律:

$$Fl + fR = J_c \beta$$

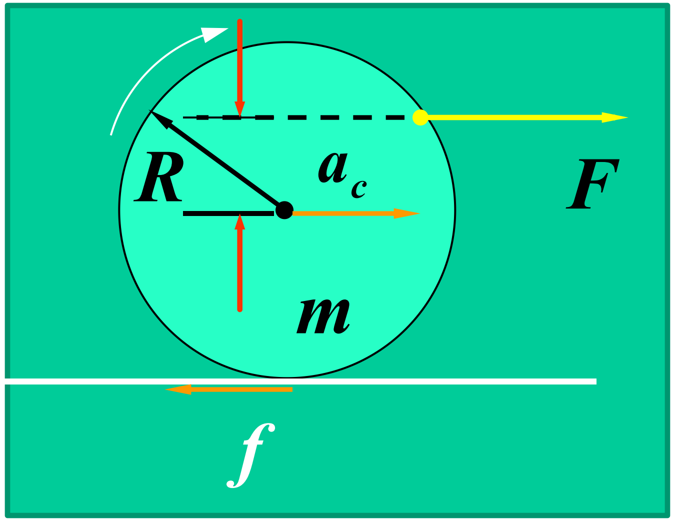
纯滚动条件 $a_C = R\beta$

圆柱对质心的转动惯量为 $J_c = \frac{1}{2} mR^2$

联立以上四式, 得

$$a_C = \frac{2F(R+l)}{3mR}$$

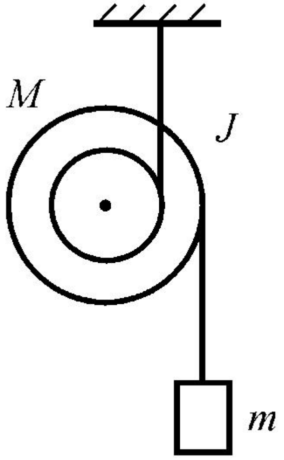
$$f = \frac{R-2l}{3R}F$$



由此可见

$$\begin{cases} l < R/2, f > 0 & \text{静摩擦力向后} \\ l > R/2, f < 0 & \text{静摩擦力向前} \\ l = R/2, f = 0 & \text{无摩擦力} \end{cases}$$

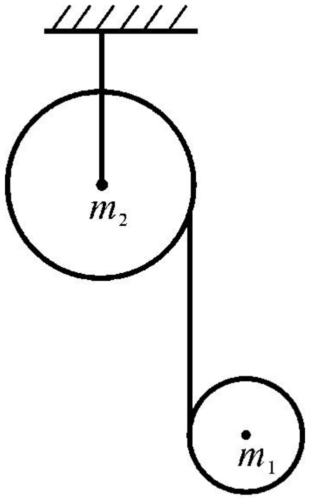
附加条件相关



$$a_c = \beta r_1$$

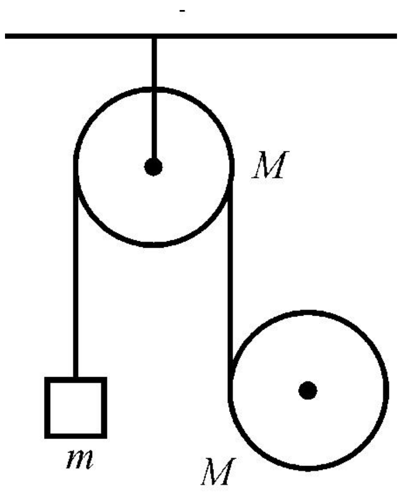
$$a = \beta(r_2 - r_1)$$

习题3.49



$$a_{1c} = \beta_2 r_2 + \beta_1 r_1$$

习题3.54



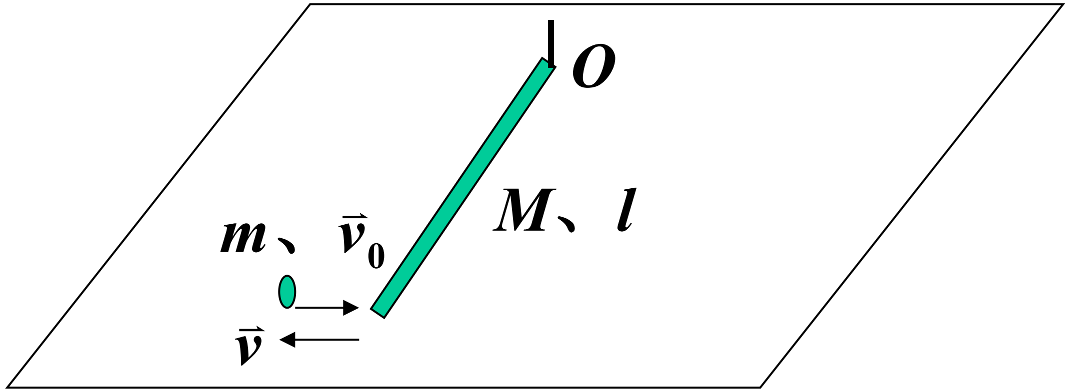
$$a_c = a + \beta_2 R$$

习题3.57

刚体力学习题课

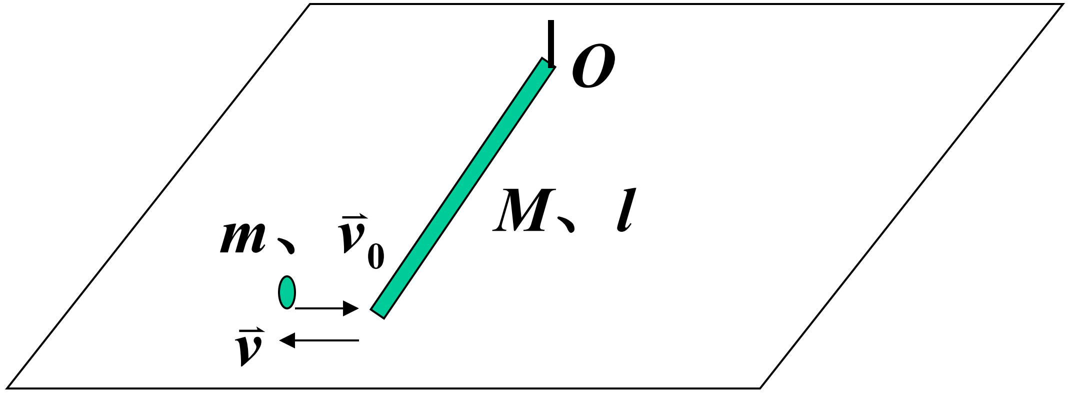
四、质点和刚体的碰撞相关

【例题5】如图所示，有一质量为 M、长为 l 的均匀细杆静止在光滑的水平桌面上，可绕通过细杆一端的竖直光滑钢钉转动。有一质量为 m 的小球以垂直于杆的水平速度 v_0 与杆的另一端碰撞，碰撞后小球以速度 v 反向弹回。设碰撞时间很短，求碰撞后细杆转动的角速度；若碰撞前拔去钢钉，碰撞后细杆的角速度又如何？



刚体力学习题课

解：由于质点与有转轴的细杆，轴对杆有冲力，故动量不守恒，但对O点冲力矩为零，对O点的角动量守恒

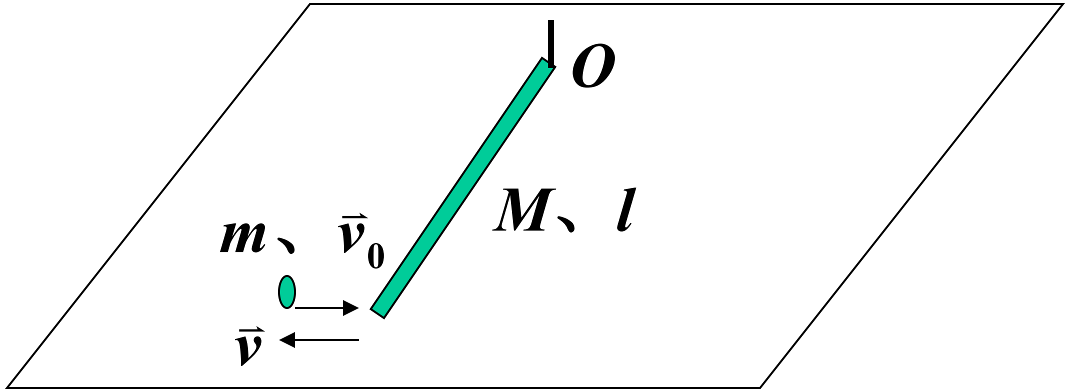


$$mv_0 l = \frac{1}{3}Ml^2\omega - mvl$$

$$\omega = \frac{3m(v+v_0)}{Ml}$$

刚体力学习题课

若拔去钢钉，细杆成为水平桌面上的自由刚体，故碰撞后细杆的运动为随质心的平动和绕质心的转动，因此水平方向的动量守恒和对质心轴的角动量守恒。

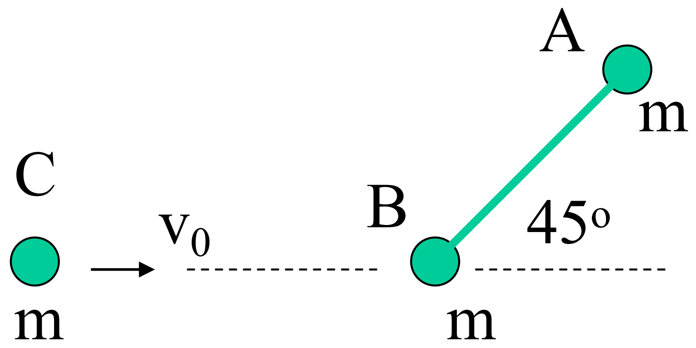


$$mv_0 = Mv_C - mv \qquad v_C = \frac{m(v_0+v)}{M}$$

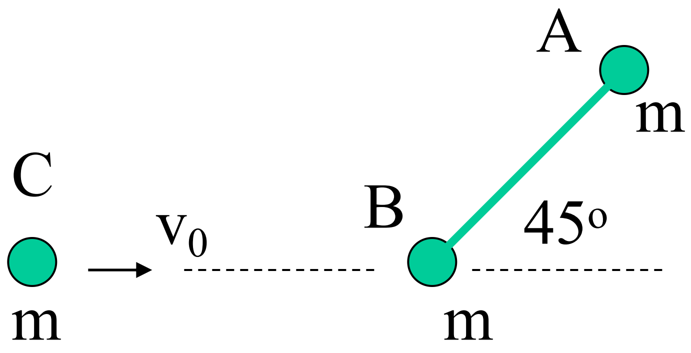
$$mv_0\frac{l}{2} = J_C\omega' - mv\frac{l}{2} \qquad \omega' = \frac{6m(v_0+v)}{Ml}$$

【例题6】教材，3.60题

如图所示，长l的刚性轻杆两端各连一个质量为m的小球A和B, 放在光滑的水平面上。质量也为m 的小球C以水平速度v_0与杆成45^0角方向飞来，与轻杆一端的小球B进行完全弹性碰撞，碰撞后小球C反方向弹回。求（1）碰撞后杆的角速度；（2）当A、B球和轻杆组成之刚体的质心移动距离x时，杆已转了几圈？（3）当A、B球和轻杆组成之刚体的质心移动x时，其动能多大？



【例题6】教材，3.60题



细杆成为水平面上的自由刚体，故碰撞后细杆的运动为随质心的平动和绕质心的转动，因此水平方向的动量守恒和对质心轴的角动量守恒，动能守恒。

$$m\upsilon_0 = 2mV_c - m\upsilon$$

$$m\upsilon_0 \frac{l}{2}\sin 45^o = J_c\omega - m\upsilon\frac{l}{2}\sin 45^o$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}(2m)V_c^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$J_c = 2m(\frac{l}{2})^2$$

$$\omega = \frac{4\sqrt{2}\upsilon_0}{7l}$$

$$V_c = \frac{4\upsilon_0}{7}$$

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0}{7}$$

（2）

$$t = \frac{x}{V_c} = \frac{2\pi N}{\omega}$$

$$N = \frac{\omega x}{2\pi V_c} = \frac{\sqrt{2}x}{2\pi l}$$

（3）

$$E_k = \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}(2m)V_c^2 = \frac{24}{49}m\upsilon_0^2$$

刚体力学习题课

五、陀螺仪的定点运动

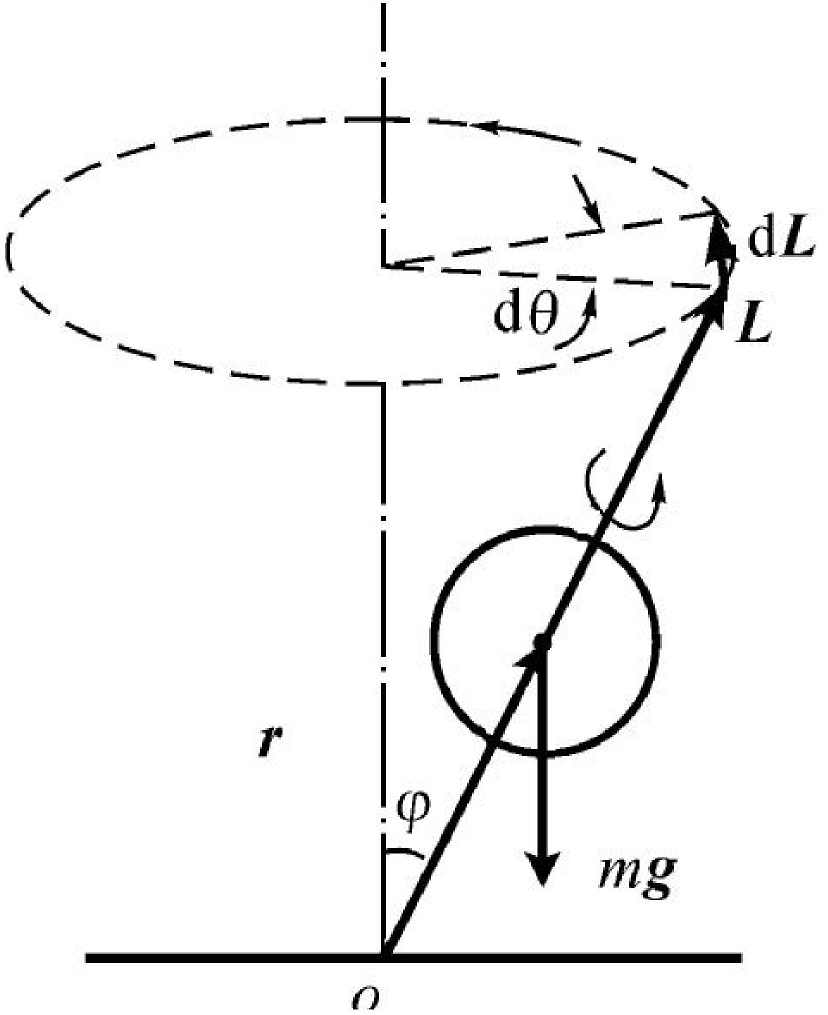
$$\vec{L}=J\vec{\omega}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$$

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Omega=\frac{M}{L\sin\varphi}=\frac{mgr}{J\omega}$$

其中$\omega>>\Omega$



刚体力学习题课

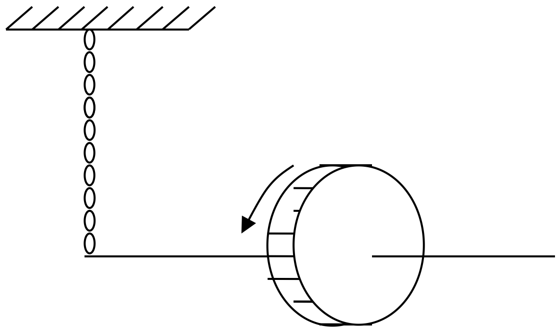
习题3.61（2）

如图所示，质量为m的轮子装在长为l的自转轴的中部，轴为刚性轻杆，其一端用绳子挂起，使轴处于水平位置。轮子绕自转轴以角速度ω高速转动，转动方向如图所示，请判定旋进方向。

自转角动量方向：向右

重力矩方向：向里

动量变化量方向：向里



作业:

3.17

3.19

3.21

3.52

3.57