Puntos en los que una función no es derivable.

Cualquier duda sobre este material, plantearla en clases de consultas

Este documento trata sobre cómo clasificar los puntos de no derivabilidad de una función, tema que ya se ha desarrollado en Matemática Básica.

Para comenzar, recordar el significado de derivabilidad en un punto.

Sea f una función y c un punto de su dominio. Se dice que f es derivable en c si existe el siguiente límite

$$\boxed{lím_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}} \qquad (1)$$

En tal caso, el límite se anota con $f\,'(c)$.

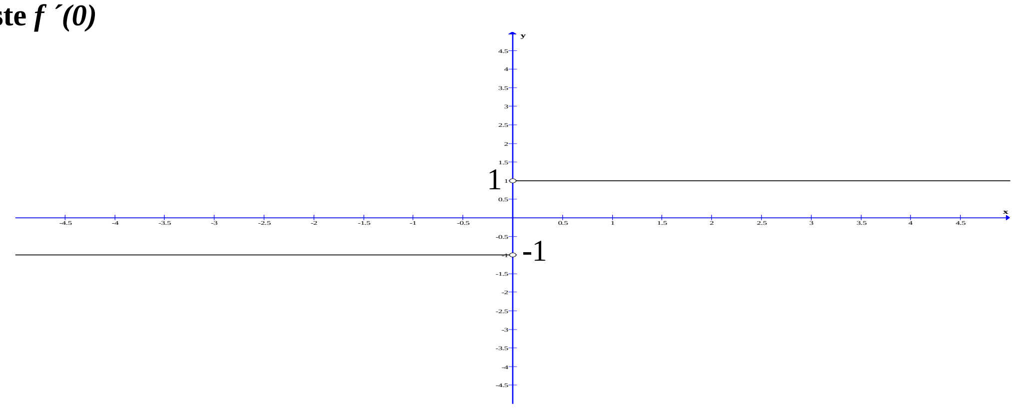
No se recuperarán aquí las consideraciones geométricas de la derivada, sólo se hará una clasificación de los puntos en los que *no existe f ´(c)*.

Casos en los que una función no es derivable en *c*.

<u>Caso 1</u>: f es discontinua en c.

Ejemplo: función signo *f(x)* = sgn(x) = $\begin{cases} 1 & si \ \ x > 0 \\ -1 & si \ \ x < 0 \end{cases}$

En c = 0 la función es discontinua y, por contrarrecíproco de la propiedad vista en Matemática Básica (derivabilidad en un punto implica continuidad en él), resulta que **no existe *f ´(0)***



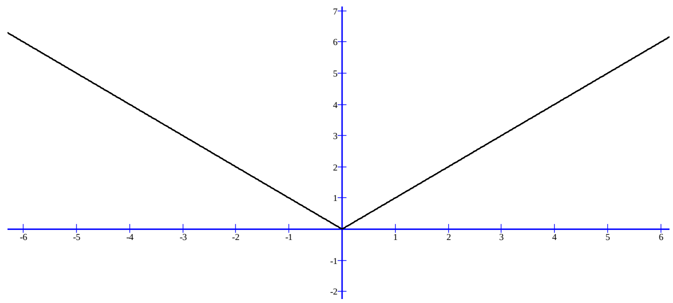
La verificación de la no continuidad de f en c = 0 se deja como ejercitación, ya que fue vista en Matemática Básica.

En adelante, los casos de no derivabilidad que se verán responden a funciones que, en el punto *c*, son continuas.

<u>Caso 2</u>: f tiene en c un punto anguloso.

Esta situación ocurre cuando en *x=c*, *las derivadas laterales son finitas pero distintas* (obviamente, en tal caso, el límite (1) no existe)

Ejemplo: *f(x)* = $|x|$ (función valor absoluto) en c = 0.



<u>Queda para el alumno, aplicando la definición de derivada en *c* = 0 dada por (1) probar que</u>:

$$f\,'_{-}(0) = -1 \text{ (la derivada lateral izquierda vale -1)}$$

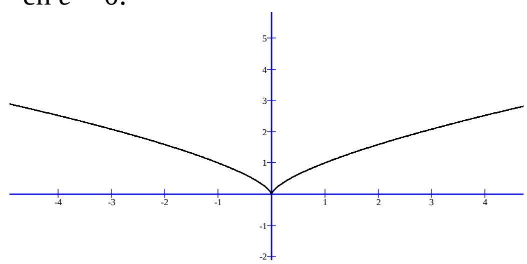
$$f\,'_{+}(0) = 1 \text{(la derivada lateral derecha vale 1)}$$

Gráficamente, un punto anguloso representa un *pico* en el cual no hay recta tangente.

<u>Caso 3</u>: f tiene en c un punto cúspide o de pliegue.

Esta situación ocurre cuando en *x=c*, *las derivadas laterales son infinitas pero distintas* (obviamente, en tal caso, el límite (1) no existe)

Ejemplo: *f(x)* = $x^{2/3}$ en *c* = 0.



<u>Queda para el alumno, aplicando la definición de derivada en *c* = 0 dada por (1) probar que</u>:

$$f\,'_{-}(0) = -\infty \text{ (derivada lateral izquierda)}$$

$$f\,'_{+}(0) = \infty \text{ (derivada lateral derecha)}$$

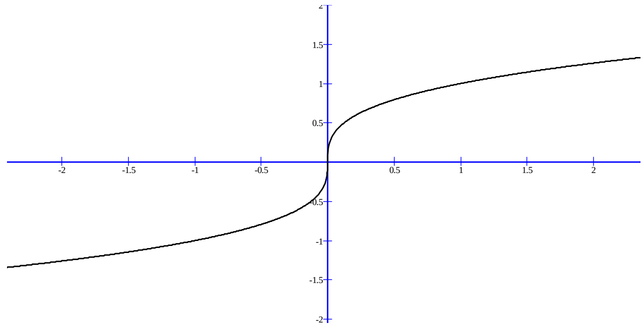
Gráficamente, lo que sucede es que en *c* = 0, la gráfica *decide volver sobre sus pasos*…

Es importante notar la diferencia con el caso de punto anguloso. También que tanto en el caso de punto anguloso como en el de cúspide *no se puede trazar recta tangente a la gráfica en x = c.*

<u>Caso 4</u>: f tiene en c una recta tangente vertical.

Esta situación ocurre cuando en *x=c*, *las derivadas laterales son iguales e infinitas* (otra vez, en tal caso, el límite (1) no existe)

Ejemplo: *f(x)* = $x^{1/3}$ en *c* = 0.



Queda para el alumno, aplicando la definición de derivada en c = 0 dada por (1) probar que:

$$f\,'_{-}(0) = f\,'_{+}(0) = \infty \text{ (derivada laterales iguales e infinitas)}$$

Gráficamente, conforme $x \to c$, la rectas tangentes se van tornando cada vez más *empinadas*, hasta alcanzar su posición límite vertical.

En este caso sí hay recta tangente en el punto c, a diferencia de los casos anteriores.

De ahora en adelante, estamos en condiciones de clasificar los puntos en los que una función no tiene derivada.