Solution

Thaddeus

安徽师范大学附属中学

2017 年 8 月 26 日

Count

给定n，求合法的$(x_1, x_2, x_3, ..., x_{2m})$组数。一组$x$是合法的，当且仅当

- $\forall i \in [1, 2m]$，$x_i \in Z^+$，$x_i \mid n$.
- $\prod_{i=1}^{2m} x_i \le n^m$.

合法的$(x_1, x_2, x_3, ..., x_{2m})$可能有很多，请你输出方案数。

$n \le 10^9$，$m \le 100$。

Solution

为了方便，假设下面讨论的x都满足$\forall i \in [1, 2m]$，$x_i \in Z^+$，$x_i \mid n$.

Solution

为了方便，假设下面讨论的x都满足$\forall i \in [1, 2m]$，$x_i \in Z^+$，$x_i \mid n$.

令$F(x) = \prod_{i=1}^{2m} x_i$。如果$F(x) < n^m$，令$x' = (n/x_1, n/x_2, ..., n/x_{2m})$，$F(x') = n^{2m}/F(x) > n^m$。发现一组$F(x) < n^m$一定对应一组$F(x') > n^m$，假设所有$x$中，$F(x) < n^m$ 的有$s1$个，$F(x) = n^m$的有$s2$个，$F(x) > n^m$ 的有$s3$个。

Solution

为了方便，假设下面讨论的x都满足$\forall i \in [1, 2m]$，$x_i \in Z^+$，$x_i \mid n$.

令$F(x) = \prod_{i=1}^{2m} x_i$。如果$F(x) < n^m$，令$x' = (n/x_1, n/x_2, ..., n/x_{2m})$，$F(x') = n^{2m}/F(x) > n^m$。发现一组$F(x) < n^m$一定对应一组$F(x') > n^m$，假设所有$x$中，$F(x) < n^m$ 的有$s1$个，$F(x) = n^m$的有$s2$个，$F(x) > n^m$ 的有$s3$个。

$s1 = s3, s1 + s2 + s3 = \sigma(n)^{2m}$，所以$s1 = \frac{\sigma(n)^{2m} + s2}{2}$。

Solution

只需要求出$s2$就好，问题转化成了有多少$F(x) = n^m$。

Solution

只需要求出$s2$就好，问题转化成了有多少$F(x) = n^m$。

我们将n质因数分解，观察出，对于每一个质因子p，都是相互独立的。我们考虑a_j表示x_j中含有的p的指数。令w表示n中含有p的指数。

Solution

只需要求出$s2$就好，问题转化成了有多少$F(x) = n^m$。

我们将n质因数分解，观察出，对于每一个质因子p，都是相互独立的。我们考虑a_j表示x_j中含有的p的指数。令w表示n中含有p的指数。

要求$\sum_{i=1}^{2m} a_j = w * m, a_j \geq 0$的方案数。

Solution

要求$\sum_{i=1}^{2m} a_j = w * m, a_j \geq 0$的方案数。
令$dp[i][j]$表示前i个数sum是j的方案数。

Solution

要求$\sum_{i=1}^{2m} a_j = w * m, a_j \geq 0$的方案数。

令$dp[i][j]$表示前i个数sum是j的方案数。

$dp[i][j] = \sum_{k=0}^{w} dp[i-1][j-k]$

时间复杂度$O(\sqrt{n} + \log n * m^2)$

Delete

给定一个序列，每次删除一个上升或者下降子序列。要求500次内将序列删空。

为了方便起见，保证$(x_1, x_2, ..., x_n)$是一个$1..n$的排列。

Solution

我们令序列的最长上升子序列为x，最长下降子序列为y。

Solution

我们令序列的最长上升子序列为x，最长下降子序列为y。

根据Dilworth定理，序列最少可以用y条上升子序列覆盖。那么显然$x * y \geq n$，$max(x, y) \geq \sqrt{n}$。

Solution

我们令序列的最长上升子序列为x，最长下降子序列为y。

根据Dilworth定理，序列最少可以用y条上升子序列覆盖。那么显然$x * y \geq n$，$max(x, y) \geq \sqrt{n}$。

所以我们每次删除最长的最长上升子序列或者下降子序列，那么序列长度每次至少会减少$\sqrt{n}$。所以只要每次贪心的找到最长的子序列删掉，就可以在500次内删除完。

时间复杂度$O(500 * n \log n)$

Floor it

令$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，求$\lfloor x^n \rfloor \ mod \ p$。

数据范围$n \leq 10^{18}$。

Solution

令$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

显然$-1 < y < 0, 0 < x$。

Solution

令$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$。
显然$-1 < y < 0, 0 < x$。
发现x, y恰好是$t^2 = t + 1$的两个解。构造数列$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$。
则x与y为A_n的两个特征根。

Solution

我们令$A_n = x^n + y^n$，带入$n = 1, n = 2$，发现$A_1 = 1, A_2 = 3$。
当n为偶数时，$0 < y^n < 1$，此时$\lfloor x^n \rfloor = A_n - 1$.
当n为奇数时，$-1 < y^n < 0$，此时$\lfloor x^n \rfloor = A_n$.

Solution

我们令$A_n = x^n + y^n$，带入$n = 1, n = 2$，发现$A_1 = 1, A_2 = 3$。

当n为偶数时，$0 < y^n < 1$，此时$\lfloor x^n \rfloor = A_n - 1$.

当n为奇数时，$-1 < y^n < 0$，此时$\lfloor x^n \rfloor = A_n$.

我们只要能求出A_n即可。因为有递推式$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$。使用矩阵快速幂即可。

时间复杂度$O(2^3 * logn)$