Modèles de taux (cours III)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris Cité - Master M2 ISIFAR

20 janvier 2023

Modèles de taux court

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Nous allons étudier les modèles de taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ de la forme

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \tag{1}$$

où:

- $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien (MB) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.
- μ et σ sont des fonctions continues telles que la solution de (1) existe et est unique.

I. Modèles de taux court

On suppose que le marché $(*)$ est constitué de la manière suivante:

- il existe un actif sans risque $(B_t)t \geq 0$ qui vérifie l'EDS

$$dB_t = r_t B_t dt, \qquad B_0 = 1,$$

  ou également

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \qquad t \geq 0.$$

- les obligations ZC de toutes les échéances T, pour $T \geq 0$, sont disponibles

On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^\infty \gamma(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds\right),$$

où $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique t.q. $\mathbb{E}[\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds] < \infty$, et telle que pour tout T

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t\leq T}$$

est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$ et $B_T(T) = 1$.

On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^\infty \gamma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds\right),$$

où $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique t.q. $\mathbb{E}[\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds] < \infty$, et telle que pour tout T

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t\leq T}$$

est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$ et $B_T(T) = 1$.

$\Rightarrow$ cela implique que le marché financier $(*)$ défini à la page précédente n'admet pas d'arbitrage (AOA)

$\Rightarrow$ En plus, on obtient

$$B_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_T(T)}{B_T}B_t\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right] \qquad (2)$$

I. Modèles de taux court

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

I. Modèles de taux court

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

On peut réécrire (1) sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \gamma(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^*, \tag{3}$$

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

On peut réécrire (1) sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \gamma(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^*, \tag{3}$$

$\Rightarrow$ On rappelle que $\mathbb{Q}$ s'appelle probabilité martingale ou probabilité risque-neutre.

I. Modèles de taux court

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

On peut réécrire (1) sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \gamma(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^*, \quad (3)$$

$\Rightarrow$ On rappelle que $\mathbb{Q}$ s'appelle probabilité martingale ou probabilité risque-neutre.

$\Rightarrow$ Dans la suite nous allons considérer tous les modèles donnés directement sous la probabilité $\mathbb{Q}$ en supposant alors $\gamma \equiv 0$ et $W^* \equiv W$ ("martingale modeling").

On obtient le résultat suivant (une variante de la formule de Feynman-Kac):

Théorème: Soit $T > 0$ et Φ une fonction continue en $\mathbb{R}$. Suppons $F^T = F^T(t,r) \in C^{1,2}$ solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + \mu(t,r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}(\sigma(t,r))^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= \Phi(r). \end{aligned} \tag{4}$$

Alors le processus $(M_t)_{t \leq T}$

$$M_t = F^T(t,r_t) e^{-\int_0^t r_u du}$$

est une martingale locale. Si en plus M est uniformément borné, M est une vraie martingale et

$$F^T(t,r_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi(r_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{5}$$

I. Modèles de taux court: Equation de structure par terme

Pour le prix ZC $B_t(T)$, on a $B_t(T) = F^T(t, r_t)$ et $\Phi(r) = 1$ parce que $F^T(T, r_T) = B_T(T) = 1$.

L'équation de structure par terme est donné par

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + \mu(t,r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}(\sigma(t,r))^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1. \end{aligned}$$

D'après le théorème on obtient alors

$$B_t(T) = F^T(t, r_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Idée de la preuve:

Appliquez la formule d'Itô au processus (M_t) et montrez que le terme à variation finie (le terme dt) est égal à zéro en utilisant (4).
Si (M_t) est une vraie martingale, on obtient alors l'expression (5).

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t \geq 0}$ est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t \geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ On reconnait dans le drift $k(\theta - r_t)dt$ de (6) l'effet de retour à la moyenne θ

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t \geq 0}$ est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t \geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ On reconnait dans le drift $k(\theta - r_t)dt$ de (6) l'effet de retour à la moyenne θ

Interprétation des paramètres:

- θ est la moyenne à long-terme
- k s'interprète comme la vitesse de retour à la moyenne long-terme θ
- σ est la volatilité de taux court r

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Proposition: La solution unique de l'EDS (6) est le processus (r_t) donné par

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u \tag{7}$$

Pour tout t, r_t est une variable aléatoire gaussienne.

Nous avons en plus, pour tout s, $0 \leq s \leq t$,

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-k(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u \tag{8}$$

La moyenne de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \tag{9}$$

et la variance de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ par

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-2k(t-s)}\right). \tag{10}$$

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

On peut appliquer la formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ parce que $Y_t = f(t, r_t)$ avec $f(t, r) := e^{kt} r$ et $f \in C^{1,2}$.

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

On peut appliquer la formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ parce que $Y_t = f(t, r_t)$ avec $f(t, r) := e^{kt} r$ et $f \in C^{1,2}$.

On obtient

$$dY_t \;=\; \partial_t Y_t dt + \partial_r Y_t dr_t + \frac{1}{2} \partial_{rr} Y_t d\langle r_t \rangle$$

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

On peut appliquer la formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ parce que $Y_t = f(t, r_t)$ avec $f(t,r) := e^{kt} r$ et $f \in C^{1,2}$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
dY_t &= \partial_t Y_t dt + \partial_r Y_t dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} Y_t d\langle r_t \rangle \\
&= ke^{kt} r_t dt + e^{kt} dr_t + 0 \\
&= ke^{kt} r_t dt + e^{kt} k(\theta - r_t) dt + e^{kt} \sigma dW_t \\
&= ke^{kt} \theta dt + e^{kt} \sigma dW_t
\end{aligned}
$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

En rappelant que $r_t = e^{-kt} Y_t$ et en calculant l'intégrale ci-dessus, on arrive à

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

En rappelant que $r_t = e^{-kt} Y_t$ et en calculant l'intégrale ci-dessus, on arrive à

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

$\Rightarrow$ r_t est une v.a. gaussienne (deux termes déterministes plus une intégrale de Wiener)

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

En rappelant que $r_t = e^{-kt} Y_t$ et en calculant l'intégrale ci-dessus, on arrive à

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

$\Rightarrow$ r_t est une v.a. gaussienne (deux termes déterministes plus une intégrale de Wiener)

$\Rightarrow$ On peut montrer de la même manière que, pour tout s, $0 \leq s \leq t$, on obtient l'expression (8) (il faut juste intégrer l'EDS pour Y_t de s à t).

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Notez que

$$\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u\right)_{t \geq s}$$

est une martingale gaussienne, de moyenne zéro et de variance $\int_s^t e^{-2k(t-u)} du$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Notez que

$$\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u\right)_{t\geq s}$$

est une martingale gaussienne, de moyenne zéro et de variance $\int_s^t e^{-2k(t-u)} du$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$.

Rappelez l' isométrie d'Itô pour le calcul de la variance:

$$\begin{aligned}
Var\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u\right)^2 | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \int_s^t \left(e^{-k(t-u)}\right)^2 du \\
&= \frac{1}{2k}\left(1 - e^{-2k(t-s)}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Cela implique les expressions de moyenne (9) et de variance (10) pour r_t. $\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Corollaire: Le taux court $(r_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien de moyenne

$$\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right), \tag{11}$$

de variance

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right) \tag{12}$$

et de covariance

$$cov(r_s, r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(e^{-k(t-s)} - e^{-k(t+s)}\right), \qquad s < t. \tag{13}$$

La moyenne à long terme est donnée par

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[r_t] = \theta$$

et la variance à long terme par

$$\lim_{t \to \infty} Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}$$

Preuve:
On remarque que pour tout t, $r_t = f(t) + \sigma e^{-kt} g_t$, où

$$f(t) := r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right)$$

est une fonction déterministe et $(g_t)_{t \geq 0}$ défini comme

$$g_t := \int_0^t e^{ku} dW_u$$

un processus gaussien. Alors, $(r_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien avec la moyenne et la variance données dans la Proposition précédente (avec $s = 0$).

La covariance est donnée par

$$cov(r_s, r_t) = \mathbb{E}[r_s r_t] - \mathbb{E}[r_s]\mathbb{E}[r_t],$$

où

$$\mathbb{E}[r_s] = f(s), \qquad \mathbb{E}[r_t] = f(t)$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_s r_t] &= f(s)f(t) + \sigma^2 e^{-k(t+s)} \mathbb{E}[g_s g_t] \\
&= f(s)f(t) + \sigma^2 e^{-k(t+s)} \int_0^s e^{2ku} du \\
&= f(s)f(t) + \frac{\sigma^2}{2k} \left(e^{-k(t-s)} - e^{-k(t+s)} \right)
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient l'expression (13).

Finalement,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[r_t] = \lim_{t\to\infty} \left(r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt} \right) \right) = \theta$$

et

$$\lim_{t\to\infty} Var(r_t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-2kt} \right) = \frac{\sigma^2}{2k}$$

□

Proposition:

Pour tout $t \geq 0$, la v.a. $\int_0^t r_u du$ est gaussienne de moyenne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t r_u du\right] = \theta t + (r_0 - \theta)\frac{1 - e^{-kt}}{k}$$

et de variance

$$Var\left(\int_0^t r_u du\right) = \frac{\sigma^2}{k^2}\left(t - 2\frac{1 - e^{-kt}}{k} + \frac{1 - e^{-2kt}}{2k}\right)$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Plus généralement, pour tout $0 < t \leq T$, la v.a. $\int_t^T r_u du$ est, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, gaussienne de moyenne

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$$

et de variance

$$Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right) = \frac{\sigma^2}{k^2}\left((T-t) - 2\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{1 - e^{-2k(T-t)}}{2k}\right)$$

Preuve: Nous allons démontrer le résultat pour la v.a. $\int_t^T r_u du$. On reprend l'EDS de départ (6)

$$dr_u = k(\theta - r_u)du + \sigma dW_u.$$

Preuve: Nous allons démontrer le résultat pour la v.a. $\int_t^T r_u du$. On reprend l'EDS de départ (6)

$$dr_u = k(\theta - r_u)du + \sigma dW_u.$$

On arrange les termes et on obtient

$$r_u du = \theta du - \frac{1}{k} dr_u + \frac{\sigma}{k} dW_u.$$

Preuve: Nous allons démontrer le résultat pour la v.a. $\int_t^T r_u du$. On reprend l'EDS de départ (6)

$$dr_u = k(\theta - r_u)du + \sigma dW_u.$$

On arrange les termes et on obtient

$$r_u du = \theta du - \frac{1}{k} dr_u + \frac{\sigma}{k} dW_u.$$

En intégrant de t à T, on a

$$\begin{aligned}
\int_t^T r_u du &= \theta(T-t) + \frac{\sigma}{k}\int_t^T dW_u - \frac{1}{k}(r_T - r_t) \\
&= \theta(T-t) + \frac{\sigma}{k}\int_t^T dW_u \\
&\quad -\frac{1}{k}\left(r_t e^{-k(T-t)} + \theta\left(1 - e^{-k(T-t)}\right) + \sigma\int_t^T e^{-k(T-u)} dW_u - r_t\right),
\end{aligned}$$

en utilisant l'équation (8).

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Après avoir arrangé les termes, on arrive à

$$\int_t^T r_u du = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{\sigma}{k}\int_t^T \left(1 - e^{-k(T-u)}\right) dW_u$$

Après avoir arrangé les termes, on arrive à

$$\int_t^T r_u du \,=\, \theta(T-t) + (r_t-\theta)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{\sigma}{k}\int_t^T \left(1-e^{-k(T-u)}\right) dW_u$$

$\Rightarrow$ L'intégrale $\int_t^T r_u du$ est alors, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, une v.a. gaussienne, de moyenne

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] = \theta(T-t) + (r_t-\theta)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} \tag{14}$$

et de variance

$$\begin{aligned} Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right) &= \frac{\sigma^2}{k^2}\int_t^T \left(1-e^{-k(T-u)}\right)^2 du \\ &= \frac{\sigma^2}{k^2}\left((T-t) - 2\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{1-e^{-2k(T-t)}}{2k}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Finalement, le résultat pour l'intégrale $\int_0^t r_u du$ suit en prenant $t = 0$ et $T = t$.

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer l'expression du prix ZC dans le modèle de Vasiček.

Proposition:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le prix $B_t(T)$ à l'instant t d'une obligation ZC d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t} \tag{16}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ fonctions déterministes définies par

$$n(t, T) := \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \tag{17}$$

et

$$m(t, T) := \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(n(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4k}(n(t, T))^2 \tag{18}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Définition:

Si le prix des obligations ZC dans un modèle de taux s'écrit sous la forme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ des fonctions déterministes, on l'appelle modèle à structure affine.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Définition:

Si le prix des obligations ZC dans un modèle de taux s'écrit sous la forme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ des fonctions déterministes, on l'appelle modèle à structure affine.

$\Rightarrow$ Le modèle de Vasiček est alors un modèle à structure affine.