

(1)

PAG. _____

DIA _____ MES _____ AÑO _____

Alan Josué Gutiérrez Castillo

1- Describe Geométricamente (línea, plano, o todo \mathbb{R}^3) de todas las combinaciones lineales de

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Primero, veamos si son linealmente independientes, a decir, si se cumple que para $a, b \neq 0$ se cumple que:

$$\text{Si } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b \\ 6b \\ 9b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a + 3b = 0$$

$$2a + 6b = 0 \Rightarrow a + 3b = 0 \Rightarrow a = -3b$$

$$3a + 9b = 0$$

como $a, b \neq 0$ notamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ no son linealmente independientes, por lo tanto, el lugar geométrico descrito por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es el mismo que $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, el cual está dado por

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a, y=2a, z=3a \text{ para } a \in \mathbb{R} \}$$

La cual es una recta en \mathbb{R}^3 y en dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (pasa por el cero)

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Veamos si son linealmente independientes

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ 2b=0 \\ 3b=0 \end{matrix}$$

$\therefore a$ y b deben ser 0 \therefore son linealmente independientes. Entonces el lugar geométrico es

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a, y=2b, z=3b \text{ para } a, b \in \mathbb{R} \}$$

El cual es un plano en \mathbb{R}^3 generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y que pasa por el cero

$$c) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verificar si son linealmente independientes

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2a + 2c &= 0 \quad \text{--- (1)} \\ 2b + 2c &= 0 \quad \text{--- (2)} \\ 2b + 3c &= 0 \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

Por (2) y (3) tenemos que $2c = 3c \therefore c = 0$ y por (1) $a = 0$ y por (2) $b = 0$

$\therefore \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes

Entonces el lugar geométrico es

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2a + 2c, y = 2b + 2c, z = 2b + 3c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

que es todo el espacio de \mathbb{R}^3 .

2.- Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales? De las que sean lineales encuentra una representación matricial.

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= x + 2y \\ f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x + 2\alpha y = \alpha(x + 2y) = \alpha f(x, y)$$

\therefore si es lineal.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 \times 2 & 2 \times 1 & 1 \times 1 & 2 \times 1 \end{matrix}$

2

PAG. _____

DIA _____ MES _____ AÑO _____

$$\Rightarrow ax + by = x + 2y \Rightarrow x(a-1) + y(b-2) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ y } b=2$$

\therefore La matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $f(x, y, z) = 3z$

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = 3(z_1+z_2) = 3z_1 + 3z_2 = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$$f(ax, ay, az) = 3az = a3z = af(x, y, z)$$

\therefore si es lineal

$$\underbrace{A}_{1 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{3z}_{1 \times 1} \rightarrow (a \ b \ c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3z$$

$$\Rightarrow ax + by + cz = 3z \rightarrow xa + by + z(c-3) = 0$$

$$\therefore a=0, \ b=0 \text{ y } c=3$$

\therefore La matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z^4$

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 2(x_1 + x_2)^2 + y_1 + y_2 + (z_1 + z_2)^4$$

Mientras que

$$f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = 2x_1^2 + y_1 + z_1^4 + 2x_2^2 + y_2 + z_2^4$$

donde claramente $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \neq f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$
además $\alpha f(x, y, z) \neq f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$\therefore f(x, y, z) = 2x^2 + y + z^4$ no es lineal

d) $f(x, y) = x + 2y + 2$

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) + 2 = x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 2$$

Mientras que

$$(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)) = x_1 + 2y_1 + 2 + x_2 + 2y_2 + 2$$

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = x_1 + 2y_1 + 2 + x_2 + 2y_2 + 2 = x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 4$$

donde claramente $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \neq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

$\therefore f(x, y) = x + 2y + 2$ no es lineal

3.- Encuentra el conjunto de vectores S en \mathbb{R}^3 que son perpendiculares a $(1, 3, 2)$. ¿Cuál es el punto de S más cercano a $(1, 1, 1)$?

Como son perpendiculares $\Rightarrow (x, y, z) \cdot (1, 3, 2) = 0$
 $\Rightarrow x + 3y + 2z = 0$

$$\Rightarrow x = -3y - 2z \text{ con } y \text{ y } z \in \mathbb{R}$$

$\therefore S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y - 2z, y = y, z = z \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$

El cual es un plano

(3)

PAG. _____

DIA MES AÑO

Ahora queremos encontrar el punto $\bar{x} \in S$ que sea más cercano a $(1, 1, 1)$, para saber esto usamos la distancia entre 2 puntos y minimizamos la función,

$$d_{S,m}) = \|(-3y-2z, y, z) - (1, 1, 1)\| = \|(-3y-2z-1, y-1, z-1)\|$$

Antes verificamos que $(1, 1, 1) \notin S$ ya que
si $y=1, z=1 \Rightarrow x=-5 \therefore (1, 1, 1) \notin S$

\therefore Queremos minimizar

$$f(y, z) = \sqrt{(-3y-2z-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(3y+2z+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Derivamos

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{}} \cdot [2(3y+2z+1) \cdot 3 + 2(y-1)] = 0$$

$$f_z = \frac{1}{2\sqrt{}} [2(3y+2z+1) \cdot 2 + 2(z-1)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9y + 6z + 3 + y - 1 = 0 \\ 6y + 4z + 2 + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10y + 6z + 2 = 0 & (I) \\ 6y + 5z + 1 = 0 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60y + 36z + 12 = 0 \\ -60y - 50z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow -14z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{7}$$

$$\text{sustituyendo en (I)} \Rightarrow 10y + \frac{6}{7} + 2 = 0 \Rightarrow 10y = -\frac{20}{7}$$

$$\therefore y = -\frac{2}{7}$$

Verificamos que sea un mínimo, podríamos usar el criterio del hessiano pero como $f(y, z) \geq 0$ dado que es la distancia y $y = -\frac{2}{7}, z = \frac{1}{7}$ es punto crítico.

se deduce que es un mínimo

∴ el punto más cercano es $\bar{x} = (-3(-\frac{2}{7}) - 2(\frac{1}{7}), -\frac{2}{7}, \frac{1}{7})$

$$\bar{x} = (\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{1}{7})$$

4. Describe geométricamente la imagen de las siguientes transformaciones lineales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Notemos que el renglón 2 de la matriz es combinación lineal del renglón 1 y 3, es decir $-1R_1 - R_3 = R_2$
 ∴ a primera vista lo manda a un plano

Veamos esto

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si son linealmente independientes x, y, z deben ser 0 si $A \cdot \bar{x} = 0$

$$\Rightarrow x - y = 0 \rightarrow x = y$$

$$-x + 2y - z = 0 \rightarrow y = z$$

$$-y + z = 0 \rightarrow -z + z = 0$$

$$\therefore \text{si } z \neq 0 \Rightarrow x, y \neq 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a-b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = -1 \text{ y } b = -1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el conjunto de llegada está generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a, y=-a-b, z=b \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \}$$

El cual es un plano generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S: A \cdot \vec{x} = 0$$

$$\Rightarrow x+2y+3z=0 \Rightarrow 2y+3z=-x \text{ para } y, z \in \mathbb{R}$$

$$x+2y+3z=0 \Rightarrow n_1=x$$

$$0=0$$

$$\text{con } K_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } 2y+3z \neq 0 \Rightarrow -x \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overbrace{(x+2y+3z)}^{K_2 \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ genera el espacio de llegada

$$\therefore S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a, y=a, z=0 \text{ con } a \in \mathbb{R} \}$$

Lo cual es una recta con dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ y+z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $A \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow$

$x+2y+3z=0 \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z$ $\therefore \text{si } z \neq 0$

$x+2y+3z=0 \Rightarrow x, y \neq 0$

$y+z=0 \Rightarrow y=-z$

$\therefore \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \cancel{3(a+b)}$

$= \begin{pmatrix} a+2b \\ a+2b \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow b=1 \text{ y } a=1$

$\therefore S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=a+2b, y=a+2b, z=b \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \}$

Lo cual es un plano generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que el conjunto de llegada es el vector $\vec{0}$

$\vec{0} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0 \}$

Problema 5.

Sean A una matriz de $m \times n$. Responde verdadero (V) o Falso (F)

- ☒ Si para un vector \bar{x} en el dominio de A , $A\bar{x}$ es una combinación lineal de columnas de A .
- ☐ $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ siempre tiene solución si es una matriz cuadrada
- ☒ $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ tiene solución si y solo si \bar{b} pertenece al espacio columna de A
- ☒ El espacio columna de A es el mismo que el espacio columna de $2A$.
- ☐ Si $n > m$ entonces las columnas de A son linealmente dependientes
- ☐ Si $m > n$ entonces $A^T A$ es una matriz invertible.

(Argumentar al final)

depende de como se define invertible.

Problema 6.

Sea

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Que efecto tiene la matriz M sobre un vector en \mathbb{R}^3 ?

Considere la ecuación $Mx = b$, para un $b \in \mathbb{R}^3$ dado, ¿Esta ecuación tiene solución, para todo b ? Si es, establezca una regla específica de tipo: "dado un $b \in \mathbb{R}^3$ existe $x = \underline{\quad}$ tal que $Mx = b$ "

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Notamos que intercambia las coordenadas x, z mientras que la coordenada y permanece invariante

S , tiene solución ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde los vectores son linealmente independientes por lo tanto el conjunto de llegada S es

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

\therefore dado $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{b} = (a, b, c)$ existe $\vec{x} = (c, b, a)$

$$\text{tal que } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Problema 7.-

Sea A la matriz cualquiera. Argumenta porque $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$; esto es la dimensión del espacio columna de una matriz es igual a la dimensión del espacio renglón de su transpuesta.

Esto debido a que el rango de cualquier matriz es igual al máximo número de columnas linealmente independientes de dicha matriz y además como las operaciones elementales con renglones y columnas en una matriz conservan el rango podemos transformar la matriz A en

$$D = B \cdot A, \text{ donde } B_{\text{max}} \text{ es una matriz de operaciones elementales y } D \text{ sería una matriz}$$

escalonada reducida de la forma

$$D_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$D_{ij} = 1 \quad i \leq r$$

$$D_{ij} = 0 \quad i > r$$

Es decir, tenemos r columnas linealmente independientes donde la columna i y renglón i vale 1 y en todas las demás entradas cero.

$$\text{Con esto tenemos } \text{Rank}(D) = \text{Rank}(B \cdot A) = \text{Rank}(A) = r$$

Ahora al tomar la transpuesta de D , esto es D^t , notamos que las r columnas pasarán a ser r renglones linealmente independientes pero como $D_{ii} = 1$ para $i \leq r$ y 0 en otro caso \Rightarrow también tenemos r columnas linealmente independientes

$$\therefore \text{Rank}(D) = \text{Rank}(D^t) = \text{Rank}(A^t \cdot B^t)$$

donde B^t sigue siendo una matriz de operaciones elementales (i.e. no altera el $\text{rank}(A)$)

$$\therefore \text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^t)$$

Problema 8.5 Sea A tal que $\text{rank}(A) = r$. Prueba que $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A A^T) = r$

Por el ejercicio anterior sabemos que A y A^T los podemos transformar en matrices escalonadas reducidas, i.e.

$$D = B \cdot A \quad \text{con } B \text{ una matriz de operaciones elementales (m.o.e.)}$$

$$\text{y } D^t = A^t \cdot B^t \quad \text{ya } B^t \text{ sigue siendo una (m.o.e.)}$$

$$\text{y } D_{ii} = 1 \text{ para } i \leq r \text{ y } 0 \text{ en otro caso } \therefore \text{al realizar } D \cdot D^t = C$$

$$D \cdot D^t = E \quad \text{donde es claro que } C_{ii} = 1 \text{ para } i \leq r \text{ y } 0 \text{ en otro caso.}$$

C es una matriz con r columnas linealmente independientes

$$\Rightarrow (\text{Rank}(C) = \text{Rank}(D^t \cdot D))$$

$$r = \text{Rank}(C) = \text{Rank}(D \cdot D^t) = \text{Rank}(B \cdot A \cdot A^t \cdot B^t) = \text{Rank}(A \cdot A^t)$$

$$\therefore \text{Rank}(A \cdot A^t) = r$$

Hay que $B + B^t$ no
alteran Rank

Para $\text{Rank}(A^t \cdot A)$ Podemos considerar una matriz $B_{n \times n}$ de operaciones elementales

tal que

$$C'_{n \times m} = B'_{n \times n} A^t \quad \text{donde } C'_{ii} = 1 \text{ para } i \leq r \text{ y } 0 \text{ en otro caso}$$

es decir C' es una matriz con r columnas

linealmente independientes

$$\vee C'^t = A \cdot B'^t$$

$$\Rightarrow C' \cdot C'^t = D \quad \text{también es claro que } D_{ii} = 1 \text{ para } i \leq r \text{ y } 0 \text{ en otro caso, es decir, también se cumple}$$

$$\therefore \text{Rank}(D) = r$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(D) = \text{Rank}(C' \cdot C'^t) = \text{Rank}(B' \cdot A^t \cdot A \cdot B'^t) =$$

$$= \text{Rank}(A^t \cdot A) = r$$

$$\therefore \text{rank}(A) = \text{rank}(A \cdot A^t) = \text{rank}(A^t \cdot A) = r$$

7

PAG.

PAG.

DIA MES AÑO

Problema 9.

Suponga que A es una matriz de $n \times m$ con $n > m$ i.e. A es una matriz vertical. Si $\text{rank } A = m$, $A^T A$ es definida positiva, i.e.

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m$ (vector en vertical)

$$\bar{x}^T A^T A \bar{x} > 0$$

a) Pruebe en este caso que todos los autovalores de $A^T A$ son positivos.

• Sea \bar{x} un vector propio de $A^T A$, entonces se cumple que

$$(A^T A) \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad \text{y multiplicando por } \bar{x}^T \text{ ambas ecuaciones}$$

$$\Rightarrow \bar{x}^T (A^T A) \bar{x} = \bar{x}^T \lambda \bar{x} = \lambda \bar{x}^T \bar{x} = \lambda \|\bar{x}\|^2$$

$$\Rightarrow (\bar{x}^T A^T)(A \bar{x}) = \lambda \|\bar{x}\|^2$$

$$\text{y como } \bar{x}^T A^T A \bar{x} > 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \lambda \|\bar{x}\|^2 > 0 \quad \text{y como } \|\bar{x}\|^2 > 0 \text{ concluimos}$$

$$\text{que } \lambda > 0$$

Como se cumple para cualquier vector propio concluimos que todos los autovalores son positivos.

b) ¿Es cierto que si todos los autovalores de $A^T A$ son positivos entonces A es definida positiva?

Si, ya que podemos ver que si \bar{x} es autovector

$$\Rightarrow (A^T A) \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{x}^T (A^T A) \bar{x} = \bar{x}^T \lambda \bar{x} = \lambda \|\bar{x}\|^2 > 0$$

$$\therefore \bar{x}^T A^T A \bar{x} > 0$$

c) ¿Que pasa si $\text{rank } A < m$?

El espacio de llegada ya no sería todo \mathbb{R}^m sino un subespacio de \mathbb{R}^m , por lo tanto λ podría tomar valores de cero en el polinomio característico.

10- Sea S una matriz simétrica

a) ¿Cuántos autovalores reales tiene S (contando su multiplicidad)?
 por multiplicidad de un autovalor λ de S nos referirémos a la dimensión del $\ker(S - \lambda I)$

Como S solo tiene la restricción de ser simétrica supongamos que el campo de S son los números complejos y además que λ es un autovalor propio complejo.

\Rightarrow como λ es autovalor $\Rightarrow S\bar{x} = \lambda\bar{x}$ para \bar{x} autovector

Notemos que al hacer el producto punto

$$\langle S\bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle \lambda\bar{x}, \bar{x} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$$

Pero por otro lado $\langle S\bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle \bar{x}, S^T \bar{x} \rangle$ y como

$$S^T = S$$

$$\Rightarrow \langle S\bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle \bar{x}, S\bar{x} \rangle = \langle \bar{x}, \lambda\bar{x} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \lambda^*$$

$\therefore \lambda = \lambda^*$, es decir, λ es igual a su conjugado !!

$$\therefore \lambda \in \mathbb{R}$$

#6) Verifique que si v_1 es autovector de λ_1 , v_2 es autovector de λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$$Sv_1 = \lambda_1 v_1$$
$$Sv_2 = \lambda_2 v_2$$

Al hacer $\langle Sv_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
como S es simétrica $S = S^T$

$$\Rightarrow \langle Sv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, S^T v_2 \rangle = \langle v_1, Sv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \lambda_2 \quad (\lambda_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \langle Sv_1, v_2 \rangle - \langle Sv_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle - \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \text{y como } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 //$$

c) Para la matriz $S = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra manualmente una descomposición espectral para S .

Notar que S es simétrica y de 2×2 : la podemos descomponer como:

$$S = PDP^T$$

con P una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores de S .
 D es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los autovalores de S .

→ Primero calcular los autovalores, esto es

$$\det(S - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(2-\lambda) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 22 - 13\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 24}}{2}$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{13 + \sqrt{145}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{13 - \sqrt{145}}{2}$$

Usando una calculadora para los autovalores obtenemos que (www.emathhelp.net)

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{9 + \sqrt{145}}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{9 - \sqrt{145}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{9 + \sqrt{145}}{8} & \frac{9 - \sqrt{145}}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13 + \sqrt{145}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13 - \sqrt{145}}{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9 + \sqrt{145}}{8} & 1 \\ \frac{9 - \sqrt{145}}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

11. Encuentra manualmente una descomposición espectral para la matriz $S = A^T A$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Comenzamos calculando los autovalores $\Rightarrow \det(S - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 12 \\ 12 & 24 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(24 - \lambda) - 144 = 0 \rightarrow 144 - 30\lambda + \lambda^2 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 30\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 30) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 30$$

Ahora calculamos los autovectores
para $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 6x + 12y = 0 \\ 12x + 24y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = -2y \quad \therefore \text{los vectores de la forma}$$

$$\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \text{ con } y \in \mathbb{R} \text{ cumplen } \neq 0$$

Para $\lambda = 30$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30x \\ 30y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 6x + 12y = 30x \quad \text{--- (1)} \\ 12x + 24y = 30y \Rightarrow 6x + 12y = 15y \quad \text{--- (2)} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 15y = 30x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \quad \text{y sustituyendo en --- (2)}$$

$$\Rightarrow 3y + 12y = 15y \quad \text{por lo tanto como el sistema tiene infinitas soluciones} \Rightarrow$$

los vectores de la forma $\begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}$ cumplen $\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2y & \frac{y}{2} \\ y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y & y \\ y/2 & y \end{pmatrix} = S$$

con $y \in \mathbb{R} \times \neq 0$

Al multiplicar \Rightarrow

$$\begin{pmatrix} 0 & 15y \\ 0 & 30y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y & y \\ y/2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15y^2}{2} & 15y^2 \\ \frac{30y^2}{2} & 30y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pm \sqrt{12}}{\sqrt{15}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$o' \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Estandariza la matriz anterior, encuentra su descomposición en valores singulares y sus componentes principales

Su descomposición en valores singulares está dada por

$$A = \begin{pmatrix} n \times r \\ \begin{matrix} \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{matrix} \\ u_1 \dots u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \times r \\ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \times m \\ \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{matrix}$$

$\begin{matrix} 3 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 2 \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{matrix}$

(ya que $\text{rank}(A^T A) = 1$)
 $= r$

Donde v_1, \dots, v_r es un conjunto ortonormal de autovectores de $A^T A$ que por el ejercicio anterior sabemos que el $\text{rank}(A^T A) = 1$

$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ es un vector normal que cumple

$$v_i = \sqrt{\lambda_i} \Rightarrow v_1 = \sqrt{30}$$

$$\vee \quad u_i = \frac{A v_i}{v_i} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Por todo lo anterior concluimos que

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} & 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} & 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{V^T}$$

o bien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} \end{pmatrix} (\sqrt{30}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Problema 12.

Para cada uno de las siguientes funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica que es correcta la siguiente tabla de fórmulas

Parámetros fijos	f	∇f
(1) $v \in \mathbb{R}^n$	$f(x) = \langle v, x \rangle$	$\nabla f(a) = v \therefore \nabla f(a) \cdot x = f(x)$
(2)	$f(x) = \langle x, x \rangle$	$\nabla f(a) = 2a \therefore \nabla f(a) \cdot x = 2\langle a, x \rangle$
(3) $v \in \mathbb{R}^m, A_{m \times n}$	$f(x) = \langle A x, v \rangle$	$\nabla f(a) = A^T v \therefore \nabla f(a) \cdot x = \langle A^T v, x \rangle$
(4) $A_{n \times n}$	$f(x) = \langle A x, x \rangle$	$\nabla f(a) = (A + A^T)a \therefore \nabla f(a) \cdot x = \langle A x, a \rangle + \langle A a, x \rangle$
(5) $A_{m \times n}$	$f(x) = \langle A x, A x \rangle$	$\nabla f(a) = 2(A^T A)a$ $\therefore \nabla f(a) \cdot x = \langle 2a, A^T A x \rangle$

(1) $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = (v_1, v_2, \dots, v_n), x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x) = \langle v, x \rangle = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n = \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right) \Rightarrow \nabla f = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ que no depende de } x$$

$$\therefore \nabla f(a) = v \text{ y por consiguiente } \nabla f(a) \cdot x = (v_1, \dots, v_n)(x_1, \dots, x_n) = \langle v, x \rangle //$$

2) $f(x) = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Rightarrow \nabla f(x) = (2x_1, \dots, 2x_n) = 2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{s. } a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow \nabla f(a) = 2(a_1, \dots, a_n) = 2a$$

$$\therefore \nabla f(a) \cdot x = 2a \cdot x = 2\langle a, x \rangle //$$

$$(3) \quad v \in \mathbb{R}^m \quad v = (v_1, \dots, v_m) \quad A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \langle Ax, v \rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \bar{v}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \right) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_m)$$

$$= v_1 \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i + v_2 \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i + \dots + v_m \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji} v_j x_i$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \left(\sum_{j=1}^m a_{j1} v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn} v_j \right) \text{ (que no depende de } x \text{)}$$

Por outra parte $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}^T x$

$$\Rightarrow A^T \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^m a_{j1} v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn} v_j \right)$$

$$\nabla f(x) = A^T \cdot v$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) \cdot x = \left(\sum_{j=1}^m a_{j1} v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn} v_j \right) \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j x_i = x_1 \sum_{j=1}^m a_{j1} v_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^m a_{jn} v_j$$

$$= \langle A^T v, x \rangle$$

$$(4) \quad A_{n \times n} \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

Sean $y \in \mathbb{R}^m$ y $A_{m \times n}$ una matriz. A partir de la tabla anterior calcula $\nabla \text{Loss}(\theta)$ para las siguientes funciones dadas en términos de la norma euclidiana:

a) $\text{Loss}(\theta) = \frac{1}{2} \|A\theta - y\|^2$. Deduce que $\theta^* = (A^T A)^{-1} A^T y$ satisface $\nabla \text{Loss}(\theta^*) = 0$

$\rightarrow \text{Loss}(\theta) = \frac{1}{2} \langle A\theta - y, A\theta - y \rangle$ que por linealidad de la norma euclidiana

$$\text{Loss}(\theta) = \frac{1}{2} (\langle A\theta, A\theta \rangle - \langle y, A\theta \rangle - \langle A\theta, y \rangle + \langle y, y \rangle)$$

como $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

$$\Rightarrow \text{Loss}(\theta) = \frac{1}{2} (\underbrace{\langle A\theta, A\theta \rangle}_{\text{por (5)}} - 2 \underbrace{\langle A\theta, y \rangle}_{\text{por (3)}} + \langle y, y \rangle)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \text{Loss}(\theta) &= \frac{1}{2} (2(A^T A)\theta - 2A^T y + 0) \\ &= (A^T A)\theta - A^T y \end{aligned}$$

Notemos que si $\nabla \text{Loss}(\theta^*) = 0 \Rightarrow \theta^*$ es punto crítico

$$\Rightarrow A^T A \theta^* - A^T y = 0 \Rightarrow A^T A \theta^* = A^T y$$

$$\Rightarrow \theta^* = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Problema 13.-

PAG. _____

DIA _____ MES _____ AÑO _____

Considera $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \|x\|$, i.e.

$$f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Describe el conjunto de puntos $a \in \mathbb{R}^n$ para los que $\nabla f(a)$ no existe. Para los puntos donde existe el gradiente, encuentra una fórmula o manera de calcularlo.

Recordemos que $f(x) = |x|$ no es derivable en 0, es decir

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|} \quad x \neq 0$$

y como $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ notamos que el conjunto de puntos donde no existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son de la forma $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i = 0$

$$S = \bigcup_{i=1}^n \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \}$$

que serían hiperplanos de \mathbb{R}^n

Donde también están incluidos los puntos de la forma $(0, 0, \dots, x_n)$ es decir con marceros en las entradas.

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \left(\frac{x_1}{|x_1|}, \dots, \frac{x_n}{|x_n|} \right) \quad \forall x_i \neq 0 \text{ on } i=1, \dots, n$$

Problema 14: Para los puntos donde es posible, da una fórmula para el gradiente de la función de costo $\text{Loss}(\theta) = \|A\theta - y\|_1$, donde A es una matriz.

$$A_{m \times n}, \theta \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow A \cdot \theta = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} \theta_i, \sum_{i=1}^n a_{2i} \theta_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} \theta_i \right)$$

$$\Rightarrow A\theta - y = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} \theta_i - y_1, \sum_{i=1}^n a_{2i} \theta_i - y_2, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} \theta_i - y_m \right)$$

$$\therefore \|A\theta - y\|_1 = \left| \sum_{i=1}^n a_{1i} \theta_i - y_1 \right| + \dots + \left| \sum_{i=1}^n a_{mi} \theta_i - y_m \right| = f(\theta)$$

$$\text{que llamaremos como } \|A\theta - y\|_1 = |v_1| + \dots + |v_m| = f(\theta) \\ = \sum_{j=1}^m |v_j|$$

como $v_j = f(\theta_j)$ si pensamos en una variable $v = f(\theta)$ y $f(\theta) = v$

$$\Rightarrow v = |v| \Rightarrow v' = \frac{v}{|v|} \cdot v' \text{ por regla de la cadena}$$

$$\text{Como } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_m} \right) \text{ tenemos que}$$

$$\nabla f = \left(\frac{v_1}{|v_1|} \cdot a_{11} + \dots + \frac{v_m}{|v_m|} \cdot a_{m1}, \dots, \frac{v_1}{|v_1|} \cdot a_{1m} + \dots + \frac{v_m}{|v_m|} \cdot a_{mm} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m \frac{v_j}{|v_j|} a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{v_j}{|v_j|} a_{jm} \right) \text{ sustituyendo } v_j$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m \frac{\sum_{i=1}^n a_{ji} \theta_i - y_j}{\left| \sum_{i=1}^n a_{ji} \theta_i - y_j \right|} \cdot a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{i=1}^n a_{ji} \theta_i - y_j}{\left| \sum_{i=1}^n a_{ji} \theta_i - y_j \right|} \cdot a_{jm} \right)$$

Problema 16.-

En el algoritmo de descenso de gradiente básico tenemos el update:

$$V_{n+1} = V_n - \alpha \nabla f(V_n) \quad (1)$$

Para cada iteración n , sea α_n una tasa de aprendizaje que minimiza:

$$\psi(\alpha) = f(V_n - \alpha \nabla f(V_n))$$

Este α_n establece en cada paso k la tasa de aprendizaje óptima, en el sentido que hace que el valor $f(V_{n+1})$ sea el más pequeño posible. Prueba que si reemplazamos (1) por

$$V_{n+1} = V_n - \alpha_n \nabla f(V_n)$$

entonces direcciones de descenso consecutivas son ortogonales, en otras palabras:

$$\langle \nabla f(V_n), \nabla f(V_{n+1}) \rangle = 0$$

Esto se conoce como la propiedad zig-zag

Sol.

$$\text{Como } V_{n+1} = V_n - \alpha_n \nabla f(V_n) \Rightarrow V_n = V_{n+1} + \alpha_n \nabla f(V_n)$$

Usando la aproximación por Taylor $f(x+p) \approx f(x) + \nabla f(x)^T \cdot p$

Tenemos que

$$f(V_n) = f(V_{n+1} + \alpha_n \nabla f(V_n)) \approx f(V_{n+1}) + \nabla f(V_{n+1})^T \cdot \alpha_n \nabla f(V_n)$$

$$\Rightarrow f(V_{n+1}) \approx f(V_n) - \alpha_n \nabla f(V_{n+1}) \cdot \nabla f(V_n)$$

$\therefore \psi(\alpha) = f(V_n - \alpha \nabla f(V_n)) = f(V_{n+1})$ lo podemos aproximar

$$\psi(\alpha) \approx f(V_n) - \alpha \nabla f(V_{n+1}) \cdot \nabla f(V_n)$$

Como α_k minimiza $\Psi(\alpha)$ significa que α_k o punto crítico y por lo tanto $\frac{d\Psi}{d\alpha} = 0$

$$\Rightarrow -\nabla f(v_k) \cdot \nabla f(v_{k+1}) = 0$$

$$\text{es decir } \langle \nabla f(v_k), \nabla f(v_{k+1}) \rangle = 0$$

Argumento problema 5

1) V

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \bar{A} \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) F

basta con que la matriz A no tenga inversa

ej. considerar $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene solución

3) V

por 1) sabemos que $A\bar{x}$ es combinación lineal de columnas de A y si $A\bar{x}$ tiene solución $\Rightarrow b$ pertenece al espacio columna de A y si b pertenece al espacio columna de A basta con reescribir la matriz A a partir de las columnas para ver que $A\bar{v} = b$ tiene solución.

4) V

El espacio columna de A es igual que el de $2A$ ya que tendríamos una combinación de columnas de A en $2A\bar{x}$ \therefore generan el mismo espacio

5) F

Considerar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

($m > n$)

$$\text{Considerar } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa

6) F