todo lo que
hay que
hacer

Clase teórica de la semana del 11-8

Mario Garelik - F.I.C.H.

Misceláneas previas.

- Presentación general de la materia. Tour por el aula virtual.
- En la pestaña *Actividades semanales*, en la carpeta *Semana 1*, hay tres archivos a tener en cuenta, además del resumen de temas de la clase semanal:
  1. Cuestiones de lógica
  2. Uno más general, con temas a repasar, necesario para estar tranquis en Cálculo I. Se los puede ir viendo a medida que resulte necesario.
  3. Clasificación de puntos de no derivabilidad.
- Implicaciones: directa, recíproca y contrarrecíproca. Condiciones necesarias y condiciones suficientes.
- Puntos en los que una función no es derivable: Por discontinuidad, anguloso, cuspidal y por tener recta tangente vertical en él. Reconocimiento analítico y gráfico.
- **Ejercitación propuesta.** Repasar de Matemática Básica (solos en casa): derivación por definición y por reglas. Regla de la cadena. Extraer ejercicios de la práctica de M. Básica y ejercitar muuuucho.

Sección 3.1 - Derivadas (pp. 102 a 104).

- **Ejercitación propuesta** (pág. 105 a 106): ejercicios 5 a 26. Son de repaso. Hacer solos en casa.
- Rapidísimo repaso de la definición de derivada y sus interpretaciones geométrica y como tasa de cambio.

Sección 3.2 - La derivada como función (pp. 106 a 112).

- **Ejercitación propuesta** (pág. 112 a 115): 1 a 32 /// 37 a 48. Son ejercicios de repaso. Hacer solos en casa.
- Rápido y furioso repaso de:
  - Definición alternativa de derivada (repaso rápido).
  - Cálculo de derivadas por definición. Notación.
  - Derivabilidad en un intervalo cerrado. Derivadas laterales. Punto extremo *o frontera* de un intervalo.
- Casos en los que una función no tiene derivada en un punto. Identificación gráfica y analítica. Complementar con el pdf *Puntos de no derivabilidad*.
- Análisis de derivabilidad en funciones por tramos. Consideraciones especiales.
- Relación entre continuidad y derivabilidad.

Sección 3.3 - Reglas de derivación (pp. 115 a 122).

- **Ejercitación propuesta** (pág. 122 a 124): 1 a 28 /// 33 a 52 /// 57 y 58. Se incluyen algunos ejercicios de repaso.
- Repaso breve de las distintas reglas de derivación. **Nada de demostraciones.** ¡Pero qué buena está la ilustración de la demo de la regla del producto del margen de pág. 120!
- Por otra parte, es muy importante tener claro cuándo una derivada en un punto se calcula por definición y cuándo utilizando las reglas de derivación. Sobre el cálculo de la derivada en puntos de bifurcación de funciones a trozos, haremos algunas consideraciones especiales en la clase presencial. Este es un punto muy importante.
- Derivadas de segundo orden y de órdenes superiores: breve descripción. Notación.
- Hay funciones que tienen derivadas de todos los órdenes (por ejemplo, las elementales vistas en Básica) y otras que no, que sólo tienen derivada en un punto hasta cierto orden.
- Un caso que ejemplifica lo anterior es la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

  Puede probarse que $f'(0) = 0$ (**¿Te animás?**) pero, sin embargo no existe $f^{(n)}(0) \quad \forall n \geq 2$. ¿Por qué?
- La función de Dirichlet como ejemplo de función nunca derivable en su dominio.

Sección 3.4 - La derivada como una tasa de cambio (pp. 124 a 131).

- **Ejercitación propuesta** (pág. 132 a 135): 1 al 13 /// 15 al 18 /// 21, 22 y 34.
- Tasa de cambio instantánea.
- Velocidad promedio e instantánea.
- Definición de desplazamiento, velocidad, rapidez, aceleración y sacudida.
- Interpretación gráfica del ejemplo 2.
- Ejemplo 3 de caída libre (muy rapidito).
- Desde el ejemplo 4 hasta terminar: NO.

teoria asintotas

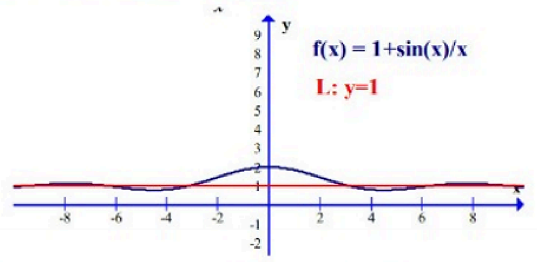
Asíntotas

Una recta L se dice que es asíntota de una función f(x) si ambas gráficas *se confunden* en situaciones límite.
Existen tres tipos de asíntotas:

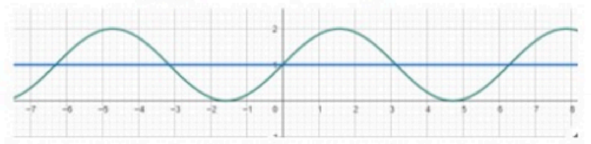
1. Asíntota horizontal.

La recta L: $y=k$ es una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ (o sea, en el infinito, recta y curva *se confunden*, la distancia entre ellas se hace cada vez más y más pequeña)

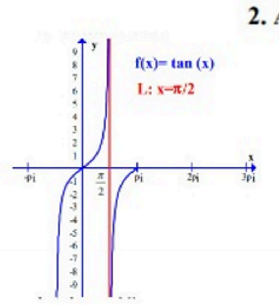
Ejemplo: como $\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{sen\,x}{x} = 1$ ¿Por qué?, entonces $y=1$ es asíntota horizontal de la función $f(x) = 1 + \frac{sen\,x}{x}$



<u>Notas</u>:
- Como se ve en el ejemplo, comportamiento asintótico, no necesariamente significa que la asíntota no corte a la curva. De hecho, en la figura anterior, la recta y la curva tienen infinitos puntos de corte.
- Si la distancia entre curva y recta no se hace tan chica como uno quiera, entonces, la recta propuesta **no** será asíntota. Visualizar esta situación graficando $f(x) = 1 + sen\,x$ y la recta $y=1$.



2. Asíntota vertical.



La recta vertical L: $x=k$ es una asíntota vertical de la curva $y=f(x)$ si $\lim_{x\to k} f(x) = \pm\infty$

Ejemplo: como $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$, entonces L: $x = \frac{\pi}{2}$ es asíntota vertical de $f(x) = \tan x$

<u>Nota</u>: por lo general, las asíntotas verticales se presentan en las *singularidades* de una función.

3. Asíntota oblicua.

La recta L: $y=mx+b$ es una asíntota oblicua de la curva $y=f(x)$ cuando m y b se pueden determinar de la siguiente manera y orden:

1. $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
2. $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Si m o b no existen, la función dada no tendrá asíntotas oblicuas.
Por lo general, las funciones que tienen asíntotas oblicuas son las de tipo racional (cociente de polinomios), en las que el polinomio del numerador es un grado mayor que el del denominador.

en este texto por lo visto
damos la logica de las
matematicas y eso...

Un poco de lógica...

Lucas Genzelis
FICH - UNL

1. Condiciones suficientes y necesarias

La mayoría de las palabras que se usan en el lenguaje matemático responden al sentido común. No es cuestión de memorizar reglas e implicaciones, sino de intentar razonar sobre el sentido de los términos que se emplean. Cuando decimos que A es suficiente para B, ¿qué estamos diciendo? Que si tenemos A, entonces tenemos B. Que A nos garantiza a B. Que dado A, sabemos que se va a dar también B. En otras palabras, que si A es verdadero, B también va a ser verdadero. En la simbología de la lógica, esto se representa como $A \Rightarrow B$, y se lee como "A implica a B". Ahora, ¿qué pasa si no tenemos a A? (es decir, si A es falso). ¡Nada de nada! Puede tanto darse el caso de que B esté como de que no: dijimos que A garantiza a B, no que es un requisito para B.

Por ejemplo, \$1000 son suficientes para comprar un kilo de milanesas. Si tenemos esa plata, podemos comprar el kilo de milanesas. Pero si no tenemos los \$1000, no significa que no podamos tener las milanesas. Podemos tener \$300 solamente, y ya con eso nos alcanza. O podemos no tener nada, y que el carnicero nos las regale (las matemáticas siempre dan lugar a la imaginación).

Por otra parte, siguiendo con la suposición de que $A \Rightarrow B$, ¿qué pasa si B es falso? Entonces, A tiene que ser falso también. ¿Por qué? Pensémoslo. Dijimos que A es suficiente para B. O sea que si A fuese verdadero, entonces B sería verdadero. ¡Pero estamos diciendo que B es falso! O sea, que A sí o sí tiene que ser falso. Por lo tanto, decimos que B es **necesario** para A: B es un requisito para A, porque sabemos que si no tenemos B, tampoco podemos tener A.

Repasando, la expresión $A \Rightarrow B$ significa tanto que "A es suficiente para B" como que "B es necesario para A". Una mnemotecnia común para ayudarnos a recordarlo es SiN (**S**uficiente **i**mplica **N**ecesario). Otras expresiones equivalentes son:

- Si A entonces B
- Si A, B
- A garantiza a B
- A implica a B

El contrarrecíproco

La discusión anterior nos lleva a una equivalencia entre dos tipos de afirmaciones. Si decimos que A es suficiente para B, o equivalentemente que B es necesario para A, estamos diciendo asimismo que "no B" (o sea, su negación) es suficiente para "no A". En símbolos, esto se representa como $\neg B \Rightarrow \neg A$ y se denomina contrarrecíproco de la expresión $A \Rightarrow B$. La equivalencia entre $A \Rightarrow B$ y $\neg B \Rightarrow \neg A$ tiene muchas utilidades. Entre ellas, nos sirve como herramienta para desarrollar demostraciones: puede ser que queramos demostrar que $A \Rightarrow B$, pero que nos resulte más fácil demostrar, de forma equivalente, su contrarrecíproco $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Si y sólo si

Puede ocurrir que A sea tanto suficiente como necesario para B. Es decir, que A garantice a B y a la vez B garantice a A, o equivalentemente, que B sea necesario para A y a la vez A sea necesario para B. En lógica, esto se simboliza como $A \iff B$. Éste es el tipo de relación más fuerte que podemos encontrar en matemática. Si sabemos que cualquiera de las dos propiedades (A o B) es verdadera, automáticamente sabemos que la otra también lo es. Del mismo modo, si sabemos que cualquiera de las dos propiedades es falsa, sabemos que la otra propiedad también lo es. En los libros de texto es común que nos encontremos la relación "si y sólo si" abreviada como "sii". Todas las expresiones siguientes son equivalentes:

- A si y sólo si B
- A sii B
- A es suficiente y necesario para B
- A es equivalente a B

2. Cuantificadores

En lógica se utilizan dos tipos de cuantificadores básicos: el cuantificador existencial, denotado por $\exists$, y el cuantificador universal, denotado $\forall$. Como dijimos previamente, el significado de los términos suele ser intuitivo. Si decimos que dentro de un conjunto **existe** un elemento con una cierta propiedad, significa que hay al menos un elemento del conjunto que cumple con esa propiedad. Puede haber dos, tres, o puede ser que incluso todos los elementos del conjunto cumplan la propiedad. Pero estamos diciendo que hay al menos uno que la cumple. **Demostrar** que una afirmación de este tipo es **verdadera** suele ser fácil. Basta con mostrar un **ejemplo**, sin requerirse ningún tipo de prueba argumentativa. Por ejemplo, si queremos decir que existen autos verdes, para probar que estamos diciendo la verdad lo único que tenemos que hacer es encontrar un auto que sea verde. No nos importa el color del resto de los autos; si ya encontramos uno, ya está demostrado que estamos diciendo la verdad. Por otro lado, si alguien dice que existen perros verdes, **demostrar** que esa afirmación es **falsa** es más complicado. No basta con que tomemos uno, dos o cien perros y veamos que ninguno es verde. Siempre cabe la posibilidad de que haya otro perro, que nosotros no encontramos, que sea verde. Por lo tanto, para probar que la afirmación es falsa es necesario recurrir a algún tipo de **argumentación**: que el pelo de los perros solamente puede tener cierto tipo de colores debido a las proteínas presentes en su piel, a los genes caninos, etc., y que el verde no es uno de esos colores. Las siguientes son expresiones equivalentes que refieren al cuantificador existencial:

- Existe ...
- Hay al menos un ...
- Es posible que ...

Lo que ocurre con el cuantificador universal es totalmente lo opuesto. Si afirmamos que algo es cierto **para todos** los elementos de un conjunto, no podemos probar que esto es verdadero mostrando ejemplos. Mostrar que la propiedad se cumple para uno, dos o más elementos del conjunto no es suficiente, porque siempre puede haber algún otro elemento que no la cumpla[1].

[1] Si se tratase de un conjunto con un número finito de elementos, sí podría probarse la afirmación mostrando que se cumple para cada elemento. Pero en matemática, en general,

Por lo tanto, para **demostrar** que una afirmación universal es **verdadera**, debemos hallar el modo de **argumentar** por qué esa propiedad debe cumplirse para todo elemento del conjunto. Por otra parte, si alguien afirma que una propiedad se cumple para todos los elementos de un conjunto, y queremos **probar** que la afirmación es **falsa**, esto resulta más sencillo. No necesitamos analizar a todos los elementos del conjunto, sino que basta con encontrar un elemento que no cumpla con la propiedad. Por ejemplo, si alguien afirma que todos los autos son rojos, no necesitamos examinar a todos los autos para probar que está mintiendo. Nos alcanza, por ejemplo, con mostrarle un auto blanco. Este ejemplo, que sirve para probar la falsedad de la afirmación universal, se denomina comúnmente **contraejemplo**. Las siguientes son expresiones equivalentes que refieren al cuantificador universal:

- Para todo ...
- Cualquier ...
- Cada ...
- Siempre ocurre que ...

La reciprocidad que podemos observar, en base a lo discutido previamente, en cuanto a la manera de probar la verdad o falsedad de las afirmaciones realizadas con cuantificadores, no es casualidad. En efecto, la negación del cuantificador existencial involucra al cuantificador universal, y viceversa. En otras palabras, decir que la afirmación "**todos** los elementos del conjunto cumplen la propiedad A" es **falsa**, es equivalente a decir afirmar que "**existe** algún elemento en el conjunto que **no** cumple la propiedad A". Del mismo modo, decir que la afirmación "**existe** algún elemento del conjunto que cumple la propiedad A" es **falsa** es equivalente a afirmar que "**para todos** los elementos del conjunto la propiedad A es **falsa**".

Verdaderos o falsos

Resumiendo, ¿cómo aplicamos lo discutido para demostrar la verdad o falsedad de las afirmaciones?

- Si la afirmación se hace usando el cuantificador existencial ($\exists$):
  - ⋆ Para demostrar que es verdadera, debe hallarse un ejemplo donde

los conjuntos de los que se habla tienen una cantidad infinita de elementos: los números reales, los enteros, las funciones, las matrices, etc.

la propiedad mencionada se cumple.
  - ⋆ Para demostrar que es falsa, debe exponerse una argumentación de por qué la propiedad nunca puede cumplirse.
- Si la afirmación se hace usando el cuantificador universal ($\forall$):
  - ⋆ Para demostrar que es verdadera, debe exponerse una argumentación de por qué la propiedad siempre debe cumplirse.
  - ⋆ Para demostrar que es falsa, debe mostrarse un ejemplo donde la propiedad no se cumple (es decir, un "contraejemplo").