

Cours de Mathématiques financières et calcul stochastique

M2 ISIFAR, Semestre 1, Septembre-Décembre 2022

- **Enseignants :**
Jean-François Chassagneux¹ & Alexandre Pannier²
- **Documents de cours :** Moodle - <https://moodle.u-paris.fr/enrol/index.php?id=6074>
- **Evaluation :** Partiel et Examen.

Notez que l'examen ne portera pas sur :

- preuve du point 2.b de la Prop 3.2
- preuves Section 4.2
- preuve du Lemme 5.2
- preuve Th 6.2
- preuves section 6.5.1 (les formules, si nécessaires, seront données)
- section 6.5.2

1. `chassagneux@lpsm.paris`

2. `pannier@lpsm.paris`

Références

- [1] BOUCHARD B. AND JF CHASSAGNEUX (2016), *Fundamentals and advanced techniques in Derivatives Hedging*, Springer (french version : Economica).
- [2] COMETS, F. AND T. MEYRE (2015), *Calcul stochastique et modèles de diffusions*, Dunod.
- [3] LAMBERTON D. AND B. LAPEYRE (1997), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.
- [4] PONCET, P. AND R. PORTAIT (2014), *Finance de marché*, Dalloz.
- [5] REVUZ, D. AND M. YOR (1999), *Continuous martingales and brownian motion*, Springer.

1 Introduction

- Objet du cours : Modélisation financière en temps continu.
- Objectifs :
 1. Comprendre les bases de la théorie des options et les notions de gestion des risques.
 2. Savoir les mettre en pratique via la maîtrise des bases du calcul stochastique.
- Quelques notions importantes :
 1. Du côté finance...
 - Valorisation : comment définir le prix, la valeur d'un produit financier ?
 - Couverture : comment minimiser ou annuler le risque associé à un produit financier ?
 - Arbitrage : plus précisément "Absence d'Opportunité d'Arbitrage" (AOA) permet de définir le concept de "juste prix".
 - Marché complet : cadre théorique utilisé pour la modélisation... marché idéal.
 2. Du côté mathématique...
 - Processus stochastique : évolution aléatoire des prix ;
 - Mouvement Brownien : exemple central de processus stochastique, première modélisation des prix (Bachelier, 1900) ;
 - Martingales, Equations Différentielles Stochastique ;
 - Calcul stochastique d'Itô : Formule d'Itô.

2 Mathématiques financières de base

Cf. [4].

2.1 Marché financier

- leur rôle :

1. Allocation inter-temporelle de liquidités : certains agents économiques ont des besoins de financement, d'autres ont des capacités de placement
2. Allocation des risques : transfert du risque via l'échange de produits financiers (produits dérivés en général)
3. Vecteur d'information : via les prix.

- Les titres (échangés sur un marché financier) : droit à une séquence de flux de trésorerie (somme d'argent transférée d'un agent à un autre).

Exemple de titres de base : Obligations, Actions, indices.

Exemple de produits dérivés : Forwards, Options etc.

- Caractéristiques d'un marché

- marché en *équilibre* : offre = demande, en particulier : tout opérateur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix du marché ;
- *équilibre compétitif* : aucun agent n'a un poids relatif suffisant pour influencer les prix par ses offres ou demandes.
 - ↔ tout agent peut acheter ou vendre des quantités arbitraires au prix du marché qui est une donnée exogène.
- *sans arbitrage* : “*no free lunch*” impossible de gagner de l'argent à coup sûr avec une mise initiale nulle.
- *efficience* : à chaque instant les prix incorporent toute l'information pertinente et disponible.
- *liquidité* : facilité pour les opérateurs à nouer et dénouer leurs positions en actifs au prix du marché.
 - ↔ un marché liquide n'a pas de coûts de transaction, pas d'impôt, pas d'interdiction de vente à découvert etc.

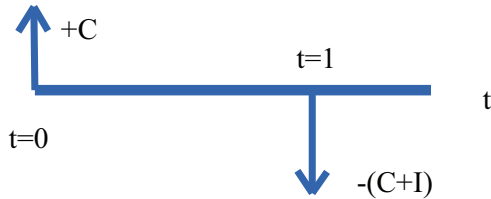
- Marché parfait : en équilibre compétitif, efficient et liquide.

↔ Idéal théorique servant de base à la modélisation.

2.2 Taux d'intérêt

- Opérations de prêt-emprunt à deux flux sur une période :

Pour l'emprunteur



C : capital prêté, I : intérêts

Séquence de flux pour l'emprunteur : $\{C, -F\}$, avec $F = C + I$.

- Le taux d'intérêt est une convention !
 - taux périodique (ici relatif à une période d'un an) : $F = C(1 + r)$
 - taux continu ou exponentiel : $F = Ce^r$
- *Intérêts simples* : Les intérêts ne deviennent pas eux-mêmes productifs d'intérêts.
 - Séquence de flux : en $t = 0$, $+C$; en $t = n$ années, $-F$.
 - $F = C + I$ avec $I = n \times r \times C$, avec un taux périodique.
- *Intérêts composés* (ou capitalisés) : ils s'ajoutent en fin de chaque période au capital, et ils produisent alors eux-mêmes des intérêts au cours de la période suivante.
 - Séquence de flux : en $t = 0$, $+C$; en $t = n$ années, $-F$.
 - Avec un taux périodique (période d'un an) : $F = C(1 + r)^n$ i.e. capitalisation tous les ans.
 - Avec un taux continu annuel : $F = Ce^{rn}$ i.e. capitalisation "instantannée".

Exercice .1. Soit r un taux d'intérêt périodique annuel. On suppose qu'il est composé m fois par an et que le capital de départ est C .

1. Quel est le capital obtenu au bout de deux ans ?

$$F = C\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{2m}.$$

2. Que se passe-t-il si $m \rightarrow +\infty$?

$$F \rightarrow e^{2r}.$$

- Des complications d'ordre pratique :
 - Calcul de la durée T : les bases 360 et 365-366...
 - Intérêt précompté ou post-compté : intérêts versés au début ou à la fin de la période...

dépend du type et du terme des opérations en pratique.

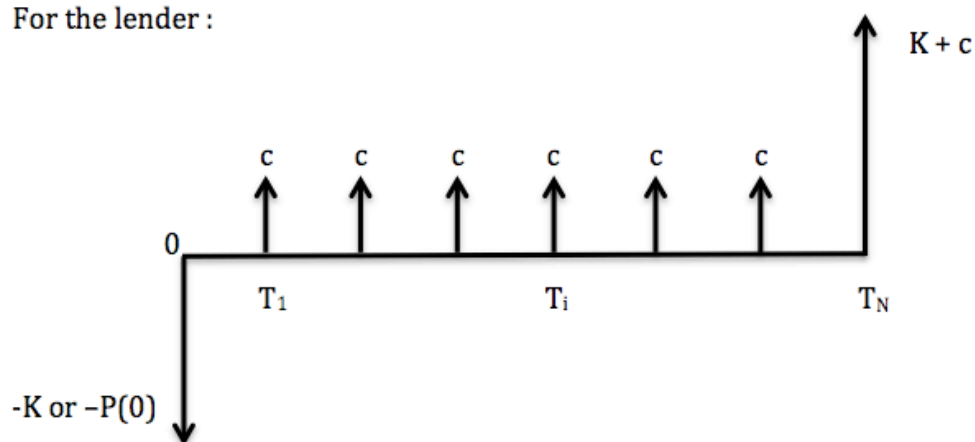
- **Valeur actualisée** : *Actualiser* une somme à payer à une date à venir, c'est calculer le montant qu'il faudrait placer aujourd'hui à un taux d'intérêts (composés), le *taux d'actualisation*, qui permettrait d'obtenir la même somme à l'échéance du placement.

2.3 Obligations (*bonds*)

- Une obligation est un titre de créance qui donne lieu à des paiements d'intérêt (ou coupons) et à un remboursement du principal (montant emprunté).
- Ce sont des titres de créances négociables car standardisées : après émission, elles peuvent être échangées à un prix de marché.

Exemple 2.1. *Une obligation à coupons constants :*

For the lender :



- Obligation zéro-coupon (ZCB) :

For the owner:



- C'est le prix de cette obligation qui va être observé sur le marché et non le taux d'intérêt.

- On dénote $B_0(T)$ le prix d'un ZCB versant 1 euro en T . On a, pour un taux d'intérêt constant, supposant

- le taux périodique : $B_0(T) = \frac{1}{(1+r)^T}$
- le taux continu : $B_0(T) = e^{-rT}$

2.4 Actions

- Ce sont des droits de propriétés titrisés qui
 - sont cotés sur un marché officiel
 - représentent le capital de la firme émettrice
 - donnent droit aux dividendes
 - permettent de voter lors des assemblées générales
- Il y a d'autres titres financiers de base : indices, taux de changes, marchandises etc.

2.5 Produits dérivés

- Titre financier dont la valeur dépend de la valeur d'un support (ou sous-jacent) souvent un titre financier de base : actions, obligations, indices etc.
- Caractéristiques :
 - leur valeur initiale est faible (voire nulle) en regard de celle du sous-jacent
 - ce sont des jeux à somme nulle i.e. le gain final de l'acheteur est la perte finale du vendeur.
- on peut distinguer 4 grandes classes :
 1. les contrats à terme (*forwards* ou *futures*)
 2. les *swaps* (contrat d'échange)
 3. les options
 4. les produits structurés

2.5.1 Contrats à terme

Définition 2.1. (forward) *Contrat signé en date 0 liant un acheteur et un vendeur :*

- *pour l'acheteur, il confère le droit et l'obligation d'acheter en date T , un sous-jacent à un prix déterminé en date 0*
- *pour le vendeur, il confère le droit et l'obligation de vendre le sous-jacent en T à ce prix*

On notera ce contrat $\mathcal{F}(0, T)$.

- On dit que :
 - l'acheteur est en position longue sur le sous-jacent
 - le vendeur est en position courte sur le sous-jacent
- Le sous-jacent peut être un actif physique, un actif financier, un indice boursier.
- Le contrat à terme doit définir avec précision l'actif sous-jacent, la taille du contrat, le lieu du contrat et la date de livraison.
- Aucun échange monétaire n'a lieu entre l'acheteur et le vendeur à l'initiation du contrat.
- Comme les autres produits dérivés, les *forwards* sont utilisés pour
 1. le transfert des risques
 2. la spéculation
 3. l'arbitrage

Exemple 2.2. *Pour 1. une compagnie travaillant à l'export peut utiliser des forwards sur taux de change pour éliminer le risque de fluctuation du cours d'une devise étrangère.*

Pour 2. un investisseur qui pense que le cours d'un indice va monter peut prendre une position longue en forwards sur cet indice pour réaliser un gain dans le cas d'un mouvement favorable du cours sans avoir à déboursier immédiatement de l'argent (ce qui serait nécessaire en investissant directement dans l'indice). Cette stratégie n'est pas une stratégie d'arbitrage car elle comporte un risque de perte dans le cas d'un mouvement défavorable du cours de l'indice.

Pour 3. si les forwards sont surévalués par rapport à la valeur du bien sous-jacent, on peut réaliser un gain sans risque en prenant une position courte en forwards et en achetant simultanément le bien pour le stocker jusqu'à l'échéance. Ainsi, la livraison du bien

est assurée, et on récupère la différence entre le prix à terme et le prix spot (comptant) du bien, moins le coût de l'opération (financement + stockage).

- Notations :

- T désigne la maturité du contrat
- pour $t \in [0, T]$, F_t désigne le prix du sous-jacent stipulé en t pour un paiement et livraison du sous-jacent en T (prix à terme)
- pour $t \in [0, T]$, S_t désigne le prix au comptant (prix spot) i.e. le prix stipulé en t pour un paiement et une livraison immédiats

- Par AOA, en T , $F_T = S_T$.

- Quelle est la marge engendrée en T par l'achat d'un contrat à terme à la date 0 ?

$F_T - F_0$ qui peut représenté un gain ou une perte

- pour la vente ? marge symétrique : $F_0 - F_T$

Le contrat *Forwards* ne donne lieu à aucun flux avant l'échéance T . En T , il y a

- livraison effective du sous-jacent contre paiement de F_0 (*Physical delivery*)
- règlement par le vendeur à l'acheteur de $F_T - F_0$ si $F_T > F_0$ ou règlement par l'acheteur au vendeur de $F_0 - F_T$ si $F_0 > F_T$ (*cash settlement*)

Les contrats *Futures*

- Ce sont des contrats traités sur des marchés organisés pour assurer la liquidité (par la standardisation des contrats) et éliminer le risque de contrepartie (tous les contrats ont une contrepartie unique, la chambre de compensation du marché)

- La différence avec les contrats *forwards* réside dans le versement quotidien et progressif de la marge $F_T - F_0$:

- pour un investisseur en position longue (acheteur) : son compte est crédité chaque jour t de la marge $F_t - F_{t-1}$.

Valorisation par AOA (introduction)

- On suppose que le marché est parfait, on peut :
 1. placer ou emprunter de l'argent via un compte en banque avec taux d'intérêt constant r (on utilise la convention de taux continu).
 2. investir dans d actifs risqués (qui ont des flux aléatoires après la date 0). On note S_t la valeur de ces actifs risqués à la date t . (Note : S_t est un vecteur aléatoire de dimension d !)
 \hookrightarrow on travaille donc sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Un portefeuille décrit les quantités investies dans chaque actif et le montant d'argent placé dans le compte en banque.
- Une stratégie financière est la donnée d'une règle d'investissement dans les actifs du marché.
- On note α_t la quantité d'argent sur le compte en banque et ϕ_t la quantité d'actif risqué pour une date $t \geq 0$. La valeur du portefeuille est donnée par

$$V_t = \alpha_t + \phi_t \cdot S_t$$

ϕ_t est un vecteur de dimension d et on note ' \cdot ' le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^d i.e. $\phi_t \cdot S_t = \sum_{j=1}^d \phi_t^j S_t^j$.

- On considère ici des portefeuilles construits à partir de stratégie statique : l'investissement est fait en date 0 et n'est plus modifié par la suite.
 \hookrightarrow exemple particulier de stratégie financière dite autofinancante.

En particulier, on a pour ces stratégies

$$V_t = \alpha_0 e^{rt} + \phi_0 \cdot S_t$$

- dans ce cadre, un *arbitrage* est un portefeuille de valeur initiale nulle et de valeur terminale (en T) qui est positive et strictement positive avec une probabilité non nulle.

Soit $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ la valeur du portefeuille.

- Un arbitrage satisfait donc : $V_0 = 0$, $V_T \geq 0$ & $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$.

- *Absence d'Opportunité d'Arbitrage* (AOA) signifie qu'il n'y a pas d'arbitrage possible.

Proposition 2.1. (*Comparaison de portefeuilles*) En AOA, deux portefeuilles ayant même valeur en T (produisant le même flux financier en T) ont même valeur en 0.

Preuve. arbitrage : soit $X_0 > Y_0$, on construit l'arbitrage suivant :

en $t = 0$ (constitution du portefeuille), achat de Y , vente de X et placement du gain $X_0 - Y_0$;

la valeur en $t = T$ (liquidation du portefeuille) est $C_T = Y_T - X_T + (Y_0 - X_0)e^{rT} = (Y_0 - X_0)e^{rT} > 0$ et déterministe... \square

- Valoriser un produit financier (un actif ou un contrat) consiste ici à déterminer le prix qui n'introduit pas d'arbitrage sur le marché.

Corollaire 2.1. *Si on peut construire un portefeuille qui a la même valeur en T que le produit financier à valoriser – on dira alors que le produit financier peut être répliqué – alors le prix du produit en 0 est la valeur du portefeuille de réplication en 0.*

- Valorisation d'un flux C déterministe en T : $V_t = e^{-r(T-t)}C = CB_t(T)$.

- Valorisation d'un contrat forward d'échéance T émis en 0 : $V_t = e^{-r(T-t)}(F_t - F_0)$

2 arguments :

1. la vente en t d'un contrat forward d'échéance T pour un prix 0 permet de fixer à un flux déterministe $F_t - F_0$ le flux en T

2. pour répliquer le flux engendré par le contrat forward $\mathcal{F}(0, T)$, on achète un contrat $\mathcal{F}(t, T)$ et on prête $e^{-r(T-t)}(F_t - F_0)$

- Calcul du prix à terme d'un actif : $F_0 = S_0e^{rT}$

un contrat forward d'échéance T peut être répliqué par un portefeuille contenant le sous-jacent et un emprunt de nominal F_0e^{-rT} et de durée T .

2.5.2 Les options

- Différent des instruments précédents car elles confèrent un droit et non une obligation pour l'acheteur de l'option.

Call & Put européens

- Un *Call* européen confère le droit à son détenteur d'acheter en date T pour un prix K fixé à l'avance un sous-jacent donné. Paramètres importants :
 - T , maturité de l'option
 - K , prix d'exercice (*strike*)
 - sous-jacent de valeur S_T en T
- Le détenteur du Call exercera son droit seulement si $S_T > K$, le flux (aléatoire) terminal associé à ce produit financier est donc

$$C_T(T, K) = (S_T - K)_+$$

Le prix de l'option à toute date est dénoté $C_t(T, K)$.

- Un *Put* européen confère le droit à son détenteur de vendre en date T pour un prix K fixé à l'avance un sous-jacent donné.
 - $P_t(T, K)$ dénote le prix du Put à toute date t
 - En particulier en T , on a donc

$$P_T(T, K) = (K - S_T)_+$$

- Terminologie :
 - Le flux à la date terminale est le profil de gain ou *payoff*
 - Une option est à la monnaie (*at the money*) à la date t d'aujourd'hui si $K = S_t$
 - Une option est dans la monnaie (*in the money*) si elle devait expirer aujourd'hui son payoff serait positif
 - Une option est en dehors de la monnaie (*out of the money*) si elle devait expirer aujourd'hui son payoff serait négatif
 - La *valeur intrinsèque* d'une option est la quantité d'argent qu'elle rapporterait si elle devait expirer aujourd'hui (la valeur du pay-off aujourd'hui).
 - La *valeur temps* d'une option est égale à son prix moins sa valeur intrinsèque.
 - La *prime* d'une option (*premium*) est la somme d'argent versée au vendeur par l'acheteur en date initiale en contrepartie de l'option.

- En tant que produit spéculatif, les options permettent de prendre des paris sur certains scénarios d'évolution du marché selon les stratégies suivantes :

- L'achat d'un Call permet de parier sur la hausse du sous-jacent, et l'achat d'un Put sur la baisse
- Le Bull spread : achat d'un Call de strike K_1 , vente d'un Call de strike $K_2 > K_1$, de même échéance (paris directionnels ; moins chers que les options elle-mêmes, mais les gains sont limités.)
- le Bear spread : vente d'un Put de strike K_1 , achat d'un Put de strike $K_2 > K_1$, de même échéance.
- Le Straddle : achat simultané d'un Call et un Put de même strike, typiquement choisi égal à la valeur présente du sous-jacent, et même échéance) permet de parier sur la hausse de volatilité du sous-jacent.
- Le Butterfly spread (achat d'un Call de strike $K - h$ et d'un Call de strike $K + h$; vente de 2 Calls de strike K , tous de même échéance — où le strike K est typiquement égal à la valeur présente du sous-jacent) permet de parier sur la baisse de la volatilité : le pay-off est maximal si le sous-jacent reste proche de sa valeur.

Propriétés des prix de calls & puts européens

Théorème 2.1. *Relation de parité Call-Put :*

$$C_t(T, K) - P_t(T, K) = S_t - KB_t(T) \quad (2.1)$$

Preuve. On considère 2 portefeuilles :

- A : constitué d'un call et K ZCB de maturité T
- B : du put et du sous-jacent

En date terminale, $V_T^A = (S_T - K)_+ + K$ et

$$V_T^B := (K - S_T)_+ + S_T = (K - S_T)_+ + (S_T - K) + K = V_T^A.$$

On conclut en utilisant la Proposition 2.1. □

- Bornes sur les prix des Call et des Puts

$$(S_t - KB_t(T))_+ \leq C_t(T, K) \leq S_t \quad (2.2)$$

$$(KB_t(T) - S_t)^+ \leq P_t(T, K) \leq KB_t(T) \quad (2.3)$$

- Dépendance des prix d'Options par rapport aux paramètres :

Proposition 2.2. 1. *Le prix du Call est décroissant par rapport au strike*

$$K_1 \leq K_2 \implies C_t(K_2) \leq C_t(K_1)$$

2. *Le prix du Put est croissant par rapport au strike*

3. *Les prix des Calls et des Puts sont Lipschitz par rapport au strike*

$$|C_t(T, K) - C_t(T, K')| \leq B_t(T)|K - K'| \text{ et } |P_t(T, K) - P_t(T, K')| \leq B_t(T)|K - K'|$$

4. *Les prix des Calls et des Puts sont convexes par rapport au strike.*

5. *Le prix du call est croissant avec la maturité*

Options américaines

- Options qui peuvent être exercées à toute date avant la maturité T .
- Le prix d'une option américaine est supérieure au prix d'une option européenne :

$$P_t^{us}(T, K) \geq P_t(T, K) \text{ et } C_t^{us}(T, K) \geq C_t(T, K) \quad (2.4)$$

\hookrightarrow différence entre ces deux prix : *prime d'exercice anticipée*

Théorème 2.2. *En l'absence de dividendes, le prix du call américain est égal au prix du call européen.*

Preuve. On combine (2.2) et (2.4) qui montre qu'il n'y a pas d'exercice anticipé. Cf. aussi exercice I.4 □

- Pour le Put, la situation est très différente : le prix du Put américain peut excéder le prix du Put européen.

Supposons qu'à une date t , $S_t < K(1 - B_t(T))$. Alors l'exercice immédiat de l'option rapporte $K - S_t > KB_t(T)$, alors que le prix de l'option européenne est borné par $KB_t(T)$ par la formule (2.3). et la prime d'exercice anticipée est strictement positive.

- De combien le prix du Put américain peut-il excéder le prix du Put européen ?

Proposition 2.3. *Supposons que le taux d'intérêt est constant et égal à r . Alors,*

$$0 \leq P_t^{us}(T, K) - P_t(T, K) \leq K(1 - e^{-r(T-t)}).$$

Preuve. Cf. Exercice I.5.

Exemples d'utilisation : Cf. TD1 pour les éléments de réponse.

Exemple 2.3 (Put protectif). *Un Put protectif est une combinaison d'une position longue dans un actif et d'une option Put sur le même actif.*

1. Quel est le payoff à échéance du montage ? $H_T = (K - S_T)^+ + S_T = \max(S_T, K)$
2. Quel est son rôle ? *Ce montage permet donc de limiter les pertes à un niveau K souhaité.*

Exemple 2.4 (Constitution d'un fonds garanti). *Certains fonds d'investissement offrent à leurs clients une garantie de performance minimale. Ce type de garantie peut être mis en place en utilisant des options. Supposons que l'investissement initial est normalisé à 1, et que l'investisseur est assuré de recevoir au moins K à l'échéance T (le plancher).*

1. Donner une condition sur la valeur de K pour ne pas créer d'arbitrage pour l'investisseur. $KB(T) < 1$.

La stratégie suivante permet alors de respecter la contrainte tout en gardant un potentiel de gain :

- Investir une fraction λ du fonds dans l'actif risqué S . (on suppose $S_0 = 1$.)
- Utiliser le montant résiduel pour l'achat d'un Put sur λS d'échéance T et strike K , ou, de manière équivalente, λ Puts sur S de strike K/λ .

2. Quel est le payoff de la partie optionnelle et la valeur du fond en T ?

Le pay-off de la partie optionnelle à la date T est égal à $(K - \lambda S_T)^+$, et la valeur du fonds est donnée par

$$\lambda S_T + (K - \lambda S_T)^+ = \max(K, \lambda S_T).$$

3. Donner la contrainte sur λ .

Pour que cette allocation soit réalisable, la valeur λ doit vérifier la contrainte du budget : la somme du montant investi en l'actif risqué et du prix de l'option doit valoir 1 :

$$\lambda S_0 + \text{Put}_0^{\lambda S}(T, K) = 1, \quad (2.5)$$

où $\text{Put}^{\lambda S}(T, K)$ est le prix de l'option sur λS d'échéance T et strike K . Soit

$$f(\lambda) = \lambda S_0 + \text{Put}_0^{\lambda S}(T, K)$$

Alors, $f(0) = KB(T) < 1$ et $f(1) = 1 + \text{Put}^S(T, K) > 1$. De plus $\lambda \rightarrow f(\lambda)$ est une fonction croissante continue, donc il existe $\lambda^* \in (0, 1)$ qui vérifie (2.5).

Exercice .2 (Option à choix). *Une option à choix sur un titre est un produit dérivé qui donne le droit au détenteur de choisir à une date τ s'il veut un call ou un put de maturité $T > \tau$, et de strike K . On notera $C_t(T, K)$ et $P_t(T, K)$ les prix du call et du put à la date t .*

1. *Quel est le pay-off de l'option à choix ?*
2. *Vérifier que le prix d'arbitrage à la date $t = 0$ de cette option à choix est*

$$\Pi_0 = P_0(T, K) + C_0(\tau, K e^{-r(T-\tau)})$$

Réponses : cf Exercices de TDs.

Options exotiques

- Il existe des options plus complexes qui sont définies directement en termes de leur payoff :

- Options à barrière : le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Exemple (up and out call)

$$H_T = (S_T - K)^+ 1_{M_T < B}, \quad \text{où} \quad M_T = \max_{0 \leq u \leq T} S_u$$

- L'intérêt de cette option est qu'elle est moins chère que le call standard mais offre des garanties très similaires en situation normale (si la barrière est suffisamment haute).
- Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne du cours de l'actif sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix) :

$$H_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+$$

- Options multi-sousjacent : sur un panier d'actions, un panier de taux de change etc.

$$H_T = \left(\sum_{i=1}^n w_i S_T^i - K \right)^+$$

- Options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifique, par exemple,

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+,$$

où $T_0 < T$ est une date future et m (moneyness de l'option) est un nombre fixé dans le contrat : typiquement pour *stock option* $m = 0$, permet aussi une exposition à la volatilité forward...

2.6 Valorisation d'Options dans le modèle binomial à une période

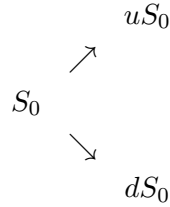
- Pour aller plus loin, on a besoin d'un modèle de marché.

2.6.1 Modélisation probabiliste

- 2 dates : $t = 0$ et $t = 1$ et 2 actifs :
 - Un actif sans risque de rendement $R = 1 + r$ et qui vaut 1 à la date 0.

$$1 \rightarrow R = 1 + r$$

- Un actif risqué qui vaut S_0 en date 0 et qui peut prendre 2 valeurs différentes en date 1 :



avec $u > d$

- $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$ représente les deux états du monde possible.
 $\hookrightarrow S_1(\omega_u) = uS_0$ et $S_1(\omega_d) = dS_0$
- La tribu considérée est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; la filtration est $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$. Ici, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$.
- La probabilité historique \mathbb{P} est définie par

$$\mathbb{P}(\{\omega_u\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{\omega_d\}) > 0.$$

Définition 2.2. *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une variable aléatoire \mathcal{F}_1 -mesurable*

Définition 2.3. *Une stratégie de portefeuille est la donnée d'un capital initial x et d'une quantité d'actif risqué Δ à la date 0. Elle consiste à l'achat de Δ actif risqué et $x - \Delta S_0$ actif sans risque.*

Sa valeur est

$$\begin{aligned} V_0^{x,\Delta} &= \Delta S_0 + (x - \Delta S_0) = x \\ V_1^{x,\Delta} &= \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R = xR + \Delta(S_1 - S_0R) \end{aligned}$$

- Condition d'AOA : $d < R < u$. **Preuve.** supposons $R \leq d$: on emprunte 1 à la banque et on achète $1/S_0$ actif risqué, i.e $x = 0$ et $\Delta = 1/S_0$. $V_0 = 0$ et $V_1 = \frac{S_1}{S_0} - R \geq d - R \geq 0$ et $\mathbb{P}(V_1 = u - R > 0) = p > 0$. \square

- *Réplication* de l'option de payoff $G = g(S_1)$. On cherche un couple vérifiant

$$G(\omega^u) = \Delta S_1(\omega_u) + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0 \quad (2.6)$$

$$G(\omega^d) = \Delta S_1(\omega_d) + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0 \quad (2.7)$$

La solution de ce système est donnée par

$$\Delta = \frac{G(\omega^u) - G(\omega^d)}{(u - d)S_0} = \frac{g(S_1(\omega^u)) - g(S_1(\omega^d))}{S_1(\omega^u) - S_1(\omega^d)} \text{ et } x = \frac{1}{R} \left(\frac{R - d}{u - d} G(\omega^u) + \frac{u - R}{u - d} G(\omega^d) \right)$$

La valeur initiale du portefeuille de réplication est le prix de l'option (seul prix viable).

- *Probabilité risque neutre.*

$$x = \frac{1}{R} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [G]$$

avec $\mathbb{Q}(\omega^u) = \frac{R-d}{u-d}$ et $\mathbb{Q}(\omega^d) = \frac{u-R}{u-d} = 1 - \mathbb{Q}(\omega^u)$.

- On observe aussi $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_1] = RS_0$.

- Le marché est *complet*.

• Dans ce modèle très simple apparaissent déjà les concepts fondamentaux de la théorie financière moderne.

On va maintenant chercher à étendre ces résultats à des modèles plus généraux, qui doivent tenter de reproduire au mieux la réalité des marchés financiers.

3 Mouvement Brownien et martingales

3.1 Rappel sur les vecteurs gaussiens

3.1.1 Variable aléatoire gaussienne

Généralités : On considère

- Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i.e.
 - Ω : espace des résultats possibles, $\omega \in \Omega$ est un *événement* élémentaire = un résultat possible.
 - \mathcal{A} : c'est une tribu i.e. ensemble de tous les événements et cela représente l'information disponible.
 - \mathbb{P} : c'est une probabilité soit une fonction qui associe à un événement de \mathcal{A} un nombre entre 0 et 1 représentant les chances de réalisation de cet événement.
- On s'intéresse souvent à des fonctions du résultat de l'expérience aléatoire...

Définition 3.1. Une variable aléatoire réelle $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i.e.

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) = \{X \in B\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

avec $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tribu borélienne de \mathbb{R} (engendrée par les ouverts notamment).

- Principaux outils :
 - Loi d'une variable aléatoire X est notée \mathbb{P}_X , elle est définie par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

- Fonction de répartition de \mathbb{P}_X :

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Cette fonction caractérise \mathbb{P}_X , elle est croissante, càd et a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

- Densité : une fonction p définie sur \mathbb{R} est une densité si elle est positive et t.q.
 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.
 X a pour densité f_X si

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y)dy .$$

La Gaussienne

- Définition : X suit une *loi normale centrée réduite* si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et on observe

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int x f_X(x) dx = 0 \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int x^2 f_X(x) dx = 1\end{aligned}$$

Bien sûr, la variance de X vaut $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1$ ici.

- La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est la loi de la variable aléatoire : $Y := m + \sigma X$ avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Si $\sigma = 0$ alors $Y = m$ p.s.
2. Si $\sigma \neq 0$, Y a une densité donnée par

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

3. $\mathbb{E}[Y] = m$ et $\mathbb{V}[Y] = \sigma^2$.

- La fonction caractéristique est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \int e^{itx} f_X(x) dx.$$

Pour $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

$$\varphi_Y(t) := e^{itm} \mathbb{E}[e^{it\sigma X}] = e^{itm - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}.$$

\hookrightarrow la loi normale apparaît comme objet limite fondamental à travers le T.C.L.

3.1.2 Vecteurs gaussiens

Définition 3.2. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est dit *Gaussien* si toute combinaison linéaire de ses composantes est Gaussienne réelle, i.e.

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \langle a, X \rangle \text{ est une v.a.r. gaussienne.}$$

• Exemples :

1. $X = (0, 0)$
2. $X = (X_1, \dots, X_d)$ avec X_1, \dots, X_d mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
via la fonction caractéristique, on obtient $\langle a, X \rangle \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=1}^d a_i^2)$

• Quelques propriétés :

1. Un vecteur gaussien a toutes ses composantes gaussiennes (la réciproque est fausse, cf. TDs)
2. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{d', d}$ (d' lignes, d colonnes) alors $Y = MX$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{d'}$.
3. On note $m = \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}^d$ le vecteur moyenne de X et $\Gamma = \mathbb{E}[(X - m)(X - m)^*]$ sa matrice de variance-covariance (noter que $\Gamma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$) est semi-définie positive.
4. Un vecteur gaussien est caractérisé par m et Γ , en particulier sa fonction caractéristique est

$$\varphi(u) = e^{m^*u - \frac{1}{2}(\Gamma u)^*u}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

5. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$, et Γ est inversible alors, X a une densité donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\det(\Gamma)|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma^{-1}(x-m))^*(x-m)}$$

3.2 Processus stochastiques à temps continu

- valeur de l'indice boursier SP500 :

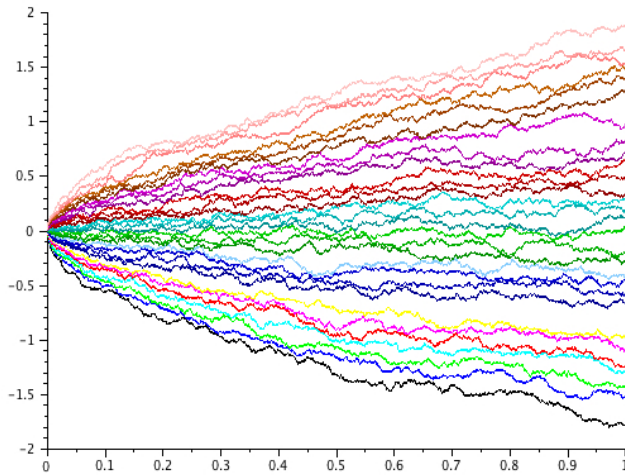
<http://finance.yahoo.com/echarts?s=~GSPC+Interactive#%22range%22:%221d%22,%22allowChartStacking%22:true%22>

Définition 3.3. Un processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu \mathcal{E} est une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

- Dans la pratique, t représente le temps ; E sera \mathbb{R}^d généralement dans ce cours.
- Un processus est une fonction aléatoire, $X : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$:
à chaque $\omega \in \Omega$, on associe une *trajectoire*

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

qui est une fonction de \mathbb{R}_+ dans E . (Rappel notation : l'espace des fonctions de \mathbb{R}_+ dans E est noté $E^{\mathbb{R}_+}$)



- Un processus est aussi une application de $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow E$.

Lois fini-dimensionnelles de Processus

- La famille des lois fini-dimensionnelles du processus X est la famille $(\mathbb{P}_I : I \text{ partie finie de } \mathbb{R}_+)$ des lois des variables aléatoires $(X_t)_{t \in I}$
- *Condition de compatibilité* : pour $J \subset I$ (I fini), $(\mathbb{P}_I)_{|J} = \mathbb{P}_J$
- La famille des lois fini-dimensionnelles vérifiant la condition de compatibilité définit la « loi du processus ».

Processus continu

Définition 3.4. *Un processus est dit continu si*

$$t \mapsto X(t, \omega) \text{ est continue } \forall \omega$$

- Fonction aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C} = C^0(\mathbb{R}_+, E)$, topologie sur \mathcal{C} : convergence uniforme sur les compacts, tribu borélienne : $\mathcal{B}(\mathcal{C})$.
- La *loi du processus*³ continu X , notée \mathbb{P}_X , est la loi image de \mathbb{P} par X sur la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ càd

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}).$$

3. On pourra dire aussi de la fonction aléatoire.

3.2.1 Une classe de processus : Les Processus Gaussiens

- Pour un processus X , de carré intégrable i.e. $\mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty$, on introduit
 - fonction de moyenne : $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$
 - fonction de covariance : $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$

Définition 3.5. *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus gaussien si pour tout $n \geq 1$, tout $t_1 \leq \dots \leq t_n$, le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Proposition 3.1. *Soit $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique de type positif, alors il existe un processus gaussien de fonction moyenne m et covariance Γ*

- Attention : on ne parle pas de régularité des trajectoires ici.
- note : une fonction Γ de type positif satisfait, pour tout (t_1, \dots, t_n) temps positifs et (a_1, \dots, a_n) nombre réels,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0 .$$

3.2.2 Notions d'égalité entre processus

Définition 3.6. (*version*) Deux processus X et X' définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ et prenant leurs valeurs dans le même espace d'état (E, \mathcal{E}) sont version l'un de l'autre si

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in A_{t_n}) = \mathbb{P}'(X'_{t_1} \in A_{t_1}, \dots, X'_{t_n} \in A_{t_n})$$

pour tout (t_1, \dots, t_n) , $A_1 \in \mathcal{E}, \dots, A_n \in \mathcal{E}$.

(égalité des projections fini-dimensionnelles de \mathbb{P}_X et $\mathbb{P}'_{X'}$)

Définition 3.7. (*modification*) Deux processus définis X et X' sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans le même espace d'état (E, \mathcal{E}) sont modifications l'un de l'autre si, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = X'_t \quad \mathbb{P} - a.s.$$

Définition 3.8. (*indistinguabilité*) Deux processus définis X et X' sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans le même espace d'état (E, \mathcal{E}) sont indistinguables l'un de l'autre si,

$$\mathbb{P}(\forall t \geq 0, X_t = X'_t) = 1$$

Ils ont les mêmes trajectoires dans ce cas.

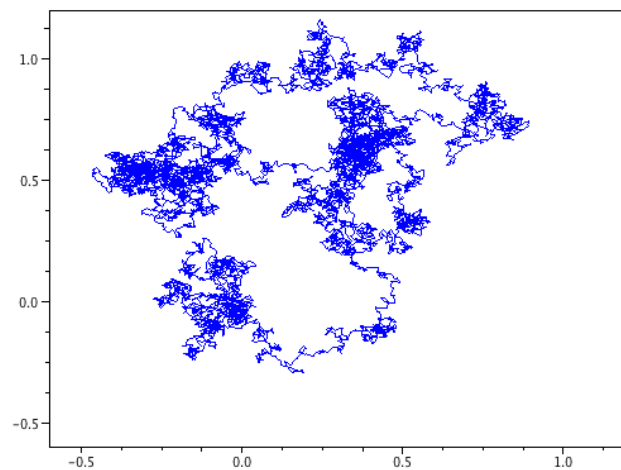
3.2.3 Filtrations

Définition 3.9. Sur (Ω, \mathcal{A}) , une filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une suite croissante de sous-tribu de \mathcal{A} .

- Un processus X est dit \mathbb{F} -adapté si pour tout t la variable aléatoire est \mathcal{F}_t -mesurable.
 - Filtration engendrée par un processus : $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t)$.
 - Pour des raisons techniques, on va considérer des filtrations :
 - qui sont complètes ;
 - qui sont continues à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$.
- \hookrightarrow “conditions usuelles”

3.3 Mouvement Brownien

Exemple : <https://www.youtube.com/watch?v=AE82kqeKTZs>



Personnages historiques associés :

- R. Brown : [en.wikipedia.org/wiki/Robert_Brown_\(botanist\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Brown_(botanist))
- L. Bachelier : en.wikipedia.org/wiki/Louis_Bachelier
- A. Einstein : en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein
- N. Wiener : en.wikipedia.org/wiki/Norbert_Wiener

Définition 3.10. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un mouvement Brownien standard est un processus B tel que

1. B est issu de 0, c'est à dire, $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$.
2. B est continu
3. B est à accroissements indépendants, c'est à dire pour tout $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, la famille de variables aléatoires $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0})$ est indépendante.
4. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

Théorème 3.1. Le mouvement Brownien existe !

Proposition 3.2. 1. Un processus B est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continu centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$$

2. Si B est un mouvement Brownien, il en est de même pour
 - (a) $X_t = a^{-1}B(a^2t)$ avec $a \neq 0$ (scalling diffusif)
 - (b) $X_t = tB(1/t)$, $t > 0$, $X_0 = 0$
 - (c) $X_t = B(t + t_0) - B(t_0)$ (propriété de Markov, cf. plus loin)
 - (d) $X_t = B(T - t) - B(T)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$
 sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Preuve.

1. (a) Soit B un mvt brownien, pour tout $t_1 < \dots < t_n$ le vecteur

$$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

est un vecteur gaussien et donc le vecteur

$$(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$$

est lui même gaussien. Les (t_i) sont arbitraires et donc le processus est gaussien. On calcule de plus pour $s \leq t$, $\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] + s = s$.

- (b) Réciproque : $\mathbb{E}[(B_0)^2] = 0$ et , comme le processus est centré, $B_0 = 0$ *p.s.*
Comme c'est un processus gaussien, on a aussi $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ en effet

$$\text{Var}(B_t - B_s) = \mathbb{E}[B_t^2] - 2\mathbb{E}[B_t B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] = t - 2s + s = t - s$$

via la fonction de covariance. On observe aussi que pour $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$,
 $X = (B_{t_1} - B_{t_2}, B_{t_3} - B_{t_4})$ est un vecteur gaussien et $\mathbb{E}[X_1 X_2] = t_1 - t_1 - t_2 + t_2 = 0$ donc X_1 est indépendant de X_2 .

2. On utilise le point 1 pour caractériser les processus : par exemple pour (b) on calcule :

$$\mathbb{E}[tB(1/t)sB(1/s)] = (s \wedge t)(s \vee t) \times \left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}\right) = (s \wedge t)(s \vee t) \frac{1}{s \vee t} = (s \wedge t)$$

qui est la bonne fonction de covariance.

La continuité sur \mathbb{R}_+^* découle de la continuité de B sur \mathbb{R}_+ et de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* .

Il reste à vérifier la continuité en 0 qui est difficile à obtenir et hors programme.

Néanmoins en voici une preuve :

On remarque :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^X &= \{\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0\} = \{\forall n \geq 1, \lim_{t \rightarrow 0} |X_t| \leq \frac{1}{n}\} \\ &= \bigcap_{n \geq 1} \{\lim_{t \rightarrow 0} |X_t| \leq \frac{1}{n}\} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \{\lim_{t \rightarrow 0} |X_t| \leq \frac{1}{n}\} &= \{\exists p \geq 1, \forall t \in]0, \frac{1}{p}], |X_t| \leq \frac{1}{n}\} \\ &= \{\exists p \geq 1, \forall t \in]0, \frac{1}{p}] \cap \mathbb{Q}, |X_t| \leq \frac{1}{n}\} =: \mathcal{B}_n^X \end{aligned}$$

par continuité de X sur \mathbb{R}_+^* ! On observe que

$$\mathcal{B}_n^X = \bigcup_{p \geq 1} \bigcap_{t \in]0, \frac{1}{p}] \cap \mathbb{Q}} \{|X_t| \leq \frac{1}{n}\}$$

qui est mesurable par intersection-réunion dénombrable. De même pour $\mathcal{A}^X = \bigcap \mathcal{B}_n^X$. Alors, on obtient simplement que par égalité des lois sur \mathbb{R}_+^*

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^X) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^B) = 1$$

□

Mouvement Brownien et filtration

• Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est construit un mouvement Brownien W , et soit $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration. On dit que W est un \mathbb{F} -mouvement Brownien s'il vérifie

- W est \mathbb{F} -adapté
- $W_s - W_t$ est indépendant de \mathcal{F}_t pour tout $s \geq t \geq 0$.

• Tout mouvement Brownien B est un \mathbb{F}^B -mouvement Brownien (pour sa filtration naturelle).

• *Propriété de Markov simple* : pour tout $t_0 > 0$, $W_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}$ est un mouvement Brownien (issu de 0) indépendant de $\mathcal{F}_{t_0}^B$.

Temps d'arrêt et Propriété de Markov forte

Définition 3.11. (*temps d'arrêt*) Un temps d'arrêt⁴ τ est une variable aléatoire positive vérifiant

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0.$$

Exemple 3.1. 1. Un temps déterministe est un temps d'arrêt

2. si τ_1, τ_2 sont des temps d'arrêt, $\tau_1 \vee \tau_2, \tau_1 \wedge \tau_2$ est un temps d'arrêt

3. Le premier temps d'entrée dans un fermé (F) d'un processus continu est un temps d'arrêt :

$$\tau_F = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in F\}.$$

• Tribu des événements antérieurs à τ :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

• *Propriété de Markov Forte* : Soit τ un temps d'arrêt, le processus $W_t := B_{\tau+t} - B_\tau$ est un mouvement Brownien (issu de 0) indépendant de \mathcal{F}_τ .

4. ou \mathbb{F} -temps d'arrêt

3.3.1 Variation quadratique du mouvement Brownien

- Le mouvement Brownien a des trajectoires continues mais *irrégulières*...
- On note $\pi = \{t_1 = 0, \dots, t_n = T\}$ une subdivision de $[0, T]$ et $|\pi| = \max_i(t_i - t_{i-1})$

Définition 3.12. (*Variation quadratique*) La variation quadratique du mouvement Brownien B sur $[0, T]$ est la limite

$$\lim_{|\pi| \downarrow 0} \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

qui existe dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et vaut la constante T , on la dénote $\langle B \rangle_T$ ⁵.

Preuve. On note

$$V = \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

Tout d'abord on observe $\mathbb{E}[V] = \sum_i t_{i+1} - t_i = T$ et

$$\|V - T\|_{L^2} = \text{Var}(V) = 2 \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2T|\pi|$$

et on obtient la convergence dans L^2 lorsque $|\pi| \rightarrow 0$. □

Remarque 3.1. (i) La variation quadratique d'une fonction C^1 est nulle.

Preuve. On observe $f(t_{i+1}) - f(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(s) ds$ et donc

$$|f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 \leq \sup_{s \in [0, T]} |f'(s)|^2 (t_{i+1} - t_i)^2 \leq C|\pi|(t_{i+1} - t_i)$$

qui implique

$$\sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 \leq C|\pi| \rightarrow 0.$$

□

(ii) Les trajectoires du mouvement Brownien sont nulle part dérivables (admis).

5. On la note aussi $\langle B, B \rangle$ cf. plus loin

3.3.2 Processus à variation finie

Variation totale d'une fonction

Définition 3.13. Pour une fonction f et une grille π de $[0, T]$, on pose

$$V_T(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

On définit la variation de la fonction⁶ sur $[0, T]$ par

$$\mathcal{V}_T(f) := \sup_{\pi \subset [0, T]} V_T(f, \pi)$$

- $T \mapsto \mathcal{V}_T(f)$ est la variation totale de la fonction.
- Si $\mathcal{V}_T(f) < \infty$ pour tout T alors la fonction est dite à *variation finie*.

Remarque 3.2. (i) Une fonction monotone est à variation finie.

(ii) La variation finie d'une fonction C^1 sur $[0, T]$ est

$$\mathcal{V}_T(f) = \int_0^T |f'(s)| ds. \quad (3.1)$$

(iii) La variation quadratique d'une fonction continue à variation finie est nulle.

Preuve. (i) Supposons f croissante, alors, pour toute grille π ,

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - f(t_i) = f(T) - f(0). \quad (3.2)$$

Donc $\mathcal{V}_T(f) = f(T) - f(0)$.

Si f est décroissante alors $\mathcal{V}_T(f) = f(0) - f(T)$.

(ii) Pour toute grille π , on observe, d'après DL Taylor à l'ordre 1.

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(\theta_i)(t_{i+1} - t_i) \text{ pour } \theta_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

et donc

$$V_T(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\theta_i)|(t_{i+1} - t_i). \quad (3.3)$$

6. Attention : ici on peut prendre le sup sur les partitions, ce qui n'est pas le cas pour la définition de la variation quadratique.

Ainsi on calcule,

$$|V_T(f, \pi) - \int_0^T |f'(s)| ds| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| |f'(\theta_i)| - |f'(s)| \right| ds. \quad (3.4)$$

$$\leq \sup_{|t-s| \leq |\pi|} \left| |f'(t)| - |f'(s)| \right| T \quad (3.5)$$

Soit π_k une suite de grille réalisant le supremum c'est à dire $\mathcal{V}_T(f) = \lim_k V_T(f, \pi_k)$. On peut toujours supposer $\pi_k \subset \pi_{k+1}$ et on a nécessairement $|\pi_k| \rightarrow 0$. Par uniforme continuité de $|f'|$ sur $[0, T]$, on a

$$\lim_k \sup_{|t-s| \leq |\pi_k|} \left| |f'(t)| - |f'(s)| \right| = 0,$$

et donc d'après (3.4), $\lim_k |V_T(f, \pi_k) - \int_0^T |f'(s)| ds| = 0$, ce qui prouve le résultat (3.1).

(iii) Pour toute grille π , on calcule

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 \leq \max_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \quad (3.6)$$

$$\leq \sup_{|t-s| \leq |\pi|} |f(t) - f(s)| \mathcal{V}_T(f). \quad (3.7)$$

Ainsi, par uniforme continuité de f sur $[0, T]$, $\lim_{|\pi| \downarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 = 0$. \square

Pour les processus

- Un processus est à *variation finie* si \mathbb{P} -p.s. $X(\omega)$ est à variation finie.
- Un processus est à *variation bornée* s'il existe une constante C t.q. \mathbb{P} -p.s.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_t(X(\omega)) \leq C.$$

3.4 Martingales

Définition 3.14. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ un espace de probabilité filtré. Une \mathbb{F} -martingale⁷ est un processus stochastique M vérifiant

- M est \mathbb{F} -adapté
- M est intégrable, i.e. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout $t \geq 0$
- pour $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s .$$

Exemple 3.2. 1. $M_t = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$, pour X dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2. $M_t = B_t$, $t \geq 0$ est une \mathbb{F}^B -martingale, pour B un mouvement Brownien.

3. $M_t = B_t^2 - t$, $t \geq 0$

4. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$, $t \geq 0$, est une martingale.

Définition 3.15. Une sur-martingale M vérifie 1. et 2. de la définition d'une martingale et

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s, \forall s \leq t.$$

Une sous-martingale M vérifie 1. et 2. de la définition d'une martingale et

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s, \forall s \leq t.$$

• Soit M une martingale et ϕ une fonction convexe t.q. $\phi(M)$ soit intégrable, alors $\phi(M)$ est une sous-martingale. Réciproquement, si pour toute fonction ϕ convexe, $\phi(M)$ est une sous-martingale alors M est une martingale.

- Si M est une martingale : soit ϕ une fonction convexe, d'après l'inégalité de Jensen, on a, pour $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[\phi(M_t) | \mathcal{F}_s] \geq \phi(\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]) = \phi(M_s) . \quad (3.8)$$

- Pour la réciproque on considère les fonctions linéaires (donc convexes) $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon x$ avec $\varepsilon = \pm 1$. D'après la propriété de sous-martingale de $\phi_\varepsilon(M)$

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s \text{ et aussi } -\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq -M_s$$

ce qui conduit à $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$.

7. ou (\mathbb{F}, \mathbb{P}) -martingale ou martingale simplement, si le contexte est clair.

Temps d'arrêt et martingale

- *rappel* : Un temps d'arrêt τ est une variable aléatoire positive vérifiant

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0.$$

Proposition 3.3. (*admis*) Soit M une \mathbb{F} -martingale continue et τ un \mathbb{F} -temps d'arrêt borné i.e. $\tau(\omega) \leq C$ pour presque tout ω alors

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

- *rappel* : Tribu des événements antérieurs à τ :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

- Dans ce cadre, pour $\sigma \leq \tau \leq C$, on admet que

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma.$$

- Une caractérisation des martingales : Soit X un processus adapté continu. X est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt borné σ , X_σ est intégrable et $\mathbb{E}[X_\sigma] = \mathbb{E}[X_0]$. (*admis*)

- Soit τ un temps d'arrêt et M une martingale.

On définit M^τ , « la martingale arrêtée en τ » par

$$M_t^\tau := M_{t \wedge \tau} = M_t \mathbf{1}_{t < \tau} + M_\tau \mathbf{1}_{t \geq \tau}, \quad t \geq 0.$$

On vérifie que M^τ est une martingale en utilisant le point précédent : soit σ un t.d.a borné alors il en est de même pour $\tau \wedge \sigma$ et on a bien $\mathbb{E}[M_\sigma^\tau] = \mathbb{E}[M_{\tau \wedge \sigma}] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_0^\tau]$.

Martingales de carré intégrable

- M est de carré intégrable si $\mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty$ pour tout t .

Exercice .3. (Quelques calculs utiles) Montrer que

1. pour toute subdivision π de $[s, t]$, $0 \leq s < t$:

$$\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_s\right], \quad (3.9)$$

avec $t_0 = s$, $t_n = t$.

2. En déduire que M^2 est une sous-martingale.
3. Montrer que pour $u \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[(M_t - M_u)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_u)^2. \quad (3.10)$$

Preuve.

1. On développe simplement le membre de gauche pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] M_s + M_s^2 \end{aligned}$$

et le résultat découle de la propriété de martingale de M .

2. D'après le point précédent on obtient donc $\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] \geq 0$ ce qui prouve la propriété de sous-martingale.
3. On développe encore un carré...

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t - M_u)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(M_t - M_s + M_s - M_u)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[(M_t - M_s)(M_s - M_u) | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_u)^2 \end{aligned}$$

Et on observe $\mathbb{E}[(M_t - M_s)(M_s - M_u) | \mathcal{F}_s] = \text{esp}(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s (M_s - M_u) = 0$ par propriété de martingale. \square

Théorème 3.2. (Doob - Inégalité de martingales) Soit M une martingale continue de carré intégrable, on définit $M_t^* := \max_{s \leq t} M_s$ le maximum courant de M . Alors, pour tout $t > 0$

$$\mathbb{E}[|M_t^*|^2] \leq 4 \sup_{s \leq t} \mathbb{E}[|M_s|^2] \leq 4\mathbb{E}[|M_t|^2]. \quad (3.11)$$

(admis)

Théorème 3.3. Soit M une martingale **continue** de carré intégrable, nulle en zéro (i.e. $M_0 = 0$) et à variation finie alors $M = 0$.

Preuve. 1. On suppose, tout d'abord, que la martingale est à variation bornée. Soit π une partition de $[0, T]$, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_T|^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2\right] \text{ en utilisant : (3.9)} \\ &\leq \mathbb{E}\left[\max_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \sum_{i=0}^{n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\max_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \mathcal{V}_T(M)\right]\end{aligned}$$

Par (uniforme) continuité des trajectoires sur $[0, T]$, $\max_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|$ tend vers 0 quand $|\pi| \downarrow 0$ on conclut que $\mathbb{E}[|M_T|^2] = 0$ par le théorème de convergence dominé : $\max_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \leq 2M_T^*$ qui est intégrable via inégalité de Doob (3.11) (de carré intégrable en fait!) .

2. Le passage de variation bornée à variation finie se fait par « localisation ». On introduit :

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 | \mathcal{V}_t \geq n\}, \quad (3.12)$$

et on observe que $\tau_n \rightarrow \infty$.

M^{τ_n} est à variation bornée par construction, donc en utilisant le point 1. on obtient que M est nulle sur $[0, \tau_n]$ pour tout les n et donc $M = 0$ pour tout $t \geq 0$. \square

Variation et covariation quadratique

Définition 3.16. *Variation quadratique d'une martingale continue, notée $\langle M \rangle$*

$$\langle M, M \rangle_T = \langle M \rangle_T := \lim_{|\pi| \downarrow 0} \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \quad (\text{la limite est en probabilité})$$

$t \mapsto \langle M, M \rangle_t$ est continu, croissant, adapté et fini.

On admet que cette définition est bien posée, notamment que la limite existe !

Proposition 3.4. *Soit M une martingale continue de carré intégrable. $\langle M, M \rangle$ est l'unique processus croissant continu nul en $t = 0$ tel que $N := M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale.*

- unicité : Soit A et B proc. croissants continus adaptés avec $A_0 = B_0 = 0$ tels que $M - A$ et $M - B$ soient des martingales. Alors, $A - B$ est une martingale continue à variation finie. Elle est donc nulle par le théorème 3.3.

- voici une ébauche de la preuve de la propriété de martingale de N :

Pour tout π grille de temps finie de \mathbb{R}_+ , on introduit

$$S_t^\pi = \sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_k})^2, \quad \text{pour } t \text{ positif t.q. } t_k \leq t < t_{k+1}$$

C'est cette suite de processus qui, lorsque $|\pi| \downarrow 0$, converge vers la variation quadratique, cf. Définition 3.16. On va montrer que $M_t^2 - S_t^\pi$ admette que cela passe à la limite quand $|\pi| \downarrow 0$. On calcule donc $\mathbb{E}[S_t^\pi | \mathcal{F}_s]$, pour $s < t$:

1. si $s \in [t_k, t]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t^\pi | \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \mathbb{E}[(M_t - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_s - M_{t_k})^2 + \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

en utilisant (3.10). D'après (3.9), on a $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]$. Donc on conclut dans ce cas

$$\mathbb{E}[S_t^\pi | \mathcal{F}_s] = S_s^\pi + \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]$$

qui est bien la propriété de martingale voulue.

2. si $s \in [t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j < k$.

$$\mathbb{E}[S_t^\pi | \mathcal{F}_s] = \sum_{i=0}^{j-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \mathbb{E}[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=j+1}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s \right]$$

D'après (3.10), $\mathbb{E}[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_{t_{j+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_j})^2$, donc

$$\mathbb{E}[S_t^\pi | \mathcal{F}_s] = S_s^\pi + \mathbb{E} \left[(M_{t_{j+1}} - M_s)^2 + \sum_{i=j+1}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s \right]$$

Le terme de droite se simplifie grâce à (3.9), pour obtenir

$$\mathbb{E}[S_t^\pi | \mathcal{F}_s] = S_s^\pi + \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] .$$

□

Théorème 3.4. (*Caractérisation de Paul Levy*) Soit M un processus continu. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- M_t et $M_t^2 - t$, $t \geq 0$ sont des \mathbb{F}^M -martingales.
- M est un mouvement Brownien.

(admis)

Définition 3.17. Pour deux martingales M, N continues de carré intégrable on définit leur covariation quadratique ou « crochet »

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{2} (\langle M + N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle) .$$

- C'est une application bilinéaire symétrique.
- Que dire du processus $MN - \langle M, N \rangle$? C'est une martingale ! utiliser la définition ci-dessous et l'identité de polarisation

$$xy = \frac{1}{4} (|x + y|^2 - |x - y|^2) .$$

□

- Soit X un processus continu à variation bornée et M une martingale continue à variation quadratique finie, alors

$$\langle X, M \rangle = 0.$$

Preuve. On note tout d'abord que $\langle X, M \rangle$ se définit comme

$$\lim_{|\pi| \downarrow 0} \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

Par Cauchy-Schwartz,

$$\left| \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \right| \leq \sqrt{\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2} \sqrt{\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2}$$

On en déduit aussi $\langle X + M \rangle = \langle M \rangle$.

□

- Rappel : pour X un processus continu à variation borné , $\langle X, X \rangle = 0$.

4 Intégrale stochastique

• Pour les applications (cf. chapitres suivants!), on a besoin d'intégrer le long des trajectoires du mouvement Brownien (ou plus généralement de martingales). Les trajectoires du mouvement Brownien n'étant pas à variation finie, les méthodes usuelles de construction d'intégrale ne fonctionnent pas : une nouvelle approche est nécessaire.

Cette 'nouvelle' intégrale est due à Kiyoshi Itô : https://en.wikipedia.org/wiki/Kiyosi_It%C3%B4

• On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est défini un mouvement Brownien B et on note \mathbb{F} sa filtration naturelle complétée.

• Dans toute cette partie, $T > 0$ désigne un horizon de temps terminal.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Un espace de processus

Définition 4.1. *Un processus stochastique X est dit progressivement mesurable si l'application $X_{|\cdot|} : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ - mesurable pour tout $t \geq 0$.*

Proposition 4.1. *Tout processus adapté et continu est progressivement mesurable.*

• On note $\mathcal{H}^2([0, T])$ (ou simplement \mathcal{H}^2) l'espace des processus progressivement mesurables tels que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |X_s|^2 ds \right] < \infty.$$

C'est un *espace de Hilbert complet*.

4.1.2 Fonctions (aléatoires) en escalier

• On considère des processus simples (qui ont le rôle des fonctions en escalier).

$$\phi_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

avec $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et $X_i \in L^2(\mathcal{F}_{t_i})$.

- On dénote \mathcal{E}^2 l'ensemble de ces processus et on observe

$$\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{H}^2$$

Preuve.

- de carré intégrable
- progressivement mesurable, pour B borélien de \mathbb{R}

$$\{X_{|[0,T]} \in B\} = \cup_{i:t_i \leq T} [t_i, t_{i+1} \wedge T] \times \{X_i \in B\}$$

qui est dans $\mathcal{B}(0, T) \otimes \mathcal{F}_T$.

□

- Intégrale stochastique pour $\phi \in \mathcal{E}^2$

$$I(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) .$$

- L'application $\phi \mapsto \int \phi dB$ est une isométrie linéaire de $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{H}^2$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Preuve. Linéarité immédiate, on calcule

$$\|I(\phi)\|_{L^2}^2 = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2 \mathbb{E}_{t_i}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2]] + 2 \sum_{j < i} \mathbb{E}[X_j X_i (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mathbb{E}_{t_i}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})]]$$

□

4.2 Intégrale stochastique dans \mathcal{H}^2

- L'intégrale stochastique va être construite par passage à la limite sur des suites de fonctions aléatoires en escalier approximant le processus à intégrer.

4.2.1 Approximation de processus continu

- On se restreint tout d'abord à des processus adaptés continus ϕ satisfaisant

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |\phi_s|^2 \right] < +\infty .$$

On note \mathcal{S}_c^2 l'ensemble de tel processus.

- Approximation par des fonctions en escaliers : pour une partition

$$\pi := \{t_0 = 0 < \dots < t_i < \dots < t_n = T\},$$

on pose

$$\phi_s^\pi = \phi_{t_i}, \quad \forall s \in]t_i, t_{i+1}] .$$

On observe que $\phi^\pi \in \mathcal{E}^2$.

• Et nous avons aussi :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\phi_s^\pi - \phi_s|^2 ds \right] \xrightarrow{|\pi| \downarrow 0} 0 .$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^T |\phi_s^\pi - \phi_s|^2 ds &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\phi_s^\pi - \phi_s|^2 ds \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\phi_{t_i} - \phi_s|^2 ds \\ &\leq T \max_i \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} |\phi_{t_i} - \phi_s|^2 \\ &\leq T \sup_{|t-s| \leq |\pi|} |\phi_t - \phi_s|^2 \\ &\xrightarrow{|\pi| \downarrow 0} 0 . \end{aligned}$$

On observe aussi que

$$\int_0^T |\phi_s^\pi - \phi_s|^2 ds \leq 4 \sup_{s \in [0, T]} |\phi_s|^2$$

qui est intégrable par hypothèse. Donc d'après le théorème de convergence dominée on peut conclure

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\phi_s^\pi - \phi_s|^2 ds \right] \xrightarrow{|\pi| \downarrow 0} 0 .$$

• On définit alors variable aléatoire $I(\phi) = \int_{[0, T]} \phi dB \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour $\phi \in \mathcal{S}_c^2$ par

$$I(\phi) := \lim_{|\pi| \downarrow 0} I(\phi^\pi) \quad (\text{limite dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}))$$

Cf. Théorème 4.1 plus bas pour vérifier que cette définition est bien posée.

4.2.2 Le cas général des processus de \mathcal{H}_2

Approximation par des fonctions en escalier

- Opérateur d'approximation dans $L^2([0, T])$:

$$P_n[f](t) = \frac{n}{T} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{(i-1)T/n}^{iT/n} f(s) ds \right) \mathbf{1}_{]iT/n, (i+1)T/n]}(t)$$

Proposition 4.2. *Pour tout f dans $L^2([0, T])$, $P_n[f] \rightarrow_{L^2} f$.*

Preuve.

- L'opérateur P_n contracte la norme de L^2 : on calcule, pour $t \in]iT/n, (i+1)T/n]$,

$$|P_n(f)|^2(t) \leq \frac{n}{T} \int_{(i-1)T/n}^{iT/n} f^2(s) ds$$

via Cauchy-Schwartz. Puis en sommant, $\int_0^T |P_n(f)|^2(t) dt \leq \int_0^T f^2(s) ds$.

- pour des fonctions continues on a bien convergence dans L^2 de $P_n f$ vers f et donc par densité pour toute fonction de L^2 .

□

- On étend P_n aux processus de \mathcal{H}^2 :

$$P_n[\phi](\omega, t) := P_n[\phi(\omega, \cdot)](t)$$

Proposition 4.3. *Pour tout $\phi \in \mathcal{H}^2$, $P_n[\phi] \in \mathcal{E}^2$ et*

$$P_n[\phi] \rightarrow \phi, \quad \text{dans } \mathcal{H}^2.$$

La question est $\mathbb{E} \left[\int_0^T |P_n(f)(s) - f(s)|^2 ds \right] \rightarrow 0$?

On remarque tout d'abord que : $\int_0^T |P_n(f)(s) - f(s)|^2 ds \leq 4 \int_0^T |f(s)|^2 ds$, en utilisant la contractivité de P_n . On applique alors la convergence dominée pour obtenir le résultat.

Definition de l'intégrale

Théorème 4.1. *L'isométrie linéaire*

$$\mathcal{E}^2 \ni \phi \rightarrow I(\phi) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

se prolonge de manière unique à l'adhérence de \mathcal{E}^2 qui est \mathcal{H}^2 .

preuve :

1. La proposition précédente prouve que l'adhérence de \mathcal{E}^2 est \mathcal{H}^2 .
2. L'intégrale est définie comme la limite de suite approximante (ϕ_n) de ϕ : on a bien $I(\phi_n)$ converge vers une variable aléatoire $I(\phi)$. On Montre cela en utilisant la propriété d'isométrie et le fait que ϕ_n soit de Cauchy. De plus, deux suites approximantes on même limite :

$$\mathbb{E}[|I(\phi'_n) - I(\phi_n)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi'_n(s) - \phi_n(s)|^2 ds\right] \rightarrow 0.$$

□

Définition 4.2. *La variable aléatoire $I(\phi) = \int_{[0,T]} \phi dB \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelée intégrale stochastique de $\phi \in \mathcal{H}^2$.*

4.2.3 Quelques propriétés de l'intégrale stochastique

Théorème 4.2. *Pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{H}^2([0, T])$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} \phi_s dB_s\right] &= 0, \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,T]} \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} (\phi_s)^2 ds\right] \\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,T]} \phi_s dB_s\right)\left(\int_{[0,T]} \psi_s dB_s\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} \phi_s \psi_s ds\right] \end{aligned}$$

• On définit

— pour $\phi \in \mathcal{H}^2$ les intégrales

$$M_t = \int_0^t \phi_s dB_s := \int_{[0,t]} \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \phi_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

— et $\int_s^t \phi_u dB_u := \int_{[s,t]} \mathbf{1}_{[s,t]} \phi_u dB_u$ (relation de Chasles avec ces notations).

Proposition 4.4. *Le processus M est continu dans L^2 et possède une modification à trajectoire continue.*

- continuité dans L^2 : on calcule

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2] = \mathbb{E}\left[\int_s^t |\phi(u)|^2 du\right] \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow s.$$

- on observe la continuité sur les suites approximantes, on admet pour le passage à la limite.

Proposition 4.5. *Le processus M est une martingale de carré intégrable et sa variation quadratique est donnée par*

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \phi_s^2 ds.$$

Sur les suites approximantes, on calcule :

$$\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0 \text{ et}$$

$$\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \phi(r) dB_r\right)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t |\phi(r)|^2 dr | \mathcal{F}_s\right]$$

ce qui caractérise la variation quadratique.

4.2.4 Un cas (très) particulier : Intégrale de Wiener

- On restreint l'intégrale précédente à des intégrandes déterministes. On définit donc la variable aléatoire suivante :

$$I(f) = \int_0^T f(s)dB_s$$

pour $f \in L^2([0, T])$ (fonction déterministe!).

- L'intégrale est définie à partir de fonctions en escalier.
- Ici $\tilde{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des fonctions en escalier i.e. de la forme

$$f := \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]} \quad \text{pour } a_i \in \mathbb{R}, 0 =: t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n := T.$$

- Définition : Pour $f \in \tilde{\mathcal{E}}$, on a donc

$$I(f) := \int_0^T f(s)dB_s = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

\hookrightarrow c'est une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^T f(s)^2 ds.$$

- Pour f quelconque, on a toujours $I(f) = \lim_n I(f_n)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (f_n en escalier).
- L'intégrale de Wiener est donc une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance $\int_0^T f(s)^2 ds$.
 $I(f_n)$ converge dans L^2 donc en loi a fortiori. Soit ϕ_n (resp. ϕ) la fonction caractéristique des $I(f_n)$ (resp. $I(f)$). On sait déjà

$$\phi_n(t) = e^{-\frac{\sigma_n^2}{2} t^2} \text{ avec } \sigma_n^2 = \int_0^T f_n(s)^2 ds.$$

Comme $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$ avec $\sigma^2 = \int_0^T f(s)^2 ds$. On obtient bien la forme de $\phi(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^2}$.

4.3 Formule d'Itô

4.3.1 Besoin d'un nouveau calcul différentiel

- Pour une fonction $x : t \mapsto x(t)$ qui est C^1 et $\Phi \in C^1$, nous avons

$$\Phi(x(t)) = \Phi(x(0)) + \int_0^t \Phi'(x(s))x'(s)ds .$$

En particulier, si $\Phi : x \mapsto x^2$, on obtient

$$x^2(t) = x^2(0) + 2 \int_0^t x(s)x'(s)ds = x^2(0) + 2 \int_0^t x(s)dx(s) .$$

- Mais on calcule

$$\Phi(B_t) = B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t$$

Preuve. Pour toute partition π avec n dates,

$$(B_{t_i})^2 - (B_{t_{i-1}})^2 = 2B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 .$$

En sommant, on obtient

$$(B_T)^2 = 2 \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 .$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la première somme converge vers l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$ et le second vers la variation quadratique de B . \square

4.3.2 Formule d'Itô : pour $(\Phi(B_t))_t$, $\Phi \in C_b^2$

Proposition 4.6. Soit $\Phi \in C_b^2$ alors p.s.

$$\Phi(B_t) = \Phi(B_0) + \int_0^t \Phi'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(B_s)ds .$$

Preuve. (esquisse) On se donne une grille π et on fait un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\Phi(B_{t_{i+1}}) = \Phi(B_{t_i}) + \Phi'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2}\Phi''(B_{\theta_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

où $\theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$. En sommant, on obtient

$$\Phi(B_t) = \Phi(B_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \Phi''(B_{\theta_i})(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2}R_1^n + \frac{1}{2}R_2^n ,$$

avec

$$R_1^n = \sum_i (\Phi''(B_{\theta_i}) - \Phi''(B_{t_i}))(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2,$$

$$R_2^n = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi''(B_{t_i}) ((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi''(B_{t_i}) X_i$$

On observe que par continuité et bornitude de Φ' et Φ'' , on a facilement convergence des deux premières sommes vers, respectivement,

$$\int_0^t \Phi'(B_s) dB_s \quad \text{and} \quad \int_0^t \Phi''(s) ds.$$

Pour le premier reste, on calcule

$$|R_1^n| \leq \sup_i |\Phi''(B_{\theta_i}) - \Phi''(B_{t_i})| \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

ce dernier majorant tend presque surement vers $0 \times t$ et on conclut en utilisant le théorème de convergence dominée que $\mathbb{E}[|R_1^n|] \rightarrow 0$.

Pour le second terme, on calcule

$$\mathbb{E}[|R_2^n|^2] = \mathbb{E}\left[\sum_i |\Phi''(B_{t_i})|^2 X_i^2\right]$$

en observant que pour $i < j$ $\mathbb{E}[\Phi''(B_{t_i})\Phi''(B_{t_j})X_iX_j|\mathcal{F}_{t_j}] = 0$. On observe alors que

$$\mathbb{E}[|R_2^n|^2] \leq c\|\Phi''\|_\infty \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2,$$

en calculant le moment d'ordre 4 d'une gaussienne. Et donc quand n tend vers l'infini, la convergence vers 0 est prouvée. \square

4.3.3 Pour des processus d'Itô

Définition 4.3. *Un processus d'Itô est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s$$

avec $\alpha, \beta \in \mathcal{H}^2$.

- Quelle est la variation quadratique du processus d'Itô X défini ci-dessus ?

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t |\beta_s|^2 ds.$$

- Note : la décomposition d'un processus d'Itô est unique.
- La formule d'Itô s'étend à ces processus. Soit $\Phi \in C_b^2$,

$$\begin{aligned}\Phi(X_t) &= \Phi(X_0) + \int_0^t (\Phi'(X_s)\alpha_s + \frac{1}{2}\Phi''(X_s)\beta_s^2)ds + \int_0^t \Phi'(X_s)\beta_s dB_s, \\ &= \Phi(X_0) + \int_0^t \Phi'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(X_s)d\langle X \rangle_s.\end{aligned}$$

- Et si Φ est une fonction de deux variables : temps et espace,

$$\Phi(t, X_t) = \Phi(0, X_0) + \int_0^t \partial_t \Phi(s, X_s)ds + \int_0^t \partial_x \Phi(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{xx} \Phi(s, X_s)d\langle X \rangle_s.$$

Remarque : La formule précédente reste vraie dès que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (|\partial_t \Phi(s, X_s)| + |\partial_{xx} \Phi(s, X_s)|)ds < +\infty\right) = 1 \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^T |\partial_x \Phi(s, X_s)|^2 ds\right] < \infty.$$

Exemple 4.1. (i) Montrer que le processus $U_t = 2 + t^2 + \sin(B_t)$ est un processus d'Itô.
(ii) Montrer que le processus $Z_t = e^{\int_0^t \phi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\phi_s|^2 ds}$, $t \geq 0$ est une martingale, lorsque ϕ est progressivement mesurable et borné.

- Formule d'intégration par partie : Soit, X, Y deux processus d'Ito alors

$$d(XY) = XdY + YdX + d\langle X, Y \rangle.$$

Preuve. Par polarisation, calculer notamment $d(X+Y)^2$ et $d(X-Y)^2$. □

5 Modèle de Black & Scholes

5.1 Cadre de travail général

- Cadre probabiliste :

1. espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement brownien standard n -dimensionnel $W = (W^1, \dots, W^n)$.
2. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ la filtration naturelle engendrée par W , augmentée.
3. $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, i.e. tout l'aléa est généré par W .

5.1.1 Actifs financiers

Un taux sans risque : processus continu et adapté r

- Un euro placé sur un intervalle dt rapporte un rendement $r_t dt$.
 \hookrightarrow un euro placé à la date s rapporte à la date $t > s$ la somme $e^{\int_s^t r_u du}$.
- Processus d'actualisation β défini par

$$\beta_t := e^{-\int_0^t r_u du} \quad , \quad t \in [0, T] .$$

Nous considérons que

$$\sup_{t \in [0, T]} |r_t| < \infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Et d actifs risqués $S = (S^1, \dots, S^d)$ vérifiant

$$S_t = S_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \nu_s dW_s \quad , \quad t \in [0, T] . \quad (5.1)$$

- Ici, $S_0 \in \mathbb{R}_+^d$ est fixé, (b, σ) est un processus continu et adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}^{d, n}$ avec

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (\|b_t\| + \|\nu_t\|^2) dt \right] < \infty .$$

- processus de prix des actifs risqués actualisés :

$$\tilde{S} = \beta S$$

\hookrightarrow On a

$$\tilde{S}_t = S_0 + \int_0^t (\tilde{b}_s - r_s \tilde{S}_s) ds + \int_0^t \tilde{\nu}_s dW_s \quad , \quad t \in [0, T] \quad (5.2)$$

où $(\tilde{b}, \tilde{\sigma}) = \beta(b, \sigma)$.

Exercice .4. *Pour $n = d = 1$, prouver la formule précédente.* *application du Lemme d'Itô*

5.2 Stratégies autofinancées

- Une stratégie financière est un processus (α, ϕ) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.
 - ϕ_t^i représente la *quantité* d'actifs risqués S^i détenue dans le portefeuille
 - α_t la somme placée au taux sans risque

5.2.1 Autofinancement en temps discret

\hookrightarrow pour simplifier la présentation : $d = 1$.

On considère une grille $\pi = \{t_0 = 0 < t_i < t_n = T\}$ et $h_i = t_{i+1} - t_i$.

- les stratégies s'écrivent :

$$\alpha_t = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \text{ et } \phi_t = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

avec α_i, ϕ_i \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.

- La valeur de la stratégie en t_i : (contrainte de budget)

$$V_{t_i+} = \alpha_i + \phi_i S_{t_i}$$

en t_{i+1} , (changement en valeur des actifs)

$$V_{t_{i+1}} = \alpha_i e^{h_i r} + \phi_i S_{t_{i+1}}$$

autofinancement $(\alpha_{i+1}, \phi_{i+1})$ déterminé *a posteriori sans apport ou retrait d'argent*

$$V_{t_{i+1}+} = \alpha_{i+1} + \phi_{i+1} S_{t_{i+1}} = V_{t_{i+1}}$$

\hookrightarrow rebalancement du portefeuille

- Changement en valeur du portefeuille

$$\begin{aligned} \Delta V_i &:= V_{t_{i+1}} - V_{t_i} = V_{t_{i+1}} - V_{t_i+} \quad (\text{rappel : } V_{t_i+} = V_{t_i} \text{ autofinancement}) \\ &= (e^{h_i r} - 1)\alpha_i + \phi_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) \end{aligned}$$

\hookrightarrow ne dépend que du changement en valeur des actifs

5.2.2 Cas général et admissibilité

- On considère des processus limite des processus décrits en temps discret.
- On étend la condition d'autofinancement

$$dV_t = \alpha_t r_t dt + \phi_t dS_t .$$

et on a toujours la contrainte :

$$V_t = \alpha_t + \phi_t S_t$$

donc

$$dV_t = r_t V_t dt + \phi_t (dS_t - r_t S_t dt)$$

- La valeur actualisée du portefeuille $\tilde{V}_t := \beta_t V_t$

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \phi_u d\tilde{S}_u \quad (5.3)$$

Appliquer la formule d'Itô.

- V (et \tilde{V}) ne dépend que de V_0 et ϕ , notation : $V^{v,\phi}$ ($v = V_0$)

Admissibilité

- intégrabilité (hypothèse technique) :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (|\phi_t|(1 + |b_t|) + |\phi_t \nu_t|^2) dt \right] < +\infty . \quad (5.4)$$

- Condition de non-banqueroute :

$$V_t^{v,\phi} \geq -c_\phi , \quad c_\phi > 0 .$$

Remarque 5.1. On aurait pu demander de manière alternative

1. non banqueroute (bis) : $V_t^{v,\phi} \geq -c_\phi^0 - \sum_i c_\phi^i S_t^i$
en terme du nombre d'actifs et non du montant investi dans ces actifs

Définition 5.1. L'ensemble \mathcal{A}_b des stratégies admissibles est l'ensemble des stratégies autofinancées intégrable au sens de (5.4) et vérifiant la condition de non-banqueroute $V_t^{v,\phi} \geq -c_\phi, c_\phi > 0$.

5.3 Notions importantes

5.3.1 Arbitrage

Définition 5.2 (AOA). *Il y a absence d'opportunité d'arbitrage si la condition*

(AOA) : $\forall \phi \in \mathcal{A}_b, V_T^{0,\phi} \geq 0 \text{ } \mathbb{P} - p.s. \Rightarrow V_T^{0,\phi} = 0 \text{ } \mathbb{P} - p.s.$

est vérifiée.

5.3.2 Critères d'évaluation

- Pour des produits financiers européens : On cherche à évaluer un flux aléatoire G en date terminale T .

- Prix viable : achat ou vente à ce prix n'introduit pas d'arbitrage

$$\nexists \phi \in \mathcal{A}_b \text{ et } \epsilon \in \{-1, 1\} \text{ t.q. } V_T^{\epsilon p, \phi} - \epsilon G \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}. \quad (5.5)$$

- Prix de sur-réplication : Le *prix de sur-réplication* de G est

$$p(G) := \inf\{p \in \mathbb{R} : \exists \phi \in \mathcal{A}_b \text{ t.q. } V_T^{p, \phi} \geq G\}. \quad (5.6)$$

Définition 5.3. *On dit que G est répliquable si $V_T^{p(G), \phi} = G$ et $p(G)$ est alors appelé le prix de réplication.*

5.3.3 Mesure risque neutre

Par analogie avec le temps discret :

- Une probabilité risque neutre est une probabilité $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ qui rende \tilde{S} martingale.
- On dénote $\mathcal{M}(\tilde{S})$ l'ensemble des mesures risque neutre⁸.

8. mesure martingale

5.3.4 Questions « légitimes »

- Premier théorème fondamental : $(\text{AOA}) \Leftrightarrow \mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$?
- Second théorème fondamental : $\mathcal{M}(\tilde{S}) = \{\mathbb{Q}\} \Leftrightarrow$ le marché est complet, i.e. tout $G \in L^\infty$ est répliquable.
- Quel est l'ensemble des prix viables ?

\hookrightarrow On donnera des réponses partielles à ces questions dans un cadre général
On étudie d'abord un cas particulier de modèle...

5.4 Le modèle de Black-Scholes

5.4.1 Hypothèses

- Marché parfait : un actif sans risque de taux fixe r et un actif risqué de valeur

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, t \in [0, T].$$

Exercice .5. (i) Montrer S est un processus d'Itô et donner sa dynamique.
(ii) Montrer que S est l'unique processus avec cette dynamique. *Appliquer la formule d'Ito à Y/S (S étant strictement positif) pour un processus Y de même dynamique.*

5.4.2 Prime de risque

- La dynamique du prix des actifs actualisés est donnée par

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t ((\mu - r)dt + \sigma dW_t)$$

- On introduit la *prime de risque* $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$

Notant $\hat{W}_t := W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$, on obtient

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma d\hat{W}_t \tag{5.7}$$

Le processus \tilde{S} sera une \mathbb{Q} -martingale si \hat{W} est un \mathbb{Q} -mouvement brownien.

\hookrightarrow Il reste à déterminer \mathbb{Q} !

5.4.3 Changement de Probabilité & Mesure risque neutre

- Si on considère une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ équivalente à \mathbb{P} , on peut écrire, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$,

$$\hat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z_T]$$

avec $Z_T > 0$ et $\mathbb{E}[Z_T] = 1$: c'est la densité de Radon-Nikodym de $\hat{\mathbb{P}}$ par rapport à \mathbb{P} .

- On introduit $Z_t := \mathbb{E}[Z_T | \mathcal{F}_t]$, $0 \leq t \leq T$.
 1. c'est une \mathbb{P} -martingale
 2. Z_t est la densité de $\hat{\mathbb{P}}$ par rapport à \mathbb{P} restreinte à \mathcal{F}_t et on note

$$Z_t = \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}.$$

3. Pour un processus X adapté, on a

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t} \mathbb{E}[X_T Z_T | \mathcal{F}_t]$$

Preuve. 2. Pour tout $B \in \mathcal{F}_t$ on calcule

$$\hat{\mathbb{P}}(B) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B Z_T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_B Z_T | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B Z_t]. \quad (5.8)$$

3. utiliser la définition de l'espérance conditionnelle. □

- Dans le cadre du modèle de BS, on a

Théorème 5.1. (*Girsanov - cas particulier BS*) Il existe une probabilité \mathbb{Q} telle que \hat{W} est un \mathbb{Q} -mouvement Brownien. Elle est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T}.$$

Preuve. \hat{W} a des trajectoires continues, $\hat{W}_0 = 0$, pour conclure il suffit de prouver que les accroissements sont indépendants et $\hat{W}_t - \hat{W}_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, $t \geq s$. Pour ce faire on doit simplement prouver

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{i \sum_{j=1}^n u_j (\hat{W}_{t_j} - \hat{W}_{t_{j-1}})} \right] = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})}.$$

□

5.4.4 Conséquences pour les stratégies financières

Lemme 5.1. *Le processus \tilde{S} (prix des actifs actualisés) est une \mathbb{Q} -martingale.*

Preuve. L'équation (5.2) devient

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \tilde{S}_t ((\mu - r)dt + \sigma dW_t) \\ &= \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t. \end{aligned}$$

On vérifie facilement $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T |\sigma \tilde{S}_t|^2 dt \right] < +\infty$. En effet

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[|\tilde{S}_t|^2 \right] = \mathbb{E} \left[Z_t |\tilde{S}_t|^2 \right].$$

On termine la preuve, soit par calcul direct : on connaît l'expression de Z et \tilde{S} soit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[|\tilde{S}_t|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[|Z_t|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[|\tilde{S}_t|^4 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C$$

car on a déjà bornée ces deux espérances. □

Lemme 5.2. *Le processus $\tilde{V}^{v,\phi}$ pour $\phi \in \mathcal{A}_b$ est une \mathbb{Q} -surmartingale. (ADMIS)*

Preuve. La dynamique de $\tilde{V}^{v,\phi}$ sous \mathbb{Q} est

$$\tilde{V}_t = v + \int_0^t \phi_s \sigma \tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

On observe que $\int_0^t \phi_s \sigma \tilde{S}_s d\hat{W}_s$ est bien définie en considérant l'intégrale par rapport à W (bonne condition d'intégrabilité...) Néanmoins, sa "nature" sous \mathbb{Q} est indécise. On va montrer que \tilde{V} est une \mathbb{Q} sur martingale.

Pour cela, on localise \tilde{V} en utilisant la suite suivante de temps d'arrêt :

$$\tau_n = \inf \left\{ t : \int_0^t |\phi_s \sigma S_s|^2 ds \leq n \right\} \wedge T.$$

On introduit $M := V + c_\phi \geq 0$ et on considère $M^n = M_{\cdot \wedge \tau_n}$, qui est une \mathbb{Q} -martingale de M^n (bonne condition d'intégrabilité sous \mathbb{Q} via la définition de τ_n)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [M_t^n | \mathcal{F}_s] = M_s^n$$

et via Fatou conditionnel, on a quand $n \rightarrow 0$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s.$$

en particulier $0 \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [M_t] \leq M_0 < \infty$. □

Lemme 5.3. *Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage sur le marché !*

Preuve. pour $\phi \in \mathcal{A}_b$, on considère $V_T^{0,\phi} \geq 0$ mais on a aussi $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V_T^{0,\phi} \right] \leq V_0^{0,\phi} = 0$ et donc $V_T^{0,\phi} = 0$. \square

5.4.5 Valorisation et couverture d'options européennes

Théorème 5.2. (Théorème de représentation des martingales) Soit M une $(\mathbb{Q}, \mathcal{F})$ -martingale de carré intégrable alors il existe un processus α tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T |\alpha_s|^2 ds \right] < \infty$ et

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s d\hat{W}_s .$$

(note : $M_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [M_T]$)

- On considère un bien contingent européen de payoff G en T , qui satisfait

$$\exists q > 2, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [|G|^q] < \infty \quad \text{et} \quad G \geq c \quad \text{pour un } c \in \mathbb{R} .$$

Théorème 5.3. Le prix de réplication $p(G)$ de G existe et est donné par

$$p(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} G] ,$$

ce prix est viable.

\hookrightarrow il existe un $\phi \in \mathcal{A}_b$ tel que $V_T^{p(G), \phi} = G$ et $(\tilde{V}_t^{p(G), \phi})_{t \in [0, T]}$ est une \mathbb{Q} -martingale.

Preuve. 1. On note

$$\Gamma = \{v \in \mathbb{R} \mid \exists \phi \in \mathcal{A}_b, V_T^{v, \phi} \geq G\}$$

Soit $v \in \Gamma$ et ϕ la stratégie de sur-réplication associée. D'après le Lemme 5.2, on calcule

$$v = \tilde{V}_0^{v, \phi} \geq \mathbb{E}[\tilde{V}_T^{v, \phi}] \geq \mathbb{E}[e^{-rT} G] . \quad (5.9)$$

Et donc $p(G) = \inf \Gamma$ vérifie $p(G) \geq \mathbb{E}[e^{-rT} G]$.

On va maintenant montrer que $p(G)$ est bien le minimum de Γ et qu'en plus c'est un prix de réplication.

2. On considère $X_T := e^{-rT} G$ et $X_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [X_T \mid \mathcal{F}_t]$. $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale de carré intégrable et donc on peut écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s d\hat{W}_s \quad \text{avec} \quad X_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} G] .$$

pour $\alpha \in L^2[0, T]$. On définit $\phi_s := \frac{\alpha_s}{\sigma S_s}$ et on observe alors

$$X_t = \tilde{V}_t^{X_0, \phi}$$

On doit vérifier $\phi \in \mathcal{A}_b$.

(a) D'une part, on a $V^{X_0, \phi} \geq -c$ car $G \geq -c$.

(b) D'autre part, on veut vérifier (5.4) ce qui est plus délicat.

Soit $\tilde{q} := \frac{q}{2} > 1$ par hypothèse, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\phi_t \sigma S_t|^2 dt \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^T |\alpha_t|^2 dt \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Z_T} \int_0^T |\alpha_t|^2 dt \right] \\ &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Z_T^{q'}} \right]^{\frac{1}{q'}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^T |\alpha_t|^2 dt \right)^{\tilde{q}} \right]^{\frac{1}{\tilde{q}}} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité d'Hölder donc $\frac{1}{q'} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$.

On calcule aisément qu'à partir de la définition de Z que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{Z_T^{q'}} \right] = \mathbb{E} \left[Z_T^{1-q'} \right] < +\infty$$

Le contrôle du second terme est difficile et vient de l'application de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (voir Lemme 6.2) \square

- Le marché est complet.
- Il y a unicité de la probabilité risque neutre (car le marché est complet).

5.4.6 Formule de Black & Scholes

- On considère ici les cas $G = (S_T - K)_+$ (un call), $G = (K - S_T)_+$ (un put).

Pour le Call

- On dénote par $C_\vartheta(t, x)$ le prix du call avec $\vartheta = (T, K, r, \sigma)$ alors

$$C_\vartheta(t, x) = xN(d_+) - Ke^{-r\theta}N(d_-),$$

avec

$$\begin{aligned}\theta &= T - t \\ d_+ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}} \left(\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta \right) \\ d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{\theta} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}u^2} du\end{aligned}$$

- Remarque : ce prix ne dépend que d'une quantité inobservable, la volatilité σ . (r est observable)

Preuve. Dans la suite on note $C := C_\vartheta(t, x)$:

$$\begin{aligned}C &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r\theta} (S_T - K)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(e^{-r\theta} (S_T - K) \mathbf{1}_{S_T \geq K}) \right]\end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que, *en loi*,

$$S_T = xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma\sqrt{\theta}Z} \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

et donc

$$\{xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma\sqrt{\theta}Z} \geq K\} = \{0 \leq d_- + Z\}$$

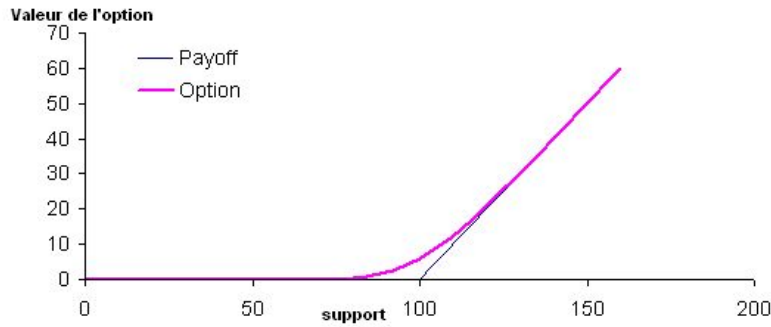
On calcule alors

$$\begin{aligned}C &= \int_{-d_-}^{\infty} (xe^{\sigma\sqrt{\theta}z - \sigma^2\frac{\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{d_-} (xe^{-\sigma\sqrt{\theta}z - \sigma^2\frac{\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz\end{aligned}$$

par le changement de variable $z \rightarrow -z$. Et on obtient

$$C = \int_{-\infty}^{d_-} x e^{-\sigma\sqrt{\theta}z - \sigma^2 \frac{\theta}{2}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz - K e^{-r\theta} N(d_-)$$

Pour le premier terme on effectue le changement de variable $y = z + \sigma\sqrt{\theta}$ et on rappelle que $d_+ = d_- + \sigma\sqrt{\theta}$. □



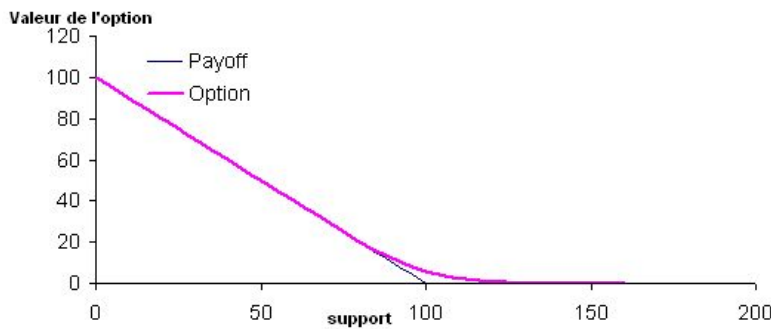
Pour le Put

- On dénote par $P_{\vartheta}(t, x)$ le prix du put avec $\vartheta = (T, K, r, \sigma)$ alors

$$P_{\vartheta}(t, x) = K e^{-r\theta} N(-d_-) - x N(-d_+),$$

Preuve. On utilise la formule de parité Call-Put qui s'écrit

$$C_{\vartheta}(t, x) - P_{\vartheta}(t, x) = x - K e^{-r\theta}.$$



5.4.7 Couverture en Delta : le cas des options européennes vanille

- Il est important de pouvoir expliciter la stratégie de couverture !
- On dénote $p(t, x)$ la fonction de prix associée à l'option de payoff h i.e.

$$p(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = x \right], \text{ on a } V_t = p(t, S_t), \forall t \in [0, T].$$

- On suppose que cette fonction est $C_b^{1,2}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+$.

Théorème 5.4. (i) La quantité d'actifs risqués à détenir en portefeuille est dénommée le Delta de l'option et est donnée par $\Delta := \partial_x p(t, x)$.

(ii) En particulier, pour le Call : $\Delta = N(d_+)$ et pour le Put : $\Delta = -N(-d_+)$.

Preuve. Soit V_t la valeur du portefeuille de réplication en t associée. On observe $\tilde{V}_t = p(t, S_t)e^{-rt}$ et en appliquant la formule d'Ito (légitime par hypothèse sur p)

$$d\tilde{V}_t = e^{-rt} \left(\partial_t p(t, S_t) + rS_t \partial_x p(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{xx}^2 p(t, S_t) - rp(t, S_t) \right) dt + \partial_x p(t, S_t) \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

Notant

$$K_t = e^{-rt} \left(\partial_t p(t, S_t) + rS_t \partial_x p(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{xx}^2 p(t, S_t) - rp(t, S_t) \right)$$

on obtient

$$d\tilde{V}_t = K_t dt + \partial_x p(t, S_t) \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

Mais \tilde{V} est une martingale (d'après le Théorème 5.3) donc $K_t = 0$ et s'écrit

$$d\tilde{V}_t = \phi_t d\tilde{S}_t = \phi_t \tilde{S}_t \sigma dW_t$$

cf. (5.7) et (5.3).

On obtient donc $\phi_t = \partial_x p(t, S_t)$ pour la quantité d'actif risqué. □

6 Modèle à volatilité locale

6.1 Introduction - volatilité implicite

- Le modèle de Black & Scholes est *a priori* très simple à calibrer⁹ : les deux seuls paramètres importants sont le taux sans risque et la volatilité.
- l'unique paramètre inobservable est la volatilité.
- La fonction, $\sigma \mapsto C_{BS}(\sigma)$ qui, à une valeur de volatilité, associe le prix Black-Scholes correspondant, vérifie

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} C_{BS}(\sigma) = (S - Ke^{-r(T-t)})^+ \quad \lim_{\sigma \uparrow \infty} C_{BS}(\sigma) = S \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_+) \sqrt{T-t} > 0, \quad (6.2)$$

avec n densité de la loi normale centrée réduite.

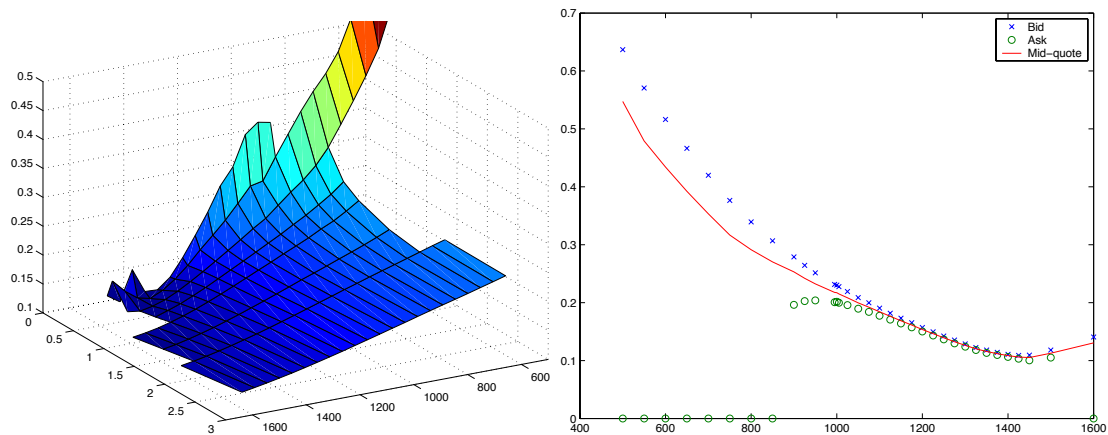
L'équation $C_{BS}(\sigma) = C$ a une unique solution pour toute valeur de C vérifiant les contraintes d'arbitrage

$$(S - Ke^{-r(T-t)})^+ < C < S$$

Définition 6.1. La solution $I(C)$ de l'équation $C_{BS}(\sigma) = C$, où C est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'appelle la volatilité implicite de cette option.

- Dans le modèle de Black-Scholes :
 - la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent est la même
 - elle est égale à la volatilité historique (écart type des rendements annualisés)
- En pratique, lorsqu'on calcule I à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que
 - La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent.
 - Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur *strikes* et maturités.

9. i.e. trouver les paramètres qui rendent le mieux compte de la situation de marché



Exemple 6.1. *Le graphique gauche du fig. 6.1 trace les volatilités implicites des options sur l'indice S&P 500 en fonction de leur strike et maturité observés le 23 janvier 2006.*

On constate que

- Pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction du strike (phénomène de *skew*).
- Pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite (phénomène du *smile*).
- Les phénomènes de smile et skew sont les plus prononcés pour les options de courte maturité ; la courbe de volatilité implicite en fonction de strike s'aplatit pour les grandes maturités.

Conclusion : Besoin d'autres modèles qui pourraient mieux correspondre à la réalité du marché.

6.2 Résultats préliminaires

6.2.1 Complément sur les changement de mesures

Théorème 6.1 (Théorème de Girsanov). *Théorème de Girsanov Soit ξ un processus adapté \mathbb{P} – p.s. de carré intégrable tel que la solution Z de l'équation*

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_s \xi_s dW_s$$

soit une \mathbb{P} -martingale, alors le processus $W^{\bar{\mathbb{Q}}}$ défini par

$$W^{\bar{\mathbb{Q}}} = W + \int_0^\cdot \xi_s ds$$

est un mouvement brownien sous la mesure $\bar{\mathbb{Q}}$ de densité Z_T .

- Question : quand a-t-on que Z est une martingale ?
- Condition de Novikov : Z est une martingale si

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2} \int_0^T |\xi_s|^2 ds}\right] < \infty.$$

6.2.2 Inégalités

Lemme 6.1. (Lemme de Gronwall) *Soit ϕ une fonction positive localement bornée vérifiant*

$$\phi(t) \leq a \int_0^t \phi(s) ds + b \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

alors

$$\phi(t) \leq be^{at} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Lemme 6.2. (inégalité de Burkholder-Davis-Gundy “BDG”) *Soit $M_t := \int_0^t \alpha_s dW_s$ avec $\alpha \in \mathcal{H}^2([0, T])$, alors il existe des constantes universelles c_p, C_p t.q. pour $p > 0$*

$$c_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \alpha_s^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0, T]} |M_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \alpha_s^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

(remarque : $C_2 = 4$)

6.2.3 Le théorème du point fixe

Lemme 6.3. (*Théorème du point fixe*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et f une application de E dans E vérifiant

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in E,$$

pour $K < 1$.

Alors il existe un unique point fixe \bar{x} de f , vérifiant $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

De plus, si on considère la suite $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$ et $x_0 \in E$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

6.3 Equations différentielles stochastiques

6.3.1 Définition-propriétés

Nous travaillons toujours sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Nous supposons que la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifie les conditions usuelles.

Existence et unicité

Soit $W = (W^1, \dots, W^d)$ un mouvement \mathbb{F} -Brownien d -dimensionnel et $T > 0$. On considère sur $[0, T]$ l'EDS suivante

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (6.3)$$

avec b et σ deux fonctions mesurables.

Théorème 6.2. (*Existence et unicité pour les EDS*) Supposons que σ et b sont Lipschitz uniformément en temps i.e.

$$|b(t, x) - b(t, x')| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leq C|x - x'|.$$

et

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|).$$

alors il existe un unique¹⁰ processus \mathbb{F} -adapté et continu X prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^d t.q.

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t b^i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) dW_s^j \quad (6.4)$$

• **(admis)** X défini dans le théorème précédent est un processus de Markov, il vérifie pour tout $t \geq s$ et f bornée

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t) | X_s]. \quad (6.5)$$

Notation : Nous notons S_c^2 l'espace des processus stochastiques continus et adaptés vérifiant

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right] < \infty.$$

10. à l'indistinguabilité près.

Preuve. Par souci de simplicité on se restreint au cas $d = m = 1$. Le cas général se prouve pareillement avec des notations beaucoup plus lourdes.

- On considère une fonction Φ de S_c^2 dans S_c^2 : étant donné $X \in S_c^2$, pour tout $0 \leq t \leq T$

$$\Phi(X)_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

1. Estimées a priori :

On calcule

$$|\Phi(X)_u - \Phi(Y)_u|^2 \leq 2K_b^2 T \int_0^u |X_s - Y_s|^2 ds + 2 \left| \int_0^u (\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)) dW_s \right|^2$$

Puis via l'inégalité de BDG, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} |\Phi(X)_u - \Phi(Y)_u|^2 \right] &\leq 2K_b^2 T \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u - Y_u|^2 \right] ds + 8K_\sigma^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u - Y_u|^2 \right] ds \\ &\leq C \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u - Y_u|^2 \right] ds \end{aligned} \quad (6.6)$$

Alors, pour $X = 0$,

$$\Phi(0)_t = x + \int_0^t b(s, 0) ds + \int_0^t \sigma(s, 0) dW_s$$

on utilise $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, pour obtenir

$$\sup_{t \leq T} |\Phi(0)_t|^2 = C(x^2 + \sup_{t \leq T} |b(t, 0)|^2 + \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, 0) dW_s \right|^2)$$

Via BDG encore, on a que $\Phi(0)$ appartient à S_c^2 .

De plus $\|\Phi(X)\|_S \leq \|\Phi(X) - \Phi(0)\|_S + \|\Phi(0)\|_S$, donc d'après précédemment et (6.6), nous avons $\Phi(X) \in S_c^2$.

2. Point fixe pour Φ :

Nous introduisons $\Phi^{(\kappa)} = \Phi \circ \Phi^{(\kappa-1)}$, pour $\kappa \geq 0$. Observons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} |\Phi^{(2)}(X)_u - \Phi^{(2)}(Y)_u|^2 \right] &\leq C \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |\Phi(X)_u - \Phi(Y)_u|^2 \right] ds \\ &\leq C^2 \int_0^t s \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u - Y_u|^2 \right] ds \\ &\leq \frac{C^2 t^2}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u - Y_u|^2 \right] \end{aligned}$$

Par récurrence, nous obtenons pour tout entier κ

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} |\Phi^{(\kappa)}(X)_u - \Phi^{(\kappa)}(Y)_u|^2 \right] \leq \frac{C^\kappa T^\kappa}{\kappa!} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} |X_u - Y_u|^2 \right]$$

donc $\Phi^{(\kappa)}$ est contractant pour un certain κ , et il a donc un unique point fixe. Ceci implique que Φ a aussi un unique point fixe, terminant la preuve du théorème. Notons que l'on peut aussi utiliser le lemme de Gronwall pour prouver l'unicité. En effet, pour deux point-fixe \bar{X} et \bar{Y} , on a en utilisant (6.6),

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} |\bar{X}_u - \bar{Y}_u|^2 \right] \leq C \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |\bar{X}_u - \bar{Y}_u|^2 \right] ds .$$

Exemples

1. Supposons σ et b constants, alors X est un mouvement Brownien "non-standard".

2. *Perturbation de système dynamique.* On considère, pour $\varepsilon \geq 0$

$$dX_t = f(X_t)dt + \varepsilon dW_t \quad X_0 = x_0$$

Quand $\varepsilon = 0$ la solution X est le flot du champs de vecteur f ($\frac{dX_t}{dt} = f(X_t)$).
Pour un petit $\varepsilon > 0$ nous obtenons une petite perturbation aléatoire de ce flot.

3. Modèle de Black-Scholes (*Mouvement Brownien Geometrique*). Considérons

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = 1.$$

L'unique solution est donnée par $X_t = \exp(\sigma W_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$

4. modèle de taux court de Vasicek (*processus d'Ornstein-Uhlenbeck*). Considérons

$$dr(t) = \alpha(b - r(t))dt + \sigma dW_t$$

L'unique solution est donnée par

$$r(t) = e^{-\alpha t}r(0) + b(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

5. modèle de taux court de Cox-Ingersoll-Ross. On considère l'équation

$$dr(t) = \alpha(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t$$

(α, b positif). Elle a une unique solution, mais... on ne peut pas appliquer le théorème précédent car le coef de vol n'est pas lipschitz!).

Le flot et ses propriétés

- Pour tout $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ on définit

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t b(r, X_r^{s,x}) dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{s,x}) dW_r, \quad s \leq t \leq T$$

et par convention, $X_t^{s,x} = x$, $t \in [0, s]$.

Le flot de l'EDS est la fonction $(s, x, t) \mapsto X_t^{s,x}$.

- Il a plusieurs propriétés importantes :

— Soit $1 \leq p < \infty$, il existe une constante C_p telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{s,x}|^p \right] \leq C_p (1 + |x|^p). \quad (6.7)$$

— Soit $2 \leq p < \infty$. Il existe une constante C_p telle que pour tout (s, x, t) et (s', x', t') ,

$$\mathbb{E} \left[|X_t^{s,x} - X_{t'}^{s',x'}|^p \right] \leq C_p \left(|x - x'|^p + (1 + |x|^p + |x'|^p) (|s - s'|^\frac{p}{2} + |t - t'|^\frac{p}{2}) \right). \quad (6.8)$$

— L'application $(s, x) \mapsto X^{s,x}$ à valeurs dans S_c^2 est continue.

— Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on observe pour tout $0 \leq r \leq s \leq t$,

$$X_t^{r,x} = X_t^{s, X_s^{r,x}}, \quad \mathbb{P} - a.s.$$

— **(admis)** Soit $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. $(X_t^{s,x})_{0 \leq t \leq T}$ est un processus de Markov et si f est une fonction mesurable bornée alors pour tout $s \leq r \leq t$

$$\mathbb{E}[f(X_t^{s,x}) | \mathcal{F}_r] = \Lambda(r, X_r^{s,x}) \quad \mathbb{P} - a.s.$$

avec $\Lambda(r, y) = \mathbb{E}[f(X_t^{r,y})]$. (ce résultat précise (6.5))

Proposition 6.1. *Soit $p \geq 1$. Il existe une constante C_p , qui dépend uniquement de T et p , t.q. :*

$$\forall s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{s,x}|^p \right] \leq C_p (1 + |x|^p) \quad (6.9)$$

On fait la preuve dans le cas $n = d = 1$.

Nous commençons par le cas $p \geq 2$. Fixons s et x . Nous notons X_t à la place de $X_t^{s,x}$ pour alléger l'écriture. Dans ce qui suit C est une constante dépendant de p et T dont la valeur peut changer d'une ligne sur l'autre mais qui ne dépend pas de (s, x) .

On a, tout d'abord,

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \leq \sup_{t \in [0, s]} |X_t|^p + \sup_{t \in [s, T]} |X_t|^p \leq |x|^p + \sup_{t \in [s, T]} |X_t|^p;$$

il suffit donc d'établir l'inégalité pour $\mathbb{E}[\sup_{t \in [s, T]} |X_t|^p]$.

Comme nous ne savons pas a priori si cette quantité est finie ou non, on introduit le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \in [0, T], |X_t| > n\}$, et on prend $n > |x|$ de sorte que $\tau_n > s$.

L'inégalité $(a + b + c)^p \leq 3^{p-1}(a^p + b^p + c^p)$ fournit l'estimation, pour tout $u \in [s, T]$,

$$\begin{aligned} |X_{u \wedge \tau_n}|^p &\leq 3^{p-1} \left(|x|^p + \sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^{u \wedge \tau_n} b(r, X_r) dr \right|^p + \sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^{u \wedge \tau_n} \sigma(r, X_r) dW_r \right|^p \right) \\ &\leq 3^{p-1} \left(|x|^p + \left(\int_s^{t \wedge \tau_n} |b(r, X_r)| dr \right)^p + \sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^{u \wedge \tau_n} \sigma(r, X_r) dW_r \right|^p \right). \end{aligned}$$

L'inégalité de BDG conduit à :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t \wedge \tau_n} |X_u|^p \right] \leq C \left(|x|^p + \mathbb{E} \left[\left(\int_s^{t \wedge \tau_n} |b(r, X_r)| dr \right)^p \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_s^{t \wedge \tau_n} |\sigma(r, X_r)|^2 dr \right)^{p/2} \right] \right),$$

et utilisant l'inégalité de Hölder ($p/2 \geq 1$), on a, notant p^* le conjugué de p et q celui de $p/2$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t \wedge \tau_n} |X_u|^p \right] \leq C \left(|x|^p + T^{p/p^*} \mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge \tau_n} |b(r, X_r)|^p dr \right] + T^{p/2q} \mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge \tau_n} |\sigma(r, X_r)|^p dr \right] \right).$$

De plus, comme b et σ sont à croissance linéaire, on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge \tau_n} |b(r, X_r)|^p dr \right] \leq K^p \mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge \tau_n} (1 + |X_r|^p) dr \right] \leq C \left(1 + \mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge \tau_n} |X_r|^p dr \right] \right),$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge \tau_n} |b(r, X_r)|^p dr \right] \leq C \left(1 + \mathbb{E} \left[\int_s^t \sup_{s \leq u \leq r \wedge \tau_n} |X_u|^p dr \right] \right);$$

et la même inégalité est valable pour le terme en σ .

Par suite, on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t \wedge \tau_n} |X_u|^p \right] \leq C \left(1 + |x|^p + \int_s^t \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq r \wedge \tau_n} |X_u|^p \right] dr \right),$$

où C ne dépend pas de n . Le lemme de Gronwall donne alors, pour tout n ,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq T \wedge \tau_n} |X_u|^p \right] \leq C(1 + |x|^p).$$

On fait tendre n vers l'infini et on applique le lemme de Fatou pour avoir :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq T} |X_u|^p \right] \leq C(1 + |x|^p),$$

ce qui termine la preuve dans le cas $p \geq 2$.

Si maintenant $1 \leq p < 2$ alors $2p \geq 2$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq T} |X_u|^p \right] \leq \left(\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq T} |X_u|^{2p} \right] \right)^{1/2} \leq C^{1/2} (1 + |x|^{2p})^{1/2},$$

ce qui conduit à, notant que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq T} |X_u|^p \right] \leq C^{1/2} (1 + |x|^p).$$

Cette dernière inégalité termine la preuve de cette proposition.

6.4 EDP d'évaluation

6.4.1 Formule d'Itô vectorielle

• Soient ϕ et ψ deux processus de \mathcal{H}^2 avec ψ qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d et ϕ dans $\mathbb{M}_{d,k}$ ensemble des matrices $d \times k$. On considère le processus X à valeurs dans \mathbb{R}^d , pour $1 \leq \ell \leq d$

$$X_t^\ell = X_0^\ell + \int_0^t \psi_r^\ell dr + \sum_{j=1}^k \int_0^t \phi_r^{\ell j} dB_r^j$$

avec B un mouvement Brownien k -dimensionnel.

Ceci se réécrit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_r dr + \sum_{j=1}^k \int_0^t \phi_r^{\cdot j} dB_r^j$$

ou simplement

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_r dr + \int_0^t \phi_r dB_r$$

Formule d'Itô Soit Φ une fonction de $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ alors

$$\Phi(t, X_t) = \Phi(0, X_0) + \int_0^t \partial_t \Phi(s, X_s) ds + \int_0^t \partial \Phi(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}[\partial^2 \Phi(s, X_s) \phi \phi'] ds \quad (6.10)$$

On note $\partial \Phi$ le gradient en espace de Φ et $\partial^2 \Phi$ sa Hessienne en espace.

Sous forme développée,

$$\Phi(t, X_t) = \Phi(0, X_0) + \int_0^t \partial_t \Phi(s, X_s) ds + \int_0^t \sum_{\ell=1}^d \partial_\ell \Phi(s, X_s) \psi_s^\ell ds \quad (6.11)$$

$$+ \int_0^t \sum_{\ell=1}^d \partial_\ell \Phi(s, X_s) \sum_{j=1}^k \phi_s^{\ell j} dB_s^j \quad (6.12)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{\ell, \ell'=1}^d \partial_{\ell, \ell'}^2 \Phi(s, X_s) \sum_{j=1}^k \phi_s^{\ell j} \phi_s^{\ell' j} ds \quad (6.13)$$

Preuve. (Esquisse) 1. On prouve - comme pour le cas unidimensionnel à partir d'un DL de Taylor à l'ordre 2, la formule suivante :

$$\Phi(t, X_t) = \Phi(0, X_0) + \int_0^t \partial_t \Phi(s, X_s) ds + \int_0^t \sum_{\ell=1}^d \partial_\ell \Phi(s, X_s) dX_s^\ell \quad (6.14)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\ell, \ell'=1}^d \partial_{\ell, \ell'}^2 \Phi(s, X_s) d\langle X^\ell, X^{\ell'} \rangle_s \quad (6.15)$$

2. Une règle de calcul pour « le terme d'Ito » donné par

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell, \ell'=1}^d \partial_{\ell, \ell'}^2 \Phi(s, X_s) d\langle X^\ell, X^{\ell'} \rangle_s$$

Les termes de crochets s'expriment ainsi

$$\begin{aligned} d\langle X^\ell, X^{\ell'} \rangle_r &= \langle \psi_r^\ell dr + \sum_{j=1}^k \phi_r^{\ell j} dB_r^j, \psi_r^{\ell'} dr + \sum_{j'=1}^k \phi_r^{\ell' j'} dB_r^{j'} \rangle \\ &= \langle \sum_{j=1}^k \phi_r^{\ell j} dB_r^j, \sum_{j'=1}^k \phi_r^{\ell' j'} dB_r^{j'} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{j'=1}^k \langle \phi_r^{\ell j} dB_r^j, \phi_r^{\ell' j'} dB_r^{j'} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^k \phi_r^{\ell j} \phi_r^{\ell' j} dr \end{aligned}$$

avec **les règles** : $\langle dt, dB_t \rangle = \langle dB_t, dt \rangle = 0$, $\langle dB_t^j, dB_t^i \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle dB_t^j, dB_t^j \rangle = dt$.

□

6.4.2 Valorisation d'une option européenne

- nous considérons un modèle markovien dans lequel la dynamique de la valeur des actifs risqués est donnée par

$$S_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, S_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u, \quad s \in [t, T], \quad (6.16)$$

avec

$$b : [0, T] \times (0, \infty)^d \mapsto (0, \infty)^d \quad \text{et} \quad \sigma : [0, T] \times (0, \infty)^d \mapsto \mathbb{M}^{d,d}$$

sont continues et uniformément Lipschitz en espace.

- le taux sans risque est constant égal à r .
- Le marché est sans arbitrage et complet :

- nous supposons que σ est inversible.
- La prime de risque

$$\lambda(t, x) := \sigma(t, x)^{-1}(b(t, x) - rx)$$

est supposée bornée.

- nous pouvons alors définir la mesure risque neutre associée

$$\frac{d\mathbb{Q}_{t,x}}{d\mathbb{P}} := e^{-\frac{1}{2} \int_t^T \|\lambda(s, S_s^{t,x})\|^2 ds - \int_t^T \lambda(s, S_s^{t,x})' dW_s}.$$

- En utilisant le théorème de Girsanov, il vient que le processus défini par

$$W_s^{\mathbb{Q}_{t,x}} := W_s + \int_t^s \lambda(u, S_u^{t,x}) du, \quad s \in [t, T],$$

est un \mathbb{Q} -mouvement brownien.

- La dynamique des actifs risqués sous la mesure risque neutre est

$$S_s^{t,x} = x + \int_t^s r S_u^{t,x} du + \int_t^s \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u^{\mathbb{Q}}, \quad s \in [t, T], \quad (6.17)$$

avec $W^{\mathbb{Q}}$ un mouvement Brownien.

- Le prix de couverture de l'option est donné par

$$p(t, x) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} g(S_T^{t,x})]. \quad (6.18)$$

6.4.3 Formules de Feynman-Kac

Calculs préliminaires pour le mouvement Brownien

- On considère $X_\tau^{t,x} = x + (W_\tau - W_t)$ et f une fonction $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ et à dérivées à croissance polynomiale.

1. Quelle est la nature du processus

$$M_t^f := f(t, W_t) - \int_0^t \left\{ \partial_t f(s, W_s) + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 f(s, W_s) \right\} ds ?$$

C'est une martingale. Preuve par application de la formule d'Ito à f . On doit vérifier que le terme d'intégrale stochastique est bien une martingale, cela se fait grâce à l'hypothèse de croissance polynomiale sur les dérivées.

2. On dénote \mathcal{L} l'opérateur qui à f associe : $\mathcal{L}f(t, x) = \partial_t f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 f(t, x)$. Montrer que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[f(t+h, X_{t+h}^{t,x}) - f(t, x) \right] = \mathcal{L}f(t, x) .$$

On calcule en utilisant le point précédent :

$$\frac{1}{h} \mathbb{E} \left[f(t+h, X_{t+h}^{t,x}) - f(t, x) \right] = \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} \left\{ \partial_t f(s, W_s) + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 f(s, W_s) \right\} ds \right]$$

En utilisant la formule de la moyenne, on obtient que $\mathbb{P} - p.p.$:

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\{ \partial_t f(s, W_s) + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 f(s, W_s) \right\} ds \rightarrow_{h \downarrow 0} \mathcal{L}f(t, x)$$

Pour conclure on utilise le Théorème de convergence dominé grâce au condition de croissance sur f et ses dérivées.

Cas général d'une diffusion X satisfaisant les hypothèses du Théorème 6.2

- On définit l'opérateur de Dynkin : $f \mapsto \mathcal{L}f$ avec $\mathcal{L}f$ donné par

$$\mathcal{L}f(t, x) = \partial_t f(t, x) + b(t, x) \partial_x f(t, x) + \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \sigma'(t, x) \partial^2 f(t, x)] .$$

pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

- On a toujours :

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[f(X_{t+h}^{t,x}) - f(t, x) \right] = \mathcal{L}f(t, x) .$$

Formule de Feynman-Kac en finance

Rappel :

Le processus de prix S est donné par (6.17).

Le processus de prix actualisé est une \mathbb{Q} -martingale.

- Programmation Dynamique : pour tout $t \leq t + h \leq T$

$$p(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rh} p(t + h, S_{t+h}^{t,x}) \right] .$$

Preuve. On fait la preuve pour $t = 0$, si ce n'est pas le cas il suffit de considérer que le marché commence en $t > 0$. La valeur initiale du sous-jacent est x .

On rappelle que la quantité : $V_t = p(t, S_t^{0,x})$ est le prix de l'option à toute date t pour le prix du sous-jacent $S_t^{0,x}$. C'est par définition la valeur du portefeuille de réplication. On sait que $\tilde{V}_t := \beta_t V_t$, qui est la valeur actualisée de ce portefeuille, est une \mathbb{Q} -martingale. On obtient alors simplement

$$p(0, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\tilde{V}_h \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\beta_h p(h, S_h^{0,x}) \right] . \quad (6.19)$$

□

- Cette remarque est la base pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 6.3 (Feynman-Kac Finance). *Supposons que la fonction p soit $C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty)^d) \cap C^{0,0}([0, T] \times (0, \infty)^d)$. Alors, elle est solution de*

$$rp(t, x) - \mathcal{L}_S p(t, x) = 0 \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)^d. \quad (6.20)$$

avec la condition au bord en T :

$$\lim_{t' \uparrow T, x' \rightarrow x} p(t', x') = g(x) \text{ pour tout } x \in (0, \infty)^d. \quad (6.21)$$

Notation : L'opérateur \mathcal{L}_S est l'opérateur de Dynkin associée à la diffusion S

$$\mathcal{L}_S \varphi(s, x) := \partial_t \varphi(s, x) + rx \partial \varphi(s, x) + \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \sigma'(s, x) \partial^2 \varphi(s, x)], \quad (6.22)$$

Preuve. 1. On commence par donner des majorations qui nous seront utiles dans le point suivant. Par les propriétés de croissance de p , ses dérivées et σ , $r(\cdot)$ étant bornée, on obtient facilement :

$$|rp(t, x) - \mathcal{L}_S p(t, x)| + |\partial_x p(t, x) \sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|^n), \forall (t, x) \quad (6.23)$$

pour n et C assez grand.

1.a On en déduit tout d'abord que

$$|r_t p(t, S_t) - \mathcal{L}_S p(t, S_t)| \leq Z := C(1 + \sup_{t \in [0, T]} |S_t|^n)$$

et $\mathbb{E}[Z] < \infty$ d'après les propriétés d'intégrabilité de S .

1.b De plus,

$$\mathbb{E} \left[\int_t^s |\beta_u^t \partial_x p(u, S_u^{t,x}) \sigma(u, S_u^{t,x})|^2 du \right] \leq C(1 + \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |S_t|^{2n} \right]) < \infty,$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[\int_t^s \beta_u^t \partial_x p(u, S_u^{t,x}) \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u \right] = 0.$$

2. Caractérisation au bord du domaine : par définition $p(T, x) = g(x)$ et on a supposé p continue.

caractérisation à l'intérieur du domaine : Il faut appliquer le lemme d'Ito à

$$\tilde{V}_s = \beta_s^t p(s, S_s^{t,x}), \quad t \leq s \leq T,$$

on rappelle que $\beta_t^t = 1$ et a pour dynamique $d\beta_s^t = -r_s \beta_s^t ds$. Comme p est régulière, on peut appliquer le lemme d'Ito, pour obtenir :

$$p(s, S_s^{t,x}) = p(t, x) + \int_t^s \mathcal{L}_S p(u, S_u^{t,x}) du + \int_t^s \partial_x p(u, S_u^{t,x}) \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u$$

Par la formule produit, on obtient alors pour \tilde{V} :

$$\begin{aligned} \beta_s^t p(s, S_s^{t,x}) &= p(t, x) + \int_t^s \beta_u^t \{ \mathcal{L}_S p(u, S_u^{t,x}) du - r_u p(u, S_u^{t,x}) \} du \\ &\quad + \int_t^s \beta_u^t \partial_x p(u, S_u^{t,x}) \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u \end{aligned}$$

On passe à l'espérance des deux côtés de l'équation. Par le principe de la programmation dynamique précédent et comme, d'après 1.b,

$$\mathbb{E} \left[\int_t^s \beta_u^t \partial_x p(u, S_u^{t,x}) \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u \right] = 0 \tag{6.24}$$

on obtient

$$0 = \mathbb{E} \left[\int_t^s \beta_u^t \{ \mathcal{L}_S p(u, S_u^{t,x}) - r_u p(u, S_u^{t,x}) \} du \right]$$

En divisant cette égalité par $s - t$ et en utilisant le théorème de la moyenne, on a, pour $\theta_s \in [t, s]$,

$$0 = \mathbb{E} \left[\beta_{\theta_s}^t \{ \mathcal{L}_{Sp}(\theta_s, S_{\theta_s}^{t,x}) - r_{\theta_s} p(\theta_s, S_{\theta_s}^{t,x}) \} \right]$$

Quand $s \rightarrow t$, $\theta_s \rightarrow t$ et par régularité de la fonction p , continuité de $s \mapsto r_s$, $s \mapsto S_s^{t,x}$, rappelant $\beta_t^t = 1$ et $S_t^{t,x} = x$, on obtient

$$\beta_{\theta_s}^t \{ \mathcal{L}_{Sp}(\theta_s, S_{\theta_s}^{t,x}) - r_{\theta_s} p(\theta_s, S_{\theta_s}^{t,x}) \} \xrightarrow{s \downarrow t} \mathcal{L}_{Sp}(t, x) - r_t p(t, x)$$

Pour pouvoir conclure, il faut passer à la limite avec l'espérance, ce qui se fait en utilisant le Théorème de convergence dominé et en utilisant la domination obtenue en 1.a. Au final, on obtient

$$r_t p(t, x) - \mathcal{L}_{Sp}(t, x) = 0 .$$

□

Exemple 6.2. Donner l'EDP satisfaite par le prix d'un call dans le modèle de Black & Scholes.

Au bord, $p(T, x) = (x - K)_+$ et à l'intérieur du domaine $\partial_t p + rx \partial_x p + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx}^2 p = rp$.

Formules de Feynman-Kac pour une diffusion quelconque

- On considère $X^{t,x}$ solution de

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}) dW_r, \quad 0 \leq t \leq s \leq T.$$

où (b, σ) vérifient les hypothèses du Théorème 6.2.

- On définit la fonction u sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ par

$$u(t, x) := \mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x})\right] \quad (6.25)$$

pour g continue.

- En supposant que $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ et est à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées alors u est solution de

$$\partial_t u + b(t, x) \partial_x u + \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \sigma'(t, x) \partial_{xx}^2 u] = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad (6.26)$$

avec pour condition terminale $u(T, x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

- Toute solution régulière u de (6.26) est donnée par (6.25) d'où unicité...
- Dans le cas général, on définit

$$v(t, x) := \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T c(s, X_s^{t,x}) ds} g(X_T^{t,x})\right], \quad (6.27)$$

avec c continue et bornée. On obtient alors, en supposant que v est à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées, qu'elle est solution de

$$\partial_t v + b(t, x) \partial_x v + \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \sigma'(t, x) \partial_{xx}^2 v] - c(t, x) v = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad (6.28)$$

avec pour condition terminale $v(T, x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

- Toute solution régulière v de (6.28) est donnée par (6.27) d'où unicité...

6.4.4 Couverture en Delta

Théorème 6.4 (Vérification). *Supposons qu'il existe une fonction φ de $C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty)^d) \cap C^{0,0}([0, T] \times (0, \infty)^d)$ solution de (6.20)-(6.21). Supposons en outre que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \|\partial \varphi(s, S_s^{t,x}) \sigma(s, S_s^{t,x})\|^2 ds \right] < \infty, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)^d.$$

Alors, $\varphi = p$. De plus,

$$p(t, x) + \int_t^T \partial p(s, S_s^{t,x}) d\tilde{S}_s^{t,x} = \beta_T^t g(S_T^{t,x}), \quad (6.29)$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)^d$.

Preuve. En appliquant le Lemme d'Itô et en utilisant le fait que φ est solution de (6.20)-(6.21), nous obtenons immédiatement

$$\varphi(t, x) + \int_t^T \partial \varphi(s, S_s^{t,x}) \beta_s^t \sigma(s, S_s^{t,x}) dW_s^{\mathbb{Q}} = \beta_T^t g(S_T^{t,x}),$$

ce qui équivaut à (6.29) d'après (6.17). La condition d'intégrabilité imposée dans le théorème permet d'affirmer que l'espérance sous \mathbb{Q} de l'intégrale stochastique du membre de gauche est nulle. Nous déduisons donc que $\varphi(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T^t g(S_T^{t,x})] = p(t, x)$. \square

6.5 Nappe de volatilité

- On considère ici $d = 1$ et la dynamique du prix des actifs est

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

sous la probabilité risque neutre.

6.5.1 Equation et formule de Dupire

- De l'équation (6.20), on tire

$$\sigma^2(t, S) = \frac{rp(t, S) - \partial_t p(t, S) - rS\partial_x p(t, S)}{\frac{1}{2}S^2\partial_{xx}^2 p(t, S)}$$

mais à un instant donné on observe uniquement $p(t, S)$ et on ne peut calculer les dérivées...

- Ce qu'on observe, c'est les valeurs des calls (et puts) pour différents strikes et maturités.
 \hookrightarrow obtenir σ en fonction de ces valeurs ?

Formule de Breeden & Litzenberger : Une première observation sur "l'information" contenue dans les prix de calls (ou puts).

- On fixe la maturité τ , pour des *strikes* $k > 0$, on note

$$\Pi_C(\tau, k) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r\tau}(S_\tau - k)_+]$$

- On admet que S_τ a une densité notée $x \mapsto f_\tau(x)$, on obtient donc :

$$\partial_k \Pi_C(\tau, k) = -e^{-r\tau} \mathbb{Q}(S_\tau > k) \quad (6.30)$$

via dérivation sous l'espérance par rapport à k !

- En dérivant, les deux membres de l'égalité précédente, on déduit :

$$f_\tau(k) = e^{r\tau} \partial_{kk}^2 \Pi_C(\tau, k). \quad (6.31)$$

- On veut plutôt σ que $f_\tau(\cdot)$: il y a encore un peu de travail. Notez qu'il n'y a pas vraiment d'hypothèse sur le modèle que suit S dans les calculs précédents...

Exemple introductif : lien entre $f_\tau(\cdot)$ et diffusion

- On considère $X_\tau^{t,x} = x + (W_\tau - W_t)$.

1. Quelle est la moyenne et la variance de $X_\tau^{t,x}$?

moy= x et var= $\tau - t$.

2. Quelle est la densité de probabilité de $X_\tau^{t,x}$, notée $f(\tau, y; t, x)$?

Loi normale :

$$f(\tau, y; t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau - t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\tau-t)}} .$$

et on observe $f(\tau, y; t, x) = g(\tau - t, y - x)$

3. Quelle est l'EDP satisfaite par $(\tau, y) \mapsto f(\tau, y; t, x)$?

$$\partial_\tau f = \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 f .$$

Equation de Fokker-Planck

• Nous supposons à partir de maintenant que la loi de S_τ sachant $S_t = x > 0$ admet une densité régulière $f(\tau, y; t, x)$ sous la probabilité risque neutre pour $t < \tau \leq T$.

Proposition 6.2. Soient $(t, x) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$. Si $(\sigma, f(\cdot; t, x)) \in C^{1,2}((t, \infty) \times (0, \infty))$ alors $f(\cdot; t, x)$ vérifie

$$\partial_\tau f(\tau, y; t, x) = -\partial_y [ryf(\tau, y; t, x)] + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 [\sigma^2(\tau, y) y^2 f(\tau, y; t, x)] \quad (6.32)$$

sur $(t, \infty) \times (0, \infty)$.

L'équation ci-dessus est appelée équation de Fokker-Planck ou équation de Kolmogorov forward.

Preuve. Soit $g \in C_b^\infty$ à support compact contenu dans $(0, \infty)$. On calcule

$$g(S_{\tau+\epsilon}) - g(S_\tau) = \int_\tau^{\tau+\epsilon} \mathcal{L}g(S_u) du + \int_\tau^{\tau+\epsilon} \partial g(S_u) \sigma(u, S_u) u dW_u$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\int g(y) \{f(\tau + \epsilon, y; t, x) - f(\tau, y; t, x)\} dy = \int_\tau^{\tau+\epsilon} du \int dy f(u, y; t, x) \{ryg'(y) + \frac{1}{2} \sigma^2(u, y) u^2 g''(y)\}$$

En divisant par ϵ et en laissant $\epsilon \rightarrow 0$, on a

$$\int g(y) \partial_\tau f(\tau, y; t, x) dy = \int dy f(\tau, y; t, x) \{ryg'(y) + \frac{1}{2} \sigma^2(\tau, y) u^2 g''(y)\}$$

En intégrant par partie le terme de droite,

$$0 = \int g(y) \left(\partial_\tau f(\tau, y; t, x) + \partial_y (ryf(\tau, y; t, x)) - \frac{1}{2} \partial_y^2 (\sigma^2(\tau, y) y^2 f(\tau, y; t, x)) \right) dy .$$

Comme g est quelconque, ceci implique que f est solution de (6.32). \square

Formule de Dupire

- Si g est le *payoff* d'un *call* européen de maturité τ , *strike* k et de prix $\Pi_C(0, x; \tau, k)$, alors

$$\Pi_C(0, x; \tau, k) = e^{-r\tau} \int_k^\infty (y - k) f(\tau, y; 0, x) dy .$$

- On étudie la fonction $(\tau, k) \mapsto \Pi_C(0, x; \tau, k)$, elle vérifie

$$\partial_\tau \Pi_C(0, x; \tau, k) = -rk \partial_k \Pi_C(0, x; \tau, k) + \frac{1}{2} \sigma^2(\tau, k) k^2 \partial_k^2 \Pi_C(0, x; \tau, k) \quad (6.33)$$

pour $(\tau, k) \in (0, T] \times (0, \infty)$, avec condition initiale $\Pi_C(0, x; 0, k) = [x - k]^+$ en $\tau = 0$ et condition au bord $\Pi_C(0, x; \tau, 0) = x$ pour tout $\tau \in [0, T]$.

- La volatilité locale σ doit nécessairement satisfaire la *formule de Dupire* :

$$\sigma^2(\tau, k) = 2 \frac{\partial_\tau \Pi_C(0, x; \tau, k) + rk \partial_k \Pi_C(0, x; \tau, k)}{k^2 \partial_k^2 \Pi_C(0, x; \tau, k)} . \quad (6.34)$$

- Avec les prix Π_C , on peut calculer les dérivées partielles et déduire la nappe de volatilité...

\hookrightarrow en pratique, on n'observe les prix que de manière discrète... la méthode peut-être assez instable...

- Preuve de (6.33) :

Si Π_C est régulière en ses deux dernières variables, il vient, en dérivant puis en utilisant (6.32),

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Pi_C(0, x; \tau, k) &= -r \Pi_C(0, x; \tau, k) + e^{-r\tau} \int_0^\infty (y - k)^+ \partial_\tau f(\tau, y; 0, x) dy \\ &= -r \Pi_C(0, x; \tau, k) \\ &\quad + e^{-r\tau} \int_0^\infty (y - k)^+ (-\partial_y (ry f(\tau, y; 0, x))) dy \\ &\quad + e^{-r\tau} \int_0^\infty (y - k)^+ \left(\frac{1}{2} \partial_{yy}^2 (\sigma^2(\tau, y) y^2 f(\tau, y; 0, x)) \right) dy . \end{aligned}$$

En intégrant par parties, nous obtenons alors, en notant la masse de Dirac en 0,

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \Pi_C(0, x; \tau, k) &= -re^{-r\tau} \int_0^\infty (y - k) \mathbf{1}_{\{y \geq k\}} f(\tau, y; 0, x) dy \\
&\quad + e^{-r\tau} \int_0^\infty ry \mathbf{1}_{\{y \geq k\}} f(\tau, y; 0, x) dy \\
&\quad + e^{-r\tau} \left(\int_0^\infty d(y - k) \frac{1}{2} \sigma^2(\tau, y) y^2 f(\tau, y; 0, x) \right) dy \\
&= -rk \partial_k \Pi_C(0, x; \tau, k) + \frac{1}{2} \sigma^2(\tau, k) k^2 \partial_k^2 \Pi_C(0, x; \tau, k)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\partial_k \Pi_C(0, x; \tau, k) &= -e^{-r\tau} \int \mathbf{1}_{\{y \geq k\}} f(\tau, y; 0, x) dy \\
\partial_k^2 \Pi_C(0, x; \tau, k) &= e^{-r\tau} \int d(y - k) f(\tau, y; 0, x) dy .
\end{aligned}$$

cf. (6.30)- (6.31)

6.5.2 Calibration d'une forme paramétrique

- On cherche une nappe de volatilité $(t, x) \mapsto \sigma(t, x)$ pour laquelle

$$\Pi_i(\sigma) := e^{-rT_i} \mathbb{E}^\mathbb{Q} [[S_{T_i} - k_i]^+] = C_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, I .$$

(C_i prix observé sur le marché)

- On considère une forme paramétrique particulière de $\sigma : \sigma(a), a \in A \subset \mathbb{R}^M$.
- On cherche alors à trouver la solution de

$$\min_a \sum_{i=1}^I \omega_i |\Pi_i(\sigma(a)) - C_i|^2 ,$$

où ω_i est un poids strictement positif.

6.6 La réplication en « pratique »

6.6.1 Les grecques

- Les *grecques* sont les sensibilités du prix des options par rapport aux différents paramètres du modèle.
- Par exemple, dans le modèle de Black-Scholes, on peut calculer

$$\partial_x p, \partial_\sigma p, \partial_{xx}^2 p, \partial_r p, \text{ etc.}$$

- Pour les calls ou les puts,
 - Le *delta* est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial x} = N(d_+), \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial x} = N(d_+) - 1.}$$

C'est de loin le facteur de risque le plus important affectant le prix d'une option.

- Le *gamma* est défini comme la deuxième dérivée du prix ou bien la dérivée première du delta :

$$\boxed{\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} N(d_+) = \frac{n(d_+)}{x\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{où } n(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = N'(y).}$$

Il a donc la double interprétation de la sensibilité du prix par rapport aux grandes variations et de la vitesse du changement de delta.

- Le *vega* est la sensibilité par rapport à la volatilité :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_+)\sqrt{T-t}.$$

Les prix des calls et des puts sont donc croissants par rapport à la volatilité.

Remarque : Un portefeuille de n options de prix C_1, \dots, C_n contenant w_i unités de i -ème option est gamma-neutre (respectivement, vega-neutre) si

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} = 0 \quad \text{respectivement} \quad \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial C_i}{\partial \sigma} = 0.$$

Dans le modèle de Black-Scholes, si toutes les options ont la même échéance, un portefeuille est gamma-neutre si et seulement s'il est vega-neutre.

- Le *rho* est la sensibilité par rapport au taux d'intérêt :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_-) > 0, \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_-) < 0.}$$

Le call est donc croissant et le put décroissant par rapport au taux d'intérêt.

- Le *theta* mesure la sensibilité par rapport au temps :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_-) < 0 \\ \frac{\partial P_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_-) \end{aligned}}$$

Le theta du call est toujours négatif, mais celui du put peut être négatif ou positif, en fonction des paramètres.

- Pour des payoffs généraux

- Black-Scholes Delta

$$\partial_x p(0, x) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[g(S_t^{0,x}) \frac{W_T}{x\sigma T} \right] .$$

- Black Scholes Gamma

$$\partial_{xx}^2 p(0, x) = e^{-rT} \frac{1}{x^2 \sigma T} \mathbb{E} \left[g(S_t^{0,x}) \left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} \right) \right] .$$

6.6.2 Gamma et erreur de spécification

- Nous supposons ici que la vraie volatilité σ est un processus prévisible de carré intégrable :

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s r ds + \int_0^t S_s \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T]. \quad (6.35)$$

- Le *trader* évalue le prix p d'une option de *payoff* g et de maturité T en utilisant le modèle à volatilité locale $\hat{\sigma}(t, S_t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t p(t, x) + rx \partial_x p(t, x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}(t, x)^2 x^2 \partial_{xx}^2 p(t, x) &= rp(t, x) \\ p(T, x) &= g(x). \end{aligned} \quad (6.36)$$

- Dans ce cadre, le portefeuille de couverture $(V^{p(0, S_0), \phi})$ est donné par :

La couverture en Delta donne : $\phi_t = \partial_x p(t, S_t)$ et la dynamique de la valeur du portefeuille est

$$dV_t = \alpha_t r dt + \partial_x p(t, S_t) \sigma_t dW_t.$$

avec $\alpha_t = V_t - \phi_t S_t$.

- L'erreur de couverture $V_T - g(S_T)$ est donnée par

$$Z_T = V_T - p(T, S_T) = \frac{1}{2} \int_0^T e^{r(T-t)} (\hat{\sigma}(t, S_t)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \partial_{xx}^2 p(t, S_t) dt.$$

- Remarques :

1. si $\partial_{xx}^2 p \geq 0$, une sur-estimation de la volatilité assure un gain, une sous-estimation assure une perte ;
2. le contraire est évidemment vrai si $\partial_{xx}^2 p \leq 0$;
3. si $\partial^2 p \approx 0$, la couverture est peu sensible à la volatilité réalisée. C'est ce qu'on appelle une couverture en gamma neutre.

Preuve. Notons $p(T, \cdot) = g(\cdot)$. D'après le Lemme d'Itô et l'équation précédente, la dynamique de $Z := V - p(\cdot, S)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} dZ_t &= rV_t dt - \left(\partial_t p(t, S_t) + rS_t \partial_x p(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \partial_{xx}^2 p(t, S_t) \right) dt \\ &= rV_t dt - \left(rp(t, S_t) + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 - \hat{\sigma}(t, S_t)^2) S_t^2 \partial_{xx}^2 p(t, S_t) \right) dt \\ &= \left(rZ_t + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}(t, S_t)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \partial_{xx}^2 p(t, S_t) \right) dt. \end{aligned}$$

Comme $p(T, S_T) = g(S_T)$, l'erreur de couverture $V_T - g(S_T)$ est donnée par

$$Z_T = V_T - p(T, S_T) = \frac{1}{2} \int_0^T e^{r(T-t)} (\hat{\sigma}(t, S_t)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \partial^2 p(t, S_t) dt .$$

□

6.6.3 Impact du rebalancement discret

cf. Exercice I.19

- Modèle de Black-Scholes, $d = 1$ et $r = 0$.
- Le trader suit une stratégie de delta-hedging discrète, i.e. sa stratégie de couverture est donnée par

$$\hat{\phi}_t = \phi_t \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}) \quad \text{où } \phi := \partial p(\cdot, S)'.$$

- La valeur de son portefeuille en T est

$$V_T^{p, \hat{\phi}} = p + \int_0^T \hat{\phi}_s S_s \sigma dW_s^{\mathbb{Q}}.$$

- On définit l'erreur de couverture $L^2(\mathbb{Q})$

$$\text{Err}_N := \left\| g(S_T) - V_T^{p, \hat{\phi}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q})}$$

- On a :

$$\text{Err}_N \leq \frac{C_\Gamma}{\sqrt{N}}$$

C_Γ est une constante qui dépend du Γ de l'option.

- Remarques :
 - Il est possible de déduire une borne similaire sur l'erreur calculée sous \mathbb{P} (un peu plus technique)
 - Par ailleurs, ce résultat s'étend à des modèles de diffusion plus généraux.
 - Enfin, cette erreur de couverture peut être améliorée en mettant en place une stratégie de type gamma neutre.

