第二章　非线性方程求根

本章主要讨论**单变量非线性方程：**

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

的求根问题， $x\in R,\ f(x)\in C[a,b].$

- **问题：**

（1）“根在哪里”，即确定根所在的区间，进行根的隔离。

（2）“根的求法”，通过数值方法，近似求解，并保证精度要求。

若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$, 根据闭区间上连续函数性质可知 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根，这时称 $[a,b]$ 为方程**(2.1)**的**有根区间**, **通常可通过逐次搜索法求得方程(2.1)的有根区间。**

例　求 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.8x-41.77=0$ 的有根区间。

解　根据有根区间定义，对 $f(x)=0$ 的根进行搜索计算，结果如下：

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$ 的符号	−	−	+	+	−	−	+

由此可知方程的有根区间为： $[1,2],[3,4],[5,6]$ **。**

- **根的近似求解：**将区间 $[a,b]$ 分成若干小的子区间，由零点定理确定根所在的子区间，并根据精度要求，不断细分直到满足精度要求。最简单的方法就是**二分法**。

§1 二分法

二分法是方程求解的一个简单而可靠的方法。

设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$, 根据连续函数性质可知 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根 x^*。

- **二分法**：考察**有根区间** $[a,b]$，取中点 $x_0=(a+b)/2$，将它分为两半。假设中点 x_0 不是 $f(x)$ 的零点，然后进行根的搜索，即检查 $f(x_0)$ 与 $f(a)$ 是否同号，如果同号，说明所求的根 x^* 在 x_0 的右侧，这时令 $a_1=x_0, b_1=b$; 否则 x^* 必在 x_0 的左侧，令 $a_1=a, b_1=x_0$（如图）。

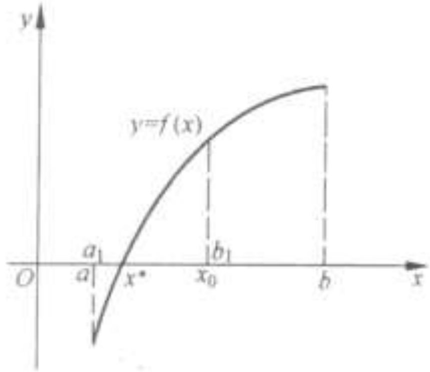

图 7-1

不管出现哪一种情况，**新的有根区间** $[a_1,b_1]$ **的长度仅为** $[a,b]$ **的一半**，对压缩了的有限区间 $[a_1,b_1]$ 再分为两半，然后通过根的搜索判定所求的根在 x_1 的哪一侧，从而又确定一个新的有根区间 $[a_2,b_2]$，其长度是 $[a_1,b_1]$ 的一半，如此反复二分下去，即可得出**一系列的有根区间：**

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

其中区间每个区间都是前一个区间的一半，因此 $[a_k,b_k]$ 的长度：$b_k-a_k=(b-a)/2^k$ 当 $k\to\infty$ 时趋于零，就是说，**如果二分过程无限地继续下去，这些区间最终必收缩于一点** x^*，该点就是所求的根。

每次二分后，取有根区间$[a_n,b_n]$的中点$x_n=(a_n+b_n)/2$作为根的近似值，则在二分过程中可以获得一个**近似根的序列$x_0,x_1,x_2,\cdots$,该序列必以根x^*为极限**。

由$x^*\in[a_n,b_n]$，可得

$$\left|x^*-x_n\right|\le\frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \qquad \textbf{(2.2)}$$

只要足够多次(即n充分大)，使得

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)<\varepsilon$$

即$n>\left[\ln\frac{b-a}{\varepsilon}/\ln 2\right]$，就有

$$\left|x^*-x_n\right|<\varepsilon$$

这里ε为预定的精度。

注：在实际计算中，若$|f(x_n)|$很小：$|f(x_n)|<\delta$（δ为给定的误差限)，则x_n就可作为近似根。

例 1 见教材 p. 14 .

例 求方程$f(x)=x^3-x-1=0$在区间$[1.0,1.5]$内的一个实根，要求准确到小数点后的第 2 位。

解 $a=1.0,b=1.5,$ 由 $f(a)<0,f(b)>0$ 知 $x^*\in(a,b)$；

取$[a,b]$的中点$x_0=1.25,$将区间二等分，由于$f(x_0)<0$，$f(x_0)f(b)<0$，故所求的根x^*必在x_0右侧，这时应令$a_1=x_0=1.25,\ b_1=b=1.5$，得$x^*\in(a_1,b_1)$；

如此反复二分下去，按误差估计**(2.2)**式，只要二分 6 次$(n=6)$，

便能达到预定的精度 $|x^* - x_6| \le 0.005$（$x_6 = (a_6 + b_6)/2$）。

二分法的计算结果如下表：

表　计算结果

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$符号
0	1.0	1.5	1.25	−
1	1.25	1.5	1.375	+
2	1.25	1.375	1.3125	−
3	1.3125	1.375	1.3438	+
4	1.3125	1.3438	1.3281	+
5	1.3125	1.3281	1.3203	−
6	1.3203	1.3281	1.3242	−

- 二分法**程序框图**见教材图 2-2（p.15）。
- **二分法的优点是算法简单，且总是收敛的，缺点是事先要确定有根区间，且收敛较慢，且不能用于求复根或偶数重根，故一般不单独将其用于求根，只用其求根的一个较好的近似值。**

§2　迭代法

迭代法是一种逐次逼近的方法。

2.1　不动点迭代法（简单迭代法）

将方程**(2.1)**（即 $f(x) = 0$）改写成等价的形式：

$$x = g(x) \tag{2.3}$$

若 x^* 满足 $f(x^*)=0$，则$x^* = g(x^*)$，反之亦然。称 x^* 为函数$g(x)$的一个**不动点**。

选择一个初始近似值 x_0，将它代入**(2.3)**右端，即可求得：

$$x_1 = g(x_0)$$

可以如此反复迭代计算：

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{2.4}$$

称 $g(x)$ 为**迭代函数**。

如果对 $x_0 \in [a,b]$，由**(2.4)**得到的**迭代序列** $\{x_k\}$ 有极限：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

则称**迭代法(2.4)收敛**，且 $x^* = g(x^*)$ 为 $g(x)$的不动点，称**(2.4)**为**不动点迭代法**。若迭代序列发散，则称**迭代法发散。**

- **不动点迭代法基本思想：**将隐式方程 $f(x)=0$ 化为显式的计算公式 $x = g(x)$，然后通过迭代，求方程的近似根。
- **迭代法几何意义：**方程$x = g(x)$的求根问题在 xy 平面上就是要确定曲线 $x = g(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点 P^*。

对于 x^* 的某个近似值 x_0，在曲线$y = g(x)$上可确定一点 P_0，它以 x_0 为横坐标，而纵坐标等于 $g(x_0) = x_1$。过 P_0 引平行 x 轴的直线，设此直线交

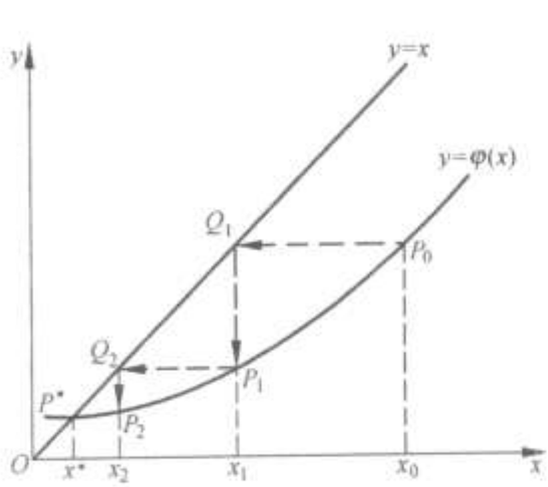

图 7-2

$y=x$ 于点 Q_1，然后过 Q_1 再作平行于 y 轴的直线，它与曲线 $y=g(x)$ 的交点记作 P_1，则点 P_1 的横坐标为 x_1，纵坐标则等于 $g(x_1)=x_2$。按图 7-2 中箭头所示的路径继续做下去，在曲线 $y=g(x)$ 上得到点列 P_1,P_2，…，其横坐标分别为由 $x_{k+1}=g(x_k)$ 求得。如果点列 $\{P_k\}$ 趋向于点 P^*，则相应的迭代值 x_k 收敛到所求的根 x^*。

例 2 求方程：$f(x)=x^3-x-1=0$
在 $x_0=1.5$ 附近的根 x^*。

解 将上述方程改写成下列形式：

$$x=\sqrt[3]{x+1}$$

据此建立迭代公式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1},\quad k=0,1,2,\cdots$$

表 2-2 计算结果

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.32476
1	1.35721	6	1.32473
2	1.33086	7	1.32472
3	1.32588	8	1.32472
4	1.32494		

我们看到，如果仅取 6 位数字，那么结果 x_7 与 x_8 完全相同，这时可以认为 x_7 实际上已满足方程，即为所求的根。

应当指出，**迭代法的效果并不是总能令人满意的。**譬如，设方程的另一种等价形式：$x = x^3 - 1$

建立迭代公式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1$$

迭代初值仍取 $x_0 = 1.5$，则有 $x_1 = 2.375$, $x_2 = 12.39, \cdots$, x_k 会越来越大，不可能趋于某个极限，这种不收敛的迭代过程称作是**发散的**。

上例表明原方程化为(2.3)的形式不同，有的收敛，有的发散，而只有收敛的迭代过程(2.4)才有意义。

例 用迭代法求方程

$$f(x) = x - x^{1/3} - 2 = 0$$

的根。

解 方程在 $x = 3.5$ 附近有根。构造如下三个迭代函数：

$$g_1(x) = x^{1/3} + 2$$

$$g_2(x) = (x-2)^3$$

$$g_3(x) = \frac{6+2x^{1/3}}{3-x^{-2/3}}$$

下表是初始值 $x_0 = 3$ 时，分别用三个迭代函数得到的迭代序列。

表 迭代结果

k	$x_{k=}g_1(x_{k-1})$	$x_{k=}g_2(x_{k-1})$	$x_{k=}g_3(x_{k-1})$
0	3	3	3
1	3.4422495703	1	3.5266442931

2	3.5098974493	−1	3.5213801474
3	3.5197243050	−27	3.5213797068
4	3.5211412691	−24389	3.5213797068
5	3.5213453678	−1.45107e+013	
6	3.5213747615	−3.05539e+039	
7	3.5213789946	−2.85233e+118	
8	3.5213796042	−Inf	
9	3.5213796920	−Inf	
10	3.5213797047	−Inf	
11	3.5213797065	−Inf	

可知，$g_1(x), g_3(x)$ 收敛，但 $g_3(x)$ 比 $g_1(x)$ 快很多；而$g_2(x)$是发散的。

下面讨论 $g(x)$不动点的存在性及迭代法(2.4)的收敛性。

2.3　迭代法收敛的充分条件

- **压缩映照：**在区间$[a,b]$上定义的函数 $g(x)$，若存在常数 $L, 0 \le L < 1$，使得$\forall\, x, y \in [a,b]$，都有

$$|g(x) - g(y)| \le L|x - y|$$

则称映照 $g(x)$在区间$[a,b]$上是**压缩的**。

- **不动点的存在唯一性及误差分析**

定理 1　设 $g(x) \in C[a,b]$ 满足以下两个条件：

（1）对任意 $x \in [a,b]$，有 $g(x) \in [a,b]$；

（2）存在常数 $L, 0 \le L < 1$，使对任意 $x, y \in [a,b]$，有

$$|g(x)-g(y)|\le L|x-y|$$

则

（1） $x=g(x)$在$[a,b]$上存在唯一实根x^*；

（2） 对任意初值$x_0\in[a,b]$，由$x_{k+1}=g(x_k)$得到的迭代序列$\{x_k\}$收剑到$x=g(x)$在$[a,b]$的唯一实根x^*，并有误差估计：

$$|x^*-x_k|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \tag{2.5}$$

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \tag{2.6}$$

证明　先证不动点存在性。定义函数：

$$\varphi(x)=g(x)-x$$

显然$\varphi(x)\in C[a,b]$。因$a\le g(x)\le b$，有

$$\varphi(a)=g(a)-a\ge 0,\quad \varphi(b)=g(b)-b\le 0$$

由连续函数性质可知存在$x^*\in(a,b)$，使$\varphi(x^*)=0$，即$x^*=g(x^*)$，x^*即为$g(x)$的不动点。

再证唯一性。设x_1^*及$x_2^*\in[a,b]$是$g(x)$的两个不同的不动点，则由压缩映射条件2，得

$$|x_1^*-x_2^*|=|g(x_1^*)-g(x_2^*)|\le L|x_1^*-x_2^*|<|x_1^*-x_2^*|$$

矛盾。故$g(x)$的不动点只能是唯一的。

误差估计：由条件（2）得

$$|x_k-x^*|=|g(x_{k-1})-g(x^*)|\le L|x_{k-1}-x^*|\le\cdots\le L^k|x_0-x^*|$$

因$0<L<1$，故当$k\to\infty$时，序列$\{x_k\}$收剑到x^*。

又

$$|x_{k+1}-x_k| = |g(x_k)-g(x_{k-1})| \le L|x_k-x_{k-1}| \le L^k|x_1-x_0|$$

于是，对任意正整数 p，有

$$\begin{aligned}\left|x_{k+p}-x_k\right| &\le \left|x_{k+p}-x_{k+p-1}\right|+\left|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}\right|+\cdots+\left|x_{k+1}-x_k\right| \\ &\le (L^{k+p-1}+L^{k+p-2}+\cdots+L^k)\,|x_1-x_0| \\ &\le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|\end{aligned}$$

令 $p\to\infty$，注意到 $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k+p}=x^*$，即得式**(2.6)**。

（$|x_{k+1}-x_k| \ge |x^*-x_k|-|x^*-x_{k+1}| \ge |x^*-x_k|-L|x^*-x_k| = (1-L)|x^*-x_k|$）

- **注：**在实际迭代计算过程中，有时由于 L 估计的困难性，所以，由（2.5）估计式:

$$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

知，**只要相邻两次计算结果的偏差** $\left|x_{k+1}-x_k\right|$ **足够小，即可保证近似值** x_k **具有足够精度。**

- 由 Lagrange 中值定理可知，如果 $g(x)\in C^1[a,b]$，且对任意 $x\in[a,b]$，有 $|g'(x)|\le L<1$

  则对 $\forall x,y\in[a,b]$，有

$$|g(x)-g(y)| = |g'(\xi)(x-y)| \le L|x-y|, \xi\in(a,b)$$

表明定理中的条件（2）可用 $g'(x)$ **的性质代替。**

在**例 2** 中，$f(x)=x^3-x-1=0$

当 $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 时，对任意 $x\in[1,2]$，有

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right| \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \triangleq L \approx 0.21 < 1$$

又因为$1 \le \sqrt[3]{2} \le g(x) \le \sqrt[3]{3} \le 2$，所以迭代法是收敛的。

而当 $g(x) = x^3 - 1$时，对任意 $x \in [1,2]$，有 $|g'(x)| = |3x^2| \ge 3 > 1$, 不满足定理条件。

- **注**：一般情况下，L越小，收敛速度越快。

● 局部收敛性

定理 1 中给出的迭代序列 $\{x_k\}$对于任何初始值 $x_0 \in [a,b]$ 都收敛，这种收敛性通常称为**全局收敛性（整体收敛性）**。有时不易检验，实际应用时通常只在不动点 x^* 的邻近考察其收敛性，即**局部收敛性**：

$g(x)$ 有不动点 x^*，如果存在 x^* 的某个邻域 $S = \{x||x - x^*| \le \delta\}$，对任意 $x_0 \in S$，迭代**(2.4)**产生的序列 $\{x_k\} \in S$，且收敛到 x^*，则称**迭代法(2.4)局部收敛**。

定理 2 设 x^* 为 $g(x)$的不动点，$g'(x)$在 x^* 的某个邻域连续，且 $|g'(x)| < 1$，则迭代法**(2.4)**局部收敛。

证明 由连续函数的性质，存在 L 和 x^* 的某个领域 $S = \{x||x - x^*| \le \delta\} = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 对任意 $x \in S$, 成立：

$|g'(x)| \le L < 1$

又

$|g(x) - x^*| = |g(x) - g(x^*)| \le L|x - x^*| \le |x - x^*|$

知，对任意 $x \in S$，总有 $g(x) \in S$.

于是由定理 1 知，对任意 $x_0 \in S$，迭代序列 $\{x_k\} \in S$，且收

敛到 x^*。

例 3 方程 $x=e^{-x}$ 有唯一实根 $x^*\in(0,1)$，试分析迭代过程 $x_{k+1}=e^{-x_k}$ （$k=0,1,2,\cdots$)的收敛性。

解 $g(x)=e^{-x}$，$g'(x)=-e^{-x}$，对任意 $x\in(0,1)$，有

$$|g'(x)|=|e^{-x}|<e^0=1$$

由定理 2 知，迭代法 $x_{k+1}=e^{-x_k}$ 在 x^* 附近局部收敛，只要取好的初值 x_0（充分接近 x^*），则迭代法收敛。

§3 牛顿迭代法与弦割法

牛顿（Newton）迭代法是求解非线性方程（组）的重要方法之一。

3.1 牛顿迭代公式及其几何意义

- **牛顿法**实质上是一种**线性化方法**，其**基本思想：将非线性方程 $f(x)=0$ 逐步归结为某种线性方程求解。**

对于单根和重根，收敛速度不同。

设 $f(x)$ 可表示成$f(x)=(x-x^*)^m q(x)$，且$q(x^*)\neq 0$，则称 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的 m **重根**，当 $m=1$时，称 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的**单根**。

由 Taylor 公式，得：

- 设 $f(x)\in C^m[a,b]$，则 $f(x)$ 在内的点 x^* 具有m重根的充要条件是：

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\ \ f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

- **单根情形**

设 $f(x)\in C^1(x^*-\delta,x^*+\delta)$， $f'(x^*)\neq 0$，即 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的单根。

设已知方程 $f(x)=0$ 有近似根 x_k （ $f'(x_k)\neq 0$ ），将函数 $f(x)$ 在点 x_k 展开，有

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

于是方程 $f(x)=0$ 可近似地表示为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

记其根为 x_{k+1}，则 x_{k+1} 的计算公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k=0,1,\cdots \qquad \textbf{(2.8)}$$

——牛顿迭代法

- **牛顿法的几何解释：**方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 可解释为曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标（下图所示）。

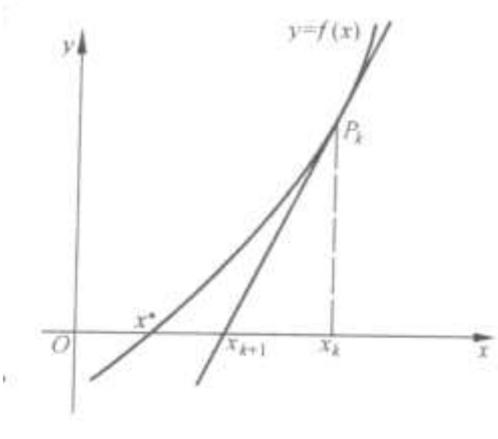

图 7-3

设 x_k 是根 x^* 的某个近似值，过曲线 $y=f(x)$ 上横坐标 x_k

的点 P_k 引切线，并将该切线与 x 轴的交点的横坐标 x_{k+1} 作为 x^* 的新的近似值。注意到切线方程为

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

这样求得的值 x_{k+1} 就是牛顿法**(2.8)**的计算结果。所以，**牛顿法亦称切线法**。

3.2　牛顿迭代法收敛的充分条件

- **牛顿迭代法的收敛性，可直接由定理 2 得到：**

定理 3 设 $f(x)$ 在其零点 x^*的某邻域 $S=\{x||x-x^*|\le\delta\}$ 内有二阶连续导数，且$f'(x^*)\neq 0$（即 x^*为单根），则牛顿迭代法在 x^* 附近具有局部收敛性。

证明　牛顿迭代法的迭代函数为：

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.9}$$

有：$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

假定 x^* 是 $f(x)$ 的一个单根，即 $f(x^*)=0$，$f'(x^*)\neq 0$，则由上式知$g'(x^*)=0$，于是由定理 2 得，牛顿迭代法在 x^* 附近具有局部收敛性。

定理 4　对方程 $f(x)=0$，若存在区间 $[a,b]$，使

（1）　$f''(x)$在 $[a,b]$上连续；

（2）　$f(a)f(b)<0$；

（3）　对任意 $x\in[a,b]$，都有 $f'(x)\neq 0$；

（4）　$f''(x)$在 $[a,b]$上保号。

则当初值 $x_0 \in [a,b]$且$f(x_0)f''(x_0) > 0$ 时，牛顿迭代法（2.8）产生的迭代序列 $\{x_k\}$收敛于方程 $f(x) = 0$在 $[a,b]$上的唯一实根 x^*。

（几何意义见教材 p.24，图 2-7）

例 4　用牛顿迭代法方程 $x - cosx = 0$ 的实根，要求准确到 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$.

解　方程 $x - cosx = 0$ 存在唯一实根 $x^* \in [0,\frac{\pi}{2}]$，$f(x) = x - cosx$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足**定理** 4 的条件。

取 $x_0 = 1$，有$f(x_0)f''(x_0) > 0$，则相应的**牛顿迭代法：**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - cosx_k}{1 + sinx_k}, \qquad k = 0,1,\cdots$$

收敛，计算可得 $x_4 = 0.739085$ 满足精度要求，参见表 2−3.

表 2−3

k	x_k	k	x_k
0	1	3	0.739086
1	0.750364	4	0.739085
2	0.739113		

- **牛顿迭代法的计算步骤：**

（1）选定初始近似值 x_0，计算 $f_0 = f(x_0)$，$f_0' = f'(x_0)$

（2）迭代。按公式：

$$x_1 = x_0 - f_0 / f_0'$$

迭代一次，得新的近似值 x_1，计算 $f_1 = f(x_1)$，$f_1' = f'(x_1)$。

（3）控制。如果 x_1 满足$|\delta| < \varsigma_1$或$|f_1| < \varsigma_2$，则终止迭代，以 x_1 作为所求的根；否则转（4）。此处ς_1，ς_2 是允许误差，而

$$\delta=\begin{cases}|x_1-x_0|, & \text{当}|x_1|<C\text{时} \\ \dfrac{|x_1-x_0|}{|x_1|}, & \text{当}|x_1|\geq C\text{时}\end{cases}$$

其中 C 是取绝对误差或相对误差的控制常数，一般可取 C=1。

（4）修正。如果迭代次数达到预先指定的次数 N，或者 $f'=0$，则方法失败；否则以 (x_1, f_1, f_1') 代替 (x_0, f_0, f_0') 转（2）继续迭代。

注：牛顿法的优点是收敛快，缺点一是每步迭代要计算 $f(x_k)$ **及** $f'(x_k)$，计算量较大且有时 $f'(x_k)$ 计算较困难，**缺点二是初始近似** x_0 **只在根** x^* **附近才能保证收敛**，如 x_0 给的不合适可能不收敛。为克服这两个缺点，通常可用下述方法。

（1）简化牛顿法，也称**平行弦法**，**其迭代公式为：**

$$x_{k+1}=x_k-Cf(x_k),\ \ C\neq 0,\ k=0,1,\cdots$$

迭代函数为：

$$g(x)=x-Cf(x)。$$

若 $|g'(x)|=|1-Cf'(x)|<1$，即取 $0<Cf'(x)<2$，在根 x^* 附近成立，则迭代法局部收敛。若取 $C=\frac{1}{f'(x_0)}$，则称为**简化牛顿法**，其几何意义是用平行弦与 x 轴交点作为 x^* 的近似。

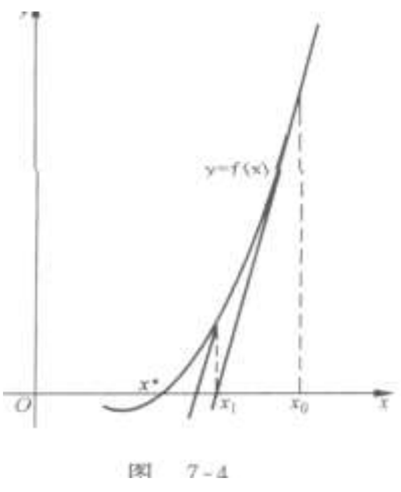

图 7-4

（2）**牛顿下山法**。牛顿法收敛性依赖初值 x_0 的选取。如果 x_0 偏离所求根 x^* 较远，则牛顿法可能发散。例如，用牛顿法求解方程：

$$x^3 - x - 1 = 0$$

此方程在 $x = 1.5$ 附近的一个根 x^* 。取迭代初值 $x_0 = 1.5$，用牛顿法公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$$

计算得：

$$x_1 = 1.34783,\ x_2 = 1.32520,\ x_3 = 1.32472$$

迭代 3 次得到的结果 x_3 有 6 位有效数字。

但是，如果改用 $x_0 = 0.6$ 作为迭代初值，则依牛顿法公式迭代一次得 $x_1 = 17.9$，这个结果反而比 $x_0 = 0.6$ 更偏离了所求的根 $x^* = 1.32472$ 。

- **为了防止迭代发散，对迭代过程附加一项要求，即具有单调性：**

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

满足这项要求的算法称下山法。

将牛顿法与下山法结合起来使用，即在下山法保证函数值稳定下降的前提下，用牛顿法加快收敛速度。

- **牛顿下山法：将牛顿法的计算结果：**

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

与前一步的近似值 x_k适当加权平均作为新的改进值：

$$x_{k+1}=\lambda\bar{x}_{k+1}+(1-\lambda)x_k=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

选择**下山因子**λ时从$\lambda=1$开始，逐次将λ减半进行试算，直到能使下降条件满足为止。

若用此法解上述方程，当$x_0=0.6$时，由牛顿迭代法求得$x_1=17.9$，它不满足条件下降条件，通过λ逐次取半进行试算，当$\lambda=\dfrac{1}{32}$时可求得$x_1=1.140625$。此时$f(x_1)=-0.656643$，而$f(x_0)=-1.384$，显然$|f(x_1)|<|f(x_0)|$。由x_1计算x_2，x_3时$\lambda=1$，均能使下降条件成立。计算结果如下：

$$x_2=1.36181,\quad f(x_2)=0.1866$$
$$x_3=1.32628,\quad f(x_3)=0.00667$$
$$x_4=1.32472,\quad f(x_4)=0.0000086$$

x_4即为x^*的近似。一般情况只要能使下降条件成立，则可得到$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=0$，从而使$\{x_k\}$收敛。

3.3 弦割法（割线法）

- **建立在插值原理基础上，利用已求函数$f(x_k),f(x_{k-1}),\cdots$来回避导数值$f'(x_k)$的计算。**

设x_k,x_{k-1}是$f(x)=0$的近似根，利用$f(x_k),f(x_{k-1})$构造一次插值多项式$p_1(x)$，并用$p_1(x)=0$的根作为$f(x)=0$的新

的近似根 x_{k+1}。由

$$p_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

因此有（令 $p_1(x_{k+1}) = 0$）：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1,2,\cdots \quad \textbf{(2.10)}$$

—— 弦割法（割线法，Secant method）

弦割法：牛顿法 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 中的导数 $f'(x_k)$ 用差商 $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 取代的结果。

- **弦割法的几何意义：**

如图所示，曲线 $y = f(x)$ 上横坐标 x_k、x_{k-1} 的点分别记为 P_k、P_{k-1}，则弦线 $\overline{P_k P_{k-1}}$ 的斜率等差商值 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$（$= f'(\xi)$），其方程是：

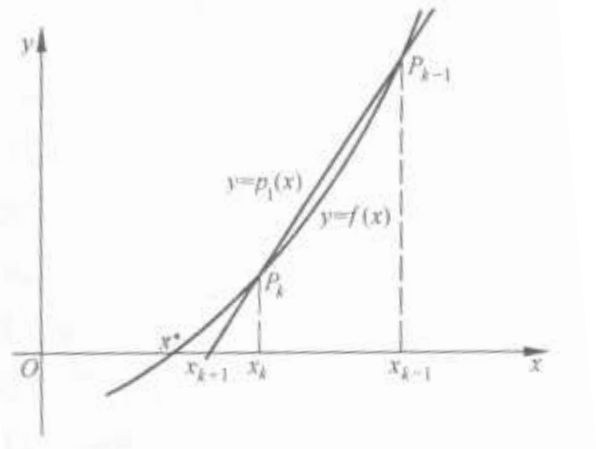

图 7-5

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

因此，按**(2.10)**求得的 x_{k+1} 实际上是弦线 $\overline{P_k P_{k-1}}$ 与 x 轴交点的横坐标。因此称这种算法为**弦割法**。

弦割法与牛顿法都是线性化方法，但两者有本质的区别。牛顿法在计算 x_{k+1} 时只用到前一步的值 x_k，而**弦割法**在求 x_{k+1}

时要用到前面两步的结果x_k、x_{k-1}，因此使用这种方法给出两个开始值x_0、x_1。弦割法避免了求导数，但收敛速度不如牛顿法。

例5 用弦割法求方程$f(x)=x^3-x-1=0$在区间[1,1.5]内的一个根。

（参见教材 p.26）

例 用弦割法解方程

$$f(x)=xe^x-1=0$$

解 设$x_0=0.5$、$x_1=0.6$作为开始值,用弦割法求得的结果见下表，比较上例牛顿法的计算结果可以看出，弦割法的收敛速度也是相当快的。

k	x_k	k	x_k
0	0.5	3	0.56709
1	0.6	4	0.56714
2	0.56532		

§4 非线性方程组牛顿迭代法求根

非线性方程组牛顿迭代法设计思想：单个方程的推广，即先线性化，然后求解。

考虑方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1,\cdots x_n)=0 \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 均为 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的多元函数。若用向量记号记 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in R^n$， $F = (f_1, \cdots, f_n)^T$，可以写成

$$F(X) = 0$$

当 $n \geq 2$，且 $f_i(i = 1, \cdots, n)$ 中至少有一个是自变量 $x_i(i = 1, \cdots, n)$ 的非线性函数时，则称方程组为**非线性方程组**。

非线性方程组求根问题是非线性方程（即 $n = 1$）求根的直接推广，实际上只要把单变量函数 $f(x)$ 看成函数 $F(X)$，则可将单变量方程求根方法推广到方程组**(*)**。

若已给出方程**(*)**的一个近似根 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$，将函数 $F(X)$ 的分量 $f_i(x)\,(i = 1, \cdots, n)$ 在 $X^{(k)}$ 用多元函数泰勒展开，并取线性部分，则可表示为

$$F(X) \approx F(X^{(k)}) + F'(X^{(k)})(X - X^{(k)})$$

令上式右端为零，得到线性方程组

$$F'(X^{(k)})(X - X^{(k)}) = -F(X^{(k)}) \qquad \text{(**)}$$

其中 $F'(X)$ 为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的 $n \times n$ 阶的**雅可比（Jacobi）矩阵**:

$$F'(X) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

求解线性方程组（**），并记解为 $X^{(k+1)}$，则得

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-F'(X^{(k)})^{-1}F(X^{(k)}),\quad k=0,1,\cdots \qquad \textbf{(***)}$$

——解非线性方程组(**)的牛顿迭代法。

二元非线性方程组的情况见教材 p.27。

定理 5 设 $F(X)$的定义域 $D\subset R^n$, $X^*\in D$满足 $F(X^*)=0$，在 X^*的开邻域 $S_0\subset D$上 $F'(X)$存在且连续，$F'(X^*)$非奇异，则牛顿法生成的序列 $\{X^{(k)}\}$在闭域 $S\subset S_0$上超线性收敛于 X^*，若还存在常数 $L>0$，使 $\|F'(X)-F'(X^*)\|\le L\cdot\|X-X^*\|$, $\forall X\in S$，则 $\{X^{(k)}\}$ 至少平方收敛。

例 求解方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)= x_1+2x_2-3=0 \\ f_2(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-5=0 \end{cases}$$

给定初值 $x^{(0)}=(1.5,\ 1.0)^T$，用牛顿法求解。

解 先求雅可比矩阵

$$F'(X)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4x_1 & 2x_2\end{pmatrix},\quad F'(X)^{-1}=\frac{1}{2x_2-8x_1}\begin{bmatrix}2x_2 & -2\\ -4x_1 & 1\end{bmatrix}$$

由牛顿法**(***)**，得

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\frac{1}{2x_2^{(k)}-8x_1^{(k)}}\begin{bmatrix}2x_2^{(k)} & -2\\ -4x_1^{(k)} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}-3\\ 2(x_1^{(k)})^2+(x_2^{(k)})^2-5\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\dfrac{x_1^{(k)}x_2^{(k)}-2(x_1^{(k)})^2-3x_2^{(k)}+5}{x_2^{(k)}-4x_1^{(k)}} \\[2ex] x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\dfrac{(x_2^{(k)})^2-2(x_1^{(k)})^2-4x_1^{(k)}x_2^{(k)}-12x_1^{(k)}-5}{2x_2^{(k)}-8x_1^{(k)}} \end{cases}$$

由 $x^{(0)}=(1.5,\ 1.0)^T$，逐次迭代得到

$$x^{(2)}=\left(1.488095,\ 0.755952\right)^T$$

$$x^{(3)}=\left(1.488034,\ 0.755983\right)^T$$

§5 迭代法的收敛阶与加速收敛方法

先看一个例子。

例 用不同方法求方程 $x^2-3=0$ 的根 $x^*=\sqrt{3}$。

解 方程 $f(x)=x^2-3$，可改写为各种不同的等价形式 $x=g(x)$，其不动点为 $x^*=\sqrt{3}$。构造不同的迭代法如下：

（1） $x_{k+1}=x_k{}^2+x_k-3$， $g_1(x)=x^2+x-3$，

$$g_1'(x)=2x+1,\ g_1'(x^*)=g_1'\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}+1>1$$

（2） $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k}$， $g_2(x)=\frac{3}{x}$

$$g_2'(x)=-\frac{3}{x^2},\ g_2'(x^*)=-1$$

（3） $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}\left(x_k^2-3\right)$， $g_3(x)=x-\frac{1}{4}(x^2-3)$，

$$g_3'(x)=1-\frac{1}{2}x,\ g_3'(x^*)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.314<1$$

（4） $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{3}{x_k}\right)$， $g_4(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{3}{x})$，

$$g_4'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{x^2}\right),\ g_4'(x^*)=g_4'\left(\sqrt{3}\right)=0$$

取 $x_0=2$，对上述 4 种迭代法，计算三步所得的结果如下表：

表　计算结果

k	x_k	迭代法(1)	迭代法(2)	迭代法(3)	迭代法(4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.734475	1.732143
3	x_3	87	1.5	1.732361	1.732051
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

注意到：$\sqrt{3}=1.7320508$，从计算结果看到迭代法(1)及(2)均不收敛,且它们均不满足**定理 2** 中的局部收敛条件;迭代法(3)和(4)均满足局部收敛条件，且迭代法(4)比(3)收敛快，其中在迭代法(4)中$g_4'(x^*)=0$。为了衡量迭代法**(2.4)**收敛速度的快慢给出以下定义。

定义　设迭代法 $x_{k+1}=g(x_k)$ 收敛于方程 $x=g(x)$ 的根 x^*，若存在常数 p $(p\geq 1)$ 和 c $(c>0)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^p}=c$$

则称该迭代过程是 **p阶收敛的**。特别地，$\boldsymbol{p=1}$（$\boldsymbol{0<c<1}$）时称**线性收敛**，$\boldsymbol{p>1}$时称**超线性收敛**，$\boldsymbol{p=2}$时称**平方收敛**。

- **迭代法的收敛速度依赖于迭代函数 $g(x)$ 的选取**

定理 6　设 x^* 是方程 $x=g(x)$ 的根，$g(x),g'(x),\cdots,g^{(p)}(x)$ 在 x^* 的邻近连续，且

$$g'(x^*)=g''(x^*)=\cdots=g^{(p-1)}(x^*)=0,\ g^{(p)}(x^*)\neq 0$$

则迭代法 $x_{k+1}=g(x_k)$ 在 x^*邻近是 $\boldsymbol{p}$阶收敛的。特别地

当 $0<|g'(x^*)|<1$ 时，迭代法是线性收敛的 ；

当 $g'(x^*)=0,\ g''(x^*)\neq 0$ 时，迭代法是平方收敛的。

证明　由 $g'(x^*)=0$，根据**定理 2**，可知迭代法 $x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性。

将 $g(x_k)$ 在根 x^*处泰勒展开，则有

$$g(x_k)=g(x^*)+\frac{g^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p \quad （\xi \text{ 在 } x_k \text{ 与 } x^* \text{ 之间}）$$

注意到 $g(x_k)=x_{k+1}$，$g(x^*)=x^*$，由上式得

$$x_{k+1}-x^*=\frac{g^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p \to \frac{g^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

即迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 在 x^* 邻近是 $\boldsymbol{p}$阶收敛的。

- **注：**在上例中，迭代法（3）中的$g'(x^*)\neq 0$，故它只是线性收敛，而**迭代法（4）（牛顿迭代法）**中的$g'(x^*)=0$，$g''(x^*)=\frac{2}{\sqrt{3}}\neq 0$，由**定理 6** 知 $\boldsymbol{p}=\mathbf{2}$，即该迭代法是 2 阶收敛的。

又在前例中， $f(x)=x-x^{\frac{1}{3}}-2=0$

$$g_1(x)=x^{1/3}+2，g_2(x)=(x-2)^3，g_3(x)=\frac{6+2x^{1/3}}{3-x^{-2/3}}$$

$$g_1'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}，\ g_3'(x)=\frac{2(x-x^{1/3}-2)}{x^{1/3}(3x^{2/3}-1)^2}$$

$$g_3''(x)=2\frac{x^{1/3}\left(3x^{2/3}-1\right)^2\left(1-\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)-(x-x^{1/3}-2)(x^{1/3}\left(3x^{2/3}-1\right)^2)'}{x^{2/3}(3x^{2/3}-1)^4}$$

其中 $x^*\approx 3.52$，故 $0<g_1'(x^*)<1$，$g_3'(x^*)=0$，$g''(x^*)\neq 0$，知以 $g_1(x)$**为迭代函数的迭代法是线性收敛的，以** $g_3(x)$**为迭代函数的迭代法（牛顿迭代法）是平方收敛的。而**

$g_2'(x^*)=3|x^*-2|^2\approx 6.9312>1$，是发散的。

例 6　分析简单迭代法与牛顿迭代法的收敛速度。

解　简单迭代法：

由：$x^* - x_{k+1} = g(x^*) - g(x_k) = g'(\zeta_k)(x^* - x_k)$

得：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|} = \lim_{k\to\infty}|g'(\zeta_k)| = |g'(x^*)|$$

所以，**当 $\mathbf{0 < |g'(x^*)| < 1}$ 时，简单迭代法线性收敛。**

牛顿迭代法：（1）单根情形：

由 $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$，知：

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

x^* 是 $f(x)$ 的一个单根，即 $f(x^*) = 0,\ f'(x^*) \neq 0$，则由上式知

$$g'(x^*) = 0，g''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

于是由定理 6 得，**牛顿迭代法在零点 x^* 的邻近是平方收敛的**。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2} = \frac{g''(x^*)}{2!} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

（2）重根情形：

设$f(x) = (x - x^*)^m q(x)$，整数 $m \geq 2$，$q(x^*) \neq 0$，则 x^* 为方程 $f(x) = 0$ 的 m **重根**，**只要 $f'(x_k) \neq 0$ 仍可用牛顿迭代法计算**，此时迭代函数$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$的导数为：

$$g'(x^*)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\Big|_{x=x^*}=1-\frac{1}{m}\neq 0,\quad |g'(x^*)|<1$$

所以，当 x^* 为$f(x)=0$的m $(m\geq 2)$重零点，$f(x)$ 在其零点 x^* 的某邻域内有二阶连续导数，则**牛顿法局部线性收敛**。

为使迭代法仍保持二次收敛，须对牛顿迭代法进行修正。

- **若已知重根数** m **：**取$g(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$，可得：$g'(x^*)=0$，

  则迭代法：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{mf(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots$$

是**局部二次收敛的**。

- **若重根数** m **未知：**

  令$F(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$，若 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根，则

$$F(x)=\frac{(x-x^*)q(x)}{mq(x)+(x-x^*)q'(x)}$$

得 x^* 是 $F(x)=0$的单根，对它用牛顿法，其迭代函数为：

$$g(x)=x-\frac{F(x)}{F'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

从而可构造迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},\quad k=0,1,\cdots$$

是二阶收敛的。

例　方程 $x^4-4x^2+4=0$ 的根 $x^*=\sqrt{2}$ 是二重根，用上述三种方法求根。

解　先求出三种方法的迭代公式：

（1）牛顿迭代法： $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{4x_k}$$

（2）重根数已知： $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

（3）重根数未知： $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{x_k^2 + 2}$$

取初值 $x_0 = 1.5$，计算结果如下表。

表　三种方法数值结果

k	x_k	方法（1）	方法（2）	方法（3）
1	x_1	1.458333333	1.416666667	1.411764706
2	x_2	1.436607143	1.412156860	1.414211380
3	x_3	1.425497619	1.414213562	1.414213562

计算三步，方法（2）及（3）均达到 10 位有效数字，而牛顿法（1）只有线性收敛，要达到同样精度需迭代 30 次。

● 迭代加速方法

1. 艾特肯（Aitken）加速方法

对于收敛于 x^* 的不动点迭代算法 $x_{k+1} = g(x_k)$

设 x_k 是根 x^* 的某个近似值，用迭代公式校正一次得

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

由微分中值定理，有

$$x_{k+1} - x^* = g(x_k) - g(x^*) = g'(\zeta)(x_k - x^*)$$

其中ζ介于x_k与x^*之间。

假定$g'(x)$改变不大，近似地取某个近似值L，则有

$$x_{k+1}-x^* \approx L\left(x_k - x^*\right) \qquad (*)$$

若将校正值$x_{k+1}=g(x_k)$，再校正一次，又得

$$x_{k+2}=g(x_{k+1})$$

由于 $x_{k+2}-x^* \approx L\left(x_{k+1}-x^*\right)$，将它与（*）式联立，消去未知的$L$，有

$$\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} \approx \frac{x^*-x_{k+2}}{x^*-x_{k+1}} \qquad (2.11)$$

由此推知

$$x^* \approx \frac{x_k x_{k+2}-x_{k+1}{}^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

在计算了x_{k+1}及x_{k+2}之后，可用上式右端作为x^*的新近似。记

$$\tilde{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k} \qquad (**)$$

式**(**)**称为**艾特肯(Aitken)加速方法**。

2. 斯蒂芬森（Steffensen）方法

把艾特肯加速技巧与不动点迭代结合，可得如下的迭代法：

$$\begin{cases} y_k = g(x_k) \\ z_k = g(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad \mathbf{(2.12)}$$

——**斯蒂芬森（Steffensen）迭代法**

（教材上称为**艾特肯算法** ）

- **注：(2.12)是将不动点迭代法计算两步合并成一步得到的，可将它写成另一种不动点迭代**

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

其中 $g(x) = x - \frac{(g(x)-x)^2}{g(g(x))-2g(x)+x}$

例 用斯蒂芬森方法求解方程 $f(x)=x^3-x-1=0$。

解 前面已经指出迭代 $x_{k+1}=x_k^3-1$ 是发散的，现用（**2.12**）计算，取 $g(x)=x^3-1$，计算结果如下表。

k	x_k	y_k	z_k
0	1.5	2.37500	12.3965
1	1.41629	1.84092	5.23888
2	1.35565	1.49140	2.31728
3	1.32895	1.34710	1.44435
4	1.32480	1.32518	1.32714
5	1.32472		

计算表明：它是收敛的，这说明即使迭代法 $x_{k+1}=g(x_k)$ 不收敛，用斯蒂芬森迭代法(**2.12**)仍可能收敛。**若 $x_{k+1}=g(x_k)$ 线性收敛，则艾特肯算法(2.12)达到 2 阶收敛。更进一步还可知若 $x_{k+1}=g(x_k)$ 为 p 阶收敛，则(2.12)为 $p+1$ 阶收敛。**

例 求方程 $3x^2-e^x=0$ 的 $[3,4]$ 中的解。

解 由方程得 $e^x=3x^2$，两边取对数得：

$$x = ln3x^2 = 2lnx + ln3 \triangleq g(x)$$

构造迭代法：

$$x_{k+1} = 2\ln x_k + \ln 3$$

由于$g'(x) = \frac{2}{x}$，$\max_{3\le x\le 4} |g'(x)| < 1$，当$x \in [3,4]$，可知此迭代法是收敛的。若取$x_0 = 3.5$，迭代 16 次，得：$x_{16} = 3.73307$，有六位有效数字。

若用斯蒂芬森迭代法**(2.12)**进行加速，计算结果如下表所示：

k	x_k	y_k	z_k
0	3.5	3.60414	3.66202
1	3.73444	3.73381	3.73347
2	3.73307		

这里计算 2 步（相当于一般迭代法的 4 步）结果与x_{16}相同，说明用艾特肯算法**(2.12)**的收敛速度比一般迭代法快得多。

例 7　用迭代法求方程$f(x) = x - 2^{-x} = 0$在$[0,1]$内根x^*的近似值，精确到 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-4}$.

（见教材 p. 30）