1

Alan Josué Gutiérrez Castillo

1.- Describe Geométricamente (línea, plano, o todo $\mathbb{R}^3$) de todas las combinaciones lineales de

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$

Primero veamos si son linealmente independientes, es decir, si se cumple que para $a,b \neq 0$ se cumple que:

si $a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3b\\6b\\9b\end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a+3b=0 \\ 2a+6b=0 \Rightarrow a+3b=0 \Rightarrow a=-3b \\ 3a+9b=0 \end{array}$$

como $a,b \neq 0$ notamos que $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$ no son linealmente independientes, por lo tanto, el lugar geométrico descrito por $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ es el mismo que $\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$, el cual está dado por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a,\ y=2a,\ z=3a \text{ para } a \in \mathbb{R}\}$$

La cual es una recta en $\mathbb{R}^3$ y en dirección $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ (pasa por el cero)

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

Veamos si son linealmente independientes

$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\2b\\3b\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ 2b=0 \\ 3b=0 \end{array}$

$\therefore$ a y b deben ser 0 $\therefore$ son linealmente independientes

Entonces el lugar geométrico es

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a,\ y=2b,\ z=3b \text{ para } a,b \in \mathbb{R}\}$$

El cual es un plano en $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ y que pasa por el cero

PAG.

DIA MES AÑO

c) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$

Vemos si son linealmente independientes

$$a\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 2a + 2c = 0 \text{ --(1)} \\ 2b + 2c = 0 \text{ --(2)} \\ 2b + 3c = 0 \text{ --(3)} \end{array}$$

Por (2) y (3) tenemos que $2c = 3c \therefore c = 0$ y por (1) $a = 0$ y por (2) $b = 0$

$\therefore \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ son linealmente independientes

Entonces el lugar geométrico es

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2a + 2c,\ y = 2b + 2c,\ z = 2b + 3c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

que es todo el espacio de $\mathbb{R}^3$.

2.- Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales? De las que sean lineales encuentra una representación matricial.

a) $f(x, y) = x + 2y$

$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2)$
$= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x + 2\alpha y = \alpha(x + 2y) = \alpha f(x, y)$

$\therefore$ si es lineal.

$$\underset{1\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} = \underset{1\times 1}{(x + 2y)} \rightarrow \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} = \underset{1\times 1}{(x + 2y)}$$

2

PAG.

DIA MES AÑO

$\Rightarrow$ $ax + by = x + 2y \Rightarrow x(a-1) + y(b-2) = 0$

$\therefore$ $a = 1$ y $b = 2$

$\therefore$ La matriz asociada es $A = (1 \;\; 2)$

b) $f(x, y, z) = 3z$

$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 3(z_1 + z_2) = 3z_1 + 3z_2 = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$

$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = 3\alpha z = \alpha 3z = \alpha f(x, y, z)$

$\therefore$ si es lineal

$\underset{1\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{1\times 1}{3z} \rightarrow (a \;\; b \;\; c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3z$

$\Rightarrow$ $ax + by + cz = 3z \rightarrow xa + by + z(c-3) = 0$

$\therefore$ $a = 0$, $b = 0$ y $c = 3$

$\therefore$ La matriz asociada es $A = (0 \;\; 0 \;\; 3)$

DIA MES AÑO

c) $f(x,y,z) = 2x^2 + y + z^4$

$f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = 2(x_1+x_2)^2 + y_1 + y_2 + (z_1+z_2)^4$

Mientras que

$f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) = 2x_1^2 + y_1 + z_1^4 + 2x_2^2 + y_2 + z_2^4$

donde claramente $f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \neq f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2)$

además $\alpha f(x,y,z) \neq f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$\therefore$ $f(x,y,z) = 2x^2 + y + z^4$ no es lineal

d) $f(x,y) = x + 2y + 2$

$f(x_1+x_2, y_1+y_2) = x_1 + x_2 + 2(y_1+y_2) + 2 = x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 2$

Mientras que

$(f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) = x_1 + 2y_1 + 2y)$

$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) = x_1 + 2y_1 + 2 + x_2 + 2y_2 + 4 = x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 4$

donde claramente $f(x_1+x_2, y_1+y_2) \neq f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$\therefore$ $f(x,y) = x + 2y + 2$ no es lineal

3.- Encuentra el conjunto de vectores S en $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a $(1,3,2)$. ¿Cual es el punto de S más cercano a $(1,1,1)$?

Como son perpendiculares $\Rightarrow (x,y,z)\cdot(1,3,2) = 0$

$\Rightarrow x + 3y + 2z = 0$

$\Rightarrow x = -3y - 2z$ con "y" y "z" $\in \mathbb{R}$

$\therefore$ $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y - 2z,\ y = y,\ z = z \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$

El cual es un plano

3

PAG. ____
DIA MES AÑO

Ahora queremos encontrar el punto $\bar{x} \in S$ que sea más cercano a $(1,1,1)$, para saber esto usamos la distancia entre 2 puntos y minimizamos la función,

$$d_{(S,(1,1,1))} = \|(-3y-2z, y, z) - (1,1,1)\| = \|(-3y-2z-1, y-1, z-1)\|$$

Antes verificamos que $(1,1,1) \notin S$ ya que
si $y=1, z=1 \Rightarrow x=-5 \therefore (1,1,1) \notin S$

$\therefore$ Queremos minimizar

$$f(y,z) = \sqrt{(-3y-2z-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(3y+2z+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

" $\sqrt{\sim}$ "

Derivamos

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{\sim}} \cdot [2(3y+2z+1)\cdot 3 + 2(y-1)] = 0$$

$$f_z = \frac{1}{2\sqrt{\sim}} [2(3y+2z+1)\cdot 2 + 2(z-1)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 9y + 6z + 3 + y - 1 = 0 \\ 6y + 4z + 2 + z - 1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 10y + 6z + 2 = 0 \;(1) \\ 6y + 5z + 1 = 0 \;(2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 60y + 36z + 12 = 0 \\ -60y - 50z - 10 = 0 \end{array} \Rightarrow -14z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{7}$$

sustituyendo en (1) $\Rightarrow 10y + \frac{6}{7} + 2 = 0 \Rightarrow 10y = -\frac{20}{7}$

$$\therefore y = -\frac{2}{7}$$

Verificamos que sea un mínimo, podríamos usar el criterio ~~f(y)~~ del hessiano pero como $f(y,z) \geq 0$ dado que es la distancia y $y = -\frac{2}{7}, z = \frac{1}{7}$ es punto crítico

se deduce que es un mínimo

$\therefore$ el punto más cercano es $\bar{x} = \left(-3\left(-\frac{2}{7}\right) - 2\left(\frac{1}{7}\right), -\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$

$$\bar{x} = \left(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

4.- Describe geométricamente la imagen de las siguientes transformaciones lineales.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$

Notemos que el Renglón 2 de la matriz es combinación lineal del Renglón 1 y 3, es decir $-1R_1 - R_3 = R_2$
$\therefore$ a primera vista lo manda a un plano

Veamos esto

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si son linealmente independientes x, y, z deben ser 0 si $A \cdot \vec{x} = 0$

$$\Rightarrow \quad x - y = 0 \rightarrow x = y \qquad \therefore \text{ si } z \neq 0 \rightarrow x, y \neq 0$$
$$-x + 2y - z = 0 \longrightarrow y = z$$
$$-y + z = 0 \longrightarrow -z + z = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a - b \\ b \end{pmatrix}$$

$\therefore a = -1$ y $b = -1$

(4)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ +1+1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \cancel{y}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el ~~esp~~ conjunto de llegada esta generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a,\ y = -a-b,\ z = b \text{ con } a,b \in \mathbb{R}\}$

El cual es un plano generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $A \cdot \vec{x} = 0$

$\rightarrow$
$x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow 2y + 3z = -x$ para $y, z \in \mathbb{R}$

$x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow k_1 = x$

$0 = 0$ con $k_1 \in \mathbb{R}$ si $2y + 3z \neq 0 \Rightarrow -x \neq 0$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overbrace{(x+2y+3z)}^{k_2 \in \mathbb{R}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ genera el espacio de llegada

$\therefore\ S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a,\ y = a,\ z = 0 \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$

Lo cual es una recta con dirección ~~en~~ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

PAG. ____
DIA MES AÑO

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ y+z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $A \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow$

$x+2y+3z=0 \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z$ $\quad \therefore$ si $z \neq 0$
$x+2y+3z=0$ $\quad \Rightarrow x, y \neq 0$
$y+z=0 \rightarrow y=-z$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ a+2b \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow b=1 \text{ y } a=1$$

$\therefore S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a+2b,\ y=a+2b,\ z=b \text{ con } a,b \in \mathbb{R}\}$

Lo cual es un plano generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que el conjunto de llegada es el vector $\bar{0}$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\}$

Problema 5.-

Sean A una matriz de m×n. Responde verdadero (V) o Falso (F)

V Si para un vector $\bar{x}$ en el dominio de A, $A\bar{x}$ es una combinación lineal de columnas de A.

F $A\bar{x}=\bar{b}$ siempre tiene solución si es una matriz cuadrada

V $A\cdot\bar{x}=\bar{b}$ tiene solución si y solo si $\bar{b}$ pertenece al espacio columna de A

V El espacio columna de A es el mismo que el espacio columna de 2A.

F Si $n>m$ entonces las columnas de A son linealmente dependientes

F Si $m>n$ entonces $A^T A$ es una matriz invertible. (Argumentar al final)

Problema 6.-

sea

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Que efecto tiene la matriz M sobre un vector en $\mathbb{R}^3$? Considere la ecuación $M_x=b$, para un $b\in\mathbb{R}^3$ dado, ¿Esta ecuación tiene solución, para todo b? Si sí, establezca una regla específica de tipo «dado un $b\in\mathbb{R}^3$ existe $x=$ ___ tal que $M_x=b$»

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Notamos que intercambia las coordenadas x, z mientras que la coordenada y permanece invariante

Sí tiene solución ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde los vectores son linealmente independientes por lo tanto el conjunto de llegada S es

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

$\therefore$ dado $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{b} = (a, b, c)$ existe $\vec{x} = (c, b, a)$

tal que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Problema 7.-

Sea A la matriz cualquiera. Argumenta porque $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$; esto es la dimensión del espacio columna de una matriz es igual a la dimensión del espacio renglón de su transpuesta.

Esto debido a que el rango de cualquier matriz es igual al máximo número de columnas linealmente independientes de dicha matriz y además como las operaciones elementales con renglones y columnas en una matriz conservan el rango podemos transformar la matriz A en

$D_{m\times n} = B_{m\times m} \cdot A_{m\times n}$, donde $B_{m\times m}$ es una matriz de operaciones elementales y $D_{m\times n}$ sería una matriz escalonada reducida de la forma

$D_{ij} = 0 \quad i \neq j$
$D_{ii} = 1 \quad i \leq r$
$D_{ij} = 0 \quad i > r$

Es decir, tenemos r columnas linealmente independientes donde la columna i y renglon i vale 1, y en todas las demas entradas cero.

Con esto tenemos $Rank(D) = Rank(B \cdot A) = Rank(A) = r$

Ahora al tomar la transpuesta de $D_{m \times n}$, esto es $D^t_{n \times m}$ notamos que las r columnas pasarán a ser r renglones linealmente independientes pero como $D_{ii} = 1$ para $i \leq r$ y 0 en otro caso $\Rightarrow$ también tenemos r columnas linealmente independientes

$$\therefore Rank(D_{m \times n}) = Rank(D^t_{n \times m}) = Rank(A^t \cdot B^t)$$

donde B^t sigue siendo una matriz de operaciones elementales (i.e. no altera el rank A)

$$\therefore Rank(A) = Rank(A^t)$$

Problema 8.- Sea A tal que $rank(A) = r$. Probar que $rank(A^t A) = rank(A A^t) = r$

Por el ejercicio anterior sabemos que A y A^t los podemos transformar en matrices escalonadas reducidas, i.e.

$D_{m \times n} = B_{m \times m} \cdot A_{m \times n}$ con $B_{m \times m}$ una matriz de operaciones elementales (m.o.e.)

y $D^t = A^t \cdot B^t$ para $B^t_{m \times m}$ sigue siendo una (m.o.e.)

y $D_{ii} = 1$ para $i \leq r$ y 0 en otro caso $\therefore$ al realizar $D \cdot D^t = C$

$D D^t = C$ donde es claro que $C_{ii} = 1$ para $i \leq r$ y 0 en otro caso.

$\therefore$ C es una matriz con r columnas linealmente independientes

PAG.

DIA MES AÑO

$\Rightarrow$ ~~$(\text{Rank}(C) = \text{Rank}(D^t \cdot D))$~~

$r = \text{Rank}(C) = \text{Rank}(D \cdot D^t) = \text{Rank}(B \cdot A \cdot A^t \cdot B^t) = \text{Rank}(A \cdot A^t)$

$\therefore \text{Rank}(A \cdot A^t) = r$ (ya que B y B^t no alteran Rank)

Para $\text{Rank}(\underset{n \times m}{A^t} \cdot \underset{m \times n}{A})$ Podemos considerar una matriz $B'_{n \times n}$ de operaciones elementales

tal que

$C'_{n \times m} = B'_{n \times n} A^t$ donde $C'_{ii} = 1$ para $i \leq r$ y 0 en otro caso es decir C' es una matriz con r columnas linealmente independientes

y $C'^t = A \cdot B'^t$

$\Rightarrow C' \cdot C'^t = D$ tambien es claro que $D_{ii} = 1$ para $i \leq r$ y 0 en otro caso, es decir, tambien se cumple $\therefore \text{Rank}(D) = r$

$\Rightarrow \text{Rank}(D) = \text{Rank}(C' \cdot C'^t) = \text{Rank}(B' \cdot A^t \cdot A \cdot B'^t) =$

$= \text{Rank}(A^t \cdot A) = r$

$\therefore \text{rank}(A) = \text{rank}(A \cdot A^t) = \text{rank}(A^t A) = r$

7

PAG.

PAG.

DIA MES AÑO

Problema 9.-

Suponga que A es una matriz de $n \times m$ con $n > m$ (i.e. A es una matriz vertical). Si rank $A = m$, $A^T A$ es definida positiva, i.e. $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m$ (vector en vertical)

$$x^T A^T A x > 0$$

a) Prueba en este caso que todos los autovalores de $A^T A$ son positivos.

- Sea $\bar{x}$ un vector propio de $A^T A$, entonces se cumple que

$(A^T A)\bar{x} = \lambda \bar{x}$ y multiplicando por $\bar{x}^T$ ambas ecuaciones

$$\Rightarrow \quad x^T (A^T A)\bar{x} = x^T \lambda \bar{x} = \lambda x^T \cdot \bar{x} = \lambda \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad (x^T A^T)(Ax) = \lambda \|x\|^2$$

y como $x^T A^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \quad \lambda \|x\|^2 > 0$ y como $\|x\|^2 > 0$ concluimos que $\lambda > 0$

Como se cumpliría para cualquier vector propio concluimos que todos los autovalores son positivos.

b) ¿Es cierto que si todos los autovalores de $A^T A$ son positivos entonces es definida positiva?

Si, ya que podemos ver que si $\bar{x}$ es autovector

$$\Rightarrow \quad (A^T A)\bar{x} = \lambda \bar{x}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}^T (A^T A)\bar{x} = \bar{x}^T \lambda \bar{x} = \lambda \|\bar{x}\|^2 > 0$$

$$\therefore \quad \bar{x}^T A^T A \bar{x} > 0$$

PAG

DIA MES AÑO

c) ¿Que pasa si rank $A < m$?

El espacio de llegada ya no sería todo $\mathbb{R}^m$ sino un subespacio de $\mathbb{R}^m$, por lo tanto λ podría tomar valores de cero en el polinomio característico.

10- Sea S una matriz simétrica

a) ¿Cuantos autovalores reales tiene S (contando su multiplicidad)? por multiplicidad de un autovalor λ de S nos referimos a la dimensión del $\ker(S-\lambda I)$

Como S solo tiene la restricción de ser simétrica supongamos que el campo de S son los numeros complejos y además que λ es un autovalor propio complejo.

$\Rightarrow$ como λ es autovalor $\Rightarrow S\bar{x} = \lambda\bar{x}$ para $\bar{x}$ autovector

Notemos que al hacer el producto punto

$\langle Sx, x\rangle = \langle\lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$

Pero por otro lado $\langle S\bar{x}, \bar{x}\rangle = \langle\bar{x}, S^T\bar{x}\rangle$ y como $S^T = S$

$\Rightarrow \langle S\bar{x}, \bar{x}\rangle = \langle\bar{x}, S\bar{x}\rangle = \langle\bar{x}, \lambda\bar{x}\rangle = \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle\lambda^*$

$\therefore \lambda = \lambda^*$, es decir, λ es igual a su conjugado !!

$\therefore$ $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Verifique que si v_1 es autovector de λ_1, v_2 es autovector de λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$$Sv_1 = \lambda v_1$$
$$Sv_2 = \lambda_2 v_2$$

Al hacer $\langle Sv_1, v_2 \rangle = \langle \lambda v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
como S es simétrica $S = S^T$

$$\Rightarrow \langle Sv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, S^T v_2 \rangle = \langle v_1, Sv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \lambda_2 \quad (\lambda_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \langle Sv_1, v_2 \rangle - \langle Sv_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle - \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \; //$$

c) Para la matriz $S = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra manualmente una descomposición espectral para S.

Notamos que S es simétrica y de 2×2 $\therefore$ la podemos descomponer como:

$$S = PDP^T$$

con P una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores de S, D es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los autovalores de S.

→ Primero calculamos los autovalores, esto es

$$\det(S - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(2-\lambda) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 22 - 13\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$$

DIA MES AÑO

$$\therefore \lambda = \frac{13 \pm \sqrt{169-24}}{2}$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{13+\sqrt{145}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{13-\sqrt{145}}{2}$$

Usando una calculadora para los autovectores obtenemos que (www.emathhelp.net)

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{145}}{8} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{9-\sqrt{145}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{145}}{8} & \frac{9-\sqrt{145}}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13+\sqrt{145}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13-\sqrt{145}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{145}}{8} & 1 \\ \frac{9-\sqrt{145}}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

11- Encuentra manualmente una descomposición espectral para la matriz $S = A^T A$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{2x3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{3x2} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Comenzamos calculando los autovalores $\Rightarrow \det|S - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 12 \\ 12 & 24-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(24-\lambda) - 144 = 0 \rightarrow 144 - 30\lambda + \lambda^2 - 144 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 30\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 30) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 30$$

Ahora calculamos los autovectores

para $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $6x + 12y = 0$ $\Rightarrow$ $x = -2y$ $\therefore$ los vectores de la forma
$12x + 24y = 0$

$\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}$ cumplen
$\neq 0$

Para $\lambda = 30$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30x \\ 30y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &6x + 12y = 30x \quad \text{---} (1) \\ &12x + 24y = 30y \rightarrow 6x + 12y = 15y \text{ --- } (2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow 15y = 30x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$ y sustituyendo en --- (2)

$\rightarrow 3y + 12y = 15y$ por lo tanto como el sistema tiene infinitas soluciones $\Rightarrow$

los vectores de la forma $\begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}$ cumplen.
$\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2y & \frac{y}{2} \\ y & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2y & y \\ y/2 & y \end{pmatrix} = S$$

con $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Al multiplicar $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 15y \\ 0 & 30y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2y & y \\ y/2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15y^2}{2} & 15y^2 \\ \frac{30y^2}{2} & 30y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{12}{15}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{4}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$$

ó

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{4}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$$

Estandariza la matriz anterior, encuentra su descomposición en valores singulares y sus componentes principales

Su descomposición en valores singulares está dada por

$$A = \Big(\underbrace{u_1 \cdots u_r}_{n\times r}\; u_{r+1} \cdots u_n\Big)_{n\times n} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}^{r\times r} \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix}_{m\times m}^{r\times m}$$

$$\therefore A = \Big(\;\Big)_{3\times 3}^{3\times 1} \Big(\;\Big)_{3\times 2}^{1\times 1} \Big(\;\Big)_{2\times 2}^{1\times 2} \quad (\text{ya que } \operatorname{rank}(A^TA) = 1 = r)$$

Donde $v_1, \ldots, v_r$ es un conjunto ortonormal de autovectores de A^TA

que por el ejercicio anterior sabemos que el $\operatorname{rank}(A^TA) = 1$

$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$ es un vector normal que cumple

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{30}$$

$$\text{y} \quad u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt5 \cdot \sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt5 \cdot \sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt5 \cdot \sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Por todo lo anterior concluimos que

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{V^T}$$

o bien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}} \end{pmatrix} (\sqrt{30}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

PAG. ___ DIA MES AÑO

Problema 12.-

Para cada uno de las siguientes funciones $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifica que es correcta la siguiente tabla de fórmulas

Parámetros fijos	f	∇f
(1) $v \in \mathbb{R}^n$	$f(x) = \langle v, x \rangle$	$\nabla f(a) = v \therefore \nabla f(a) \cdot x = f(a)$
(2)	$f(x) = \langle x, x \rangle$	$\nabla f(a) = 2a \therefore \nabla f(a) \cdot x = 2\langle a, x \rangle$
(3) $v \in \mathbb{R}^m$, $A_{m \times n}$	$f(x) = \langle Ax, v \rangle$	$\nabla f(a) = A^T v \therefore \nabla f(a) \cdot x = \langle A^T v, x \rangle$
(4) $A_{n \times n}$	$f(x) = \langle Ax, x \rangle$	$\nabla f(a) = (A + A^T)a \therefore \nabla f(a)$ $\therefore \nabla f(a) \cdot x = \langle Ax, a \rangle + \langle Aa, x \rangle$
(5) $A_{m \times n}$	$f(x) = \langle Ax, Ax \rangle$	$\nabla f(a) = 2(A^T A)a$ $\therefore \nabla f(a) \cdot x = \langle 2a, A^T A x \rangle$

(1) $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x) = \langle v, x \rangle = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right) \Rightarrow \nabla f = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$ que no depende de x

$\therefore \nabla f(a) = v$ y por consiguiente $\nabla f(a) \cdot x = (v_1, \dots, v_n)(x_1, \dots, x_n)$
$= \langle v, x \rangle$

2) $f(x) = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Rightarrow \nabla f(x) = (2x_1, \dots, 2x_n) = 2(x_1, \dots, x_n)$$

S. $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow \nabla f(a) = 2(a_1, \dots, a) = 2a$

$\therefore \nabla f(a) \cdot x = 2a \cdot x = 2\langle a, x \rangle$

DIA MES AÑO

(3) $v \in \mathbb{R}^m$ $\quad v=(v_1,\dots,v_m)$ $\quad A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$

$$f(x) = \langle Ax, v\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot v$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i\right) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_m)$$

$$= v_1\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + v_2\sum_{i=1}^n a_{2i}x_i + \dots + v_m\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i = \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n a_{ji}v_jx_i$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \left(\sum_{j=1}^m a_{j1}v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn}v_j\right) \text{ (que no depende de } x\text{)}$$

Por otra parte $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m} \Rightarrow \cancel{A^T x}$

$$\Rightarrow A^T \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^m a_{j1}v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn}v_j\right)$$

$\therefore$

$$\nabla f(a) = A^T \cdot v$$

$$\Rightarrow \nabla f(a) \cdot x = \left(\sum_{j=1}^m a_{j1}v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn}v_j\right) \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ji}v_j x_i = x_1\sum_{j=1}^m a_{j1}v_j + \dots + x_n\sum_{j=1}^m a_{jn}v_j$$

$$= \langle A^T v, x\rangle$$

(4) $A_{n \times n}$ $\quad f(x) = \langle Ax, x\rangle$

Sean $y \in \mathbb{R}^m$ y $A_{m \times n}$ una matriz. A partir de la tabla anterior calcula $\nabla Loss(\theta)$ para las siguientes funciones descritas en términos de la norma euclidiana:

a) $Loss(\theta) = \frac{1}{2}\|A\theta - y\|^2$. Deduce que $\theta^* = (A^T A)^{-1} A^T y$

satisface $\nabla Loss(\theta^*) = 0$

$\Rightarrow$ $Loss(\theta) = \frac{1}{2} \langle A\theta - y, A\theta - y \rangle$ que por linealidad

de la norma euclidiana

$Loss(\theta) = \frac{1}{2}(\langle A\theta, A\theta \rangle - \langle y, A\theta \rangle - \langle A\theta, y \rangle + \langle y, y \rangle)$

como $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

$\Rightarrow$ $Loss(\theta) = \frac{1}{2}(\langle A\theta, A\theta \rangle - 2\langle A\theta, y \rangle + \langle y, y \rangle)$

por (5) por (3)

$\Rightarrow$ $\nabla Loss(\theta) = \frac{1}{2}(2(A^T A)\theta - 2A^T y + 0)$

$= (A^T A)\theta - A^T y)$

Notemos que si $\nabla Loss(\theta^*) = 0 \Rightarrow \theta^*$ es punto crítico

$\Rightarrow A^T A\theta^* - A^T y = 0 \Rightarrow A^T A\theta^* = A^T y$

$\Rightarrow \theta^* = (A^T A)^{-1} A^T y$

Problema 13.-

Considere $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x)=\|x\|_1$ i.e

$$f(x_1,\dots,x_n)=|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$$

Describe el conjunto de puntos $a\in\mathbb{R}^n$ para los que $\nabla f(a)$ no existe. Para los puntos donde existe el gradiente, encuentra una fórmula o manera de calcularlo.

Recordemos que $f(x)=|x|$ no es derivable en 0, es decir

$$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}=\frac{x}{|x|} \quad x\neq 0$$

y como $\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ notamos que el conjunto de puntos donde no existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son de la forma $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ con $x_i=0$

$\therefore$

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i=0\}$$

que serían hiperplanos de $\mathbb{R}^n$

Donde también están incluidos los puntos de la forma $(0,0,\dots,x_n)$ es decir con mas ceros en las entradas.

$$\Rightarrow \nabla f(x)=\left(\frac{x_1}{|x_1|},\dots,\frac{x_n}{|x_n|}\right) \quad \forall x_i\neq 0 \text{ con } i=1,\dots,n$$

Problema 14: Para los puntos donde es posible, da una fórmula para el gradiente de la función de costo $Loss(\theta) = \|A\theta - y\|_1$ donde A es una matriz.

$A_{m\times n}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow A\cdot\theta = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\theta_i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\theta_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\theta_i\right)$$

$$\Rightarrow A\theta - y = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\theta_i - y_1, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\theta_i - y_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\theta_i - y_m\right)$$

$$\therefore \|A\theta - y\|_1 = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\theta_i - y_1\right| + \dots + \left|\sum_{i=1}^{n} a_{mi}\theta_i - y_m\right| = l(\theta)$$

que llamaremos como $\|A\theta - y\|_1 = |v_1| + \dots + |v_m| = f(\theta)$
$= \sum_{j=1}^{m} |v_j|$

como $v_j = f(\theta_j)$ si pensamos en una variable $v = f(\theta)$ y $\tilde{f}(\theta) = |$

$\Rightarrow y = |v| \Rightarrow y' = \frac{v}{|v|}\cdot v'$ por regla de la cadena

Como $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_m}\right)$ tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{v_1}{|v_1|}\cdot a_{11} + \dots + \frac{v_m}{|v_m|}\cdot a_{m1}, \dots, \frac{v_1}{|v_1|} a_{1m} + \dots + \frac{v_m}{|v_m|} a_{mm}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{v_j}{|v_j|} a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^{m} \frac{v_j}{|v_j|}\cdot a_{jm}\right)$$ sustituyendo v_j

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\theta_j - y_j\right)}{\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\theta_j - y_j\right|} a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\theta_j - y_j\right)}{\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\theta_j - y_j\right|}\cdot a_{jm}\right)$$

Problema 16.-

En el algoritmo de descenso de gradiente básico tenemos el update:

$$v_{n+1} = v_n - \alpha \nabla f(v_n) \quad \text{--- (1)}$$

Para cada iteración n, sea α_n una tasa de aprendizaje que minimiza:

$$\Psi(\alpha) = f(v_n - \alpha \nabla f(v_n))$$

Este α_n establece en cada paso k la tasa de aprendizaje óptima, en el sentido que hace que el valor $f(v_{n+1})$ sea el más pequeño posible. Prueba que si reemplazamos (1) por

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n \nabla f(v_n)$$

entonces direcciones de descenso consecutivas son ortogonales, en otras palabras:

$$\langle \nabla f(v_n), \nabla f(v_{n+1}) \rangle = 0$$

Esto se conoce como la propiedad zig-zag

Sol.

Como $v_{n+1} = v_n - \alpha \nabla f(v_n) \Rightarrow v_n = v_{n+1} + \alpha \nabla f(v_n)$

Usando la aproximación por taylor $f(x+p) \approx f(x) + \nabla f(x)^T \cdot p$

Tenemos que

$$f(v_n) = f(v_{n+1} + \alpha \nabla f(v_n)) \approx f(v_{n+1}) + \nabla f(v_{n+1})^T \cdot \alpha \nabla f(v_n)$$

$$\Rightarrow f(v_{n+1}) \approx f(v_n) - \alpha \nabla f(v_{n+1}) \cdot \nabla f(v_n)$$

$\therefore \Psi(\alpha) = f(v_k - \alpha \nabla f(v_n)) = f(v_{n+1})$ lo podemos aproximar

$$\Psi(\alpha) \approx f(v_n) - \alpha \nabla f(v_{n+1}) \cdot \nabla f(v_k)$$

Como α_k minimiza $\varphi(\alpha)$ significa que α_k o punto crítico y por lo tanto $\frac{d\varphi}{d\alpha}=0$

$$\Rightarrow -\nabla f(x_n)\cdot \nabla f(v_{n+1})=0$$

es decir $\langle \nabla f(v_n), \nabla f(v_{n+1})\rangle = 0$

Argumento problema 5

1) V

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{A} x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) F

basta conque la matriz A no tenga inversa

ej: considerar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene solución

3) V

por 1) sabemos que $A\bar{x}$ = combinación lineal de columnas de A y si $A\bar{x}$ tiene solución $\Rightarrow$ b pertenece al espacio columna de A y si b pertenece al espacio columna de A basta con rearmar la matriz A a partir de las columnas para ver que $A\bar{x} = b$ tiene solución.

4) V

El espacio columna de A es igual que el de 2A ya que tendríamos una combinación de columnas de A en $2A\bar{x}$ $\therefore$ generan el mismo espacio

5) F

Considerar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$(m > n)$

6) F

Considerar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

no tiene inversa