Demostración de fórmula de Stirling

September 5, 2024

Fórmula de Stirling

La fórmula de Stirling está definida como:

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \tag{1}$$

donde el signo $\approx$ se utiliza para indicar que el radio de los dos lados tiende a la unidad conforme $n \to \infty$.

Demostración de la fórmula de Stirling

El factorial de un número n está definido como:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n \tag{2}$$

Aplicando el logaritmo, se obtiene:

$$log(n!) = log(1)log(2) \cdots log(n) = log(1) + log(2) + \cdots log(n) \tag{3}$$

Dado que $log(x)$ es una función monótona de x, se tiene:

$$\int_{k-1}^{k} log(x)dx < log(k) < \int_{k}^{k+1} log(x)dx \tag{4}$$

Sumando sobre $k = 1, \cdots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} log(x)dx < \sum_{k=1}^{n} log(k) < \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} log(x)dx \tag{5}$$

Simplificando

$$\int_{0}^{n} log(x)dx < log(n!) < \int_{1}^{n+1} log(x)dx \tag{6}$$

Realizando la primera integral de 6.

$$\int_{0}^{n} log(x)dx = \Big|_{0}^{n} xlog(x) - x = nlog(n) - n \tag{7}$$

Realizando la segunda integral de 6.

$$\int_{1}^{n+1} log(x)dx = \Big|_{1}^{n+1} xlog(x) - x = (n+1)log(n+1) - (n+1) - (log(1) - 1) = (n+1)log(n+1) - n \tag{8}$$

Sustituyendo 7 y 8 en 6:

$$nlog(n) - n < log(n!) < (n+1)log(n+1) - n \tag{9}$$

Teniendo esta desigualdad, podemos darnos cuenta que un razonamiento para la aproximación es obtener la media de los valores extremos. Entonces, la media resultaría como:

$$\text{media} = \frac{nlog(n) - n + (n+1)log(n+1) - n}{2} = \frac{nlog(n) + (n+1)log(n+1) - 2n}{2} \tag{10}$$

Procedemos a hacer una aproximación lineal mediante series de Taylor para $log(x)$ con $a = n$.

$$log(x) \sim log(n) + \frac{1}{n}(x - n) \tag{11}$$

Evaluamos para $x = n + 1$ en 11.

$$log(n+1) \sim log(n) + \frac{1}{n}(n+1-n) = log(n) + \frac{1}{n} \tag{12}$$

Sustiuyendo 12 en 10.

$$\begin{aligned}
\text{media} &= \frac{nlog(n) + (n+1)(log(n) + d\frac{1}{n}) - 2n}{2} \\
&= \frac{nlog(n) + (n+1)log(n) + \dfrac{n+1}{n} - 2n}{2} \\
&= \frac{nlog(n) + (n+1)log(n) + 1 + \dfrac{1}{n}}{2} \\
&= \frac{(2n+1)log(n) + 1 + \dfrac{1}{n} - 2n}{2} \\
&= (n+\frac{1}{2})log(n) - n + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})
\end{aligned} \tag{13}$$

Si consideramos el hecho de que $n \to \infty$, entonces la media resulta:

$$\text{media} = (n+\frac{1}{2})log(n) - n \tag{14}$$

Cuantificar la diferencia (error)

Se realiza la diferencia (d_n) entre $log(n!)$ y la media.

$$d_n = log(n!) - (n+\frac{1}{2}) + n \tag{15}$$

Se obtiene ahora d_{n+1}:

$$d_{n+1} = log((n+1)!) - (n+\frac{3}{2})log(n+1) + n + 1 \tag{16}$$

Se hace la diferencia entre d_n y d_{n+1}.

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= [log(n!) - (n+\frac{1}{2})log(n) + n] - [log((n+1)!) - (n+\frac{3}{2})log(n+1) + n + 1] \\
&= log(n!) - (n+\frac{1}{2})log(n) + n - log((n+1)!) + (n+\frac{3}{2})log(n+1) - n - 1 \\
&= log(n!) - (n+\frac{1}{2})log(n) + n - log((n+1)(n!)) + (n+\frac{3}{2})log(n+1) - n - 1 \\
&= log(n!) - (n+\frac{1}{2})log(n) + n - log(n+1) - log(n!) + (n+\frac{3}{2})log(n+1) - n - 1 \\
&= (n+\frac{3}{2})log(n+1) - log(n+\frac{1}{2})log(n) - log(n+1) - 1 \\
&= (n+\frac{1}{2})(log(n+1) - log(n)) - 1 \\
&= (n+\frac{1}{2})log(\frac{n+1}{n}) - 1
\end{aligned} \tag{17}$$

Podemos ver que $\dfrac{n+1}{n}$ se puede expresar como:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+t}{1-t}, \qquad \text{con } t = \frac{1}{2n+1} \tag{18}$$

Si usamos la expansión $\frac{1}{2}log(\frac{1+t}{1-t}) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5 + \cdots$

Como se tiene que $t = \dfrac{1}{2n+1}$, entonces la expansión queda como

$$log(\frac{n+1}{n}) = 2(\frac{1}{2n+1}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2n+1})^3 + \frac{2}{5}(\frac{1}{2n+1})^5 + \cdots \tag{19}$$

Sustituyendo 19 en 17.

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (\frac{2n+1}{n})[\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2n+1})(\frac{1}{2n+1})^2 + \frac{2}{5}(\frac{1}{2n+1})(\frac{1}{2n+1})^4 + \cdots] - 1 \\ &= \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2n+1})^2 + \frac{2}{5}(\frac{1}{2n+1})^4 + \cdots) - 1 \\ &= \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots \end{aligned} \tag{20}$$

Por comparación de lo obtenido con una serie geométrica de radio $(2n+1)^{-2}$. Como el radio es menor a 1, se puede expresar como $S = \dfrac{a}{1-r}$, con a el primer término de la expansión y r su radio. Por tanto, sustituyendo:

$$S = \frac{\frac{1}{3(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{\frac{1}{3(2n+1)^2}}{\frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{3[(2n+1)^2 - 1]} \tag{21}$$

Entonces, $d_n - d_{n+1}$ se encuentra en el rango

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3[(2n+1)^2 - 1]} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \tag{22}$$

De 20 podemos decir que la secuencia $\{d_n\}$ es decreciente.

- **Prueba de que $\{d_n\}$ es decreciente:**

Para esto se tiene que verificar que $d_n > d_{n+1}$ $\forall$ n. Como $d_n - d_{n+1}$ es positivo siempre, ya que es una suma de números positivos. Implica que $d_n - d_{n+1} > 0 \Rightarrow d_n > d_{n+1}$. Por tanto, d_n es decreciente.

De 22 podemos decir que la secuencia $\{d_n - (12n)^{-1}\}$ es creciente.

- **Prueba de que la secuencia $\{d_n - (12n)^{-1}\}$ es creciente:**

Para esto se debe verificar que $d_{n+1} - \dfrac{1}{12(n+1)} > d_n + \dfrac{1}{12n}$.
De 22 podemos obtener lo siguiente:

$$d_{n+1} - d_n > \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n} \tag{23}$$

Desarrollando lo que se tiene que verificar, se obtiene

$$d_{n+1} - d_n \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n} > 0 \tag{24}$$

Por 23 nos damos cuando que

$$d_{n+1} - d_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} > \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} = 0 \tag{25}$$

De 25 podemos concluir entonces que

$$d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)} > d_n - \frac{1}{12n} \tag{26}$$

Como se cumple lo que se quería verificar, entonces $\{d_n - (12n)^{-1}\}$ es creciente.

Como $\{d_n\}$ es decreciente, y la secuencia $\{d_n - (12n)^{-1}\}$ es creciente. Podemos decir que el límite finito $C = \lim d_n$ existe.

El límite $C = \lim d_n$ existe

Se mencionan los puntos que se derivan de las concluciones anteriores:

1. **Monotonía y acotación inferior.**
   Dado que d_n es decreciente y que $d_n > 0$ porque es una suma positiva, la secuencia está acotada inferiormente por algún número. Por tanto, converge.

2. **Existencia del límite.** La secuencia $\{d_n - \frac{1}{12n}\}$ es creciente. Dado que también tiende a un límite cuando $n \to \infty$, el límite de $d_n - \frac{1}{12n}$ existe y es finito.

3. **Comportamiento asintótico.**
   Considerando el límite superior de $d_n - d_{n+1}$, se observa que

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n(n+1)} \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

   Esto implica entonces que d_n se estabiliza a medida que n crece y la secuencia se aproxima a un límite C.

Como conclusión, dado que $\{d_n\}$ es decreciente, está acotada inferiormente y su diferencia $d_n - d_{n+1}$ tiende a 0, la secuencia es convergente.

Obtención de la fórmula de Stirling

En vista de que $d_n \to C$; se sustituye y se despeja $n!$:

$$C = log(n!) - (n + \frac{1}{2})log(n) + n \tag{27}$$

Se despeja $log(n!)$

$$log(n!) = C + (n + \frac{1}{2})log(n) - n \tag{28}$$

Se eleva el número e a ambos lados de la ecuación.

$$n! \sim e^{C+(n+\frac{1}{2})log(n)-n} \tag{29}$$

Aplicando propiedades de las potencias y logaritmos:

$$n! \sim e^C e^{(n+\frac{1}{2})log(n)} e^{-n} = e^C (e^{log(n)})^{(n+\frac{1}{2})} e^{-n} \tag{30}$$

Simplificando

$$n! \sim e^C n^{(n+\frac{1}{2})} e^{-n} \tag{31}$$

La constante $e^C = \sqrt{2\pi}$. Por tanto, la fórmula de Stirling queda finalmente como:

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \tag{32}$$