

T1

不难发现在 S 后面加个 $\#$, T 后面加个 $\$$, 答案就是从 S, T 里分别选一个字符使得他们不一样的方案数。复杂度 $O(n)$ 。

T2

我们先考虑 a_i 全部相等的时候如何处理。~~熟练的选手可以直接看出是个多项式快速幂。~~

考虑倍增 dp, 即 $g(i, j)$ 表示当前 dp 了前 2^i 种糖果, 占了 j 个位置的方案数。转移显然:

$$g(i, j) = \sum_{k=0}^j g(i-1, k)g(i-1, j-k) \binom{j}{k}$$

其中, $g(0, 0 \cdots a_i) = 1$ 。

有了这个倍增的 dp 数组, 我们就可以合并出 n 种糖果的答案了。这部分复杂度 $O(m^2 \log n)$ 。

如果 a_i 不全相等, 注意到 $\geq m$ 的 a_i 都可以直接变成 m , 因此对于总共 m 种 a_i 分别做一遍上面的倍增即可, 最后再把所有 dp 数组背包合并起来。

总复杂度 $O(m^3 \log n)$ 。

T3

考虑一个性质, 令 $h(i)$ 表示 S 长度为 i 的后缀和 T 的编辑距离, 则 $i - h(i)$ 单调递增, 并且有 $|i - h(i)| \leq |T|$ 。

首先证明单调递增, 每次 i 增加 1 的时候, $h(i)$ 至多增加 1, 这个很显然, 因此单调递增。

其次 $-|T| \leq i - h(i) \leq |T|$, 这个也很显然。

于是我们就可以进行分段函数 dp 了。即 $f(i, j, k)$ 表示考虑了 S 长度为 i 的前缀, T 长度为 j 的前缀, 最大的 x 使得 $x - h(x) \leq k$ 。

转移方程仔细思考一下即可, 也就是魔改原来编辑距离的 dp。记 g 为暴力编辑距离的 dp:

$$g(i, j) = \min\{g(i-1, j) + 1, g(i, j-1) + 1, g(i-1, j-1) + [S_i \neq T_j]\}.$$

于是 $f(i, j, k) = \min\{f(i-1, j, k) + 1, f(i, j-1, k-1), f(i-1, j-1, k - [S_i = T_j]) + 1\}$ 。

初始值需要注意一下， $f(i, j, -|T| - 1 \cdots - j - 1) = -1, f(0, 0, -|T| - 1 \cdots - 1) = -1, f(0, 0, 0 \cdots |T|) = 0$ ，剩下全是 $+\infty$ 。

这个 dp 的复杂度为 $O(|S||T|^2)$ ，查询 $[l, r]$ 的话直接找最小的 k 使得 $f(r, |T|, k) \geq r - l + 1$ 即可，答案为 $r - l + 1 - k$ ，因此单次询问的复杂度可以做到 $O(|T|)$ 或 $O(\log |T|)$ 。

T4

显然是按位确定的套路，我们考虑确定了前 $i - 1$ 个点的值，来确定第 i 个点的值。

首先若前 $i - 1$ 个点构成的前缀已经严格比给定的前缀小了，那么当前显然就没有任何限制了，否则当前数字会有一个上界。

假设我们暴力枚举当前数字是 k ，于是问题转化为了钦定前 i 个点的数字，求此时合法的方案数。

不难发现现在就是若干个限制，每条限制都是限制子树内的所有数字要大于某个数。

设 s_i 表示被它限制的数的数量（注意不是子树大小）， t_i 表示限制，我们把所有数字按照 t_i 从大到小排序，那么方案数显然是：

$$\prod \binom{n - t_i - s_1 - \cdots - s_{i-1} - i + 1}{s_i}$$

于是我们就获得了一个 $O(n^3)$ 的做法。

优化成 $O(n^2)$ 也十分简单，考虑枚举当前数字的那部分，直接 **two pointers** 扫描更新乘积即可。