Principio de casillas

AlanLG

Febrero 2024

§1 Lectura

Principio de casillas es algo muy intuitivo pero que puede ser muy útil al momento de resolver algunos problemas de matemáticas, vamos a comenzar con un simple ejemplo

Ejemplo 1.1
Tienes un saco con manzanas rojas y manzanas verdes, ¿Cúal es el mínimo número de manzanas que debes sacar de la bolsa para gantizar que sacaste dos de un mismo color?

Si sacas 2 manzanas puede que ambas sean de distinto color pero al momento de sacar una más a fuerzas será de algún color que ya se repitió, de modo que necesitas 3 manzanas
Así funciona el principio de casillas, en particular de este ejemplo podemos ya sacar una versión del principio de casillas bastante intuitiva

Teorema 1.2 (Caso particular del principio de casillas)
Si tenemos n casillas y al menos $n + 1$ objetos, habrá al menos una casilla con al menos 2 objetos

Al igual que antes, esto es obvio, pues el "peor caso" sería que todos las casilla haya un objeto, necesitando n objetos pero el siguiente objeto ya tendrá que estar en una caja con un objeto, usando ya 2 objetos.

Presentaremos ahora, la forma general del principio de casillas

Teorema 1.3 (Principio de casillas)
Si tenemos n casillas y al menos $nk + 1$ objetos, habrá al menos una casilla con al menos $k + 1$ objetos

Trata de demostrar esto, la demostración no es muy diferente a la versión que ya vimos, pero quiero que estes convencido de que es cierto.

Teorema 1.4 (Otra forma de casillas)

Si $a_1, a_2, \ldots a_n$ son números positivos y a es el promedio de estos entonces existe un a_j y un a_i tal que

$$a_j \leq a$$

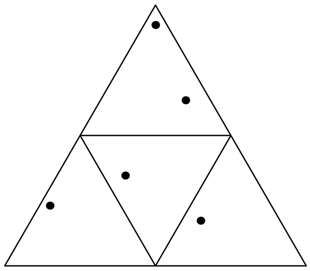
$$a_i \geq a$$

Esto es bastante intuitivo (demuestrálo) y puede llegar a ser útil. Veamos algunos ejemplos donde se use el principio de casillas

Ejemplo 1.5

De cinco puntos dentro o sobre los lados de un triángulo equilátero de lado 2 hay dos puntos cuya distancia entre ellos en menor o igual a 1

Prueba. En este ejemplo nosotros vamos a construir las casillas, vamos a dividir el triángulo equilátero en cuatro triángulos equiláteros de lado 1 como se muestra



Son cuatro regiones como queremos colocar cinco puntos por el principio de casillas deben haber dos puntos en alguna región, o sea, hay dos puntos dentro de un triángulo equilátero de lado 1, entonces esos dos puntos están a distancia menor o igual a 1 □

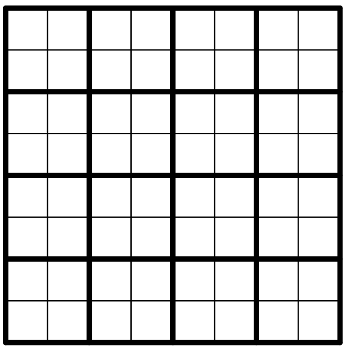
Ejemplo 1.6

Cuál es la máxima cantidad de reyes (de ajedrez) que puedes poner en un tablero de 8×8 de modo que no se ataquen entre sí?

Tutorial.

(a) Haz un acomodo en el que se entren 16 reyes

(b) Considera el siguiente acomodo



(c) Muestra por qué no se pueden poner 17 reyes

Ejemplo 1.7

Si se eligen cinco números de los enteros del 1 al 8, demuestra que dos de ellos deben sumar 9

Prueba. La suma de parejas que suman 9 son

$$\boxed{1,8}$$
$$\boxed{2,7}$$
$$\boxed{3,6}$$
$$\boxed{4,5}$$

Esas serán nuestras casillas, y a los 5 números que eligamos los colocaremos en su respectiva casilla; como vamos a escoger 5 números y hay 4 casillas entonces va a haber una casilla con dos números o sea habrá una pareja que suma 9 □

Ejemplo 1.8

Demuestra que en una fiesta de n personas siempre hay dos personas conocen a el mismo número de personas dentro de la fiesta

Prueba. Los conocidos de una persona dentro de la fiesta es un número dentro de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ pero note que si hay una persona que no conoce a nadie (0 conocidos) entonces no puede haber alguien que conozca a todos ($n-1$ conocidos) de modo que hay $n-1$ números posibles que alguien puede tener de conocidos, pero hay n personas entonces hay dos personas que conocen a la misma cantidad de persona □

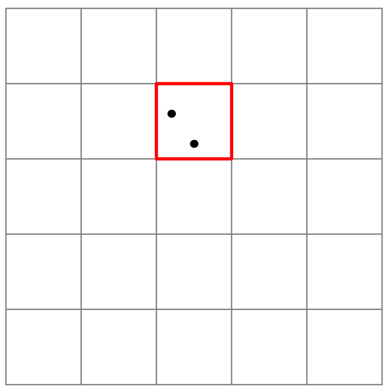
En este caso nuestras casillas fueran el número de conocidos que puede tener alguien, y los objetos, las n personas.

Ejemplo 1.9

Prueba que si se colocan 26 puntos dentro de un cuadrado de lado 1 entonces hay 2 a una distancia menor que $\frac{2}{7}$

En este ejemplo es complicado saber donde puedes empezar, sin embargo escoger de forma correcta nuestras casillas nos puede ayudar mucho.

Prueba. Comenzamos dividiendo al cuadrado de lado 1 en una cuadrícula de 5×5, como se muestra



Entonces en particular hay dos puntos que estan dentro de un cuadrado de lado $\frac{1}{5}$ entonces basta probar que la diagonal de este cuadrado mide menos que $\frac{2}{7}$, o sea que

$$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \leq \frac{2}{7}$$

Lo cuál es sencillo de demostrar □

Ejemplo 1.10

Demuestra que un tablero de ajedrez de 8×8 se colocan 17 torres, demuestra que hay al menos 3 torres que no se atacan entre sí

Tiene sentido pensar en dividir de alguna forma el tablero de 8×8 en conjuntos de modo que entre ellos no se atacan.

Prueba. Considera la siguiente enumeración de las casillas del tablero de 8×8

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Nota que si dos si hay dos torres en casillas con el mismo número entonces estas nunca se atacan, como queremos poner 17 torres (objetos) y hay 8 números (casillas) entonces hay 3 torres que están en casillas con el mismo número. □

Ejemplo 1.11

Prueba que existe algún número con solo cifras 1 y 3, y al menos una de cada una, tal que sea múltiplo de 2023

Tutorial. Si hay, vamos a construir una forma de hayarlos

(a) Asume, por contradicción, que no hay y considera los siguientes 2023 números

$$13, \; 1313, \; 131313, \; \ldots, \; \underbrace{1313\cdots13}_{2023}$$

(b) Hay dos con el mismo residuo al dividirse entre 2023 (¿Por qué?)

(c) ¿Qué te queda al restar esos dos números?

(d) Concluye

§2 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Prueba que en un grupo de 13 personas hay dos que nacieron el mismo mes

Ejercicio 2.2. Si tengo 17 peras, 13 manzanas y 11 naranjas dentro de un saco, ¿Cuál es el mínimo número de frutas que debo de sacar para garantizar que tengo una fruta de cada una?

Ejercicio 2.3. Dados 12 enteros, prueba que se pueden escoger 2 de tal forma que su diferencia sea divisible entre 11

Ejercicio 2.4. Prueba que una línea recta que no pasa por uno de los vértices de un triángulo, no puede cortar los tres lados del triángulo.

Ejercicio 2.5. Se tienen pelotas varias pelotas azules, rojas y verdes en un saco, ¿Cuál es el mínimo número de pelotas que debes sacar para garantizar que hay 10 del mismo color?

Ejercicio 2.6. Se colocan 5 puntos dentor de un cuadrado de lado 2. Demuestra que existen dos puntos que están a una distancia de a lo más $\sqrt{2}$

§3 Problemas

Problema 3.1. Se eligen $n+1$ números dentro del conjunto $\{1, 2, 3 \ldots, 2n\}$, demuestra que existen dos cuyo máximo común divisor es 1

Problema 3.2. Con los vértices de una cuadricula de 6×9, se forman 24 triangulos. Muestre que hay dos triángulos que tienen un vértice en común.

Problema 3.3. 51 hombres y 49 mujeres se acomodan en una mesa redonda. Prueba que existen dos hombres que están sentados diametralmente opuestos.

Problema 3.4. Demuestra que de 12 numeros distintos de dos digitos, siempre hay dos cuya diferencia es un número de dos dígitos

Problema 3.5. Probar que si cada punto del plano se colorea de rojo o azul entonces existe un segmento de longitud 1 cuyos extremos son del mismo color.

Problema 3.6. Diez niños juntaron 40 naranjas, demuestra que hay dos niños que juntaron la misma cantidad de narajanjas

Problema 3.7. Se colorean todos los puntos del plano de rojo o azul. Demuestra que existen cuatro puntos del mismo color que forman un rectángulo

Problema 3.8. Demuestra que un triángulo equilátero de lado uno no puede ser cubierto totalmente por triángulos equiláteros de lados menor que 1

Problema 3.9. Sean a, b, c y d enteros, muestre que $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ es divisible entre 12.

Problema 3.10. Si $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ es una permutación de los números $1, 2, 3, \dots n$, demuestra que si n es impar, entonces el siguiente producto es par

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$$

Problema 3.11. Se tienen 5 puntos con coordenadas enteras en el plano, demuestra que existen dos de ellos de tal forma que su punto medio también tiene coordenadas enteras

Problema 3.12. Demuestra que si se colorean los lados y diagonales de un hexágono regular de colores azul y rojo entonces hay un triángulo cuyos vértices son vértices del hexágono y sus lados son de un mismo color.

Problema 3.13. Demuestra que si se escogen 8 números distintos dentro del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$, existen tres parejas de ellos que tiene la misma diferencia positiva

Problema 3.14 (Bundeswettbewerb Mathematik 2017)**.** En un polígono regular de 35 lados, se colorean 15 vértices están de rojo. Demuestra que siempre hay tres vértices rojos que forman un triángulo isósceles?

Problema 3.15. Dados 7 puntos dentro del interior de un círculo de radio 1, demuestra que hay dos que están a distancia menor que 1, ¿se podrá con 6 puntos?

Problema 3.16. Prueba que el cualquier conjunto de 10 enteros positivos menores a 100, hay dos subconjuntos sin elementos en común de números que tienen la misma suma

Problema 3.17. Dentro de un cojunto de $n + 1$ números distintos escogidos dentro de los números del 1 al $2n$, existe uno que es múltiplo del otro

Problema 3.18. Cada cuadrito de una cuadrículo de 3×7 es coloreado de color blanco y negro. Muestre que en cualquier coloración siempre hay cuatro cuadritos del mismo color que son las esquinas de un rectángulo dentro de la cuadrícula

§4 Hints

3.1. Divide el conjunto en n conjuntos de modo que cada conjunto tenga dos elementos y su máximo común divisor sea 1

3.2. Cuántos vértices ocupan los 24 triángulos

3.3. Hay 50 parejas de personas que están sentadas diametralmente opuestas

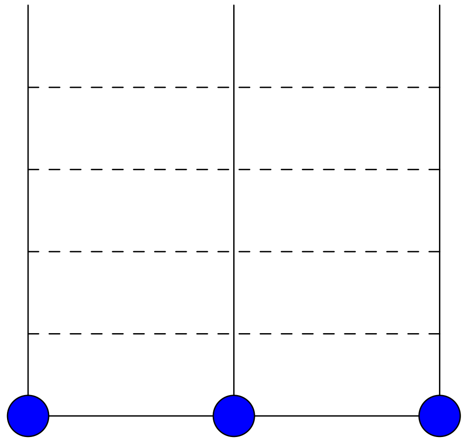
3.4. La condición es equivalente a que su diferencia sea múltiplo de 11(¿Por qué?)

3.5. Considerate los vértices de un triángulo equilátero de lado 1

3.6.

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

3.7. Asume que no se puede, considerate tres puntos en una misma línea del mismo color (¿Por qué existen?) y luego dibuja perpendiculares a esa recta con vértices en esos puntos, analiza las colores de los puntos de las paralelas a la primer línea



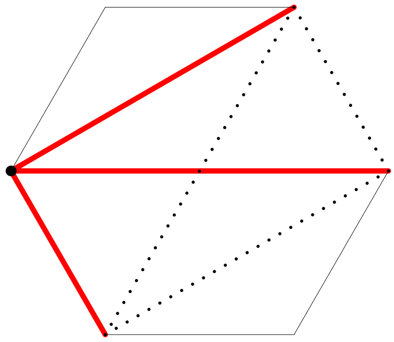
3.8. Uno de esos triángulos equiláteros con lado menor que 1 no puede cubrir simultáneamente dos vértices del otro triángulo

3.9. Dentro de 4 números hay 3 con la misma paridad y hay 2 que tienen el mismo residuo al dividirse entre 4

3.10. La diferencia de dos números es par si tienen la misma paridad

3.11. Dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tienen coordenadas enteras si x_1, x_2 y y_1, y_2 tienen la misma paridad (¿Por qué?)

3.12. Demuestra que de un vértices salen tres lados que son del mismo color.



3.13. La mayor diferencia es 14 que solo ocurre una vez (¿Por qué?), ¿Cuantás parejas de números distintos se pueden formar?

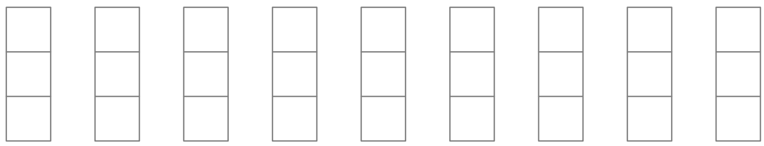
3.14. Un polígono de 35 contiene a 7 pentágonos regulares que no tienen vértices en común

3.15. Divide el circulo en 6 regiones, si hay 7 puntos entonces usa casillas; para el caso de 6 puntos, divide al circulo en 6 regiones pero haz tu división de modo que un diametro pasé por algún punto de los 6

3.16. El número de subcojuntos posibles es $2^{1}0 - 1$ y la mayor suma de posible es $99 + 98 + \cdots + 91 = 945$

3.17. Todo número k es de la forma $k = 2^{\alpha} \cdots q$ con q impar, por casillas hay dos números k dentro de los escogidos que tienen la misma q(¿Por qué?)

3.18. La columnas pueden quedar coloreadas de 8 formas (haz los casos)



De esas 8, nota que si dos se repiten entonces acabas, trata de llegar a ese caso de alguna forma