



Tercer examen parcial experimental

Determinación experimental del centroide de un cuerpo

Mecánica

Nombre del profesor

Lorenzo O. Miranda Cordero

Nombre de los integrantes

Alan Omar Acosta Porcayo. No. lista 1

Mauricio Gael Bonilla López. No. lista 9

A. Preparación de la tabla de madera

Primer paso

La figura que se construyó para este proyecto consta de 4 figuras simples: un triángulo rectángulo, un cuadrado, un semicírculo hueco y un rectángulo hueco.

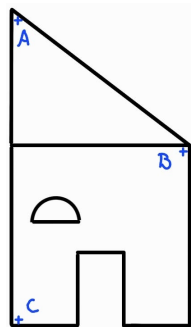
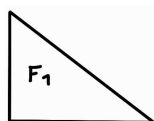
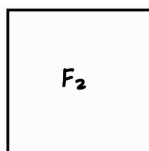


Figura 1: Croquis con los puntos A, B y C



I. Triángulo
rectángulo



II. Cuadrado



III. Semicírculo
hueco



IV. Rectángulo
hueco

Figura 2: Figuras simples

Una vez realizado el croquis, en una hoja blanca tamaño carta se realizó el dibujo incluyendo las medidas que tendrá la tabla de madera.

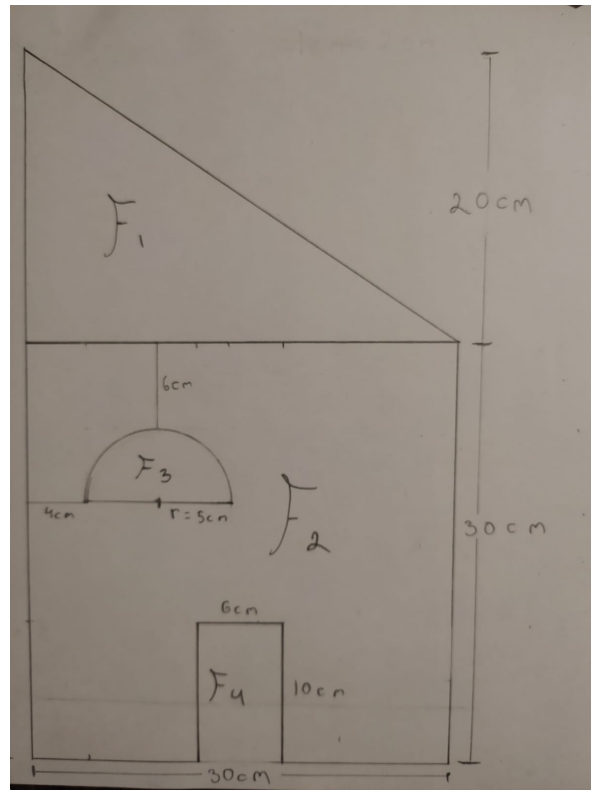


Figura 3: Dibujo a escala numérica

B. Modelación matemática de las fuerzas de los elementos elásticos (ligas o resortes) empleados

Segundo paso

Debido a que no contamos con un dinamómetro para medir las fuerzas utilizaremos tres ligas, las cuales caracterizaremos a partir de 5 pesas caseras creadas con bolsas de arroz previamente pesadas. Con la ayuda de estas mediciones obtendremos un modelo matemático para cada liga mediante un ajuste lineal.



I. Ligas



II. Pesas

Figura 4: Materiales para medir fuerzas

Masa		Tensión [N]
[g]	[kg]	$m [\text{kg}] \times 9.78$
100	0.1	0.978
200	0.2	1.956
300	0.3	2.934
400	0.4	3.912
500	0.5	4.890

Cuadro 1: Conversión de masa a fuerza

Tercer paso

Para el proceso de caracterización de cada liga se mide primero la longitud natural, es decir, sin aplicarle ninguna fuerza, registrando las mediciones en cm. Posteriormente, se utilizara cada peso para sujetarlo con la liga y medir la deformación de esta, anotando cada medición en una tabla.

Longitud natural (Ln) [cm] = 7.8 [cm]		
Tensión (T) [N]	Longitud final (Lf) [cm]	Deformación δ (Lf – Ln) [cm]
0.978	8.5	0.7
1.956	9.3	1.5
2.934	10.3	2.5
3.912	12	4.2
4.890	13.5	5.7

Cuadro 2: Caracterización liga 1

Longitud natural (Ln) [cm] = 7.5 [cm]		
Tensión (T) [N]	Longitud final (Lf) [cm]	Deformación δ (Lf – Ln) [cm]
0.978	8.4	0.9
1.956	9.1	1.6
2.934	10.5	3
3.912	11.8	4.3
4.890	14	6.5

Cuadro 3: Caracterización liga 2

Longitud natural (Ln) [cm] = 8 [cm]		
Tensión (T) [N]	Longitud final (Lf) [cm]	Deformación δ (Lf - Ln) [cm]
0.978	8.7	0.7
1.956	10	2
2.934	12	4
3.912	14.5	6.5
4.890	17	9

Cuadro 4: Caracterización liga 3

Cuarto paso

Con base en los datos obtenidos para liga, se creó con ayuda de EXCEL una gráfica de F vs δ y se realizó un ajuste lineal que permite conocer la fuerza en el elemento elástico. El modelo matemático que se obtiene de cada gráfica tiene la siguiente forma:

$$T_1 = k_1\delta + T_{o1}$$

T_1 = tensión en la liga 1

k_1 = constante de la liga 1 (pendiente de la recta)

δ = deformación de la liga

T_{o1} = fuerza residual en la liga (ordenada al origen)

Los modelos matemáticos de cada liga son los siguientes:

$$T_1 = 0.7533\delta + 0.7343 \text{ [N]}$$

$$T_2 = 0.6807\delta + 0.715 \text{ [N]}$$

$$T_3 = 0.4568\delta + 0.9057 \text{ [N]}$$

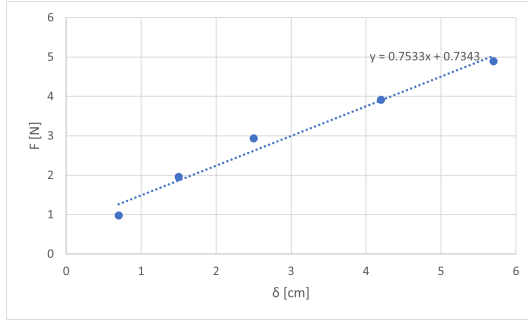


Figura 5: Gráfica liga 1

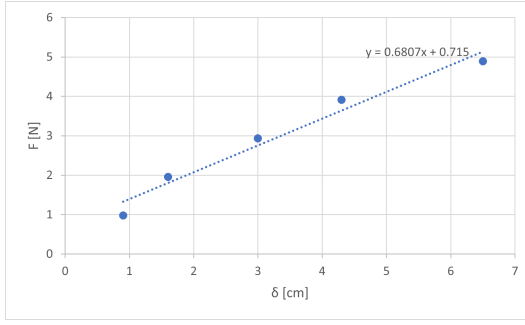


Figura 6: Gráfica liga 2

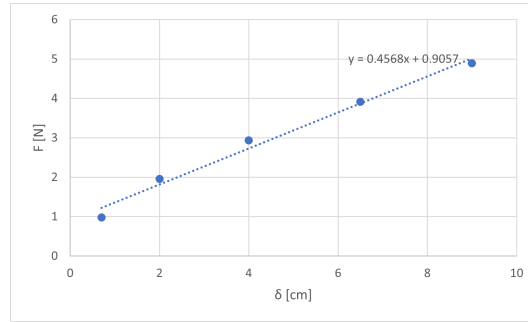


Figura 7: Gráfica liga 3

Quinto paso

El quinto paso consta de hacer el tercer y cuarto paso para las dos ligas restantes. La tabla, la grafica y el modelo matemático de cada liga se encuentra en la sección pertinente.

C. Obtención en forma teórica del centroide “C” de la figura compuesta

Sexto paso

Al dibujo realizado en el primer paso se le colocó un sistema coordenado X–Y, y a partir de este sistema se obtienen las coordenadas del centroide en la figura plana, empleando las siguientes expresiones:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Figura 1:

$$A_1 = \frac{(30)(20)}{2} = 300 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$x_1 = \frac{30}{3} = 10 \text{ [cm]}$$

$$y_1 = 30 + \frac{20}{3} = 36.66 \text{ [cm]}$$

Figura 2:

$$A_2 = (30)(30) = 900 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$x_2 = \frac{30}{2} = 15 \text{ [cm]}$$

$$y_2 = \frac{30}{2} = 15 \text{ [cm]}$$

Figura 3:

$$A_3 = -\frac{\pi(5^2)}{2} = -39.27 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$x_3 = 4 + 5 = 9 \text{ [cm]}$$

$$y_3 = 19 + \frac{4(5)}{3\pi} = 21.12 \text{ [cm]}$$

Figura 4:

$$A_4 = -(6)(10) = -60 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$x_4 = 12 + \frac{6}{2} = 15 \text{ [cm]}$$

$$y_4 = \frac{10}{2} = 5 \text{ [cm]}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{(10)(300) + (15)(900) + (9)(-39.27) + (15)(-60)}{300 + 900 - 39.27 - 60}$$

$$\bar{X} = \frac{3000 + 13500 - 353.43 - 900}{1100.73} = \frac{15246.57}{1100.73} = 13.85 \text{ [cm]}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{(36.66)(300) + (15)(900) + (21.12)(-39.27) + (5)(-60)}{300 + 900 - 39.27 - 60}$$

$$\bar{Y} = \frac{10998 + 13500 - 829.38 - 300}{1100.73} = \frac{23368.62}{1100.73} = 21.23 \text{ [cm]}$$

$$C(13.85, 21.23) \text{ [cm]}$$

Séptimo paso

Una vez obtenidas las coordenadas del centroide “C”, es posible marcar en la tabla de madera la posición de este centroide y, con ayuda de un soporte colocado en el centroide, lograr mantener la tabla en equilibrio.



I. Centroide marcado en la tabla



II. Tabla en equilibrio

Figura 8: Centroide en la tabla

D. Elaboración de la tabla que se usará en el experimento

Octavo paso

A partir de la figura compuesta se cortó una pieza de madera de triplay con 18 mm de grosor, la cual fue hecha en una carpintería.

E. Registro de las tensiones que sostienen a la tabla

Noveno paso

A la tabla de madera se le colocaron tres armellas en los puntos A, B y C, que de acuerdo a nuestro sistema coordenado tienen las siguientes coordenadas:

$$A(1, 48) \text{ [cm]}$$

$$B(29, 29) \text{ [cm]}$$

$$C(0.8, 1) \text{ [cm]}$$

Décimo paso

La tensión de cada liga se calcula obteniendo primer la deformación que tiene al soportar el peso de la tabla y sustituyendo la deformación en su respectivo modelo matemático.



Figura 9: Medición de deformaciones

$$\delta_1 = Lf_1 - Ln_1 = 9 - 7.8 [\text{cm}] = 1.2 [\text{cm}]$$

$$\delta_2 = Lf_2 - Ln_2 = 16 - 7.5 [\text{cm}] = 8.5 [\text{cm}]$$

$$\delta_3 = Lf_3 - Ln_3 = 16.5 - 8 [\text{cm}] = 8.5 [\text{cm}]$$

$$T_1 = 0.7533\delta_1 + 0.7343 [\text{N}] = 0.7533(1.2) + 0.7343 [\text{N}] = 1.6383 [\text{N}]$$

$$T_2 = 0.6807\delta_2 + 0.715 [\text{N}] = 0.6807(8.5) + 0.715 [\text{N}] = 6.5001 [\text{N}]$$

$$T_3 = 0.4568\delta_3 + 0.9057 [\text{N}] = 0.4568(8.5) + 0.9057 [\text{N}] = 4.7885 [\text{N}]$$

F. Determinación del centro de gravedad “G” de la tabla con base en las tensiones obtenidas experimentalmente

Décimo primer paso

Una vez obtenidos T_1 , T_2 y T_3 , y con las coordenadas de A, B y C, es posible construir un sistema equivalente fuerza–par aplicado al origen de coordenadas, y posteriormente, construir otro con la fuerza resultante aplicada un punto “G” llamado centro de gravedad.

Vectores de tensión:

$$T_1 = 1.6383\hat{k} \text{ [N]}$$

$$T_2 = 6.5001\hat{k} \text{ [N]}$$

$$T_3 = 4.7885\hat{k} \text{ [N]}$$

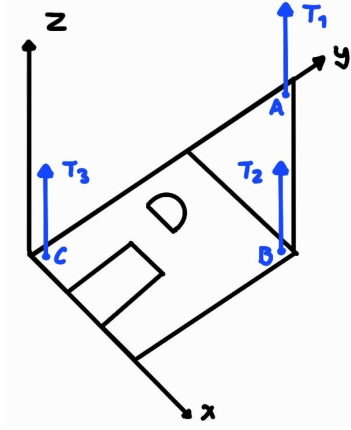


Figura 10: Sistema de fuerzas

Momento aplicado con respecto al origen:

$$M_O^{T_1} = \vec{OA} \times T_1 = (\hat{i} + 48\hat{j}) \times (1.6383\hat{k}) = 78.6384\hat{i} - 1.6383\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{cm]}$$

$$M_O^{T_2} = \vec{OB} \times T_2 = (28\hat{i} + 28\hat{j}) \times (6.5001\hat{k}) = 182.0028\hat{i} - 182.0028\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{cm]}$$

$$M_O^{T_3} = \vec{OC} \times T_3 = (0.8\hat{i} + \hat{j}) \times (4.7885\hat{k}) = 4.7885\hat{i} - 3.8308\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{cm]}$$

Suma de los tres pares de transporte:

$$\sum_{i=1}^3 M_O^T = (78.6384 + 182.0028 + 4.7885)\hat{i} - (1.6383 + 182.0028 + 3.8308)\hat{j}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_O^T = 265.4297\hat{i} - 187.4719\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{cm]}$$

Suma de las tres fuerzas (Resultante R):

$$\sum_{i=1}^3 T_i = R = (1.6383 + 6.5001 + 4.7885)\hat{k} \text{ [N]} = 12.9269\hat{k} \text{ [N]}$$

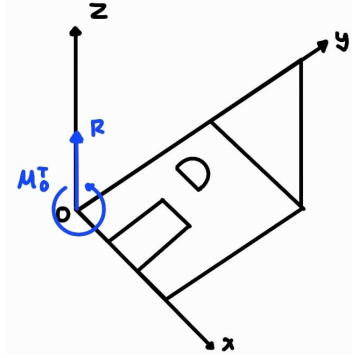


Figura 11: Sistema fuerza–par aplicado en el origen

Coordenadas del centro de gravedad “G”:

$$\sum_{i=1}^3 M_O^T = M_O^R$$

$$265.4297\hat{i} - 187.4719\hat{j} = \bar{OG} \times (12.9269\hat{k})$$

$$265.4297\hat{i} - 187.4719\hat{j} = (G_x\hat{i} + G_y\hat{j}) \times (12.9269\hat{k})$$

$$265.4297\hat{i} - 187.4719\hat{j} = 12.9269G_y\hat{i} - 12.9269G_x\hat{j}$$

$$-12.9269G_x\hat{j} = -187.4719\hat{j}$$

$$G_x = \frac{-187.4719\hat{j}}{-12.9269\hat{j}} = 14.5025 \text{ [cm]}$$

$$12.9269G_y\hat{i} = 265.4297\hat{i}$$

$$G_y = \frac{265.4297\hat{i}}{12.9269\hat{i}} = 19.8369 \text{ [cm]}$$

$$G(14.5025, 19.8369) \text{ [cm]}$$

Décimo segundo paso

Con las coordenadas del centro de gravedad “G”, obtenidas en el paso anterior se marca con un “pequeño círculo” la letra “G” en la tabla de madera.



Figura 12: Centro de gravedad marcado

G. Comprobación de resultados

Décimo tercer paso. Comprobación del equilibrio de fuerzas

Magnitud del peso de la tabla:

$$W = mg = (1.365 \text{ [kg]})(9.78 \text{ m/s}^2) = 13.3497 \text{ [N]}$$

Resultante de las 3 fuerzas:

$$R = 12.9269 \text{ [N]}$$

Porcentaje de error:

$$\%EE = \frac{|W - R|}{W} 100 \% = \frac{|13.3497 - 12.9269|}{13.3497} 100 \% = 3.1671 \%$$

Décimo cuarto paso. Comprobación del valor del peso W

Volumen de cada figura simple:

$$V_1 = (A_1 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = (300 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = 540 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_2 = (A_2 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = (900 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = 1620 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_3 = (A_3 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = (-39.27 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = -70.686 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_4 = (A_4 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = (-60 \text{ [cm}^2\text{]})(1.8 \text{ [cm]}) = -108 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Volumen total:

$$V_{total} = \sum_{i=1}^4 V_i = 540 + 1620 - 70.686 - 108 \text{ [cm}^3\text{]} = 1981.314 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Peso específico del triplay (proporcionado por la maderería):

$$\gamma = 6686.5221 \text{ [N/m}^3] = 6.6865 \times 10^{-3} \text{ [N/cm}^3]$$

Volumen total por el peso específico:

$$W_{teo} = V_{total} \cdot \gamma = (1981.314 \text{ [cm}^3]) (6.6865 \times 10^{-3} \text{ [N/m}^3]) = 13.2481 \text{ [N]}$$

Porcentaje de error:

$$\%E = \frac{|W_{teo} - W|}{W_{teo}} 100 \% = \frac{|13.2481 - 13.3497|}{13.2481} 100 \% = 0.77 \%$$

Décimo quinto paso. Comprobación de la ubicación del centro de gravedad de la tabla

Coordenadas del centroide:

$$C(13.85, 21.23) \text{ [cm]}$$

Coordenadas del centro de gravedad:

$$G(14.5025, 19.8369) \text{ [cm]}$$

Diferencia entre “C” y “G”:

$$|x_C - x_G| \text{ [cm]} = |13.85 - 14.5025| \text{ [cm]} = 0.6525 \text{ [cm]}$$

$$|y_C - y_G| \text{ [cm]} = |21.23 - 19.8369| \text{ [cm]} = 1.3931 \text{ [cm]}$$

Décimo sexto paso. Conclusiones

La búsqueda de la ubicación del centroide “C” fue más sencilla por que la figura esta formada por figuras simples, lo hizo que los cálculos fueran satisfactorios. El equilibrio fue muy bueno al sostenerlo con un área circular con un radio de 1 [cm], ya que nuestra figura resultó algo grande y pesada.

Por otro lado, el porcentaje de error del centro de gravedad “G” fue sin duda provocado por el error de precisión en las tensiones por parte de nuestro elemento elástico, ya que, a falta de resortes o dinamómetro recurrimos a la ligas las cuales, dados nuestros resultados, probablemente tengan la menor exactitud.

A pesar de eso obtuvimos un error de exactitud de aproximadamente 3 %, lo que nos indica que tanto los cálculos como las mediciones se realizaron lo mas correcto posible.

Para terminar, logramos conseguir resultados altamente satisfactorios y, con ello, reafirmamos y pusimos en práctica los conocimientos obtenidos en clase a la hora de traerlos a la realidad.

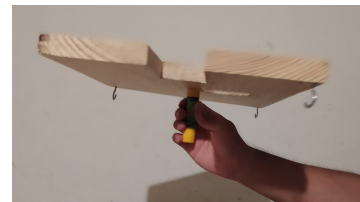


Figura 13: Punto de apoyo en “G”