FICH UNL • FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

Matemática Básica 2025

Guía de trabajo y ejercicios seleccionados

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* (Octava edición). Cengage Learning.

Funciones

Sección 1.1.

De esta parte es importante que logres comprender:

- La definición de función y los conceptos relacionados (dominio, rango, variables dependientes e independientes, gráfica, etc.).
- Funciones definidas por partes. La función valor absoluto.
- Simetría: funciones pares e impares.
- Funciones crecientes y decrecientes.

Algunas observaciones:

- El Ejemplo 3 puede parecerte sin sentido ahora, pero será fundamental para comprender derivadas.
- Varios conceptos sobre funciones ya fueron trabajados en el curso de ingreso, por lo que no nos detendremos demasiado aquí. Por ejemplo, las posibles representaciones de una función (Ejemplos 4 y 5), o la interpretación de sus gráficas.
- En página 17 falta un signo menos en el ejemplo de función par. **Debe decir:**

$$f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x).$$

Ejercicios seleccionados. 2, 3, 4, 7, 8, 9, 25, 27, 29, 31 a 36, 38, 40, 41, 45, 47, 69, 71 a 78.

Sección 1.2.

De esta sección no centramos nuestro interés en problemas de modelado, sino en el nombre y aspecto de las gráficas de ciertas funciones esenciales o clásicas, como:

- Lineales, cuadrática, cúbicas, como casos particulares de las polinomiales.
- Funciones potencia: x^n, $x^{1/n}$ (n entero positivo), x^{-1}.
- Funciones racionales.
- Funciones algebraicas.
- Funciones trigonométricas.
- Funciones exponenciales y logarítmicas.

Algunas observaciones:

- En esta asignatura **no** se pedirá que construyas la gráfica de funciones como las que aparecen en la Figuras 8 o 17 de la Sección 1.2. Aprenderás a hacerlo en otras asignaturas posteriores de la carrera.

  Sin embargo, **sí** se te pedirá que sepas graficar funciones "básicas" como lineales, cuadráticas, la de $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \sqrt{x}$, la de valor absoluto, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, y las que resultan de aplicar a las gráficas anteriores desplazamientos (verticales y horizontales), alargamientos y reflexiones (verticales y horizontales), cuestiones desarrolladas en la Sección 1.3.

  En las dos últimas páginas del apunte podés encontrar un **resumen de las gráficas** de estas y otras funciones que aparecerán en asignaturas posteriores.

- Para construir la gráfica de una función lineal puedes proceder de dos modos: construir una tabla de valores con solo dos pares (porque dos puntos determinan una única recta) o usar el concepto de pendiente y ordenada al origen.

- Todo lo referido a las funciones trigonométricas lo profundizaremos al estudiar Trigonometría dentro de algunas semanas.

- No estudiar desde el título "Funciones trigonométricas inversas" (pág. 65 del texto).

- Las funciones exponenciales y logarítmicas se estudiarán en profundidad en las Secciones 1.4 y 1.5.

Ejercicios seleccionados. 1, 3, 7, 11.

Sección 1.3.

En esta sección se estudia cómo construir nuevas funciones transformando las ya conocidas. Además se presenta cómo se opera entre funciones. Los conceptos que deben trabajarse son:

- ☑ Traslaciones horizontales y verticales.
- ☑ Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal.
- ☑ Combinación de funciones: suma, resta, multiplicación, división y composición. Los dominios en cada caso.

Ejercicios seleccionados. 1, 2, 3, 5, 11, 14, 15, 17, 23, 31, 32, 33, 35, 37, 39, 43, 52, 53.

Sección 1.4.

De esta sección deberás comprender lo siguiente sobre la función exponencial:

- ☑ Definición, dominio e imagen (o rango).
- ☑ Aspecto de la gráfica según la base.
- ☑ Repaso de las leyes de los exponentes.
- ☑ El número e y la función exponencial natural $f(x) = e^x$.

Algunas observaciones:

- En página 37, en el cuarto inciso del cuadro sobra un signo menos. **Debe decir:** $y = f(x/c)$ para alargamiento horizontal la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

- No trabajaremos ahora las aplicaciones de las funciones exponenciales a problemas reales.

Ejercicios seleccionados. 5, 11 a 16, 17, 21, 22, 23.

Sección 1.5.

En esta sección, además de la función logarítmica, se presenta un concepto fundamental que es el de función inversa. En importante que logres comprender:

- Función inyectiva: definición, prueba analítica y prueba de la recta horizontal.
- Función inversa: definición, dominio, rango, cómo sa calcula, gráfica.
- Función logarítmica: definición como inversa de la exponencial, dominio e imagen (o rango). Aspecto de la gráfica según la base.
- Leyes de los logaritmos. Logaritmo natural.

Algunas observaciones:

- No trabajaremos ahora las aplicaciones de las funciones logarítmicas a problemas reales ni las funciones trigonométricas inversas.

Ejercicios seleccionados.

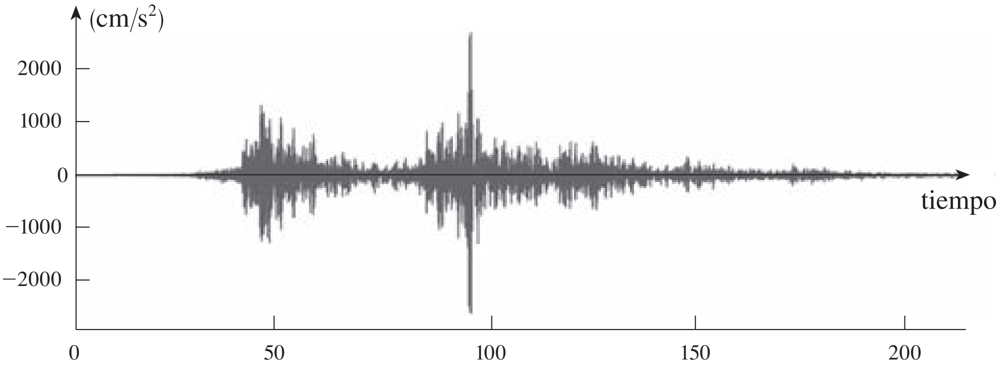
Funciones inyectivas e inversas: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 21, 22, 23, 25, 29.

Logaritmos y función logarítmica: 33, 35 a 38, 41, 47, 51, 53, 57.

En las hojas finales del apunte, además del resumen de gráficas de funciones clásicas, podés encontrar **ejercicios de repaso** de todo lo anterior, incluyendo de verificación de conceptos y verdaderos o falsos. También vas a encontrar las respuestas a los ejercicios impares.

1 Funciones y modelos

© Pictura Collectus/Alamy



© Seismological Society of America

A menudo una gráfica es la mejor manera de representar una función porque transmite mucha información en un vistazo. Se muestra la gráfica de la aceleración vertical del suelo, creada por el terremoto de 2011 cerca de Tohoku en Japón. El terremoto tuvo una magnitud de 9.0 en la escala de Ritcher y fue tan fuerte que movió el norte de Japón 2.4 metros más cerca de América del Norte.

LOS OBJETOS FUNDAMENTALES CON LOS que trata el cálculo son las funciones. Este capítulo prepara el camino para el cálculo discutiendo las ideas básicas sobre las gráficas de funciones y la manera de transformarlas y combinarlas. Se destaca que una función puede representarse de diferentes maneras: mediante una ecuación, una tabla, una gráfica o con palabras. Se verán los principales tipos de funciones que se presentan en el cálculo y se describirán cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real.

1.1 Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende de su radio r. La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que se dice que A es una *función* de r.

B. La población humana del mundo P depende del tiempo t. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo t, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P, por lo que se dice que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

C. El costo C de envío de un paquete por correo depende de su peso w. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. La figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

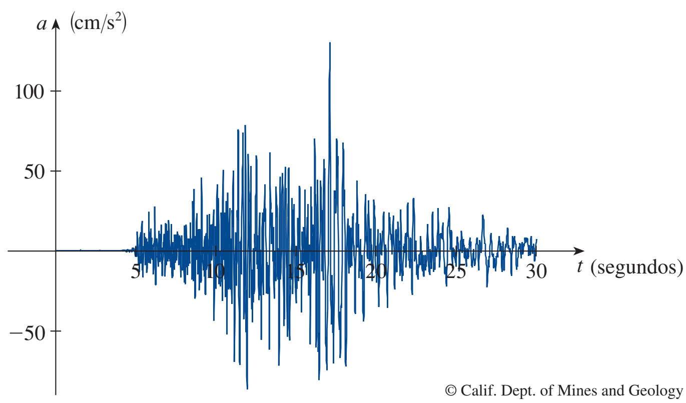


FIGURA 1
Aceleración vertical de suelo durante el terremoto de Northridge

Cada uno de estos ejemplos describe una regla de acuerdo con la cual, a un número dado (r, t, w o t), se le asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso se dice que el segundo número es una función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Usualmente se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "*f de x*". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se conoce como **variable dependiente**. En el ejemplo A**,** r es la variable independiente, y A es la variable dependiente.

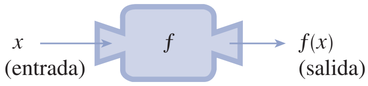


FIGURA 2
Diagrama de una función f como una máquina

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, esta la acepta como una entrada apropiada y produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, puede pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones preprogramadas en una calculadora son ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla raíz cuadrada en la calculadora calcula esa función. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduzca la entrada x; si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, entonces se presentará una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, la tecla $\sqrt{x}$ en la calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

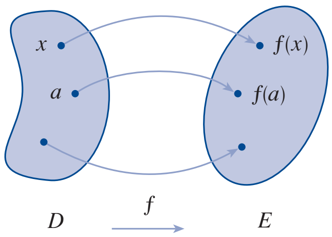


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f presenta una imagen útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica es $y = f(x)$, se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

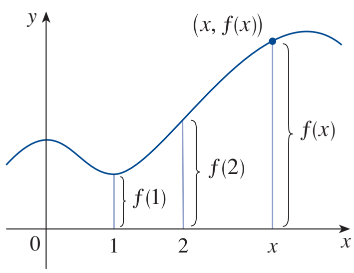


FIGURA 4

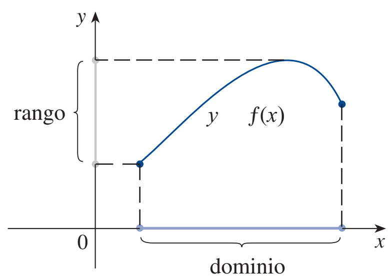


FIGURA 5

EJEMPLO 1 La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.
(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
(b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f?

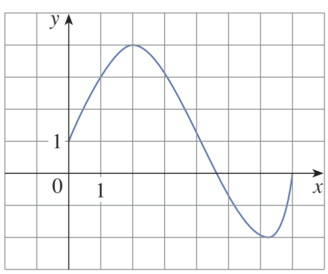


FIGURA 6

SOLUCIÓN
(a) De la figura 6 se ve que el punto $(1, 3)$ está en la gráfica de f, por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está 3 unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x, así que se estima que $f(5) \approx -0.7$.

(b) Vea que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, por lo que el rango de f es

La notación por intervalos está dada en el apéndice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$ ■

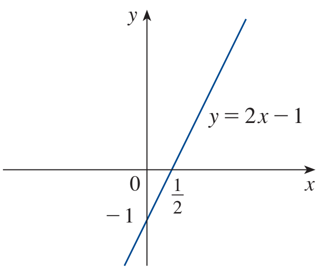


FIGURA 7

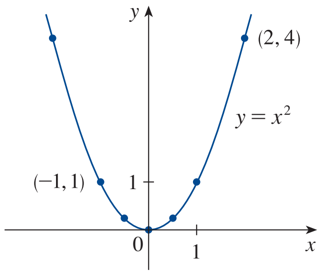


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes:
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN
(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$, y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en -1. (Recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Véase el apéndice B). Esto permite dibujar una parte de la gráfica de f en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, por lo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, que se denota por $\mathbb{R}$. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

(b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, se pueden colocar los puntos (2, 4) y $(-1, 1)$ junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola (véase el apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El rango de g consiste de todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x, y cualquier número positivo y es un cuadrado. Por lo que el rango de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto se puede ver en la figura 8. ■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a + h)$ reemplazando x por $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Después se sustituye en la expresión dada y se simplifica:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$ ■

La expresión

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se llama **cociente de diferencias** y se presenta en cálculo con frecuencia. Como se verá en el capítulo 2, representa la razón de cambio de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles maneras de representar una función:

- verbalmente (con una descripción en palabras)
- numéricamente (con una tabla de valores)
- visualmente (con una gráfica)
- algebraicamente (con una fórmula explícita)

Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, se empezó con formas algebraicas y luego se obtuvieron gráficas.) Pero ciertas funciones se describen más naturalmente por una forma que por otra. Con esto en mente, se reexaminarán las cuatro situaciones que se consideraron al inicio de esta sección.

A. La representación quizá más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$.

t (años desde 1900)	Población (millones)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

B. Se da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. Ahora medirá t, así que $t = 0$ corresponde al año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, se obtiene la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) en la figura 9. También es una representación útil porque la gráfica permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se *aproxime* a $P(t)$. De hecho, utilizando los métodos que se explican en la sección 1.2, se obtiene la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

La figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de la función dada. Sin embargo, se verá que las ideas del cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.

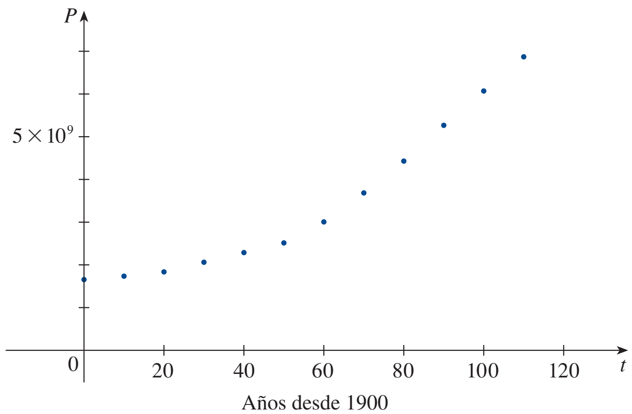


FIGURA 9

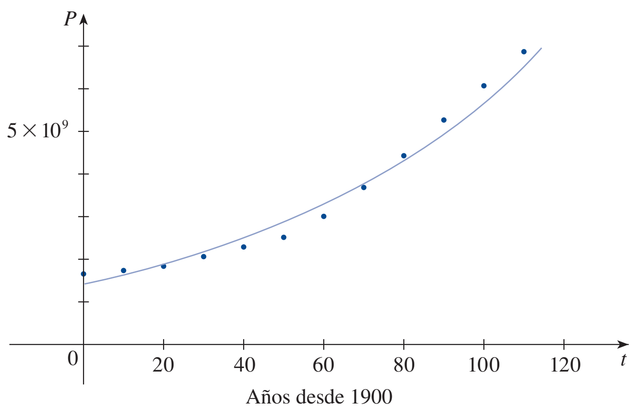


FIGURA 10

La función P es típica de aquellas que surgen cuando se intenta aplicar el cálculo en el mundo real. Comienza con una descripción verbal de una función. Quizá sea capaz de elaborar una tabla de valores de la función, tal vez de lecturas del instrumento en un experimento científico. A pesar de que no tenga un conocimiento completo de los valores de la función, se verá durante el desarrollo de este libro que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo con dicha función.

Una función definida por una tabla de valores se llama función *tabular*.

C. Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso w. La regla que el Servicio Postal de Hong Kong utiliza desde 2015 para el correo a Taiwán es la siguiente: el costo es \$2.90 para 20 g o menos, \$5.50 por 30 g o menos, y \$1.50 por cada 10 g más o parte de estos. La tabla de valores que se muestra al margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el ejemplo 10).

w (gramos)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leqslant 20$	2.90
$20 < w \leqslant 30$	5.50
$30 < w \leqslant 40$	7.00
$40 < w \leqslant 50$	8.50
⋮	⋮

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría construirse una tabla de valores, y que incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo, las amplitudes y los patrones, puede verse fácilmente en la gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se observan en los electrocardiogramas de pacientes que sufren del corazón y en polígrafos para la detección de mentiras).

En el ejemplo siguiente, se traza la gráfica de una función definida verbalmente.

EJEMPLO 4 Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje una gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo.

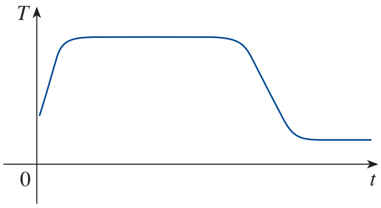


FIGURA 11

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha permanecido en las tuberías. Cuando empieza a salir el agua desde el tanque de agua caliente, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente en el tanque. Cuando el tanque se drena, T disminuye hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto permite hacer la gráfica de T en función de t en la figura 11. ■

El ejemplo siguiente inicia con una descripción verbal de una función en una situación física, y hay que obtener una fórmula algebraica explícita. La capacidad para hacer esto es una habilidad útil para resolver problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo o mínimo de cantidades.

EJEMPLO 5 Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

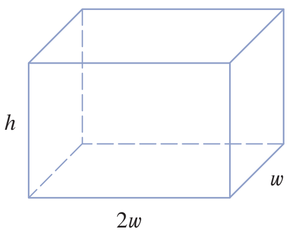


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibuje un diagrama como el de la figura 12 e introduzca la notación w y $2w$ para el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h para la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, por lo que el costo en dólares de los materiales para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh, y los otros dos tienen área $2wh$, por lo que el costo de los materiales para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C solo como una función de w, se necesita eliminar h y para hacerlo se utiliza el hecho de que el volumen es de 10 m^3. Por tanto,

$$w(2w)h = 10$$

esto da
$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Sustituyendo en la expresión para C, se tiene

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como una función de w. ■

SP Para establecer funciones aplicadas como en el ejemplo 5, puede ser útil revisar los principios de la resolución de problemas como se explica en la página 71, particularmente el *Paso 1: Comprenda el problema*.

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Convención para el dominio
Si una función está dada por una fórmula y el dominio no se expresa explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

(a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y no se permite la división entre 0, vea que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

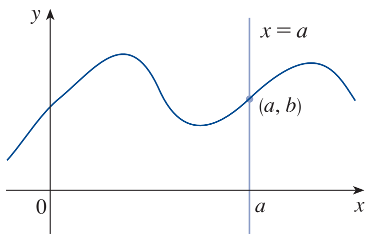
que también puede escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

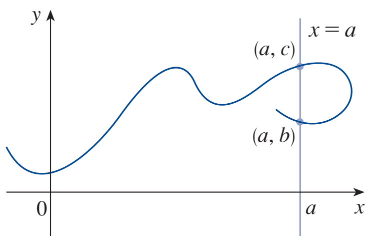
■

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.

La prueba de la recta vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y solo si no hay recta vertical que se interseque con la curva más de una vez.



(a) Esta curva representa una función.



(b) Esta curva no representa una función.

FIGURA 13

La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ se interseca con una curva solo una vez, en (a, b), entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14(a) no es la gráfica de una función de x porque, como puede ver, hay rectas verticales que se intersecan con la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ del ejemplo 6(a) y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$. Véanse las figuras 14(b) y (c).

Observe que si invierte los roles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ *define* a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.

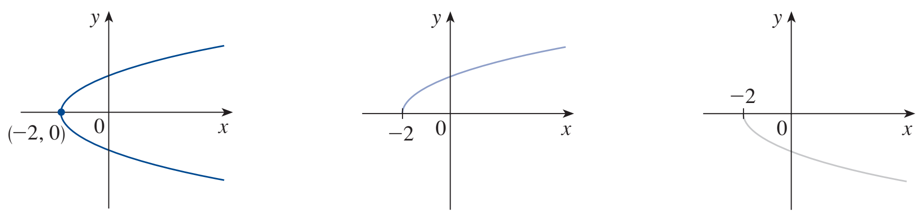


FIGURA 14 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x + 2}$ (c) $y = -\sqrt{x + 2}$

■ Funciones definidas por partes

Las funciones en los siguientes cuatro ejemplos se definen mediante diferentes fórmulas en distintas partes de sus dominios. Estas funciones se llaman **funciones definidas por partes**.

EJEMPLO 7 Una función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ y trace la gráfica de la función.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular la regla es la siguiente: primero vea el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant -1$, entonces el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otro lado, si $x > -1$, entonces el valor de $f(x)$ es x^2.

Puesto que $-2 \leqslant -1$, se tiene $f(-2) = 1 - (-2) = 3$.

Puesto que $-1 \leqslant -1$, se tiene $f(-1) = 1 - (-1) = 2$.

Puesto que $0 > -1$, se tiene $f(0) = 0^2 = 0$.

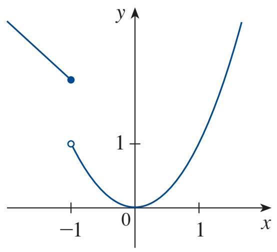


FIGURA 15

¿Cómo obtiene la gráfica de f? Observe que si $x \leqslant -1$, entonces $f(x) = 1 - x$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = -1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, que tiene pendiente -1 e intersección $y = 1$. Si $x > -1$, entonces $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la derecha de la recta $x = -1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola. Esto permite trazar la gráfica en la figura 15. El punto relleno indica que $(-1, 2)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que $(-1, 1)$ está excluido de la gráfica. ■

El ejemplo siguiente de una función definida por partes es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, se denota por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 en la recta de números reales. Las distancias son siempre positivas o cero, así se tiene que

Para un repaso más amplio de valores absolutos, véase el apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a & \text{si } a < 0 \end{aligned}}$$

(Recuerde que, si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.)

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN De la discusión anterior se sabe que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

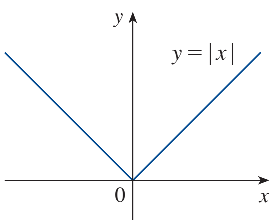


FIGURA 16

Utilizando el mismo método que en el ejemplo 7, vea que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y, y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase la figura 16). ■

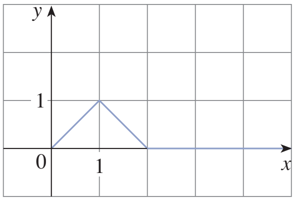


FIGURA 17

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Véase el apéndice B.

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 17.

SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ e intersección con el eje y en $b = 0$, por lo que su ecuación es $y = x$. Así, para la parte de la gráfica de f que une a (0, 0) con (1, 1), se tiene

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

La recta que une a (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, por lo que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

Así se tiene $$f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2$$

También se ve que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Reuniendo esta información, se tiene la fórmula siguiente en tres partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

■

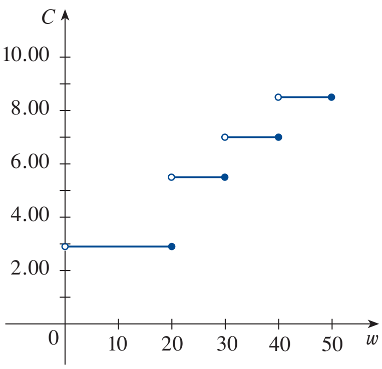


FIGURA 18

EJEMPLO 10 En el ejemplo C al principio de esta sección se consideró el costo $C(w)$ de enviar por correo paquetes con peso w. En efecto, esto define una función por partes porque, de la tabla de valores en la página 13, se tiene

$$C(w) = \begin{cases} 2.90 & \text{si } \ 0 < w \leqslant 20 \\ 5.50 & \text{si } 20 < w \leqslant 30 \\ 7.00 & \text{si } 30 < w \leqslant 40 \\ 8.50 & \text{si } 40 < w \leqslant 50 \\ \ \vdots & \end{cases}$$

La gráfica se muestra en la figura 18. Puede ver por qué funciones similares a esta se llaman **funciones escalón**: saltan de un valor al siguiente. Estas funciones se estudiarán en el capítulo 2. ■

■ Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

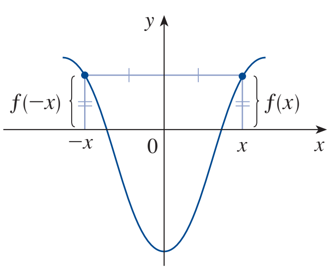


FIGURA 19
Una función par

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que, si ha dibujado la gráfica para $x \geqslant 0$, se obtiene toda la gráfica simplemente reflejándola con respecto al eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada x en su dominio, entonces f es una **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

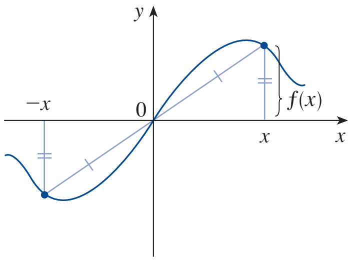


FIGURA 20
Una función impar

La gráfica de una función impar es simétrica en relación con el origen (véase la figura 20). Si ya tiene la gráfica de f para $x \geqslant 0$, se puede obtener toda la gráfica rotando 180º esta parte con respecto al origen.

EJEMPLO 11 Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función impar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Por lo que g es par.

(c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. ■

Las gráficas de las funciones del ejemplo 11 se muestran en la figura 21. Observe que la gráfica de h no es simétrica con respecto al eje y ni en relación con el origen.

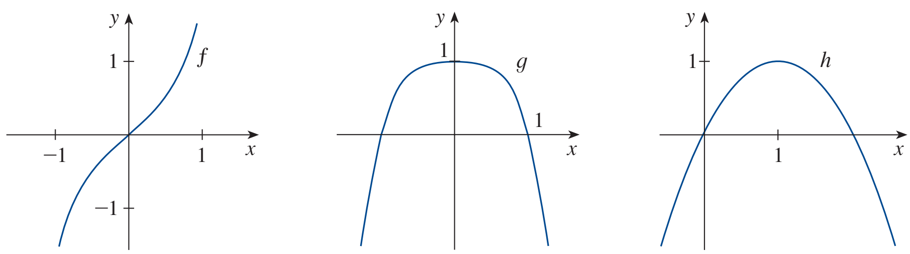


FIGURA 21 (a) (b) (c)

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube de A a B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente de $[b, c]$ y creciente nuevamente de $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Se utiliza esta propiedad para definir una función creciente.

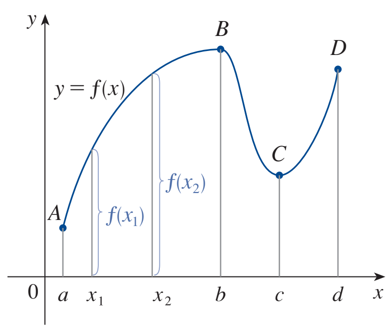


FIGURA 22

Una función f se llama **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

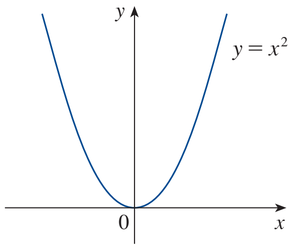


FIGURA 23

En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

Puede observarse en la figura 23 que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ y $g(u) = u + \sqrt{2 - u}$, ¿es verdad que $f = g$?

2. Si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x$$

¿es verdad que $f = g$?

3. La gráfica de una función f está dada.

(a) Indique el valor de $f(1)$.

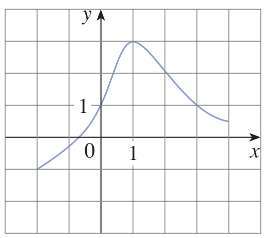
(b) Calcule el valor de $f(-1)$.

(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?

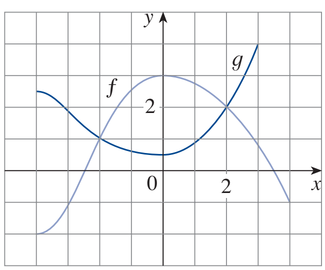
(d) Calcule el valor de x tal que $f(x) = 0$.

(e) Indique el dominio y el rango de f.

(f) ¿En qué intervalo f es creciente?



4. Las gráficas de f y g están dadas.



(a) Indique los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.

(b) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.

(d) ¿Sobre qué intervalo f es decreciente?

(e) Establezca el dominio y el rango de f.

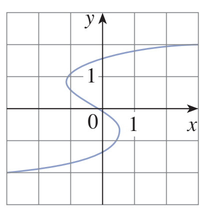
(f) Establezca el dominio y el rango de g.

5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología de California en el Hospital Universitario de la Universidad de California del Sur en Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la Universidad de California del Sur, durante el terremoto de Northridge.

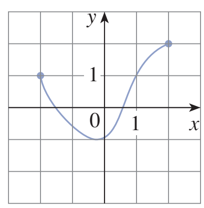
6. En esta sección se discuten ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica de cada función.

7–10 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, establezca el dominio y el rango de la función.

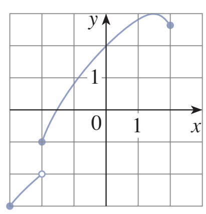
7.



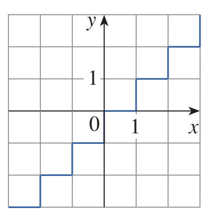
8.



9.



10.



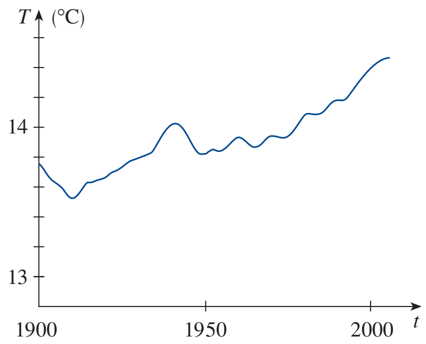
11. En la figura se muestra una gráfica de la temperatura media global T durante el siglo XX. Estime lo siguiente.

(a) La temperatura media mundial en 1950.

(b) El año en que la temperatura promedio fue de 14.2 °C.

(c) ¿En qué año la temperatura fue más baja? ¿Más alta?

(d) El rango de T.

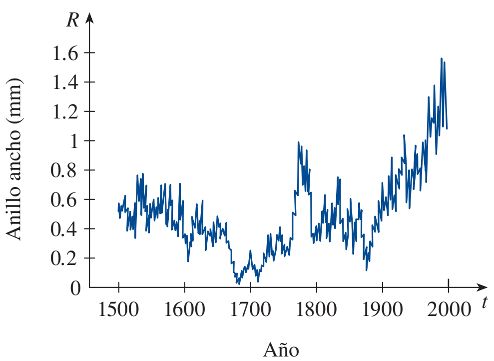


Fuente: adaptado de *Globe and Mail* [Toronto], 5 de diciembre de 2009. Impreso.

12. Los árboles crecen más rápido y forman anillos más amplios en los años cálidos y crecen más lentamente y forman anillos más angostos en los años más fríos. La figura muestra anillos anchos del pino siberiano de 1500 a 2000.

(a) ¿Cuál es el rango de la función de ancho de anillo?

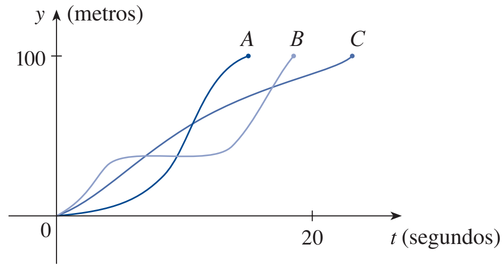
(b) ¿Qué dice la gráfica acerca de la temperatura de la tierra? ¿La gráfica refleja las erupciones volcánicas de la mitad del siglo XIX?



Fuente: adaptado de G. Jacoby *et al.*, "Mongolian Tree Rings and 20th-Century Warming," *Science* 273(1996): 771–773.

13. Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

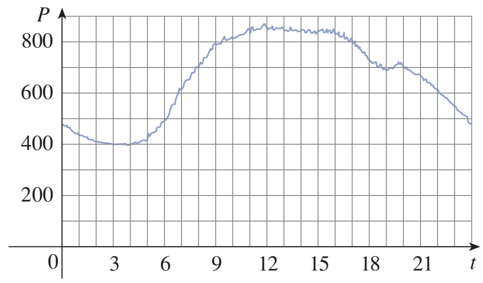
14. Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?



15. La gráfica muestra el consumo de energía para un día de septiembre en San Francisco. (P se mide en megawatts; t se registra en horas a partir de la medianoche).

(a) ¿Cuál fue el consumo de potencia a las 6:00? ¿A las 18:00?

(b) ¿Cuándo fue el consumo de energía más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?



Pacific Gas & Electric

16. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.

17. Trace una gráfica de la temperatura exterior en función del tiempo, durante un día típico de primavera.

18. Trace una gráfica aproximada del valor de mercado de un nuevo automóvil en función del tiempo, durante un período de 20 años. Suponga que el automóvil se mantiene en buen estado.

19. Trace la gráfica de la cantidad de una determinada marca de café vendido por una tienda, en función del precio del café.

20. Coloque una tarta congelada en un horno y caliéntela durante una hora. Luego sáquela y déjela enfriar antes de comerla. Describa cómo cambia la temperatura de la tarta conforme pasa el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura de la tarta en función del tiempo.

21. El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un período de cuatro semanas.

22. Un avión despega desde un aeropuerto y aterriza una hora más tarde en otro aeropuerto a 400 km de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la terminal, $x(t)$ es la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión, trace

(a) Una posible gráfica de $x(t)$.

(b) Una posible gráfica de $y(t)$.

(c) Una posible gráfica de la rapidez respecto al suelo.
(d) Una posible gráfica de la velocidad vertical.

23. Las siguientes lecturas de temperatura T (en ºC) se registraron cada tres horas desde la medianoche a las 15:00 en Montreal, el 13 de junio de 2004. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche

t	0	3	6	9	12	15
T	21.5	19.8	20.0	22.2	24.8	25.8

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica de T como una función de t.
(b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 11:00.

24. Los investigadores midieron la concentración de alcohol en la sangre (BAC, por su sigla en inglés) de ocho sujetos masculinos adultos después de consumir en forma rápida 30 mL de etanol (correspondiente a dos bebidas alcohólicas estándar). La tabla muestra los datos que se obtuvieron promediando la BAC (en mg/mL) de los ocho hombres.
(a) Utilice las lecturas para trazar la gráfica de la BAC en función de t.
(b) Utilice la gráfica para describir cómo el efecto del alcohol varía con el tiempo.

t (horas)	BAC	t (horas)	BAC
0	0	1.75	0.22
0.2	0.25	2.0	0.18
0.5	0.41	2.25	0.15
0.75	0.40	2.5	0.12
1.0	0.33	3.0	0.07
1.25	0.29	3.5	0.03
1.5	0.24	4.0	0.01

Fuente: adaptado de P. Wilkinson *et al*., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5(1977): 207–224.

25. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, determine $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a + 1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$, y $f(a + h)$.

26. Un globo esférico con radio de r centímetros tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de r centímetros a un radio $r + 1$ centímetros.

27–30 Evalúe el cociente de diferencias de cada una de las funciones siguientes. Simplifique su respuesta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\quad \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3$, $\quad \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

30. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 1}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

31–37 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

31. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

36. $f(u) = \dfrac{u + 1}{1 + \dfrac{1}{u + 1}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

38. Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

39–40 Encuentre el dominio y grafique cada una de las funciones siguientes:

39. $f(x) = 1.6x - 2.4$

40. $g(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t + 1}$

41–44 Evalúe $f(-3)$, $f(0)$, y $f(2)$ para la función definida por partes. Luego trace la gráfica de la función.

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

45–50 Trace la gráfica de la función.

45. $f(x) = x + |x|$

46. $f(x) = |x + 2|$

47. $g(t) = |1 - 3t|$

48. $h(t) = |t| + |t + 1|$

49. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

50. $g(x) = ||x| - 1|$

51–56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

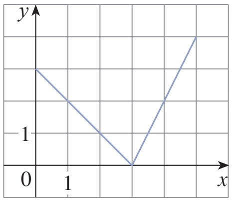
51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$.

52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$.

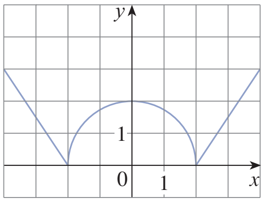
53. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

54. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

55.



56.



57–61 Encuentre una fórmula y el dominio para cada una de las funciones siguientes.

57. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

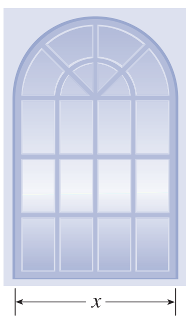
58. Un rectángulo tiene 16 m^2 de área. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

59. Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

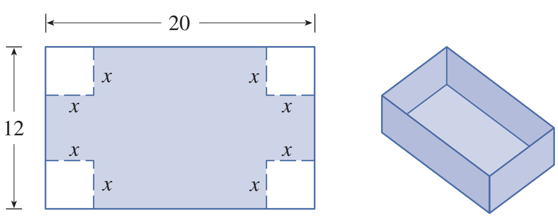
60. Una caja rectangular cerrada con volumen 6 m^3 tiene un largo de dos veces el ancho. Exprese la altura de la caja como una función del ancho.

61. Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

62. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 10 m, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.



63. Se va a construir una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 centímetros, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x.



64. Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C como una función del número x de minutos utilizados, y trace la gráfica de C como una función de x para $0 \leqslant x \leqslant 600$.

65. En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es 100 km/h y la velocidad mínima es de 50 km/h. La multa para los conductores que violan estos límites es \$10 por cada kilómetro por hora arriba de la velocidad máxima o debajo de la velocidad mínima. Exprese el monto de la multa F como una función de la velocidad x a la que se conduce y trace la gráfica de $F(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 180$.

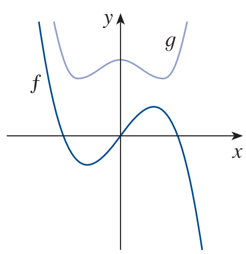
66. Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos de dólar por kWh para todo uso arriba de 1200 kWh. Exprese el costo mensual E como una función de la cantidad x de electricidad utilizada. Luego trace la gráfica de la función E para $0 \leqslant x \leqslant 2000$.

67. En un determinado país, el impuesto sobre la renta se calcula como sigue. No hay impuesto sobre la renta para ingresos de hasta \$10 000. Los ingresos de más de \$10 000 se gravan con una tasa de 10%, hasta un ingreso de \$20 000. Los ingresos superiores a \$20 000 se gravan en 15%.
(a) Trace la gráfica de la tasa de impuestos R en función del ingreso I.
(b) ¿Qué impuesto corresponde a un ingreso de \$14 000? ¿Y de \$26 000?
(c) Trace la gráfica del impuesto total T en función del ingreso I.

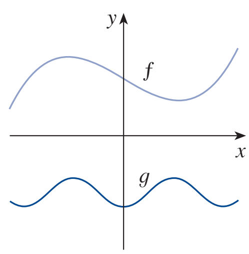
68. Las funciones del ejemplo 10 y el ejercicio 67 se llaman funciones escalón porque sus gráficas parecen escaleras. Sugiera dos ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida cotidiana.

69–70 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69.

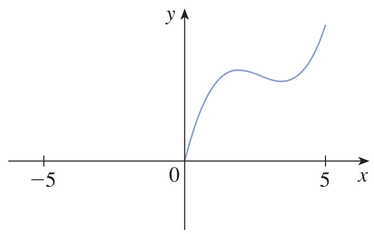


70.



71. (a) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?
(b) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

72. Una función f tiene dominio $[-5, 5]$ y se muestra una porción de su gráfica.
(a) Complete la gráfica de f si se sabe que f es par.
(b) Complete la gráfica de f si se conoce que f es impar.



73–78 Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

73. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

76. $f(x) = x\,|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

78. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

79. Si f y g son funciones pares, ¿es $f + g$ par? Si f y g son funciones impares, ¿es $f + g$ impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

80. Si f y g son dos funciones pares, ¿es el producto fg par? Si f y g son dos funciones impares, ¿es fg impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la rapidez de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona al nacer, o el costo de la reducción de las emisiones. El propósito del modelo es comprender el fenómeno y tal vez hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.

La figura 1 ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, la primera tarea es formular un modelo matemático mediante la identificación y etiquetado de las variables dependientes e independientes, y hacer suposiciones que simplifiquen lo suficiente el fenómeno para que sea matemáticamente manejable. Utilice su conocimiento de la situación física y sus habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ninguna ley física que lo guíe, recopile los datos (ya sea en una biblioteca, en internet o mediante la realización de sus propios experimentos) y organícelos en una tabla para identificar patrones. A partir de esa representación numérica de una función, puede obtener una representación gráfica. La gráfica podría sugerir incluso una fórmula algebraica apropiada en algunos casos.

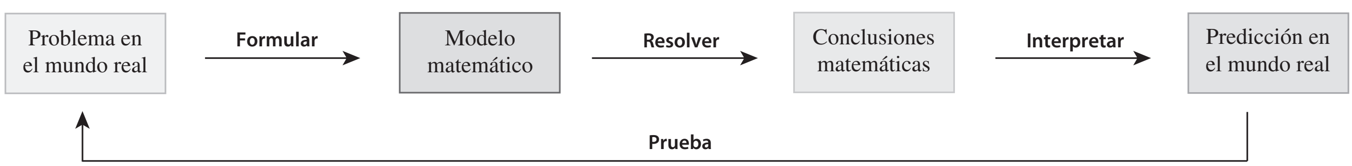


FIGURA 1
El proceso de modelado

La segunda etapa consiste en aplicar las matemáticas que conoce (como el cálculo que se desarrollará en este libro) al modelo matemático que se ha formulado para obtener conclusiones matemáticas. Luego, en la tercera etapa, se toman esas conclusiones matemáticas y se interpretan como información sobre el fenómeno original del mundo real con el propósito de dar explicaciones o hacer predicciones. El último paso es probar sus predicciones y compararlas contra nuevos datos reales. Si las predicciones no coinciden con una buena aproximación de la realidad, se necesita afinar el modelo o formular uno nuevo y empezar otra vez el ciclo.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física: es una *idealización*. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente para permitir hacer cálculos matemáticos, pero es razonablemente preciso para proporcionar valiosas conclusiones. Es importante darse cuenta de las limitaciones del modelo porque, finalmente, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Hay muchos tipos diferentes de funciones que pueden utilizarse para modelar relaciones observadas en el mundo real. En lo que sigue, se analizarán el comportamiento y la gráfica de estas funciones y se darán ejemplos de situaciones modeladas por ellas adecuadamente.

Modelos lineales

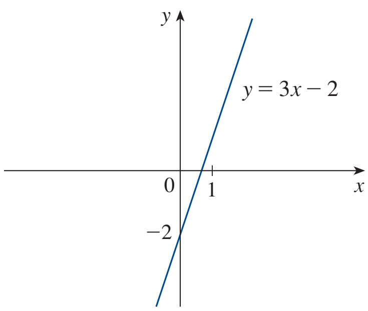
En el apéndice B se repasa la geometría analítica de las rectas.

Cuando se dice que y es una **función lineal** de x, quiere decir que la gráfica de la función es una recta, de manera que puede utilizar la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección de la recta con el eje y.

Una característica de las funciones lineales es que crecen a una razón constante. Por ejemplo, la figura 2 muestra una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla con algunos de sus valores. Observe que cuando x aumenta por 0.1, el valor de $f(x)$ aumenta por 0.3. Por lo que $f(x)$ aumenta tres veces más rápido que x. De este modo, la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, es decir 3, puede interpretarse como la razón de cambio de y con respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

EJEMPLO 1

(a) Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20 ºC, y la temperatura a 1 km de altura es de 10 ºC, exprese la temperatura T (en ºC) en función de la altura h (en kilómetros), suponiendo que un modelo lineal es adecuado.
(b) Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). ¿Qué representa la pendiente?
(c) ¿Cuál es la temperatura a 2.5 km de altura?

SOLUCIÓN

(a) Ya que se supone que T es una función lineal de h, se puede escribir

$$T = mh + b$$

Se tiene que $T = 20$ cuando $h = 0$, por lo que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la intersección con el eje y es $b = 20$.

También se tiene que $T = 10$ cuando $h = 1$, por lo que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

La pendiente de la recta es, por tanto, $m = 10 - 20 = -10$, y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

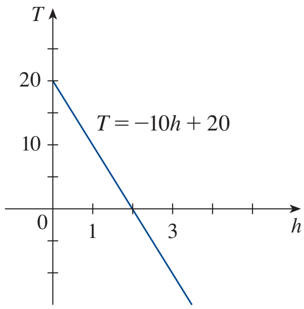


FIGURA 3

(b) En la figura 3 se muestra la gráfica. La pendiente es $m = -10$ ºC/km y representa la razón de cambio de la temperatura respecto a la altura.

(c) A una altura de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°C$$

Si no hay ley o principio físicos que ayude a formular un modelo, se construye un **modelo empírico** que se base exclusivamente en los datos recopilados. Se busca una curva que "ajuste" en los datos, en el sentido que sugiera la tendencia básica de los puntos que representan los datos.

EJEMPLO 2 La tabla 1 muestra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el Observatorio Mauna Loa, desde 1980 a 2012. Utilice los datos de la tabla 1 para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Se utilizan los datos de la tabla 1 para hacer la gráfica de dispersión en la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C, el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm).

Tabla 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1998	366.5
1982	341.2	2000	369.4
1984	344.4	2002	373.2
1986	347.2	2004	377.5
1988	351.5	2006	381.9
1990	354.2	2008	385.6
1992	356.3	2010	389.9
1994	358.6	2012	393.8
1996	362.4		

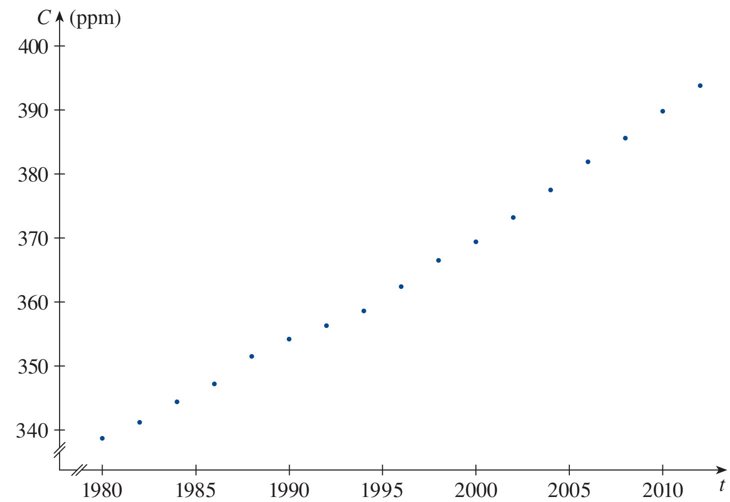


FIGURA 4 La gráfica de dispersión para el nivel promedio de CO_2

Observe que los puntos de datos parecen estar cercanos a una recta, por lo que es natural que se elija un modelo lineal en este caso. Pero hay muchas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de datos, así que, ¿cuál se debe usar? Una posibilidad es la recta que pasa por el primero y el último punto de datos. La pendiente de esta recta es

$$\frac{393.8 - 338.7}{2012 - 1980} = \frac{55.1}{32} = 1.721875 \approx 1.722$$

Su ecuación se escribe como

$$C - 338.7 = 1.722(t - 1980)$$

o

$$\boxed{1} \qquad C = 1.722t - 3070.86$$

La ecuación 1 da un posible modelo lineal para el nivel de dióxido de carbono y se representa gráficamente en la figura 5.

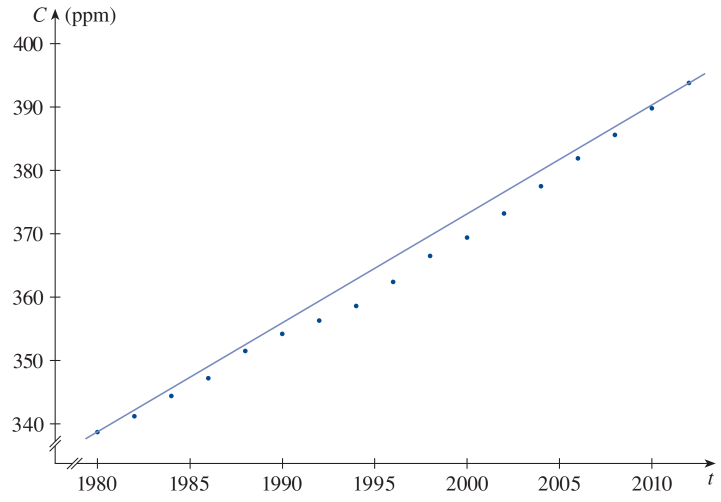


FIGURA 5
Modelo lineal a través del primero y el último punto de datos

Una computadora o una calculadora graficadora encuentra la recta de regresión por el método de **mínimos cuadrados**, que consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos de datos y la recta. Los detalles se explican en la sección 14.7.

Observe que este modelo da valores por encima de la mayoría de los niveles reales de CO_2. Un mejor modelo lineal se obtiene por un procedimiento estadístico llamado regresión lineal. Si utiliza una calculadora graficadora, introduzca los datos de la tabla 1 en el editor de datos y elija el comando de regresión lineal (en Maple se utiliza el comando fit[leastsquare] en el paquete de estadística; con Mathematica se utiliza el comando Fit), la máquina da la pendiente y la intersección con el eje *y* de la recta de regresión como

$$m = 1.71262 \qquad b = -3054.14$$

Por lo que el modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

$$\boxed{2} \qquad C = 1.71262t - 3054.14$$

En la figura 6 se grafica la recta de regresión, así como los puntos de datos. Comparado con la figura 5, se ve que da un mejor ajuste que el modelo lineal anterior.

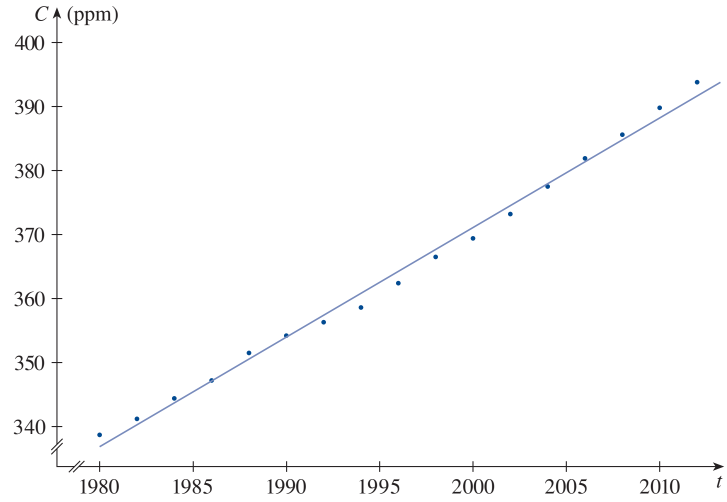


FIGURA 6
Recta de regresión

EJEMPLO 3 Utilice el modelo lineal dado por la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 para 1987 y predecir el nivel para el año 2020. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo superará el nivel de CO_2 las 420 partes por millón?

SOLUCIÓN Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, se estima que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.71262)(1987) - 3054.14 \approx 348.84$$

Este es un ejemplo de *interpolación* porque se ha estimado un valor entre los valores observados. (De hecho, el Observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de 348.93 ppm, por lo que la estimación es bastante precisa.)

Con $t = 2020$, se obtiene

$$C(2020) = (1.71262)(2020) - 3054.14 \approx 405.35$$

Por lo que se pronostica que el nivel promedio de CO_2 en el año 2020 será 405.4 ppm. Este es un ejemplo de *extrapolación* porque se predijo un valor *fuera* de la región de observaciones. En consecuencia, se está menos seguro acerca de la precisión de la predicción.

Utilizando la ecuación 2, se ve que el nivel de CO_2 excede las 420 ppm cuando

$$1.71262t - 3054.14 > 420$$

Resolviendo esta desigualdad, se obtiene

$$t > \frac{3474.14}{1.71262} \approx 2028.55$$

Por tanto, se predice que el nivel de CO_2 superará 420 ppm para el año 2029. Esta predicción es riesgosa porque se trata de un tiempo bastante alejado de las observaciones. De hecho, se puede ver en la figura 6 que la tendencia ha sido de un rápido aumento para los niveles de CO_2 en los últimos años, por lo que el nivel podría superar los 420 ppm antes de 2029. ■

Polinomios

Una función P es un **polinomio** si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los **coeficientes** de la función polinomial. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** del polinomio es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 6.

Una función polinomial de grado 1 es de la forma $P(x) = mx + b$, por lo que es una función lineal. Un polinomio de grado 2 es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$, como se verá en la siguiente sección. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$ (véase la figura 7).

Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

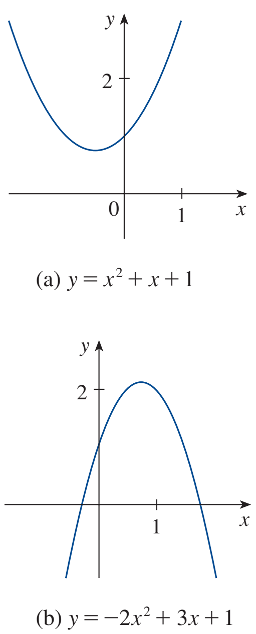


FIGURA 7
Las gráficas de funciones cuadráticas son parábolas

y se llama **función cúbica**. La figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en el inciso (a) y las gráficas de polinomios de grados 4 y 5 en los incisos (b) y (c). Se verá más adelante por qué las gráficas tienen esas formas.

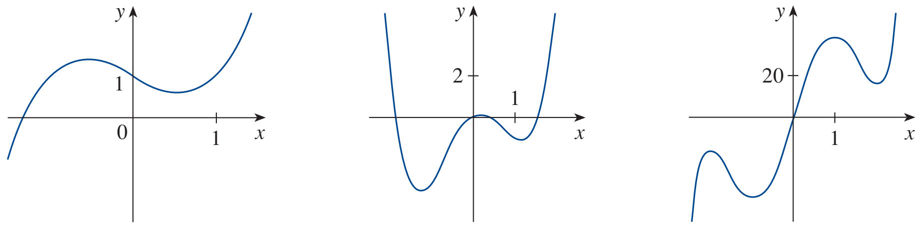


FIGURA 8

(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Los polinomios se utilizan por lo común para modelar diversas cantidades que se presentan en las ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, en la sección 3.7 se explica por qué los economistas usan a menudo un polinomio $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. En el ejemplo siguiente, se utiliza una función cuadrática para modelar la caída de una pelota.

Tabla 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN, a 450 m por encima del suelo. Las sucesivas alturas h de la pelota por encima del suelo están registradas a intervalos de 1 segundo, en la tabla 2. Encuentre un modelo para ajustar los datos y utilícelo para predecir el momento en que la pelota golpeará el suelo.

SOLUCIÓN En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión con la información disponible y se observa que un modelo ideal no es adecuado. Pero parece ser que los puntos de datos podrían acomodarse a una parábola, por lo que se intenta un modelo cuadrático. Utilizando una calculadora graficadora o computadora (que utiliza el método de los mínimos cuadrados), se obtiene el siguiente modelo cuadrático:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \tag{3}$$

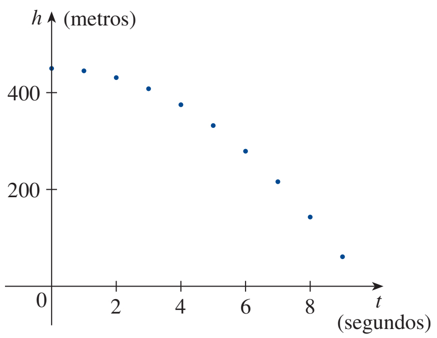


FIGURA 9
Gráfica de dispersión para la caída de una pelota

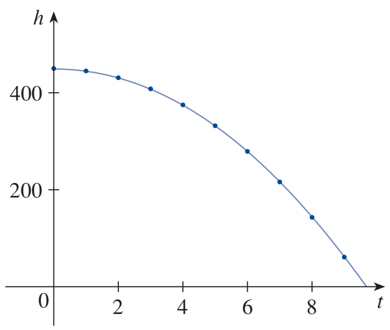


FIGURA 10
Modelo cuadrático para la caída de una pelota

En la figura 10 se dibuja la gráfica de la ecuación 3 junto con los puntos de datos y se ve que el modelo cuadrático da un muy buen ajuste.

La pelota golpea el suelo cuando $h = 0$, por lo que resuelve la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La ecuación cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo que se pronostica que la pelota golpeará el suelo después de aproximadamente 9.7 segundos. ■

Funciones potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función potencia**. Se consideran varios casos.

(i) $a = n$, donde n es un número entero positivo

Las gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestran en la figura 11. (Estas son funciones polinomiales con un solo término.) Ya se sabe la forma de la gráfica de $y = x$ (una recta que pasa por el origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el ejemplo 1.1.2(b)].

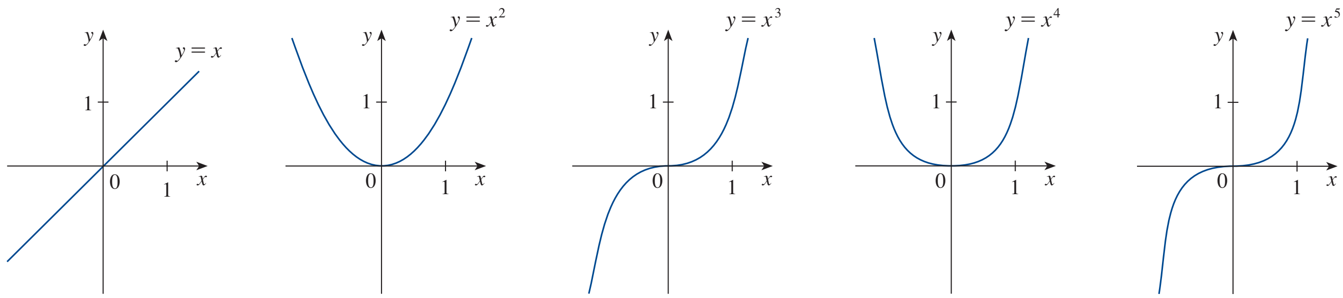


FIGURA 11 Gráficas de $f(x)= x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par, y su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Observe en la figura 12, sin embargo, que cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geqslant 1$. (Si x es pequeña, entonces x^2 es más pequeña, x^3 es aún más pequeña, x^4 es todavía más pequeña aún, y así sucesivamente.)

Una **familia de funciones** es un conjunto de funciones cuyas ecuaciones se relacionan. La figura 12 muestra dos familias de funciones potencia, una con potencias pares y otra con potencias impares.

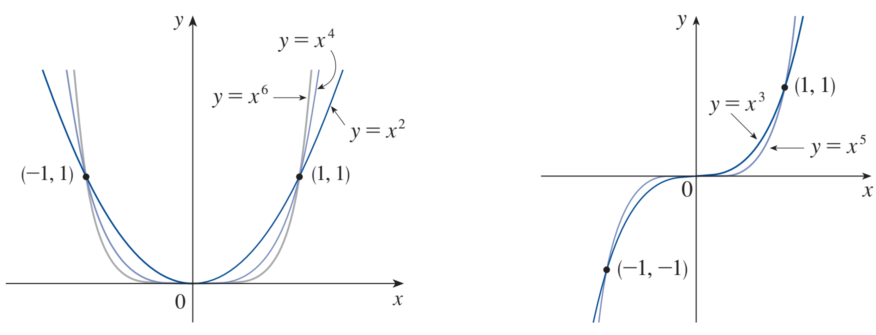
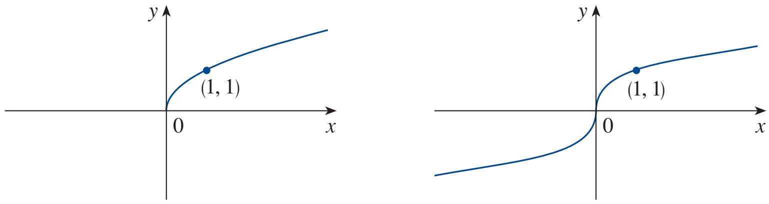


FIGURA 12

(ii) $a = 1/n$, donde n es un número entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola

$x = y^2$. [Véase la figura 13(a)]. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ se tiene la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la figura 13(b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

(iii) $\boldsymbol{a = -1}$

La gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ se muestra en la figura 14. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en física y química en relación con la ley de Boyle, que dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

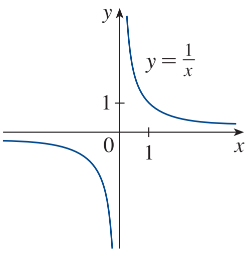


FIGURA 14
La función recíproca

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. Así, la gráfica de V en función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura 14.

Las funciones potencia también se utilizan para modelar relaciones especie-área (ejercicios 30-31), la iluminación como una función de la distancia a una fuente de luz (ejercicio 29) y el período de revolución de un planeta en función de su distancia al Sol (ejercicio 32).

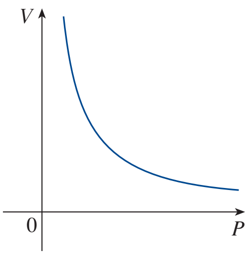


FIGURA 15
El volumen como una función de la presión a temperatura constante.

Funciones racionales

Una **función racional** f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x|x \neq 0\}$; esta es la función recíproca graficada en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. La gráfica se muestra en la figura 16.

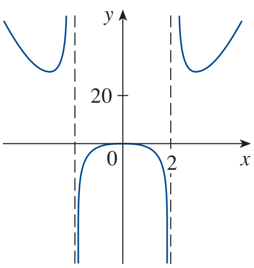


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

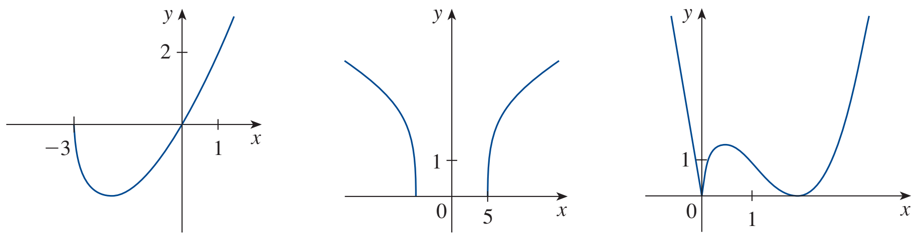
Funciones algebraicas

Una función f se llama **función algebraica** si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con los polinomios. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí hay dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando trace funciones algebraicas en el capítulo 4, verá que sus gráficas pueden tener una variedad de formas. La figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.

FIGURA 17



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Un ejemplo de una función algebraica se produce en la teoría de la relatividad. La masa de una partícula con velocidad v es

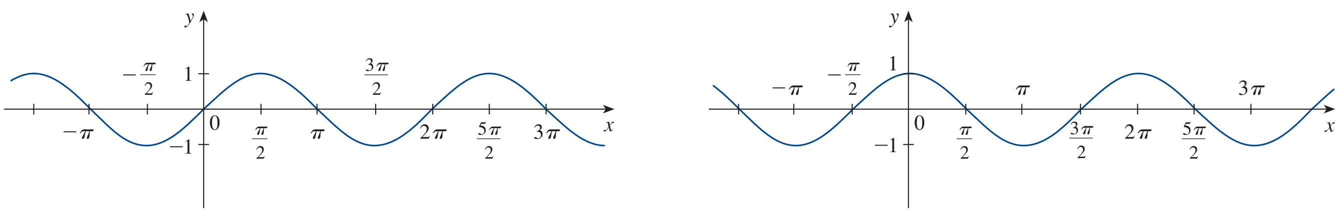
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5$ km/s es la velocidad de la luz en el vacío.

Funciones trigonométricas

Las páginas de referencia se encuentran en la parte final del libro.

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencia 2 y también en el apéndice D. En cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando se utiliza la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se sobreentiende que sen x significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura 18.



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, se tiene

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

o, en términos de valor absoluto,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

También, los ceros de la función seno se producen en los múltiplos enteros de p; es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \qquad n \text{ es un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas con período 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

El carácter periódico de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos, como las olas del mar, resortes en vibración y las ondas de sonido. Por ejemplo, en el ejemplo 1.3.4 vea que un modelo razonable para el número de horas de luz solar en Filadelfia t días de después del 1 de enero viene dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

EJEMPLO 5 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$?

SOLUCIÓN Esta función se define para todos los valores de x excepto los que hacen el denominador 0. Pero

$$1 - 2\cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

donde n es cualquier número entero (ya que la función coseno tiene período 2π). Por tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto los mencionados. ■

La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

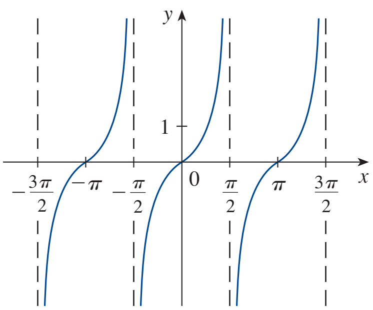
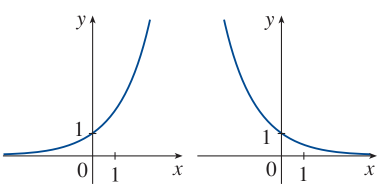


FIGURA 19
$y = \tan x$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Está definida siempre que $\cos x = 0$, que es, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene período π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son las recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas se muestran en el apéndice D.



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

FIGURA 20

■ Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** son funciones de la forma $f(x) = b^x$, donde la base b es una constante positiva. Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0.5)^x$ se muestran en la figura 20. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.

Las funciones exponenciales serán estudiadas en detalle en la sección 1.4, y se verá que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de una población (si $b > 1$) y la desintegración radiactiva (si $b < 1$).

■ Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_b x$, donde la base b es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales; se estudiarán en la sección 1.5.

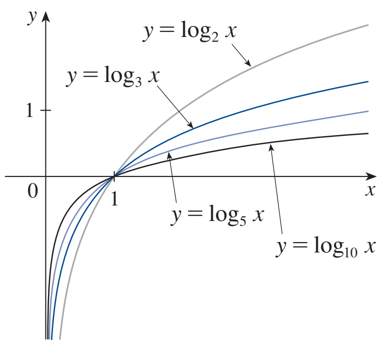


FIGURA 21

La figura 21 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el rango es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.

EJEMPLO 6 Clasifique las funciones siguientes como uno de los tipos de funciones que se han discutido.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

(a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

(b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Se podría considerar como una función polinomial de grado 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es una función polinomial de grado 4. ■

1.2 EJERCICIOS

1–2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a) $f(x) = \log_2 x$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ (d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

(e) $v(t) = 5^t$ (f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

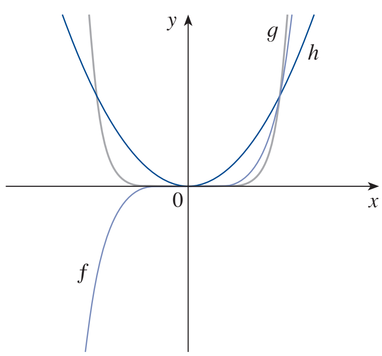
2. (a) $y = \pi^x$ (b) $y = x^\pi$

(c) $y = x^2(2 - x^3)$ (d) $y = \tan t - \cos t$

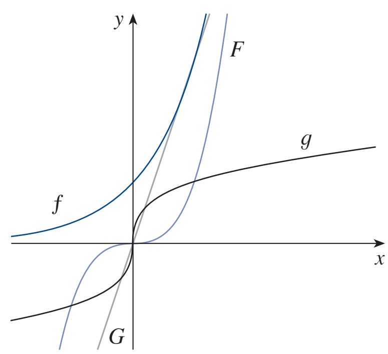
(e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ (f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

3–4 Relacione cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica. Explique el porqué de su elección. (No utilice computadora o calculadora graficadora.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5–6 Encuentre el dominio de la función.

5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ **6.** $g(x) = \dfrac{1}{1 - \tan x}$

7. (a) Determine una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y trace la gráfica de varios miembros de la familia.

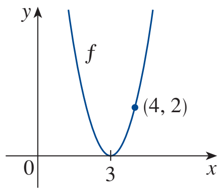
(b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y trace varios miembros de la familia.

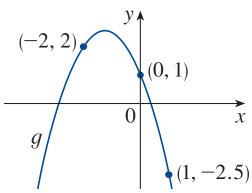
(c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

8. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Trace varios miembros de la familia.

9. ¿Qué todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$ tienen en común? Trace varios miembros de la familia.

10. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.





11. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

12. Estudios recientes indican que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra ha estado aumentando. Algunos científicos han modelado la temperatura con la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en ºC y t representa años desde 1900.
(a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?
(b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura promedio de la superficie global en 2100.

13. Si D (en mg) es la dosis de un medicamento recomendada para adultos, entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, el farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Suponga que la dosis para un adulto es de 200 mg.
(a) Encuentre la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?
(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

14. El administrador de un bazar de fin de semana sabe por experiencia que, si cobra x dólares por el alquiler de un espacio en el bazar, entonces el número y de espacios que puede alquilar está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.
(a) Trace la gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta por el espacio y el número de espacios alquilados no pueden ser cantidades negativas.)
(b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje y y la intersección con el eje x de la gráfica?

15. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Trace la gráfica de esta función.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

16. Kelly sale de Winnipeg a las 14:00 y conduce a rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera Trans-Canadá. Pasa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, a las 16:00.
(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

17. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 112 chirridos por minuto a 20 ºC y 180 chirridos por minuto a 29 ºC.
(a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T, en función del número N de chirridos por minuto.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
(c) Si los grillos producen 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

18. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta $2200 fabricar 100 sillas en un día y $4800 producir 300 sillas en un solo día.
(a) Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección en y de la gráfica y qué representa?

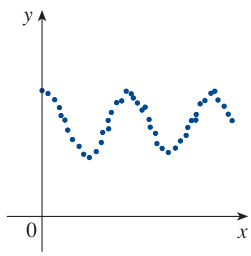
19. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 1.05 kg/cm^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 0.10 kg/cm^2 por cada metro de descenso.
(a) Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.
(b) ¿A qué profundidad la presión es de 7 kg/cm^2?

20. El costo mensual de conducir un auto depende del número de kilómetros recorridos. Lynn encontró que en mayo le costó $380 conducir 768 km y en junio le costó $460 conducir 1280 km.
(a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal da un modelo adecuado.
(b) Utilice el inciso (a) para predecir el costo de conducir 2400 km por mes.
(c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?
(d) ¿Qué representa la intersección en y?
(e) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

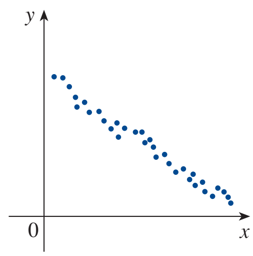
21–22 Para cada una de las gráficas de dispersión siguientes, ¿qué tipo de función elegiría como un modelo para los datos? Explique sus elecciones.

21.

(a)



(b)



28. La tabla muestra el porcentaje de la población de Argentina que ha vivido en las zonas rurales de 1955 al 2000. Encuentre un modelo para los datos y utilícelo para estimar el porcentaje rural en 1988 y 2002.

Año	Porcentaje rural	Año	Porcentaje rural
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

29. Muchas de las cantidades físicas están relacionadas mediante *leyes de los cuadrados inversos*, es decir, por las funciones potencia de la forma $f(x) = kx^{-2}$. En particular, la iluminación de un objeto por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Suponga que al anochecer está en una habitación con una lámpara y que está intentando leer un libro. La luz es demasiado tenue, por lo que mueve la lámpara a la mitad de la distancia. ¿Cuánto más ilumina la luz al libro?

30. Tiene sentido afirmar que cuanto mayor sea el área de una región, es mayor el número de especies que habitan en la región. Muchos ecólogos han modelado la relación de especies de la zona con una función potencia y, en particular, el número de especies S de murciélagos que habitan en cuevas en México ha estado relacionado con el área superficial A de las cuevas por la ecuación $S = 0.7A^{0.3}$.

(a) La cueva llamada *Misión imposible*, situada cerca de Puebla, México, tiene una superficie de $A = 60$ m^2. ¿Cuántas especies de murciélagos esperaría encontrar en esa cueva?

(b) Si descubre que cuatro especies de murciélagos viven en una cueva, estime el área de la cueva.

31. La tabla muestra el número N de especies de reptiles y anfibios que habitan en las islas del Caribe y el área A de la isla en millas cuadradas.

(a) Utilice una función potencia para modelar N como una función de A.

(b) La isla caribeña de Dominica tiene un área 291 mi^2. ¿Cuántas especies de reptiles y anfibios esperaría encontrar en Dominica?

Isla	A	N
Saba	4	5
Monserrat	40	9
Puerto Rico	3,459	40
Jamaica	4,411	39
Española	29,418	84
Cuba	44,218	76

32. La tabla muestra las distancias d (promedio) del Sol (tomando la unidad de medida como la distancia entre la Tierra y el Sol) y sus períodos T (tiempo de revolución en años).

(a) Ajuste un modelo potencia para los datos.

(b) La tercera ley de movimiento planetario de Kepler afirma que "el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". ¿El modelo del inciso (a) corrobora la tercera ley de Kepler?

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

1.3 Funciones nuevas a partir de funciones previas

Esta sección empieza con las funciones básicas discutidas en la sección 1.2 para obtener funciones nuevas por medio del desplazamiento, estiramiento y reflexión de las gráficas. También se muestra cómo combinar pares de funciones utilizando operaciones aritméticas estándar y composición.

Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, se pueden obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto dará la posibilidad de esbozar las gráficas de muchas funciones rápidamente a mano. También permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas.

Considere primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Por tanto, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

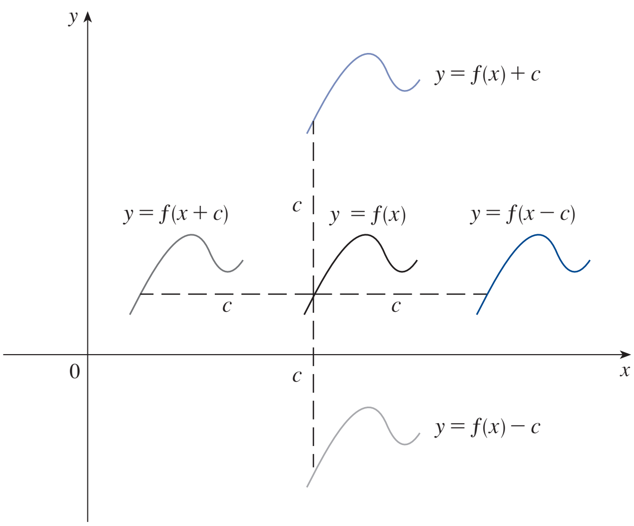


FIGURA 1 Traslación de la gráfica de f

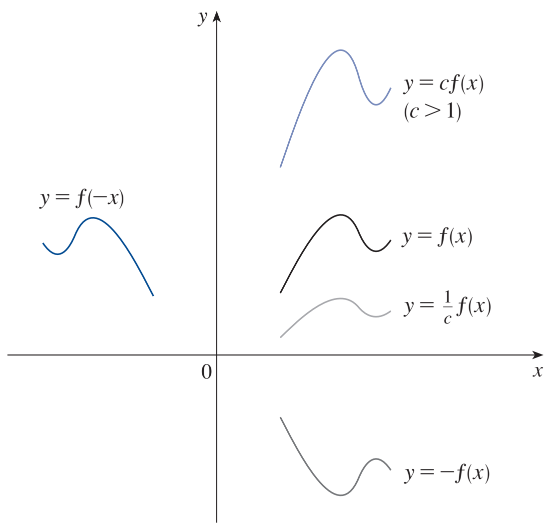


FIGURA 2 Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Ahora considere las transformaciones por **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y) se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véanse la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = (1/c)f(x)$, comprima verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = f(cx)$, comprima horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = -f(x/c)$, alargue horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje x

$y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje y

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2\cos x$ multiplique la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.

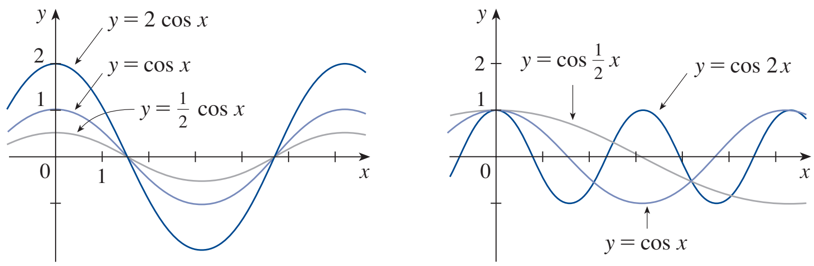


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para trazar la gráfica de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 1.2.13(a) se muestra en la figura 4(a). En otras partes de la figura se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ desplazándola 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x-2}$ por desplazamiento de 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ reflejando a través del eje x, $y = 2\sqrt{x}$ estirando verticalmente por un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ reflejando a través del eje y.

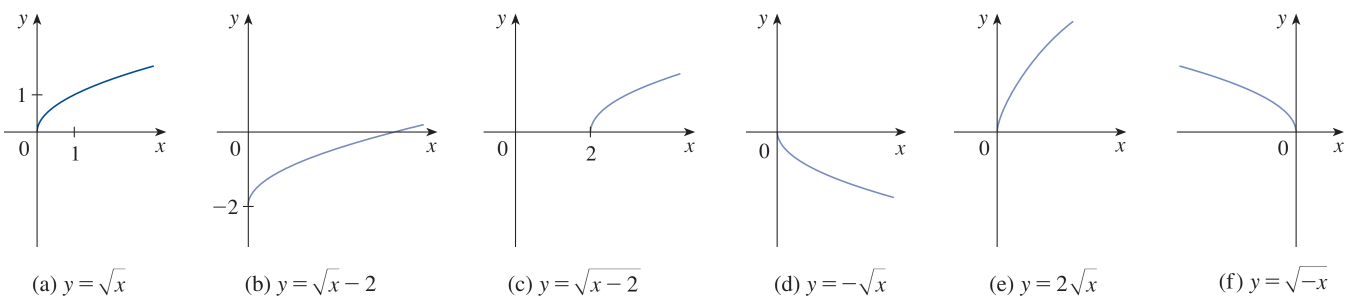


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado, se escribe la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto significa que se obtiene la gráfica deseada iniciando con la parábola $y = x^2$ y desplazándola 3 unidades a la izquierda y, luego 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).

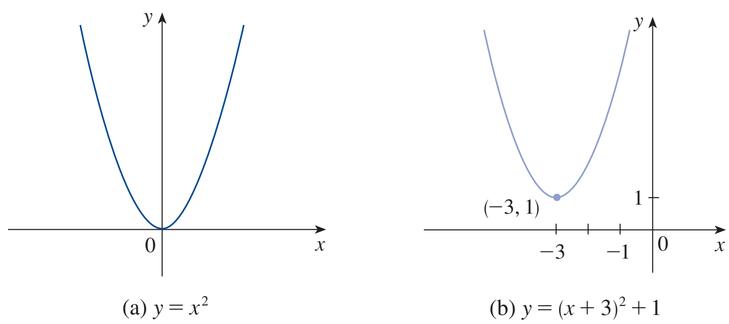


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = \text{sen}\, 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen}\, x$

SOLUCIÓN

(a) Se obtiene la gráfica de $y = \text{sen}\, 2x$ comprimiendo horizontalmente a $y = \text{sen}\, x$ por un factor de 2 (véanse las figuras 6 y 7). Por tanto, considerando que el período de $y = \text{sen}\, x$ es 2π, el período de $y = \text{sen}\, 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

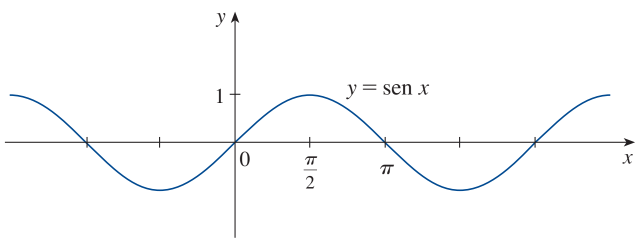


FIGURA 6

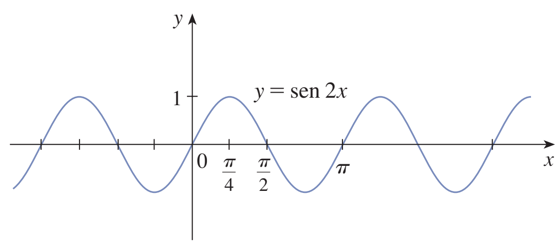


FIGURA 7

(b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \text{sen}\, x$, se empieza de nuevo con $y = \text{sen}\, x$. Se refleja a través del eje x para obtener la gráfica de $y = -\text{sen}\, x$, luego se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \text{sen}\, x$ (véase la figura 8).

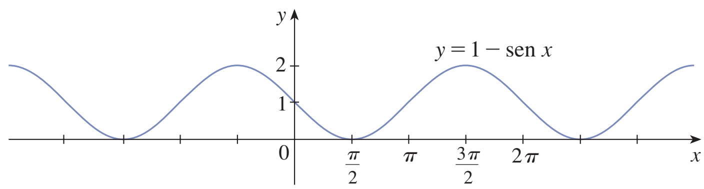


FIGURA 8

■

EJEMPLO 4 La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz natural como funciones de la época del año en varias latitudes. Dado que Ankara, Turquía, se encuentra a una latitud de aproximadamente 40 °N, determine una función que modele la longitud del día en Ankara.

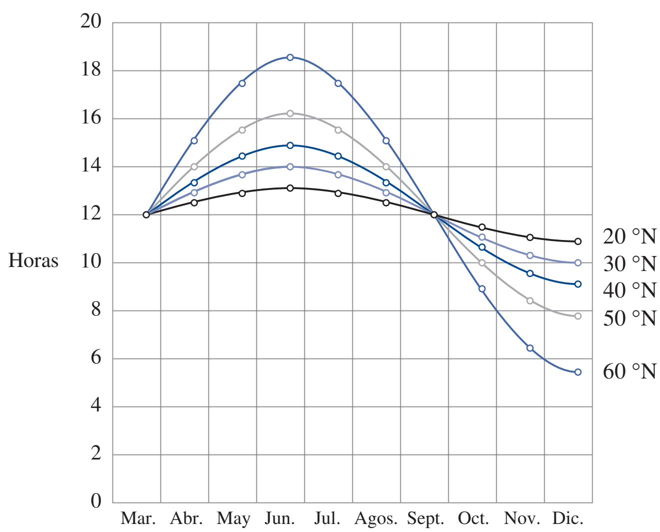


FIGURA 9

Gráfica de la duración de la luz del día del 21 de marzo al 21 de diciembre en diferentes latitudes

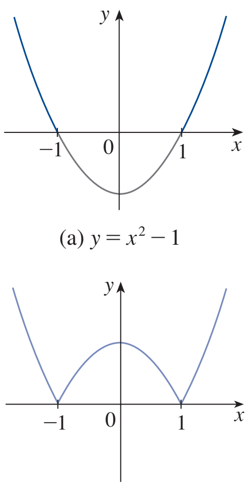
Fuente: adaptado de L. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935), 40.

SOLUCIÓN Observe que cada curva se parece a una función seno desplazada y alargada. Al ver la curva respectiva se tiene que, en la latitud de Ankara, la luz de día dura unas 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 horas el 21 de diciembre, por lo que la amplitud de la curva (el factor por el cual se tiene que alargar verticalmente la curva seno) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

¿Por cuál factor se necesita alargar horizontalmente la curva seno si se mide el tiempo t en días? Como hay aproximadamente 365 días en un año, el período del modelo debe ser 365. Pero el período de $y = \operatorname{sen} t$ es 2π, por lo que el factor de alargamiento horizontal es $2\pi/365$.

También se ve que la curva comienza su ciclo el 21 de marzo, el día 80 del año, así que se tiene que desplazar la curva 80 unidades a la derecha. Además, debe desplazarla 12 unidades hacia arriba. Por tanto, se modela la duración del día en Ankara el t-ésimo día del año por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$ ■



(a) $y = x^2 - 1$

(b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

Otra transformación de cierto interés se obtiene tomando el *valor absoluto* de una función. Si $y = |f(x)|$ entonces, de acuerdo con la definición de valor absoluto, $y = f(x)$ cuando $f(x) \geqslant 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: la parte de la gráfica que se encuentra arriba del eje x sigue siendo la misma; la parte que se encuentra debajo del eje x se refleja a través de este eje.

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, se grafica la parábola $y = x^2 - 1$ en la figura 10(a), desplazando verticalmente 1 unidad hacia abajo la parábola $y = x^2$. Se ve que la gráfica se encuentra por debajo del eje x cuando: $-1 < x < 1$, por lo que se refleja esa parte de la gráfica respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ en la figura 10(b). ■

Combinación de funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar funciones nuevas $f + g$, $f - g$, fg y f/g en forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales. La suma y diferencia de funciones se definen mediante:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad\qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, se definen el producto y cociente de funciones por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es A ∩ B, pero no se puede dividir entre 0, por lo que el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$, o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una función nueva. Por ejemplo, suponga que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y u es, a su vez, una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x.

Se puede calcular esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimiento se denomina *composición* porque la función nueva se compone de las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, se empieza con un número x en el dominio de g y se calcula su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces se puede calcular el valor de $f(g(x))$. Observe que la salida de una función se usa como entrada para la próxima función. El resultado es una función nueva $h(x) = f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la composición (o compuesta) de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g").

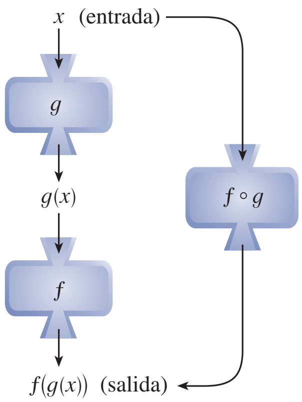


FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g (primero) y luego de la máquina f.

Definición Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada la composición de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 muestra $f \circ g$ en términos de máquinas.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre la composición de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

■

NOTA En el ejemplo 6 puede verse que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y, luego se aplica f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y, *luego* eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* se eleva al cuadrado y, *luego* resta 3.

EJEMPLO 7 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada una de las funciones siguientes y su dominio.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Si $0 \leq a \leq b$, entonces $a^2 \leq b^2$.

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debe cumplirse con que $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe cumplirse con que $2 - \sqrt{x} \geq 0$, esto es, $\sqrt{x} \leq 2$ o $x \leq 4$. Así que $0 \leq x \leq 4$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$ o $x \geqslant -2$. Así, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, por lo que el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la composición $f \circ g \circ h$ se encuentra aplicando primero h, después g y, por último, f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$ ■

Hasta ahora ha utilizado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo es útil a menudo ser capaz de descomponer una función compleja en otras más simples, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, finalmente, eleve al cuadrado. Así, se tiene

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

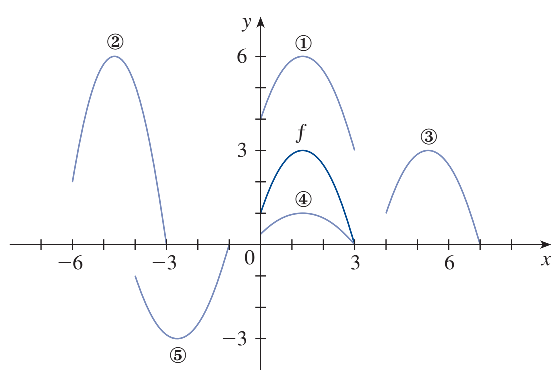
Entonces $$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$ ■

1.3 EJERCICIOS

1. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica f como sigue:
(a) Desplazar 3 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 3 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 3 unidades hacia la derecha.
(d) Desplazar 3 unidades hacia la izquierda.
(e) Reflejar respecto al eje x.
(f) Reflejar respecto al eje y.
(g) Alargada verticalmente por un factor de 3.
(h) Contraída verticalmente por un factor de 3.

2. Explique cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 8f(x)$ (d) $y = f(8x)$
(e) $y = -f(x) - 1$ (f) $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

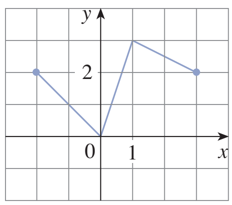
3. Se da la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada ecuación con su gráfica y argumente sus elecciones.
(a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
(e) $y = 2f(x + 6)$



4. Se da la gráfica de f. Trace las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(x) - 3$ (b) $y = f(x + 1)$

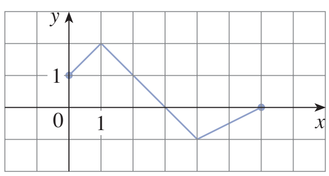
(c) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (d) $y = -f(x)$



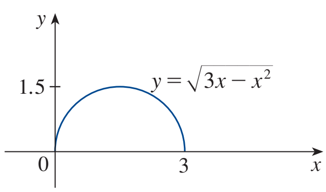
5. Se da la gráfica de f. Utilícela para trazar las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

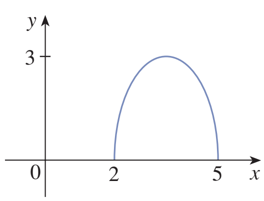
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



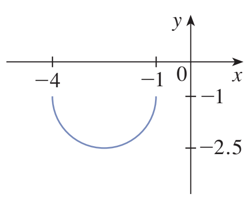
6–7 La gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$ está dada. Utilice transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



6.



7.



8. (a) ¿Cómo es la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ en relación con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Utilice su respuesta y la figura 6 para trazar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$.

(b) ¿Cómo es la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ en relación con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Utilice su respuesta y la figura 4(a) para trazar la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Grafique la función a mano, sin trazar puntos, sino empezando con la gráfica de una de las funciones esenciales de la sección 1.2 y después aplique las transformaciones apropiadas.

9. $y = -x^2$ **10.** $y = (x - 3)^2$

11. $y = x^3 + 1$ **12.** $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

13. $y = 2 \cos 3x$ **14.** $y = 2\sqrt{x + 1}$

15. $y = x^2 - 4x + 5$ **16.** $y = 1 + \operatorname{sen} \pi x$

17. $y = 2 - \sqrt{x}$ **18.** $y = 3 - 2 \cos x$

19. $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **20.** $y = \dfrac{2}{x} - 2$

21. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ **22.** $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

23. $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$ **24.** $y = |\cos \pi x|$

25. La ciudad de Nueva Delhi, India, se encuentra en la latitud 30 ºN. Utilice la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz diurna en Nueva Delhi como una función de la época del año. Para comprobar la exactitud de su modelo, utilice el hecho de que el 31 de marzo el Sol sale a las 6:13 y se pone a las 18:39 en esta ciudad.

26. Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternándose. Para la estrella variable más visible, Delta Cephei, el tiempo transcurrido entre períodos de brillo máximo es de 5.4 días, el brillo promedio (o magnitud) de la estrella es 4.0, y su brillo varía en una magnitud de ± 0.35. Encuentre una función que modele el brillo de Delta Cephei, como una función del tiempo.

27. Algunas de las mareas más altas en el mundo ocurren en la bahía de Fundy en la costa atlántica de Canadá. En Hopewell Cape la profundidad del agua durante la marea baja es de 2.0 m y con la marea alta es de aproximadamente 12.0 m. El período natural de oscilación es de alrededor de 12 horas y el 30 de junio de 2009 la marea alta se produjo a las 6:45. Determine una función que implique la función de coseno que modele la profundidad $D(t)$ (en metros) en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) en ese día.

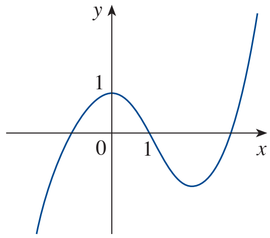
28. En un ciclo respiratorio normal, el volumen de aire que se mueve dentro y fuera de los pulmones es de unos 500 mL. Los volúmenes de reserva y de residuo de aire que permanecen en los pulmones ocupan aproximadamente 2000 mL y un solo ciclo respiratorio para un humano promedio toma alrededor de 4 segundos. Determine un modelo para el volumen total de aire $V(t)$ en los pulmones como una función del tiempo.

29. (a) ¿Cómo es la gráfica de $y = f(|x|)$ en relación con la gráfica de f?

(b) Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen} |x|$.

(c) Trace la gráfica de $y = \sqrt{|x|}$.

30. Utilice la gráfica de f para trazar la de $y = 1/f(x)$. ¿Qué características de f son las más importantes en el trazado de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se utilizan.



31–32 Encuentre (a) $f + g$, (b) $f - g$, (c) fg y (d) f/g y establezca sus dominios.

31. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

33–38 Encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, y (d) $g \circ g$ y sus dominios.

33. $f(x) = 3x + 5, \quad g(x) = x^2 + x$

34. $f(x) = x^3 - 2, \quad g(x) = 1 - 4x$

35. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = 4x - 3$

36. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

38. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

39–42 Encuentre $f \circ g \circ h$.

39. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

40. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

41. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

42. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

43–48 Exprese la función en la forma $f \circ g$.

43. $F(x) = (2x + x^2)^4$

44. $F(x) = \cos^2 x$

45. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

46. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

47. $v(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$

48. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

49–51 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

49. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

50. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

51. $S(t) = \operatorname{sen}^2(\cos t)$

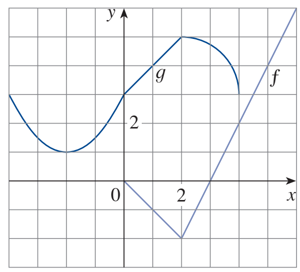
52. Utilice la tabla para evaluar cada una de las expresiones siguientes:

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

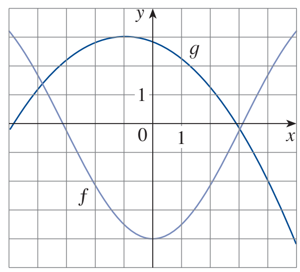
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

53. Utilice las gráficas dadas de f y g para evaluar cada una de las expresiones siguientes, o explique por qué no están definidas:

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



54. Utilice las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Utilice estas estimaciones para trazar la gráfica $f \circ g$.



55. Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.
(a) Exprese el radio r del círculo en función del tiempo t (en segundos).
(b) Si A es el área de este círculo como una función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

56. Un globo esférico está siendo inflado de manera que su radio aumenta a razón de 2 cm/s.
(a) Exprese el radio r del globo en función del tiempo t (en segundos).
(b) Si V es el volumen del globo en función del radio, encuentre $V \circ r$ e interprétela.

57. Un barco se está moviendo con una velocidad de 30 km/h paralelamente a una costa recta. El barco está a 6 km de la costa y pasa por un faro al mediodía.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco en función de la distancia d, que el barco ha recorrido desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.
(b) Exprese d como una función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; es decir, encuentre g de modo que $d = g(t)$.
(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

58. Un avión está volando con una velocidad de 350 km/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el tiempo $t = 0$.
(a) Exprese la distancia horizontal d (en kilómetros) que el avión ha volado, en función de t.
(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar en función de d.
(c) Utilice la composición para expresar s como una función de t.

59. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se utiliza en el estudio de circuitos eléctricos para representar aumentos repentinos de la corriente eléctrica, o de voltaje, cuando el interruptor se activa de manera instantánea.
(a) Trace la gráfica de la función de Heaviside.
(b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 volts al circuito. Escriba una fórmula para V(t) en términos de $H(t)$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 5$ segundos y se aplican instantáneamente 240 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Observe que a partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

60. La función de Heaviside que se define en el ejercicio 59 también puede utilizarse para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, que representa un aumento gradual del voltaje o de corriente en un circuito.
(a) Trace la gráfica de la función rampa $y = tH(t)$.
(b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$, y el voltaje se aumenta gradualmente a 120 volts durante un intervalo de tiempo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente a 100 volts durante un período de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

61. Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿Es $f \circ g$ también una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

62. Si usted invierte x dólares al 4% de interés compuesto anualmente, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es $A(x) = 1.04x$. Encuentre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para la composición de n copias de A.

63. (a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que realizar en la fórmula para g para determinar la fórmula para h.)
(b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

64. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.

65. Suponga que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?

66. Suponga que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 Funciones exponenciales

La función $f(x) = 2^x$ se llama una *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No se debe confundir con la función potencia $g(x) = x^2$, en la que la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = b^x$$

donde b es una constante positiva. Recuerde el significado de esto.

En el apéndice G se presenta un enfoque alternativo a las funciones exponenciales y logarítmicas utilizando cálculo integral.

Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, entonces $b^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

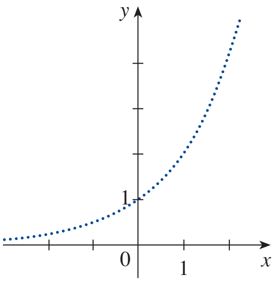


FIGURA 1
Representación de $y = 2^x$, x racional

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son números enteros y $q > 0$, entonces

$$b^x = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = \left(\sqrt[q]{b}\right)^p$$

Pero ¿cuál es el significado de b^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}?

Para ayudar a responder esta pregunta, se examina la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. Una representación de esta gráfica se muestra en la figura 1. Se quiere ampliar el dominio de $y = 2^x$ para incluir tanto los números racionales como los irracionales.

Hay huecos en la gráfica de la figura 1 correspondientes a valores irracionales de x. Se quiere llenarlos mediante la definición de $f(x) = 2^x$, donde $x \in \mathbb{R}$, por lo que f es una función creciente. En particular, puesto que el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

se debe tener
$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y se sabe lo que $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$ significan ya que 1.7 y 1.8 son números racionales. Del mismo modo, si usa mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, se obtienen mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{rcl}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots
\end{array}$$

Una demostración de este hecho se presenta en J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1981).

Puede demostrarse que hay exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

Este número se define como $2^{\sqrt{3}}$ y, utilizando este procedimiento de aproximación, se puede calcular con una aproximación de seis decimales:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

De la misma manera, se puede definir 2^x (o b^x, si $b > 0$) donde x es cualquier número irracional. En la figura 2 se muestra cómo todos los huecos en la figura 1 han sido llenados para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

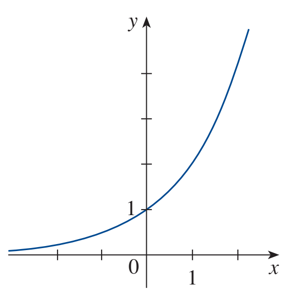


FIGURA 2
$y = 2^x$, para x real

Las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = b^x$ se muestran en la figura 3 para varios valores de la base b. Observe que todas estas gráficas pasan por el mismo punto (0, 1) porque $b^0 = 1$ para $b \neq 0$. Observe también que cuando la base b se hace más grande, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

Si $0 < b < 1$, entonces b^x se aproxima a 0 cuando x es muy grande. Si $b > 1$, entonces b^x se aproxima a 0 cuando x disminuye al tomar valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estas cuestiones se tratan en la sección 2.6.

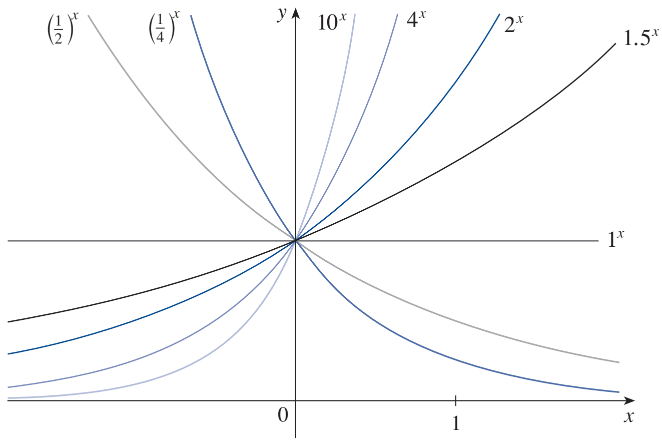


FIGURA 3

En la figura 3 puede verse que existen básicamente tres tipos de funciones exponenciales $y = b^x$. Si $0 < b < 1$, la función exponencial decrece; si $b = 1$, es una constante, y si $b > 1$, crece. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $b \neq 1$, entonces la función exponencial $y = b^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Observe también que, dado que $(1/b)^x = 1/b^x = b^{-x}$, entonces la gráfica de $y = (1/b)^x$ es justamente la reflexión de la gráfica de $y = b^x$ a través del eje y.

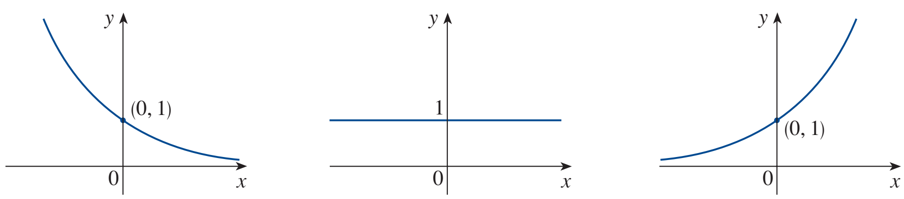


FIGURA 4 (a) $y = b^x,\ 0 < b < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = b^x,\ b > 1$

Una de las razones de la importancia de la función exponencial se encuentra en las siguientes propiedades. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes son bien conocidas del álgebra elemental. Puede demostrarse que seguirán siendo válidas para números reales x y y arbitrarios.

www.stewartcalculus.com
Para un repaso de las leyes de exponentes, haga clic en *Review of Algebra*.

Leyes de los exponentes Si a y b son números positivos, y los números x y y son reales cualesquiera, entonces

1. $b^{x+y} = b^x b^y$ **2.** $b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y}$ **3.** $(b^x)^y = b^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función $y = 3 - 2^x$, determine su dominio y rango.

Para un repaso de la reflexión y desplazamiento de gráficas, consulte la sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero refleje la gráfica de $y = 2^x$ [se muestran en las figuras 2 y 5(a)] a través del eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ en la figura 5(b). Después se desplaza

3 unidades hacia arriba la gráfica de $y = -2^x$ para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ en la figura 5(c). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-\infty, 3)$.

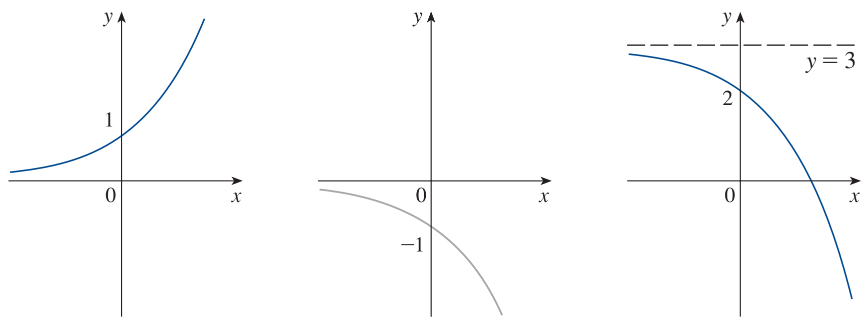


FIGURA 5

(a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

EJEMPLO 2 Utilice un dispositivo de graficación para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ con la de la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones representadas gráficamente en el rectángulo de vista $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vea que las gráficas se intersecan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece por encima de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 da una visión más global y muestra que para valores grandes de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la función potencia $y = x^2$.

En el ejemplo 2 se muestra que $y = 2^x$ aumenta más rápidamente que $y = x^2$. Para demostrar lo rápido que $f(x) = 2^x$ aumenta, realice el experimento mental siguiente. Suponga que se empieza con un trozo de papel de un décimo de milímetro de espesor y lo dobla por la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel por la mitad, el grosor del papel se duplica, por lo que el grosor del papel resultante sería $2^{50}/10\,000$ m. ¿De qué grosor cree usted que es? ¡Más de cien millones de kilómetros!

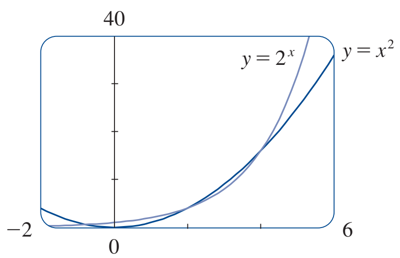


FIGURA 6

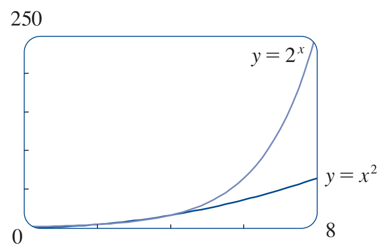


FIGURA 7

Aplicaciones de las funciones exponenciales

La función exponencial ocurre con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de las ciencias naturales y sociales. Aquí se indica brevemente cómo surge en la descripción del crecimiento de una población y decaimiento radioactivo. En capítulos posteriores se seguirán estas y otras aplicaciones en mayor detalle.

En primer lugar, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que por muestreo de la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1000$, entonces se tiene

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

SOLUCIÓN

(a) La masa es inicialmente 24 mg y se reduce a la mitad durante cada período de 25 años, así

$$m(0) = 24$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

De este patrón, se obtiene que la masa restante después de t años

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25} = 24 \cdot (2^{-1/25})^t$$

Esta es una función exponencial con base $b = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.

(b) La masa que queda después de 40 años es

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7.9 \text{ mg}$$

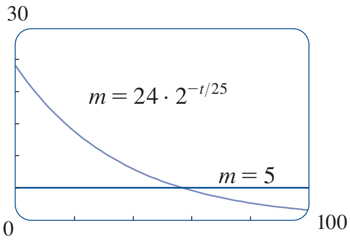


FIGURA 12

(c) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para ver la función $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ en la figura 12. Observe también la gráfica de la recta $m = 5$ y utilice el cursor para estimar que $m(t) = 5$ cuando $t \approx 57$. Así, la masa de la muestra se reducirá a 5 mg después de 57 años. ■

El número e

De todas las posibles bases para una función exponencial, hay una que es más conveniente para los fines del cálculo. La elección de una base b está influida por la forma en que la gráfica de $y = b^x$ cruza el eje y. Las figuras 13 y 14 muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto $(0, 1)$. (Se definirán las rectas tangentes de manera precisa en la sección 2.7. Para los fines presentes, puede considerarse que la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto es la recta que toca la gráfica solo en ese punto.) Si se miden las pendientes de estas rectas tangentes en $(0, 1)$, se encuentra que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

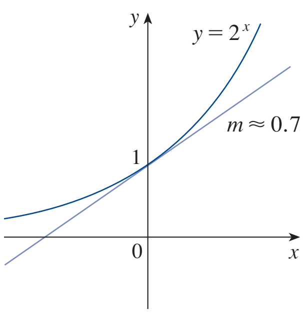


FIGURA 13

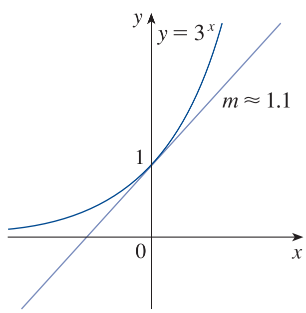


FIGURA 14

Resulta que, como se verá en el capítulo 3, algunas de las fórmulas del cálculo quedarán muy simplificadas si elige la base b para la que la pendiente de la recta tangente

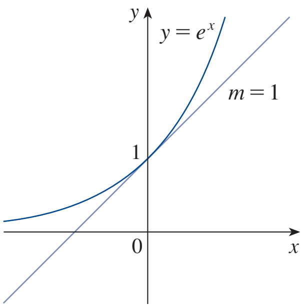


FIGURA 15
La función exponencial natural corta el eje y con una pendiente de 1.

TEC Module 1.4 le permite graficar funciones exponenciales con diversas bases y sus rectas tangentes para calcular más de cerca el valor de b para la cual la recta tangente tiene pendiente 1.

a $y = b^x$ en (0, 1) es *exactamente* 1. (Véase la figura 15.) De hecho, existe tal número y se denota con la letra e. (Esta notación fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las figuras 13 y 14, no causa ninguna sorpresa que el número e se encuentre entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ se encuentre entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la figura 16.) En el capítulo 3 se verá que el valor de e, con una aproximación de cinco decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

A la función $f(x) = e^x$ se le llama **función exponencial natural.**

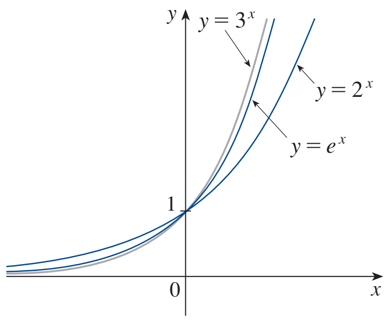
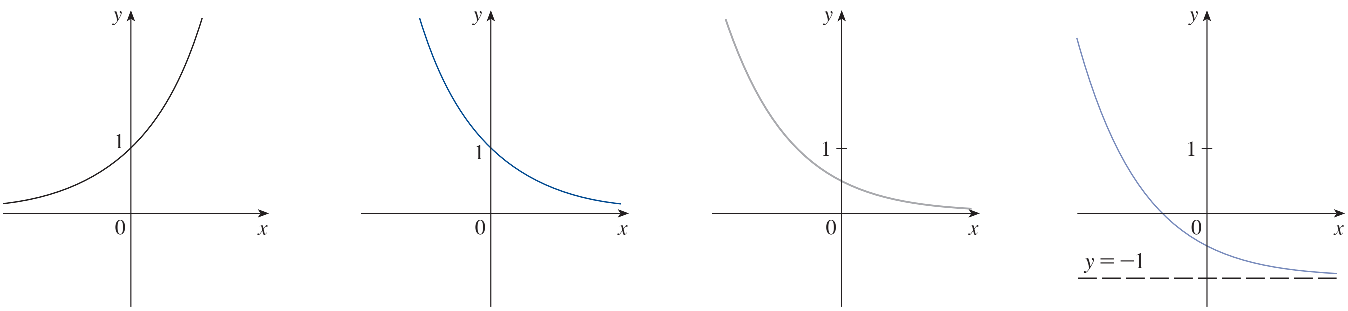


FIGURA 16

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y establezca el dominio y el rango.

SOLUCIÓN Empiece con la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 15 y 17(a) y refléjela a través del eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 17(b). (Observe que la gráfica interseca el eje y con una pendiente de -1.) Entonces se comprime la gráfica verticalmente por un factor de dos para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 17(c). Por último, se desplazará la gráfica hacia abajo una unidad para obtener la gráfica deseada en la figura 17(d). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-1, \infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 17

■

¿Hasta qué valor de x a la derecha de cero cree usted que se tendría que ir para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ sea superior a un millón? En el ejemplo siguiente se muestra el rápido crecimiento de esta función proporcionando una respuesta que podría sorprenderle.

EJEMPLO 5 Utilice un dispositivo de graficación para encontrar los valores de x para los cuales $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUCIÓN En la figura 18 se ve la gráfica de la función $y = e^x$ y la recta horizontal $y = 1\ 000\ 000$. Se ve que estas curvas se intersecan cuando $x = 13.8$. Por tanto, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Tal vez le sorprenda que los valores de la función exponencial ya han superado un millón cuando x es solo 14. ■

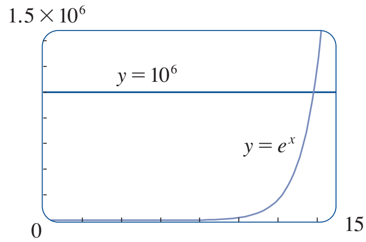


FIGURA 18

1.4 EJERCICIOS

1–4 Utilice las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las expresiones siguientes:

1. (a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. (a) $8^{4/3}$ (b) $x(3x^2)^3$

3. (a) $b^8(2b)^4$ (b) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. (a) $\dfrac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $b > 0$.
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) Si $b \neq 1$, ¿cuál es el rango de esta función?
(d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los siguientes casos.
(i) $b > 1$
(ii) $b = 1$
(iii) $0 < b < 1$

6. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) ¿Cuál es un valor aproximado de e?
(c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

7–10 Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

7. $y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 5^x, \quad y = 20^x$

8. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 8^x, \quad y = 8^{-x}$

9. $y = 3^x, \quad y = 10^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y = 0.9^x, \quad y = 0.6^x, \quad y = 0.3^x, \quad y = 0.1^x$

11–16 Haga un trazo de la gráfica de la función. No utilice calculadora. Solo utilice las gráficas que se presentan en las figuras 3 y 13 y si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

11. $y = 4^x - 1$

12. $y = (0.5)^{x-1}$

13. $y = 10^{x+2}$

14. $y = (0.5)^x - 2$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^x)$

17. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulta de:
(a) desplazarla 2 unidades hacia abajo.
(b) desplazarla 2 unidades a la derecha.
(c) reflejarla con respecto al eje x.
(d) reflejarla con respecto al eje y.
(e) reflejarla con respecto al eje x y luego reflejarla con respecto al eje y.

18. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulta de:
(a) reflejarla con respecto a la recta $y = 4$.
(b) reflejarla con respecto a la recta $x = 2$.

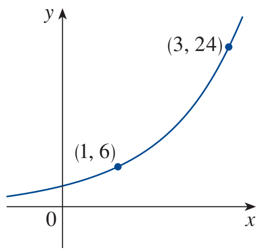
19–20 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

19. (a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

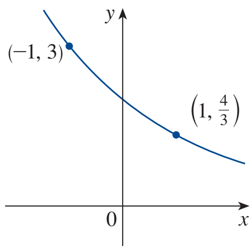
20. (a) $g(t) = \sqrt{10^t - 100}$ (b) $g(t) = \operatorname{sen}(e^t - 1)$

21–22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Cb^x$ cuya gráfica está dada.

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

24. Suponga que se le ofrece trabajo por un mes. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago prefiere?

I. Un millón de dólares al final del mes.

II. Un centavo en el primer día del mes, dos centavos en el segundo día, cuatro centavos en el tercer día y, en general, 2^{n-1} centavos el enésimo día.

25. Suponga que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se dibujan en una cuadrícula de coordenadas con 1 cm como unidad de medida. Demuestre que, a una distancia de 1 m a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es de 100 m, pero la altura de la gráfica de g es aproximadamente 10^{25} km.

26. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ graficando ambas funciones en varios rectángulos de vista. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas con aproximación a un decimal. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

27. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ al graficar a f y g en varios rectángulos de visión. ¿Cuándo la gráfica de g finalmente supera a la gráfica de f?

28. Utilice una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

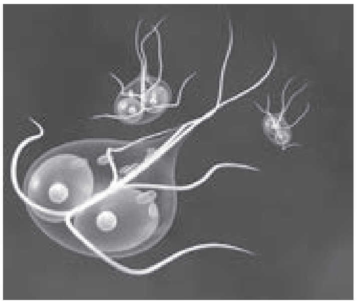
29. Un investigador está tratando de determinar el tiempo de duplicación para una población de la bacteria *Giardia lamblia*. Comienza un cultivo en una solución nutritiva y estima los conteos de bacterias cada cuatro horas. Sus datos se muestran en la tabla

Tiempo (horas)	0	4	8	12	16	20	24
Conteo de bacterias (CFU/mL)	37	47	63	78	105	130	173

(a) Realice una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Utilice una calculadora graficadora para encontrar una curva exponencial $f(t) = a \cdot b^t$ que modele la población de bacterias después de t horas.

(c) Trace la gráfica del modelo del inciso (b) junto con el diagrama de dispersión del inciso (a). Utilice la función TRACE para determinar cuánto tarda el conteo de bacterias en duplicarse.



G. lamblia

30. Un cultivo de bacterias comienza con 500 bacterias y duplica su tamaño cada media hora.

(a) ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?

(b) ¿Cuántas bacterias hay después de t horas?

(c) ¿Cuántas bacterias hay después de 40 minutos?

(d) Trace la gráfica de la función de la población y calcule el tiempo en que la población llega a 100 000.

31. La vida media del bismuto-210, ^{210}Bi, es 5 días.

(a) Si una muestra tiene una masa de 200 mg, determine la cantidad restante después de 15 días.

(b) Determine la cantidad restante después de t días.

(c) Calcule la cantidad restante después de 3 semanas.

(d) Utilice una gráfica para estimar el tiempo necesario para que la masa se reduzca a 1 mg.

32. Un isótopo de sodio, ^{24}Na, tiene una vida media de 15 horas. Una muestra de este isótopo tiene masa 2 g.

(a) Determine la cantidad restante después de 60 horas.

(b) Encuentre la cantidad restante después de t horas.

(c) Calcule la cantidad restante después de 4 días.

(d) Utilice una gráfica para estimar el tiempo requerido para que la masa se reduzca a 0.01 g.

33. Utilice la gráfica de V en la figura 11 para estimar la vida media de la carga viral del paciente 303 durante el primer mes de tratamiento.

34. Después de que el alcohol es absorbido por completo en el cuerpo, se metaboliza con una vida media aproximada de 1.5 horas. Suponga que usted ha bebido tres bebidas alcohólicas y una hora más tarde, a medianoche, su concentración de alcohol en la sangre (BAC) es 0.6 mg/mL.

(a) Determine un modelo de decaimiento exponencial para su BAC t horas después de la medianoche.

(b) Trace la gráfica de su BAC y utilice la gráfica para determinar cuándo su BAC es de 0.08 mg/mL.

Fuente: adaptado de P. Wilkinson *et al*., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5(1977): 207–224.

35. Utilice una calculadora gráfica con capacidad para calcular una regresión exponencial para modelar la población del mundo con los datos de 1950 a 2010 de la tabla 1 en la página 49. Utilice el modelo para estimar la población en 1993 y para predecir la población en el año 2020.

36. La tabla muestra la población de Malasia, en millones, para los años 1950-2000. Utilice una calculadora graficadora con la capacidad de calcular una regresión exponencial para modelar la población de Malasia desde 1950. Utilice el modelo para estimar la población en 1975 y 2010, y para predecir la población en 2020.

Año	Población	Año	Población
1950	6.1	1980	13.8
1955	7.0	1985	15.7
1960	8.1	1990	17.8
1965	9.5	1995	20.4
1970	10.9	2000	23.0
1975	12.3		

37. Si usted traza la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

verá que f parece ser una función impar. Demuéstrelo.

38. Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando b cambia? ¿Cómo cambia la gráfica cuando a cambia?

1.5 Funciones inversas y logarítmicas

La tabla 1 muestra los datos de un experimento en el que un cultivo de bacterias inició con 100 de ellas en un medio limitado de nutrientes; el tamaño de la población de bacterias se registró a intervalos de una hora. El número N de bacterias es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Suponga, sin embargo, que la bióloga cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo requerido para que la población alcance distintos niveles. En otras palabras, piensa en t como una función de N. Esta función se llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1} y se lee "f inversa". Así, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo requerido para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse mediante la lectura de la tabla 1 de derecha a izquierda o consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ ya que $f(6) = 550$.

Tabla 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población al tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

Tabla 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo en alcanzar las N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

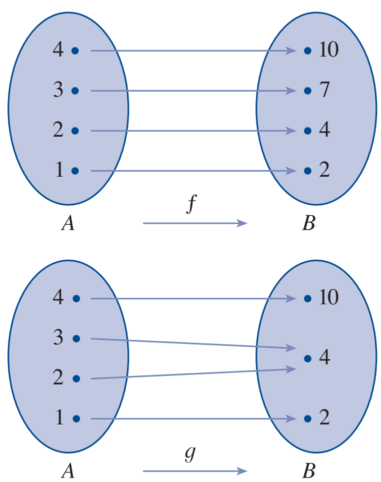


FIGURA 1
f es inyectiva; g no lo es.

No todas las funciones poseen inversa. Se compararán las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca tiene el mismo valor dos veces (cualquier par de entradas en A tienen diferentes salidas), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma salida, 4). En símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Las funciones que comparten esta propiedad con f se llaman *funciones inyectivas*.

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición indica que f es inyectiva si cada salida corresponde a una sola entrada.

1 Definición Una función f se llama ***función inyectiva*** si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces se ve en la figura 2 que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es inyectiva,

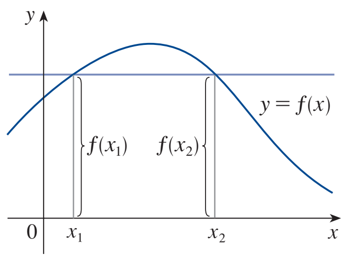


FIGURA 2
Esta función no es inyectiva ya que $f(x_1) = f(x_2)$.

Por tanto, con el siguiente método geométrico se puede determinar si una función es inyectiva.

Prueba de la recta horizontal Una función es inyectiva si y solo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 ¿Es la función $f(x) = x^3$ inyectiva?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es inyectiva.

SOLUCIÓN 2 De la figura 3 se observa que no existe recta horizontal que interseque a la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es inyectiva. ■

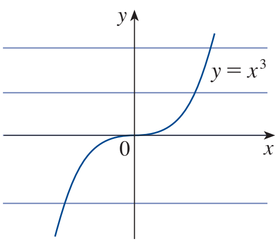


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es inyectiva.

EJEMPLO 2 ¿Es inyectiva la función $g(x) = x^2$?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es inyectiva, ya que, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

por lo que 1 y -1 tienen la misma salida.

SOLUCIÓN 2 De la figura 4 se observa que existen rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es inyectiva. ■

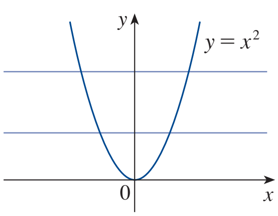


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es inyectiva.

Las funciones inyectivas son importantes porque son precisamente aquellas que poseen funciones inversas de acuerdo con la definición siguiente.

2 Definición Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. Entonces, la **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

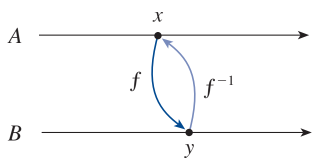


FIGURA 5

La definición dice que si f mapea x con y, entonces f^{-1} mapea de regreso y con x. (Si f no fuera inyectiva, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única). El diagrama de flechas en la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Observe que

$$\boxed{\begin{aligned}\text{dominio de } f^{-1} &= \text{rango de } f \\ \text{rango de } f^{-1} &= \text{dominio de } f\end{aligned}}$$

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ya que si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

CUIDADO No cometa el error de pensar en -1 en f^{-1} como un exponente. Es decir,

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

Sin embargo, la función recíproca, $1/f(x)$, podría escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}, se tiene

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad \text{ya que} \qquad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \qquad \text{ya que} \qquad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad \text{ya que} \qquad f(8) = -10$$

El diagrama en la figura 6 aclara cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso. ■

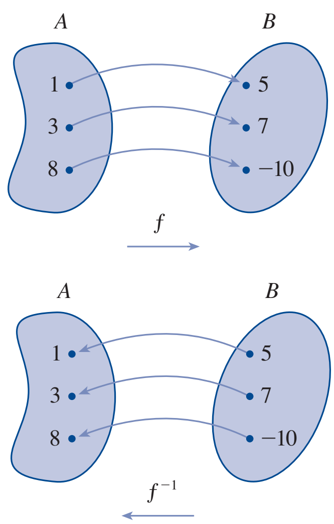


FIGURA 6
La función inversa invierte las salidas y las entradas.

La letra x es tradicionalmente utilizada como la variable independiente, así que cuando se concentre en f^{-1} en vez de f, usualmente se cambian los roles de x y y en la definición 2, y se escribe

3
$$\boxed{f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x}$$

Al sustituir por y en la definición 2 y sustituyendo por x en (3), se obtienen las **ecuaciones de cancelación**:

4
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \qquad \text{para todo } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \qquad \text{para todo } x \text{ en } B\end{aligned}}$$

La primera ecuación de cancelación indica que si se comienza con x, se aplica f y luego f^{-1}, se llega de regreso a x, donde se empezó (consulte el diagrama de máquinas en la figura 7). Así, f^{-1} deshace a f. La segunda ecuación indica que f deshace lo que hace f^{-1}.

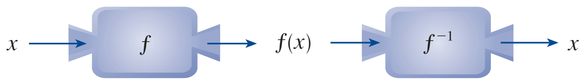


FIGURA 7

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y, por tanto, las ecuaciones de cancelación son

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones dicen simplemente que la función elevar al cubo y la función raíz cúbica se anulan mutuamente cuando se aplican una después de la otra.

Ahora vea cómo calcular funciones inversas. Si se tiene una función $y = f(x)$ y es capaz de resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces, de acuerdo con la definición 2, debe obtener $x = f^{-1}(y)$. Si quiere llamar a la variable independiente x, intercambie x por y y llegará a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo encontrar la función inversa de una función *f* inyectiva

PASO 1 Escribir $y = f(x)$.

PASO 2 Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

PASO 3 Para expresar f^{-1} en función de x, intercambiar x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN De acuerdo con (5) empiece escribiendo

$$y = x^3 + 2$$

Después, despeje x:

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Por último, intercambie x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Por tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. ■

En el ejemplo 4, observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "elevar al cubo, luego sumar 2"; f^{-1} es la regla "Restar 2, luego sacar la raíz cúbica."

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Ya que $f(a) = b$ si y solo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y solo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero se obtiene el punto (b, a) a partir del punto (a, b) reflejando el segundo a través de la recta $y = x$. (Véase la figura 8.)

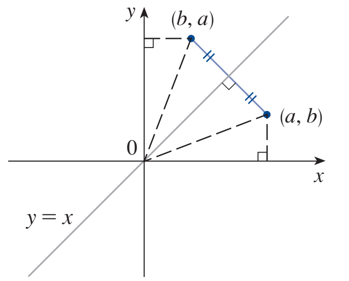


FIGURA 8

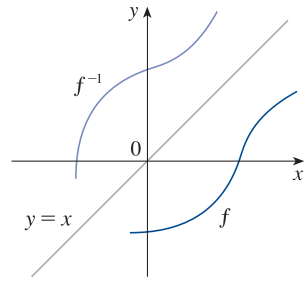


FIGURA 9

Por tanto, como se ejemplifica en la figura 9:

> La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f a través de la recta $y = x$.

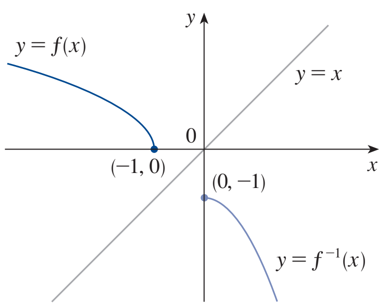


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Trace las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa utilizando el mismo eje de coordenadas.

SOLUCIÓN Primero trace la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$ o $x = -y^2 - 1$), luego refleje respecto a la recta $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la figura 10.) Para comprobar nuestra gráfica, observe que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Por lo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$, y esto parece razonable a partir de la figura 10. ■

Funciones logarítmicas

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, la función exponencial $f(x) = b^x$ siempre es creciente o decreciente, así que es inyectiva por la prueba de la recta horizontal. Por tanto, tiene una función inversa f^{-1} que se llama la **función logarítmica con base *b*** y se denota por $\log_b$. Si se utiliza la formulación de una función inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

entonces se tiene

$$\boxed{\log_b x = y \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x} \tag{6}$$

Así, si $x > 0$, entonces $\log_b x$ es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener x. Por ejemplo, el $\log_{10} 0.001 = -3$, ya que $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación (4), cuando se aplican a las funciones $f(x) = b^x$ y $f^{-1}(x) = \log_b x$, se convierten en

$$\log_b(b^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$b^{\log_b x} = x \quad \text{para todo } x > 0$$

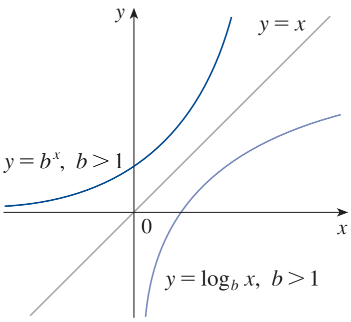


FIGURA 11

La función logarítmica $\log_b$ tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$. Su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = b^x$ a través de la recta $y = x$.

La figura 11 muestra el caso en que $b > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen una base $b > 1$.) El hecho de que $y = b^x$ sea una función de rápido crecimiento para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_b x$ es una función de lento crecimiento para $x > 1$.

La figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_b x$ con varios valores de la base $b > 1$. Puesto que $\log_b 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

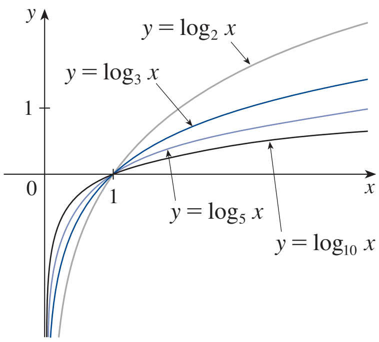


FIGURA 12

Las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas se derivan de las correspondientes propiedades de las funciones exponenciales dadas en la sección 1.4.

Leyes de los logaritmos Si x e y son números positivos, entonces

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b(x^r) = r\log_b x$ (donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 Use las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Con la ley 2, se tiene

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$. ■

Notación de los logaritmos
En la mayoría de los libros de texto de cálculo y ciencias, así como en las calculadoras, se usa la notación $\ln x$ para el logaritmo natural de x, y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura matemática y científica más avanzada, así como en los lenguajes de programación de computadoras, la notación $\log x$ denota por lo general el logaritmo natural.

Logaritmos naturales

De todas las posibles bases b de los logaritmos, se verá en el capítulo 3 que la más conveniente es el número e, que se definió en la sección 1.4. Al logaritmo con base e se le llama **logaritmo natural** y tiene una notación especial:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Si se hace $b = e$ y se sustituye $\log_e$ con "ln" en (6) y (7), entonces las propiedades que definen a la función logaritmo natural se convierten en

8
$$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9
$$\boxed{\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x \qquad x > 0 \end{aligned}}$$

En particular, si se hace $x = 1$, se obtiene

$$\boxed{\ln e = 1}$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De (8) se ve que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por tanto, $x = e^5$.

(Si tiene problemas para trabajar con la notación "ln", simplemente reemplácela por $\log_e$. Entonces la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; así que, por la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Comience con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Pero la segunda ecuación de cancelación en (9) indica que $e^{\ln x} = x$. Por tanto, $x = e^5$. ■

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Se toman logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y se usa (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Ya que el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, se puede aproximar la solución; para cuatro decimales se tiene: $x \approx 0.8991$. ■

EJEMPLO 9 Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ con un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Con las leyes 3 y 1 de los logaritmos, se tiene

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$ ■

La fórmula siguiente muestra que los logaritmos de cualquier base pueden expresarse en términos del logaritmo natural.

10 Fórmula para el cambio de base Para cualquier número positivo b ($b \neq 1$), se tiene

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_b x$. Entonces, a partir de (6), se tiene $b^y = x$. Tomando logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, se obtiene $y \ln b = \ln x$. Por tanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln b}$$ ■

Las calculadoras científicas tienen un comando para los logaritmos naturales, por lo que la fórmula 10 permite utilizar una calculadora para calcular un logaritmo de cualquier base (como se muestra en el siguiente ejemplo). Del mismo modo, la fórmula 10 permite graficar cualquier función logarítmica en una calculadora graficadora o computadora (véanse los ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evalúe $\log_8 5$ con una precisión de seis decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 da

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$ ■

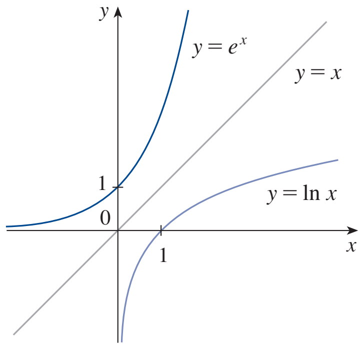


FIGURA 13
La gráfica de $y = \ln x$ es la reflexión de la gráfica $y = e^x$ sobre la recta $y = x$.

Gráfica y crecimiento del logaritmo natural

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural, se muestran en la figura 13. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que todas las demás funciones logarítmicas con base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente definida en $(0, \infty)$, y el eje y es una asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ son números negativos cada vez más grandes cuando x se aproxima a 0.)

EJEMPLO 11 Trace la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empiece con la gráfica de $y = \ln x$ como se indica en la figura 13. Usando las transformaciones de la sección 1.3, desplácela 2 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2)$ y luego desplácela una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Véase la figura 14.)

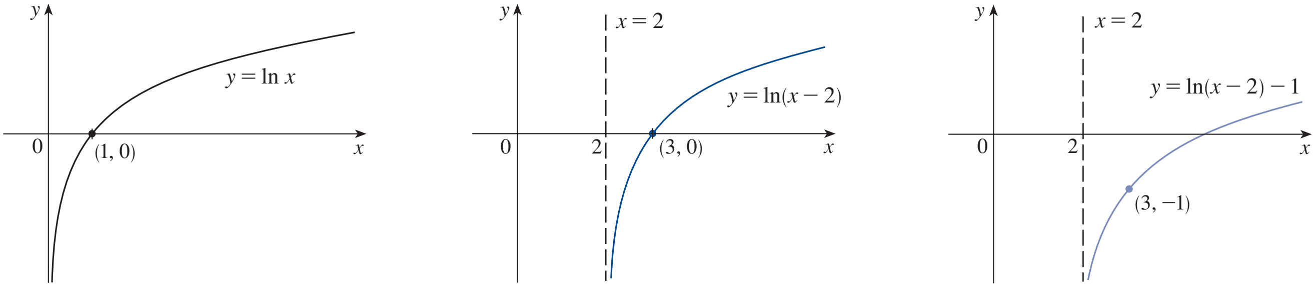


FIGURA 14 ■

A pesar de que ln x es una función creciente, su crecimiento es muy lento cuando $x > 1$. De hecho, ln x crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, se comparan los valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la tabla siguiente y se muestran sus gráficas en las figuras 15 y 16. Usted puede ver que en un principio las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen a un ritmo comparable, pero al final la función raíz supera con creces al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

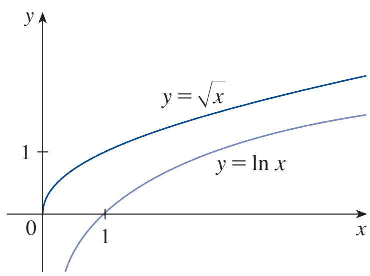


FIGURA 15

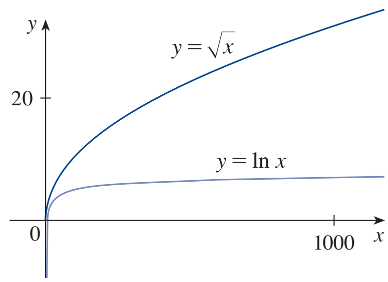


FIGURA 16

Funciones trigonométricas inversas

Cuando se trata de encontrar las funciones trigonométricas inversas, hay una pequeña dificultad: debido a que las funciones trigonométricas no son inyectivas, no tienen funciones inversas. La dificultad se supera restringiendo los dominios de estas funciones para que sean inyectivas.

Puede verse en la figura 17 que la función seno, $y = \operatorname{sen} x$, no es inyectiva (utilice la prueba de la recta horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, es inyectiva (véase la figura 18). La función inversa de la función seno restringida f existe y se denota por sen^{-1} o arcsen. Se llama **función seno inverso** o **función arco seno**.

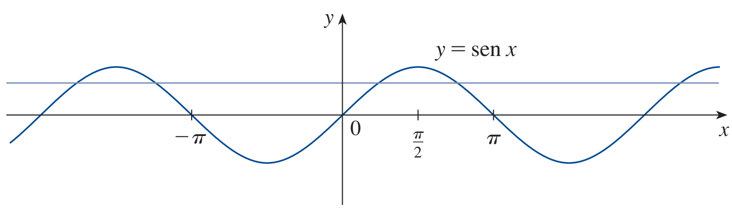


FIGURA 17

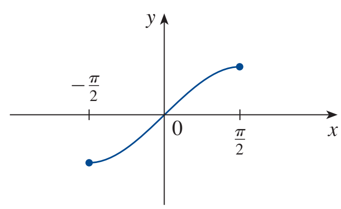


FIGURA 18
$y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

El resto de las funciones trigonométricas inversas no se utilizan con tanta frecuencia y se resumen aquí.

11

$$y = \csc^{-1}x \ \left(|x| \geqslant 1\right) \iff \csc y = x \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$

$$y = \sec^{-1}x \ \left(|x| \geqslant 1\right) \iff \sec y = x \quad \text{y} \quad y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$

$$y = \cot^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi)$$

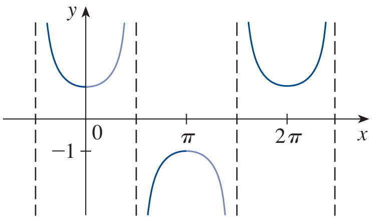


FIGURA 26
$y = \sec x$

La elección de los intervalos para y en las definiciones de $\csc^{-1}$ y $\sec^{-1}$ no es aceptada universalmente. Por ejemplo, algunos autores utilizan $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)]$ en la definición de $\sec^{-1}$. [Se puede ver en la gráfica de la función secante en la figura 26 que tanto esta opción como la que se encuentra en (11) funcionan.]

1.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una función inyectiva?
(b) ¿Cómo puede decirse, a partir de la gráfica de una función, que es inyectiva?

2. (a) Suponga que f es una función inyectiva con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?
(b) Si se le da una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?
(c) Si se le da la gráfica para f, ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1}?

3–14 Una función está dada por una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es inyectiva.

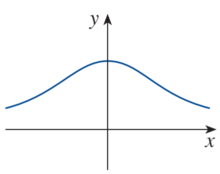
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

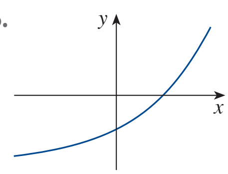
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	1.9	2.8	3.5	3.1	2.9

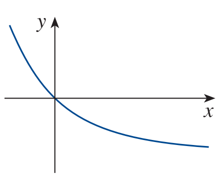
5.



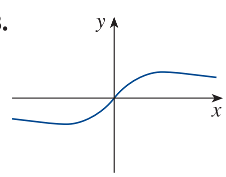
6.



7.



8.



9. $f(x) = 2x - 3$

10. $f(x) = x^4 - 16$

11. $g(x) = 1 - \operatorname{sen} x$

12. $g(x) = \sqrt[3]{x}$

13. $f(t)$ es la altura de una flecha t segundos después de que se lanza hacia arriba.

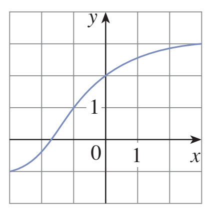
14. $f(t)$ es el tamaño de su zapato a la edad t.

15. Suponga que f es una función inyectiva.
(a) Si $f(4)= 7$, ¿qué es $f^{-1}(7)$?
(b) Si $f^{-1}(8)= 2$, ¿qué es $f(2)$?

16. Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, determine $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, determine $g^{-1}(4)$.

18. La gráfica de f está dada.
(a) ¿Por qué f es inyectiva?
(b) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f^{-1}?
(c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Calcule el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, expresa la temperatura Celsius C, en función de la temperatura Fahrenheit F. Encuentre una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con rapidez v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21–26 Determine una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$ **24.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

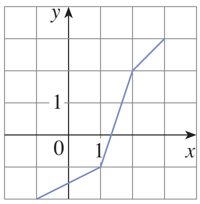
25. $y = \ln(x + 3)$ **26.** $y = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

27–28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y utilícela para graficar f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para comprobar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones a través de la recta.

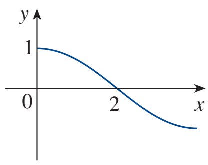
27. $f(x) = \sqrt{4x + 3}$ **28.** $f(x) = 1 + e^{-x}$

29–30 Use la gráfica dada de f, para trazar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



31. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(a) Encuentre f^{-1}. ¿Cómo se relaciona con f?
(b) Identifique la gráfica de f y explique su respuesta al inciso (a).

32. Sea $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
(a) Encuentre g^{-1}. ¿Cómo se relaciona con la g?
(b) Grafique g. ¿Cómo explica usted su respuesta al inciso (a)?

33. (a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_b x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el rango de esta función?
(d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función $y = \log_b x$ si $b > 1$.

34. (a) ¿Qué es el logaritmo natural?
(b) ¿Qué es el logaritmo común?
(c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y la función exponencial natural en un mismo conjunto de ejes.

35–38 Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

35. (a) $\log_2 32$ (b) $\log_8 2$

36. (a) $\log_5 \frac{1}{125}$ (b) $\ln(1/e^2)$

37. (a) $\log_{10} 40 + \log_{10} 2.5$
(b) $\log_8 60 - \log_8 3 - \log_8 5$

38. (a) $e^{-\ln 2}$ (b) $e^{\ln(\ln e^3)}$

39–41 Exprese cada una de las siguientes cantidades dadas como un solo logaritmo.

39. $\ln 20 - 2 \ln 2$ **40.** $\ln b + 2 \ln c - 3 \ln d$

41. $\frac{1}{3}\ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

42. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo con precisión de seis decimales.
(a) $\log_5 10$ (b) $\log_3 57$

43–44 Use la fórmula 10 para graficar cada una de las funciones siguientes en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

43. $y = \log_{1.5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se dibuja sobre una cuadrícula de coordenadas, donde la unidad de medida es de un centímetro. ¿Cuántos kilómetros a la derecha del origen se tiene que mover antes de que la altura de la curva alcance 1 m?

46. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ graficando ambas, f y g, en varios rectángulos de visualización. ¿Cuándo la gráfica de f supera finalmente a la gráfica de g?

47–48 Haga un trazo de la gráfica de cada una de las funciones siguientes. No utilice calculadora. Solo tiene que usar las gráficas de las figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–50 *a*) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?
(b) ¿Cuál es la intersección en x de la gráfica?
(c) Trace la gráfica de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$ **50.** $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51–54 Resuelva cada ecuación para x.

51. (a) $e^{7-4x} = 6$ (b) $\ln(3x - 10) = 2$

52. (a) $\ln(x^2 - 1) = 3$ (b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

53. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, donde $a \neq b$

55–56 Resuelva cada desigualdad para x.

55. (a) $\ln x < 1$ (b) $e^x \geqslant 3$

56. (a) $1 < e^{3x-1} < 2$ (b) $1 - 2 \ln x < 3$

57. (a) Encuentre el dominio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
(b) Determine f^{-1} y su dominio.

58. (a) ¿Cuáles son los valores de $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$?
(b) Use su calculadora para evaluar $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$. ¿Qué observa? ¿Puede explicar por qué la calculadora tiene problemas?

SAC **59.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es inyectiva. Luego utilice un sistema de algebraico computacional para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (El SAC produce tres posibles expresiones. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

SAC **60.** (a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, utilice un sistema de algebraico computacional para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
(b) Utilice la expresión del inciso (a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$, en la misma pantalla.

61. Si una población de bacterias comienza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.
(a) Determine la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo la población alcanzará 50 000 bacterias?

62. Cuando el flash de una cámara se apaga, las baterías comienzan a recargar de inmediato el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad de carga máxima es Q_0, y t se mide en segundos.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuánto tiempo se tarda en recargar el condensador a 90% de la capacidad si $a = 2$?

63–68 Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

63. (a) $\cos^{-1}(-1)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(0.5)$

64. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\arctan(-1)$

65. (a) $\csc^{-1}\sqrt{2}$ (b) arcsen 1

66. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(-1/\sqrt{2})$ (b) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

67. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

68. (a) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(5\pi/4))$ (b) $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}(\frac{5}{13}))$

69. Pruebe que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

70–72 Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

70. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$ **72.** $\operatorname{sen}(2 \arccos x)$

73-74 Trace la gráfica de las funciones dadas, en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

73. $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $y = \operatorname{sen}^{-1}x$; $y = x$

74. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$; $y = \tan^{-1}x$; $y = x$

75. Encuentre el dominio y el rango de la función

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ y explique la apariencia de la gráfica.
(b) Trace la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. ¿Cómo se explica la apariencia de esta gráfica?

77. (a) Si desplaza la curva a la izquierda, ¿qué sucede con su reflexión a través de la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función inyectiva.
(b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
(b) ¿Qué es la gráfica de una función?
(c) ¿Cómo se puede saber si una curva dada es la gráfica de una función?

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre la discusión con ejemplos.

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede saber si una función es par observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función par.
(b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede saber si una función es impar observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función impar.

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función
(a) lineal (b) potencia
(c) exponencial (d) cuadrática
(e) polinomial de grado 5 (f) racional

7. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Trace a mano un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.
(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \tan x$ (c) $y = e^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \tan^{-1} x$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
(a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
(b) ¿Cuál es el dominio de fg?
(c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de f de la siguiente manera.
(a) Desplazar 2 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 2 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 2 unidades a la derecha.
(d) Desplazar 2 unidades a la izquierda.
(e) Reflejar a través del eje x.
(f) Reflejar a través del eje y.
(g) Alargar verticalmente por un factor de 2.
(h) Contraer verticalmente por un factor de 2.
(i) Alargar horizontalmente por un factor de 2.
(j) Contraer horizontalmente por un factor de 2.

12. (a) ¿Qué es una función inyectiva? ¿Cómo puede saber si una función es inyectiva observando su gráfica?
(b) Si f es una función inyectiva, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. (a) ¿Cómo se define la función seno inverso $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
(b) ¿Cómo se define la función coseno inverso $f(x) = \cos^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?
(c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

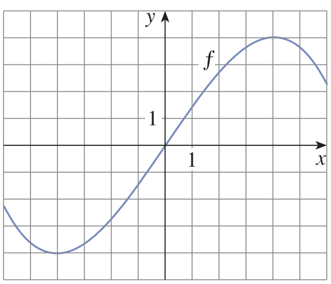
EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.
3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.
4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Una recta vertical interseca la gráfica de una función a lo más una vez.
6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.
7. Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. Siempre puede dividirse entre e^x.
9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.
10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.
12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.
13. $\tan^{-1} x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$
14. Si x es cualquier número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$.

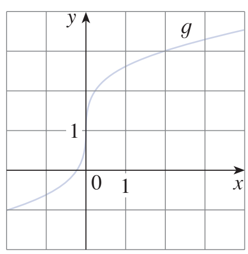
EJERCICIOS

1. Sea f la función cuya gráfica está dada.



(a) Calcule el valor de $f(2)$.
(b) Calcule los valores de x tales que $f(x) = 3$.
(c) Indique el dominio de f.
(d) Establezca el rango de f.
(e) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?
(f) ¿Es f inyectiva? Explique.
(g) ¿Es f par, impar, o ninguno de los dos? Explique.

2. La gráfica de g está dada



(a) Obtenga el valor de $g(2)$.
(b) ¿Por qué g es inyectiva?
(c) Calcule el valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Calcule el dominio de g^{-1}.
(e) Trace la gráfica de g^{-1}.

3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencias

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. Dibuje una gráfica aproximada de la producción de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante utilizado.

5–8 Encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$ **6.** $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$ **8.** $F(t) = 1 + \operatorname{sen} 2t$

9. Suponga que la gráfica de f está dada. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las funciones siguientes a partir de la gráfica de f.

(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$

(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x - 2) - 2$

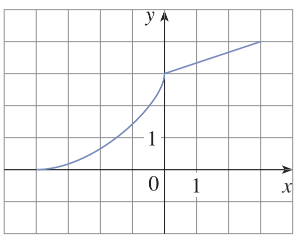
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = f^{-1}(x)$

10. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(x - 8)$ (b) $y = -f(x)$

(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Utilice transformaciones para trazar la gráfica de la función.

11. $y = (x - 2)^3$ **12.** $y = 2\sqrt{x}$

13. $y = x^2 - 2x + 2$ **14.** $y = \ln(x + 1)$

15. $f(x) = -\cos 2x$ **16.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3 - x^7$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$ (d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consiste en el segmento de recta desde el punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$, junto con la mitad superior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

21. La tabla muestra la población de Indonesia (en millones) durante los años 1950-2000. Decida qué tipo de modelo es apropiado y utilice el modelo para estimar la población de Indonesia en 2010.

Año	Población	Año	Población
1950	80	1980	150
1955	86	1985	166
1960	96	1990	182
1965	107	1995	197
1970	120	2000	212
1975	134		

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos encuentra que cuesta \$9000 producir 1000 hornos tostadores a la semana y \$12 000 producir 1500 hornos tostadores a la semana.

(a) Exprese el costo en función del número de hornos tostadores producidos, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje y y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, determine $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$ (d) $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes para x.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\tan^{-1} x = 1$

27. La vida media del paladio-100, ^{100}Pd, es de cuatro días. (Así que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{100}Pd se desintegrará en cuatro días.) La masa inicial de una muestra es un gramo.

(a) Encuentre la masa que queda después de 16 días.

(b) Determine la masa $m(t)$ que queda después de t días.

(c) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(d) ¿Cuándo se reducirá la masa a 0.01 g?

28. La población de ciertas especies en un ambiente limitado con una población inicial de 100 y capacidad de carga de 1000 es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Grafique esta función y estime cuánto tiempo le toma a la población llegar a 900.

(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(c) Utilice la función inversa para encontrar el tiempo necesario para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso (a).

I Respuestas a los ejercicios con número impar

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1 ■ PÁGINA 19

1. Sí

3. (a) 3 (b) -0.2 (c) 0, 3 (d) -0.8 (e) $[-2, 4]$, $[-1, 3]$ (f) $[-2, 1]$

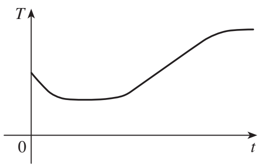
5. $[-85, 115]$

7. No

9. Sí, $[-3, 2]$, $[-3, -2) \cup [-1, 3]$

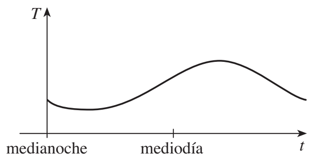
11. (a) 13.8°C (b) 1990 (c) 1910, 2005 (d) $[13.5, 14.5]$

13.

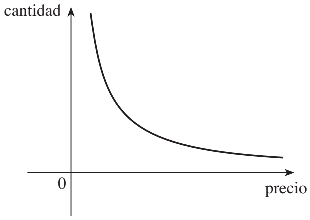


15. (a) 500 MW; 730 MW (b) 4 AM; mediodía; sí

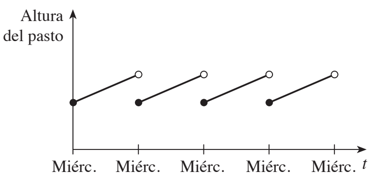
17.



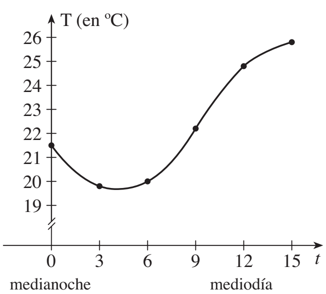
19.



21.



23. (a)



(b) 24°C

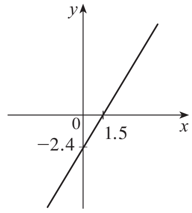
25. 12, 16, $3a^2 - a + 2$, $3a^2 + a + 2$, $3a^2 + 5a + 4$, $6a^2 - 2a + 4$, $12a^2 - 2a + 2$, $3a^4 - a^2 + 2$, $9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4$, $3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

27. $-3 - h$ **29.** $-1/(ax)$

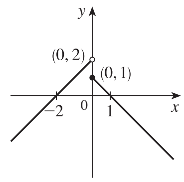
31. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$ **33.** $(-\infty, \infty)$

35. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ **37.** $[0, 4]$

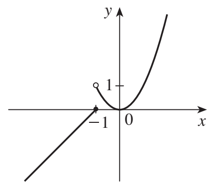
39. $(-\infty, \infty)$



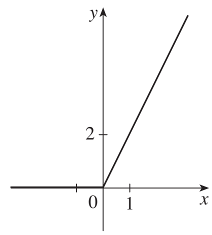
41. $-1, 1, -1$



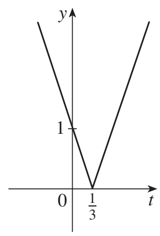
43. $-2, 0, 4$



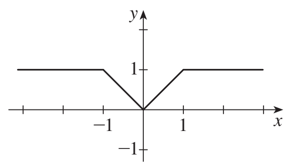
45.



47.



49.



51. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$, $1 \leqslant x \leqslant 5$ **53.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

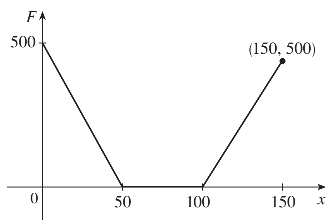
55. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

57. $A(L) = 10L - L^2$, $0 < L < 10$

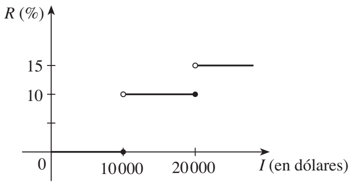
59. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4$, $x > 0$ **61.** $S(x) = x^2 + (8/x)$, $x > 0$

63. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x$, $0 < x < 6$

65. $F(x) = \begin{cases} 10(50 - x) & \text{si } 0 \leqslant x < 50 \\ 0 & \text{si } 50 \leqslant x \leqslant 100 \\ 10(x - 100) & \text{si } x > 100 \end{cases}$

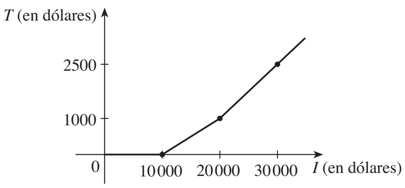


67. (a)



(b) \$400, \$1900

(c)



69. f es impar, g es par **71.** (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$

73. Impar

75. Ninguno de los dos

77. Par

79. Par; impar; ninguno de los dos (a menos que $f = 0$ o $g = 0$)

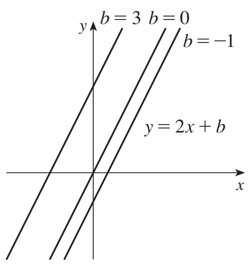
EJERCICIOS 1.2 ■ PÁGINA 33

1. (a) Logarítmica (b) Raíz (c) Racional
(d) Polinomio, grado 2 (e) Exponencial (f) Trigonométrica

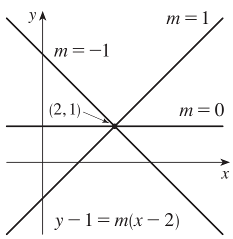
3. (a) h (b) f (c) g

5. $\{x \mid x \neq \pi/2 + 2n\pi\}$, n un entero

7. (a) $y = 2x + b$,
donde b es la intersección en y.

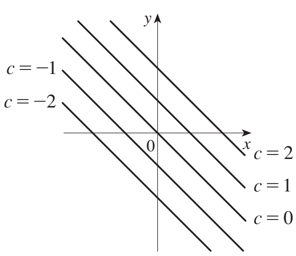


(b) $y = mx + 1 - 2m$,
donde m es la pendiente.



(c) $y = 2x - 3$

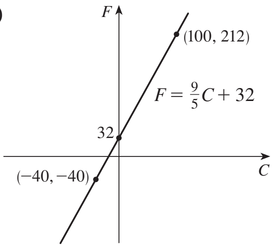
9. Sus gráficas tienen pendiente -1.



11. $f(x) = -3x(x + 1)(x - 2)$

13. (a) 8.34, cambio en mg por cada cambio de 1 año
(b) 8.34

15. (a)



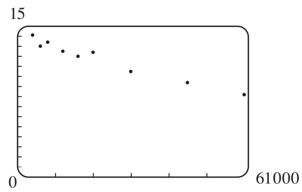
(b) $\frac{9}{5}$, cambio en °F por cada cambio de 1 °C; 32, temperatura Fahrenheit correspondiente a 0 °C

17. (a) $T = \frac{9}{68}N + \frac{88}{17}$ (b) $\frac{9}{68}$, cambio en °C por cada chirrido por cambio de un minuto (c) 25 °C

19. (a) $P = 0.10d + 1.05$ (b) 59.5 m

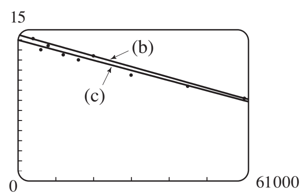
21. (a) Coseno (b) Lineal

23. (a)



Un modelo lineal es apropiado.

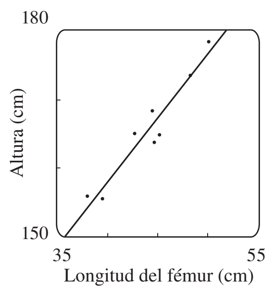
(b) $y = -0.000105x + 14.521$



(c) $y = -0.00009979x + 13.951$
(d) Alrededor de 11.5 por 100 de población
(e) Alrededor de 6%
(f) No

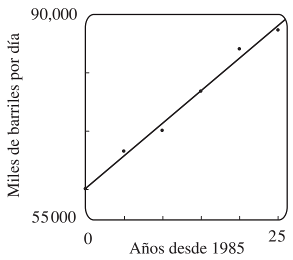
25. (a) Véase gráfica en el inciso (b).

(b) $y = 1.88074x + 82.64974$



(c) 182.3 cm

27. (a) Un modelo lineal es apropiado. Véase la gráfica en el inciso (b). (b) $y = 1116.64x + 60\,188.33$



(c) En miles de barriles por día: 79 171 y 90 338

29. Cuatro veces más brillante

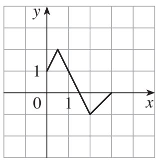
27. (a) $N = 3.1046A^{0.308}$ (b) 18

EJERCICIOS 1.3 ■ PÁGINA 42

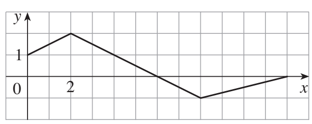
1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$ (d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$ (g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

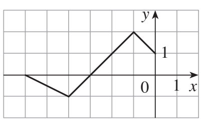
5. (a)



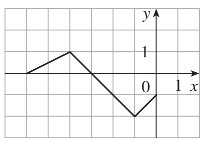
(b)



(c)

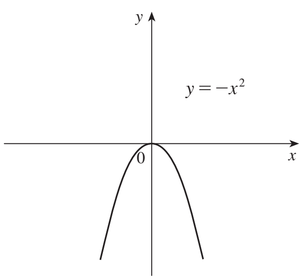


(d)

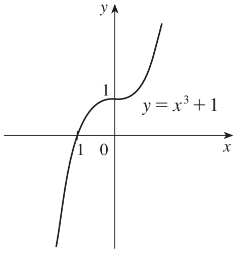


7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

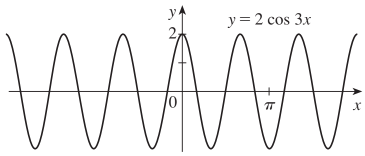
9.



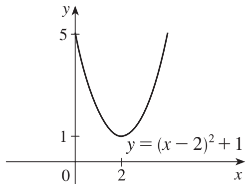
11.



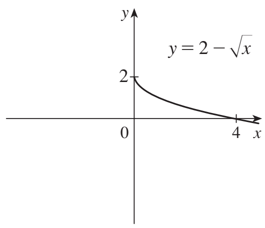
13.



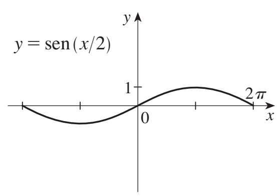
15.



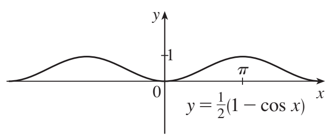
17.



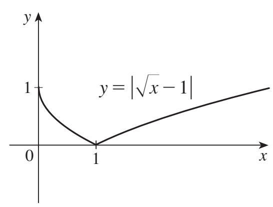
19.



21.



23.

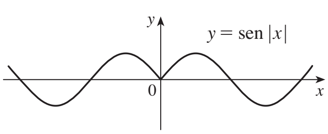


25. $L(t) = 12 + 2\operatorname{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

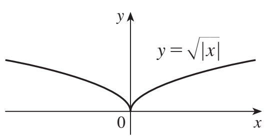
27. $D(t) = 5\cos[(\pi/6)(t - 6.75)] + 7$

29. (a) La porción de la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha del eje y es reflejada a través del eje y.

(b)



(c)



31. (a) $(f+g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1, (-\infty, \infty)$
(b) $(f-g)(x) = x^3 - x^2 + 1, (-\infty, \infty)$
(c) $(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2, (-\infty, \infty)$
(d) $(f/g)(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{3x^2 - 1}, \left\{x \mid x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

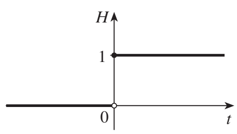
33. (a) $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 3x + 5, (-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 33x + 30, (-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = 9x + 20, (-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x, (-\infty, \infty)$

35. (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{4x - 2}, \left[\tfrac{1}{2}, \infty\right)$
(b) $(g \circ f)(x) = 4\sqrt{x + 1} - 3, [-1, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1}, [-1, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = 16x - 15, (-\infty, \infty)$

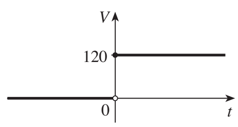
37. (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{(x+2)(x+1)}, \{x \mid x \neq -2, -1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}, \{x \mid x \neq -1, 0\}$
(c) $(f \circ f)(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2+1)}, \{x \mid x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = \dfrac{2x + 3}{3x + 5}, \{x \mid x \neq -2, -\tfrac{5}{3}\}$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = 3 \operatorname{sen}(x^2) - 2$
41. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$
43. $g(x) = 2x + x^2, f(x) = x^4$
45. $g(x) = \sqrt[3]{x}, f(x) = x/(1+x)$
47. $g(t) = t^2, f(t) = \sec t \tan t$
49. $h(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 1, f(x) = \sqrt{x}$
51. $h(t) = \cos t, g(t) = \operatorname{sen} t, f(t) = t^2$
53. (a) 4 (b) 3 (c) 0 (d) No existe; $f(6) = 6$ no está en el dominio de g. (e) 4 (f) -2
55. (a) $r(t) = 60t$ (b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; el área del círculo es una función de tiempo
57. (a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ (b) $d = 30t$
(c) $(f \circ g)(t) = \sqrt{900t^2 + 36}$; la distancia entre el faro y el barco como una función del tiempo transcurrido desde el mediodía

59. (a)

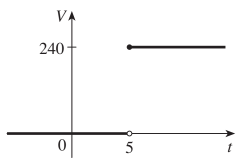


(b)



$V(t) = 120H(t)$

(c)



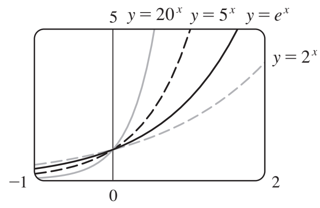
$V(t) = 240H(t - 5)$

61. Sí; $m_1 m_2$
63. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$
65. Sí

EJERCICIOS 1.4 ■ PÁGINA 53

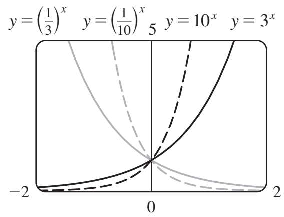
1. (a) 4 (b) $x^{-4/3}$
3. (a) $16b^{12}$ (b) $648y^7$
5. (a) $f(x) = b^x, b > 0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0, \infty)$
(d) Véanse las figuras 4(c), 4(b) y 4(a), respectivamente

7.



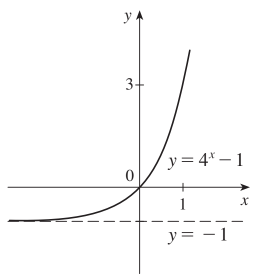
Todos se aproximan a 0 cuando $x \to -\infty$, todos pasan por (0, 1) y todos son crecientes. Cuanto mayor es la base, más rápida es la razón de incremento.

9.

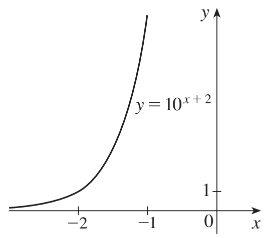


Las funciones con base mayor que 1 son crecientes y aquellas con base menor que 1 son decrecientes. Estas últimas son reflexiones de aquellas, a través del eje y.

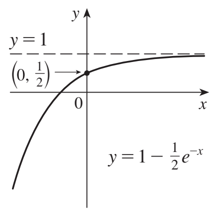
11.



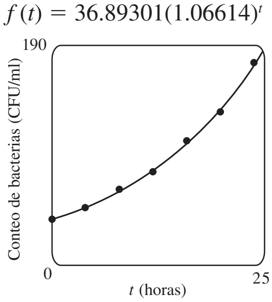
13.



15.



17. (a) $y = e^x - 2$ (b) $y = e^{x-2}$ (c) $y = -e^x$
(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = -e^{-x}$
19. (a) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty)$
21. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **27.** At $x \approx 35.8$
29. (a) Véase la gráfica en el inciso (c).
(b) $f(t) = 36.89301(1.06614)^t$
(c)



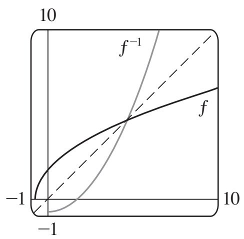
Alrededor de 10.87 h

31. (a) 25 mg (b) $200 \cdot 2^{-t/5}$ mg
(c) 10.9 mg (d) 38.2 días

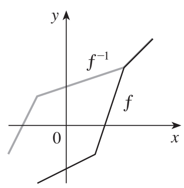
33. 3.5 días
35. $P = 2614.086(1.01693)^t$; 5381 millones; 8466 millones

EJERCICIOS 1.5 ■ PÁGINA 66

1. (a) Véase definición 1.
(b) Debe pasar la prueba de la recta horizontal.
3. No **5.** No **7.** Sí **9.** Sí **11.** No **13.** No
15. (a) 4 (b) 8 **17.** 0
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; la temperatura Fahrenheit como función de la temperatura Celsius; $[-273.15, \infty)$
21. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{2}{3}$, $x \geqslant 1$
23. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$ **25.** $y = e^x - 3$
27. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 3)$, $x \geqslant 0$

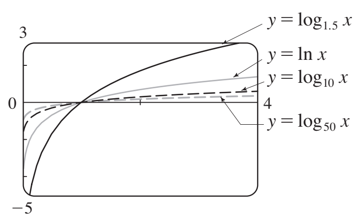


29.



31. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; f^{-1} y f son la misma función. (b) Cuarto de círculo en el primer cuadrante
33. (a) Se define como la inversa de la función exponencial con base b, es decir $\log_b x = y \Longleftrightarrow b^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) Véase la figura 11.
35. (a) 5 (b) $\frac{1}{3}$ **37.** (a) 2 (b) $\frac{2}{3}$
39. $\ln 5$ **41.** $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

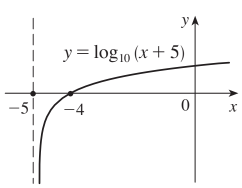
43.



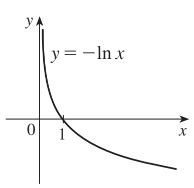
Todas las gráficas se aproximan a $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, todas pasan por (1, 0) y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más lenta es la razón de incremento.

45. Alrededor de 1.27×10^{25} km

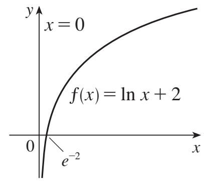
47. (a)



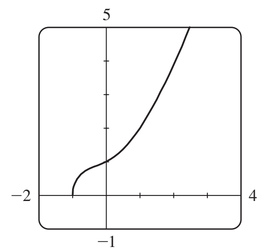
(b)



49. (a) $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$ (b) e^{-2}
(c)

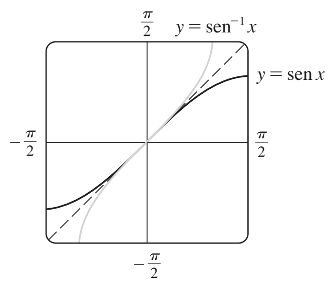


51. (a) $\frac{1}{4}(7 - \ln 6)$ (b) $\frac{1}{3}(e^2 + 10)$
53. (a) $5 + \log_2 3$ or $5 + (\ln 3)/\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4e}\right)$
55. (a) $0 < x < e$ (b) $x \geqslant \ln 3$
57. (a) $(\ln 3, \infty)$ (b) $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 3)$; $\mathbb{R}$
59. La gráfica pasa la prueba de la recta horizontal.



$f^{-1}(x) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2}\right)$, donde $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; dos de las expresiones son complejas.
61. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; el tiempo transcurrido cuando hay n bacterias (b) Después de alrededor de 26.9 horas
63. (a) π (b) $\pi/6$
65. (a) $\pi/4$ (b) $\pi/2$
67. (a) $5\pi/6$ (b) $\pi/3$
71. $x/\sqrt{1 + x^2}$

73.



La segunda gráfica es reflejo de la primera a través de la recta $y = x$

75. $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$, $[-\pi/2, \pi/2]$
77. (a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - c$ (b) $h^{-1}(x) = (1/c)f^{-1}(x)$

REPASO DEL CAPÍTULO 1 ■ PÁGINA 69

Examen verdadero-falso

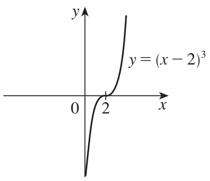
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

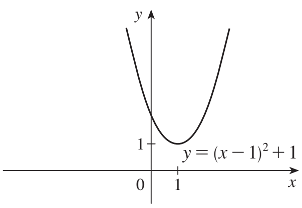
1. (a) 2.7 (b) 2.3, 5.6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) No; no pasa la prueba de la recta horizontal.
(g) Impar; su gráfica es simétrica alrededor del origen.
3. $2a + h - 2$ **5.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

9. (a) Desplace la gráfica 8 unidades hacia arriba.
(b) Desplace la gráfica 8 unidades a la izquierda.
(c) Prolongue la gráfica verticalmente por un factor de 2, luego desplácela 1 unidad hacia arriba.
(d) Desplace la gráfica 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.
(e) Refleje la gráfica a través del eje x.
(f) Refleje la gráfica a través de la recta $y = x$ (suponiendo que f es inyectiva).

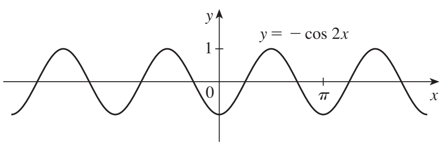
11.



13.



15.



17. (a) Ninguno de los dos (b) Impar (c) Par
(d) Ninguno de los dos

19. (a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$

21. Modelo exponencial; 270 millones

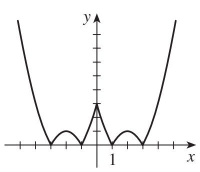
27. (a) $\frac{1}{16}$g (b) $m(t) = 2^{-t/4}$
(c) $t(m) = -4 \log_2 m$; el tiempo transcurrido cuando hay m gramos de ^{100}PD
(d) Alrededor de 26.6 días

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 76

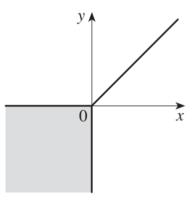
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, donde a es la longitud de la altitud y h la longitud de la hipotenusa

3. $-\frac{7}{3}$, 9

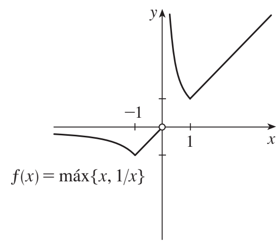
5.



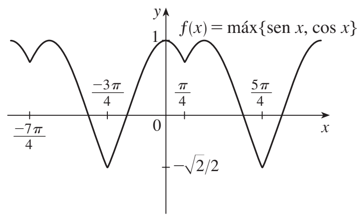
7.



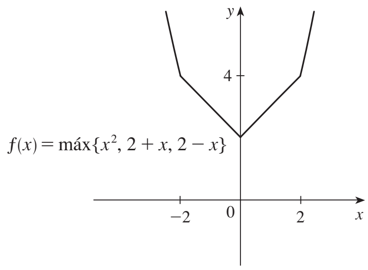
9. (a)



(b)



(c)



11. 5 **13.** $x \in \left[-1, 1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(1 + \sqrt{3}, 3\right]$

15. 80 km/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1 ■ PÁGINA 82

1. (a) -44.4, -38.8, -27.8, -22.2, $-16.\overline{6}$
(b) -33.3 (c) $-33\frac{1}{3}$

3. (a) (i) 2 (ii) 1.111111 (iii) 1.010101 (iv) 1.001001
(v) 0.666667 (vi) 0.909091 (vii) 0.990099
(viii) 0.999001 (b) 1 (c) $y = x - 3$

5. (a) (i) -7.15 m/s (ii) -5.19 m/s (iii) -4.945 m/s
(iv) -4.749 m/s (b) -4.7 m/s

7. (a) (i) 4.65 m/s (ii) 5.6 m/s (iii) 7.55 m/s
(iv) 7 m/s (b) 6.3 m/s

9. (a) 0, 1.7321, -1.0847, -2.7433, 4.3301, -2.8173, 0, -2.1651, -2.6061, -5, 3.4202; no (c) -31.4

EJERCICIOS 2.2 ■ PÁGINA 92

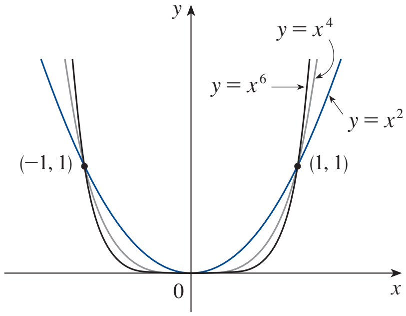
1. Sí

3. (a) $\lim_{x \to -5} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera) tomando a x suficientemente cerca de -5 (pero no igual a -5).
(b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes y negativos tomando a x suficientemente cerca de 3 hasta valores mayores que 3.

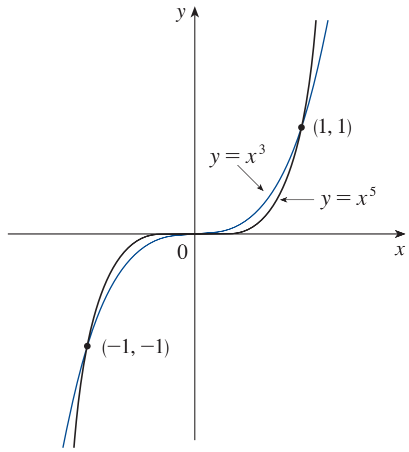
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones potencia $f(x) = x^a$

(i) $f(x) = x^n$, n un entero positivo

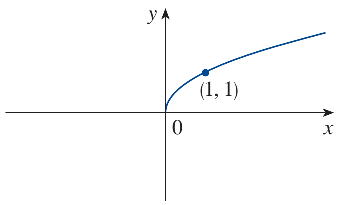


n par

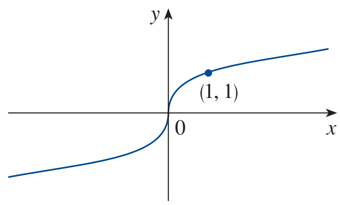


n impar

(ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n un entero positivo

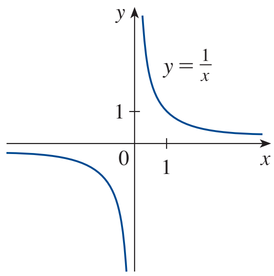


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

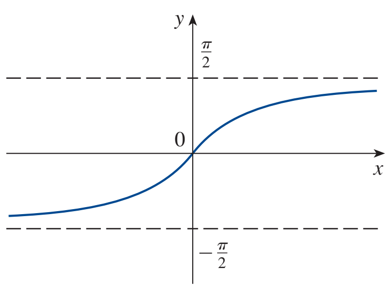


Funciones trigonométricas inversas

$$\arcsen x = \operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

$$\arctan x = \tan^{-1} x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

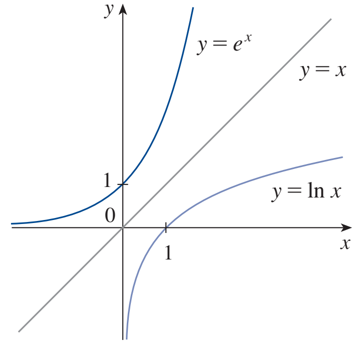
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\log_b x = y \iff b^y = x$

$\ln x = \log_e x$, donde $\ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$



$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

Ecuaciones de eliminación

$\log_b(b^x) = x \qquad b^{\log_b x} = x$

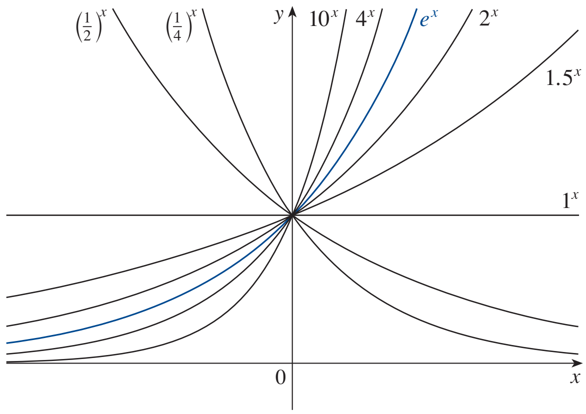
$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$

Leyes de los logaritmos

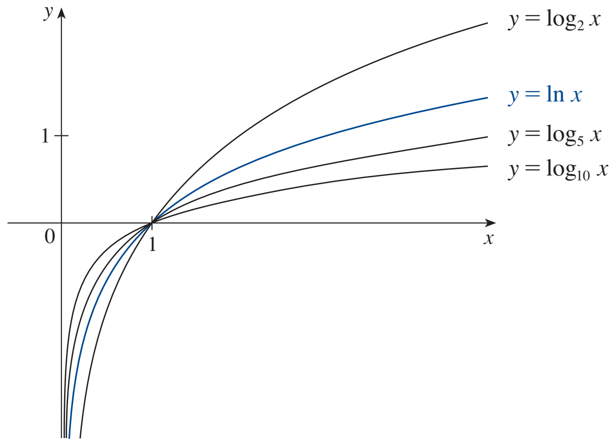
1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b(x^r) = r \log_b x$



Funciones exponeciales



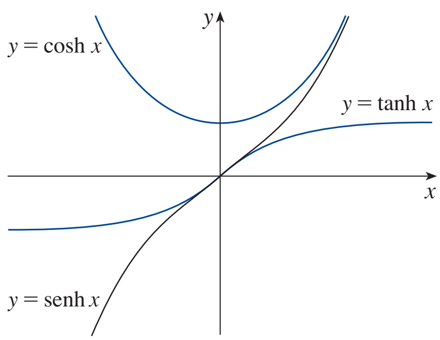
Funciones logarítmicas

Funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ $\qquad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$



Funciones hiperbólicas inversas

$y = \operatorname{senh}^{-1} x \iff \operatorname{senh} y = x$

$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x$ y $y \geqslant 0$

$y = \tanh^{-1} x \iff \tanh y = x$

$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$