Modèles de taux (cours IV)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris Cité - Master M2 ISIFAR

27 janvier 2023

Modèles de taux court

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer l'expression du prix ZC dans le modèle de Vasiček.

Proposition:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le prix $B_t(T)$ à l'instant t d'une obligation ZC d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t} \tag{1}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ fonctions déterministes définies par

$$n(t, T) := \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \tag{2}$$

et

$$m(t, T) := \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(n(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4k}(n(t, T))^2 \tag{3}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Définition:

Si le prix des obligations ZC dans un modèle de taux s'écrit sous la forme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ des fonctions déterministes, on l'appelle modèle à structure affine.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Définition:

Si le prix des obligations ZC dans un modèle de taux s'écrit sous la forme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ des fonctions déterministes, on l'appelle modèle à structure affine.

$\Rightarrow$ Le modèle de Vasiček est alors un modèle à structure affine.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.
Alors, nous savons comment calculer l'espérance donnée et nous obtenons:

$$B_t(T) = \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2} Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right)\right).$$

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\Big|\mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.
Alors, nous savons comment calculer l'espérance donnée et nous obtenons:

$$B_t(T) = \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du\Big|\mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2} Var\left(\int_t^T r_u du\Big|\mathcal{F}_t\right)\right).$$

En utilisant les expressions explicites de la moyenne et de la variance données dans les équations (14) et (15) du Cours 3, on obtient le résultat.

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.
Alors, nous savons comment calculer l'espérance donnée et nous obtenons:

$$B_t(T) = \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du\middle|\mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2} Var\left(\int_t^T r_u du\middle|\mathcal{F}_t\right)\right).$$

En utilisant les expressions explicites de la moyenne et de la variance données dans les équations (14) et (15) du Cours 3, on obtient le résultat.

$\square$

Rappel: Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ est une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2, alors

$$\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}.$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): taux ZC

Corollaire:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le taux ZC $R(t, T)$ à l'instant t d'échéance T, pour tout $0 \le t \le T$, est donné par

$$R(t,T) = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4k^3(T-t)}\left(1-e^{-k(T-t)}\right)^2 \tag{4}$$

avec $R_\infty := \lim_{T\to\infty} R(t,T) = \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): taux ZC

Corollaire:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le taux ZC $R(t, T)$ à l'instant t d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$R(t,T) = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4k^3(T-t)}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right)^2 \tag{4}$$

avec $R_\infty := \lim_{T\to\infty} R(t,T) = \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}$.

$\Rightarrow$ Notez que le taux ZC est une fonction affine du taux court r_t.

Preuve:

On rappelle que le taux ZC continûment composé $R(t, T)$ est défini par (voir Cours I)

$$B_t(T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

et alors

$$R(t, T) = -\frac{\ln B_t(T)}{T - t}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): taux ZC

Preuve:

On rappelle que le taux ZC continûment composé $R(t,T)$ est défini par (voir Cours I)

$$B_t(T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

et alors

$$\begin{aligned} R(t,T) &= -\frac{\ln B_t(T)}{T-t} \\ &= -\frac{1}{T-t}\left(m(t,T) - n(t,T)r_t\right). \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (2) et (3) pour $n(t,T)$ et $m(t,T)$, on obtient le résultat.

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous allons donner maintenant l'EDS qui décrit l'évolution du prix ZC.

Proposition:

Dans le modèle de Vasiček, la dynamique du prix ZC est donnée par l'EDS

$$dB_t(T) = B_t(T)\left(r_t dt - \sigma \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} dW_t\right). \tag{5}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Preuve:

Pour une échéance T fixée, nous reprenons l'expressions du prix ZC

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}.$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Preuve:

Pour une échéance T fixée, nous reprenons l'expressions du prix ZC

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}.$$

Nous allons appliquer la formule d'Itô à $B_t(T) = f(t, r_t)$, où la fonction f est définie par

$$f(t, r) := e^{m(t,T) - n(t,T) r}.$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Preuve:

Pour une échéance T fixée, nous reprenons l'expressions du prix ZC

$$B_t(T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t}.$$

Nous allons appliquer la formule d'Itô à $B_t(T) = f(t, r_t)$, où la fonction f est définie par

$$f(t,r) := e^{m(t,T)-n(t,T)r}.$$

Nous aurons alors besoin des dérivées suivantes:

$$\begin{aligned}
\partial_t f(t,r) &= f(t,r)\,(\partial_t m(t,T) - \partial_t n(t,T)r) \\
\partial_r f(t,r) &= f(t,r)\,(-n(t,T)) \\
\partial_{rr} f(t,r) &= f(t,r)\,(n(t,T))^2
\end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Les dérivées partielles de $n(t,T)$ et $m(t,T)$ sont données par

$$\partial_t n(t,T) = -\frac{1}{k} k e^{-k(T-t)} = -e^{-k(T-t)} = kn(t,T) - 1$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_t m(t,T) &= \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(\partial_t n(t,T) + 1) - 2\frac{\sigma^2}{4k} n(t,T)\partial_t n(t,T) \\
&= k\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right) n(t,T) - \frac{\sigma^2}{2k}\left(k(n(t,T))^2 - n(t,T)\right) \\
&= \theta k n(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}(n(t,T))^2
\end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$dB_t(T) = \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t, r_t)d\langle r\rangle_t$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$
\begin{aligned}
dB_t(T) &= \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t, r_t)d\langle r\rangle_t \\
&= f(t, r_t)\left[\left(\partial_t m(t, T) - \partial_t n(t, T)r_t\right) dt - n(t, T)dr_t + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt \right]
\end{aligned}
$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$
\begin{aligned}
dB_t(T) &= \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t, r_t)d\langle r\rangle_t \\
&= f(t, r_t)\left[(\partial_t m(t, T) - \partial_t n(t, T)r_t)\, dt - n(t, T)dr_t + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt \right] \\
&= B_t(T)\Bigg[(\partial_t m(t, T) - \partial_t n(t, T)r_t)\, dt - n(t, T)\,(k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t) \\
&\quad + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt \Bigg]
\end{aligned}
$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$
\begin{aligned}
dB_t(T) &= \partial_t f(t,r_t)dt + \partial_r f(t,r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t,r_t)d\langle r\rangle_t \\
&= f(t,r_t)\left[(\partial_t m(t,T) - \partial_t n(t,T)r_t)\, dt - n(t,T)dr_t + \frac{1}{2}(n(t,T))^2\sigma^2 dt \right] \\
&= B_t(T)\Bigg[(\partial_t m(t,T) - \partial_t n(t,T)r_t)\, dt - n(t,T)\,(k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t) \\
&\quad + \frac{1}{2}(n(t,T))^2\sigma^2 dt \Bigg] \\
&= B_t(T)\Bigg[\left(\theta k n(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 (n(t,T))^2 - (kn(t,T) - 1)r_t\right) dt \\
&\quad - n(t,T)\,(k\theta dt - kr_t dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}(n(t,T))^2\sigma^2 dt \Bigg]
\end{aligned}
$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Après simplification, nous arrivons à

$$\begin{aligned} dB_t(T) &= B_t(T)\left(r_t dt - \sigma n(t,T) dW_t\right) \\ &= B_t(T)\left(r_t dt - \sigma \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} dW_t\right) \end{aligned}$$

$\square$

Le prix ZC $B_t(T)$ dans le modèle de Vasiček est donné par $B_t(T) = f^T(t, r_t)$, où la fonction déterministe $f^T(t, r)$ est solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t f^T(t,r) + k(\theta - r)\partial_r f^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} f^T(t,r) - rf^T(t,r) &= 0 \\ f^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): EDP de structure par terme

Le prix ZC $B_t(T)$ dans le modèle de Vasiček est donné par $B_t(T) = f^T(t, r_t)$, où la fonction déterministe $f^T(t, r)$ est solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t f^T(t,r) + k(\theta - r)\partial_r f^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} f^T(t,r) - r f^T(t,r) &= 0 \\ f^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ce résultat est le cas particulier de l'EDP de structure par terme donnée dans Cours III avec $\mu(t,r) = k(\theta - r)$ et $\sigma(t,r) = \sigma$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): EDP de structure par terme

Le prix ZC $B_t(T)$ dans le modèle de Vasiček est donné par $B_t(T) = f^T(t, r_t)$, où la fonction déterministe $f^T(t, r)$ est solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t f^T(t,r) + k(\theta - r)\partial_r f^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} f^T(t,r) - r f^T(t,r) &= 0 \\ f^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ce résultat est le cas particulier de l'EDP de structure par terme donnée dans Cours III avec $\mu(t,r) = k(\theta - r)$ et $\sigma(t,r) = \sigma$.

$\Rightarrow$ On peut retrouver le même résultat en utilisant la définition de la probabilité martingale $\mathbb{Q}$. Plus précisément, on rappelle que le processus

$$\left(\frac{B_t(T)}{e^{\int_0^t r_u du}} \right)_{0 \le t \le T}$$

est une martingale. En appliquant la formule d'intégration par partie pour trouver la dynamique de ce processus et en égalisant à zéro la partie à variation finie pour avoir une martingale, on obtient l'EDP ci-dessus.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): pricing des options

Maintenant on souhaite évaluer les prix des options comme par exemple caplets et floorlets dans le modèle de Vasiček.

- D'abord nous allons montrer qu'il est possible de transformer le pay-off d'un caplet (floorlet) en pay-off d'une option put (call) sur un ZC. Ce résultat ne dépend pas de modèle et il est toujours vrai. Du coup pour évaluer les prix des caplet/floorlet il suffira de connaitre les prix des options put/call sur des ZC.

- Ensuite nous allons introduire un changement de probabilité et les probabilité dites forward. Cela va nous permettre de simplifier les expressions que nous devons calculer pour obtenir les prix des options.

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

On considère un caplet d'échéance $T + \delta$ et de strike K sur un taux simplement composé $L(T, T + \delta)$, fixé en T pour la période $[T, T + \delta]$. Son pay-off est donné par

$$\delta(L(T, T + \delta) - K)^{+},$$

payé en $T + \delta$. En utilisant la définition de $L(T, T + \delta)$, on a

$$\delta\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{B_T(T + \delta)} - 1\right) - K\right)^{+} = \left(\frac{1}{B_T(T + \delta)} - (1 + \delta K)\right)^{+} = \left(\frac{1}{B_T(T + \delta)} - \tilde{K}\right)^{+}$$

payé en $T + \delta$, avec $\tilde{K} := 1 + \delta K$.

Notez que ce pay-off est $\mathcal{F}_T$-measurable, c'est-à-dire il est connu déjà en T.

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

En utilisant le facteur d'actualisation $B_T(T+\delta)$, ce pay-off est équivalent au pay-off

$$B_T(T+\delta)\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)}-\tilde{K}\right)^+$$

payé en T. On obtient

$$B_T(T+\delta)\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)}-\tilde{K}\right)^+ = \left(1-\tilde{K}B_T(T+\delta)\right)^+ = \tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}}-B_T(T+\delta)\right)^+$$

payé en T.

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

En conclusion, le pay-off du caplet

$$\delta(L(T, T+\delta) - K)^+,$$

payé en $T+\delta$, est équivalent au pay-off de $\tilde{K}$ options put d'échéance T et de strike $\frac{1}{\tilde{K}}$ sur le ZC $B_T(T+\delta)$

$$\tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}} - B_T(T+\delta)\right)^+$$

payé en T, où $\tilde{K} := 1 + \delta K$.

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

En conclusion, le pay-off du caplet

$$\delta(L(T, T+\delta) - K)^{+},$$

payé en $T+\delta$, est équivalent au pay-off de $\tilde{K}$ options put d'échéance T et de strike $\frac{1}{\tilde{K}}$ sur le ZC $B_T(T+\delta)$

$$\tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}} - B_T(T+\delta)\right)^{+}$$

payé en T, où $\tilde{K} := 1 + \delta K$.

$\Rightarrow$ Nous avons le même résultat pour un floorlet et une option call sur le ZC corréspondant.

Probabilités forward

On rappelle que la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ est associée au numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$$

qui représente le compte d'épargne (au taux stochastique).

Parfois on souhaite remplacer ce numéraire par un autre (on rappelle qu'un numéraire est un processus de prix (p.s.) strictement positif).

Cette procedure s'appelle changement de numéraire et elle est souvent utilisée pour calculer les prix des dérivées dans des modèles financières pour obtenir des formules plus simples.

Probabilités forward

Rappelons que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour chaque échéance $T > 0$, le processus actualisé du prix ZC

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t \leq T}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Probabilités forward

Rappelons que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour chaque échéance $T > 0$, le processus actualisé du prix ZC

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t \leq T}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale.

On fixe une échéance $T > 0$. On a alors (propriété martingale sous $\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\right] = \frac{1}{B_0(T)}\mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_T}\right] = \frac{B_0(T)}{B_0(T)B_0} = 1$$

et on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}^T$ sur $\mathcal{F}_T$, $\mathbb{Q}^T \sim \mathbb{Q}$, par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T} = \frac{1}{B_0(T)\exp\left(\int_0^T r_u du\right)} \tag{6}$$

Probabilités forward

Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t} \tag{7}$$

On appelle $\mathbb{Q}^T$ probabilité forward associée au ZC $B_\cdot(T)$ comme numéraire.

Probabilités forward

Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t} \tag{7}$$

On appelle $\mathbb{Q}^T$ probabilité forward associée au ZC $B_.(T)$ comme numéraire.

La propriété fondamentale de la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ est la suivante:

Pour chaque échéance S, le prix du ZC d'échéance S actualisé par le ZC d'échéance T comme numéraire

$$\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_{t \leq T \wedge S}$$

est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

Probabilités forward

Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t} \tag{7}$$

On appelle $\mathbb{Q}^T$ probabilité forward associée au ZC $B_.(T)$ comme numéraire.

La propriété fondamentale de la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ est la suivante:

Pour chaque échéance S, le prix du ZC d'échéance S actualisé par le ZC d'échéance T comme numéraire

$$\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_{t \leq T \wedge S}$$

est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

$\Rightarrow$ Rappelons que $\frac{B_t(S)}{B_t(T)}$ est le prix forward en t de l'actif $B_.(S)$ dans un contrat forward d'échéance T, d'où le nom probabilité forward pour $\mathbb{Q}^T$.

Rappel: Formule de Bayes

Soient $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ deux probabilités équivalentes sur $\mathcal{F}$, $\mathbb{Q}_2 \sim \mathbb{Q}_1$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur $\mathcal{F}$ satisfaisant les conditions habituelles. On note pour tout t

$$\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{Q}_1}\Big|_{\mathcal{F}_t} =: Z_t,$$

la densité de Radon-Nikodym correspondante. Rappelons que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{Q}_1$-martingale t.q. $Z_t > 0$ (p.s.) et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t] = 1$, pour tout t.

Pour un t fixé, soit X une v.a. $\mathcal{F}_t$-measurable et t.q. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[X] < \infty$. Alors, on a pour tout $s \leq t$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}[X|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{Z_s} \tag{8}$$

Preuve de la propriété martingale:

Soient s, t t.q. $s \leq t \leq T \wedge S$. On va utiliser la formule de Bayes avec $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}^T$, $X = \frac{B_t(S)}{B_t(T)}$ $\mathcal{F}_t$-measurable et avec la densité de Radon-Nikodym donnée par

$$Z_t = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\Big|\mathcal{F}_s\right] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\Big|\mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}\Big|\mathcal{F}_s\right]} \\
&= \frac{\frac{B_s(S)}{B_0(T)B_s}}{\frac{B_s(T)}{B_0(T)B_s}} = \frac{B_s(S)}{B_s(T)},
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit grâce à la propriété martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$. Alors le processus $\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_{t \leq T \wedge S}$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

$\square$

Lien entre deux probabilités forward

$\Rightarrow$Pour chaque échéance $T > 0$, on peut définir une probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ associée au numéraire $B_\cdot(T)$

Lien entre deux probabilités forward

$\Rightarrow$Pour chaque échéance $T > 0$, on peut définir une probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ associée au numéraire $B_\cdot(T)$

$\Rightarrow$ Soient T et S deux échéances, $T \neq S$. Le lien entre deux probabilités forward $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$, associées aux numéraires $B_\cdot(T)$ et $B_\cdot(S)$ respectivement, est donné par

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(S)B_0(T)}{B_t(T)B_0(S)}. \tag{9}$$

Pricing sous la probabilité forward

On considère maintenant un pay-off X, $\mathcal{F}_T$-measurable et intégrable. Son prix à l'instant $t \leq T$, noté $\pi^X(t)$, est donné sous la probabilité risque-neutre par

$$\pi^X(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} X \middle| \mathcal{F}_t\right] = B_t \mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Pricing sous la probabilité forward

On considère maintenant un pay-off X, $\mathcal{F}_T$-measurable et intégrable. Son prix à l'instant $t \leq T$, noté $\pi^X(t)$, est donné sous la probabilité risque-neutre par

$$\pi^X(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} X \big| \mathcal{F}_t\right] = B_t \mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T} \big| \mathcal{F}_t\right]$$

$\Rightarrow$ Pour calculer ce prix, il faut alors connaître la loi jointe de X et de $\int_t^T r_u du$ (ou de X et de B_T) sous $\mathbb{Q}$.

Pricing sous la probabilité forward

On considère maintenant un pay-off X, $\mathcal{F}_T$-measurable et intégrable. Son prix à l'instant $t \leq T$, noté $\pi^X(t)$, est donné sous la probabilité risque-neutre par

$$\pi^X(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} X \middle| \mathcal{F}_t\right] = B_t \mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$\Rightarrow$ Pour calculer ce prix, il faut alors connaître la loi jointe de X et de $\int_t^T r_u du$ (ou de X et de B_T) sous $\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow$Par le changement de numéraire et le passage à la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$, on pourra simplifier ce calcul (il suffira alors de connaître la loi de X sous $\mathbb{Q}^T$)

On a le résultat suivant:

Pricing sous la probabilité forward

Proposition:

Soit X un pay-off, $\mathcal{F}_T$-measurable et t.q. $\mathbb{E}\left[\frac{|X|}{B_T}\right] < \infty$. Alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[|X|] < \infty$ et le prix $\pi^X(t)$ de X à l'instant t est donné par

$$\pi^X(t) = B_t(T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t]. \tag{10}$$

Pricing sous la probabilité forward

Preuve:

D'après la formule de Bayes, on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|X|\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{B_0(T)B_T}\right] = \frac{1}{B_0(T)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{B_T}\right] < \infty$$

par hypothèse. De nouveau d'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} \pi^X(t) &= B_t\mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= B_t(T)\frac{\mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}X|\mathcal{F}_t\right]}{\frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}} \\ &= B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[X|\mathcal{F}_t\right], \end{aligned}$$

avec $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}^T$, $Z_t = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}$ (et deux instants $t = T$ et $s = t$).

$\square$

Résumé

Probabilité risque-neutre: $\mathbb{Q}$, numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$

$$\pi^X(t) = B_t \mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T} | \mathcal{F}_t\right]$$

Probabilité forward sur $\mathcal{F}_T$: $\mathbb{Q}^T$, numéraire ZC d'échéance T $(B_t(T))_{0\leq t\leq T}$

$$\pi^X(t) = B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[X|\mathcal{F}_t\right]$$

Densité de Radon-Nikodym:

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}$$

Proposition:

On considère une option put européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d'échéance S, $S \geq T$. Le prix $\pi^{put}(0, T, S, K)$ à l'instant $t = 0$ de cette option est donné par

$$\pi^{put}(0, T, S, K) = KB_0(T)\mathbb{Q}^T(r_T \geq r^*) - B_0(S)\mathbb{Q}^S(r_T \geq r^*), \tag{11}$$

où $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$ sont les probabilités forward associées aux échéances T et S, respectivement, et r^* est donné par

$$r^* := \frac{1}{n(T, S)}(m(T, S) - \ln K), \tag{12}$$

avec $n(T, S)$ et $m(T, S)$ donnés dans les équations (2) et (3).

Remarque:

On revient au caplet considéré précédemment, d'échéance $T + \delta$ et de strike K sur un taux simplement composé $L(T, T + \delta)$, fixé en T pour la période $[T, T + \delta]$.

La transformée du pay-off d'un caplet en pay-off d'une option put sur un ZC nous permet maintenant de déduire que son prix $\pi^{put}(0, T, T + \delta, K)$ est donné par

$$\pi^{caplet}(0, T, T + \delta, K) = \tilde{K}\, \pi^{put}(0, T, T + \delta, \frac{1}{\tilde{K}}),$$

où $\tilde{K} = 1 + \delta K$ et $\pi^{put}(0, T, T + \delta, \frac{1}{\tilde{K}})$ est donné dans la Proposition précédente avec $S = T + \delta$ et le strike $\frac{1}{\tilde{K}}$.

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

Preuve de la proposition:
Le pay-off du put à l'échéance T est donné par

$$(K - B_T(S))^+$$

et son prix à l'instant $t = 0$ est alors égal à

$$\begin{aligned}
\pi^{put}(0, T, S, K) &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}(K - B_T(S))^+\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}(K - B_T(S))\mathbf{1}_{\{K \geq B_T(S)\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}K\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] - \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}B_T(S)\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] \\
&=: E_1 - E_2
\end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

Dans le calcul précédent nous avons utilisé la représentation exponentielle-affine du prix ZC

$$B_T(S) = e^{m(T,S) - n(T,S) r_T}$$

et l'équivalence des inégalités suivantes:

$$K \geq B_T(S) \Leftrightarrow K \geq e^{m(T,S) - n(T,S) r_T} \Leftrightarrow \ln K \geq m(T,S) - n(T,S) r_T$$

$$\Leftrightarrow r_T \geq \frac{m(T,S) - \ln K}{n(T,S)} =: r^*.$$

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

Dans le calcul précédent nous avons utilisé la représentation exponentielle-affine du prix ZC

$$B_T(S) = e^{m(T,S) - n(T,S) r_T}$$

et l'équivalence des inégalités suivantes:

$$K \geq B_T(S) \Leftrightarrow K \geq e^{m(T,S) - n(T,S) r_T} \Leftrightarrow \ln K \geq m(T,S) - n(T,S) r_T$$

$$\Leftrightarrow r_T \geq \frac{m(T,S) - \ln K}{n(T,S)} =: r^*.$$

Il nous reste à calculer les espérances E_1 et E_2.

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

En utilisant la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ et la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du} K \mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] = K B_0(T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] \\ &= K B_0(T) \mathbb{Q}^T(r_T \geq r^*). \end{aligned}$$

Du même, en utilisant la probabilité forward $\mathbb{Q}^S$ et la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} E_2 &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du} B_T(S) \mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] = B_0(S) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}\left[\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] \\ &= B_0(S) \mathbb{Q}^S(r_T \geq r^*) \end{aligned}$$

et on obtient le résultat.

□