第一类拉格朗日方程（带乘子的拉格朗日方程）

在推导第二类拉格朗日方程式，从

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right]\delta q_i=0 \tag{8.78}$$

到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\ \ (i=1,2,\cdots,k)$$

必须用到$\delta q_j\ (j=1,2,\cdots,k)$相互独立的条件。然而，在质点系有非完整约束的情况下，这个条件无法得到满足。另外，对于一些多刚体系统，用非独立的广义坐标描述更加方便，不妨假设$\delta q_j\ (j=1,2,\cdots,k)$满足$r$个关系式

$$\sum_{i=1}^{k} b_{i\beta}\,\delta q_i=0\ \ (\beta=1,2,\cdots,r) \tag{8.79}$$

其中$b_{i\beta}$是广义坐标和时间的函数，即

$$b_{i\beta}=b_{i\beta}(q_1,q_2,\cdots,q_k,t)$$

这样,在$q_1,q_2,\cdots,q_k$中有k-r个相互独立，不妨假设是$q_1,q_2,\cdots,q_{k-r}$，其它r个广义坐标$q_{k-r+1},\cdots,q_k$可以用$q_1,q_2,\cdots,q_{k-r}$唯一的表示出来。这个假设在数学上要求$b_{i\beta}(i=k-r+1,\cdots,k;\beta=1,2,\cdots,r)$构成的$r\times r$的行列式不等于零。将$r$个等式(8.79)分别乘以不定乘子$\lambda_\beta$，得

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_\beta b_{i\beta}\,\delta q_i=0\ (\beta=1,2,\cdots,r) \tag{8.80}$$

用（8.78）减去（8.80）得

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta b_{i\beta}\right]\delta q_i=0 \tag{8.81}$$

如果$b_{i\beta}(i=k-r+1,\cdots,k;\beta=1,2,\cdots,r)$构成的行列式不等于零，则可以适当选择不定乘子$\lambda_\beta$，使得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta b_{i\beta}=0 \ (i=k-r+1,\cdots,k) \quad (8.82)$$

我们可以把（8.82）看作以λ_β为未知数的r个代数方程，其系数矩阵的秩为r，该方程组一定有解。于是式（8.81）变为

$$\sum_{i=1}^{k-r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta b_{i\beta}\right]\delta q_i=0 \quad (8.83)$$

注意：求和运算从$i=1$到$i=k-r$

由于$q_1, q_2, \cdots, q_{k-r}$相互独立，从式（8.83）可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{\beta=1}^{r} \lambda_\beta b_{i\beta} = 0 \; (i = 1,2,\cdots,k-r) \quad (8.84)$$

由式（8.82）和（8.84）构成了k个方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\beta=1}^{r} \lambda_\beta b_{i\beta} \; (i = 1,2,\cdots,k) \quad (8.85)$$

称为带乘子的拉格朗日方程或第一类拉格朗日方程。

拉格朗日不定乘子法的精神在于：将虚位移间的不独立性**转嫁**到拉格朗日乘子上，而认为虚位移间彼此独立。

如果主动力都是有势力，则上式写成

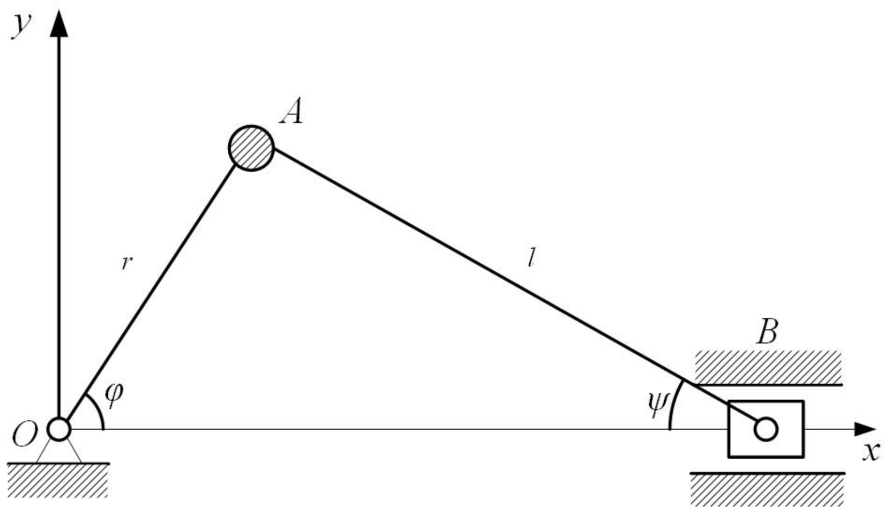
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta b_{i\beta}\ \ (i=1,2,\cdots,k) \quad (8.86)$$

将（8.85）或（8.86）与约束方程联立，构成系统的封闭方程组，在式（8.85）与（8.86）中

$$\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta b_{i\beta}$$

称为广义约束反力。

如图所示的机构在铅垂平面内运动。假设A，B两个质点的质量均为m，刚性杆OA和AB的质量忽略不计，不考虑摩擦。试建立该系统的运动微分方程。



解： 我们先尝试应用第二类拉格朗日方程。这个系统有一个自由度，可以选择φ为广义坐标。根据几何关系有

$$x_A = r\cos\varphi, \qquad y_A = r\sin\varphi, \qquad x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

以及

$$r\sin\varphi = l\sin\psi \tag{8.87}$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2)+\frac{1}{2}m\dot{x}_A^2=\frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\varphi}^2+\left(r\dot{\varphi}sin\varphi+l\dot{\psi}\ sin\psi\ \right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\varphi}^2+r^2sin^2\varphi\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\right)^2\right]$$

势能为

$$V=mgy_A=mgrsin\varphi$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V==\frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\varphi}^2+r^2sin^2\varphi\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\right)^2\right]-mgrsin\varphi\quad(8.88)$$

对关系式（8.87）求导

$$r\dot{\varphi}cos\varphi=l\dot{\psi}cos\psi$$

解出

$$\dot{\psi}=\frac{r\dot{\varphi}cos\varphi}{lcos\psi}=\frac{r\dot{\varphi}cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2sin^2\varphi}}$$

并带入拉格朗日函数

$$L=T-V$$
$$=\frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\varphi}^2+r^2sin^2\varphi\left(\dot{\varphi}+\frac{r\dot{\varphi}cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2sin^2\varphi}}\right)^2\right]$$
$$-mgrsin\varphi \quad (8.89)$$

太复杂！无论是解析还是作数值，都很不方便。

下面我们尝试利用第一类拉格朗日方程。选择φ和ψ描述该系统的运动，则拉格朗日函数就是式（8.88）。计算导数

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr^2 sin\varphi cos\varphi\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\right)^2 - mgrcos\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\left[\dot{\varphi} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi})sin^2\varphi\right], \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mr^2（\dot{\varphi} + \dot{\psi})sin^2\varphi$$

计算全导数

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mr^2\left[\ddot{\varphi} + \left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\right)sin^2\varphi \ + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\varphi} sin\varphi cos\varphi\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = mr^2\left[\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\right)sin^2\varphi \ + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\varphi} sin\varphi cos\varphi\right]$$

对关系式（8.87）进行δ运算得

$$r cos\varphi\delta\varphi - l cos\psi\delta\psi = 0 \tag{8.90}$$

令λ为约束乘子，则第一类拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \lambda r cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = -\lambda l cos\psi$$

即

$$mr^2\left[\ddot{\varphi} + \left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\right)sin^2\varphi\ + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)\ sin\varphi cos\varphi\right] + mgr cos\varphi = \lambda r cos\varphi$$

$$mr^2\left[\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\right)sin^2\varphi\ + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\varphi} sin\varphi cos\varphi\right] = -\lambda l cos\psi$$

这两个方程与代数方程（8.87）构成封闭方程组。