Modèles de taux (cours II)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris Cité - Master M2 ISIFAR

13 janvier 2023

Produits dérivés de taux

I. Forward rate agreement (FRA)

On appelle forward rate agreement (FRA) de nominal N, d' expiration T, d'échéance S et de taux fixe K, un contrat financier qui donne à son acheteur un versement à l'instant S calculé au taux variable simple $L(T,S)$, fixé en T pour la période $[T,S]$, contre le paiement à cette même date S d'un montant calculé au taux fixe simple K pour la même période $[T,S]$.

Le pay-off du FRA à l'instant S est alors donné par

$$N(S-T)(L(T,S)-K) \tag{1}$$

I. Forward rate agreement (FRA)

On appelle forward rate agreement (FRA) de nominal N, d' expiration T, d'échéance S et de taux fixe K, un contrat financier qui donne à son acheteur un versement à l'instant S calculé au taux variable simple $L(T,S)$, fixé en T pour la période $[T,S]$, contre le paiement à cette même date S d'un montant calculé au taux fixe simple K pour la même période $[T,S]$.

Le pay-off du FRA à l'instant S est alors donné par

$$N(S-T)(L(T,S)-K) \tag{1}$$

En utilisant l'expression du taux simple en fonction des obligations ZC $L(T,S)=\frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{B_T(S)}-1\right)$, on obtient que ce pay-off est égal à

$$N\frac{1}{B_T(S)}-N((S-T)K+1) \tag{2}$$

I. Forward rate agreement (FRA)

Quel est le prix $\pi^{FRA}(t, T, S, K, N)$ du contrat FRA à l'instant t, $t \leq T$?

I. Forward rate agreement (FRA)

Quel est le prix $\pi^{FRA}(t, T, S, K, N)$ du contrat FRA à l'instant t, $t \leq T$?

Exercice: Montrez en utilisant une stratégie de réplication du pay-off du FRA basée sur les obligations ZC d'échéances T et S que le prix du FRA est donné par

$$\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = N\, B_t(S)\,(S - T)(L(t, T, S) - K), \tag{3}$$

où $L(t, T, S)$ est le taux forward simple, fixé en t pour la période $[T, S]$.

I. Forward rate agreement (FRA)

Pour répliquer le pay-off du FRA, on considère séparément deux valeurs données dans l'expression (2).

D'abord, on construit la stratégie de réplication de la valeur déterministe $N((S-T)K+1)$:

- à l'instant t: achat de $N((S-T)K+1)$ obligations ZC d'échéance S au prix unitaire $B_t(S)$. Le coût est alors égal à $N((S-T)K+1)B_t(S)$
- à l'instant S: le payoff est égal exactement à la valeur souhaitée $N((S-T)K+1)$

Il nous reste la réplication de la valeur $N\frac{1}{B_T(S)}$ dans (2):

- à l'instant t: achat de N obligations ZC d'échéance T au prix unitaire $B_t(T)$. Le coût est alors égal à $NB_t(T)$
- à l'instant T: on reçoit le montant N égal au pay-off de N obligations ZC d'échéance T et on achète $N\frac{1}{B_T(S)}$ d'obligations ZC d'échéance S. La valeur de ces deux opérations est égale à $N - N\frac{1}{B_T(S)}B_T(S) = 0$
- à l'instant S: le payoff de $N\frac{1}{B_T(S)}$ obligations ZC d'échéance S est égal exactement à la valeur souhaitée $N\frac{1}{B_T(S)}$

I. Forward rate agreement (FRA)

En mettant ces deux éléments ensemble, on obtient la valeur à l'instant t de la stratégie de réplication. Par AOA, le prix du FRA à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned}\pi^{FRA}(t,T,S,K,N) &= NB_t(T) - N((S-T)K+1)B_t(S)\\ &= NB_t(S)(S-T)(L(t,T,S)-K),\end{aligned}$$

où on utilise la définition du taux forward simple donnée par

$$L(t,T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right).$$

I. Forward rate agreement (FRA)

Définition: Le taux forward à l'instant t, noté K_t, est défini comme la valeur du taux fixe K qui annule le prix du FRA en t, i.e. le taux forward est la solution de l'équation

$$\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = 0.$$

L'expression du prix donnée par (3) implique alors

$$K_t = L(t, T, S).$$

I. Forward rate agreement (FRA)

Définition: Le taux forward à l'instant t, noté K_t, est défini comme la valeur du taux fixe K qui annule le prix du FRA en t, i.e. le taux forward est la solution de l'équation

$$\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = 0.$$

L'expression du prix donnée par (3) implique alors

$$K_t = L(t, T, S).$$

$\Rightarrow$ Notez que le taux forward du FRA est égal au taux forward simple défini précédemment.

II. Swap de taux d'intérêt

Un swap de taux est un produit financier qui permet d'échanger les intérêts entre deux contreparties. Par exemple, une banque qui a emprunté de l'argent à un taux variable (en pratique ce sera un taux lié par exemple au taux EURIBOR) peut changer son crédit en un crédit à taux fixe R en achetant un swap de taux d'intérêt correspondant.

II. Swap de taux d'intérêt

Un swap de taux est un produit financier qui permet d'échanger les intérêts entre deux contreparties. Par exemple, une banque qui a emprunté de l'argent à un taux variable (en pratique ce sera un taux lié par exemple au taux EURIBOR) peut changer son crédit en un crédit à taux fixe R en achetant un swap de taux d'intérêt correspondant.

Définition: Soit $0 \leq T_0 < T_1 < \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On note N le nominal et T_0 la date initiale du swap. Un swap de taux d'intérêt est un produit financier composé de deux jambes associées à des flux payés aux dates $T_1, \ldots, T_n$.

La jambe fixe est égale à un flux de paiements suivants: à chaque date T_i, $i = 1, \ldots, n$, le montant $NR(T_i - T_{i-1})$ est payé.

La jambe variable est égale à un flux de paiements suivants: à chaque date T_i, $i = 1, \ldots, n$, le montant $NL(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})$ est payé, où $L(T_{i-1}, T_i)$ est un taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

II. Swap de taux d'intérêt

On appelle swap payeur le swap où l'acheteur du swap *paie* les intérêts au taux *fixe* et reçoit les intérêts au taux variable. L'acheteur d'un swap receveur *reçoit* les intérêts au taux *fixe* et paie les intérêts au taux variable.

Dans la suite nous allons nous concentrer au swap payeur et nous allons noter son prix à l'instant t, $t \leq T_0$, $\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N)$.

II. Swap de taux d'intérêt

On appelle swap payeur le swap où l'acheteur du swap *paie* les intérêts au taux *fixe* et reçoit les intérêts au taux variable. L'acheteur d'un swap receveur *reçoit* les intérêts au taux *fixe* et paie les intérêts au taux variable.

Dans la suite nous allons nous concentrer au swap payeur et nous allons noter son prix à l'instant t, $t \leq T_0$, $\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N)$.

Remarque: Notez que le swap peut être vu comme une généralisation du contrat FRA à un échéancier de plusieurs dates de paiement. Ainsi, le prix du swap payeur à l'instant t s'écrit facilement comme une somme des prix de FRA:

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = \sum_{i=1}^{n} \pi^{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, R, N).$$

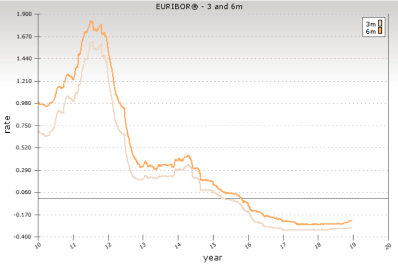
En utilisant l'équation (3) donnant le prix du FRA, on a

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = N \sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(t, T_{i-1}, T_i) - R). \tag{4}$$

II. Swap de taux d'intérêt

Exemple: Une entreprise a acheté un swap payeur au taux fixe $R = 1\%$ contre le taux variable EURIBOR 6-mois sur une période de 3 ans commençant le 5 mars 2012 et du nominal 100 millions d'euros. Dresser un tableau des flux (en millions d'euros) pour ce swap. Le taux EURIBOR 6-mois est donné ci-dessous (les valeurs estimées à partir du graphique):

05/03/2012 1.55 %
05/09/2012 0.75 %
05/03/2013 0.36 %
05/09/2013 0.32 %
05/03/2014 0.47 %
05/09/2014 0.25 %



II. Swap de taux d'intérêt

Nous revenons maintenant à l'expression du prix du swap (4). La somme des flux de la jambe variable se simplifie en utilisant la définition du taux forward $L(t, T_{i-1}, T_i)$ et nous obtenons:

$$\begin{aligned} N\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})L(t, T_{i-1}, T_i) &= N\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)\left(\frac{B_t(T_{i-1})}{B_t(T_i)} - 1\right) \\ &= N\sum_{i=1}^{n}(B_t(T_{i-1}) - B_t(T_i)) \\ &= N(B_t(T_0) - B_t(T_n)). \end{aligned}$$

Le prix du swap s'écrit alors comme

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = N\left(B_t(T_0) - B_t(T_n) - \sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})R\right) \tag{5}$$

⇒ Notez que le prix du swap receveur correspondant est donné par

$$\pi^{sw,r}(t, T_0, T_n, R, N) = -\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N).$$

II. Swap de taux d'intérêt

Définition: Le taux swap à l'instant t, noté $S(t, T_0, T_n)$, est défini comme la valeur du taux fixe R qui annule le prix du swap en t, i.e. le taux swap est la solution de l'équation

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = 0.$$

L'équation (5) implique alors

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B_t(T_0) - B_t(T_n)}{\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})} \tag{6}$$

Définition: Le taux swap à l'instant t, noté $S(t, T_0, T_n)$, est défini comme la valeur du taux fixe R qui annule le prix du swap en t, i.e. le taux swap est la solution de l'équation

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = 0.$$

L'équation (5) implique alors

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B_t(T_0) - B_t(T_n)}{\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})} \tag{6}$$

Exercice: Exprimer le taux swap en fonction des taux forward simples $L(t, T_{i-1}, T_i)$, $i = 1, \dots, n$ (diviser le numérateur et le dénominateur de l'équation (6) par $B_t(T_0)$ et utiliser la définition de $L(t, T_{i-1}, T_i)$ et le produit télescopique).

IIIa. Options: Cap et floor

Un cap est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux variable simple et un taux fixe (fixé au début de contrat). Le cap donc permet de s'assurer contre une hausse des taux variables. Il tire son nom en anglais du fait qu'il est souvent utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable.

Un floor est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux fixe (fixé au début de contrat) et un taux variable simple. Le floor protège alors son acheteur contre une baisse des taux variables.

IIIa. Options: Cap et floor

Un cap est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux variable simple et un taux fixe (fixé au début de contrat). Le cap donc permet de s'assurer contre une hausse des taux variables. Il tire son nom en anglais du fait qu'il est souvent utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable.

Un floor est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux fixe (fixé au début de contrat) et un taux variable simple. Le floor protège alors son acheteur contre une baisse des taux variables.

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle cap de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\left(L(T_{i-1}, T_i) - K\right)^+ ; \tag{7}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

IIIa. Options: Cap et floor

Un cap est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux variable simple et un taux fixe (fixé au début de contrat). Le cap donc permet de s'assurer contre une hausse des taux variables. Il tire son nom en anglais du fait qu'il est souvent utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable.

Un floor est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux fixe (fixé au début de contrat) et un taux variable simple. Le floor protège alors son acheteur contre une baisse des taux variables.

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle cap de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+\,; \tag{7}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

Pour chaque T_i, le pay-off donné par (7) est appelé caplet. Le cap est alors une chaîne de caplets d'échéances T_i, $i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow$ Le caplet est une option call avec le taux d'intérêt variable comme sous-jacent.

IIIa. Options: Cap et floor

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle floor de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(K - L(T_{i-1}, T_i))^+ \,; \tag{8}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

IIIa. Options: Cap et floor

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle floor de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(K - L(T_{i-1}, T_i))^+\,; \qquad (8)$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

Pour chaque T_i, le pay-off donné par (8) est appelé floorlet. Le floor est alors une chaîne de floorlets d'échéances T_i, $i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Le floorlet est une option put avec le taux d'intérêt variable comme sous-jacent.

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle floor de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(K - L(T_{i-1}, T_i))^+\,; \tag{8}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

Pour chaque T_i, le pay-off donné par (8) est appelé floorlet. Le floor est alors une chaîne de floorlets d'échéances T_i, $i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Le floorlet est une option put avec le taux d'intérêt variable comme sous-jacent.

Remarque: Pour calculer les prix du caplet et du floorlet nous avons besoin d'un modèle (ce sont des options!), il n'est pas possible de les exprimer en fonction des prix des obligations ZC comme pour les pay-offs linéaires (FRA et swaps).

Nous allons noter le prix en t, $t \leq T_{i-1}$, du caplet $\pi^{caplet}(t, T_{i-1}, T_i, K, N)$ et le prix du floorlet $\pi^{floorlet}(t, T_{i-1}, T_i, K, N)$.

Exemple: On considère un cap de nominal $N = 10$ millions d'euros et de strike $K = 0.40\%$ sur une période de 10 ans et la fréquence de paiements de 6 mois.

On suppose qu'à une des dates T_{i-1}, le taux EURIBOR 6-mois vaut 0.45%. Donc, le pay-off du caplet associé à cette date est donné par

$$10x10^6 x \frac{1}{2} x (0.0045 - 0.0040)^+ = 2500$$

et payé à la date T_i.

Si en T_{i-1} le taux EURIBOR 6-mois était plus petit que le strike $K = 0.40\%$, le pay-off du caplet aurait été égal à zéro.

IIIa. Options: Cap et floor

On considère un caplet et un floorlet de même strike K et de même échéance T sur le taux variable simple $L(T, T+\delta)$, $\delta > 0$. Pour simplicité on suppose le nominal $N = 1$. On a la relation suivante entre les prix du caplet et le floorlet (parité caplet-floorlet):

$$\pi^{caplet}(t, T, T+\delta, K, 1) - \pi^{floorlet}(t, T, T+\delta, K, 1) = \pi^{FRA}(t, T, T+\delta, K, 1)$$

Plus généralement, on a la parité cap-floor donnée par

$$\pi^{cap}(t, T_0, T_n, K, 1) - \pi^{floor}(t, T_0, T_n, K, 1) = \pi^{sw}(t, T_0, T_n, K, 1)$$

Preuve: On écrit la différence des pay-offs du caplet et du floorlet à la date $T + \delta$

$$\delta\,(L(T, T+\delta) - K)^+ - \delta\,(K - L(T, T+\delta))^+ = \delta\,(L(T, T+\delta) - K)$$

qui est égale au pay-off d'un FRA de taux fixe K sur le taux variable simple $L(T, T+\delta)$.
Par AOA, on obtient à tout instant t, $t \leq T$, la relation de parité caplet-floorlet. $\square$

IIIb. Options: Swaption

Une swaption est une option dont l'actif sous-jacent est un swap de taux d'intérêt. La swaption permet de rentrer dans un swap à une date T et à un taux fixe R, fixés à l'avance.

IIIb. Options: Swaption

Une swaption est une option dont l'actif sous-jacent est un swap de taux d'intérêt. La swaption permet de rentrer dans un swap à une date T et à un taux fixe R, fixés à l'avance.

Définition: On considère le swap payeur défini avant. Soit T une date fixée, $T \geq T_0$. On suppose pour simplicité $T = T_0$. On appelle swaption d'échéance T et de (taux) strike R l'option écrit sur le swap avec comme pay-off

$$\left(\pi^{sw}(T_0, T_0, T_n, R, N)\right)^+$$

à la date T_0.

IIIb. Options: Swaption

Rappelons l'expression du prix du swap donné par (4). A la date d'exercice de la swaption T_0 la valeur du swap sous-jacent est donnée par

$$\pi^{sw}(T_0, T_0, T_n, R, N) = N \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(T_0, T_{i-1}, T_i) - R)$$

et le pay-off de la swaption à son échéance T_0 est alors

$$N \left(\sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(T_0, T_{i-1}, T_i) - R) \right)^{+}.$$

On peut également utiliser l'autre expression du prix du swap donnée dans (5). Notez qu' à la date T_0 nous avons $B_{T_0}(T_0) = 1$ et le pay-off de la swaption est égal à

$$N\left(1 - B_{T_0}(T_n) - \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})R)\right)^{+} = N\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_n B_{T_0}(T_i)\right)^{+},$$

où on note $c_i := (T_i - T_{i-1})R$, pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $c_n := 1 + (T_n - T_{n-1})R$.

IIIb. Options: Swaption

On peut également utiliser l'autre expression du prix du swap donnée dans (5). Notez qu' à la date T_0 nous avons $B_{T_0}(T_0) = 1$ et le pay-off de la swaption est égal à

$$N\left(1 - B_{T_0}(T_n) - \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})R)\right)^+ = N\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_n B_{T_0}(T_i)\right)^+,$$

où on note $c_i := (T_i - T_{i-1})R$, pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $c_n := 1 + (T_n - T_{n-1})R$.

$\Rightarrow$ Le pay-off de la swaption est équivalent au pay-off d'une option put de strike 1 et d'échéance T_0 sur une obligation avec des coupons c_i.

$\Rightarrow$ Il est aussi équivalent au pay-off d'une option basket de strike 1 et d'échéance T_0 sur un panier d'obligations ZC.

IIIb. Options: Swaption

Exercice: Montrer que le pay-off à la date T_0 de la swaption peut s'écrire comme une option sur le taux swap $S(T_0, T_0, T_n)$, défini dans l'équation (6), sous la forme:

$$N \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1}) \left(S(T_0, T_0, T_n) - R\right)^+$$