数字逻辑

课程要求

平时成绩组成：
课后作业15 + 实验10 +考勤5
小测验20分

第一章 概念介绍

1.1 数字和模拟量

连续(Continuous)和离散(Discrete)信号

模拟(Analog)和数字(Digital)信号：

- 从模拟信号到数字信号的转换一定有误差
- **采样频率**指从连续的模拟信号中搜集离散信号的频率，每个采样点存储的bits数决定了存储信息的多少
- 数字信号转模拟信号**DAC**，模拟信号转数字信号**ADC**

> 理论上，一个模拟信号的周期通常采样两次，则保留信息频率为采样频率的$\frac{1}{2}$

1.2 二进制数字、逻辑电平和数字波形

表示数字0和1的电压是**逻辑电压(logic levels)**，高电压和低电压之间有**容限。**低电压可降低功耗，高电压则能增大容错率

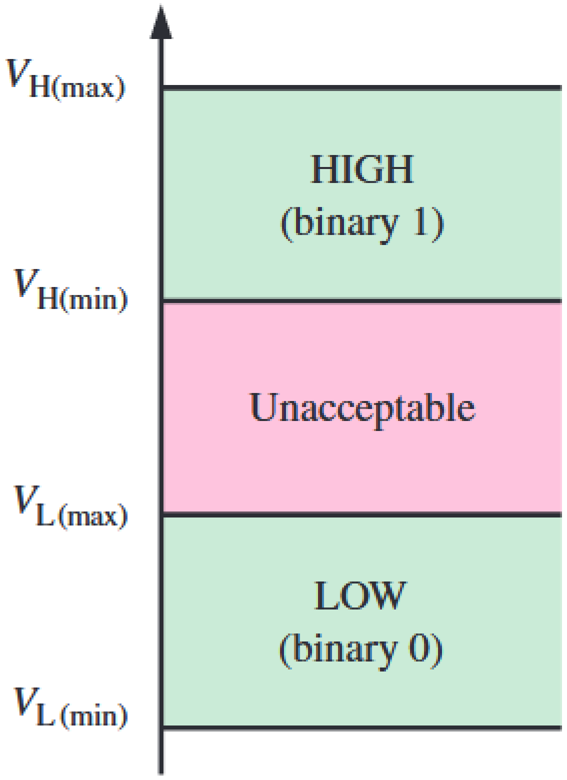
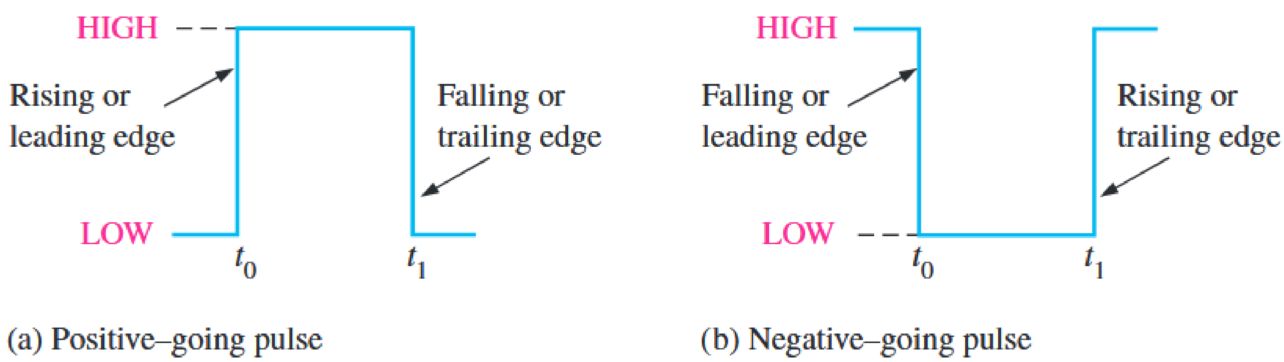


FIGURE 1–6 Logic level ranges of voltage for a digital circuit.

数字波形(digital waveforms) 具有理论上和实际上的两种形状



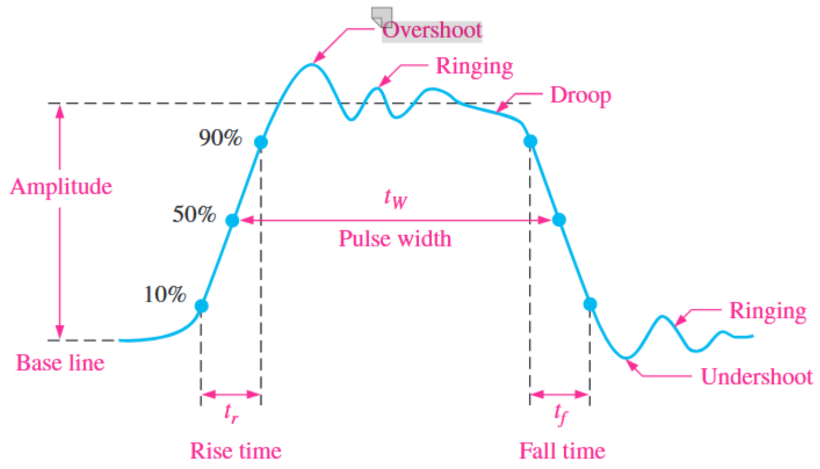


FIGURE 1–8 Nonideal pulse characteristics.

> 单位大小：$k=10^3$，$M=10^6$，$G=10^9$(在频率和周期中，不同于内存单位)

占空比(duty cycle)：

$$\text{Duty cycle} = \frac{t_w}{T}100\%$$

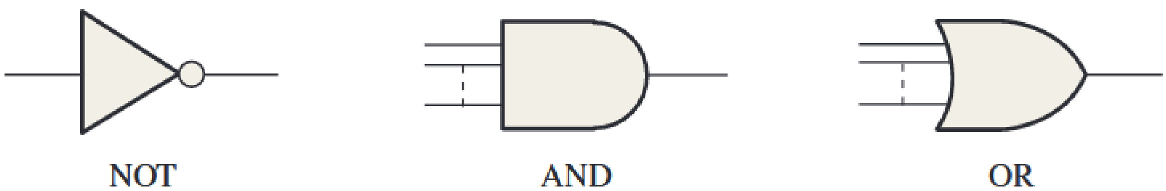
其中t_w表示高电平时间，T表示周期

数字系统中的所有波形都与**时钟(clock)** 同步，时钟的每个周期表示*传输1bit*的时间。显示多个波形实际变化情况的图是**时序图(timing diagrams)**

1.3 基本逻辑功能

逻辑门(logit gate) 拥有一或两个输入和一个输出，基础的门分为：

- **非门(NOT)**：输出与输入相反
- **与门(AND)**：只要有0则输出0，否则输出1
- **或门(OR)**：只要有1就输出1，否则输出0



1.4 组合和顺序逻辑功能

逻辑门的组合可以实现：

1. **比较器(comparator)**，比较数字大小
2. **加法器(adder)**，实现加法；加法实现后同理实现其他四则运算
3. **编码器(code conversion function)** 和 **解码器(encoding function)**，实现信号和二进制数的转换
4. **计数器(counting function)**，对信号计数

5. **多路复用器(multiplexing)** 和 **解多路复用器(demultiplexing)**，将多路信号转换到一路信号和一路信号转换到多路信号
6. **存储器(Storage function)**，存储数据
7. **进程控制系统(process control system)**，对各种进程进行控制

第二章 数字系统，操作符和编码

2.1-2.3 十进制与二进制

重要概念：

- 十进制数和二进制数的**基数(base)** 分别是10和2
- 最右边和最左边的位分别叫**最低有效位(least significant bit, LSB)** 和 **最高有效位(most significant bit, MSB)**
- **八进制(Octal)**，**十六进制(Hexadecimal)** 和 **十进制(decimal)**

> 十进制转八进制、十六进制前再转换为二进制，二进制再转其他，按位数转。
> 补位时，要从远离小数点的地方补齐，不能改变原来的大小

二进制转十进制

按照基数+指数的方法直接转换

$$\begin{aligned} 110_{(2)} &= 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 \\ &= 4 + 2 \\ &= 6_{(10)} \end{aligned}$$

十进制转二进制

整数部分
减法：

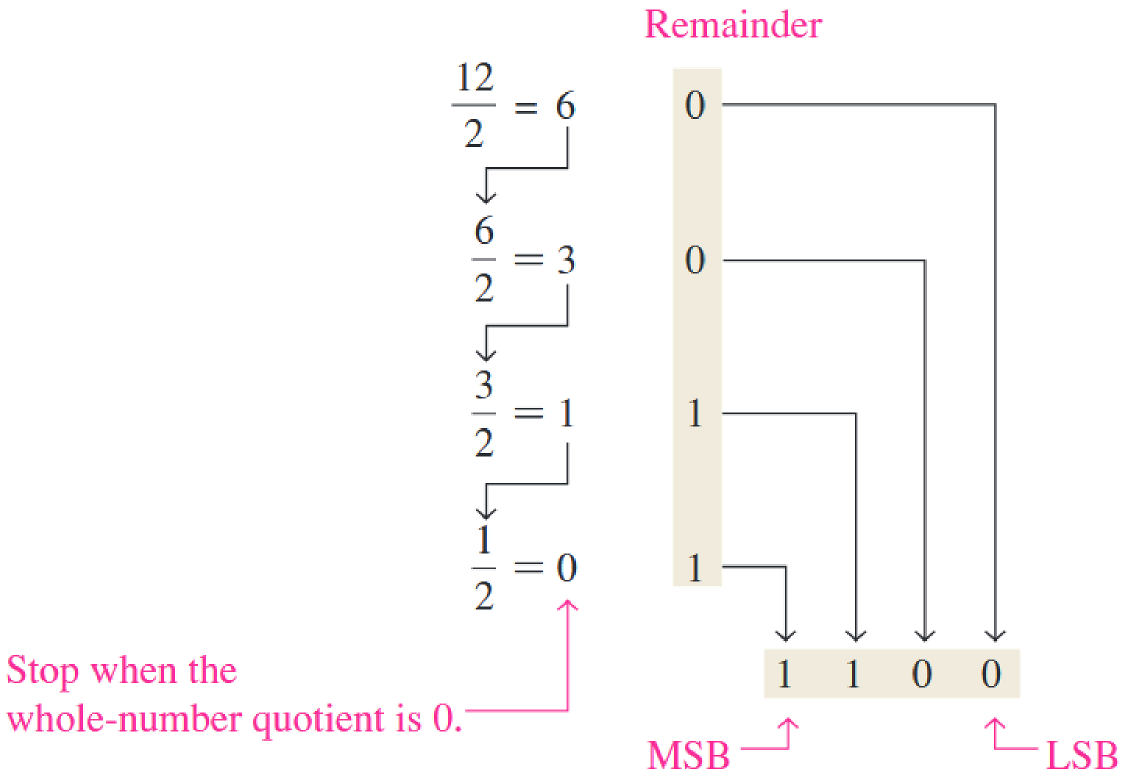
1. 找到距离原十进制数最近的2^x数，减去
2. 对于剩余的被减数，重复此操作
3. 将得到的2^x数的指数位置摘出为1，其他为0

$$\begin{aligned} 49_{(10)} &= 32 + 16 + 1 \\ &= 2^5 + 2^4 + 2^0 \\ &= 110001_{(2)} \end{aligned}$$

除二取余法：

4. 原数除以2取出余数放边上
5. 连续进行此操作，直到原数变为0

6. 将余数倒置

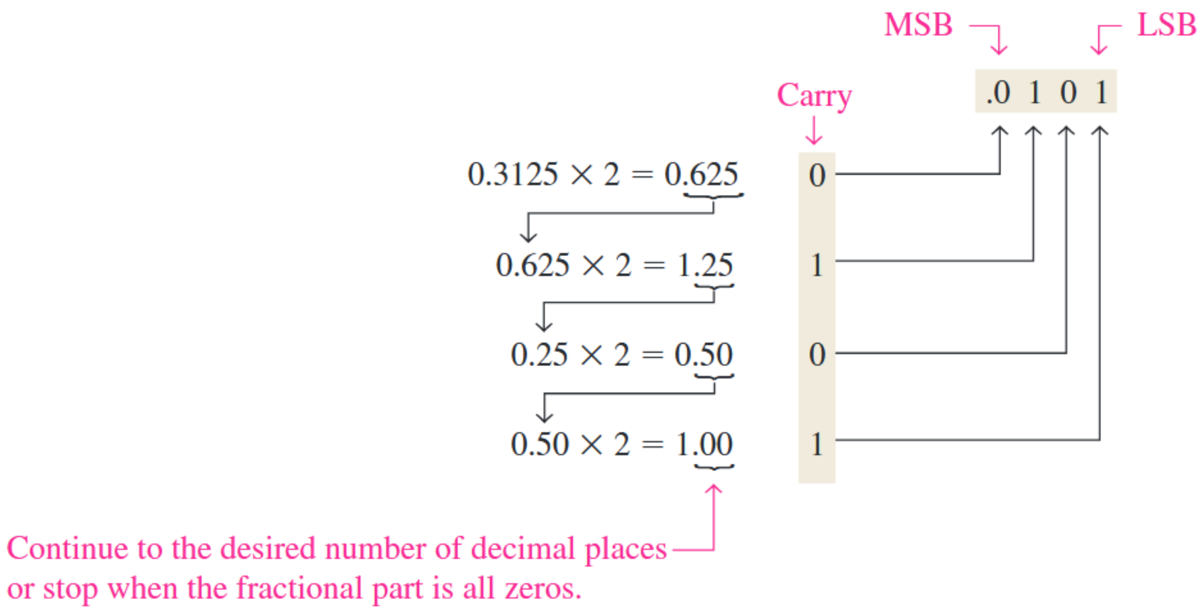


小数部分

乘二取整法：

7. 小数部分每次乘以2，留下整数
8. 重复此操作，直到小数点后面为0，或者*达到需求精度*

> 有可能无限循环，因为十进制转二进制留下误差



2.4-2.6 二进制运算，补码和符号数

重要概念

- 原码 符号位+二进制位
- 补数 设一个r进制的数N_r，则它们补数$[N_r] = r^n - N_r$，其中n表示位数

设一个无符号数N，则它的：

1. 有符号正数$+N$，即在原来的数前加一个0，反码与之相同
2. 有符号负数$-N$，即在$+N$取补码(各位取反再加一)

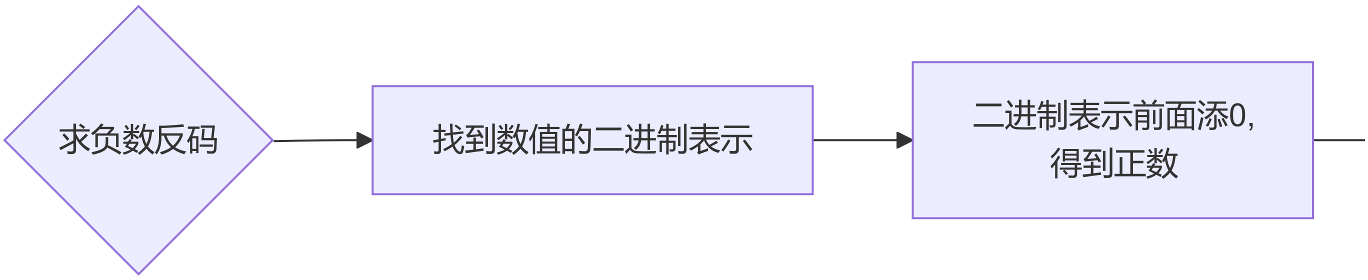
> 我们用的有符号数为一个符号位加上数值，因此求反码必须转换为有符号数再做

注意：

1. “补码等于反码加一”仅针对负数
2. 负数的反码是正符号数的各位取反(包括符号位也取反，符号位本身是0)
3. 补码与原码相同针对二进制正数，十进制正数补码和原码不同
4. 求补数和求补码不同。二进制正数的**补码(complement code)** 和**补数(complement)** 不同，前者同原码，后者各位取反加一

求反码的算法

负数的反码等于正数各位取反(正数是符号位为0+数值)



求补码的算法

定义法：

$$[N_r] = r^n - N_r$$

LSB-MSB算法：

1. 从LSB往MSB，若遇到0，则复制，直到遇到非0
2. 对第一个非0数，用r减去它，r表示进制
3. 后续的数，用$r-1$减去
   减法：
4. 对于每一位的数，用$r-1$减去之
5. 对结果，加一

> 正数的补码和原码同样

特别地，求二进制数的补码：

1. 找到对应有符号正数
2. 包括符号位的所有位取反
3. 加一

2.7-2.9 有符号数的计算和其他进制

有符号数的加法，本质上是补码的加法和符号位的**溢出 (overflow)**。符号位的溢出可能出错，即超过有符号数位数的表示范围
二进制数的减法为加法与负数

> 计算时，先把位次对齐 (补零) 后再计算；其中正数直接补零，负数找补码时，先找对应正数补零，再求补码

二进制数的除法可用乘法优化：

- 对 2 的整数幂，用移位的方法
- 对非 2 的整数幂，改为乘以小数
- 对非常量 (如 `X / Y`)，对 `Y` 构造乘法表。需要一个较小范围的 `Y`

> 探测两个正数相加或两个负数相加的溢出，可检测符号位是否改变

2.10 二进制编码

二进制表示的十进制码 (binary coded decimal, BCD)，即对每一位的数字都用二进制表示，例如：

$$11_{(10)} = 1011_{(2)} = 0001,0001_{(BCD)}$$

这体现了二进制数和二进制编码的差异，常用于时钟显示等

> BCD 码分为**8421 BCD**和**84-2-1 BCD**等，表示 4 位二进制的表示的权重，即各位和

Gray码(Gray code) 的特点:

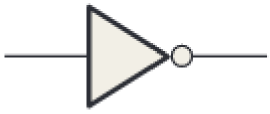
1. 相邻位差异最小：Gray码中任意两个连续的数值仅有一位二进制位不同。例如，十进制的 `1` 和 `2` 在Gray码中分别表示为 `0001` 和 `0011`，只有第二位不同
2. 循环性：Gray码是一个循环码，即最后一个码字与第一个码字之间也只有一位不同。例如，对于3位Gray码，`000` 和 `100` 之间只有一位不同
3. 非权码：Gray码是一种无权码，每一位的值没有固定的权重，不像普通二进制码那样可以直接转换为十进制数

奇偶校验 (parity method) 用于信号传输过程中的检误。奇校验即保证传输数据的'1'的个数为奇数个，偶校验类似

> 奇偶校验只能检查一位错误；CRC 校验可以检测多位的错误

第三章门电路

3.1 非门

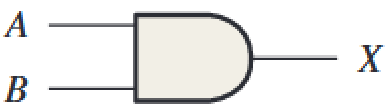


非门(the Inverter/ NOT gate) 将输入电平转换为相反的电平

下面是非门的**真值表 (truth table)**

输入 (A)	输出 (NOT A)
0	1
1	0

3.2 与门



与门 (AND gate) 在输入中有 0 时输出 0，否则输出 1；把某些位设置为 0，只需要与一个这些对应位为 0，其余为 1 的数：

1001 \& 1100 = 1000 $$ > 在 ASCII 码中，大写字母和小写字母仅有一位区别，可用与运算转换

\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}

![[Pasted image 20250319145220.png]] 或门后接非门为**或非门 (NOR)**，表现为有高则低，否

X = A \oplus B =\overline A B + A \overline B

异或门的特性：＊只有一个输入反向，输出反向＊两个输入反向，输出不变在异或门后加上非门得

X = A \odot B = \overline A \overline B + A B

第四章 布尔运算与逻辑简化 ## 4.1-4.2 布尔运算的算符和表达式和规则 在布尔运算中，'+'表

\begin{aligned}
&A + B = B + A \
&AB = BA
\end{aligned}

布尔运算满足＊＊结合律＊＊：

\begin{align}
&A + (B + C) = (A + B) + C \
&A(BC) = (AB)C
\end{align}

布尔运算满足∗∗分配率∗∗：

AB + AC = A(B + C)

一些指的注意的运算规律： * **补码律** $A+\overline A = 1, A \overline A = 0$ * **幂等

\begin{align}
&\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} \
& \overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}
\end{align}

摩根定律可以扩展到多个相乘或相加常用摩根定律化简表达式，例如：

\overline{(A+B+C)D} = \overline{A+B+C} + \overline{D} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{D}

此外，可用摩根定律化简式子后求一个电路的真值表特别地，双重否定律和摩根定律不能混淆：∗

\overline{\overline A B} = A + \overline B

∗双重否定律

\overline{\overline{AB}} = AB

4.4-4.5 用布尔表达式分析逻辑电路和表达式化简 用布尔表达式分析逻辑电路，可以方便的画

A\overline{B}C=A\overline{B}C(D+\overline{D})=A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D}

其中 $(X+\overline X)$ 是 1 因子，可添加到乘积项中 > SOP 和标准 SOP (standstard SOP)

A \overline B C + \overline A B C \to 101 + 011 = m_5 + m_3

在POS中，每项称为∗∗最大项($maxterm$)∗∗，当最大项为0时，POS整体输出为0,。用二进制表

(\overline A + B + C) (\overline A + \overline B + C) \to 100 \cdot 110 = M_4 \cdot M_6

> 最小项要等于 1，最大项要等于 0 作一个标准布尔表达式的真值表，则真值表的每一行都能找