线性代数（理工）

第一章 线性方程组

1.1 线性方程组 高斯消元法与矩阵

一个 n*n 元线性方程**是具有如下形式的方程：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

其中，**系数**$a_1,a_2,\cdots,a_n$与常数项b均为已知的实数或者复数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为未知变量。

一个**线性方程组**或者**线性系统**是一个或几个含有相同变量的线性方程的集合。一个含m个方程的n元线性方程形如：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

上面的方程组称为m×n型方程组。

当b_i都为0时，上面的方程组称为**齐次线性方程组**。当b_i不全为0时，称为**非齐次线性方程组**。

方程组的**解**是一组满足方程组的n元有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$。如果n元数组(0, 0, $\cdots$)满足方程组，就称其为方程组的**零解**。若方程组的解中含有非零数，则称其为**非零解**。方程组全部解的集合称为方程组的**解集**。

一个方程组的解有三种情况：**无解**，**有唯一解**，**有无穷多个解**。

如果一个方程组有唯一解或无穷多解，则称它是**相容的**；若无解，则称它是**不相容的**。

线性方程组的两个基本问题：
(1) 方程组是否有解，即是否存在至少一个解，这是解的**存在性**问题。
(2) 如果解存在，解是否仅有一个，这是解的**唯一性**问题。

包含相同变量的两个方程组如果有相同的解集，则它们是**等价**的。

高斯消元法包含三种**线性方程组的初等变换**：
(1) 交换方程组中两个方程的顺序
(2) 在一个方程的两端都乘以非零的常数
(3) 一个方程的常数倍加到另一个方程上

定义1.1.1

由m×n个（实或复）数a_{ij}排成m行n列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为m×n型矩阵，简称为**矩阵**。数a_{ij}称为矩阵的第i行第j列**元素**。通常用大写字母**A**表示矩阵。

定义1.1.2

一个线性方程组的每个变量的系数及常数项按照他们在方程组中的位置构成的矩阵，称为方程组的**增广矩阵**。如果只是把方程组中各变量的系数按照他们在方程组中的位置排成的矩阵，称为方程组的**系数矩阵**。

定义1.1.3

我们把作用在增广矩阵上对应线性方程组的三种初等变换称为**矩阵的初等行变换**。
(1) 对换变换——交换矩阵的两行
(2) 数乘变换——将某行全体元素都乘以某一非零常数
(3) 倍加变换——把某行用该行与另一行的常数倍的和替换，即把某行的倍数加到另一行上。

定义1.1.4

如果两个矩阵可以通过初等行变换互相转换，则称这两个矩阵是**行等价**的。

定理1.1.1

如果两个矩阵的增广矩阵是行等价的，则这两个矩阵有相同的解。

第二章 矩阵代数

2.1 矩阵与向量

设**A**是一个m×n型矩阵，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

方阵**A**的**对角线元素**是$a_{11}, a_{22}, \cdots$，他们构成**主对角线**。**对角矩阵**是非对角线上元素全为全为0的方阵。每个元素都为0的矩阵称为**零矩阵**。记为$\mathbf{0}_{m\times n}$或者**0**。

称由实数构成的n元有序数组为**n维向量**。全体n为向量的集合记为$\mathbf{R}^n$。如果将n元数组表示为一个1×n的矩阵，则称为**n维行向量**；若表示为一个n×1的矩阵，则称为**n维列向量**。

2.2 矩阵的代数运算

2.2.1 矩阵的加法与数乘

定义2.2.1

如果矩阵**A**和矩阵**B**有相同的行数与列数，则称它们为**同型矩阵。**

定义2.2.2

如果同型矩阵**A**与**B**的对应元素都相等，则称**A**与**B**相等，记为**A=B**。

定义2.2.3

两个同型矩阵的对应元素相加得到的同型矩阵**C**成为矩阵**A**与矩阵**B**的**和**，记为

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$$

显然**0+A=A**

定义2.2.4

λ是一个数，**A**是一个矩阵，则同型矩阵λ**A**称为数λ与**A**的**乘积**，记为λ**A**。即：

$$\lambda\mathbf{A}=\lambda(a_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

矩阵的加法与矩阵的与数的乘法统称为矩阵的**线性运算。**

定义2.2.5

设给定若干个同型矩阵$\mathbf{A}_1$、$\mathbf{A}_2$，$\ldots$,$\mathbf{A}_m$，经线性运算

$$\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{A}_2+\cdots+\lambda_m\mathbf{A}_m=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mathbf{A}_j=\mathbf{B}$$

得到的矩阵**B**称为$\mathbf{A}_1$、$\mathbf{A}_2$，$\ldots$,$\mathbf{A}_m$的**线性组合**，或称**B**可以由$\mathbf{A}_1$、$\mathbf{A}_2$，$\ldots$,$\mathbf{A}_m$，**线性表出。**

> 线性组合是讨论同型矩阵是否有线性关系的基本概念

2.2.2 矩阵的乘法

下面分三种情形讨论矩阵的乘法。

对于含有n个未知量的线性方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$=b，若令

$$\mathbf{A}=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n],\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

并定义乘积

$$\mathbf{AX}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

则方程$\mathbf{AX}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$可以写成矩阵方程

$$\mathbf{AX}=b$$

> 此时左侧的行向量与右侧的列向量的乘积是一个数

定义2.2.6

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{C}=(c_j)_{n\times 1}$，规定矩阵**A**与矩阵**C**的乘积**AC**是以$d_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j$为分量的m维列向量，即

$$\mathbf{AC}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n\\a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n\\\vdots\\a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n\end{bmatrix}$$

两个矩阵能相乘的条件是，**A**的列数等于**C**的行数。

乘积**AC**的第i个分量等于矩阵**A**的第i个*行向量*与列向量**C**的对应分量之和。

定义2.2.7

$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，**A**与**B**的乘积定义如下：

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{mn}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{bmatrix}_{ns}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\\\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\\\vdots & \vdots & & \\\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum\end{bmatrix}$$

D=AB是m×s矩阵。他的元素$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$由**A**的第i个行向量和**B**的第j个列向量的对应分量乘积之和。

矩阵的乘法满足**结合律**：
(**AB**)**C**=**A**(**BC**)

矩阵的乘法满足**分配率**：
A(**B**+**C**) = **AB**+**AC**
(**A**+**B**)**C**=**AC**+**BC**

> 以上二者分别称为左结合律和右结合律

数字可以优先结合：
$\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

> 矩阵乘法不满足**交换律**，也不满足**消去率。**

笔者猜想

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n), \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

其中**A**是m维列向量的数组，**B**是s维行向量的数组。每个数组的元素个数都是n。

---

n阶方阵

$$\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

称为**n阶单位方阵**，在不会混淆时记为**E**或**I**。

对于任意矩阵$\mathbf{A}_{m\times n}$，有$\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}$

设**A**是n阶矩阵，则乘积**AA...A**(有限个)有意义。k个**A**相乘成为**A**的k次**幂**。记为

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$$

并约定

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$$

不难验证

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}，(\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$$

成立。

> 由于矩阵乘法不满足交换律，一般地$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$

当**A**为方阵时，称矩阵

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{E}$$

为方阵**A** 的1 **多项式**，也称$f(\mathbf{A})$是普通多项式

$$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$$

当$\lambda=\mathbf{A}$的值。

设两个多项式$\varphi(\lambda)$，$\psi(\lambda)$，令

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)g(\lambda)=\varphi(\lambda)\psi(\lambda)$$

由矩阵的运算法则，得到

$$f(\mathbf{A})=\varphi(\mathbf{A})+\psi(\mathbf{A})g(\mathbf{A})=\varphi(\mathbf{A})\psi(\mathbf{A})$$

特别地

$$\varphi(\mathbf{A})\psi(\mathbf{A})=\psi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{A})$$

2.3 矩阵与矩阵的初等变换

2.3.1 逆矩阵

定义2.3.1

设**A**是一个n阶矩阵。若存在一个n阶矩阵**B**，使得

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$$

成立，则称**A**是**可逆的**、非奇异的或可逆矩阵，矩阵**B**称为**A**的**逆矩阵**，简称为**A**的**逆**。

定理2.3.1

若**A**是可逆矩阵，则它的逆矩阵是唯一的。

定理2.3.2

若**A**与**B**为n阶可逆矩阵，则**AB**也是n阶可逆矩阵，且

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

推论2.3.1

若$\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_m$皆为n阶可逆矩阵，则乘积$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m$也是n阶可逆矩阵，且

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1}=\mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

定理2.3.3

设**A**是n阶可逆矩阵，那么对任意的 $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{n\times m}$(或$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{m\times n}$)，矩阵方程:

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}\text{ or }\mathbf{XA}=\mathbf{B}$$

有唯一解$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$(或$\mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}$)

2.3.2 矩阵的初等变换与逆矩阵的求法

矩阵的**初等变换**包含:

1. 对换变换——交换矩阵的两行(列)
2. 数乘变换——把某行(列)全体元素都乘以某一非零常数
3. 倍加变换——把某行(列)用该行(列)的常数倍加到另一行(列)上

> 用**P**表示初等矩阵

对n阶单位矩阵**E**分别进行一次上述变换后，得到的矩阵称为**初等矩阵。**

相应的三种初等矩阵分别是:

1. 互换**E**的i,j两行(列)——第一类初等矩阵
2. 用λ乘**E**的第i行(列)——第二类初等矩阵
3. 将**E**的j行(i列)γ倍加到第i行(j列)上——第三类初等矩阵

> 三种初等矩阵都是可逆矩阵

引理2.3.1

对矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$进行某一初等行(列)变换，其结果等于对**A**左(右)乘一个相应的m阶(n阶)初等矩阵

定理2.3.4 (矩阵可逆的等价条件)

设**A**是一个n阶方阵，则下列命题等价:

1. **A**可逆
2. $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解
3. **A**与n阶单位矩阵$\mathbf{E}$**行等价**，即**A**可以经过有限次初等行变换化为**E**

推论2.3.2

下列命题等价:

1. 方阵**A**可逆
2. **A**必可以表为若干个初等矩阵的乘积
3. **A**的主元列数为n

推论2.3.3

若n阶方阵**A**与**B**行等价，则**A**可逆的充要条件是**B**可逆

推论2.3.4

若n阶方阵**A**与**B**满足**AB=E**，则**AB**均可逆，且互为逆阵，**BA=E**

若对**A**和**E**进行一系列完全相同的初等行变换，则当**A**化成单位矩阵**E**时，原来的单位矩阵**E**就被化成了**A**的逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$

可以这样求**A**的逆矩阵：先作n×2n矩阵(**A**|**E**)，并对它进行初等行变换，使**A**化成单位矩阵，则**E**就化成了相应的$\mathbf{A}^{-1}$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \to (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

> 不必事先判断**A**是否可逆。若在转化过程中出现零行，则**A**肯定无法化为单位矩阵，从而**A**是不可逆矩阵
>
> 可以用初等列变换进行判断

若两个m×n型矩阵可通过一系列初等列变换进行转化，则称**A**与**B**是**列等价**的。

若两个m×n型矩阵可通过一系列初等行、列变换进行转化，则称**A**与**B**是**等价**的，记为$\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$

任何一个m×n型矩阵都等价于一个**规范型矩阵**(只有r个分别位于(1,1),(2,2),...(r,r))的元素为1，其他元素都为0)

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 转置矩阵与一些重要方阵

2.4.1 转置矩阵

定义2.4.1

设m×n型矩阵**A**，若将**A**的行顺次改成列，所得到的n×m型矩阵称为**A**的**转置矩阵**，记作$\mathbf{A}^T$

如果

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的转置满足以下规则：

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
5. 若**A**是可逆矩阵，则$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

2.4.2 重要的方阵

定义2.4.2

若实矩阵**A**满足$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$，则称之为**对称矩阵。**

> 对称矩阵必为方阵
> 对称方阵对角线两侧的元素对应相等

一个n阶矩阵**A**是对称矩阵的充要条件是

$$a_{ij} = a_{ji}$$

> 若**A**和**B**是对称矩阵，则**A**+**B**和$\lambda\mathbf{A}$都是对称矩阵。但两个对称矩阵的积不一定是对称矩阵。

定义2.4.3

若矩阵**A**满足$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$,则称**A**为**反对称矩阵。**

一个n阶方阵是反对称矩阵的充要条件是：

$$a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

> 若**A**和**B**是反对称矩阵，则**A**+**B**和$\lambda\mathbf{A}$都是反对称矩阵。但两个反对称矩阵的积不一定是反对称矩阵。

定义2.4.4

形如

$$
\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}
$$

的n阶矩阵是**对角形矩阵**。对角形矩阵除对角形以外的元素都是0。

对角形矩阵的性质如下：

1. 对角形矩阵满足$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
2. 若**A**、**B** 均为对角形矩阵，则**A+B**、$\lambda\mathbf{A}$、**AB**均为对角形矩阵。对角形矩阵相乘可互换。
3. 对角形矩阵可逆的充要条件是对角线上的元素全部不为0。其逆矩阵也是对角形矩阵，对角线上的元素恰为**A**中对应元素的倒数。

$$
\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^{-1} \end{bmatrix}
$$

定义2.4.5

若n阶实矩阵**A**满足$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$，则**A**称为**正交矩阵**。

n阶矩阵**A**是正交矩阵的充要条件是：

$$
\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}
$$

n阶矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$是正交矩阵的充要条件满足：

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}
$$

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}
$$

中至少有一组成立（可以互推）。这就是说，正交矩阵每一行（列）n个元的平方和等于1；两个不同行（列）的对应元乘积之和等于零。

若**A**是正交矩阵，则$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$也是正交矩阵。

若**A**与**B**均为n阶正交矩阵，则乘积 **AB(BA)** 也是正交矩阵。

> **A+B**一般不是正交矩阵。

2.5 分块矩阵

2.5.1 分块矩阵的定义

定义2.5.1

对于任意一个m×n型矩阵**A**,可以用若干条水平直线和竖直线按某种需要把**A**划分为若干个行数和列数较小的矩阵，这种矩阵称为**A**的**子阵**或**子块**。被划分了的矩阵**A**称为**分块矩阵**，这是矩阵**A**的元素可能不再是数，而是一些小矩阵。

分块矩阵同样可以记为

$$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{ij})_{m\times n}$$

其中的 $\mathbf{A}_{ij}$ 都是**A**的子块。

2.5.2 分块矩阵的运算

1. 分块矩阵的加法
   设**A**与**B**是两个同型矩阵，要得到**A+B**的分块形式，必须采用相同的**分块方式。**

若

$$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{ij})_{l\times k}\mathbf{B}=(\mathbf{B}_{ij})_{l\times k}$$

则

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(\mathbf{A}_{ij}+\mathbf{B}_{ij})_{l\times k}$$

2. 分块矩阵的数乘
   数乘分块矩阵等于数乘矩阵的每个字块所得之矩阵

$$\lambda\mathbf{A}=\lambda(\mathbf{A}_{ij})_{l\times k}=(\lambda\mathbf{A}_{ij})_{l\times k}$$

3. 分块矩阵的转置矩阵
   先将分块矩阵的小矩阵的行顺次改为列，再将每个字块转置

> 先大转置，再小转置

例如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

则它的转置矩阵是

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T\\ \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T\\ \\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

4. 分块矩阵的乘法
   分块矩阵的乘法满足两个条件：

(1) **A**的列数等于**B**的行数。
(2) **A**关于列的分块方式与**B**关于行的分块方式相同。

> 左乘矩阵划分为n列，右乘矩阵按同样的方式划分为n行。

设分块矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}&\cdots&\mathbf{A}_{1s}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}&\cdots&\mathbf{A}_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathbf{A}_{l1}&\mathbf{A}_{l2}&\cdots&\mathbf{A}_{ls}\end{bmatrix}_{ls},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}&\cdots&\mathbf{B}_{1k}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}&\cdots&\mathbf{B}_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathbf{B}_{s1}&\mathbf{B}_{s2}&\cdots&\mathbf{B}_{sk}\end{bmatrix}_{sk}$$

则它们的乘积

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}&\mathbf{C}_{12}&\cdots&\mathbf{C}_{1k}\\\mathbf{C}_{21}&\mathbf{C}_{22}&\cdots&\mathbf{C}_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathbf{C}_{l1}&\mathbf{C}_{l2}&\cdots&\mathbf{C}_{lk}\end{bmatrix}$$

定义2.5.2

形如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1&&&\\&\mathbf{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbf{A}_s\end{bmatrix}$$

的n阶矩阵**A**称为**分块对角矩阵。**

两种同类型的n阶分块对角矩阵的乘积是同一类型的分块对角矩阵：

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1&&&\\&\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbf{A}_s\mathbf{B}_s\end{bmatrix}$$

分块对角矩阵可逆的充要条件是子阵都是可逆矩阵，且

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^{-1}&&&\\&\mathbf{A}_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbf{A}_s^{-1}\end{bmatrix}$$

第三章 行列式

3.1 方阵的行列式

矩阵**A**的行列式记作

$$det\mathbf{A} = a$$

或

$$|\mathbf{A}|$$

记二阶方阵**A**的行列式为：

$$det\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

定义3.1.1

式子

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

记为三阶方阵的行列式，
则当$a_{11} \neq 0$时，三阶方阵**A**可逆的充要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$

设**A**为n阶方阵，$\mathbf{M}_{ij}$表示删除方阵**A**的第i行第j列得到的n-1阶方阵的行列式，称$\mathbf{M}_{ij}$为元素a_{ij}的**余子式**。定义元素a_{ij}的**代数余子式$\mathbf{A}_{ij}$**为：

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$$

定义3.1.2

一个n阶方阵**A** 的 **行列式**，是一个与方阵**A**对应的数量，可以递归定义：

$$|\mathbf{A}| = \begin{cases} a_{11} & \textbf{if} \ \ n = 1 \\ a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n} & \textbf{if} \ \ n > 1 \end{cases}$$

其中

$$\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathbf{M}_{1j}$$

为**A**的第一行元素的代数余子式。

定义中的公式称为**行列式按第一行展开。**

定理3.1.1(行列式的展开定理)

设**A**是一个n阶方阵，则**A**的行列式可以按任意行或任意列展开进行计算，即：

推论3.1.1

三角形方阵的行列式的值等于其主对角线元素的积。

定理3.1.2

$$|\mathbf{A}| = det\mathbf{A} = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathbf{A}_{in} = a_{1j}\mathbf{A}_{1j} + a_{2j}\mathbf{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathbf{A}_{nj}$$

设**A**为n阶方阵，则矩阵的转置不改变行列式的值，即：

$$|\mathbf{A}|^T = |\mathbf{A}|$$

定理3.1.3

设**A**为n阶方阵。
(1) 若**A**中有某一行或某一列的元素全部为0，则$|\mathbf{A}| = 0$。
(2) 若**A**中有两行或两列对应相等，则$|\mathbf{A}| = 0$。

定理3.1.4

若行列式中某行(列)的元均可以表示为两项之和，例如第i行：

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

则此行列式等于两个行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a \end{vmatrix}$$

3.2 行列式的主要性质

引理 3.2.1

设**A**为n阶方阵，则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

对三类初等矩阵：

1. 对换变换——第一类初等矩阵
2. 数乘变换——第二类初等矩阵
3. 倍加变换——第三类初等矩阵

若$\mathbf{P}$为初等矩阵，则

$$|\mathbf{PA}| = |\mathbf{P}||\mathbf{A}|$$

其中：

$$|\mathbf{P}| = \begin{cases} -1, & \mathbf{P} \quad of \quad I \\ k \neq 0, & \mathbf{P} \quad of \quad II \\ 1, & \mathbf{P} \quad of \quad III \end{cases}$$

定理 3.2.1

1. 交换两行或列改变行列式的符号
2. 某行或某列乘以一个常数，相当于行列式乘以一个常数
3. 将某行或某列的倍数加到另一行或列上，行列式的值不变

> 如果行列式的某行或某列为`0`，或者存在某两行或某两列成比例，则行列式的值为`0`

定理 3.2.2

一个n阶方阵**A**可逆的充要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$

定理 3.2.3

设**A**和**B**都是n阶方阵，则：

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

范德蒙德行列式的形式如下：

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

其中，$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$表示

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \\ &(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \\ &\cdots \\ &(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

3.3 行列式的应用

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为一个n阶方阵。对于每一个元a_{ij}的代数余子式$\mathbf{A}_{ij}$，用这些代数余子式取代原来的元素，再对新的矩阵取转置，得到的矩阵称为矩阵**A**的**伴随矩阵**$\mathbf{A}^*$。

引理 3.3.1

对任意n阶方阵**A**，

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$$

定理3.3.1

n阶方阵**A**可逆的充要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

定理3.3.2 克莱姆法则

n元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当其系数矩阵**A**满足：$|\mathbf{A}| \neq 0$时，存在唯一解：

$$x_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|\mathbf{D}_j|}{|\mathbf{A}|}$$

其中，$|\mathbf{D}_j|$表示把系数矩阵**A**中的第j列换成常数项后矩阵的行列式

第四章 向量空间

4.1 向量的定义及运算

把平面上的向量的全体记为

$$\mathbf{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbf{R}\}$$

空间上的向量视为

$$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbf{R}\}$$

定义加法和数乘运算，这两个运算是**封闭**的。

定义4.1.1

由n个数构成的有序数组，记作

$$\bm\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为**n维行向量**，若为

$$\bm\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

则称为**n维列向量**。它们都可称**n维向量**。

定义4.1.2

设两个n维向量$\bm\alpha, \bm\beta$

1. 如果他们的分量分别相等，即$a_1 = b_1, \cdots a_n = b_n$，则称向量$\bm\alpha, \bm\beta$**相等**，记作$\bm\alpha = \bm\beta$
2. **加法** 称$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$为$\bm\alpha, \bm\beta$的**和**,记作
$$\bm\alpha + \bm\beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$
3. **数乘** 设k为实数，称向量$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$为k与$\bm\alpha$的数乘，记作
$$k\bm\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$
4. 分量全为0的向量称为**零向量**，记作$\mathbf{0}$。
5. 称$(-a_1. -a_2, \cdots, -a_n)$为$\bm\alpha$的**负向量**，记作$-\bm\alpha$。由此定义向量的**减法**$\bm\alpha - \bm\beta = \bm\alpha + (-\bm\beta)$

定义4.1.3

全体n维实向量构成的集合$\mathbf{R}^{1\times n}$，对于上面定义的加法、数乘等运算，构成n维实行向量空间；类似地，可以定义n维实列向量空间。记$\mathbf{R}^n$为n维实**向量空间**。

定义4.1.4

给定$\mathbf{R}^n$中的向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$，实数$k_1, k_2, \cdots, k_p$经过线性运算:

$$k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \cdots, k_p\alpha_p = \sum_{i=1}^{p} k_i\alpha_i = \beta$$

得到的向量β称为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$的**一个线性组合**，或称$\beta$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$线性表出

4.2 线性相关与线性无关

定义4.2.1

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$是$\mathbf{R}^n$中的一组向量，如果向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_1\alpha_1 + x_p\alpha_p = \mathbf{0}$$

仅有零解，则称向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$**线性无关**，若存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_p$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p=\mathbf{0}$$

则称向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$**线性相关**

性质4.2.1

(1) 一个向量α线性无关当且仅当其等于零
(2) 两个向量α，β线性无关当且仅当二者不共线，即二者不成比例

定理4.2.1

向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$线性相关的充要条件是其中***至少有一个向量可由其他向量线性表出***

性质4.2.2

若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$中的一个部分线性相关，则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$线性相关

> 线性相关的向量组添加向量后仍然线性相关

性质4.2.3

设向量组$\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\end{bmatrix}$线性无关，分别在$a_j$后面添加一个分量，得到$\beta_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\\a_{4j}\end{bmatrix}$则$\beta$线性无关

性质4.2.4

n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充要条件是n阶行列式：

$$det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$$

4.3 向量组的极大无关组和秩

定义4.3.1

在$\mathbf{R}^n$中，如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p(I)$的每个向量都可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_z(II)$线性表出，则称$(I)$可以由$(II)$线性表出；如果$(I),(II)$可以相互线性表出，则称两者**等价**

> 向量组线性相关等价于其可以由某个部分组线性表出
> 向量组等价具有**传递性**

定理4.3.1

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$可以由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_z$线性表出，若$p>t$则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$线性相关

定理4.3.2

若线性无关的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$可以由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_z$线性表出，则$p \leq t$

定理4.3.3

两个等价的线性无关的向量组含有相同个数的向量

定义4.3.2

设$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}(II)$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p(I)$的一个部分组，如果：
(1) (II)线性无关
(2) (I)中的任意向量都可以由(II)线性表出
则称(II)是向量组(I)的**极大无关组**

定理4.3.4

向量组的任意两个极大无关组等价，且包含相同的向量个数

定义4.3.3

向量组的极大无关组包含的向量个数，称为向量组的**秩**，记为：

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$$

规定零向量组的秩为零

推论4.3.1

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p(I)$，若$r(I) < p$则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$线性相关，若$r(I) = p$则向量组线性无关

推论4.3.2

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p(I)$可以由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_z(II)$线性表出，则秩满足：

$$r(I) \leq r(II)$$

推论4.3.3

等价向量组的秩相等

> 秩相等的向量组未必等价！

4.4 子空间

定义4.4.1

$\mathbf{H}$是$\mathbf{R}^n$的非空子集，若其满足：
(1) $\mathbf{0} \in \mathbf{H}$
(2) $\alpha, \beta \in \mathbf{H} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbf{H}$

(3) $\alpha \in \mathbf{H}, k \in R \Rightarrow k\alpha \in \mathbf{H}$
则称$\mathbf{R}$是$\mathbf{R}^n$的子空间

> 子空间是对加法和数乘封闭的$\mathbf{R}^n$的非空子集

定理4.4.1

若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbf{R}^n$，则由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$的所有的可能得线性组合构成的集合

$$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p | \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbf{R}^n\}$$

是$\mathbf{R}^n$的子空间

定义4.4.2

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbf{R}^n$，由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$的所有可能得线性组合构成的子空间

$$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p | \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbf{R}^n\}$$

称为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$张成的$\mathbf{R}^n$的子空间

> 两个特殊的子空间是$\mathbf{R}^n$自身和零子空间 {**0**}，称为$\mathbf{R}^n$的**平凡子空间**

定义4.4.3

设$\mathbf{A}$是m×n的矩阵，$\mathbf{A}$的**列空间**$Col\mathbf{A}$是$\mathbf{A}$的列向量的所有可能的线性组合构成的集合，记$\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$则

$$Col\mathbf{A} = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}^m$$

易知

$$Col\mathbf{A} = \{\mathbf{b} \mid \exists\, x \in \mathbf{R}^n, \mathbf{b} = \mathbf{Ax}\}$$

因此，$Col\mathbf{A}$也称为$\mathbf{A}$的**值域空间**$Range(\mathbf{A})$

定理4.4.2

m×n的矩阵$\mathbf{A}$的列空间$Col\mathbf{A}$是$\mathbf{R}^m$的子空间

定义4.4.4

设$\mathbf{A}$是m×n的矩阵,$\mathbf{A}$的零空间$Nul\mathbf{A}$是齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的所有的解向量构成的集合，即

$$Nul\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}$$

定理4.4.3

m×n的矩阵$\mathbf{A}$的零空间$Nul\mathbf{A}$是$\mathbf{R}^n$的子空间；等价地,m个方程,n个未知量的齐次线性方程组$\mathbf{A}=\mathbf{0}$的解集是$\mathbf{R}^n$的子空间，称为$\mathbf{A}=\mathbf{0}$的**解空间**

4.5 基和维数

定义4.5.1

$\mathbf{R}^n$的非零子空间$\mathbf{H}$的线性无关生成集称为$\mathbf{H}$的**基**，有定义可知，若$\mathbf{H}$中的向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$\mathbf{H}$的一组基，则
(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性无关
(2) $\mathbf{H}$中的每一个向量都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性表出

定理4.5.1

设$\mathbf{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} \subset \mathbf{R}^n$，$\mathbf{H} = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$
(1) 若**S**中的某个向量α_k是**S**中其余向量的线性组合，则从**S**中去掉α_k后剩余的向量构成的集合仍然是**H**的生成集
(2) 如果$\mathbf{H} \neq \{\mathbf{0}\}$则必有**S**的某个子集是**H**的基

定理4.5.2

矩阵的初等行变换不改变矩阵列之间的线性关系

定理4.5.3

矩阵$\mathbf{A}$的主元列构成$Col\mathbf{A}$的一组基

定理4.5.4

令**H**是$\mathbf{R}^n$的子空间，$\mathbf{S} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p\}$是**H**的生成集，若$m > p$，则中任意m个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$必然线性相关

定理4.5.5

若子空间**H**有一组基包含p个向量，则其任意一组基都包含p个向量

定义4.5.2

$\mathbf{R}^n$的非零子空间**H**的维数$dim\mathbf{H}$定义**H**的任意一组基中所含向量的个数，零空间$\{\mathbf{0}\}$的维数定义为0

定理4.5.6

若**H**是$\mathbf{R}^n$的一个p维子空间：
(1) **H**中任意p个线性无关的向量构成**H**的一组基
(2) 若**H**中p个向量构成**H**的生成集，则这p个向量也是**H**的一组基

定理4.5.7

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$是向量空间**H**中的两个向量组：
(1) $span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} = span\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p\} \iff \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价

(2) $dim\ span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$的极大线性无关组可以作为$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$的一组基

定理4.5.8

若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$是子空间**H**的基，则**H**中的任意向量能且仅能用一种方式表为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$的线性组合

定义4.5.3

设$\mathbf{B}=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\}$是子空间**H**的基，对**H**中的向量**x**，若**x**可以表为
$\mathbf{x}=c_1\beta_1+c_2\beta_2,+\cdots+c_p\beta_p$，则称系数$c_1,c_2,\cdots,c_p$为$x$相对于基**B**的**坐标**，记为

$$(c_1,c_2,\cdots,c_p)^T$$

定义4.5.4

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是n维向量空间$\mathbf{R}^n$的两组基，则基$(II)$可由$(I)$线性表出，即

$$\begin{cases}\eta_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\\ \eta_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\\ \cdots\\ \eta_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\end{cases}$$

或

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

则称$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$到$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$的**过渡矩阵**，其中**A**的第$j$列表示$\eta_j$在基$(I)$下的**坐标**

定理4.5.9

设设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是n维向量空间$\mathbf{R}^n$的两组基，且
$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\mathbf{A}$。若$\alpha$是$\mathbf{R}^n$中的一个向量，$\alpha$在基$(I)$和$(II)$下的坐标分别为$\mathbf{X},\mathbf{Y}$则
(1) 过渡矩阵**A**是可逆矩阵且

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\mathbf{A}^{-1}$$

(2)

$$\mathbf{X}=\mathbf{AY},\mathbf{Y}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$$

4.6矩阵的秩

定义4.6.1

设**A**是m×n型矩阵，**A**的行空间$Row\mathbf{A}$
是**A**的行向量的所有可能的线性组合的集合，记：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\cdots\\\gamma_m\end{bmatrix}$$

则

$$Row\mathbf{A}=span\{\gamma_1,\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}\subset\mathbf{R}^n$$

定理4.6.1

矩阵**A**经初等行变换变为**B**，则**A**和**B**具有相同的行空间。若**B**是行阶梯形矩阵，则**B**的非零行构成**A**的行空间，也是**B**的行空间的一组基

定义4.6.2

在矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$中，任取k行k列，位于这些行与列交叉处的$k^2$个元素按原顺序构成的k阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{i_1j_1}&a_{i_1j_2}&\cdots&a_{i_1j_k}\\a_{i_2j_1}&a_{i_12_2}&\cdots&a_{i_2j_k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i_kj_1}&a_{i_kj_2}&\cdots&a_{i_kj_k}\end{vmatrix}$$

称为**A**的一个**k阶子式**

定义4.6.3

矩阵**A**的非零子式的最高阶数r称为矩阵**A**的**秩**，记作r_A，规定零矩阵的秩为零，且$r_A=r$等价于A存在一个r阶子式不为0，且r+1阶子式都为零

定义4.6.4

矩阵**A**的行向量组的秩称为**A**的**行秩**，**A**的列向量组的秩称为**A**的**列秩**

定理4.6.2

A是m×n型矩阵，则**A**的行秩等于**A**的列秩等于**A**的秩

推论4.6.1

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩

推论4.6.2

设**A**和**B**都是m×n型矩阵，则**A**与**B**等价的充要条件是**A**的秩等于**B**的秩

定理4.6.3 秩定理

若矩阵**A**有n列，则$rank\mathbf{A} = dim\ Nul\mathbf{A} = n$

定理4.6.4

矩阵乘积的秩$r_{AB} \leq min\{r_A, r_B\}$

推论4.6.3

设矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$,**P** 和 **Q**分别是m阶和n阶可逆矩阵：

$$r_A = r_{PA} = r_{AQ} = r_{PAQ}$$

4.7 线性方程组的有解条件及解的结构

定理4.7.1

设**A**是m×n型矩阵，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$有非零解的条件是$r_a < n$

定义4.7.1

齐次线性方程组$\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$的解空间的一组基称为该方程组的一个**基础解系**

若向量组$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_t(I)$是齐次线性方程组$\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$的基础解系，则：
(1) (I)中的每个向量都是$\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$的解
(2) (I)线性无关
(3) $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$的任意一个解都可由向量组(I)线性表出

定理4.7.2

设**A**是m×n形矩阵，$r_A = r < n$,则齐次线性方程组$\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$存在基础解系，且基础解析含有$n-r$个解向量

定理4.7.3

设m×n矩阵**A**是线性方程组$\mathbf{Ax}$=β的系数矩阵，$\tilde{A} = (\mathbf{A}, \beta)$是相应的增广矩阵，则
(1) $\mathbf{Ax}$=β有解 $\iff$ $rank\mathbf{A} = rank\tilde{\mathbf{A}}$
(2) $rank\mathbf{A} = rank\tilde{\mathbf{A}} = n$时,$\mathbf{Ax}$=$\beta$有唯一解
(3) $rank\mathbf{A} = rank\tilde{\mathbf{A}} < n$时,$\mathbf{Ax}$=$\beta$有无穷多解，其通解可以表示为$\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$，其中，$\mathbf{p}$是$\mathbf{Ax}$=$\beta$的一个解，称为**特解**，$\mathbf{v}_h$是$\mathbf{Ax}$=$\beta$的导出组$\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$的全部解

第五章 特征值与特征向量

5.1 矩阵的特征值与特征向量

定义5.1.1

设$\mathbf{A}$为n阶复矩阵，如果存在复数λ和非零向量$\mathbf{X}$使得

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$$

则称λ是$\mathbf{A}$的一个**特征值**，$\mathbf{X}$是$\mathbf{A}$的属于特征值λ的一个**特征向量**

性质5.1.1

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$是$\mathbf{A}$的属于同一个特征值$\lambda$的特征向量，且$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \neq 0$，则$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$也是属于$\lambda$的一个特征向量

性质5.1.2

$\mathbf{X}$是属于$\mathbf{A}$特征值λ的一个特征向量，则$k\mathbf{X}$也是属于$\mathbf{A}$特征值λ的特征向量

性质5.1.3

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \cdots$，$\mathbf{X}_m$是属于$\mathbf{A}$特征值$\lambda$的特征向量，则其线性组合$\sum_{i=1}^{m} k_i\mathbf{X}_i$也是属于$\mathbf{A}$特征值$\lambda$的特征向量

性质5.1.4

λ是$\mathbf{A}$特征值:
(1) 无论$\mathbf{A}$是否可逆，当m是正整数时，λ^m也是特征值
(2) 当$\mathbf{A}$可逆时，λ^{-1}是$\mathbf{A}^{-1}$的特征值
(3) 当$\mathbf{A}$可逆时，对于任意整数m，λ^m是$\mathbf{A}^m$的特征值。特别地，当$m < 0$时，$\mathbf{A}^m$表示$(\mathbf{A}^{-1})^{-m}$

性质5.1.5

λ是$\mathbf{A}$特征值，且

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} k_i x^i$$

是m次多项式，则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(\mathbf{A})$的特征值

性质5.1.6

$\mathbf{X}_0$是$\mathbf{A}$的属于λ_0的特征向量等价于$\mathbf{X}_0$是齐次方程组$(\lambda_0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0$的解

性质5.1.7

λ_0是$\mathbf{A}$的特征值等价于:

$$|\lambda_0\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$$

性质5.1.8

$\varphi(x)$是m次多项式，$\mathbf{A}$是n阶方阵，t是其任意特征值，则存在$\mathbf{A}$的特征值λ，使得$t=\varphi(\lambda)$

定义5.1.2

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_n$为n阶方阵，称

$$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{21} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

为$\mathbf{A}$的**特征矩阵**

定义5.1.3

称$\mathbf{A}$的特征矩阵的行列式

$$f(\lambda)=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

为$\mathbf{A}$的**特征多项式**

定理5.1.1

$\mathbf{A}=(a_{ij})_n$为n阶方阵，其在复数域内的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$满足:
(1) $\mathbf{A}$的n个特征值之和等于$\mathbf{A}$的n个对角线元素之和，即:

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n a_{ii}=tr\mathbf{A}$$

称$tr\mathbf{A}=\sum_{i=1}^n a_{ii}$为$\mathbf{A}$的**迹**
(2) $\mathbf{A}$的n个特征值的乘积等于$\mathbf{A}$的行列式，即

$$\prod_{i=1}^n\lambda_i=|\mathbf{A}|$$

推论5.1.1

n阶方阵可逆等价于其没有零特征值

5.2 矩阵的相似对角化

定义5.2.1

对n阶矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$，若存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$$

则称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$**相似**，记为$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$。可逆矩阵$\mathbf{P}$称为将$\mathbf{A}$化为$\mathbf{B}$的**相似变换矩阵**

> $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ 则$\mathbf{A}^m \sim \mathbf{B}^m$

若方阵$\mathbf{A}$与对角阵$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$相似，则$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$必为其特征值

一般地，若方阵$\mathbf{A}$与对角阵Λ相似，则称$\mathbf{A}$可以**相似对角化**

---

(1) 若两个矩阵相似，则它们：

1. 行列式相等
2. 秩相等
3. 特征值对应相等
4. 特征值的和也就是迹相等

(2) 与单位矩阵相似的矩阵只能是单位矩阵本身

定理5.2.1

方阵$\mathbf{A}$可以对角化的充要条件是$\mathbf{A}$有n个线性无关的特征向量

定理5.2.2

矩阵$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量线性无关

推论5.2.1

若n阶矩阵有n个不同的特征值，则其可以对角化

推论5.2.2

设$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$是矩阵$\mathbf{A}$的m个互异的特征值，则其对应的多个特征向量组成的向量组之间也线性无关

定理5.2.3

n阶矩阵$\mathbf{A}$可对角化的充要条件是：对于$\mathbf{A}$的每个k_i重特征值，恰有对应的k_i个线性无关的特征向量

推论5.2.3

n阶矩阵$\mathbf{A}$可对角化的充要条件是：对于$\mathbf{A}$的每个k_i重特征值λ_i其特征矩阵的秩恰为$n-k$

5.3 实对称矩阵的正交相似对角化

定义5.3.1

设$\alpha=[a_1,a_2\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2\cdots,b_n]^T$称：

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\cdot\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

为向量的**内积**，包含如下性质：
(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma)$
(3) $(k\alpha+\beta)=k(\alpha+\beta)$
(4) $(0,\alpha)=0$
(5) $(\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i,\alpha)$

定义5.3.2

称$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量的**长度**，长度为1的向量称为**单位向量**

定义5.3.3

两非零向量α,β的夹角定义为$\theta=arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，称两向量**正交**

定义5.3.4

定义了内积的实向量空间$\mathbf{R}^n$称为**n维欧几里得空间**，满足：
(1) 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$不含领先了，且向量组中的向量两两正交，则称这个向量是一个**正交组**
(2) 由单位向量构成的正交组称为**规范正交组**
(3) $\mathbf{R}^n$中的向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$满足：

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

则称该向量组为$\mathbf{R}^n$中的一个**规范正交基**

定义5.3.5

设n阶实对称矩阵$\mathbf{Q}$足$\mathbf{QQ}^T=\mathbf{E}$ 则称其为一个**正交矩阵**

定理5.3.1

实对称矩阵的特征值都是实数

定理5.3.2

实对称矩阵的不同特征值的对应的特征向量不仅线性无关，而且正交

定理5.3.3

n阶实对称矩阵正交相似于对角阵

推论5.3.1

设$\mathbf{A}$为n阶实对称矩阵，λ是$\mathbf{A}$的特征多项式的k重零点，则$Rank(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=n-k$，从而对于$\lambda$的特征向量恰好有$k$个

定理5.3.4

用**施密特正交化**构造规范正交组

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta \\ \cdots \end{cases}$$

之后

$$\begin{cases} \gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 \\ \gamma_2=\frac{2}{\|\beta_2\|}\beta_2 \\ \gamma_3=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_3 \\ \cdots \end{cases}$$

> **QR分解**：任何一个n阶可逆矩阵都可以分解为一个正交矩阵$\mathbf{Q}$和一个上三角矩阵$\mathbf{R}$

第六章 二次型

6.1 二次型及其矩阵表示

定义6.1.1

称系数属于数域P的二次齐次多项式

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_22x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x$

为实数域上的一个**n元二次型**

称只含有平方项的二次型为**标准二次型**，简称**标准型**

令$a_{ij}=a_{ji}$可以得到

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$$

其中$\mathbf{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$称为$f$的**矩阵**，$f$称为实对称矩阵$\mathbf{A}$的**二次型**，$\mathbf{A}$的秩称为$f$的秩

#math
#线性代数