segundos. Si el péndulo es de metal, su longitud variará con la temperatura, la cual aumenta o disminuye a una razón que es casi proporcional a L. En símbolos, con u como la temperatura y k como la constante de proporcionalidad,

$$\frac{dL}{du} = kL.$$

Suponiendo este caso, demuestre que la tasa a la que cambia el periodo con respecto a la temperatura es $kT/2$.

90. Regla de la cadena Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces las dos composiciones

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

son diferenciables en $x = 0$, aunque g no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena? Explique.

T **91. La derivada de sen 2*x*** Grafique la función $y = 2\cos 2x$ para $-2 \le x \le 3.5$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\operatorname{sen} 2(x+h) - \operatorname{sen} 2x}{h}$$

para $h = 1.0$, 0.5 y 0.2. Experimente con otros valores de h e incluya valores negativos. ¿Qué pasa cuando $h \to 0$? Explique dicho comportamiento.

T **92. La derivada de cos(x^2)** Grafique $y = -2x\operatorname{sen}(x^2)$ para $-2 \le x \le 3$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

para $h = 1$, 0.7, y 0.3. Experimente con otros valores de h. ¿Qué pasa cuando $h \to 0$? Explique dicho comportamiento.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Polinomios trigonométricos

93. Como muestra la siguiente figura, el "polinomio" trigonométrico

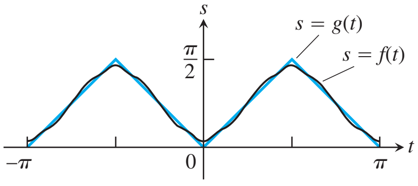
$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t - 0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

ofrece una buena aproximación a la función dientes de sierra $s = g(t)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ¿Qué tan bien aproxima la derivada de f a la derivada de g en los puntos donde dg/dt está definida? Para responder, siga los siguientes pasos.

a. Grafique dg/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b. Determine df/dt.

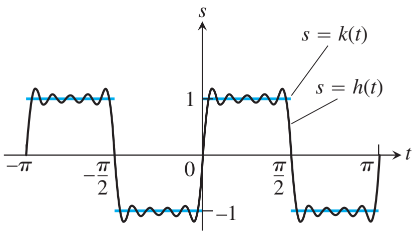
c. Grafique df/dt. Aparentemente, ¿en dónde es mejor la aproximación de dg/dt mediante df/dt? ¿En dónde parece ser menos buena? Las aproximaciones mediante funciones trigonométricas son importantes en la teoría de oscilaciones y en la teoría del calor, pero no debemos esperar demasiado de ellas, como veremos en el siguiente ejercicio.



94. (*Continuación del ejercicio 93*) En el ejercicio 93, el polinomio trigonométrico $f(t)$, que aproximó una función dientes de sierra $g(t)$ en $[-\pi, \pi]$, tenía una derivada que aproximó la derivada de la función dientes de sierra. Sin embargo, es posible que un polinomio trigonométrico aproxime razonablemente una función sin que su derivada aproxime bien la derivada de la función. Como ejemplo, el "polinomio"

$$s = h(t) = 1.2732\operatorname{sen} 2t + 0.4244\operatorname{sen} 6t + 0.25465\operatorname{sen} 10t + 0.18189\operatorname{sen} 14t + 0.14147\operatorname{sen} 18t$$

que se grafica en la siguiente figura, aproxima la función escalonada $s = k(t)$, también mostrada ahí. No obstante, la derivada de h no se parece a la derivada de k.



a. Grafique dk/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b. Determine dh/dt.

c. Grafique dh/dt para qué tan inadecuadamente se ajusta la gráfica a la gráfica de dk/dt. Comente sus observaciones.

3.7 Derivación implícita

La mayoría de las funciones que hemos tratado hasta ahora se han descrito mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$, la cual expresa de manera explícita a y en términos de la variable x. Hemos aprendido reglas para derivar funciones definidas de esta manera. Otra situación ocurre cuando encontramos ecuaciones como

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0, \qquad y^2 - x = 0, \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

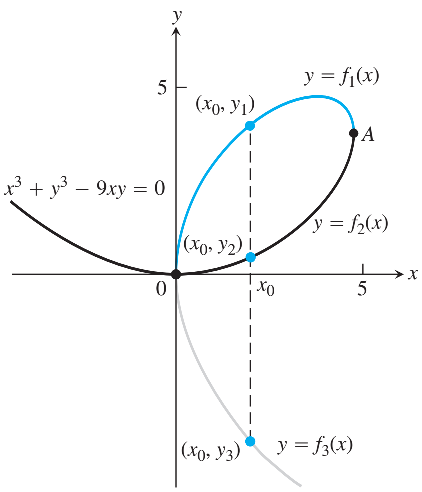


FIGURA 3.26 La curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ no es la gráfica de ninguna función de x. Sin embargo, la curva puede dividirse en arcos separados que *son* las gráficas de funciones de x. Esta curva en particular, llamada *folio* (hoja), se remonta a Descartes en 1638.

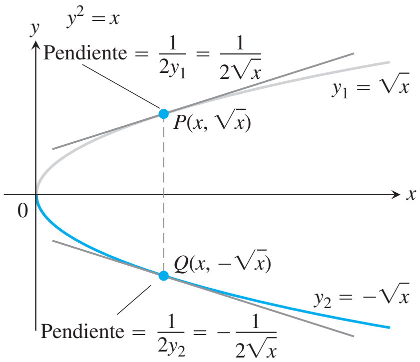


FIGURA 3.27 La ecuación $y^2 - x = 0$ o $y^2 = x$, como se escribe por lo común, define dos funciones derivables de x en el intervalo $x > 0$. El ejemplo 1 muestra cómo determinar las derivadas de dichas funciones sin despejar *a* y en la ecuación $y^2 = x$.

(Véase las figuras 3.26, 3.27 y 3.28). Estas ecuaciones definen una relación *implícita* entre las variables x y y. En algunos casos podemos despejar y en esas ecuaciones para obtener una función explícita (o quizá varias funciones) de x. Cuando no es posible enunciar una ecuación $F(x, y) = 0$ en la forma $y = f(x)$, para derivarla de la manera usual, se puede determinar dy/dx mediante *derivación implícita*. Esta sección describe la técnica.

Funciones definidas implícitamente

Iniciamos con ejemplos que incluyan ecuaciones conocidas en las que podemos despejar y como una función de x y así calcular dy/dx de la manera usual. Luego derivamos implícitamente las ecuaciones y encontramos la derivada para comparar los dos métodos. Después de los ejemplos, resumimos los pasos incluidos en el nuevo método. En los ejemplos y en los ejercicios siempre se supone que la ecuación dada determina *a* y implícitamente como una función diferenciable de x, así que dy/dx existe.

EJEMPLO 1 Determine dy/dx, si $y^2 = x$.

Solución La ecuación $y^2 = x$ define a dos funciones derivables de x, que es posible determinar, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$ (figura 3.27). Sabemos cómo calcular la derivada de cada una de estas funciones para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pero suponga que sólo sabemos que la ecuación $y^2 = x$ define *a* y como una o más funciones derivables de x para $x > 0$, sin conocer exactamente dichas funciones. Aun así, ¿es posible determinar dy/dx?

La respuesta es sí. Para determinar dy/dx basta con derivar ambos lados de la ecuación $y^2 = x$ con respecto a x, tratando a $y = f(x)$ como una función derivable de x:

$$y^2 = x$$
$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

La regla de la cadena da $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$.

Esta fórmula da las derivadas calculadas para ambas soluciones explícitas, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ■

EJEMPLO 2 Determine la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, -4)$.

Solución La circunferencia no es la gráfica de una sola función de x. Más bien, es la combinación de dos gráficas de funciones derivables, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (figura 3.28). El punto $(3, -4)$ está en la gráfica de y_2, por lo que podemos determinar la pendiente mediante el cálculo de la derivada de manera directa si usamos la regla de la cadena para potencias:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}.$$

$\frac{d}{dx} - (25 - x^2)^{1/2} = -\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

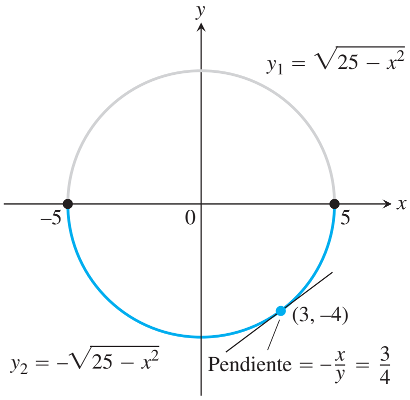


FIGURA 3.28 La circunferencia combina las gráficas de dos funciones. La gráfica de y^2 es la semicircunferencia inferior que pasa por $(3, -4)$.

Podemos resolver este problema con mayor sencillez mediante la derivación, con respecto a x, de la ecuación implícita dada de la circunferencia:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

La pendiente en $(3, -4)$ es $-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$

Observe que, a diferencia de la fórmula de la pendiente con dy^2/dx, la cual sólo es para puntos debajo del eje x, la fórmula $dy/dx = -x/y$ se aplica a todos los puntos donde la circunferencia tenga pendiente. También observe que la derivada incluye a *ambas* variables, x y y, no sólo a la variable independiente x. ■

Para calcular las derivadas de funciones definidas implícitamente, procedemos como en los ejemplos 1 y 2. Tratamos a y como una función derivable de x y aplicamos las reglas usuales para derivar ambos lados de la ecuación definida.

Derivación implícita

1. Derivar, con respecto a x, ambos lados de la ecuación tratando a y como una función derivable de x.
2. Agrupar los términos con dy/dx en un lado de la ecuación y despejar dy/dx.

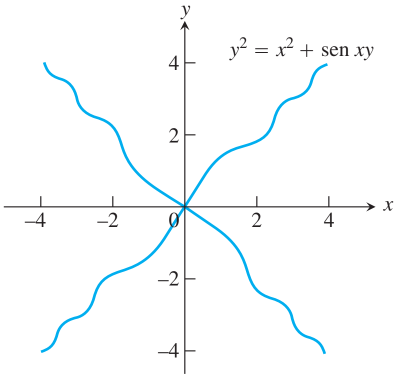


FIGURA 3.29 La gráfica de $y^2 = x^2 + \text{sen}\, xy$ del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determine dy/dx si $y^2 = x^2 + \text{sen}\, xy$ (figura 3.29).

Solución Derivamos implícitamente la ecuación.

$$y^2 = x^2 + \text{sen}\, xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\text{sen}\, xy\right) \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x\ldots$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy) \qquad \text{...tratando a } y \text{ como una función de } x \text{ y usando la regla de la cadena.}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{Tratar a } xy \text{ como un producto.}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y \qquad \text{Agrupar los términos con } dy/dx.$$

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy} \qquad \text{Despejar } dy/dx.$$

Observe que la fórmula para dy/dx se aplica dondequiera que la curva definida implícitamente tenga pendiente. De nuevo, observe que la derivada incluye a *ambas* variables, x y y, no sólo a la variable independiente x. ■

Derivadas de orden superior

También se puede utilizar la derivación implícita para determinar derivadas de orden superior.

EJEMPLO 4 Determine d^2y/dx^2 si $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Solución Para empezar, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x para encontrar $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0 \qquad \text{Tratar a } y \text{ como una función de } x.$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \qquad \text{cuando } y \neq 0 \qquad \text{Despejar } y'.$$

Ahora aplicamos la regla del cociente para determinar y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Por último, sustituimos $y' = x^2/y$, para expresar a y'' en términos de x y de y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \qquad \text{cuando } y \neq 0$$

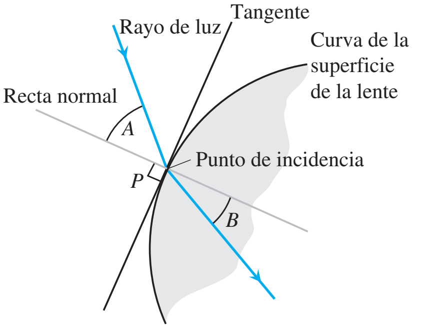


FIGURA 3.30 El perfil de una lente muestra la refracción (desviación) de un rayo de luz que pasa a través de la superficie de la lente.

Lentes, tangentes y rectas normales

En la ley que describe cómo cambia la dirección de la luz cuando penetra en una lente, los ángulos importantes son los ángulos que forma la luz con la recta perpendicular a la superficie de la lente en el punto de incidencia (ángulos A y B en la figura 3.30). Esta línea se denomina *normal* a la superficie en el punto de incidencia. En una vista de perfil de una lente, como la de la figura 3.30, la **normal** es la recta perpendicular a la tangente de la curva del perfil en el punto de incidencia.

EJEMPLO 5 Demuestre que el punto (2, 4) está en la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Luego determine la tangente y la normal a la curva allí (figura 3.31).

Solución El punto (2, 4) está en la curva, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación dada para la curva $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Para determinar la pendiente de la curva en (2, 4), primero utilizamos la derivación implícita para determinar la fórmula para dy/dx:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0 \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x.$$

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0 \qquad \text{Tratar a } xy \text{ como un producto y a } y \text{ como una función de } x.$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}. \qquad \text{Despejar } dy/dx.$$

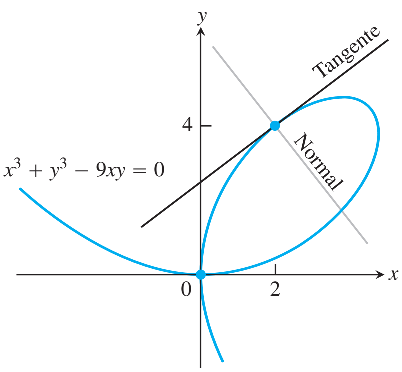


FIGURA 3.31 El ejemplo 5 muestra cómo determinar las ecuaciones para la tangente y la normal del folio (hoja) de Descartes en (2, 4).

Ahora evaluamos la derivada en $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

La tangente en (2, 4) es la recta que pasa por (2, 4) con pendiente $4/5$:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

La normal a la curva en (2, 4) es la recta perpendicular a la recta tangente allí, es decir, la recta que pasa por (2, 4) con pendiente $-5/4$:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$
$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}.$$

■

La fórmula cuadrática nos permite despejar a y en términos de x, en una ecuación de segundo grado como $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$. Existe una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica, la cual es como la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si esta fórmula se utilizara para despejar a y en términos de x en la ecuación $x^3 + y^3 = 9xy$ del ejemplo 5, entonces las tres funciones determinadas por la ecuación serían

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

y

$$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}\right)\right].$$

Utilizar derivación implícita en el ejemplo 5 fue mucho más sencillo que calcular dy/dx directamente de cualquiera de las fórmulas anteriores. La determinación de las pendientes en curvas definidas mediante ecuaciones de grado superior por lo común requiere derivación implícita.

Ejercicios 3.7

Derivación implícita

Utilice derivación implícita para determinar dy/dx en los ejercicios 1 a 14.

1. $x^2y + xy^2 = 6$
2. $x^3 + y^3 = 18xy$
3. $2xy + y^2 = x + y$
4. $x^3 - xy + y^3 = 1$
5. $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$
6. $(3xy + 7)^2 = 6y$
7. $y^2 = \frac{x - 1}{x + 1}$
8. $x^3 = \frac{2x - y}{x + 3y}$
9. $x = \tan y$
10. $xy = \cot(xy)$
11. $x + \tan(xy) = 0$
12. $x^4 + \operatorname{sen} y = x^3y^2$
13. $y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$
14. $x \cos(2x + 3y) = y \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 15 a 18, determine $dr/d\theta$.

15. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
16. $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$
17. $\operatorname{sen}(r\theta) = \frac{1}{2}$
18. $\cos r + \cot\theta = r\theta$

Segundas derivadas

En los ejercicios 19 a 26, utilice derivación implícita para determinar dy/dx y luego d^2y/dx^2.

19. $x^2 + y^2 = 1$
20. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
21. $y^2 = x^2 + 2x$
22. $y^2 - 2x = 1 - 2y$
23. $2\sqrt{y} = x - y$
24. $xy + y^2 = 1$

25. Si $x^3 + y^3 = 16$, determine el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(2, 2)$.

26. Si $xy + y^2 = 1$, determine el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(0, -1)$.

En los ejercicios 27 y 28, determine la pendiente de la curva en los puntos dados.

27. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en $(-2, 1)$ y en $(-2, -1)$.

28. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ en $(1, 0)$ y en $(1, -1)$.

Pendientes, tangentes y normales

En los ejercicios 29 a 38, verifique que el punto dado esté en la curva y determine las rectas que son **(a)** tangente y **(b)** normal a la curva en el punto dado.

29. $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$

30. $x^2 + y^2 = 25, \quad (3, -4)$

31. $x^2y^2 = 9, \quad (-1, 3)$

32. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

33. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

34. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad \left(\sqrt{3}, 2\right)$

35. $2xy + \pi \operatorname{sen} y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

36. $x \operatorname{sen} 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

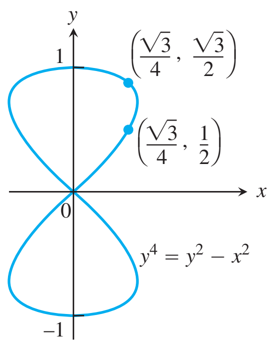
37. $y = 2 \operatorname{sen}(\pi x - y), \quad (1, 0)$

38. $x^2 \cos^2 y - \operatorname{sen} y = 0, \quad (0, \pi)$

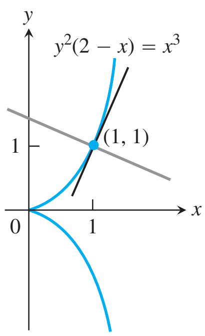
39. Tangentes paralelas Determine los dos puntos donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza al eje x y demuestre que las tangentes a la curva en estos puntos son paralelas. ¿Cuál es la pendiente común a tales tangentes?

40. Normales paralelas a una recta Determine las normales a la curva $xy + 2x - y = 0$, que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

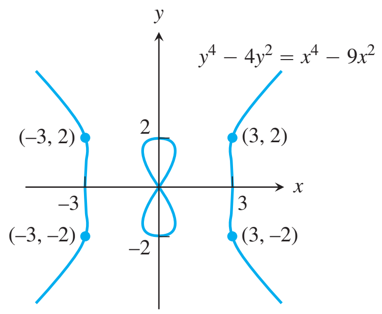
41. La curva ocho Determine las pendientes de la curva $y^4 = y^2 - x^2$ en los dos puntos que se muestran a continuación.



42. La cisoide de Diocles (que data del 200 a. de C.) Determine ecuaciones para la tangente y la normal a la cisoide de Diocles $y^2(2 - x) = x^3$ en $(1, 1)$.



43. La curva del diablo (Gabriel Cramer, 1750) Determine las pendientes de la curva del diablo $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ en los cuatro puntos que se indican.



44. El folio de Descartes (Véase la figura 3.26).

a. Determine la pendiente del folio de Descartes $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ en los puntos $(4, 2)$ y $(2, 4)$.

b. ¿En qué otro punto, distinto del origen, el folio tiene una tangente horizontal?

c. Determine las coordenadas del punto A en la figura 3.26, donde el folio tiene una tangente vertical.

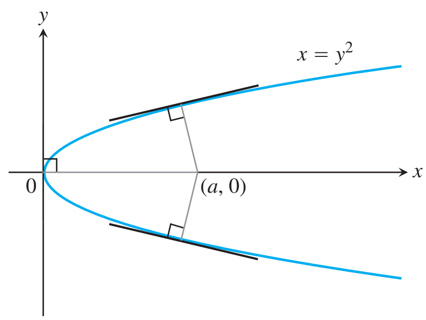
Teoría y ejemplos

45. Intersecciones de la normal La recta que es normal a la curva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ en $(1, 1)$, ¿en qué otro punto interseca a la curva?

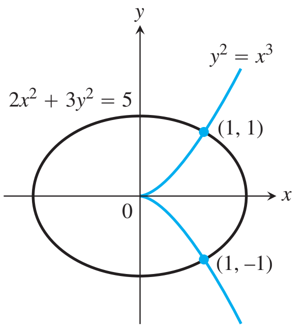
46. Regla de la potencia para exponentes racionales Sean p y q enteros con $q > 0$. Si $y = x^{p/q}$, obtenga la derivada de la ecuación equivalente $y^q = x^p$ implícitamente y demuestre que para $y \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}.$$

47. Normales a una parábola Demuestre que si es posible dibujar tres normales desde el punto $(a, 0)$ a la parábola $x = y^2$, la cual se representa en el siguiente diagrama, entonces a debe ser mayor que $1/2$. Una de las normales es el eje x. ¿Para qué valor de a las otras dos normales son perpendiculares?



48. ¿Existe algo especial con respecto a las tangentes a las curvas $y^2 = x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 5$ en los puntos $(1, \pm 1)$? Justifique su respuesta.

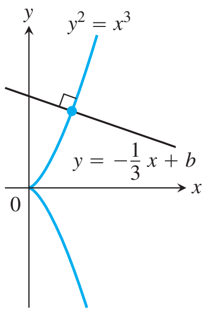


49. Verifique que los pares de las siguientes curvas se cortan ortogonalmente.

a. $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 = 3y^2$

b. $x = 1 - y^2, \quad x = \frac{1}{3}y^2$

50. La gráfica de $y^2 = x^3$ se denomina **parábola semicúbica** y se muestra en la siguiente figura. Determine la constante b de forma que la recta $y = -\frac{1}{3}x + b$ corte ortogonalmente a esta gráfica.



T En los ejercicios 51 y 52, determine dy/dx (considerando a y como una función diferenciable de x) y dx/dy (considerando a x como una función diferenciable de y). ¿Cómo parecen estar relacionadas dy/dx y dx/dy? Explique geométricamente la relación en términos de las gráficas.

51. $xy^3 + x^2y = 6$ **52.** $x^3 + y^2 = \operatorname{sen}^2 y$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 53 a 60, utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos.

a. Trace la ecuación con el graficador de relaciones implícitas de un SAC. Verifique que el punto P satisface la ecuación.

b. Mediante derivación implícita, determine una fórmula para la derivada dy/dx y evalúela en el punto dado P.

c. Utilice la pendiente que encontró en el inciso (b) para determinar una ecuación para la recta tangente a la curva en P. Luego trace juntas la curva implícita y la recta tangente en una sola gráfica.

53. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

54. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

55. $y^2 + y = \dfrac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

56. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

57. $x + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

58. $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

59. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

60. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

3.8 Tasas relacionadas

En esta sección analizaremos problemas que se refieren a la tasa a la que cambia alguna variable cuando se conoce la tasa (o razón) a la que cambia otra variable (o quizás otras) relacionada(s). El problema de determinar una tasa de cambio a partir de otras tasas de cambio relacionadas se denomina *problema de tasas relacionadas*.

Ecuaciones de tasas relacionadas

Suponga que bombeamos aire a un globo esférico. Tanto el volumen como el radio aumentan al pasar el tiempo. Si V es el volumen y r es el radio del globo en un instante determinado, entonces

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Mediante la regla de la cadena, derivamos ambos lados con respecto a t para determinar una ecuación que relacione las tasas de cambio de V y r.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

De esta forma, si conocemos el radio r del globo y la tasa de cambio dV/dt a la que aumenta el volumen en un instante dado, entonces podemos despejar dr/dt en la ecuación para determinar qué tan rápido aumenta el radio en ese instante. Observe que es más sencillo medir directamente la tasa de cambio del volumen (la razón a la que el aire se bombea en el globo) que medir el aumento del radio. La ecuación de las tasas relacionadas nos permite calcular dr/dt a partir de dV/dt.

Con mucha frecuencia la clave para relacionar las variables en problemas de tasas relacionadas es elaborar un dibujo que muestre las relaciones entre ellas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

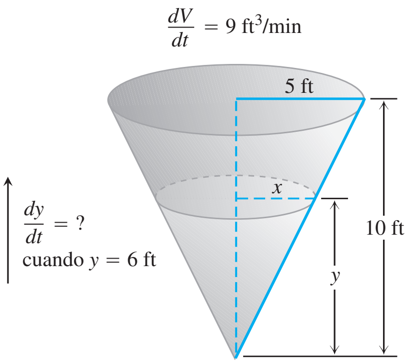


FIGURA 3.32 La geometría del depósito cónico y la tasa a la cual el agua llena el depósito determinan la rapidez con la que se eleva el nivel del agua (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Se vierte agua en un depósito de forma cónica a razón de 9 ft^3/min. El depósito tiene su vértice en la parte inferior, una altura de 10 ft, y el radio de la base mide 5 ft. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando el agua tiene una profundidad de 6 ft?

Solución La figura 3.22 muestra un depósito cónico parcialmente lleno. Las variables en el problema son

V = volumen (ft^3) de agua en el depósito en el instante t (min)

x = radio (ft) de la superficie de agua en el instante t

y = profundidad (ft) de agua en el depósito en el instante t.

Suponemos que V, x y y son funciones derivables de t. Las constantes son las dimensiones del depósito. Nos piden determinar dy/dt cuando

$$y = 6 \text{ ft} \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ ft}^3/\text{min}.$$

El agua forma un cono con volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Esta ecuación incluye a x, así como a V y a y. Puesto que no se da información acerca de x y dx/dt en el instante en cuestión, necesitamos eliminar x. Los triángulos semejantes en la figura 3.32 nos sugieren una manera de expresar a x en términos de y.

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{y}{2}.$$

Por lo tanto, encontramos

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

para obtener la derivada

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}.$$

Por último, utilizamos $y = 6$ y $dV/dt = 9$ y despejamos dy/dt.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

En el instante en cuestión, el nivel del agua se eleva aproximadamente 0.32 ft/min. ■

Estrategia para problemas de tasas relacionadas

1. *Elabore un dibujo y dé nombre a las variables y las constantes.* Utilice t para el tiempo. Suponga que todas las variables son funciones derivables de t.
2. *Escriba la información numérica* (en términos de los símbolos que haya elegido).
3. *Escriba lo que se pide determinar* (por lo regular, una tasa de cambio expresada como una derivada).
4. *Escriba una ecuación que relacione a las variables.* Puede combinar dos o más ecuaciones para obtener una sola que relacione la variable, cuya tasa de cambio necesita conocer, con las variables cuyas tasas de cambio conoce.
5. *Derive con respecto a t.* Luego exprese la tasa de cambio que necesita en términos de las tasas de cambio y las variables cuyos valores conoce.
6. *Evalúe.* Utilice los valores conocidos para determinar la tasa de cambio desconocida.

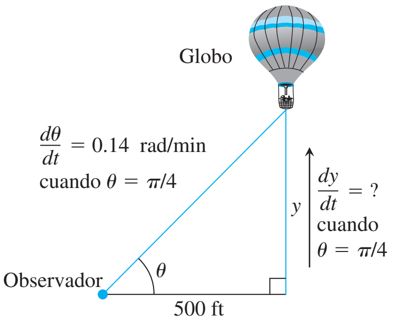


FIGURA 3.33 La tasa de cambio de la altura del globo está relacionada con la tasa de cambio del ángulo que el observador forma con el suelo (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Un globo de aire caliente se eleva verticalmente desde el nivel de un campo y es rastreado por un observador, que se encuentra a 500 ft del punto de lanzamiento. En el momento en que el ángulo de elevación del observador es $\pi/4$, el ángulo aumenta a razón de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido se eleva el globo en ese instante?

Solución Respondemos la pregunta es seis pasos.

1. *Elabore un dibujo y nombre las variables y las constantes* (figura 3.33). Las variables en el dibujo son

   $\theta =$ el ángulo, en radianes, que forma la vista del observador con el suelo.

   $y =$ la altura del globo en ft.

Representamos con t al tiempo, en minutos, y suponemos que θ y y son funciones derivables de t.

La única constante en el dibujo es la distancia del observador al punto de lanzamiento (500 ft). No necesitamos ponerle un símbolo especial.

2. *Escriba la información numérica.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min} \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Escriba lo que se pide determinar.* Necesitamos dy/dt cuando $\theta = \pi/4$.
4. *Escriba una ecuación que relacione a las variables y y θ.*

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \qquad \text{o} \qquad y = 500\tan\theta$$

5. *Derive con respecto a t usando la regla de la cadena.* El resultado nos dice cómo está relacionada dy/dt (que necesitamos) con du/dt (que conocemos).

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

6. *Evalúe con $\theta = \pi/4$ y $d\theta/dt = 0.14$ para determinar dy/dt.*

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 140 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

En el instante en cuestión, el globo se eleva a una tasa de 140 ft/min. ■

EJEMPLO 3 Un policía en su auto patrulla se aproxima desde el norte a una intersección en ángulo recto, persiguiendo a un automóvil que va a exceso de velocidad, el cual ha dado vuelta en la esquina y ahora se dirige hacia el este. Cuando la patrulla está a 0.6 mi al norte de la intersección y el automóvil está a 0.8 mi al este, el policía, con su radar, determina que la distancia entre él y el automóvil aumenta a razón de 20 mph. Si la patrulla se desplaza a 60 mph en el instante de la medición, ¿cuál es la rapidez del automóvil?

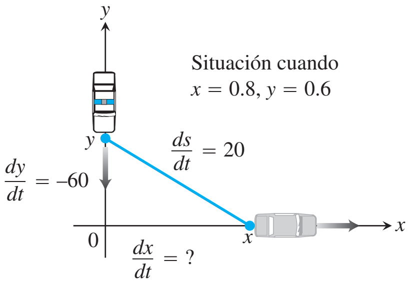


FIGURA 3.34 La rapidez del automóvil está relacionada con la rapidez de la patrulla y la tasa de cambio de la distancia entre ellos (ejemplo 3).

Solución Dibujamos el automóvil y la patrulla en el plano coordenado, usando la parte positiva del eje x para representar el tramo de la carretera que va hacia el este, y la parte positiva del eje y para representar el tramo que va hacia el sur (figura 3.34). Denotamos el tiempo por t y definimos

x = posición del automóvil en el instante t
y = posición de la patrulla en el instante t
s = distancia entre el automóvil y la patrulla en el instante t.

Suponemos que x, y y s son funciones derivables de t.

Necesitamos determinar dx/dt cuando

$$x = 0.8 \text{ mi}, \qquad y = 0.6 \text{ mi}, \qquad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mph}, \qquad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mph}.$$

Observe que dy/dt es negativa, ya que y disminuye.

Derivamos la ecuación de distancia

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(también podríamos haber utilizado $s = \sqrt{x^2 + y^2}$), y obtenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Por último, utilizamos $x = 0.8$, $y = 0.6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$ y despejamos dx/dt.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70$$

En el momento en cuestión, la rapidez del automóvil es de 70 mph. ■

EJEMPLO 4 Una partícula, P, se desplaza a velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de una circunferencia con radio de 10 ft y con centro en el origen. La posición inicial de la partícula es (0, 10) en el eje y y su destino final es el punto (10, 0) en el eje x. Una vez que la partícula está en movimiento, la recta tangente en P interseca al eje x en el punto Q (el cual se mueve al pasar el tiempo). Si la partícula tarda 30 segundos en ir de su posición inicial a la final, ¿qué tan rápido se mueve el punto Q en el eje x cuando está a 20 ft del centro de la circunferencia?

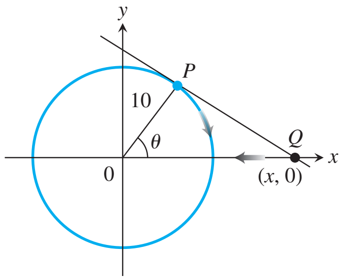


FIGURA 3.35 La partícula P se desplaza en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia (ejemplo 4).

Solución Dibujamos la situación en el plano coordenado con la circunferencia centrada en el origen (figura 3.35). Representamos con t al tiempo y denotamos con θ al ángulo que se forma entre el eje x y el radio que une al origen con P. Como la partícula se mueve desde la posición inicial a la final en 30 segundos, viaja a lo largo del círculo a una tasa constante de $\pi/2$ radianes en 1/2 minuto, es decir, π rad/min. En otras palabras, $d\theta/dt = -\pi$, con t medido en minutos. El signo negativo aparece porque θ disminuye al pasar el tiempo.

Si denotamos con $x(t)$ a la distancia del punto Q al origen, en el instante t, necesitamos determinar dx/dt cuando

$$x = 20 \text{ ft} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\pi \text{ rad/min}.$$

Para relacionar las variables x y θ, con base en la figura 3.35, vemos que $x \cos\theta = 10$, o $x = 10 \sec\theta$. Al derivar esta última ecuación, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 10 \sec\theta \tan\theta \frac{d\theta}{dt} = -10\pi \sec\theta \tan\theta.$$

Observe que dx/dt es negativa, ya que x disminuye (Q se mueve hacia el origen).

Cuando $x = 20$, $\cos\theta = 1/2$ y $\sec\theta = 2$. Además, $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{3}$. Se sigue que

$$\frac{dx}{dt} = (-10\pi)(2)\left(\sqrt{3}\right) = -20\sqrt{3}\pi.$$

En el momento en cuestión, el punto Q se mueve hacia el origen con una rapidez de $20\sqrt{3}\pi \approx 108.8$ ft/min. ■

EJEMPLO 5 Un avión vuela a una altitud constante de 12,000 ft sobre el nivel del mar, conforme se aproxima a una isla del Pacífico. La aeronave pasa directamente por la línea de visión de una estación de radar, ubicada en la isla; el radar indica que el ángulo inicial entre el nivel del mar y su línea de visión al avión es de 30°. ¿Con qué rapidez (en millas por hora) se aproxima el avión a la isla cuando es detectado por el radar, si éste gira hacia arriba (en contra de las manecillas del reloj) a razón de $2/3$ grado/segundo, con la finalidad de mantener el avión dentro de su línea de visión?

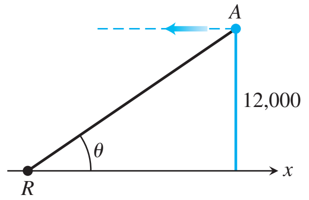


FIGURA 3.36 Avión A, a una altura constante, que viaja hacia la estación del radar R (ejemplo 5).

Solución El avión, A, y la estación del radar, R, se dibujan en el plano coordenado, considerando el eje positivo x como la distancia horizontal al nivel del mar de R a A, y la parte positiva del eje y como la altitud vertical desde el nivel del mar. Representamos con t al tiempo y observamos que $y = 12{,}000$ es una constante. La situación general y el ángulo de la línea de visión, θ, se ilustran en la figura 3.36. Necesitamos determinar dx/dt cuando $\theta = \pi/6$ rad y $d\theta/dt = 2/3$ grados/seg.

Con base en la figura 3.36, vemos que

$$\frac{12{,}000}{x} = \tan\theta \quad \text{o} \quad x = 12{,}000 \cot\theta.$$

Si se utilizan millas en vez de ft en nuestras unidades de distancia, la última ecuación se traduce en

$$x = \frac{12{,}000}{5280} \cot\theta.$$

La derivación con respecto a t produce

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1200}{528} \csc^2\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Cuando $\theta = \pi/6$, $\operatorname{sen}^2\theta = 1/4$, así que $\csc^2\theta = 4$. Al convertir $d\theta/dt = 2/3$ grados/seg a radianes por hora, encontramos

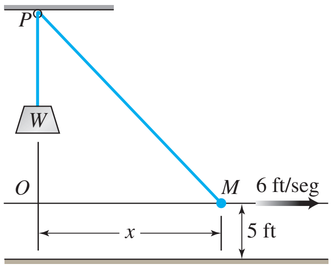
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{180}\right)(3600) \text{ rad/hr.}$$ 1 hr = 3600 seg, 1 grado = $\pi/180$ rad

De esta forma, la sustitución en la ecuación para dx/dt da

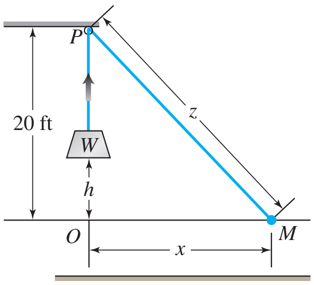
$$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{1200}{528}\right)(4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)(3600) \approx -380.$$

Aparece el signo negativo, ya que la distancia x disminuye, por lo que la aeronave se aproximaba a la isla con una rapidez de unos 380 mi/hr cuando fue detectada por primera vez por el radar. ■

EJEMPLO 6 La figura 3.37a muestra una cuerda que pasa por una polea en P y que tiene sujeto un peso W en un extremo. El otro extremo está sujeto 5 ft por arriba del suelo en la mano de un trabajador, M. Suponga que la polea está a 25 ft por arriba del suelo, la cuerda mide 45 ft



(a)



(b)

FIGURA 3.37 Un trabajador en M camina hacia la derecha tirando del peso W hacia arriba conforme la cuerda se mueve y pasa por la polea P (ejemplo 6).

de largo y el trabajador camina rápidamente, por lo que se aleja de la recta vertical PW a razón de 6 ft/seg. ¿Qué tan rápido se eleva el peso, cuando la mano del trabajador está a 21 ft de PW?

Solución En cualquier instante t, sea OM la línea horizontal de longitud x ft, que va del punto O, directamente debajo de la polea, a la mano del trabajador M (figura 3.37). Sea h la altura, con respecto a O, del peso W, y denotemos como z la longitud del trozo de cuerda que va de la polea P a la mano del trabajador. Necesitamos conocer dh/dt cuando $x = 21$, puesto que $dx/dt = 6$. Observe que la altura de P por arriba de O es de 20 ft, ya que O está 5 ft por encima del suelo. Supongamos que el ángulo en O es recto.

En cualquier instante t se presentan las siguientes relaciones (figura 3.37b):

$$20 - h + z = 45 \qquad \text{La longitud total de la cuerda es 45 de ft.}$$
$$20^2 + x^2 = z^2 \qquad \text{El ángulo en } O \text{ es recto.}$$

Si despejamos z en la primera ecuación, se tiene $z = 25 + h$, lo que sustituimos en la segunda ecuación para obtener

$$20^2 + x^2 = (25 + h)^2. \tag{1}$$

Al diferenciar ambos lados con respecto a t se obtiene

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(25 + h)\frac{dh}{dt},$$

y al despejar dh/dt en esta última ecuación encontramos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{x}{25 + h}\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Como conocemos dx/dt, sólo falta determinar $25 + h$ en el instante cuando $x = 21$. De acuerdo con la ecuación (1),

$$20^2 + 21^2 = (25 + h)^2$$

así que

$$(25 + h)^2 = 841, \quad \text{o bien,} \quad 25 + h = 29.$$

Ahora, la ecuación (2) da

$$\frac{dh}{dt} = \frac{21}{29}\cdot 6 = \frac{126}{29} \approx 4.3 \text{ ft/seg}$$

como la tasa a la que se eleva el peso cuando $x = 21$ ft. ■

Ejercicios 3.8

1. **Área** Suponga que el radio r y el área $A = \pi r^2$ de un círculo son funciones derivables de t. Escriba una ecuación que relacione dA/dt con dr/dt.
2. **Área de la superficie** Suponga que el radio, r, y el área de la superficie $S = 4\pi r^2$ de una esfera son funciones derivables de t. Escriba una ecuación que relacione dS/dt con dr/dt.
3. Suponga que $y = 5x$ y $dx/dt = 2$. Determine dy/dt.
4. Suponga que $2x + 3y = 12$ y que $dy/dt = -2$. Determine dx/dt.
5. Si $y = x^2$ y $dx/dt = 3$, ¿cuál es el valor de dy/dt cuando $x = -1$?
6. Si $x = y^3 - y$ y $dy/dt = 5$, ¿cuál es el valor de dx/dt cuando $y = 2$?
7. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dx/dt = -2$, ¿cuál es el valor de dy/dt cuando $x = 3$ y $y = -4$?
8. Si $x^2y^3 = 4/27$ y $dy/dt = 1/2$, ¿cuál es el valor de dx/dt cuando $x = 2$?
9. Si $L = \sqrt{x^2 + y^2}$, $dx/dt = -1$, y $dy/dt = 3$, determine dL/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.
10. Si $r + s^2 + v^3 = 12$, $dr/dt = 4$ y $ds/dt = -3$, determine dv/dt cuando $r = 3$ y $s = 1$.
11. Si la longitud original de 24 m del lado x de un cubo disminuye a razón de 5 m/min, cuando $x = 3$ m, ¿a qué razón cambia
    a. el área de la superficie del cubo?
    b. el volumen?
12. La superficie del área de un cubo aumenta a razón de 72 in²/seg. ¿A qué tasa cambia el volumen del cubo cuando la longitud del lado es $x = 3$ in?

13. Volumen El radio r y la altura h de un cilindro circular recto están relacionados con el volumen V del cilindro mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.

a. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dh/dt si r es constante?

b. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt si h es constante?

c. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt y dh/dt si ni r y ni h son constantes?

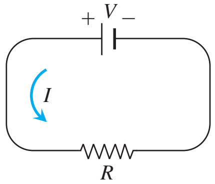
14. Volumen El radio r y la altura h de un cono circular recto están relacionados con el volumen V del cono mediante la ecuación $V = (1/3)\pi r^2 h$.

a. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dh/dt si r es constante?

b. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt si h es constante?

c. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt y dh/dt si ni r ni h son constantes?

15. Cambio del voltaje El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico, como el que se ilustra aquí, están relacionados mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V aumenta a razón de 1 volt/seg, mientras que I disminuye a razón de 1/3 de amp/seg. Con t se denota el tiempo en segundos.



a. ¿Cuál es el valor de dV/dt?

b. ¿Cuál es el valor de dI/dt?

c. ¿Qué ecuación relaciona a dR/dt con dV/dt y dI/dt?

d. Determine la razón a la que cambia R cuando $V = 12$ volts e $I = 2$ amp. ¿R aumenta o disminuye?

16. Potencial eléctrico El potencial eléctrico P (en watts) de un circuito eléctrico está relacionado con la resistencia del circuito R (en ohms) y la corriente I (en amperes) mediante la ecuación $P = RI^2$.

a. ¿Cómo están relacionadas dP/dt, dR/dt y dI/dt si P, R e I no son constantes?

b. ¿Cómo está relacionada dR/dt con dI/dt si P es constante?

17. Distancia Sean x y y funciones derivables de t, y sea $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$ en el plano xy.

a. ¿Cómo está relacionada ds/dt con dx/dt si y es constante?

b. ¿Cómo está relacionada ds/dt con dx/dt y dy/dt si ni x ni y son constantes?

c. ¿Cómo está relacionada dx/dt con dy/dt si s es constante?

18. Diagonales Si x, y y z son las longitudes de los lados de una caja rectangular, la longitud común de las diagonales de la caja es $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a. Suponiendo que x, y y z son funciones derivables de t, ¿cómo está relacionada ds/dt con dx/dt, dy/dt y dz/dt?

b. ¿Cómo está relacionada ds/dt con dy/dt y dz/dt si x es constante?

c. ¿Cómo están relacionadas dx/dt, dy/dt y dz/dt si s es constante?

19. Área El área A de un triángulo con lados de longitudes a y b, que forman un ángulo de medida θ, es

$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta .$$

a. ¿Cómo está relacionada dA/dt con $d\theta/dt$ si a y b son constantes?

b. ¿Cómo está relacionada dA/dt con $d\theta/dt$ y da/dt si sólo b es constante?

c. ¿Cómo está relacionada dA/dt con $d\theta/dt$, da/dt y db/dt si ni a ni b ni θ son constantes?

20. Calentamiento de un plato Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando el radio es de 50 cm?

21. Cambio de dimensiones de un rectángulo La longitud l de un rectángulo disminuye a razón de 2 cm/seg, mientras que el ancho w aumenta a razón de 2 cm/seg. Cuando l = 12 cm y $w = 5$ cm, determine las tasas de cambio de **(a)** el área, **(b)** el perímetro y **(c)** las longitudes de las diagonales del rectángulo. ¿Cuál de estas cantidades aumenta y cuál disminuye?

22. Cambio de dimensiones en una caja rectangular Suponga que las longitudes de los lados x, y y z de una caja rectangular cerrada cambian a las siguientes tasas:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sec}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sec}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}.$$

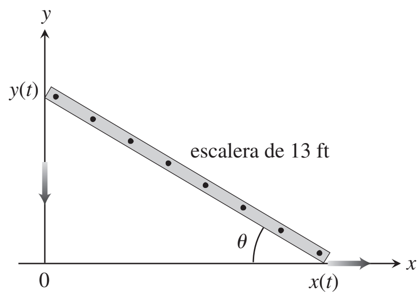
Determine las tasas a las que cambia **(a)** el volumen, **(b)** el área de la superficie y **(c)** la longitud de la diagonal, $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el instante en que $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$.

23. Una escalera que resbala Una escalera de 13 ft está recargada sobre el muro exterior de una casa cuando su base empieza a deslizarse y alejarse (véase la figura). En el instante en el que la base está a 12 ft de la casa, la base se mueve a una tasa de 5 ft/seg.

a. ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo?

b. En ese instante, ¿con qué tasa cambia el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo?

c. En ese instante, ¿a qué tasa cambia el ángulo θ entre la escalera y el suelo?



24. Tráfico aéreo comercial Dos aviones comerciales vuelan a una altura de 40,000 ft a lo largo de recorridos en línea recta que se intersecan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección con una rapidez de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué tasa cambia la distancia entre ellos cuando A está a 5 millas náuticas del punto de intersección y B a 12 millas náuticas del punto de intersección?

25. Vuelo de una cometa Una niña vuela una cometa a una altura de 300 ft, y el viento aleja horizontalmente a la cometa a una tasa de 25 ft/seg. ¿Qué tan rápido debe soltar la cuerda cuando la cometa está a 500 ft de ella?

26. Perforación de un cilindro Los mecánicos de la Automotriz Lincoln vuelven a perforar un cilindro de 6 in de profundidad para colocar un nuevo pistón. La máquina que utilizan aumenta el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 3 minutos. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando la perforación (el diámetro) es de 3.800 in?

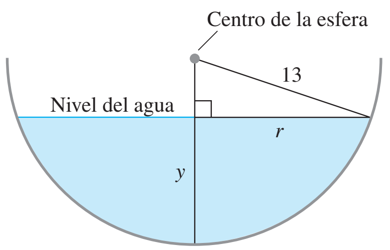
27. Crecimiento de una pila de arena Desde una banda transportadora cae arena a la parte superior de una pila cónica a una tasa de 10 m^3/min. La altura de la pila siempre es tres octavos del diámetro de la base. ¿Qué tan rápido cambian **(a)** la altura y **(b)** el radio cuando la pila tiene una altura de 4 m? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

28. Drenado de un depósito cónico Desde un depósito cónico de concreto (con el vértice hacia abajo), con altura de 6 m y cuyo radio de la base mide 45 m, fluye agua a razón de 50 m^3/min.

a. ¿Con qué rapidez (en centímetros por minuto) disminuye el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m?

b. En ese momento, ¿qué tan rápido cambia el radio de la superficie del agua? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

29. Drenado de un depósito semiesférico De un depósito, en forma de tazón semiesférico de 13 m de radio, sale agua a razón de 6 m^3/min; en la figura se le observa de perfil. Responda las siguientes preguntas, considerando que el volumen de agua en un tazón semiesférico de radio R es $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ cuando el agua tiene una profundidad de y metros.



a. ¿A qué tasa cambia el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 8 m?

b. ¿Cuál es el radio r de la superficie del agua cuando la profundidad del agua es de y m?

c. ¿A qué tasa cambia el radio r cuando el agua tiene una profundidad de 8 m?

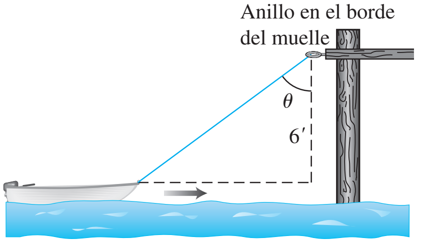
30. Crecimiento de una gota de lluvia Suponga que una gota de lluvia es una esfera perfecta y que, durante la condensación, la gota recolecta humedad a una tasa proporcional al área de su superficie. Demuestre que en tales circunstancias el radio de la gota aumenta a una tasa constante.

31. Radio de un globo que se infla Un globo esférico se infla con helio a razón de 100π ft^3/min. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo en el instante en el que el radio es de 5 ft? ¿Con qué rapidez aumenta el área de la superficie?

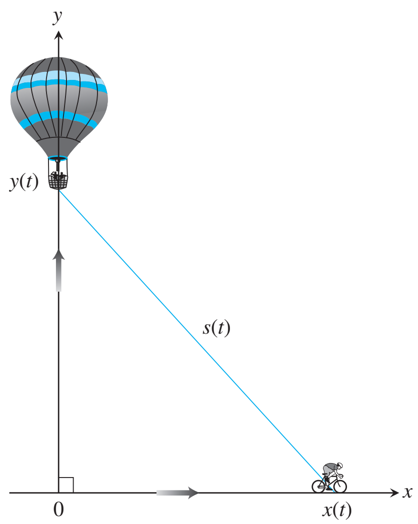
32. Un bote que es arrastrado Un bote se arrastra hacia un muelle mediante una cuerda que está atada a la proa del bote y a un aro en el muelle a 6 ft arriba de la proa. Se tira de la cuerda a razón de 2 ft/seg.

a. ¿Qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando la longitud de la cuerda es de 10 ft?

b. ¿A qué velocidad cambia el ángulo θ en ese instante? (Véase la figura).



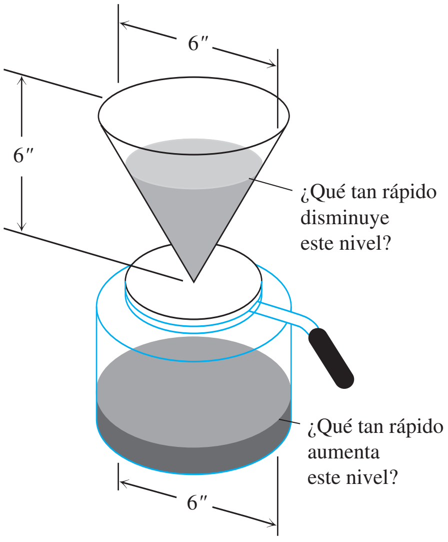
33. Un globo y una bicicleta Un globo se eleva verticalmente desde una superficie plana a una tasa de 1 ft/seg. Justo cuando el globo está a 65 ft sobre el nivel del suelo, una bicicleta que se desplaza a una velocidad constante de 17 ft/seg pasa debajo de él. ¿Qué tan rápido cambia la distancia, $s(t)$, entre la bicicleta y el globo 3 segundos después?



34. Preparación de café De un filtro cónico sale café y cae en una cafetera cilíndrica a razón de 10 ft^3/min.

a. ¿Qué tan rápido sube el nivel en la cafetera cuando el café en el cono tiene una profundidad de 5 in?

b. En ese momento, ¿qué tan rápido disminuye el nivel en el cono?



35. Potencia cardiaca A finales de la década de 1860, Adolf Fick, un profesor de fisiología en la Facultad de Medicina en Würzberg, Alemania, desarrolló uno de los métodos que utilizamos en la actualidad para medir cuánta sangre bombea el corazón humano en un minuto. Probablemente, su potencia cardiaca cuando lea esta oración sea de alrededor de 7 L/min. En reposo es aproximadamente un poco menos de 6 L/min. Si fuera un corredor de maratón, su potencia cardiaca podría ser tan alta como 30 L/min.

Su potencia cardiaca puede calcularse mediante la fórmula

$$y = \frac{Q}{D},$$

donde Q es el número de milímetros de CO_2 que exhala en un minuto y D es la diferencia entre la concentración de CO_2 (ml/L) en la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de CO_2 en la sangre que regresa de los pulmones. Con $Q = 233$ ml/min y $D = 97 - 56 = 41$ ml/L,

$$y = \frac{233 \text{ ml/min}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5.68 \text{ L/min},$$

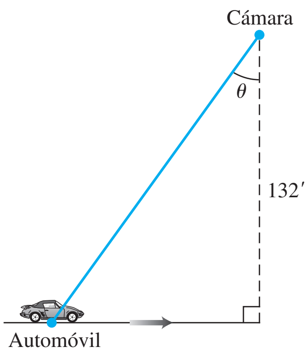
muy cercano a los 6 L/min que la mayoría de la gente tiene en estado basal (es decir, en reposo). (Datos del doctor J. Kenneth Herd, del Quillan College of Medicine, East Tennessee State University).

Suponga que cuando $Q = 233$ y $D = 41$, también sabemos que D disminuye a razón de 2 unidades por minuto, mientras que Q permanece sin cambio. ¿Qué sucede con la potencia cardiaca?

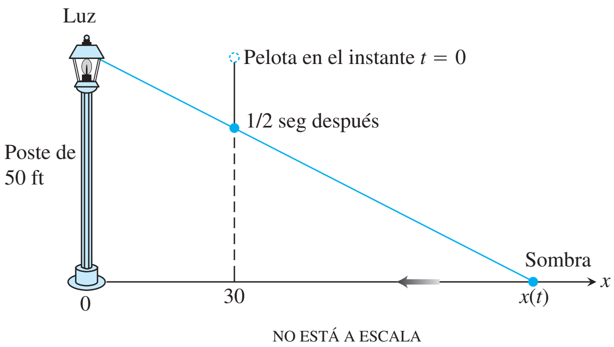
36. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se desplaza a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de tal manera que su coordenada x (medida en metros) aumenta a una razón constante de 10 m/seg. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la línea que une a la partícula con el origen cuando $x = 3$ m?

37. Movimiento en el plano Las coordenadas de una partícula en un plano métrico xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = -1$ m/seg y $dy/dt = -5$ m/seg. ¿Qué tan rápido cambia la distancia al origen de la partícula cuando pasa por el punto (5, 12)?

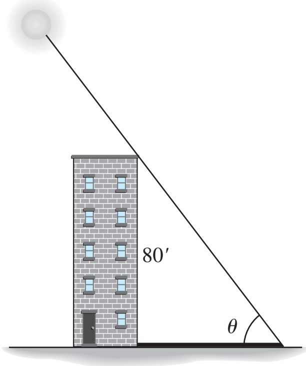
38. Grabación en video de un automóvil en movimiento Usted hace una videograbación de una carrera de automóviles desde una tribuna ubicada a 132 ft de la pista; sigue un automóvil que se desplaza a 180 millas/h (264 ft/seg), como se ilustra en la figura. ¿Qué tan rápido cambiará el ángulo θ de su cámara cuando el automóvil esté justo enfrente de usted? ¿Qué tan rápido cambiará medio segundo después?



39. Movimiento de sombra Una luz brilla desde el extremo superior de un poste de 50 ft de altura. Se lanza una pelota a la misma altura desde un punto ubicado a 30 ft de distancia de la luz. (Véase la figura). ¿Qué tan rápido se mueve la sombra de la pelota a lo largo del suelo 1/2 segundo después? (Suponga que la pelota cae una distancia $s = 16t^2$ ft en t segundos).



40. Sombra de un edificio En la mañana de un día en el que el sol pasa directamente encima de un edificio que mide 80 ft de altura, la sombra proyectada es de 60 ft de largo al nivel del suelo. En ese momento el ángulo θ que el sol forma con el suelo aumenta a una razón de 0.27°/min. ¿A qué tasa decrece la sombra? (Recuerde usar radianes. Exprese su respuesta en pulgadas por minuto; redondee a la décima más cercana).



41. Una capa de hielo que se derrite Una bola esférica de acero, con un diámetro de 8 pulgadas, se cubre con una capa de hielo de espesor uniforme. Si el hielo se derrite a una tasa de 10 in^3/min, ¿qué tan rápido disminuye el grosor de la capa de hielo cuando tiene 2 in de espesor? ¿Qué tan rápido decrece el área superficial exterior del hielo?

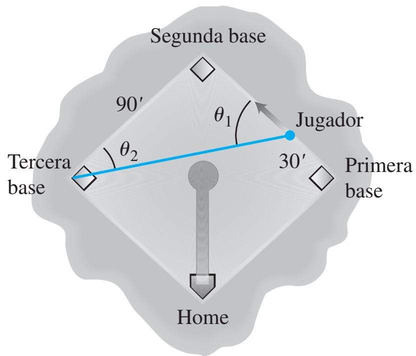
42. Patrulla de caminos Un avión de la policía vuela a 3 millas de altura, con una velocidad constante de 120 mi/hora, por encima de un camino recto. El piloto ve un automóvil que se acerca y, utilizando un radar, determina que en el instante en que la distancia entre el automóvil y el avión, en la línea visual de éste, es de 5 millas, esta distancia disminuye a razón de 160 mi/hora. Encuentre la velocidad a la que se desplaza el automóvil por la carretera.

43. Jugadores de béisbol Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 ft de lado. Un jugador corre de la primera a la segunda base con una rapidez de 16 ft/seg.

a. ¿A qué tasa cambia la distancia entre el jugador y la tercera base cuando aquél se encuentra a 30 ft de la primera base?

b. En ese momento, ¿a qué tasa cambian los ángulos θ_1 y θ_2 (véase la figura)?

c. El jugador se desliza en la segunda base con una rapidez de 15 ft/seg. ¿A qué tasa cambian los ángulos θ_1 y θ_2 cuando el jugador toca la base?



44. Barcos Dos barcos navegan alejándose en línea recta desde un punto O a lo largo de rutas que forman un ángulo de 120°. El barco A se desplaza a 14 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El barco B se desplaza a 21 nudos. ¿Con qué rapidez se alejan los buques cuando $OA = 5$ y $OB = 3$ millas náuticas?

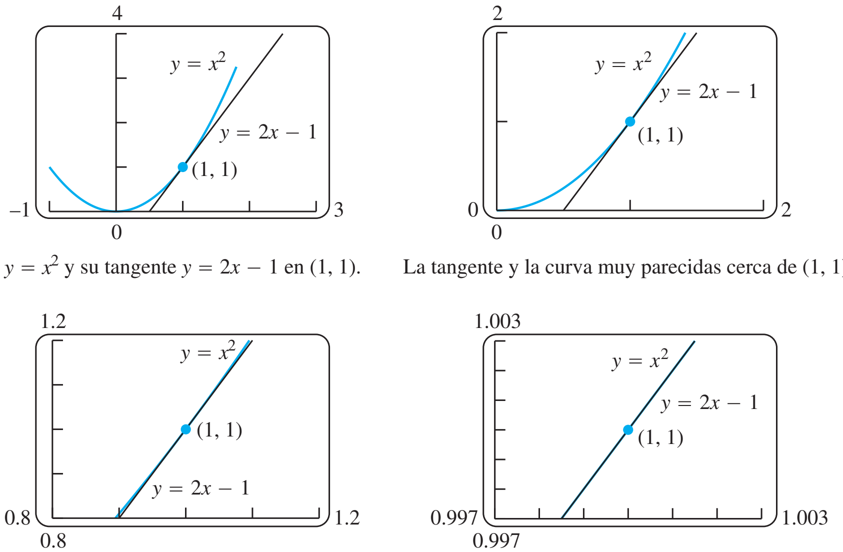
3.9 Linealización y diferenciales

En ocasiones es posible aproximar funciones complicadas con otras más sencillas, las cuales ofrecen la precisión que necesitamos para aplicaciones específicas, a la vez que son más fáciles de utilizar. Las funciones de aproximación analizadas en esta sección se denominan *linealizaciones* y tienen como base las rectas tangentes. En el capítulo 10 se estudian otras funciones de aproximación, como los polinomios.

Introducimos nuevas variables, dx y dy, llamadas *diferenciales*, y las definimos de una manera que hace la notación de Leibniz para la derivada dx/dy una razón verdadera. Utilizamos dy para estimar el error al medir, lo cual después ofrece una demostración precisa para la regla de la cadena (sección 3.6).

Linealización

Como se observa en la figura 3.38, la tangente a la curva $y = x^2$ está muy próxima a ella cerca del punto de tangencia. Durante un pequeño intervalo, los valores de y a lo largo de la recta tangente dan buenas aproximaciones a los valores de y de la curva. Este fenómeno se observa mediante un acercamiento a las dos gráficas en el punto de tangencia o al ver las tablas de valores para la diferencia entre $f(x)$ y su recta tangente cerca de la abscisa x del punto de tangencia. El fenómeno es cierto, no sólo para parábolas; localmente, toda curva derivable se comporta como su recta tangente.



$y = x^2$ y su tangente $y = 2x - 1$ en (1, 1).

La tangente y la curva muy parecidas cerca de (1, 1).

La tangente y la curva mucho más parecidas en todo el intervalo de x que se muestra.

La tangente y la curva aún más parecidas. En la pantalla de la computadora no puede distinguirse la tangente de la curva en este intervalo de x.

FIGURA 3.38 Cuanto mayor sea la ampliación de la gráfica de la función cerca de un punto donde la función es derivable, la gráfica se volverá más plana y se parecerá más a su tangente.

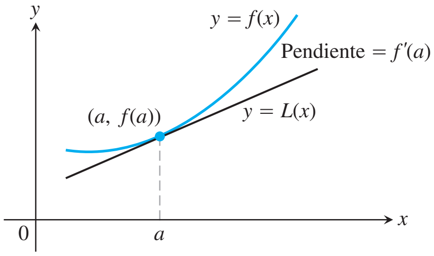


FIGURA 3.39 La tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ es la recta $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

En general, la tangente a $y = f(x)$ en el punto $x = a$, donde f es derivable (figura 3.39), pasa por el punto $(a, f(a))$, por lo que la ecuación punto pendiente de ésta es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Así, esta recta tangente es la gráfica de la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Mientras esta recta permanezca cercana a la gráfica de f, $L(x)$ brinda una buena aproximación a $f(x)$.

DEFINICIONES Si f es derivable en $x = a$, entonces la función de aproximación

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es una **linealización** de f en a. La aproximación

$$f(x) \approx L(x)$$

de f mediante L es la **aproximación lineal estándar** de f en a. El punto $x = a$ es el **centro** de la aproximación.

EJEMPLO 1 Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$ (figura 3.40).

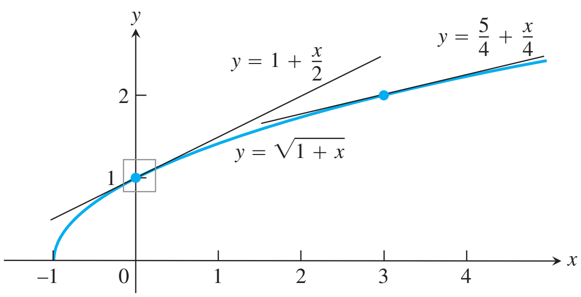


FIGURA 3.40 La gráfica de $y = \sqrt{1 + x}$ y su linealización en $x = 0$ y $x = 3$. La figura 3.41 muestra una vista ampliada de la ventana pequeña alrededor del 1 en el eje y.

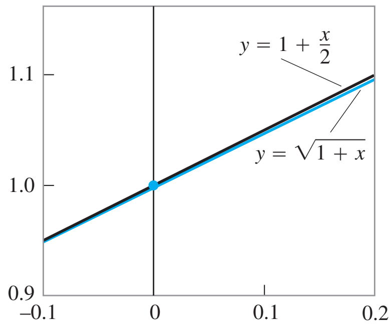


FIGURA 3.41 Vista ampliada de la ventana de la figura 3.40.

Solución Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2},$$

tenemos $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$, lo que da la linealización

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Observe la figura 3.41. ■

La siguiente tabla muestra qué tan precisa es la aproximación $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ del ejemplo 1 para algunos valores de x cercanos a 0. Conforme nos alejamos del cero, perdemos precisión. Por ejemplo, para $x = 2$, la linealización da 2 como la aproximación para $\sqrt{3}$, que no tiene siquiera precisión de un decimal.

Aproximación	Valor verdadero	|Valor verdadero − aproximación|
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$< 10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$< 10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$< 10^{-5}$

No se deje engañar por los cálculos anteriores pensando que cualquier cosa que hagamos con una linealización estaría mejor hecha con una calculadora. En la práctica, nunca utilizaríamos una linealización para determinar una raíz cuadrada particular. La utilidad de la linealización es su capacidad para reemplazar una fórmula complicada por una más sencilla en todo un intervalo de valores. Si tenemos que trabajar con $\sqrt{1 + x}$ para x cercana a 0 y estamos en condiciones de tener una pequeña tolerancia de error, entonces podemos trabajar con $1 + (x/2)$. Por supuesto, necesitamos conocer qué tanto error hay. Posteriormente, en el capítulo 10, examinaremos la estimación del error.

Por lo regular, una aproximación lineal pierde precisión conforme se aleja de su centro. Como sugiere la figura 3.40, la aproximación $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ probablemente será muy burda para ser útil, cerca de $x = 3$. Ahí necesitamos la linealización en $x = 3$.

EJEMPLO 2 Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 3$.

Solución Evaluamos la ecuación que define a $L(x)$ en $a = 3$. Con

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}\bigg|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

tenemos

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

En $x = 3.2$, la linealización del ejemplo 2 da

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050,$$

la cual difiere del valor verdadero, $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ en menos de un milésimo. La linealización del ejemplo 1 da

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

un resultado que está alejado en más del 25 por ciento.

EJEMPLO 3 Determine la linealización de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/2$ (figura 3.42).

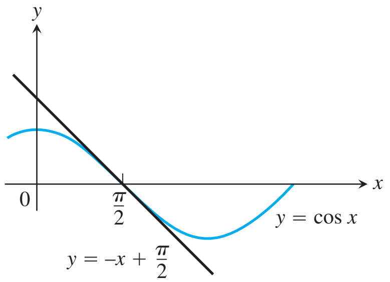


FIGURA 3.42 La gráfica de $f(x) = \cos x$ y su linealización en $x = \pi/2$. Cerca de $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (ejemplo 3).

Solución Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, tenemos que la linealización en $a = \pi/2$ será

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Una aproximación lineal importante para raíces y potencias es

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ cerca de 0, y } k \text{ cualquier número}),$$

(ejercicio 13). Esta aproximación, adecuada para valores de x suficientemente cercanos a cero, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando x es pequeña

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1; \text{ sustituya } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1 + 5x^4} = (1 + 5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3; \text{ reemplace } x \text{ por } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2; \text{ reemplace } x \text{ por } -x^2.$$

Diferenciales

En ocasiones utilizamos la notación de Leibniz dy/dx para representar la derivada de y con respecto a x. Al contrario de lo que parece, no es una razón. Ahora introducimos dos nuevas variables, dx y dy, con la propiedad de que cuando su razón existe, ésta es igual a la derivada.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función derivable. La **diferencial dx** es una variable independiente. La **diferencial dy** es

$$dy = f'(x)\,dx.$$

A diferencia de la variable independiente dx, la variable dy siempre es una variable dependiente. Depende tanto de x como de dx. Si dx tiene un valor específico dado y x es un número particular en el dominio de la función f, entonces estos valores determinan el valor numérico de dy.

EJEMPLO 4

(a) Determine dy si $y = x^5 + 37x$.

(b) Determine el valor de dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.2$.

Solución

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$

(b) Al sustituir $x = 1$ y $dx = 0.2$, en la expresión para dy, tenemos

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4.$$

■

El significado geométrico de las diferenciales se ilustra en la figura 3.43. Sea $x = a$ y definamos $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en $y = f(x)$ es

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

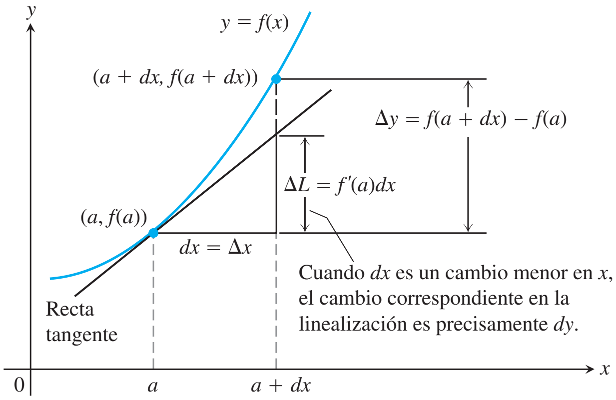


FIGURA 3.43 Geométricamente, la diferencial dy es el cambio ΔL en la linealización de f cuando $x = a$ cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

El cambio correspondiente en la recta tangente L es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a)\\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}\\ &= f'(a)\,dx.\end{aligned}$$

Esto es, el cambio en la linealización de f es precisamente el valor de la diferencial dy cuando $x = a$ y $dx = \Delta x$. Por lo tanto, dy representa la magnitud que se eleva o baja la recta tangente cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

Si $dx \neq 0$, entonces el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx es igual a la derivada $f'(x)$, ya que

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Algunas veces escribimos

$$df = f'(x)\,dx$$

en vez de $dy = f'(x)dx$, y llamamos a df la **diferencial de f**. Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2 - 6$, entonces

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

Toda fórmula de derivación como

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

tiene una forma diferencial correspondiente como

$$d(u + v) = du + dv \quad \text{o} \quad d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du,$$

EJEMPLO 5 Podemos utilizar la regla de la cadena y otras fórmulas de derivación para determinar diferenciales de funciones

(a) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$ ■

Estimación con diferenciales

Suponga que conocemos el valor de una función derivable $f(x)$ en un punto a y necesitamos estimar cuánto cambiará este valor si nos movemos al punto cercano $a + dx$. Si $dx = \Delta x$ es pequeña, entonces, con base en la figura 3.43, vemos que Δy es aproximadamente igual a la diferencial dy, Como

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y, \qquad \Delta x = dx$$

la aproximación diferencial da

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

cuando $dx = \Delta x$. Así, la aproximación $\Delta y \approx dy$ puede usarse para estimar $f(a + dx)$ cuando $f(a)$ se conozca y dx sea pequeña.

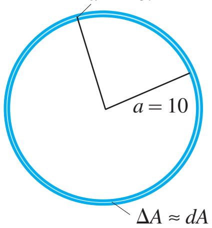


FIGURA 3.44 Cuando dr es pequeño comparado con a, la diferencial dA da la estimación $A(a + dr) = \pi a^2 + dA$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 El radio r de un círculo aumenta de $a = 10$ m a 10.1 m (figura 3.44). Utilice dA para estimar el incremento en el área A del círculo. Estime el área del círculo agrandado y compare su estimación con el área verdadera mediante el cálculo directo.

Solución Puesto que $A = \pi r^2$, el aumento estimado es

$$dA = A'(a)\,dr = 2\pi a\,dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\ \text{m}^2.$$

Así, como $A(r + \Delta r) \approx A(r) + dA$, tenemos

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

El área de un círculo de radio 10.1 m es aproximadamente 102π m^2.

El área real es

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2. \end{aligned}$$

El error en nuestra estimación es 0.01π m^2, que es la diferencia $\Delta A - dA$. ■

Error en la aproximación diferencial

Sea $f(x)$ derivable en $x = a$ y suponga que $dx = \Delta x$ es un incremento de x. Tenemos dos formas de describir el cambio en f cuando x cambia de a a $a + \Delta x$:

El cambio real: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

La estimación diferencial: $df = f'(a)\Delta x$.

¿Qué tan bien aproxima df a Δf?

Medimos el error de la aproximación al restar df de Δf:

$$\begin{aligned} \text{Error de aproximación} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{A esta parte llamamos } \epsilon} \cdot \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el cociente de diferencias

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima a $f'(a)$ (recuerde la definición de $f'(a)$), así que la cantidad entre paréntesis se vuelve un número muy pequeño (por lo cual lo hemos denominado ϵ). De hecho, $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Cuando Δx es pequeño, el error de aproximación $\epsilon\, \Delta x$ es aún más pequeño.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{cambio}\\ \text{real}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{cambio}\\ \text{estimado}}} + \underbrace{\epsilon\, \Delta x}_{\text{error}}$$

Aunque no conocemos el tamaño exacto del error, es el producto de dos cantidades pequeñas, $\epsilon \cdot \Delta x$, las cuales tienden ambas a cero cuando $\Delta x \to 0$. Para muchas funciones comunes, siempre que Δx sea pequeña, el error es aún más pequeño.

Cambio en $y = f(x)$ cerca de $x = a$

Si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$, y x cambia de a a $a + \Delta x$, el cambio Δy en f está dado por

$$\Delta y = f'(a)\, \Delta x + \epsilon\, \Delta x \tag{1}$$

en la que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

En el ejemplo 6 encontramos que

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{error}})\ \text{m}^2$$

así que el error de aproximación es $\Delta A - dA = \epsilon \Delta r = 0.01\pi$ y $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m.

Demostración de la regla de la cadena

La ecuación (1) nos permite demostrar correctamente la regla de la cadena. Nuestro objetivo es demostrar que si $f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces la composición $y = f(g(x))$ es una función derivable de x. Como una función es derivable si y sólo si tiene derivada en cada punto de su dominio, debemos mostrar que siempre que g sea derivable en x_0 y f sea derivable en $g(x_0)$, entonces la composición es derivable en x_0 y la derivada de la composición satisface la ecuación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Sea Δx un incremento de x y sean Δu y Δy los incrementos correspondientes en u y en y. Al aplicar la ecuación (1), tenemos

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera similar,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u,$$

donde $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. También observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Al combinar la ecuación para Δu y Δy, se obtiene

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

así que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1.$$

Como ϵ_2 y ϵ_2 tienden a cero cuando Δx tiende a cero, tres de los cuatro términos de la derecha se anulan en el límite, lo que deja

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \qquad \blacksquare$$

Sensibilidad al cambio

La ecuación $df = f'(x)dx$ indica qué tan sensible es la salida de f a un cambio en la entrada de valores diferentes de x. Cuanto mayor sea el valor de f' en x, mayor será el efecto de un cambio dado dx. Conforme nos movemos de a a un punto cercano $a + dx$ es posible describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	**Estimado**
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

EJEMPLO 7 Suponga que necesita calcular la profundidad de un pozo a partir de la ecuación $s = 16t^2$ midiendo el tiempo que tarda en caer una roca al agua. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos a un error de 0.1 seg en la medición del tiempo?

Solución La magnitud de ds en la ecuación

$$ds = 32t\,dt$$

depende de qué tan grande sea t. Si $t = 2$ seg, el cambio provocado por $dt = 0.1$ es de alrededor de

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ ft}.$$

Tres segundos después en $t = 5$ seg, el cambio causado por el mismo dt es

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ ft}.$$

Para un tamaño fijo de error en la medición del tiempo, el error al utilizar ds para estimar la profundidad es mayor cuando el tiempo que tarda la roca en golpear el agua es mayor. ■

EJEMPLO 8 A finales de la década de 1830, el fisiólogo francés Jean Poiseuille descubrió la fórmula que actualmente utilizamos para predecir cuánto es capaz de disminuir el radio de una arteria parcialmente obstruida el volumen del flujo normal. Su fórmula,

$$V = kr^4,$$

dice que el volumen V de un fluido que pasa a través de un tubo delgado por unidad de tiempo a una presión fija es una constante multiplicada por la cuarta potencia del radio del tubo r. ¿Cómo afecta a V una reducción del 10% en r? (Véase la figura 3.45).

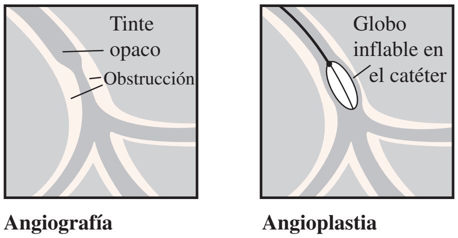


FIGURA 3.45 Para desbloquear una arteria obstruida, se inyecta un tinte opaco en ella para hacer visible el interior bajo los rayos X. Luego se infla un catéter con punta de globo dentro de la arteria para ensancharla en el sitio donde se localiza la obstrucción.

Solución Las diferenciales de r y V están relacionadas mediante la ecuación

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr.$$

El cambio relativo en V es

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\,\frac{dr}{r}.$$

El cambio relativo en V es 4 veces el cambio relativo en r, así que una disminución del 10% en r dará por resultado una disminución del 40% en el flujo. ■

EJEMPLO 9 La segunda ley de Newton,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\,\frac{dv}{dt} = ma,$$

se basa en la hipótesis de que la masa es constante, pero sabemos que esto no es estrictamente cierto, ya que la masa de un cuerpo aumenta con la velocidad. En la fórmula corregida de Einstein, la masa tiene el valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde "la masa en reposo" m_0 representa la masa de un cuerpo que no se mueve, y c es la velocidad de la luz, que es de alrededor de 300,000 km/seg. Utilice la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \tag{2}$$

para estimar el aumento Δm de la masa que resulta al agregar la velocidad v.

Solución Cuando v es muy pequeña comparada con c, v^2/c^2 es cercana a cero, por lo que es seguro usar la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{Ecuación (2) con } x = \frac{v}{c}$$

para obtener

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

o bien,

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{3}$$

La ecuación (3) expresa el aumento de la masa que resulta de agregar la velocidad v. ■

Conversión de masa a energía

La ecuación (3), deducida en el ejemplo 9, tiene una interpretación importante. En la física newtoniana, $(1/2)m_0 v^2$ es la energía cinética (EC) del cuerpo, pero si rescribimos la ecuación (3) en la forma

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2,$$

veremos que

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{EC}),$$

o bien,

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{EC}).$$

Así que el cambio en la energía cinética Δ(EC) al ir de la velocidad 0 a la velocidad v es aproximadamente igual a $(\Delta m)c^2$, el cambio en la masa multiplicado por el cuadrado de la velocidad de la luz. Utilizando $c \approx 3 \times 10^8$ m/seg, vemos que un pequeño cambio en la masa puede generar un gran cambio en la energía.

Ejercicios 3.9

Determinación de linealizaciones

En los ejercicios 1 a 5, determine la linealización $L(x)$ de $f(x)$ en $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$
5. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi$
6. **Aproximación lineal común en $x = 0$** Determine las linealizaciones de las siguientes funciones en $x = 0$.

   (a) sen x **(b)** $\cos x$ **(c)** $\tan x$

Linealización para aproximaciones

En los ejercicios 7 a 12, determine una linealización en un entero cercano a x_0, elegido de manera adecuada, en la que la función dada y sus derivadas sean fáciles de evaluar.

7. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$
8. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.9$
9. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$
10. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad x_0 = 1.3$
13. Demuestre que la linealización de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.
14. Utilice la aproximación lineal $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para determinar una aproximación para la función $f(x)$ en valores de x cercanos a cero.

    a. $f(x) = (1 - x)^6$ **b.** $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$

    c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$ **d.** $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

    e. $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ **f.** $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{2 + x}\right)^2}$
15. **Más rápido que una calculadora** Utilice la aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar lo siguiente.

    a. $(1.0002)^{50}$ **b.** $\sqrt[3]{1.009}$
16. Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1} + \operatorname{sen} x$ en $x = 0$. ¿Cómo están relacionadas las linealizaciones individuales de $\sqrt{x + 1}$ y sen x en $x = 0$?

Derivadas en forma diferencial

En los ejercicios 17 a 28, determine dy.

17. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
18. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
19. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$
20. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$
21. $2y^{3/2} + xy - x = 0$
22. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$
23. $y = \operatorname{sen}(5\sqrt{x})$
24. $y = \cos(x^2)$
25. $y = 4\tan(x^3/3)$
26. $y = \sec(x^2 - 1)$
27. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$
28. $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

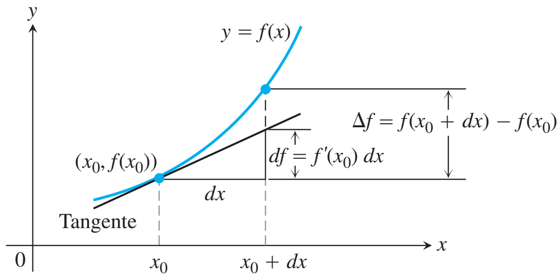
Error de aproximación

En los ejercicios 29 a 34, cada función $f(x)$ cambia de valor cuando x pasa de x_0 a $x_0 + dx$. Determine

a. el cambio $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;

b. el valor de la estimación $df = f'(x_0)dx$, y

c. el error de aproximación $|\Delta f - df|$.



29. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$
30. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0.1$
31. $f(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$
32. $f(x) = x^4, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$
33. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.5, \quad dx = 0.1$
34. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0.1$

Estimación de cambios mediante diferenciales

En los ejercicios 35 a 40, escriba una fórmula diferencial que estime el cambio dado en el volumen o el área de la superficie.

35. El cambio en el volumen $V = (4/3)\pi r^3$ de una esfera cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$.
36. El cambio en el volumen $V = x^3$ de un cubo cuando las longitudes de los lados pasan de x_0 a $x_0 + dx$.
37. El cambio en el área de la superficie $S = 6x^2$ de un cubo cuando las longitudes de los lados pasan de x_0 a $x_0 + dx$.
38. El cambio en el área de la superficie lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de un cono circular recto cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no se modifica.
39. El cambio en el volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no se modifica.
40. El cambio en el área de la superficie lateral $S = 2\pi rh$ de un cilindro circular recto cuando la altura cambia de h_0 a $h_0 + dh$ y el radio no se modifica.

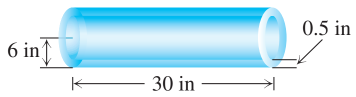
Aplicaciones

41. El radio de un círculo aumenta de 2.00 a 2.02 m.

    a. Estime el cambio en el área resultante.

    b. Exprese la estimación como un porcentaje del área del círculo original.
42. El diámetro de un árbol era de 10 in. Durante el año siguiente, la circunferencia aumentó 2 in. ¿Alrededor de cuánto se incrementó el diámetro del árbol? Aproximadamente, ¿cuánto creció el área de la sección transversal?

43. Estimación de volumen Estime el volumen del material en un cascarón cilíndrico con longitud de 30 in, radio de 6 in y grosor de 0.5 in.



44. Estimación de la altura de un edificio Un agrimensor se encuentra de pie a 30 ft de la base de un edificio, mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y éste es de 75°. ¿Con qué precisión se debe medir el ángulo para que el porcentaje de error en la estimación de la altura del edificio sea menor del 4%?

45. Tolerancia El radio r de un círculo se mide con un error del 2% cuando mucho. ¿Cuál es el máximo error porcentual correspondiente en el cálculo de

a. la circunferencia?

b. el área del círculo?

46. Tolerancia El lado x de un cubo se mide con un error del 0.5 cuando mucho. ¿Cuál es el máximo error porcentual correspondiente en el cálculo de

a. el área de la superficie del cubo?

b. el volumen del cubo?

47. Tolerancia La altura y el radio de un cilindro circular recto son iguales, así que el volumen del cilindro es $V = \pi h^3$. El volumen se calculará con un error no mayor al 1% del valor real. Determine de forma aproximada el mayor error que puede tolerarse en la medida de h, expresado como un porcentaje de h.

48. Tolerancia

a. ¿Con qué precisión debe medirse el diámetro interior de un depósito cilíndrico de almacenamiento, cuya altura es de 10 m, para calcular el volumen del depósito con un error menor al 1% de su valor real?

b. ¿Con qué precisión debe medirse el diámetro exterior del depósito para calcular la cantidad de pintura que se necesitará para pintar la parte lateral del depósito con un error menor al 5% de la cantidad real?

49. El diámetro de una esfera se mide como 100 ± 1 cm y el volumen se calcula con base en tal medida. Estime el error porcentual en el cálculo del volumen.

50. Estime el error porcentual permitido al medir el diámetro D de una esfera si el volumen debe calcularse correctamente con una diferencia no mayor del 3 por ciento.

51. Efecto de maniobras de vuelo en el corazón La cantidad de trabajo que realiza la cavidad de bombeo principal del corazón, el ventrículo izquierdo, está dada por la ecuación

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g},$$

donde W es el trabajo por unidad de tiempo, P es la presión arterial promedio, V es el volumen de la sangre bombeada durante una unidad de tiempo, δ ("delta") es la densidad de la sangre, v es la velocidad promedio de la sangre que sale, y g es la aceleración debida a la gravedad.

Cuando P, V, δ y v permanecen constantes, W se convierte en una función de g, por lo que la ecuación toma la forma simplificada

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ constantes}).$$

Como miembro del equipo médico de la NASA, usted necesita conocer qué tan sensible es W a cambios aparentes en g causados por maniobras de vuelo, y esto depende del valor inicial de g. Como parte de sus investigaciones, decide comparar el efecto sobre W de un cambio dg en la Luna, donde $g = 5.2$ ft/seg^2, con el efecto del mismo cambio dg que se tendría en la Tierra, donde $g = 32$ ft/seg^2. Utilice la ecuación simplificada anterior para determinar la razón de dW_{Luna} a dW_{Tierra}.

52. Medición de la aceleración debida a la gravedad Cuando la longitud L del péndulo de un reloj se mantiene constante, controlando su temperatura, el periodo del péndulo T depende de la aceleración debida a la gravedad g. Por lo tanto, el periodo variará ligeramente cuando el reloj se mueva de un lugar a otro de la superficie de la Tierra, dependiendo del cambio de g. Si se hace un seguimiento de ΔT, estimamos la variación en g a partir de la ecuación $T = 2\pi(L/g)1/2$ que relaciona T, g y L.

a. Manteniendo a L constante y a g como la variable independiente, calcule dT y utilícela para responder los incisos (b) y (c).

b. Si g aumenta, ¿T aumentará o disminuirá? ¿El péndulo de un reloj irá más rápido o más lento? Explique.

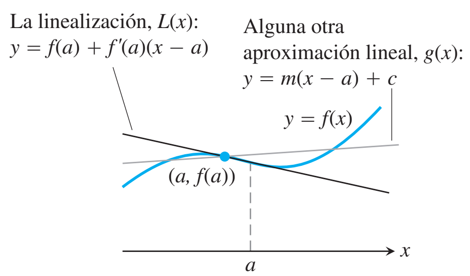
c. Un reloj con péndulo de 100 cm se mueve de una localidad donde $g = 980$ cm/seg^2 a una nueva localidad. Esto aumenta el periodo en $dT = 0.001$ seg. Determine dg y estime el valor de g en la nueva localidad.

53. La linealización es la mejor aproximación lineal Suponga que $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$ y que $g(x) = m(x - a) + c$ es una función lineal en la que m y c son constantes. Si el error $E(x) = f(x) - g(x)$ fuera suficientemente pequeño cerca de $x = a$, podríamos pensar en utilizar a g como una aproximación lineal de f en vez de la linealización $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Demuestre que si imponemos a g las condiciones

1. $E(a) = 0$ El error de aproximación es cero en $x = a$.

2. $\lim_{x \to a} \dfrac{E(x)}{x - a} = 0$ El error es despreciable cuando se compara con $x - a$

entonces $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Así, la linealización $L(x)$ da la única aproximación lineal cuyo error es cero en $x = a$ y al mismo tiempo es despreciable en comparación con $x - a$.



54. Aproximaciones cuadráticas

a. Sea $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ una aproximación cuadrática para $f(x)$ en $x = a$ con las propiedades:

i) $Q(a) = f(a)$

ii) $Q'(a) = f'(a)$

iii) $Q''(a) = f''(a)$.

Determine los coeficientes b_0, b_1 y b_2.

b. Determine la aproximación cuadrática para $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 0$.

T **c.** Grafique $f(x) = 1/(1 - x)$ y su aproximación cuadrática en $x = 0$. Luego haga un acercamiento a las dos gráficas en el punto (0, 1). Comente sus observaciones.

T **d.** Determine la aproximación cuadrática para $g(x) = 1/x$ en $x = 1$. Grafique g y su aproximación cuadrática juntas. Comente sus observaciones.

T **e.** Determine la aproximación cuadrática para $h(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$. Grafique juntas h y su aproximación cuadrática. Comente sus observaciones.

f. ¿Cuáles son las linealizaciones de f, g y h en los puntos respectivos de los incisos (b), (d) y (e)?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 55 a 58, utilice un SAC para estimar la magnitud del error al utilizar la linealización, en vez de la función, en el intervalo especificado I. Siga los siguientes pasos:

a. Trace la función f en el intervalo I.

b. Determine la linealización L de la función en el punto a.

c. Trace juntas f y L.

d. Grafique el error absoluto $|f(x) - L(x)|$ en el intervalo I y determine su valor máximo.

e. Con base en su gráfica del inciso (d), estime una $\delta > 0$ tan grande como pueda que satisfaga

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

para $\epsilon = 0.5$, 0.1 y 0.01. Luego verifique de manera gráfica para ver si su estimación de δ es válida.

55. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

56. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad \left[-\dfrac{3}{4}, 1\right], \quad a = \dfrac{1}{2}$

57. $f(x) = x^{2/3}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

58. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

Capítulo 3 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es la derivada de una función? ¿Cómo está relacionado su dominio con el dominio de f? Dé ejemplos.
2. ¿Qué papel desempeña la derivada en la definición de pendientes, tangentes y tasas de cambio?
3. En ocasiones, ¿cómo puede graficar la derivada de una función cuando todo lo que tiene es una tabla de los valores de la función?
4. ¿Qué significa que una función sea derivable en un intervalo abierto? ¿Y en un intervalo cerrado?
5. ¿Cómo están relacionadas las derivadas y las derivadas laterales?
6. Describa geométricamente cuándo una función no tiene derivada en un punto.
7. ¿Cómo está relacionada la diferenciabilidad de una función en un punto con su continuidad ahí si es que es continua?
8. ¿Qué reglas conoce para calcular derivadas? Dé algunos ejemplos.
9. Explique cómo las tres fórmulas

   a. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

   b. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

   c. $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$

   nos permiten diferenciar cualquier polinomio.
10. Además de las tres fórmulas listadas en el punto anterior, ¿qué fórmula necesita para derivar funciones racionales?
11. ¿Qué es la segunda derivada? ¿Qué es la tercera derivada? ¿Cuántas derivadas sabe que tienen las funciones? Dé algunos ejemplos.
12. ¿Cuál es la relación entre la tasa promedio de cambio y la tasa instantánea de cambio de una función? Dé un ejemplo.
13. ¿Cómo surgen las derivadas en el estudio del movimiento? ¿Qué puede aprender acerca del movimiento de un cuerpo a lo largo de una línea si examina les derivadas de la función de posición del cuerpo? Dé ejemplos.
14. ¿Cómo surgen las derivadas en economía?
15. Dé ejemplos de otras aplicaciones de las derivadas.
16. ¿Qué tienen que ver los límites $\lim_{h\to 0}((\operatorname{sen} h)/h)$ y $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ con las derivadas de las funciones seno y coseno? ¿Cuáles son las derivadas de dichas funciones?
17. Una vez que usted conoce las derivadas de sen x y cos x, ¿cómo puede encontrar las derivadas de tan x, cot x, sec x y csc x? ¿Cuáles son las derivadas de tales funciones?
18. ¿En qué puntos son continuas cada una de estas funciones trigonométricas? ¿Cómo lo sabe?
19. ¿Cuál es la regla para calcular la derivada de una composición de dos funciones diferenciables? ¿Cómo se evalúa tal derivada? Dé ejemplos.
20. Si u es una función diferenciable de x, ¿cómo puede determinar $(d/dx)(u^n)$ si n es un entero? ¿Cómo lo haría si n es un número real? Dé ejemplos.
21. ¿Qué es la derivación implícita? ¿Cuándo la necesita? Dé ejemplos.
22. ¿Cómo surgen los problemas de tasas relacionadas? Dé ejemplos.
23. Proponga una estrategia para resolver problemas de tasas relacionadas. Ilustre con un ejemplo.
24. ¿Cuál es la linealización $L(x)$ de una función $f(x)$ en un punto $x = a$? ¿Qué se le pide a f en a para que la linealización exista? ¿Cómo se utilizan las linealizaciones? Dé ejemplos.
25. Si x se mueve de a a un valor cercano $a + dx$, ¿cómo estima el cambio correspondiente en el valor de una función diferenciable $f(x)$? ¿Cómo hace una estimación del cambio relativo? ¿Y una estimación del cambio porcentual? Dé un ejemplo.