Principio de casillas

AlanLG

Febrero 2024

§1 Lectura

Principio de casillas es algo muy intuitivo pero que puede ser muy útil al momento de resolver algunos problemas de matemáticas, vamos a comenzar con un simple ejemplo

Ejemplo 1.1
Tienes un saco con manzanas rojas y manzanas verdes, ¿Cúal es el mínimo número de manzanas que debes sacar de la bolsa para gantizar que sacaste dos de un mismo color?

Si sacas 2 manzanas puede que ambas sean de distinto color pero al momento de sacar una más a fuerzas será de algún color que ya se repitió, de modo que necesitas 3 manzanas
Así funciona el principio de casillas, en particular de este ejemplo podemos ya sacar una versión del principio de casillas bastante intuitiva

Teorema 1.2 (Caso particular del principio de casillas)
Si tenemos n casillas y al menos $n + 1$ objetos, habrá al menos una casilla con al menos 2 objetos

Al igual que antes, esto es obvio, pues el "peor caso" sería que todos las casilla haya un objeto, necesitando n objetos pero el siguiente objeto ya tendrá que estar en una caja con un objeto, usando ya 2 objetos.

Presentaremos ahora, la forma general del principio de casillas

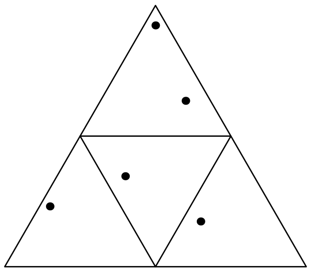
Teorema 1.3 (Principio de casillas)
Si tenemos n casillas y al menos $nk + 1$ objetos, habrá al menos una casilla con al menos $k + 1$ objetos

Trata de demostrar esto, la demostración no es muy diferente a la versión que ya vimos, pero quiero que estes convencido de que es cierto.

Ejemplo 1.4

De cinco puntos dentro o sobre los lados de un triángulo equilátero de lado 2 hay dos puntos cuya distancia entre ellos en menor o igual a 1

Prueba. En este ejemplo nosotros vamos a construir las casillas, vamos a dividir el triángulo equilátero en cuatro triángulos equiláteros de lado 1 como se muestra



Son cuatro regiones como queremos colocar cinco puntos por el principio de casillas deben haber dos puntos en alguna región, o sea, hay dos puntos dentro de un triángulo equilátero de lado 1, entonces esos dos puntos están a distancia menor o igual a 1 □

Ejemplo 1.5

Si se eligen cinco números de los enteros del 1 al 8, demuestra que dos de ellos deben sumar 9

Prueba. La suma de parejas que suman 9 son

$$\boxed{1,8}$$
$$\boxed{2,7}$$
$$\boxed{3,6}$$
$$\boxed{4,5}$$

Esas serán nuestras casillas, y a los 5 números que eligamos los colocaremos en su respectiva casilla; como vamos a escoger 5 números y hay 4 casillas entonces va a haber una casilla con dos números o sea habrá una pareja que suma 9 □

Ejemplo 1.6

Demuestra que en una fiesta de n personas siempre hay dos personas conocen a el mismo número de personas dentro de la fiesta

Prueba. Los conocidos de una persona dentro de la fiesta es un número dentro de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ pero note que si hay una persona que no conoce a nadie (0 conocidos) entonces no puede haber alguien que conozca a todos ($n-1$ conocidos) de modo que hay $n-1$ números posibles que alguien puede tener de conocidos, pero hay n personas entonces hay dos personas que conocen a la misma cantidad de persona □

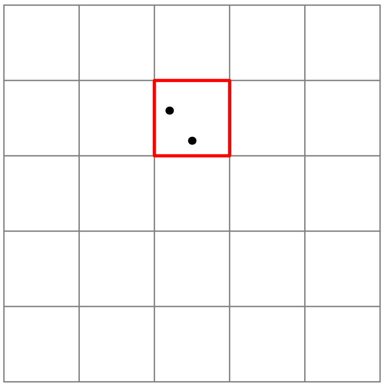
En este caso nuestras casillas fueran el número de conocidos que puede tener alguien, y los objetos, las n personas.

Ejemplo 1.7

Prueba que si se colocan 26 puntos dentro de un cuadrado de lado 1 entonces hay 2 a una distancia menor que $\frac{2}{7}$

En este ejemplo es complicado saber donde puedes empezar, sin embargo escoger de forma correcta nuestras casillas nos puede ayudar mucho.

Prueba. Comenzamos dividiendo al cuadrado de lado 1 en una cuadrícula de 5×5, como se muestra



Entonces en particular hay dos puntos que estan dentro de un cuadrado de lado $\frac{1}{5}$ entonces basta probar que la diagonal de este cuadrado mide menos que $\frac{2}{7}$, o sea que

$$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \leq \frac{2}{7}$$

Lo cuál es sencillo de demostrar □

Ejemplo 1.8

Demuestra que un tablero de ajedrez de 8×8 se colocan 17 torres, demuestra que hay al menos 3 torres que no se atacan entre sí

Tiene sentido pensar en dividir de alguna forma el tablero de 8×8 en conjuntos de modo que entre ellos no se atacan.

Prueba. Considera la siguiente enumeración de las casillas del tablero de 8×8

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Nota que si dos si hay dos torres en casillas con el mismo número entonces estas nunca se atacan, como queremos poner 17 torres (objetos) y hay 8 números (casillas) entonces hay 3 torres que están en casillas con el mismo número. □

§2 Ejercicios

Ejercicio 2.1. En un grupo de 13 personas hay dos que nacieron el mismo mes

Ejercicio 2.2. Dados 12 enteros, prueba que se pueden escoger 2 de tal forma que su diferencia sea divisible entre 11

Ejercicio 2.3. Prueba que una línea recta que no pasa por uno de los vértices de un triángulo, no puede cortar los tres lados del triángulo.

Ejercicio 2.4.

§3 Problemas

Problema 3.1. Se eligen $n+1$ números dentro del conjunto $\{1, 2, 3 \ldots, 2n\}$, demuestra que existen dos cuyo máximo común divisor es 1

Problema 3.2. Con los vertices de una cuadricula de 6×9, se forman 24 triangulos. Muestre que hay dos tráingulos que tienen un vértice en común.

Problema 3.3. Demuestra que de 12 numeros distintos de dos digitos, siempre hay dos cuya diferencia es un número de dos dígitos

Problema 3.4. Se colorean todos los puntos del plano de rojo o azul. Demuestra que existen cuatro puntos del mismo color que forman un rectángulo

Problema 3.5. Demuestra que un triángulo equilátero de lado uno no puede ser cubierto totalmente por triángulos equiláteros de lados menor que 1

Problema 3.6. Sean a, b, c y d enteros, muestre que $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ es divisible entre 12.

Problema 3.7. Demuestra los criterios de divisibilidad de 1 al 11 sin inculuir el del 7

Problema 3.8 (USAJMO 2011/1)**.** Encuentre, con prueba, todos los números enteros positivos n para los cuales $2^n + 12^n + 2011^n$ es un cuadrado perfecto.

Problema 3.9 (Freshman's dream)**.** Demuestra que para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, y p un primo se cumple que

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p$$

Problema 3.10 (IMO 1964/1)**.**

(a) Encuentre todos los números enteros positivos n para los cuales $2^n - 1$ es divisible por 7.

(b) Demuestre que no existe un entero positivo n para el cual $2^n + 1$ sea divisible por 7.

Problema 3.11 (IMO 1986/1)**.** Sea d cualquier entero no igual a $2, 5$ o 13. Prueba que podemos escoger dos enteros distintos a y b en el conjunto $\{2, 5, 13, d\}$ tal que $ab - 1$ no es un cuadrado perfecto

Problema 3.12. Demuestra que $n \mid 2^{n!} - 1$ para todo n impar

Problema 3.13 (1 IMO SL/2002)**.** ¿Cuál es el entero positivo más pequeño t tal que existan enteros $x_1, x_2, \ldots, x_t$ con

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_t^3 = 2002^{2002}\,?$$

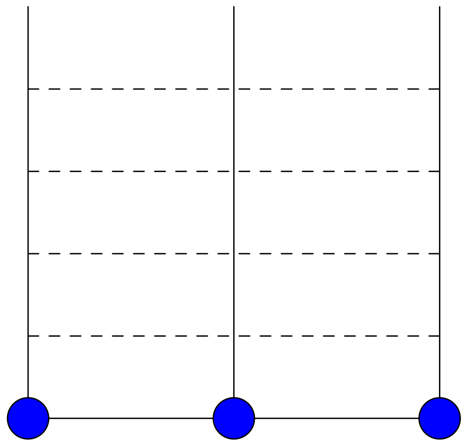
§4 Hints

3.1. Divide el conjunto en n conjuntos de modo que cada conjunto tenga dos elementos y su máximo común divisor sea 1

3.2. Cuántos vértices ocupan los 24 triángulos

3.3. La condición es equivalente a que su diferencia sea múltiplo de 11(¿Por qué?)

3.4. Asume que no se puede, considerate tres puntos en una misma línea del mismo color (¿Por qué existen?) y luego dibuja perpendiculares a esa recta con vértices en esos puntos, analiza las colores de los puntos de las paralelas a la primer línea



3.5. Uno de esos triángulos equiláteros con lado menor que 1 no puede cubrir simultáneamente dos vértices del otro triángulo

3.6. Dentro de 4 números hay 3 con la misma paridad y hay 2 que tienen el mismo residuo al dividirse entre 4

3.7. un número $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_2 a_1 a_0}$ se puede escribir como $n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots 10a_1 + 10^0 a_0$

3.8. analiza $\pmod 3$ y luego $\pmod 4$

3.9. Binomio de Newton

3.10. Analiza a $n \pmod 3$ y mira que residuos que dejan las potencias de 2 al dividirse por 7

3.11. Asume que $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ son todos cuadrados, analízalos módulo 4 y luegó mod 5

3.12. Demuestra que existe un entero d tal que $2^d \equiv 1 \pmod{n}$ y $d \leq n$

3.13. La respuesta es $t = 4$ usa $\pmod{9}$ para demostrar que $t \leq 4$ no es alcanzable