基础知识

- 组合数：从 n 个可区分的物品中选出 m 个的方案数，即 $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\times(n-m)!}$ 。这里规定当 $n<m$ 时 $\binom{n}{m}=0$。
- $Pascal$ 公式：$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$。
- 二项式定理：$(x+y)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$。
- $Lucas$ 定理：$\binom{n}{m}\mod p=\prod\binom{n_i}{m_i}\mod p$，其中 n_i,m_i 为 n,m 在 p 进制下的第 i 位。

组合恒等式

- $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$
- $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$
- $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[2\mid i]=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[2\nmid i]=2^{n-1}$
- k 个非负整数变量和位 n 的方案数：$\binom{n+k-1}{k-1}$
- $\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n}=\binom{n+m+1}{m}$
- $\sum\limits_{i=m}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$
- $\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$
- $\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$

常见数列

- 错排数：
  - 递推式：$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$
  - 通向式：$D_n=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}$
  - 简化式：$D_n=\left\lfloor\frac{n!}{e}+0.5\right\rfloor$
- 卡特兰数：
  - 递推式：$C_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_iC_{n-i-1}$
  - 通向式：$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
- 斯特林数
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}+(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix}$
  - 第二类斯特林数：$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}n-1\\m-1\end{Bmatrix}+m\begin{Bmatrix}n-1\\m\end{Bmatrix}$
  - 第二类斯特林数通向式：$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$
- 贝尔数：

    - 与斯特林数的关系：$B_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$
    - 递推式：$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$
- 调和级数：$H_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\ln n+\gamma+\epsilon_n$，其中 γ 是欧拉常数，$\epsilon_n=\frac{1}{2n}$。

自然数幂之和

求：$S_k(n)=\sum_{i=0}^{n}i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum_{i=0}^{k}y_i\prod_{i\neq j}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$
- 斯特林数：$S_k(n)=\frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}S_i(n)$
- 伯努利数：$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$
- 伯努利多项式：$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\beta_i(t)}{i!}x^i=\frac{x}{e^x-1}e^{tx}$
- $S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}(n+1)^iB_{k+1-i}$，令 $n=0$，则 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$

容斥原理

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|\right)$$
$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|}\left|\bigcap_{i\in S}\overline{A_i}\right|$$

$\min-\max$ 容斥：

$$\max\{S\}=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|+1}\min\{T\}$$

斯特林反演

下降幂

- 定义：$n^{\underline{m}}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$
- 定理：$n^m=\sum_{i=0}^{m}\begin{Bmatrix}m\\i\end{Bmatrix}n^{\underline{i}}$

上升幂

- 定义：$n^{\overline{m}}=n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$
- 定理：$n^{\overline{m}}=\sum_k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} n^k$

引理一

$$x^{\underline{n}}=(-1)^n(-x)^{\overline{n}},\ x^{\overline{n}}=(-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$

引理二（反转公式）

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix}=[m=n]$$
$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}=[m=n]$$

定理（斯特林反演）

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}g(k)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}f(k)$$

Burnside 引理

$Burnside$ 引理用于计算本质不同的染色方案数，其中我们认为本质相 同为可以通过若干置换之一得到的。它断言，方案数即为在不同置换 下不动点的个数平均值。

用群论的语言说，设 G 是一个有限群，作用在集合 X 上。对每个 $g\in G$，令 $|X/G|$ 表示 X 中在 g 作用下的不动元素。则我们断言，轨道数 $|X/G|$ 由如下公式给出：

$$|X/G|=\frac{1}{G}\sum_{g\in G}|X^g|$$