Simulación computacional

PhD Jorge Rudas

INFOTEP
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

https://github.com/jrudascas/simulacion_infotep

Sistemas de representación

Vectores

Los **vectores** pueden definirse como elementos que poseen magnitud y dirección. Sin embargo, en el campo de la robótica, un vector representa la combinación de varias señales que pueden analizarse, incluyendo, por ejemplo, posición, velocidades, aceleraciones, torques y fuerzas.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

Operación **SUMA**

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Conmutación y asociación

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vector Nulo

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Inverso aditivo

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Operación **PRODUCTO ESCALAR**

$$\alpha \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Distribución

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$$

$$(\alpha + \omega)\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \omega \mathbf{x}$$

Neutro Unidad

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Asociativa y Conmutativa

$$\alpha(\omega \mathbf{x}) = (\alpha \omega)\mathbf{x} = \omega(\alpha \mathbf{x})$$

Operación **PRODUCTO INTERNO**

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathcal{R}$$

Asociativa

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z} = \mathbf{y}^T\mathbf{x} + \mathbf{z}^T\mathbf{x}$$

Operación **NORMA VECTORIAL**

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)} \in \mathcal{R}^+$$

- $||\mathbf{x}|| > 0,\ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $||\mathbf{x}|| = 0,\ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Taller Grupal

Matrices

Se define a una matriz donde es un arreglo de números con **n** filas y **m** columnas que definen la dimensión de la matriz; además, sus elementos son:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

$$\mathbf{I} = \{a_{ij}\} \in \mathcal{R}^{n \times n},$$

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ si } \; i = j \; \text{ y } a_{ij} = 0 \text{ si } \; i \neq j,$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

Matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \{a_{ij}\} \in \mathcal{R}^{n\times n},$$

$$a_{ij} \in \mathcal{R} \text{ si } i = j \text{ y } a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j,$$

$$\mathbf{D} = diag\{a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n\times n}$$

Matriz simétrica y antisimétrica

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathcal{R}^{n\times n}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T.$$

Matrices positivas

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n};$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \; \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathcal{R}^n$$

Definida

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$$

Semi definida

Operación **SUMA**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

- **Propiedad Conmutativa:**

$$A+B+C=B+A+C=A+C+B=C+A+B=C+B+A$$

- **Propiedad Asociativa:**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

- **Elemento Neutro Aditivo:** Se define por una matriz nula $\mathbf{0}=\{0_{ij}\}\in\mathcal{R}^{n\times m}$, donde $0_{ij}=0$, y se tiene la siguiente propiedad:

$$\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$$

Operación **TRANSPUESTA**

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathcal{R}^{n \times m}, \longrightarrow \mathbf{A}^T = \{a_{ji}\} \in \mathcal{R}^{m \times n}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$((\mathbf{A}^T)^T)^T = \mathbf{A}^T$$

$(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \alpha$, donde $\alpha \in \mathcal{R}$

$(\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es una matriz identidad.

Operación **RESTA**

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1m}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2m}-b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \dots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$$

La resta de matrices no es conmutativa

- $\mathbf{A}-\mathbf{B}-\mathbf{C} = -\mathbf{B}+\mathbf{A}-\mathbf{C} = \mathbf{A}-\mathbf{C}-\mathbf{B} = -\mathbf{C}+\mathbf{A}-\mathbf{B}$
- $\mathbf{A}-\mathbf{B}-\mathbf{C} = \mathbf{A}-(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}-\mathbf{B})-\mathbf{C} = \mathbf{A}-(\mathbf{C}+\mathbf{B})$
- $(\mathbf{A}-\mathbf{B}-\mathbf{C})^T = \mathbf{A}^T-\mathbf{B}^T-\mathbf{C}^T$
- $(\mathbf{A}^T-\mathbf{B}^T-\mathbf{C}^T)^T = \mathbf{A}-\mathbf{B}-\mathbf{C}$

Operación **MULTIPLICACIÓN**

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times m} \text{ y } \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{m\times n},$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{in} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Ley asociativa $\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BE}) = (\mathbf{AB})\mathbf{E},\ \mathbf{C} \in \mathcal{R}^{n\times n}$

Ley distributiva $\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{AB} + \mathbf{AD}) \in \mathcal{R}^{n\times m}$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \in \mathcal{R}^{m\times n}$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{ABE})^T = \mathbf{E}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \in \mathcal{R}^{n\times n}$$

Se tiene $\mathbf{0} \in \mathcal{R}^{p\times m}$, por lo tanto $\mathbf{A0} = \mathbf{0} \in \mathcal{R}^{n\times m}$

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha \in \mathcal{R}^{n\times p}$$

Se tiene que $\alpha = 0$, por lo tanto $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{0} \in \mathcal{R}^{n\times p}$

$$\mathbf{FI} = \mathbf{IF} = \mathbf{F}$$

Otros operadores

Determinante

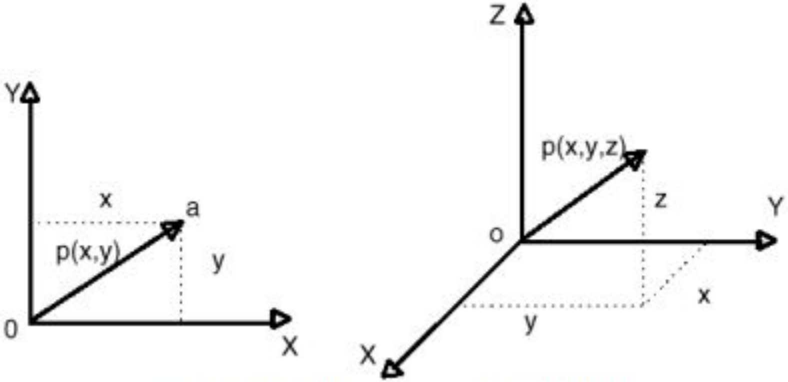
Adjunta

Inversa

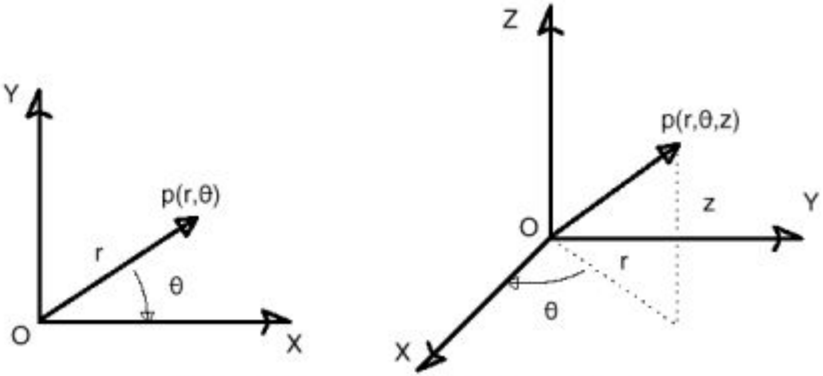
Taller en grupo

- Generar una rutina para determinar aproximadamente si una matriz es positiva

Representación de la posición



Coordenadas cartesianas en 2 y 3 dimensiones



Coordenadas polares en 2 y 3 dimensiones

Representación de la orientación en 2D

$\mathbf{p} = [x \quad y]^T \in \mathcal{R}^2,$

$\{\mathcal{V}\}$ o $\{\mathcal{B}\}$.

$${}^V\mathbf{p} = [{}^Vx \quad {}^Vy]^T \qquad\qquad {}^B\mathbf{p} = [{}^Bx \quad {}^By]^T$$

$$\begin{bmatrix} {}^Vx \\ {}^Vy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^Bx \\ {}^By \end{bmatrix}$$

$${}^V\mathbf{p} = {}^V\mathbf{R}_B \, {}^B\mathbf{p}$$

Orientación y Desplazamiento en 2D

Para representar la pose (posición y orientación) de un punto, es necesario considerar la traslación y rotación que se presenta entre los sistemas de referencia desde **beta** y **v**, hacia , lo cual puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} {}^{V}x \\ {}^{V}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{V}x \\ {}^{V}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ 1 \end{bmatrix}$$