Modèles de taux (cours I)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris Cité - Master M2 ISIFAR

6 janvier 2023

Introduction

Introduction

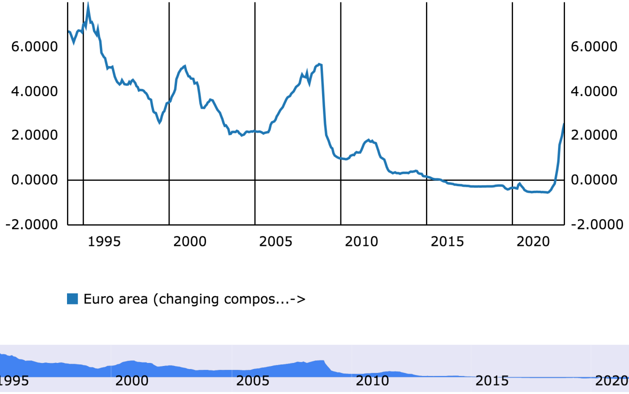
- We all know what an interest rate is. It is a number representing the "cost of carrying cash" or the "future value of money"
- for example, if L is an interest rate for the time interval $[T, S]$, then the unit value of money at time T, will be worth

$$1 + (S - T)L$$

  at time S (simple compounding)
- Since interest rates in the market represent the expectations about the future value of money, they change over time reflecting thus the market situation.
- Interest rate derivatives are financial products written on interest rates. They provide insurance against future oscillations of the interest rates or allow to speculate on their future values.
- The most known ones are forward rate agreements, caps/floors, swaps and swaptions.
- Interest rate derivatives represent the biggest portion of the total trade volume of in over-the-counter (OTC) derivatives:
  \$495 trillions out of the total volume of \$606 trillions in the first half of 2020 (approx. 82%)
  Source: Bank for International Settlements

Example - historical data on Euribor 6-month rate

Saved from:
https://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES_KEY=143.FM.M.U2.EUR.RT.MM.EURIBOR6MD_.HSTA



Introduction

- Forward rate agreement (FRA) for the future time interval $[T, S]$:
  payoff at time S is
  $$N(S - T)\,(L(T, T, S) - K)$$
  where N is the nominal amount, K is the fixed rate and $L(T, T, S)$ is a (market) floating rate (random variable, since it becomes known only at time T).

  The FRA is bought/sold at time t, for some $t \leq T$

- Caplet with strike rate K and date expiration T:
  payoff at settlement date S is
  $$N(S - T)\,(L(T, T, S) - K)^{+}$$
  and the caplet is bought/sold at time t, for some $t \leq T$
  - caplet is an optional contract providing insurance against the rise of the floating rate

- swaps are sequences of FRAs, caps are sequences of caplets, swaptions are options to enter into a swap, etc.

Introduction

- the question is how to determine the price of such an interest rate derivative: we need stochastic models for the evolution of interest rates
- by financial theory of absence of arbitrage, under suitable assumptions there exists a fair price which is given as conditional expectation of the future unknown payoff under some probability measure

Two important concepts:

- zero-coupon bond is a simple financial contract paying 1 unit of money at its maturity T. Its price at any time $t \le T$, denoted by $B_t(T)$, is thus related to the interest rate for the interval $[t, T]$
- forward interest rate at time t: the value of the fixed rate K such that the price of the FRA is zero at time t – notation $L(t, T, S)$

Before the financial crisis in 2007-2009, the following relationship was valid:

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right)$$

What is LIBOR?

- London Interbank Offered Rate (LIBOR), computed as the trimmed average of rates reported by a panel of banks, for five currencies (CHF, EUR, GBP, JPY, USD) and seven tenors (1D, 1W, 1M, 2M, 3M, 6M, 1Y).
- LIBOR was until recently widely adopted as benchmark rate

More precisely, every contributing bank had to submit an answer to the following question: ”At what rate could you borrow funds, were you to do so by asking for and then accepting inter-bank offers in a reasonable market size just prior to 11 am?”

~~*Barclays Bank plc*~~	~~*2.15*~~
~~*Bank of Tokyo-Mitsubishi UFJ Ltd*~~	~~*2.15*~~
~~*HSBC*~~	~~*2.12*~~
~~*Royal Bank of Scotland Group*~~	~~*2.11*~~
UBS AG	*2.105*
Abbey National	*2.1*
Bank of America	*2.1*
Citibank NA	*2.1*
Mizuho Corporate Bank	*2.1*
Rabobank	*2.1*
Royal Bank of Canada	*2.1*
WestLB AG	*2.1*
~~*BNP Paribas*~~	~~*2.05*~~
~~*LLoyds Banking Group*~~	~~*2*~~
~~*Deutsche Bank AG*~~	~~*1.95*~~
~~*JP Morgan Chase*~~	~~*1.95*~~

bbalibor Rate =

2.10063

The LIBOR transition and alternative risk-free rates (RFR)

- Problems: the unsecured short-term lending interbank market shrinked significantly after the financial criris and evidence of LIBOR manipulation by several major banks emerged in 2012
- July 2017: In his speech Andrew Bailey (CEO of Financial Conduct Autority (FCA)) announced that LIBOR was not sustainable any more and it would be discontinued after the end of 2021.
- Transition towards alternative risk-free rates, which are transaction-based overnight rates, as benchmark rates.
- FCA, March 2021: cessation of LIBOR on 31/12/2021.
- May 2021: *Life after LIBOR* speech by Andrew Bailey: *"...transition to the most robust overnight rates, underpinned by deep underlying markets, will support a stronger more transparent financial system and ultimately benefit all market participants".*

Alternative risk-free rates (RFR)

- In the US, the SOFR (Secured Overnight Funding Rate) was selected as an alternative RFR: it uses data from overnight Treasury repo trades to calculate a rate published at 8:00 a.m. (NY time) by the Federal Reserve Bank of New York.
- The scale of SOFR's underlying transaction pool is massive. The transaction volume underlying SOFR is around 1 USD trillion daily.
- Various filters, trims, and inclusion rules are applied to these data sources and a transaction weighted median becomes the benchmark rate.
- In the UK, Bank of England publishes Sterling Overnight Index Average (SONIA)
- In the EU, Euro Short Term Rate (€STR)
- In Japan, Tokyo Overnight Average Rate (TONA)
- In Switzerland, Swiss Average Rate Overnight (SARON)

Alternative risk-free rates (RFR)

- In the US, the SOFR (Secured Overnight Funding Rate) was selected as an alternative RFR: it uses data from overnight Treasury repo trades to calculate a rate published at 8:00 a.m. (NY time) by the Federal Reserve Bank of New York.
- The scale of SOFR's underlying transaction pool is massive. The transaction volume underlying SOFR is around 1 USD trillion daily.
- Various filters, trims, and inclusion rules are applied to these data sources and a transaction weighted median becomes the benchmark rate.
- In the UK, Bank of England publishes Sterling Overnight Index Average (SONIA)
- In the EU, Euro Short Term Rate (€STR)
- In Japan, Tokyo Overnight Average Rate (TONA)
- In Switzerland, Swiss Average Rate Overnight (SARON)

$\Rightarrow$ Now back to the main notions from the classical interest rate theory

Notions de base

Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon (ZC) d'échéance T est un produit financier qui rapporte 1 unité de monnaie à la date T.

On note $B_t(T)$ son prix à la date t, pour tout $t \leq T$.

Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon (ZC) d'échéance T est un produit financier qui rapporte 1 unité de monnaie à la date T.

On note $B_t(T)$ son prix à la date t, pour tout $t \leq T$.

$\Rightarrow$ $B_t(T)$ est parfois appelé aussi discount facteur (facteur d'actualisation) parce qu'il représente la valuer à la date t du montant 1 à la date T.

Rappel sur les taux d'intérêt

On note C le capital, r le taux d'intérêt et τ la durée de l'emprunt.

On rappelle trois types de taux selon les différents définitions de capitalisation:

1. Taux simple

$$C \mapsto C + C \times r \times \tau = C\,(1 + r\tau)$$

2. Taux continu

$$C \mapsto C\,e^{r\tau}$$

3. Taux actuariel (intérêts composés)

$$C \mapsto C\,(1 + r)^{\tau}$$

I. Différents types de taux d'intérêt spot

On fixe deux instants de temps: t et T, où $t \geq 0$ et $T > t$.

Nous allons définir maintenant à partir des prix ZC différents types de taux d'intérêt fixés à l'instant t pour la période $[t, T]$.

Ce sont les taux dits spot parce qu'ils sont fixés précisément au début de la période pour laquelle ils sont utilisés. (le même t!).

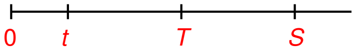
I. Différents types de taux d'intérêt spot

On fixe deux instants de temps: t et T, où $t \geq 0$ et $T > t$.

Nous allons définir maintenant à partir des prix ZC différents types de taux d'intérêt fixés à l'instant t pour la période $[t, T]$.

Ce sont les taux dits spot parce qu'ils sont fixés précisément au début de la période pour laquelle ils sont utilisés. (le même t!).

(Après nous allons définir aussi les taux dits forward fixés à l'instant t pour une période future $[T, S]$, où $T > t$.)



I. Différents types de taux d'intérêt spot

1. On appelle taux d'intérêt simplement composé la quantité $L(t,T)$ définie par

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{B_t(T)} - 1\right)$$

$L(t,T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (simplement composé). C'est le taux simple constant sur la période $[t,T]$ tel que

$$B_t(T)\,(1 + L(t,T)(T-t)) = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux simple $L(t,T)$ et on reçoit 1 à la date T.

I. Différents types de taux d'intérêt spot

1. On appelle taux d'intérêt simplement composé la quantité $L(t, T)$ définie par

$$L(t, T) = \frac{1}{T - t}\left(\frac{1}{B_t(T)} - 1\right)$$

$L(t, T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (simplement composé). C'est le taux simple constant sur la période $[t, T]$ tel que

$$B_t(T)\,(1 + L(t, T)(T - t)) = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux simple $L(t, T)$ et on reçoit 1 à la date T.

$\Rightarrow$ Les taux du marché interbancaire (Euribor, Libor) sont les taux simples.

2. On appelle taux d'intérêt continûment composé la quantité $R(t, T)$ définie par

$$R(t, T) = -\frac{\ln B_t(T)}{T - t}$$

$R(t, T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (continûment composé). C'est le taux continu constant sur la période $[t, T]$ tel que

$$B_t(T)e^{R(t,T)(T-t)} = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux continu $R(t, T)$ et on reçoit 1 à la date T.

3. On appelle taux d'intérêt composé annuellement la quantité $Y(t, T)$ définie par

$$Y(t,T) = \frac{1}{B_t(T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1$$

$Y(t, T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (composé annuellement). C'est le taux actuariel constant sur la période $[t, T]$ tel que

$$B_t(T)(1 + Y(t,T))^{T-t} = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux actuariel $Y(t, T)$ et on reçoit 1 à la date T.

Remarque: Notez que $\lim_{T\to t} L(t,T) = \lim_{T\to t} R(t,T) = \lim_{T\to t} Y(t,T)$.

On appelle taux court ou taux instantané la limite r_t définie par

$$r_t = \lim_{T\to t} R(t,T).$$

I. Différents types de taux d'intérêt spot: taux court

Remarque: Notez que $\lim_{T\to t} L(t,T) = \lim_{T\to t} R(t,T) = \lim_{T\to t} Y(t,T)$.

On appelle taux court ou taux instantané la limite r_t définie par

$$r_t = \lim_{T\to t} R(t,T).$$

$\Rightarrow$ Le taux court r_t est l'objet de modélisation dans tous les modèles de taux court.

I. Structure par terme des taux (courbe des taux)

On appelle structure par terme des taux ou courbe des taux la fonction associant à une échéance T un taux $L(t, T)$, $R(t, T)$ ou $Y(t, T)$ pour un t fixé. Par exemple, la courbe des taux simples à l'instant $t = 0$ est donné par $T \mapsto L(0, T)$, $T \geq 0$.

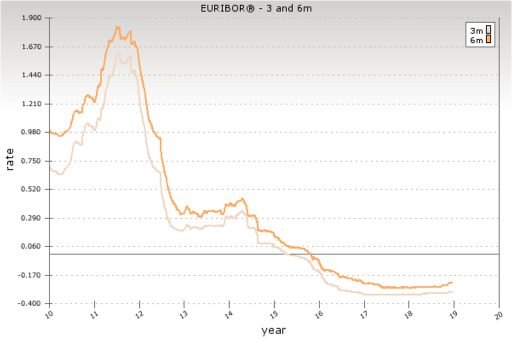
- Une courbe des taux est construite à partir des prix d'obligations (et d'autres instruments) liés au taux d'intérêt observés sur le marché étudié. Ce sont plutôt les obligations avec coupons parce que les obligations ZC sont très peu liquides ou même pas traitées sur les marchés réelles.

La procédure consiste de deux étapes:

- le bootstrapping ("stripping des obligations"): calcul théorique des prix ZC à partir des prix d'obligations avec coupons
- le lissage de la courbe obtenue

I. Structure par terme des taux (courbe des taux)

Remarque: Notez que les graphiques que nous avons vus ne représentent pas des courbes des taux. Ils correspondent à une autre fonction: $t \mapsto L(t, t+\tau)$, pour une échéance fixée. Par exemple, ci-dessous on a les valeurs journalières des taux Euribor pour les échéances $\tau = 3$ et 6 mois



II. Taux d'intérêt forward

Question: Comment déterminer à l'instant t le taux pour une période future $[T, S]$, où $t < T < S$?

II. Taux d'intérêt forward

Question: Comment déterminer à l'instant t le taux pour une période future $[T, S]$, où $t < T < S$?

(*) Considérons la stratégie suivante en utilisant les obligations zéro-coupon:

- à l'instant t: vendre 1 ZC d'échéance T au prix $B_t(T)$ et acheter la quantité $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ de ZCs d'échéance S au prix unitaire $B_t(S)$. La valeur de cela est

$$B_t(T) - \frac{B_t(T)}{B_t(S)} B_t(S) = 0$$

- à l'instant T: on doit payer 1 (date de paiement du ZC d'échéance T). La valeur de cela est -1.

- à l'instant S: on reçoit 1 pour chaque ZC d'échéance S (date de paiement du ZC d'échéance S. La valeur de cela est $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$.

II. Taux d'intérêt forward

Question: Comment déterminer à l'instant t le taux pour une période future $[T, S]$, où $t < T < S$?

(*) Considérons la stratégie suivante en utilisant les obligations zéro-coupon:

- à l'instant t: vendre 1 ZC d'échéance T au prix $B_t(T)$ et acheter la quantité $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ de ZCs d'échéance S au prix unitaire $B_t(S)$. La valeur de cela est

$$B_t(T) - \frac{B_t(T)}{B_t(S)} B_t(S) = 0$$

- à l'instant T: on doit payer 1 (date de paiement du ZC d'échéance T). La valeur de cela est -1.

- à l'instant S: on reçoit 1 pour chaque ZC d'échéance S (date de paiement du ZC d'échéance S. La valeur de cela est $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$.

Donc, à l'instant t on a fixé une stratégie qui pour un investissement 1 à l'instant (futur) T rapporte $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ à l'instant S.

II. Taux d'intérêt forward

On appelle taux d'intérêt forward simplement composé la quantité $L(t,T,S)$ définie par

$$L(t,T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right)$$

C'est le taux simple constant sur la période $[T,S]$ qui correspond à la stratégie donnée

$$1 + L(t,T,S)(S-T) = \frac{B_t(T)}{B_t(S)}$$

c'est-à-dire: à l'instant T on place 1 au taux d'intérêt simple fixé en t et on reçoit $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ à l'instant S

II. Taux d'intérêt forward

On appelle taux d'intérêt forward simplement composé la quantité $L(t, T, S)$ définie par

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right)$$

C'est le taux simple constant sur la période $[T, S]$ qui correspond à la stratégie donnée

$$1 + L(t, T, S)(S - T) = \frac{B_t(T)}{B_t(S)}$$

c'est-à-dire: à l'instant T on place 1 au taux d'intérêt simple fixé en t et on reçoit $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ à l'instant S

$\Rightarrow$ Le taux forward simple $L(t, T, S)$ (appelé parfois aussi le taux Libor forward) est l'objet de modélisation dans le modèle LMM.

Exercise: Déduire le taux continu forward $R(t, T, S)$ et le taux actuariel forward $Y(t, T, S)$ correspondant à la stratégie (*).

II. Taux d'intérêt forward instantané

Maintenant on peut définir le taux forward instantané en faisant tendre S vers T dans la définition du taux forward:

On appelle taux forward instantané à l'instant t pour l'échéance T la quantité $f(t, T)$ définie par

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln B_t(T)}{\partial T}$$

On a alors

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right)$$

II. Taux d'intérêt forward instantané

Maintenant on peut définir le taux forward instantané en faisant tendre S vers T dans la définition du taux forward:

On appelle taux forward instantané à l'instant t pour l'échéance T la quantité $f(t,T)$ définie par

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln B_t(T)}{\partial T}$$

On a alors

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right)$$

$\Rightarrow$ Le taux forward instantané $f(t,T)$ est l'objet de modélisation dans le modèle HJM.

$\Rightarrow$ Notez que $r_t = f(t,t)$.