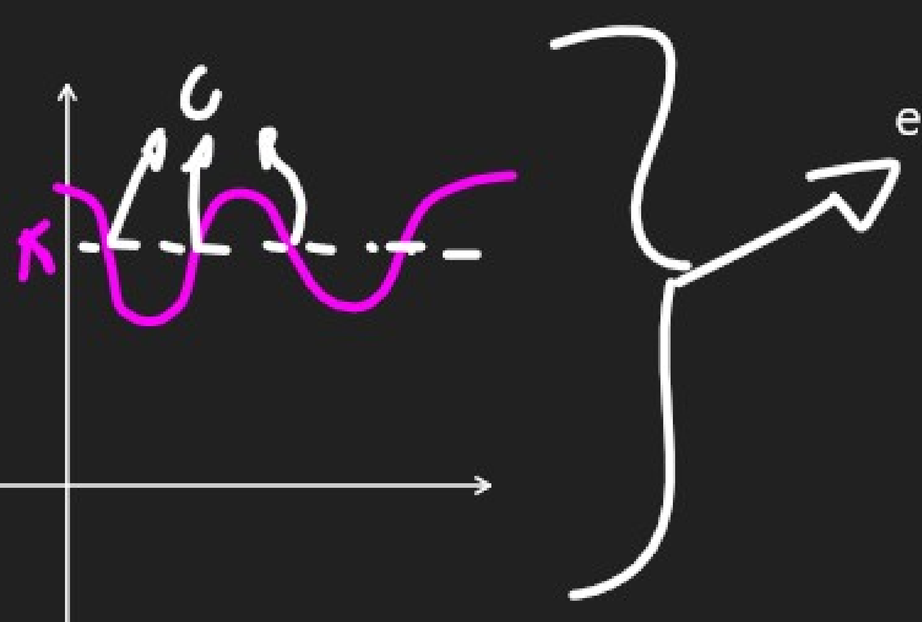
los dos teoremas que no están en el thomas

extremo. del intervalo = fronteras del intervalo

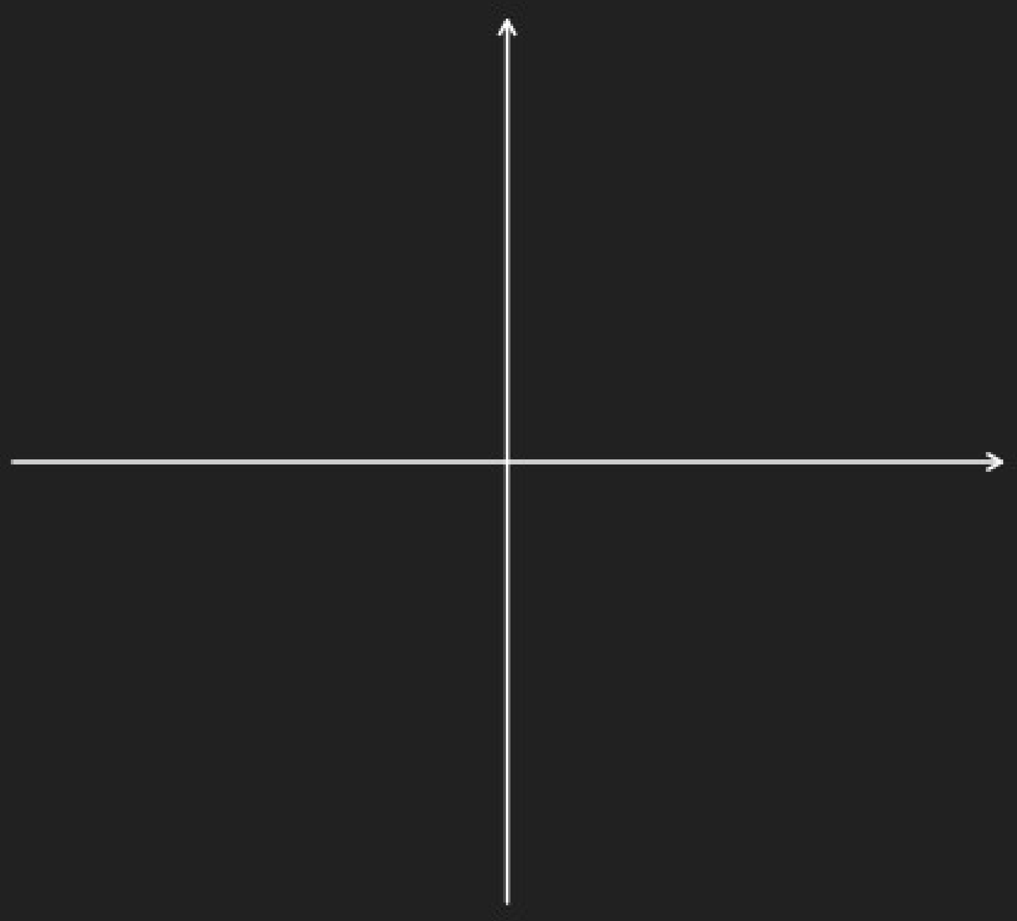
teorema del valor intermedio: sea f continua en el intervalo [a, b]. sea k un numero real entre f(a) y f(b) entonces existe al menos uno c perteneciente a la b tal que f(c) = k.




existe al menos uno

teorema de bolzano

sea f conytinua [a,b] sea f(a) * f(b) <0 entonces entonces c pertenece a (a,b) / f(c) = 0



# 4

# Aplicaciones de las derivadas

**INTRODUCCIÓN** En este capítulo utilizamos las derivadas para determinar valores extremos de funciones, para determinar y analizar las formas de las gráficas, y para determinar numéricamente dónde una función es igual a cero. También presentamos la idea de recuperar una función a partir de su derivada. La clave para muchas de esas aplicaciones es el teorema del valor medio, que prepara el terreno para el cálculo integral en el capítulo 5.

## 4.1 Valores extremos de funciones

Esta sección muestra cómo localizar e identificar valores extremos (máximo o mínimo) de una función con base en su derivada. Una vez que logremos hacer esto, resolveremos una variedad de problemas en los que determinaremos la mejor forma de hacer algo en una situación dada (véase la sección 4.5). La determinación de valores máximo y mínimo es una de las aplicaciones más importantes de la derivada.

**DEFINICIONES** Sea $f$ una función con dominio $D$. Entonces $f$ tiene un valor **máximo absoluto** sobre $D$ en un punto $c$, si

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D$$

y un valor **mínimo absoluto** sobre $D$ en $c$, si

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D.$$

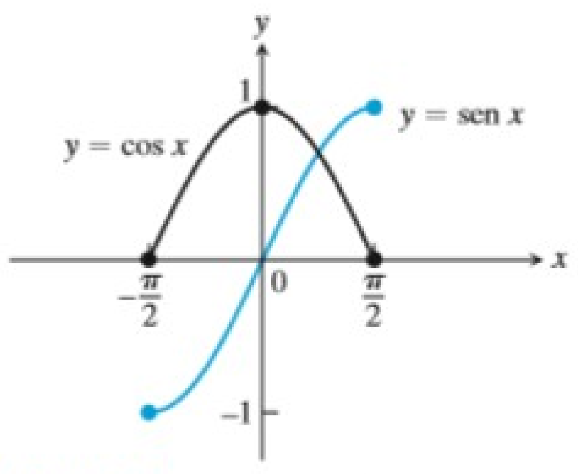
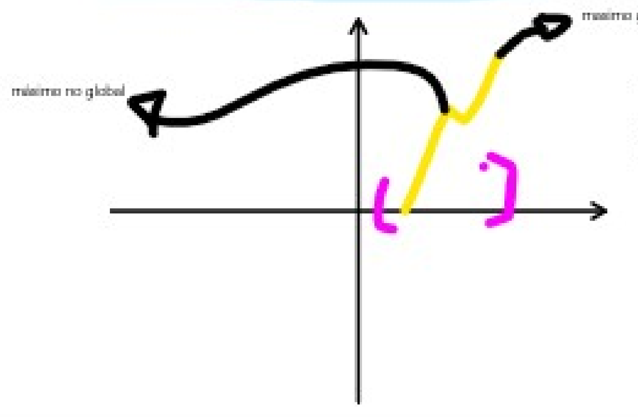



**FIGURA 4.1** Extremos absolutos para las funciones seno y coseno en $[-\pi/2, \pi/2]$. Estos valores pueden depender del dominio de una función.

Los valores máximo y mínimo se denominan **valores extremos** de la función $f$. Los máximos y mínimos absolutos también se denominan máximos y mínimos absolutos (o **globales**).

Por ejemplo, en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, la función $f(x) = \cos x$ toma un valor máximo absoluto de 1 (una vez) y un valor mínimo absoluto de 0 (dos veces). En el mismo intervalo, la función $g(x) = \text{sen } x$ toma un valor máximo de 1 y un valor mínimo de $-1$ (figura 4.1).

Las funciones con la misma regla o fórmula de definición pueden tener diferentes extremos (valores máximo o mínimo) dependiendo del dominio. Veremos esto en el siguiente ejemplo.




sea d el dominio de una función f, c pertenece a d
x= c es máximo absolut. d f(d) si f de x es <= que f de c
para todo x en d.

Punto interior:
se a a un conjunto x= c es punto interior de A (c pertenece a interior)
si i(intervalo abierto TAL QUE c pertenece a icA.

BUSCAR BIEN



**EJEMPLO 1** Los extremos absolutos de las siguientes funciones en sus dominios se observan en la figura 4.2. Observe que una función podría no tener máximo o mínimo si el dominio es no acotado o no contiene a los puntos extremos del intervalo.

| Regla de la función | Dominio $D$ | Extremos absolutos en $D$ |
|---|---|---|
| **(a)** $y = x^2$ | $(-\infty, \infty)$ | No hay máximo absoluto. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$. |
| **(b)** $y = x^2$ | $[0, 2]$ | Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$. |
| **(c)** $y = x^2$ | $(0, 2]$ | Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. No hay mínimo absoluto. |
| **(d)** $y = x^2$ | $(0, 2)$ | No hay extremos absolutos. |

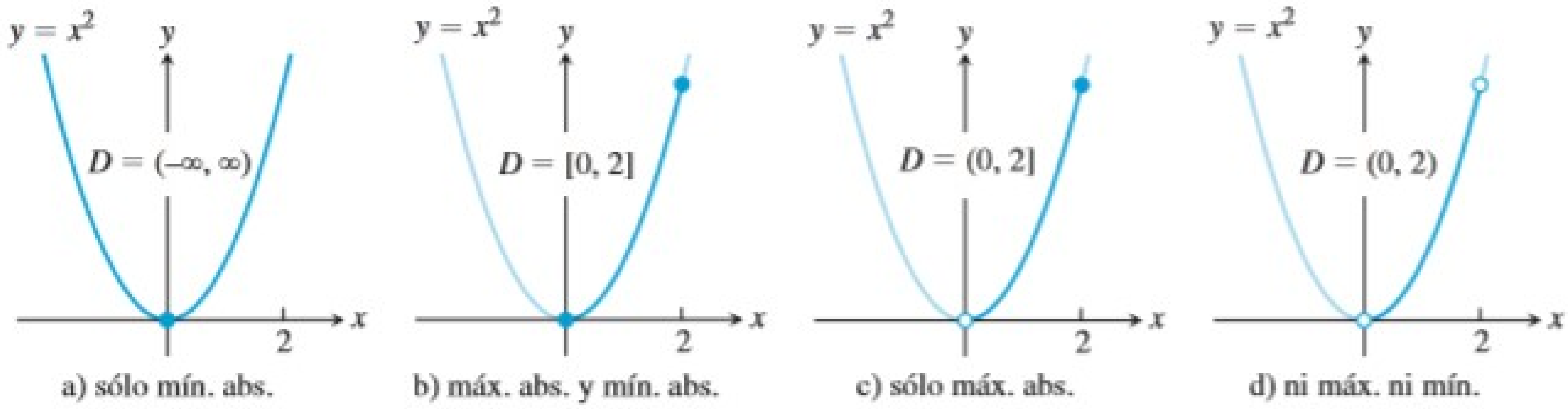



**FIGURA 4.2** Gráficas del ejemplo 1.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Daniel Bernoulli
(1700–1789)

Algunas de las funciones en el ejemplo 1 no tuvieron valores máximos o mínimos. El siguiente teorema afirma que una función que es *continua* en todo punto de un intervalo *cerrado* $[a, b]$ tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Cuando graficamos una función, buscamos estos valores extremos.

**TEOREMA 1: Teorema de los valores extremos** Si $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f$ tiene tanto un valor máximo absoluto $M$ como un valor mínimo absoluto $m$ en $[a, b]$. Esto es, existen números $x_1$ y $x_2$ en $[a, b]$ con $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ y $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier otro $x$ en $[a, b]$.

La demostración del teorema de los valores extremos requiere de un conocimiento detallado del sistema de los números reales (véase el apéndice 6), por lo que no la veremos aquí. La figura 4.3 ilustra posibles ubicaciones para los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Como observamos para la función $y = \cos x$, es posible que un mínimo absoluto (o máximo absoluto) pueda ocurrir en dos o más puntos diferentes del intervalo.

Los requerimientos del teorema 1 de que el intervalo sea cerrado y finito, así como de que la función sea continua, son los ingredientes clave. Sin ellos, la conclusión del teorema no tener en cuenta

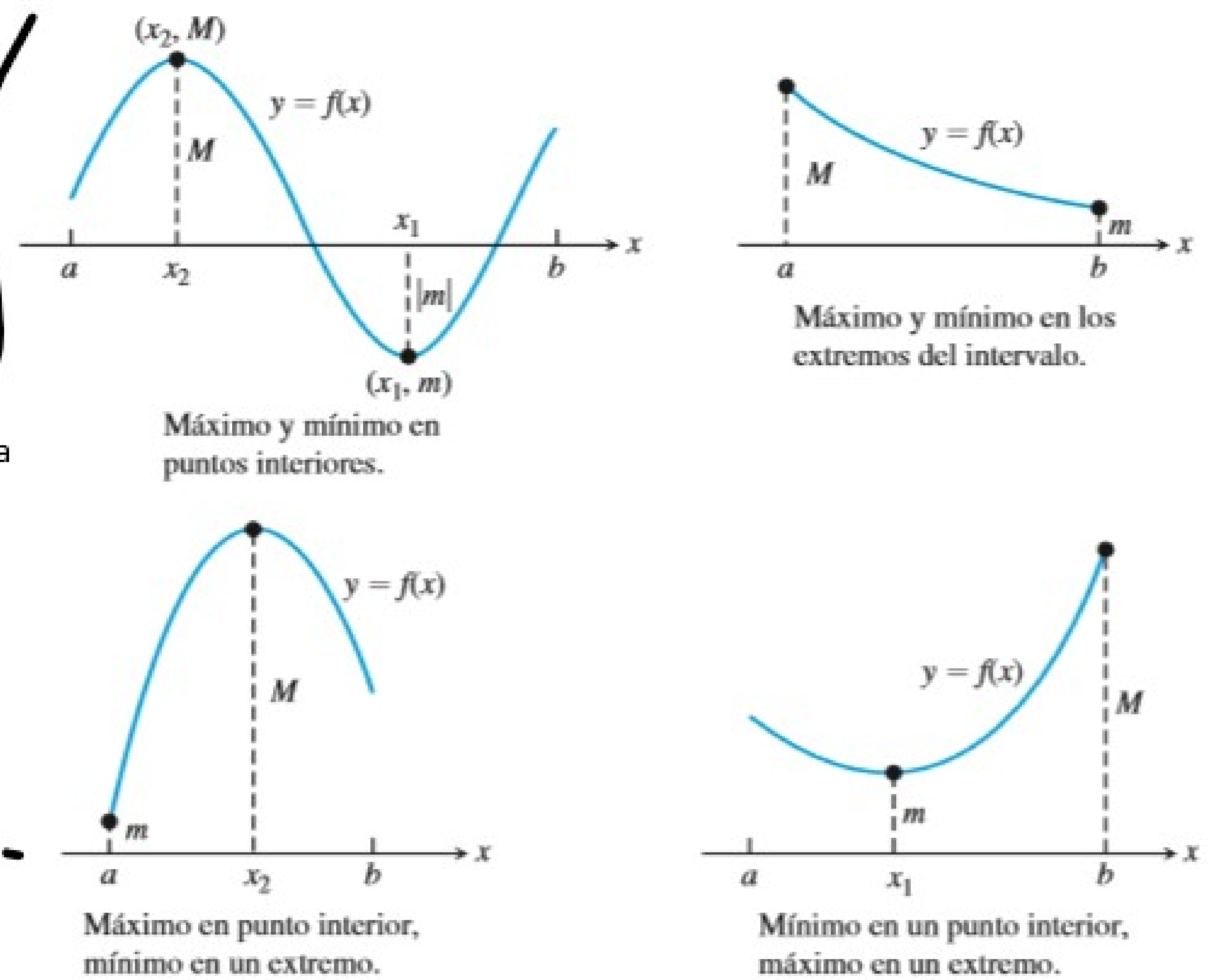



**FIGURA 4.3** Algunas posibilidades para el máximo y el mínimo de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

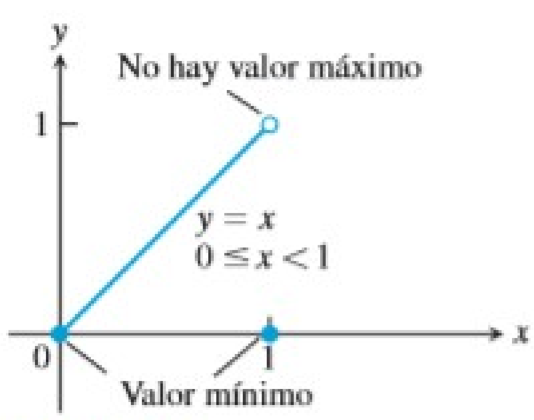



**FIGURA 4.4** Incluso un solo punto de discontinuidad puede evitar que una función tenga valor máximo o mínimo en un intervalo cerrado. La función

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto de $[0, 1]$, excepto en $x = 1$; sin embargo, la gráfica en $[0, 1]$ no tiene punto máximo.

necesariamente se cumple. El ejemplo 1 muestra que un valor extremo absoluto podría no existir si el intervalo no es cerrado, o bien, no es finito. La figura 4.4 indica que no es posible omitir el requisito de continuidad.

## Valores extremos locales (relativos)

La figura 4.5 muestra una gráfica con cinco puntos, donde la función tiene valores extremos en su dominio $[a, b]$. El mínimo absoluto ocurre en $a$ aunque en $e$ el valor de la función es menor que cualquier otro punto *cercano*. La curva crece del lado izquierdo de $c$ y decrece del lado derecho de $c$, por lo que $f(c)$ es un máximo local. La función alcanza su máximo absoluto en $d$. Ahora definiremos lo que significa un extremo local.

**DEFINICIONES** Una función tiene un valor **máximo local** en un punto $c$ en su dominio $D$ si $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in D$ que está dentro de algún intervalo abierto que contenga a $c$.

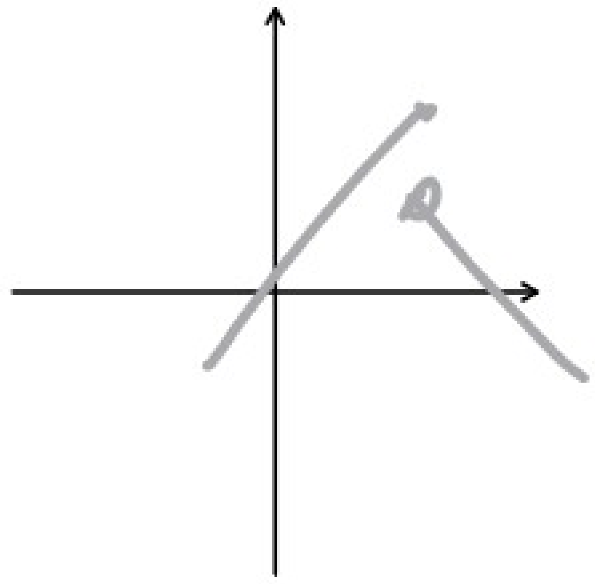
Una función tiene un valor **mínimo local** en un punto $c$ en su dominio $D$ si $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in D$ que está dentro de algún intervalo abierto que contenga a $c$.

TEOREMA DEL VLOR EXTREMO: si f es continua en el intervalor cerrado ab añcanza allí sus valores extremos absolutos

la función contante tienen todos sus valores de máximos y minimos

Si el dominio de $f$ es el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f$ tiene un máximo local en el punto extremo $x = a$, si $f(x) \leq f(a)$ para toda $x$ en algún intervalo semiabierto $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Asimismo, tiene un máximo local en un punto interior $x = c$, si $f(x) \leq f(c)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, $\delta > 0$; además, tiene un máximo local en el punto extremo $x = b$ si $f(x) \leq f(b)$ para toda $x$ en algún intervalo semiabierto $(b - \delta, b]$, $\delta > 0$. Las desigualdades se invierten para valores mínimos locales. En la figura 4.5 la función tiene máximos locales en $c$ y $d$, así como mínimos locales en $a$, $e$ y $b$. Los extremos locales también se conocen como **extremos relativos**. Algunas funciones pueden tener un número infinito de extremos locales, incluso en un intervalo finito. Un ejemplo es la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ en el intervalo $(0, 1]$. (Esta función se grafica en la figura 2.40).

tener en cuenta en casos asi como clasificar sus máximos y minimos



de acuerdoma como esta definida

visto en clase

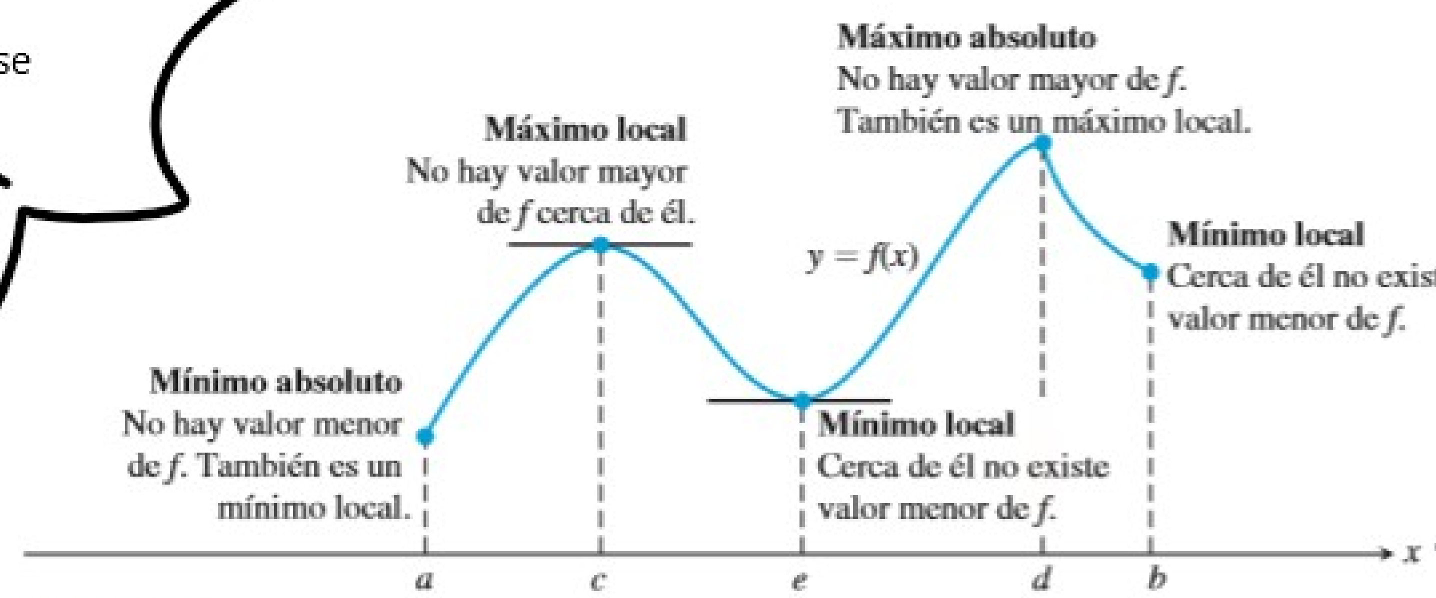



**FIGURA 4.5** Cómo identificar tipos de máximos y mínimos para una función con dominio $a \le x \le b$.

Un máximo absoluto también es un máximo local. Al ser el mayor valor global, también es el mayor valor en sus inmediaciones. Por ello, *una lista de todos los máximos locales de manera automática incluirá al máximo absoluto, si es que existe.* De forma análoga, *una lista de todos los mínimos locales incluirá al mínimo absoluto, si es que existe.*

## Determinación de extremos

El siguiente teorema explica por qué por lo regular sólo necesitamos investigar unos cuantos valores para determinar los extremos de una función.

como resolverlos (creo que encontralos)

**TEOREMA 2: Teorema de la primera derivada para valores extremos locales** Si $f$ tiene un valor máximo local o un mínimo local en un punto interior $c$ de su dominio, y si $f'$ está definida en $c$, entonces

$$f'(c) = 0.$$

este teorema no funciona en fronteras

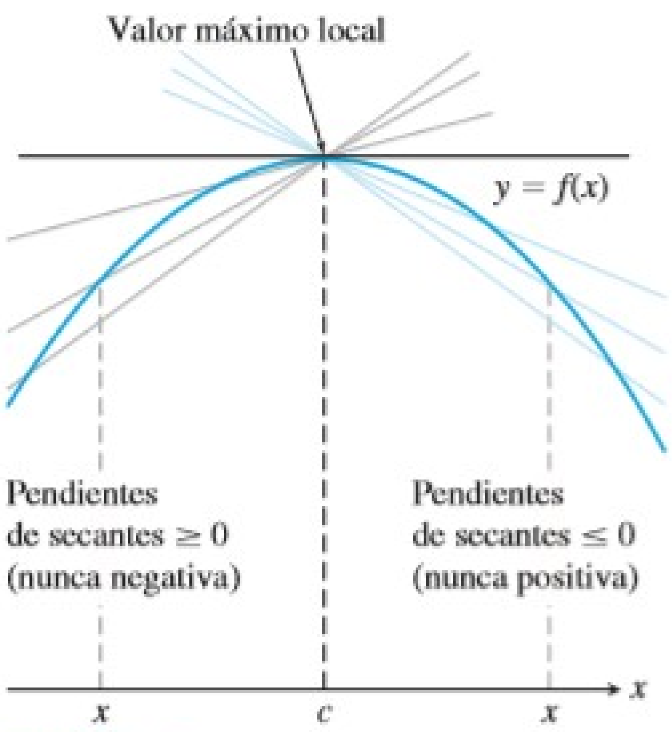



**FIGURA 4.6** Una curva con un valor máximo local. La pendiente en $c$, simultáneamente el límite de números no positivos y de números no negativos, es cero.

**Prueba** Para probar que $f'(c)$ es cero en un extremo local, primero demostramos que $f'(c)$ no puede ser positiva y luego que $f'(c)$ no puede ser negativa. El único número que no es positivo ni negativo es cero, así que $f'(c)$ debe ser cero.

Para comenzar, suponga que $f$ tiene un valor máximo local en $x = c$ (figura 4.6), por lo que $f(x) - f(c) \le 0$ para todos los valores de $x$ suficientemente cercanos a $c$. Como $c$ es un punto interior del dominio de $f$, $f'(c)$ está definida por el límite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Esto significa que los límites laterales existen en $x = c$ y son iguales a $f'(c)$. Cuando examinamos estos límites por separado, encontramos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0. \qquad \text{Puesto que } (x - c) > 0 \text{ y } f(x) \le f(c) \qquad (1)$$

De forma análoga,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0. \qquad \text{Puesto que } (x - c) < 0 \text{ y } f(x) \le f(c) \qquad (2)$$

Juntas, las ecuaciones (1) y (2) implican que $f'(c) = 0$.

Esto prueba el teorema para valores máximos locales. Para demostrar el teorema para valores mínimos locales, basta con utilizar $f(x) \ge f(c)$, lo cual invierte las desigualdades de las ecuaciones (1) y (2). ■

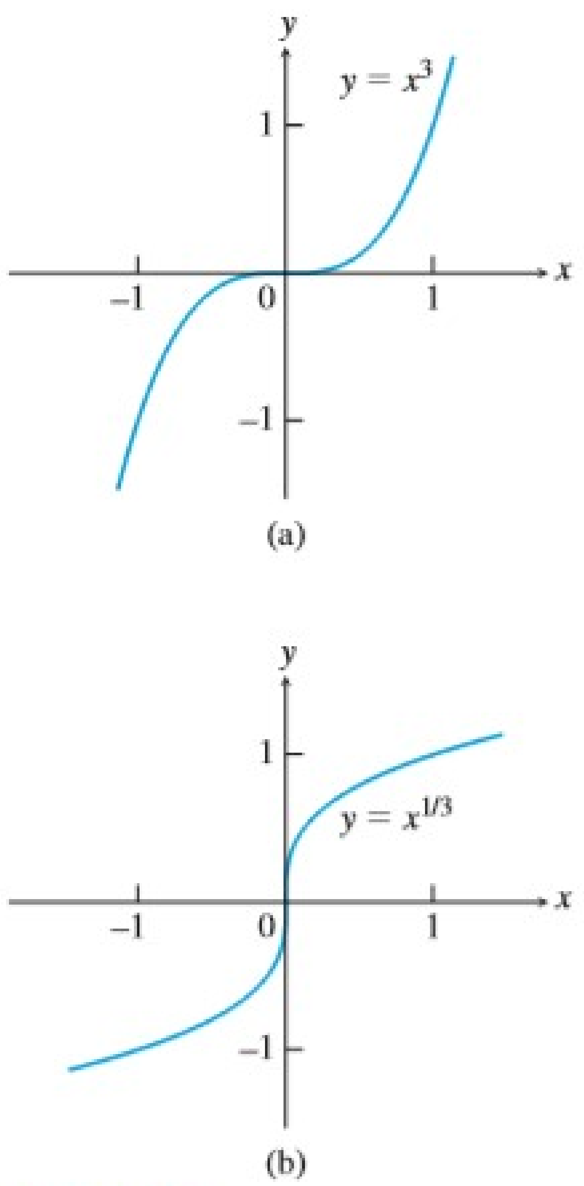



**FIGURA 4.7** Puntos críticos sin valores extremos. (a) $y' = 3x^2$ es 0 en $x = 0$, pero $y = x^3$ no tiene extremos allí. (b) $y' = (1/3)x^{-2/3}$ no está definida en $x = 0$, pero $y = x^{1/3}$ no tiene extremos allí.

tener en cuenta que por ser punto critico no necesariamente tiene su extremo local ahí
NOTA

El teorema 2 establece que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local y la derivada está definida. Por ello, los únicos lugares donde la función $f$ posiblemente tiene un valor extremo (local o global) son

1. puntos interiores donde $f' = 0$,
2. puntos interiores donde $f'$ no está definida,
3. los puntos extremos del dominio de $f$.

La siguiente definición nos ayuda a resumir.

x=c es punto critico de f en d si c perfetene a d y f'(c)=c

**DEFINICIÓN** Un punto interior del dominio de una función $f$ donde $f'$ es cero o no está definida es un **punto crítico** de $f$.

entonces teorema anterior queda: si x= c es el E.L => x=c es punyo critico de f en d

ser un punto critico es comdiciom necessris pero no suficiente para ser un punto local

Así, los únicos puntos del dominio donde la función puede tener valores extremos son los puntos críticos y los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, tenga cuidado de no malinterpretar lo que se dice aquí. Una función puede tener un punto crítico en $x = c$ sin tener un valor extremo local ahí. Por ejemplo, las dos funciones $y = x^3$ y $y = x^{1/3}$ tienen puntos críticos en el origen y ahí tienen un valor de cero, pero cada función es positiva a la derecha del origen y negativa a la izquierda. En consecuencia, ninguna de las funciones tiene un valor extremo local en el origen. En vez de ello, cada función tiene un *punto de inflexión* ahí (véase la figura 4.7). Definimos y analizamos los puntos de inflexión en la sección 4.4.

La mayoría de los problemas referentes a valores extremos piden determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y finito. El teorema 1 nos asegura que tales valores existen; el teorema 2 nos indica que éstos se presentan sólo en puntos críticos o en los extremos del intervalo. Con frecuencia, es posible listar tales puntos y calcular los valores correspondientes de la función para determinar cuáles son los valores máximo y mínimo, y localizar dónde están. Por supuesto, hemos visto que si el intervalo no es cerrado o no es finito (tal como $a < x < b$, o bien, $a < x < \infty$), los extremos absolutos no necesariamente existen. Si existe un valor máximo o mínimo absoluto, debe presentarse en un punto crítico o en un extremo del lado derecho o izquierdo del intervalo.

comprobarlo con la derivada que da 0 en el punto critico

EJEMPLO:

f(x) x^2 [-1,2]
x=0 es punto critico

2) f(-1)= 1
f(0)= 0 (minimo local)
f(2) 4. (máximo local) y absoluto

ver el archivo pdf del aula virtual

**Cómo determinar los extremos absolutos de una función continua $f$ en un intervalo cerrado finito**

1. Evalúe $f$ en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo.
2. Tome el mayor y el menor de tales valores.

**EJEMPLO 2** Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$.

**Solución** La función es derivable en todo su dominio, así que el único punto crítico es donde $f'(x) = 2x = 0$, es decir, $x = 0$. Necesitamos verificar los valores de la función en $x = 0$ y en los puntos extremos del intervalo $x = -2$ y $x = 1$:

Valor en el punto crítico: $f(0) = 0$

Valores en los extremos del intervalo: $f(-2) = 4$

$f(1) = 1$

La función tiene un valor máximo absoluto de 4 en $x = -2$ y un valor mínimo absoluto de 0 en $x = 0$. ■

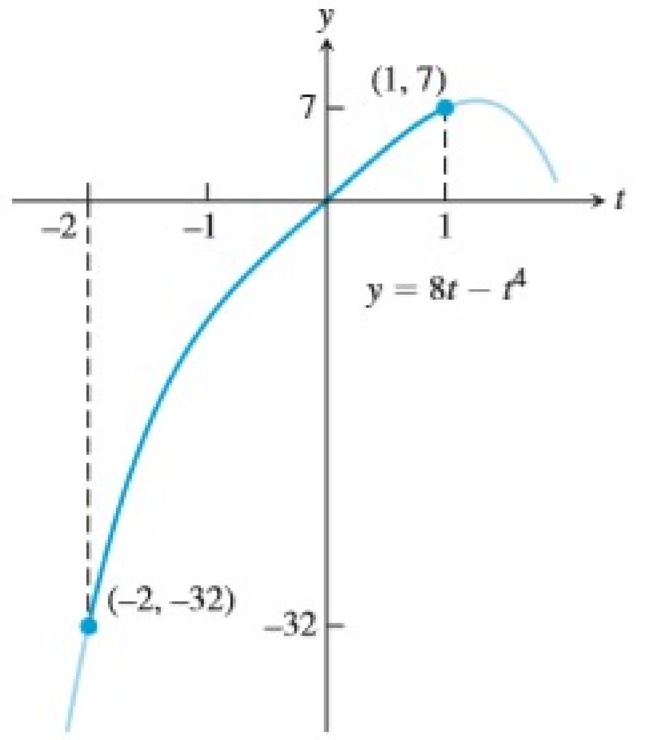



**FIGURA 4.8** Los valores extremos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$ (ejemplo 3).

**EJEMPLO 3** Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$.

**Solución** La función es derivable en todo su dominio, por lo que los únicos puntos críticos se presentan donde $g'(t) = 0$. Al resolver esta ecuación, se obtiene

$$8 - 4t^3 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

un punto fuera del dominio dado. Por lo tanto, los extremos absolutos de la función se presentan en los puntos extremos, $g(-2) = -32$ (mínimo absoluto) y $g(1) = 7$ (máximo absoluto). Véase la figura 4.8. ■

**EJEMPLO 4** Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 3]$.

**Solución** Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos, luego tomamos el mayor y el menor de los valores resultantes.

La primera derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

no tiene ceros, pero no está definida en el punto interior $x = 0$. Los valores de $f$ en este punto crítico y en los extremos del intervalo son

Valor en el punto crítico: $f(0) = 0$

Valores en los puntos extremos: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}.$

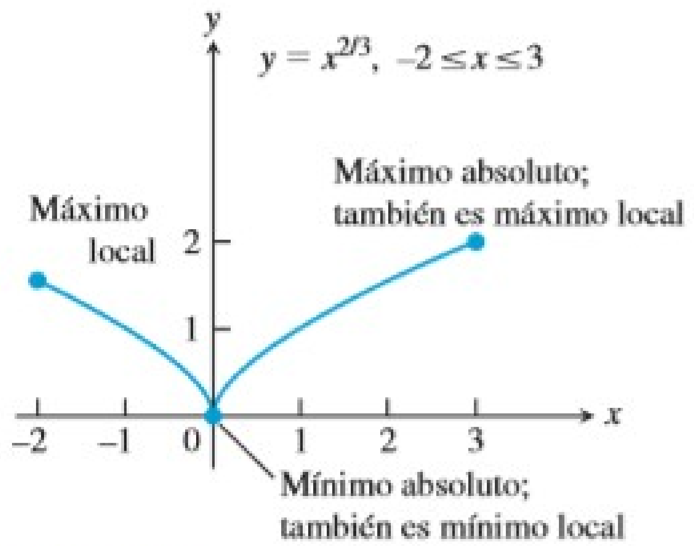


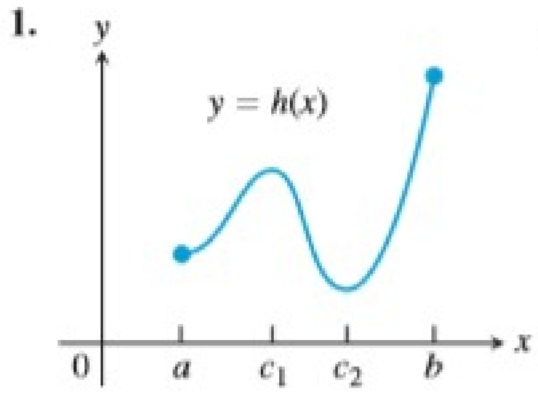

**FIGURA 4.9** Los valores extremos de $f(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$ aparecen en $x = 0$ y $x = 3$ (ejemplo 4).

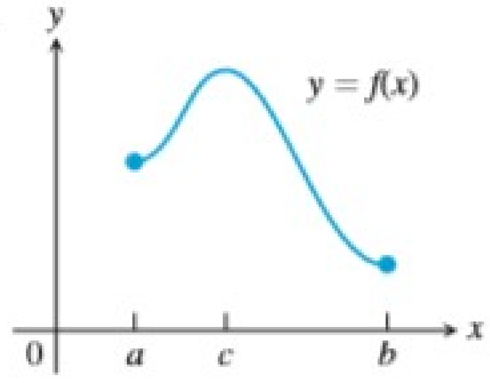
Con base en esta lista, observamos que el valor máximo absoluto de la función es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, y se presenta en el extremo derecho $x = 3$. El valor mínimo absoluto es 0 y se presenta en el punto interior $x = 0$ donde la gráfica tiene un "pico" (figura 4.9). ■

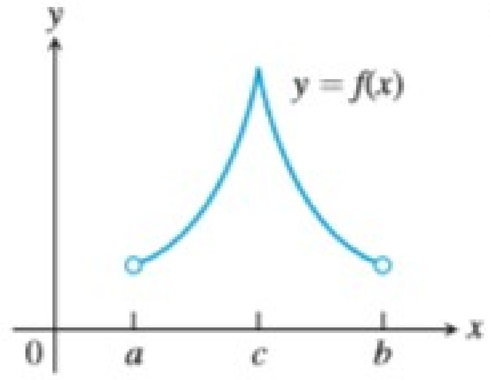
## Ejercicios 4.1

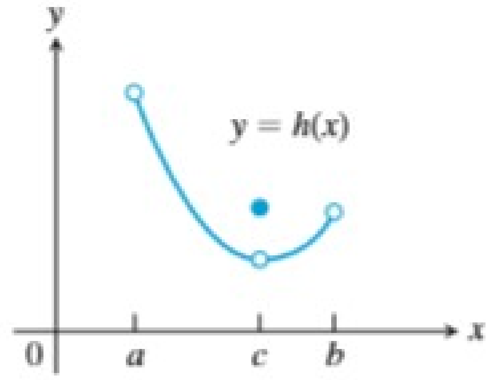
**Determinación de extremos con base en las gráficas**

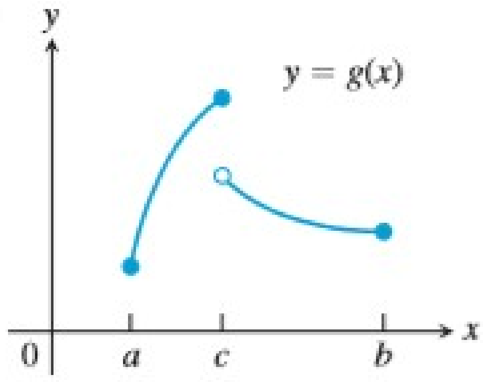
En los ejercicios 1 a 6 y con base en la gráfica, determine si la función tiene valores extremos absolutos en $[a, b]$. Luego explique por qué su respuesta es congruente con el teorema 1.

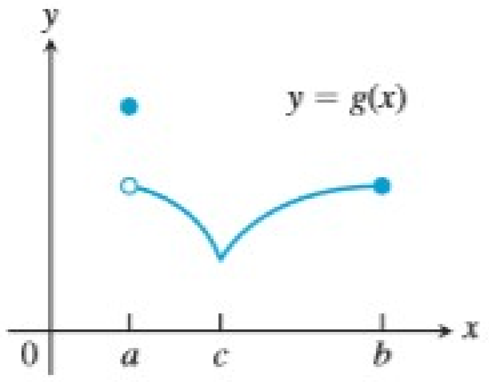
1.



2.


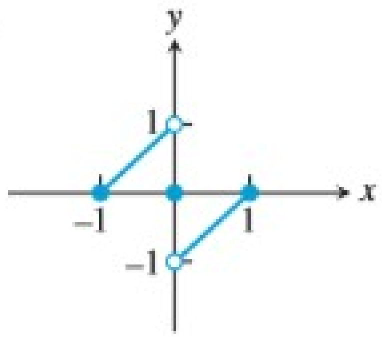

3.


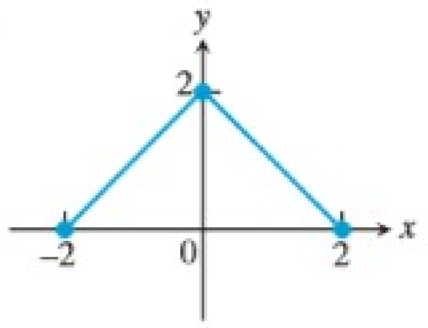

4.


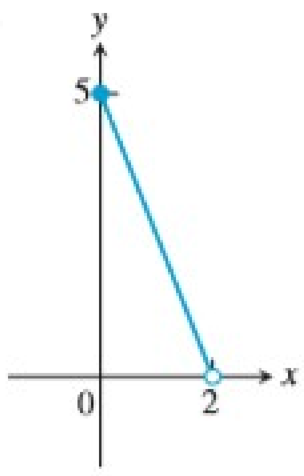
5.


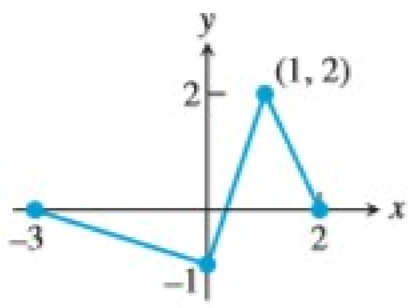

6.



En los ejercicios 7 a 10, determine los valores extremos absolutos y en dónde se presentan.

7.



8.



9.



10.



En los ejercicios 11 a 14, relacione cada tabla con una gráfica.

11.

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 0 |
| $b$ | 0 |
| $c$ | 5 |

12.

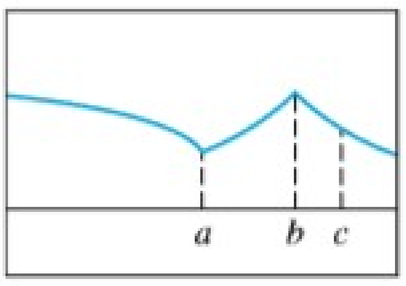
| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 0 |
| $b$ | 0 |
| $c$ | $-5$ |

13.

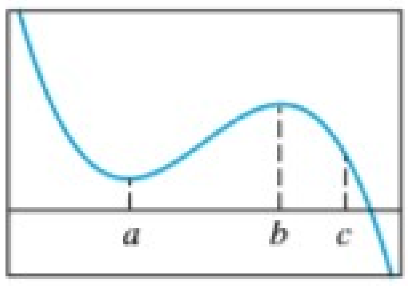
| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | no existe |
| $b$ | 0 |
| $c$ | $-2$ |

14.

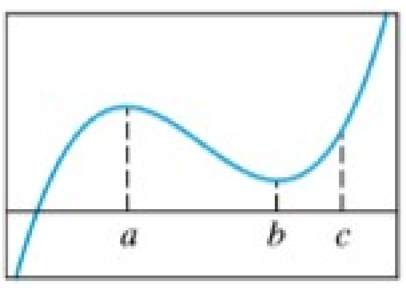
| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | no existe |
| $b$ | no existe |
| $c$ | $-1.7$ |



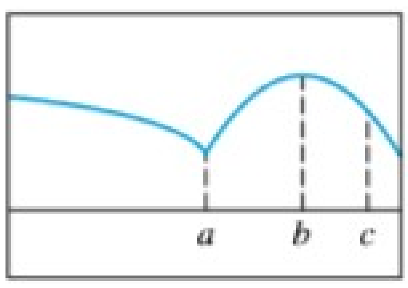

(a)




(b)




(c)




(d)

En los ejercicios 15 a 20, grafique cada función y determine si la función tiene valores extremos absolutos en su dominio. Explique por qué su respuesta es congruente con el teorema 1.

15. $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 2$

16. $y = \dfrac{6}{x^2 + 2}, \quad -1 < x < 1$

17. $g(x) = \begin{cases} -x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

18. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -1 \le x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$

19. $y = 3 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 2\pi$

20. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

### Extremos absolutos en intervalos cerrados finitos

En los ejercicios 21 a 36, determine los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo indicado. Luego grafique la función. Identifique los puntos de la gráfica donde se alcanzan los extremos absolutos e incluya sus coordenadas.

21. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

22. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

23. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

24. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

25. $F(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

26. $F(x) = -\dfrac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

27. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

28. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

29. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

30. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

31. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6}$

32. $f(\theta) = \tan \theta, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

33. $g(x) = \csc x, \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$

34. $g(x) = \sec x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

35. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

36. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le t \le 7$

En los ejercicios 37 a 40, determine los valores máximo y mínimo absolutos y diga dónde se alcanzan.

37. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

38. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

39. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

40. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

### Determinación de puntos críticos

En los ejercicios 41 a 48, determine todos los puntos críticos para cada función.

**41.** $y = x^2 - 6x + 7$

**42.** $f(x) = 6x^2 - x^3$

**43.** $f(x) = x(4 - x)^3$

**44.** $g(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2$

**45.** $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

**46.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

**47.** $y = x^2 - 32\sqrt{x}$

**48.** $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$

### Determinación de valores extremos

En los ejercicios 49 a 58, determine los valores extremos (absolutos y locales) de la función, luego indique dónde se alcanzan.

**49.** $y = 2x^2 - 8x + 9$

**50.** $y = x^3 - 2x + 4$

**51.** $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

**52.** $y = x^3(x - 5)^2$

**53.** $y = \sqrt{x^2 - 1}$

**54.** $y = x - 4\sqrt{x}$

**55.** $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

**56.** $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

**57.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

**58.** $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

### Extremos locales y puntos críticos

En los ejercicios 59 a 66, determine los puntos críticos, los extremos del dominio y los valores extremos (absolutos y locales) para cada función.

**59.** $y = x^{2/3}(x + 2)$

**60.** $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

**61.** $y = x\sqrt{4 - x^2}$

**62.** $y = x^2\sqrt{3 - x}$

**63.** $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

**64.** $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

**65.** $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

**66.** $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 67 y 68, justifique sus respuestas.

**67.** Sea $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

a. ¿Existe $f'(2)$?

b. Demuestre que el único valor extremo local de $f$ se alcanza en $x = 2$.

c. ¿El resultado del inciso (b) contradice el teorema de los valores extremos?

d. Repita los incisos (a) y (b) para $f(x) = (x - a)^{2/3}$, pero remplace 2 por $x = a$.

**68.** Sea $f(x) = |x^3 - 9x|$.

a. ¿Existe $f'(0)$?

b. ¿Existe $f'(3)$?

c. ¿Existe $f'(-3)$?

d. Determine todos los valores extremos de $f$.

### Teoría y ejemplos

**69. Un mínimo sin derivada** La función $f(x) = |x|$ tiene un valor mínimo absoluto en $x = 0$, aunque $f$ no es derivable en $x = 0$. ¿Es esto congruente con el teorema 2? Justifique su respuesta.

**70. Funciones pares** Si una función par $f(x)$ tiene un valor máximo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de $f$ en $x = -c$? Justifique su respuesta.

**71. Funciones impares** Si una función impar $g(x)$ tiene un valor mínimo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de $g$ en $x = -c$? Justifique su respuesta.

**72.** Sabemos cómo encontrar los valores extremos de una función continua $f(x)$ investigando sus valores en los puntos críticos y en los extremos del intervalo. Pero, ¿qué ocurre si no hay puntos críticos o extremos? ¿Qué sucede entonces? ¿Existen realmente tales funciones? Justifique sus respuestas

**73.** La función

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \qquad 0 < x < 5,$$

modela el volumen de una caja.

a. Determine los valores extremos de $V$.

b. Interprete los valores determinados en el inciso (a) en términos del volumen de la caja.

**74. Funciones cúbicas** Considere la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a. Demuestre que $f$ puede tener 0, 1 y 2 puntos críticos. Dé ejemplos y gráficas que respalden su argumento.

b. ¿Cuántos valores extremos locales puede tener $f$?

**75. Altura máxima de un cuerpo que se desplaza verticalmente** La altura de un cuerpo que se desplaza verticalmente está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \qquad g > 0,$$

con $s$ en metros y $t$ en segundos. Determine la altura máxima del cuerpo.

**76. Pico de la corriente alterna** Suponga que en cualquier tiempo $t$ (en segundos) la corriente $i$ (en amperes) en un circuito de corriente alterna es $i = 2\cos t + 2\operatorname{sen} t$. ¿Cuál es la corriente pico (mayor magnitud) para tal circuito?

T Grafique las funciones en los ejercicios 77 a 80. Luego determine los valores extremos de la función en el intervalo e indique dónde se alcanzan.

**77.** $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \le x \le 5$

**78.** $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \le x \le 7$

**79.** $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

**80.** $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

### EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 81 a 86, utilizará un SAC para ayudar a determinar los extremos absolutos de la función indicada en el intervalo cerrado específicado. Siga los pasos siguientes.

a. Trace la función en el intervalo para ver su comportamiento general ahí.

b. Determine los puntos interiores donde $f' = 0$. (En algunos ejercicios tal vez tenga que utilizar la función para resolver numéricamente una ecuación con la finalidad de aproximar una solución). Es posible graficar también a $f'$.

c. Determine los puntos interiores donde no existe $f'$.

d. Evalúe la función en todos los puntos que encontró en los incisos (b) y (c), así como en los extremos del intervalo.

e. Determine los valores extremos absolutos de la función en el intervalo e identifique dónde se alcanzan.

**81.** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

**82.** $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

**83.** $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

**84.** $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

**85.** $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

**86.** $f(x) = x^{3/4} - \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

# 4.2 El teorema del valor medio

Sabemos que las funciones constantes tienen derivadas iguales a cero, pero, ¿podría existir una función más complicada cuya derivada siempre sea cero? Si dos funciones tienen derivadas idénticas en un intervalo, ¿cómo están relacionadas esas funciones? En este capítulo responderemos éstas y otras preguntas aplicando el teorema del valor medio. Primero se expone un caso especial, conocido como teorema de Rolle, que se utiliza para demostrar el teorema del valor medio.

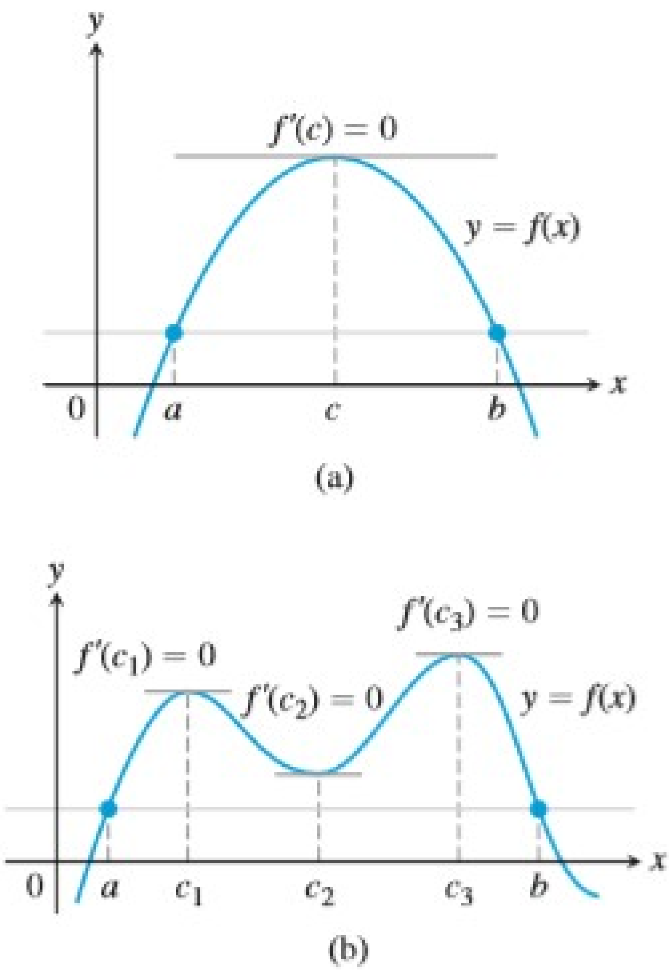



**FIGURA 4.10** El teorema de Rolle dice que una curva derivable tiene al menos una tangente horizontal entre cualesquiera dos puntos por los que la curva cruza una recta horizontal. Puede tener sólo una (a) o más de una (b).

## Teorema de Rolle

Como lo sugiere su gráfica, si una función derivable cruza una recta horizontal en dos puntos diferentes, existe al menos un punto entre ellos donde la tangente a la gráfica es horizontal y la derivada es cero (figura 4.10). Ahora establecemos y demostramos dicho resultado.

si f es derivable en todos sus puntos, en al menos un ounto su derivada es paralela
=>f'(c)=0
ver este teorema con la función constante

**TEOREMA 3: Teorema de Rolle** Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior $(a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número $c$ en $(a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.

temer en cuenta que si la derivada es 0 en términos de derivada de la velocidad, significa que la velocidad en ese momento es nula

**Prueba** Al ser continua de acuerdo con el teorema 1, $f$ toma los valores máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$. Éstos sólo se pueden alcanzar

1. en puntos interiores donde $f'$ es cero,
2. en puntos interiores donde $f'$ no existe,
3. en los puntos extremos del dominio de la función, en este caso $a$ y $b$.

Por hipótesis, $f$ tiene una derivada en todo punto interior. Lo anterior elimina la posibilidad (2), dejándonos con los puntos interiores donde $f' = 0$ y con los dos puntos extremos del intervalo, $a$ y $b$.

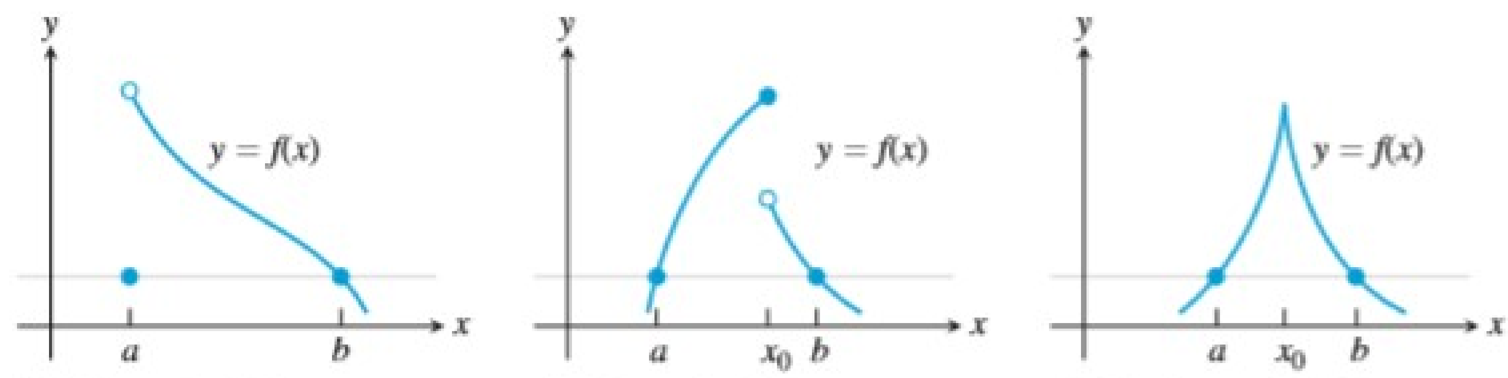
Si el máximo o el mínimo se alcanzan en un punto $c$ entre $a$ y $b$, entonces por el teorema 2 de la sección 4.1, $f'(c) = 0$ y así determinamos un punto para el teorema de Rolle.

Si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los extremos, entonces, ya que $f(a) = f(b)$, debe ser el caso de que $f$ sea una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ y el punto $c$ pueden ser cualquiera en el interior $(a, b)$. ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Michel Rolle
(1652–1719)

Las hipótesis del teorema 3 son esenciales. Si no se cumplen en algún punto, la gráfica podría no tener una tangente horizontal (figura 4.11).




(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$

(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$

(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

**FIGURA 4.11** Si no se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle, podría no haber una tangente horizontal.

El teorema de Rolle podría combinarse con el teorema del valor intermedio para mostrar cuándo existe una única solución real de una ecuación $f(x) = 0$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

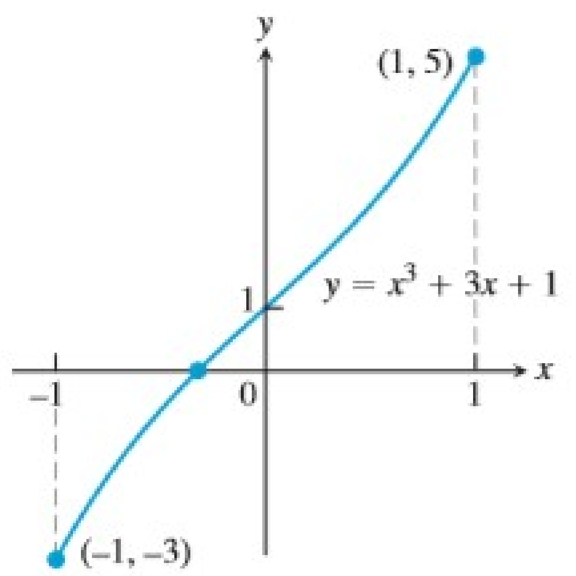



**FIGURA 4.12** El único cero (número real) del polinomio $y = x^3 + 3x + 1$ es el que se muestra aquí, donde la curva cruza al eje $x$ entre $-1$ y 0 (ejemplo 1).

**EJEMPLO 1** Demuestre que la ecuación

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tiene exactamente una solución real.

**Solución** Definimos la función continua

$$f(x) = x^3 + 3x + 1.$$

Como $f(-1) = -3$ y $f(0) = 1$, el teorema del valor intermedio nos indica que la gráfica de $f$ cruza al eje $x$ en algún punto en el intervalo abierto $(-1, 0)$. (Véase la figura 4.12). La derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

nunca es cero (ya que siempre es positiva). Ahora, si hubiera siquiera dos puntos $x = a$ y $x = b$ donde $f(x)$ fuera cero, el teorema de Rolle nos garantizaría la existencia de un punto $x = c$ entre ellos donde $f'$ sería cero. Por lo tanto, $f$ no tiene más que un cero. ■

El uso principal que haremos del teorema de Rolle es para demostrar el teorema del valor medio.

## Teorema del valor medio

por ejemplo: en uj viaje de 2 horas de 150km este teorema dice que en algún momento la velocidad instantánea fue igusl s la velocidad promedio.
o sea 2/150km = 75kh seria el promedio
es significa que en alfun momento el auto anduvona 75kmh

El teorema del valor medio, que estableció por primera vez Joseph-Louis Lagrange, es una versión general del teorema de Rolle (figura 4.13). El teorema del valor medio garantiza que existe un punto donde la recta tangente es paralela a la cuerda $AB$.

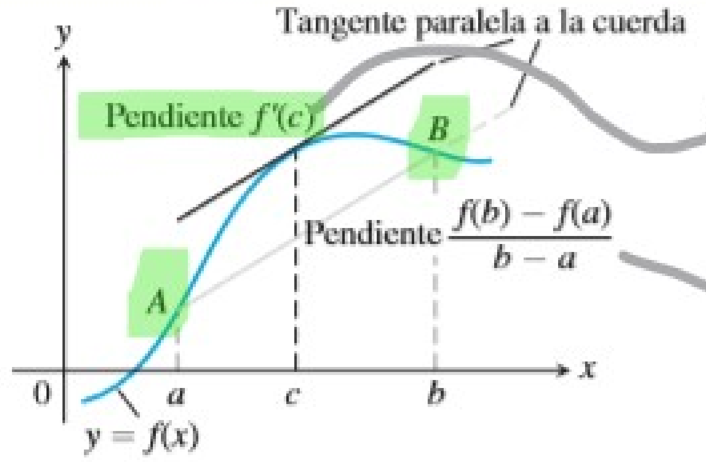



**FIGURA 4.13** Geométricamente, el teorema del valor medio dice que en algún punto entre $a$ y $b$ la curva tiene al menos una tangente paralela a la cuerda $AB$.

**TEOREMA 4: Teorema del valor medio** Suponga que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el interior del intervalo $(a, b)$. Entonces existe al menos un punto $c$ en $(a, b)$ en el que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

ver como justificar que una función es de lagrane
y ver ejemplos de busquwda de A y B

**Prueba** Dibujamos la gráfica de $f$ y trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. (Véase la figura 4.14). La recta es la gráfica de la función

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

tener en cuenta la demostracion

(ecuación punto pendiente). La diferencia vertical entre las gráficas de $f$ y $g$ en $x$ es

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{3}$$

La figura 4.15 muestra juntas las gráficas de $f$, $g$ y $h$.

La función $h$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$, ya que tanto $f$ como $g$ lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$, ya que las gráficas de $f$ y $g$ pasan por $A$ y $B$. Por lo tanto, $h'(c) = 0$ en algún punto $c \in (a, b)$. Éste es el punto que necesitamos para la ecuación (1).

**Biografía histórica**

Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)

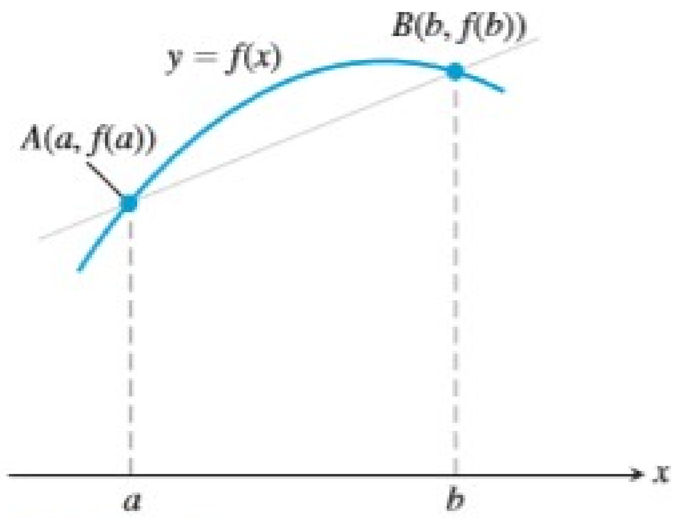



**FIGURA 4.14** La gráfica de $f$ y la cuerda $AB$ en el intervalo $[a, b]$.

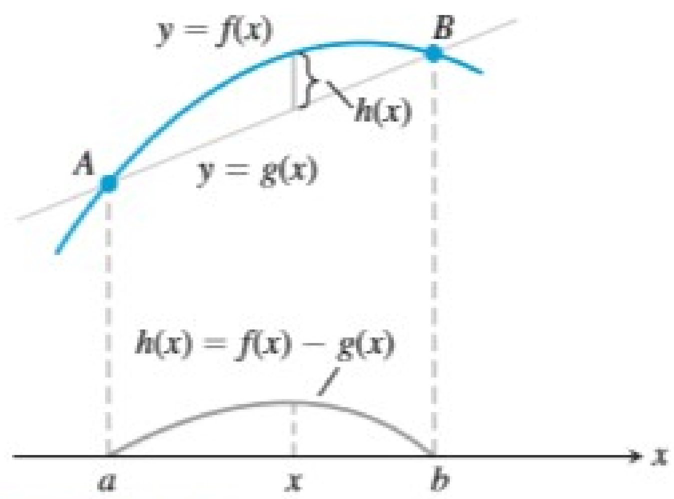



**FIGURA 4.15** La cuerda $AB$ es la gráfica de la función $g(x)$. La función $h(x) = f(x) - g(x)$ proporciona la distancia vertical entre las gráficas de $f$ y $g$ en $x$.

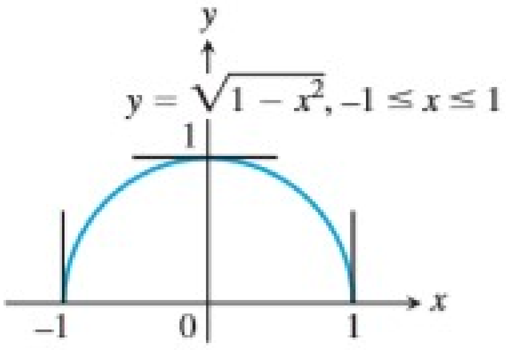



**FIGURA 4.16** La función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisface las hipótesis (y la conclusión) del teorema del valor medio en $[-1, 1]$, aunque $f$ no sea derivable en $-1$ y 1.

Para verificar la ecuación (1), derivamos ambos lados de la ecuación (3) con respecto a $x$ y luego establecemos $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Derivada de la ecuación (3)...}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{... con } x = c$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{Reacomodando}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

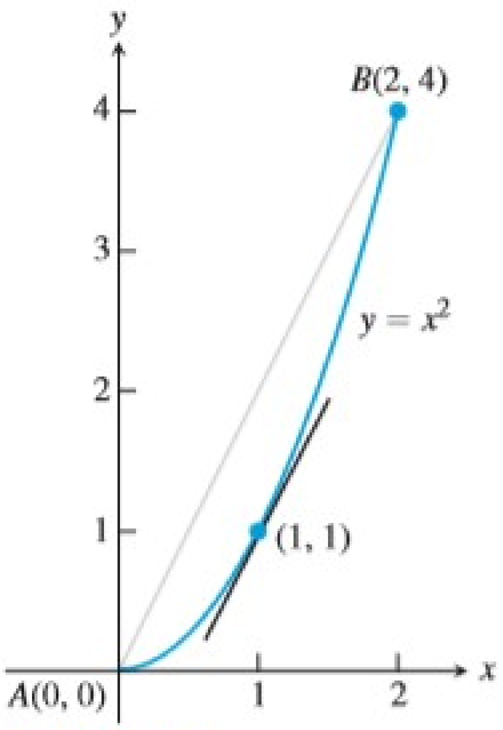



**FIGURA 4.17** Como encontramos en el ejemplo 2, $c = 1$ es donde la tangente resulta paralela a la cuerda.

Las hipótesis del teorema del valor medio no piden que $f$ sea derivable en $a$ o en $b$. Basta con la continuidad en $a$ y $b$ (figura 4.16).

**EJEMPLO 2** La función $f(x) = x^2$ (figura 4.17) es continua para $0 \le x \le 2$, y es derivable para $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, el teorema del valor medio afirma que en algún punto $c$ en el intervalo, la derivada $f'(x) = 2x$ debe tener el valor $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. En este caso, es posible identificar a $c$ si resolvemos la ecuación $2c = 2$ para obtener $c = 1$. Sin embargo, no siempre es sencillo determinar $c$ algebraicamente, aunque sepamos que existe. ■

## Una interpretación física

Podemos considerar al número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ como el cambio promedio en $f$ en $[a, b]$, y a $f'(c)$ como un cambio instantáneo. Luego, el teorema del valor medio indica que en algún punto interior el cambio instantáneo debe ser igual al cambio promedio de todo el intervalo.

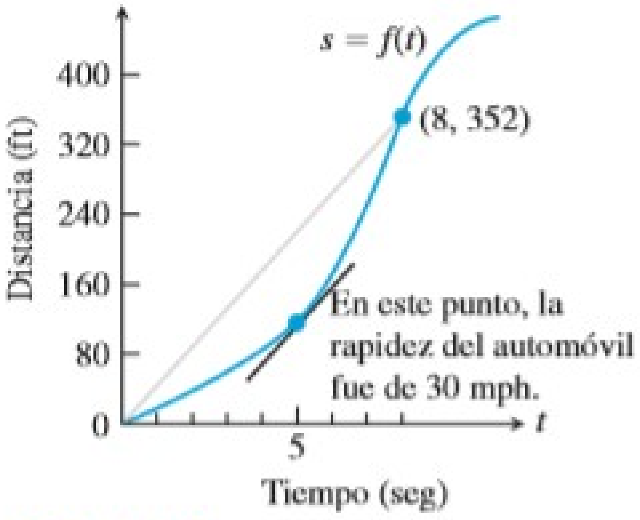



**FIGURA 4.18** Distancia contra el tiempo transcurrido para el automóvil del ejemplo 3.

**EJEMPLO 3** Si un automóvil acelera desde cero y tarda 8 segundos en avanzar 352 ft, su velocidad promedio para el intervalo de 8 segundos es $352/8 = 44$ ft/seg. El teorema del valor medio afirma que en algún punto durante la aceleración el velocímetro debe indicar exactamente 30 mph (44 ft/seg) (figura 4.18). ■

## Consecuencias matemáticas

Al inicio de la sección preguntamos qué clase de función tiene una derivada cero en todo un intervalo. El primer corolario del teorema del valor medio da la respuesta de que sólo las funciones constantes tienen derivadas igual a cero.

**COROLARIO 1** Si $f'(x) = 0$ en cada punto $x$ de un intervalo abierto $(a, b)$, entonces $f(x) = C$ para toda $x \in (a, b)$, donde $C$ es una constante.

**Prueba** Queremos demostrar que $f$ tiene un valor constante en el intervalo $(a, b)$. Para ello, demostramos que si $x_1$ y $x_2$ son cualesquiera dos puntos en $(a, b)$ con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Ahora $f$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$: es derivable en todo punto de $[x_1, x_2]$; por lo tanto, también es continua en todo punto. En consecuencia,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

en algún punto $c$ entre $x_1$ y $x_2$. Como $f' = 0$ en todo el intervalo $(a, b)$, esta ecuación implica sucesivamente que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{y} \qquad f(x_1) = f(x_2). \qquad \blacksquare$$

ver en casa

Al inicio de esta sección, también preguntamos acerca de la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas en todo un intervalo. El siguiente corolario nos dice que sus valores en el intervalo tienen una diferencia constante.

**COROLARIO 2** Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto $x$ de un intervalo abierto $(a, b)$, entonces existe una constante $C$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a, b)$. Esto es $f - g$ es una función constante en $(a, b)$.

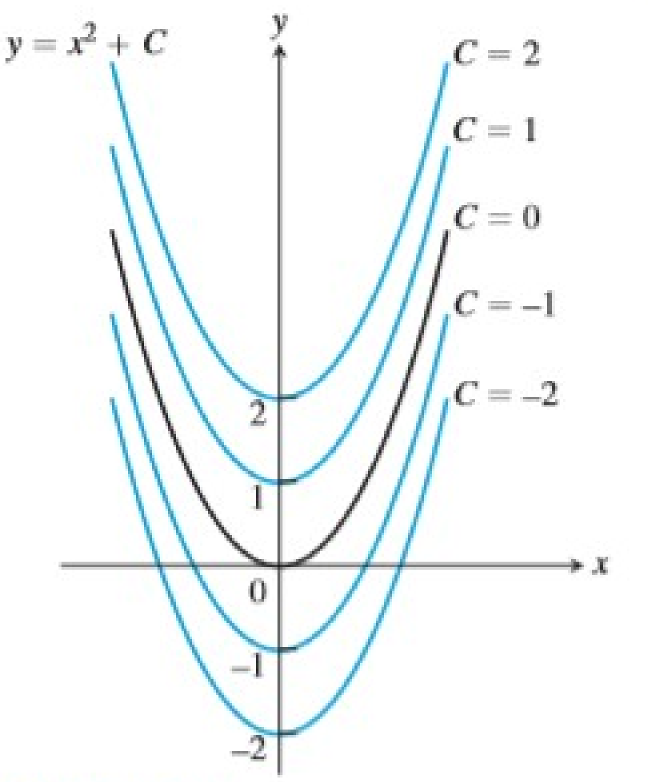



**FIGURA 4.19** Desde un punto de vista geométrico, el corolario 2 del teorema del valor medio dice que las gráficas de funciones con la misma derivada en el intervalo sólo pueden diferir por un desplazamiento vertical. Las gráficas de las funciones con derivada $2x$ son las parábolas $y = x^2 + C$, las cuales se muestran aquí para algunos valores de $C$.

**Prueba** En cada punto $x \in (a, b)$ la derivada de la función diferencia $h = f - g$ es

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Así, por el corolario 1, $h(x) = C$ en $(a, b)$. Esto es, $f(x) - g(x) = C$ en $(a, b)$, así que $f(x) = g(x) + C$. $\blacksquare$

Los corolarios 1 y 2 también son ciertos si el intervalo abierto $(a, b)$ no es finito. Esto es, siguen siendo ciertos si el intervalo es $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$.

El corolario 2 desempeñará un papel importante cuando analicemos las antiderivadas en la sección 4.7. Por ejemplo, nos indica que como la derivada de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$ es $2x$, cualquiera otra función con derivada $2x$ en $(-\infty, \infty)$ debe tener la fórmula $x^2 + C$ para algún valor de $C$ (figura 4.19).

**EJEMPLO 4** Determine la función $f(x)$ cuya derivada sea sen $x$ y cuya gráfica pase por el punto $(0, 2)$.

**Solución** Como la derivada de $g(x) = -\cos x$ es $g'(x) = \text{sen } x$, vemos que $f$ y $g$ tienen la misma derivada. Entonces, el corolario 2 indica que $f(x) = -\cos x + C$, para alguna constante $C$. Como la gráfica de $f$ pasa por el punto $(0, 2)$, el valor de $C$ se determina a partir de la condición de que $f(0) = 2$:

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \qquad \text{así que} \qquad C = 3.$$

La función $f(x) = -\cos x + 3$.

### Determinación de la velocidad y de la posición a partir de la aceleración

aplicación del colorario2

Es posible utilizar el corolario 2 para determinar las funciones velocidad y posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta vertical. Suponga que un objeto o un cuerpo caen libremente a partir del reposo con una aceleración de $9.8 \text{ m/seg}^2$. Consideremos, además, que la posición del cuerpo se mide positivamente hacia abajo desde la posición de reposo (de manera que el eje coordenado vertical apunta *hacia abajo*, en la dirección del movimiento, con la posición de reposo en 0).

Sabemos que la velocidad $v(t)$ es alguna función cuya derivada es 9.8. También, que la derivada de $g(t) = 9.8t$ es 9.8. Por el corolario 2,

$$v(t) = 9.8t + C$$

para alguna constante $C$. Como el cuerpo cae a partir del reposo, $v(0) = 0$. Por lo tanto,

$$9.8(0) + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función velocidad debe ser $v(t) = 9.8t$. ¿Qué puede decirse acerca de la función posición $s(t)$?

Sabemos que $s(t)$ es alguna función cuya derivada es $9.8t$. También, que la derivada de $f(t) = 4.9t^2$ es $9.8t$. Con base en el corolario 2,

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

para alguna constante $C$. Como $s(0) = 0$,

$$4.9(0)^2 + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función de posición es $s(t) = 4.9t^2$ hasta que el cuerpo golpea el suelo.

La capacidad para determinar funciones a partir de sus tasas de cambio es una herramienta muy poderosa del cálculo. Como veremos, ésta es fundamental en el desarrollo matemático del capítulo 5.

## Ejercicios 4.2

### Verificación del teorema del valor medio

Determine el valor o valores de $c$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

en la conclusión del teorema del valor medio para las funciones y los intervalos en los ejercicios 1 a 6.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$
2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$
4. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$
5. $f(x) = x^3 - x^2, \quad [-1, 2]$
6. $g(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \le x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$

En los ejercicios 7 a 12, ¿cuáles de las funciones satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado y cuáles no? Justifique sus respuestas.

7. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$
8. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$
9. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$
10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & -2 \le x \le -1 \\ 2x^2 - 3x - 3, & -1 < x \le 0 \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \le x \le 2 \\ 6x - x^2 - 7, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

13. La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es cero en $x = 0$ y $x = 1$, así como derivable en el intervalo $(0, 1)$, pero su derivada ahí nunca es cero. ¿Cómo es esto posible? ¿Acaso el teorema de Rolle no dice que la derivada tiene que ser cero en algún punto en $(0, 1)$? Justifique su respuesta.

14. ¿Para qué valores de $a$, $m$ y $b$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$?

## Raíces (ceros)

15. **a.** Grafique los ceros de cada polinomio en una línea, junto con los ceros de su primera derivada.
    - **i)** $y = x^2 - 4$
    - **ii)** $y = x^2 + 8x + 15$
    - **iii)** $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$
    - **iv)** $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

    **b.** Utilice el teorema de Rolle para probar que entre cada dos ceros de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ existe un cero de
    $$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

16. Suponga que $f''$ es continua en $[a, b]$ y que $f$ tiene tres ceros en el intervalo. Demuestre que $f''$ tiene al menos un cero en $(a, b)$. Generalice dicho resultado.

17. Demuestre que si $f'' > 0$ en todo un intervalo $[a, b]$, entonces $f'$ tiene al menos un cero en $[a, b]$. ¿Qué sucede si ahora $f'' < 0$ en todo $[a, b]$?

18. Demuestre que un polinomio cúbico puede tener a lo sumo tres ceros reales.

Demuestre que las funciones en los ejercicios 19 a 26 tienen exactamente un cero en el intervalo dado.

19. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

20. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

21. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1 + t} - 4, \quad (0, \infty)$

22. $g(t) = \dfrac{1}{1 - t} + \sqrt{1 + t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

23. $r(\theta) = \theta + \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

24. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

25. $r(\theta) = \sec\theta - \dfrac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

26. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

## Determinación de funciones a partir de sus derivadas

27. Suponga que $f(-1) = 3$ y que $f'(x) = 0$ para toda $x$. ¿Debe ser $f(x) = 3$ para toda $x$? Justifique su respuesta.

28. Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para toda $x$. ¿Debe ser $f(x) = 2x + 5$ para toda $x$? Justifique su respuesta.

29. Suponga que $f'(x) = 2x$ para toda $x$. Determine $f(2)$ si
    **a.** $f(0) = 0$ **b.** $f(1) = 0$ **c.** $f(-2) = 3$.

30. ¿Qué puede decir acerca de las funciones cuya derivada sea constante? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 31 a 36, determine todas las funciones posibles con la derivada indicada.

31. **a.** $y' = x$ **b.** $y' = x^2$ **c.** $y' = x^3$

32. **a.** $y' = 2x$ **b.** $y' = 2x - 1$ **c.** $y' = 3x^2 + 2x - 1$

33. **a.** $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ **b.** $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $y' = 5 + \dfrac{1}{x^2}$

34. **a.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **b.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **c.** $y' = 4x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

35. **a.** $y' = \operatorname{sen} 2t$ **b.** $y' = \cos\dfrac{t}{2}$ **c.** $y' = \operatorname{sen} 2t + \cos\dfrac{t}{2}$

36. **a.** $y' = \sec^2\theta$ **b.** $y' = \sqrt{\theta}$ **c.** $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

En los ejercicios 37 a 40, determine la función con la derivada indicada y cuya gráfica pase por el punto $P$.

37. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

38. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

39. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

40. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

## Determinación de la posición a partir de la velocidad y la aceleración

Los ejercicios 41 a 44 indican la velocidad $v = ds/dt$ y la posición inicial de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una línea coordenada. Determine la posición del cuerpo en el instante $t$.

41. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

42. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

43. $v = \operatorname{sen} \pi t, \quad s(0) = 0$

44. $v = \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

Los ejercicios 45 a 48 indican la aceleración $a = d^2s/dt^2$, la velocidad y la posición iniciales de un cuerpo que se desplaza en una línea coordenada. Determine la posición del cuerpo en el instante $t$.

45. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

46. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

47. $a = -4 \operatorname{sen} 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

48. $a = \dfrac{9}{\pi^2}\cos\dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

## Aplicaciones

49. **Cambio de temperatura** Un termómetro de mercurio tardó 14 segundos en subir de $-19\,°C$ a $100\,°C$ cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Demuestre que en algún momento el mercurio sube a una tasa de $8.5\,°C/seg$.

**50.** Un camionero recibió una multa en la caseta de cobro de una carretera, según la cual en 2 horas había recorrido 159 millas en la autopista con un límite de velocidad de 65 mph. El camionero fue multado por exceso de velocidad. ¿Por qué?

**51.** Los relatos clásicos nos dicen que un trirreme con 170 remos (barco de guerra de la antigua Grecia o la antigua Roma) una vez cubrió 184 millas náuticas en 24 horas. Explique por qué en algún momento de esta hazaña la rapidez del trirreme excedió los 7.5 nudos (millas náuticas por hora).

**52.** Un maratonista corrió en 2.2 horas la maratón de la ciudad de Nueva York, cuya ruta mide 26.2 millas. Demuestre que el maratonista corrió exactamente a 11 mph por lo menos dos veces durante el recorrido, suponiendo que las velocidades inicial y final fueron cero.

**53.** Pruebe que en algún instante durante un viaje de 2 horas en automóvil la lectura del velocímetro será igual a la rapidez promedio del viaje.

**54. Caída libre en la Luna** La aceleración de la gravedad en la Luna es de $1.6\ \text{m}/\text{seg}^2$. Si se lanza una roca al interior de una grieta, ¿qué tan rápido cae justo antes de golpear el fondo 30 segundos después?

## Teoría y ejemplos

**55. La media geométrica de *a* y *b*** La *media geométrica* de dos números positivos $a$ y $b$ es el número $\sqrt{ab}$. Demuestre que el valor $c$ en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = 1/x$ en un intervalo de números positivos $[a, b]$ es $c = \sqrt{ab}$.

**56. La media aritmética de *a* y *b*** La *media aritmética* de dos números $a$ y $b$ es el número $(a + b)/2$. Pruebe que el valor de $c$ en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = x^2$ en cualquier intervalo $[a, b]$ es $c = (a + b)/2$.

T **57.** Grafique la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 2) - \operatorname{sen}^2(x + 1).$$

¿Qué hace la gráfica? ¿Por qué se comporta así la función? Justifique sus respuestas.

**58. El teorema de Rolle**

**a.** Construya una función polinomial $f(x)$ que tenga ceros en $x = -2, -1, 0, 1$ y $2$.

**b.** Trace en el mismo sistema de coordenadas $f$ y su derivada $f'$. ¿En qué se relaciona lo que ve con el teorema de Rolle?

**c.** ¿$g(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada $g'$ ilustran el mismo fenómeno que $f$ y $f'$?

**59. Solución única** Suponga que $f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. También suponga que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y que $f' \neq 0$ entre $a$ y $b$. Demuestre que $f(x) = 0$ exactamente una vez entre $a$ y $b$.

**60. Tangente paralelas** Suponga que $f$ y $g$ son derivables en $[a, b]$ y que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestre que existe por lo menos un punto entre $a$ y $b$ donde las tangentes a las gráficas de $f$ y $g$ son paralelas o son la misma recta. Ilustre con un bosquejo.

**61.** Suponga que $f'(x) \leq 1$ para $1 \leq x \leq 4$. Demuestre que $f(4) - f(1) \leq 3$.

**62.** Suponga que $0 < f'(x) < 1/2$ para todos los valores de $x$. Demuestre que $f(-1) < f(1) < 2 + f(-1)$.

**63.** Demuestre que $|\cos x - 1| \leq |x|$ para todo valor de $x$. (*Sugerencia:* Considere $f(t) = \cos t$ en $[0, x]$).

**64.** Demuestre que para cualesquiera números $a$ y $b$, se cumple la desigualdad del seno, $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$.

**65.** Si las gráficas de dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ empiezan en el mismo punto del plano y las funciones tienen la misma tasa de cambio en todo punto, ¿las gráficas tienen que ser idénticas? Justifique su respuesta.

**66.** Si $|f(w) - f(x)| \leq |w - x|$ para todos los valores de $w$ y de $x$, y si $f$ es una función derivable, demuestre que $-1 \leq f'(x) \leq 1$ para todos los valores de $x$.

**67.** Suponga que $f$ es derivable en $a \leq x \leq b$ y que $f(b) < f(a)$. Demuestre que $f'$ es negativa en algún punto entre $a$ y $b$.

**68.** Sea $f$ una función definida en un intervalo $[a, b]$. ¿Qué condiciones debe imponer a $f$ para garantizar que

$$\text{mín}\, f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \text{máx}\, f',$$

donde mín $f'$ y máx $f'$ se refieren a los valores mínimo y máximo de $f'$ en $[a, b]$? Justifique sus respuestas.

T **69.** Utilice las desigualdades del ejercicio 68 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 1$.

T **70.** Utilice las desigualdades del ejercicio 68 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 2$.

**71.** Sea $f$ diferenciable en todo valor de $x$ y suponga que $f(1) = 1$, que $f' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y que $f' > 0$ en $(1, \infty)$.

**a.** Demuestre que $f(x) - 1$ para toda $x$.

**b.** ¿Debe cumplirse que $f'(1) = 0$? Explique.

**72.** Sea $f(x) = px^2 + qx + r$ una función cuadrática definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que existe exactamente un punto $c$ en $(a, b)$ en el cual $f$ satisface la conclusión del teorema del valor medio.

# 4.3 Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada

Para graficar una función derivable es útil conocer en dónde es creciente (asciende de izquierda a derecha) y en dónde decrece (desciende de izquierda a derecha) en un intervalo. Esta sección ofrece un criterio (o una prueba) para determinar en dónde crece la función y en dónde decrece. También mostramos cómo verificar que los puntos críticos de una función resultan ser valores extremos locales.