Asíntotas

Asíntota vertical, horizontal y oblicua.

Para recordar…

Se le llama asíntota de la gráfica de una función a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función, es decir que la distancia entre las dos tiende a cero, a medida que se extienden indefinidamente

- La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de f si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales.

- La recta $x = a$ es asíntota vertical de f si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Una función puede no tener asíntotas verticales o tener una, dos, tres,…o infinitas.

Ejemplos

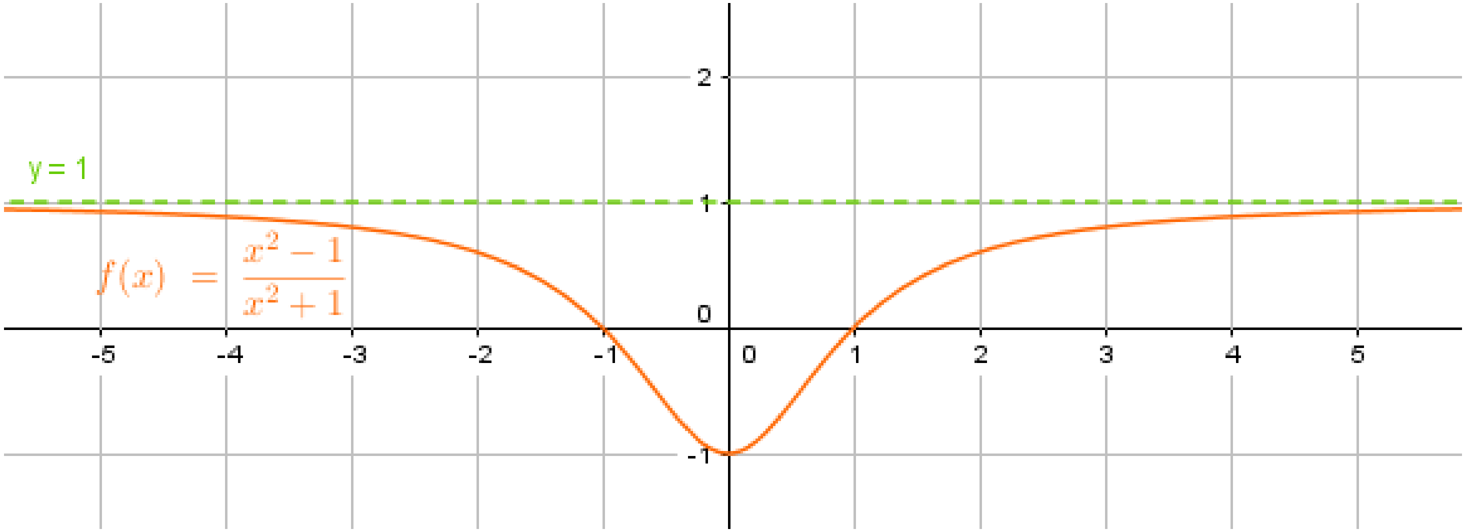
Ejemplo 1. La curva $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 1/x^2}{1 + 1/x^2} = 1$$

Al ser f una función par se tiene además,

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ =1. En este caso, f tiene una única asíntota horizontal.

Gráfica de la función del ejemplo 1



Ejemplos

Determine las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

Solución. Puesto que $\tan x = \frac{sen\,(x)}{\cos\ x}$ hay asíntotas verticales potenciales donde $\cos x = 0$. En efecto, como $\cos x \to 0^{+}$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}^{-}$ y $\cos x \to 0^{-}$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}^{+}$ y como $sen(x)$ es positiva para x próximo a $\frac{\pi}{2}$ se tiene que:

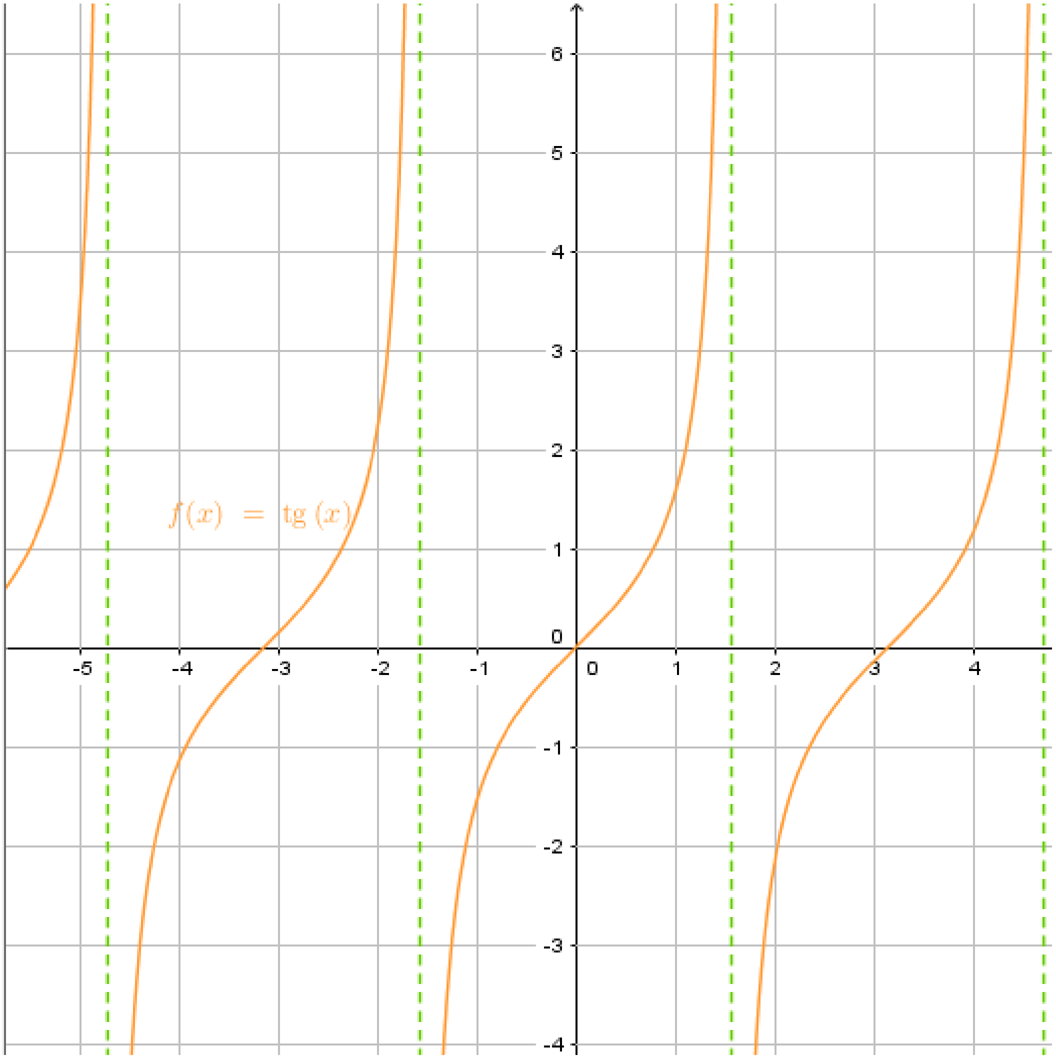
$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}} \tan x = \infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}} \tan x = -\infty$$

Esto demuestra que la recta $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota verical. Un razonamiento similar muestra que las rectas $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, donde n es un entero, son asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

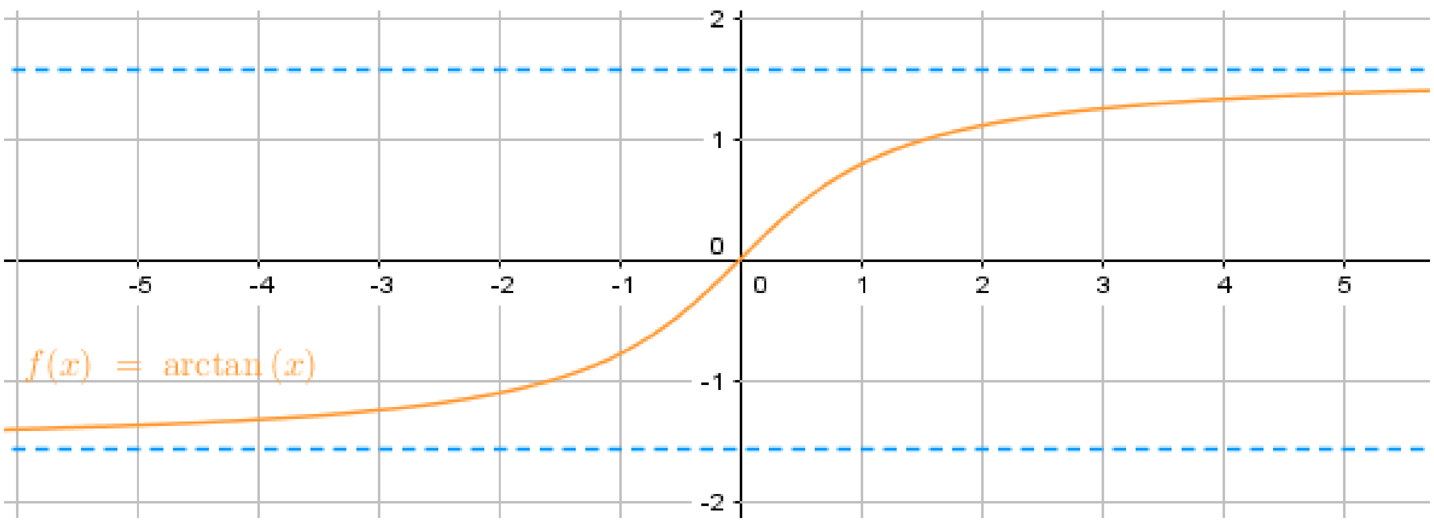
La siguiente gráfica lo confirma:

Ejemplos



Ejemplos

Un ejemplo de curva con dos asíntotas horizontales es $y = \arctan(x)$. Observe su gráfica:



Como las rectas $x = \pm\frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$, se tiene que $y = \pm\frac{\pi}{2}$ son asíntotas horizontales de $f^{-1}(x) = \tan x$.

Ejemplos

Si la recta $y = mx + h$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ entonces

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad h = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

Consideremos la función $f(x) = \frac{1-3x^2}{x+1}$.

La pendiente es

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-3x^2}{x(x+1)} = -3$$

La ordenada al origen es

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1-3x^2}{x+1} + 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+3x}{x+1} = 3$$

Luego, la asíntota oblicua es $y = -3x + 3$. Se trata de una asíntota oblícua por ambos lados, por seo hemos calculado los límites cuando $x \to \pm\infty$.

La gráfica se ilustra a continuación:

Ejemplos