基础知识

- 组合数:从 n 个可区分的物品中选出 m 个的方案数,即 $\binom{n}{m}=rac{n!}{m! imes(n-m)!}$ 。这里规定当 n< m 时 $\binom{n}{m} = 0$.
- $lacksymbol{ iny Pascal}$ 公式: $inom{n}{m}=inom{n-1}{m}+inom{n-1}{m-1}$ 。
- $lacksymbol{\blacksquare}$ 二项式定理 $\colon (x+y)^n = \sum\limits_{i=0}^n inom{n}{i} x^i y^{n-i}$ 。
- Lucas 定理: $\binom{n}{m} \mod p = \prod \binom{n_i}{m_i} \mod p$, 其中 n_i, m_i 为 n, m 在 p 进制 $\overline{}$ 下的第 i 位。

组合恒等式

- $ullet egin{array}{ll} ullet inom{n}{m} = inom{n}{n-m} \ ullet \sum\limits_{i=0}^n inom{n}{i} = 2^n \end{array}$
- $lacksquare \sum_{i=0}^n inom{n}{i}[2\mid i] = \sum_{i=0}^n inom{n}{i}[2
 mid i] = 2^{n-1}$
- k 个非负整数变量和位 n 的方案数: $\binom{n+k-1}{k-1}$
- $\bullet \quad \sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$
- $\bullet \quad \sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
- lacksquare $\sum_{i=0}^k inom{n}{i}inom{m}{k-i}=\overline{inom{n+m}{k}}$

常见数列

- 错排数:
 - 递推式: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$
 - 通向式: $D_n = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}$
 - 简化式: $D_n = \left| \frac{n!}{e} + 0.5 \right|$
- 卡特兰数:

 - 递推式: $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$ 通向式: $C_n = \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$
- 斯特林数
 - 第一类斯特林数: $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$ **■** 第二类斯特林数: $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$

 - 第二类斯特林数通向式: $\left\{egin{array}{c} n \\ m \end{array}
 ight\} = rac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k {m \choose k} (m-k)^n$
- 贝尔数:

■ 与斯特林数的关系: $B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ egin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$

ullet 递推式: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n inom{n}{k} B_k$

ullet 调和级数: $H_n=\sum_{i=1}^nrac{1}{i}=\ln n+\gamma+\epsilon_n$,其中 γ 是欧拉常数, $\epsilon_n=rac{1}{2n}$ 。

自然数幂之和

求: $S_k(n) = \sum_{i=0}^n i^k$ 。 $S_k(n)$ 是关于 n 的 k+1 次多项式。

■ 拉格朗日插值:对于 k 次多项式函数 F 以及 k+1 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)$,有

 $F(x) = \sum_{i=0}^k y_i \prod_{i
eq j} rac{x - x_j}{x_i - x_j}$ 『 斯特林数: $S_k(n) = rac{(n+1)^{k+1}}{k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} egin{bmatrix} k \ i \end{bmatrix} S_i(n)$

■ 伯努利数: $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i$ ■ 伯努利多项式: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i(t)}{i!} x^i = \frac{x}{e^x-1} e^{tx}$ ■ $S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k {k+1 \choose i} (n+1)^i B_{k+1-i}$, $\Leftrightarrow n=0$, 则 $\sum_{i=0}^k {k+1 \choose i} B_i = 0$

容斥原理

$$egin{aligned} \left|igcup_{i=1}^n A_i
ight| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|
ight) \ \left|igcap_{i=1}^n A_i
ight| &= \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \left|igcap_{i \in S} \overline{A_i}
ight| \end{aligned}$$

min-max 容斥:

$$\max\{S\} = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \min\{T\}$$

斯特林反演

下降幂

・ 定义: $n^{\underline{m}}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ ・ 定理: $n^{m}=\sum\limits_{i=0}^{m}\left\{ egin{array}{c} m \\ i \end{array} \right\}n^{\underline{i}}$

$$lacksymbol{f au}$$
 定理: $n^m = \sum\limits_{i=0}^m \left\{ egin{array}{c} m \ i \end{array}
ight\} n^{i\over 2}$

上升幂

・ 定义: $n^{\overline{m}}=n(n+1)(n+2)\cdots\overline{(n+m-1)}$ ・ 定理: $n^{\overline{m}}=\sum\limits_{k}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}n^{k}$

• 定理:
$$n^{\overline{m}} = \sum\limits_k \left[egin{array}{c} m \\ k \end{array} \right] n^k$$

引理—

$$x^{ar{n}}=(-1)^n(-x)^{\overline{n}},\,\,x^{\overline{n}}=(-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$

引理二(反转公式)

$$egin{aligned} \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} igg[n \ k igg] igg\{ k \ m igg\} &= [m=n] \ \\ \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} igg\{ n \ k igg] igg[k \ m igg] &= [m=n] \end{aligned}$$

定理 (斯特林反演)

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \left\{ egin{aligned} n \ k \end{aligned}
ight\} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left[egin{aligned} n \ k \end{aligned}
ight] f(k)$$

Burnside 引理

Burnside 引理用于计算本质不同的染色方案数,其中我们认为本质相 同为可以通过若干置换之一得到的。它 断言, 方案数即为在不同置换 下不动点的个数平均值。

用群论的语言说,设 G 是一个有限群,作用在集合 X 上。对每个 $g \in G$,令 |X/G| 表示 X 中在 g 作用下的 不动元素。则我们断言,轨道数 |X/G| 由如下公式给出:

$$|X/G| = rac{1}{G} \sum_{g \in G} |X^g|$$