浙江大学 2012-13 秋冬学期《 微积分Ⅰ》期末试卷参考答案

课程号：<u>061B0170</u>，开课院系：<u>数学系</u>

考试形式：闭卷，允许带<u>笔</u>入场

考试日期：<u>2013</u>年<u>1</u>月<u>17</u>日，考试时间：<u>120</u>分钟.

考生姓名：________________学号：______________________所属院系：______________________

题序	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	总 分
得分								
评卷人								

【注】**：第 1~10 题，每题均为 6 分；第 11~14 题，每题均为 10 分.**

1. 设$y=(\sin 2x)^x+(\arcsin 2x)^4$，求:$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y=e^{x\ln\sin 2x}+(\arcsin 2x)^4$.

$$(2)\ \frac{dy}{dx}=e^{x\ln\sin 2x}(\ln\sin 2x+\frac{2x\cos 2x}{\sin 2x})+4(\arcsin 2x)^3\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$=(\sin 2x)^x(\ln\sin 2x+2x\cot 2x)+\frac{8(\arcsin 2x)^3}{\sqrt{1-4x^2}}.\ (0<x<\frac{1}{2})$$

2. 设函数 $f(u)$ 可导，$y=y(x)$ 是由方程 $y=3f(xy)+\ln(1+\sin x)$ 所确定的可导函数，求:$\dfrac{dy}{dx}$.

方程两边同时对 x 求导，$y'=3f'(xy)(y+xy')+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

则：$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y(1+\sin x)f'(xy)+\cos x}{(1+\sin x)[1-3xf'(xy)]}.$$

3. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ y=\int_0^t (3u+1)\sin u^2 du \end{cases}$ 所确定，求：$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{p}}$.

(1) 由于 $\dfrac{dx}{dt}=6t+2$，$\dfrac{dy}{dt}=(3t+1)\sin t^2$；

则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{2}\sin t^2$，且 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{p}}=0.$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t\cos t^2}{6t+2}$，则：$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{p}}=\left.\dfrac{t\cos t^2}{6t+2}\right|_{t=\sqrt{p}}=-\dfrac{\sqrt{p}}{6\sqrt{p}+2}.$

4. 计算积分：$\int_{-1}^{1}\dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx.$

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx=2\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx\quad(\text{令：}\sqrt[3]{x}=u)$$

$$=2\int_0^1\frac{3u^2}{1+u^2}du=6\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du=6(u-\arctan u)\Big|_0^1=6(1-\frac{p}{4}).$$

5. 计算反常积分：$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

【方法一】：令 $x=\dfrac{1}{u}$，则：$dx=-\dfrac{1}{u^2}du.$

$$I=\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}}=-\sqrt{1-u^2}\Big|_0^1=1.$$

【方法二】：令 $x=\sec u$，则：$dx=\sec u\tan u du.$

$$I=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sec u\tan u}{\sec^2 u\tan u}du=\int_0^{\frac{p}{2}}\sin u du=1.$$

6. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+\sin x)}+\dfrac{1}{\ln(1-\sin x)}\right)$.

【方法一】：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{\ln(1+\sin x)\ln(1-\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin^2 x}{\sin x(-\sin x)}=1.$

【方法二】：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{\ln(1+\sin x)\ln(1-\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln\cos x}{\sin x(-\sin x)}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

7. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{1-\sqrt[3]{1-x^3}}$.

【方法一】：$I=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{-\frac{1}{3}x^3}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{x^2}=1.$

【方法二】：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\frac{1}{3}x^3}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)]-x}{x^3}=1.$

8. 求极限：$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

【方法一】：$I=\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\left(1+(\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

其中：$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\cos x}{-2\cos x\sin x}=-\dfrac{1}{2}.$

【方法二】：令$x=\dfrac{p}{2}-u$，则：$I=\lim\limits_{u\to 0}(\cos u)^{\frac{1}{\sin^2 u}}=\lim\limits_{u\to 0}\left(1+(\cos u-1)\right)^{\frac{1}{\cos u-1}\cdot\frac{\cos u-1}{1-\cos^2 u}}$

$$=\lim_{u\to 0}\left(1+(\cos u-1)\right)^{\frac{1}{\cos u-1}\cdot\frac{-1}{\cos u+1}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【方法三】：令$y=(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$，则：$\ln y=\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}$.

$$\lim_{x\to\frac{p}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-2\cos x\sin x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

因此，$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

9. 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛半径与收敛域.

$$(1)\ \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{(x-2)^n}\right| = \frac{|x-2|}{3}.$$

当$|x-2|<3$时，幂级数收敛；当$|x-2|>3$时，幂级数发散.

因此，幂级数的收敛半径$r=3$；其收敛开区间为$:(-1,5)$.

(2) 当$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛；当$x=5$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散.

因此，幂级数的收敛域为$:[-1,5)$.

10. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$展开成x的幂级数，并写出成立的区间.

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}3-1}{12}x^n.\quad(-1<x<1).$$

11. 计算不定积分$:\int\frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}\ln(1+x^2)dx.$

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{x}{1+x^2}\right)\ln(1+x^2)dx\\
&= -\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d\ln(1+x^2)\\
&= -\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\int\frac{xdx}{x^2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)\\
&= -\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+C.
\end{aligned}$$

12. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数.试证明：

(1) 存在 $x \in (0,1)$ 使得以曲线 $y = f(x)$ 为顶，在区间 $[0，x]$ 上的曲边梯形面积等于以 $f(x)$ 为高，以区间 $[x,1]$ 为底的矩形面积.
(2) 若 $f(x)$ 可导且 $f'(x) < 0$，则：(1) 中的 x 是唯一的.

(1) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt - (1-x)f(x)$，则：

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0) = -f(0) < 0$，$F(1) = \int_0^1 f(t)dt > 0$.

根据连续函数的介值定理，$\exists x \in (0,1)$ 使得 $F(x) = 0$.

即，
$$\int_0^x f(t)dt = (1-x)f(x).$$

故，存在 $x \in (0,1)$ 使得以曲线 $y = f(x)$ 为顶，在区间 $[0，x]$ 上的曲边梯形面积等于以 $f(x)$ 为高，以区间 $[x,1]$ 为底的矩形面积.
(2) 由于 $F'(x) = f(x) + f(x) - (1-x)f'(x) = 2f(x) - (1-x)f'(x)$.
又因为 $f(x) > 0$，$f'(x) < 0$，则：$F'(x) > 0$；因此，(1) 中所得的 x 是唯一的.

13. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x) < 0$，$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^1 xf(u)du + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(u)}{u^2}du$.

(1) 求：$F''(x)(x>0)$；(2) 讨论曲线 $y = F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的凸凹性并求其拐点.

(1) $F(x) = -x\int_1^{\frac{1}{x}} f(u)du + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(u)}{u^2}du$，则：

$$F'(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} f(u)du - xf(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2}) + x^2 f(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2}) = -\int_1^{\frac{1}{x}} f(u)du + (\frac{1}{x}-1)f(\frac{1}{x}).$$

$$F''(x) = \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x}-1)f'(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2}) = \frac{x-1}{x}f'(\frac{1}{x}).$$

(2) 当 $0 < x < 1$ 时，$F''(x) < 0$，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 内为凸函数；
　当 $x > 1$ 时，$F''(x) > 0$，$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内为凹函数.
因此，点 $(1,0)$ 为曲线 $y = F(x)$ 的拐点.

14. 设 $a_n=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^n x dx.(n\ge 2)$

(1) 计算：a_n+a_{n+2}，并证明$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}.(n\ge 2)$

(2) 证明：级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

(1) $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^n xdx+\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^{n+2} xdx=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^n xd(\tan x)=\left.\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{p}{4}}=\frac{1}{n+1}.$$

(2) 又$a_{n+1}=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^{n+1} xdx<\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^n xdx=a_n$，因此,$\{a_n\}$ 单调递减，且$a_n>0$.

- $2a_n>a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$，则：$a_n>\frac{1}{2(n+1)}$.
- $2a_n<a_n+a_{n-2}=\frac{1}{n-1}$，则：$a_n<\frac{1}{2(n-1)}$. $(n\ge 4)$

又$a_2=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{p}{4}}\left(\sec^2 x-1\right)dx=1-\frac{p}{4}$，则：$\frac{1}{6}<a_2<\frac{1}{2}$.

$$a_3=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan^3 xdx=\int_0^{\frac{p}{4}}(\sec^2 x-1)\tan xdx=\int_0^{\frac{p}{4}}\tan xd(\tan x)-\int_0^{\frac{p}{4}}\tan xdx$$

$$=\frac{1}{2}+\ln\cos x\Big|_0^{\frac{p}{4}}=\frac{1-\ln 2}{2}.$$

而$\frac{2}{3}<\ln 2<\frac{3}{4}$，因此，$\frac{1}{8}<a_3<\frac{1}{4}$.

综上可得，当$n\ge 2$时，$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

(3) 由于$\{a_n\}$ 单调递减，且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，根据*Leibniz* 判别法,$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

又$a_n>\frac{1}{2(n+1)}$，因此,$\sum_{n=2}^{+\infty}a_n$ 发散；故，级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.