



CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

CENTRO DE INGENIERÍA Y DESARROLLO INDUSTRIAL

INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES - UNAM

NOTAS DEL CURSO:

DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

Posgrado Interinstitucional en Ciencia y Tecnología (PICyT)

Santiago de Querétaro, Qro.

Enero de 2021.

Elaboró: José Núñez González, Saúl Piedra González, James Pérez Barrera

Índice general

1. Generalidades del método de Volumen Finito	1
1.1. Descripción del método	1
1.1.1. Discretización de la ecuación general	2
1.2. Implementación de condiciones de frontera	6
1.2.1. Condición del primer tipo o Dirichlet	6
1.2.2. Condición del segundo tipo o Neumann	7
2. El método de volumen finito para problemas 1D	9
2.1. Programa 1: Difusión de calor en una pared delgada	9
2.2. Programa 2: Advección-Difusión unidimensional	11
2.2.1. El esquema UPWIND	13
2.3. Tarea 1: Volumen finito en 1D	14
2.3.1. Conducción de calor en un medio compuesto	15
2.3.2. Conducción de calor con frontera convectiva	15
2.3.3. Conducción de calor en un tubo	16
3. El método de volumen finito para problemas 2D	19
3.1. Programa 3: Difusión en dos dimensiones	19
3.2. Programa 4: Advección-difusión en dos dimensiones	20
3.3. Programa 5: Advección-difusión dependiente del tiempo en dos dimensiones .	22
3.4. Tarea 2: Volumen finito en 2D	23
3.4.1. Ecuación de Laplace en 2D	23
3.4.2. Difusión en 2D con condición del tercer tipo	23
3.4.3. Advección-Difusión en 2D	23
4. Solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes	25
4.1. Algunos aspectos numéricos de las ecuaciones de Navier-Stokes	25
4.2. Desacople Presión-Velocidad	27
4.3. Programa 6: Lid-Driven Cavity Flow	31
4.4. Programa 7: Flujo en un canal abierto	33
4.5. Programa 8: Flujo alrededor de un obstáculo sólido	34
4.6. Programa 9: Dipolo magnético	35
4.7. Programa 10: Esquema de proyección (Lid-driven cavity flow)	36
4.7.1. El algoritmo de proyección	38

4.8. Programa 11: Convección natural	39
4.8.1. La aproximación de Boussinesq	40
5. El método de volumen finito en coordenadas cilíndricas	43
5.1. Descripción del método	43
5.1.1. Discretización de la ecuación general	45
5.2. Implementación de condiciones de frontera	47
6. Problemas de FV en coordenadas cilíndricas	49
6.1. Programa 12: Difusión en coordenadas cilíndricas	49
6.2. Programa 13: Advección-Difusión en coordenadas cilíndricas	50
6.3. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas	51
6.4. Programa 14: Lid-driven cavity flow en coordenadas cilíndricas	53
6.5. Programa 15: Convección natural en coordenadas cilíndricas	53
Bibliografía	55

Generalidades del método de Volumen Finito[‡]

En este Capítulo se describe brevemente el método de volumen finito para solución de ecuaciones diferenciales parciales. Se comienza con la discretización de la ecuación general que sirve para modelar distintos fenómenos físicos de interés en el estudio de fluidos, y se finaliza con la implementación de distintos tipos de condiciones de frontera que complementan las situaciones físicas de interés.

1.1. Descripción del método

En los problemas de mecánica de fluidos interesa modelar el comportamiento de los fluidos cuando están sujetos a diferentes condiciones físicas como gradientes de presión, temperatura, fuerzas de flotación, diferencias de concentración, movimiento de partes mecánicas, entre otras. De forma general, las cantidades de interés en problemas de fluidos (cantidad de movimiento, energía, masa y especies químicas) pueden ser transportadas por dos mecanismos distintos, *difusión* o *advección*, mismos que son muy bien descritos por la *Ecuación General de Advección-Difusión*:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S, \quad (1.1)$$

donde ϕ es una variable dependiente generalizada, Γ es un coeficiente de difusión generalizado, \mathbf{u} es un campo de velocidad y S representa un término fuente.

Nótese que, dependiendo de la identidad física de ϕ , la Ecuación (1.1) puede expresarse como la ecuación de balance de cantidad de movimiento (si ϕ es una componente de la velocidad), la ecuación de energía (si ϕ es la temperatura) o una ecuación de balance de alguna especie química (si ϕ es la concentración de dicha especie), por lo cual resolver dicha ecuación general es equivalente a resolver cualquiera de las ecuaciones mencionadas.

Nos interesa resolver esta ecuación general, es decir, hallar una función $\phi(x, y, z, t)$ que satisfaga la Ecuación (1.1) sujeta a algún conjunto de condiciones iniciales y de frontera dado. De manera general, sólo es posible hallar soluciones exactas para ciertas condiciones muy particulares. Incluso si es posible hallar dichas soluciones, puede ser que el proceso de obten-

[‡]El método de Volumen Finito puede encontrarse detalladamente descrito en Versteeg and Malalasekera (1995).

ción sea largo y tedioso, por lo cual es común recurrir a *soluciones aproximadas* que pueden ser obtenidas utilizando diferentes metodologías.

Hallar una solución aproximada implica obtener una distribución de la variable dependiente cuyos valores solamente se conocen en ciertos puntos del dominio, esto es

$$\phi(x, y, z, t) \approx \phi_N(x_i, y_j, z_k, t_n) = \phi_{i,j,k}^n, \quad (1.2)$$

para todo $1 \leq i \leq nx$, $1 \leq j \leq ny$, $1 \leq k \leq nz$, $t_n \geq 0$, siendo nx , ny y nz el número de puntos en las respectivas direcciones. Para el caso cartesiano bidimensional, un dominio numérico se puede visualizar mediante un *mallado* como el mostrado en la Figura 1.1.

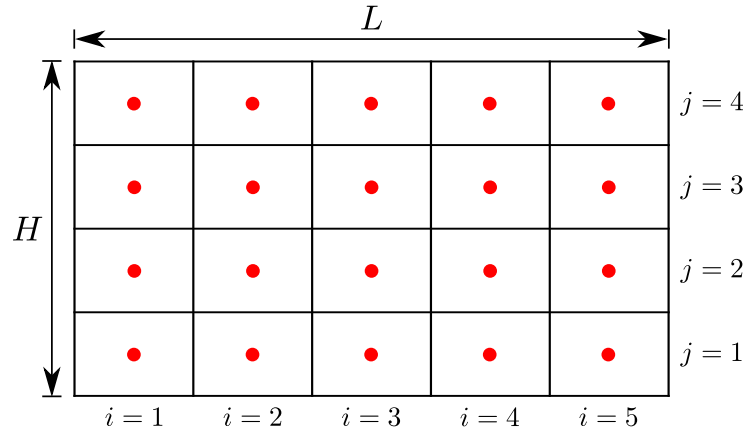


Figura 1.1: Mallado de un dominio bidimensional.

En la figura anterior se ha realizado un mallado simple, en el cual el dominio físico se ha dividido en un número determinado de celdas o *volúmenes de control* del mismo tamaño. Aunque esto no siempre tiene que ser así, por simplicidad, en este curso emplearemos este tipo de mallas que se denominan *estructuradas*.

1.1.1. Discretización de la ecuación general

El método de Volumen Finito consiste en aproximar la solución de la Ecuación Diferencial integrándola en cada uno de los volúmenes de control del dominio numérico. Para realizar dicho análisis se considerará la notación mostrada en la Figura 1.2 para cada uno de los volúmenes de control.

Las letras N , S , E y W (mayúsculas) representan los centros de los volúmenes norte, sur, este y oeste, respectivamente, del volumen central P ; las letras minúsculas se emplean para denotar el punto central de las respectivas fronteras del volumen central, cuyo tamaño es $\Delta V = \Delta x \Delta y$.

Con la notación anterior se procederá a integrar cada uno de los términos de la ecuación general de advección-difusión.

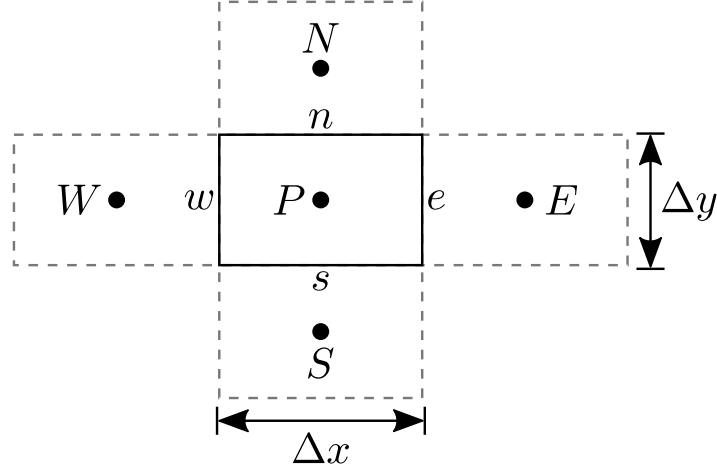


Figura 1.2: Notación empleada para los volúmenes de control del dominio numérico.

Término temporal:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \approx \frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} \Delta V, \quad (1.3)$$

donde ϕ_P es el valor de la variable dependiente en el punto P en el instante de tiempo actual, en tanto ϕ_P^0 se refiere al instante de tiempo anterior. Una notación similar se usará en las siguientes aproximaciones.

Para el término convectivo, la integral de volumen puede convertirse en una integral de superficie mediante la aplicación del *Teorema de Gauss*:

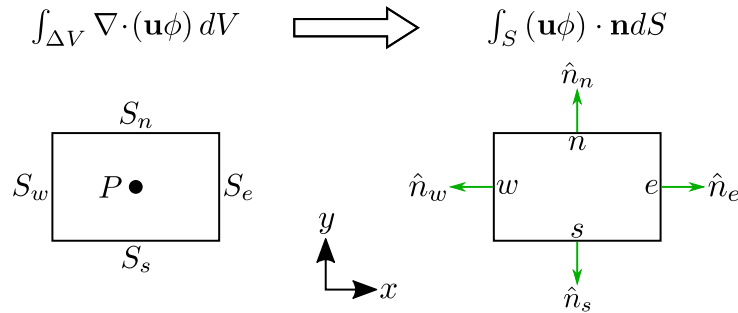


Figura 1.3: Aplicación del teorema de Gauss para el término convectivo.

En la Figura 1.3, S_n , S_s , S_e y S_w son las áreas superficiales de las respectivas fronteras del volumen de control de interés. Eliendo que el vector normal \mathbf{n} *siempre apunta hacia afuera* del volumen de control, es fácil notar que

$$\hat{n}_e = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{n}_w = -\hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{n}_n = \hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{n}_s = -\hat{\mathbf{j}}. \quad (1.4)$$

Para un flujo bidimensional $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}}$, el término convectivo puede aproximarse mediante

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS &\approx (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e S_e + (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_w \cdot \hat{\mathbf{n}}_w S_w \\ &\quad + (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_n \cdot \hat{\mathbf{n}}_n S_n + (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_s \cdot \hat{\mathbf{n}}_s S_s \\ &= (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_e \cdot (\hat{\mathbf{i}}) S_e + (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_w \cdot (-\hat{\mathbf{i}}) S_w \\ &\quad + (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_n \cdot (\hat{\mathbf{j}}) S_n + (u\phi\hat{\mathbf{i}} + v\phi\hat{\mathbf{j}})_s \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) S_s, \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx u_e \phi_e S_e - u_w \phi_w S_w + v_n \phi_n S_n - v_s \phi_s S_s. \quad (1.5)$$

En la ecuación anterior, los valores de la variable dependiente se encuentran localizados en las fronteras del volumen de control, pero a nosotros nos interesa conocer ϕ en los centros del volumen central y sus vecinos, para lo cual se emplea el *esquema central*:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2}, \quad \phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}, \quad \phi_s = \frac{\phi_P + \phi_S}{2}, \quad (1.6)$$

con lo cual la Ecuación 1.5 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} &u_e S_e \left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2} \right) - u_w S_w \left(\frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right) + v_n S_n \left(\frac{\phi_N + \phi_P}{2} \right) - v_s S_s \left(\frac{\phi_P + \phi_S}{2} \right) \\ &= \frac{u_e S_e}{2} \phi_E - \frac{u_w S_w}{2} \phi_W + \frac{v_n S_n}{2} \phi_N - \frac{v_s S_s}{2} \phi_S + \frac{\phi_P}{2} (u_e S_e - u_w S_w + v_n S_n - v_s S_s). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si el fluido de interés es *incompresible*, la forma discreta de la ecuación de continuidad será

$$\int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx u_e S_e - u_w S_w + v_n S_n - v_s S_s = 0, \quad (1.8)$$

con lo cual, el término convectivo se aproxima mediante la ecuación

$$\int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx \frac{u_e S_e}{2} \phi_E - \frac{u_w S_w}{2} \phi_W + \frac{v_n S_n}{2} \phi_N - \frac{v_s S_s}{2} \phi_S. \quad (1.9)$$

La integral del término difusivo también se puede expresar como una integral de superficie mediante el teorema de Gauss:

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_S (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e S_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w S_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n S_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s S_s,$$

donde las derivadas de ϕ en las fronteras del volumen de control se pueden calcular mediante *diferencias centrales*:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \approx \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x},$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n \approx \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s \approx \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}.$$

Sustituyendo lo anterior en el término difusivo se obtiene

$$\int_S (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx \Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \Gamma_w S_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + \Gamma_n S_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} - \Gamma_s S_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}. \quad (1.10)$$

Finalmente, el término fuente se puede aproximar considerando el valor promediado en el volumen de control

$$\int_{\Delta V} S dV \approx \bar{S}_P \Delta V. \quad (1.11)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (1.3), (1.9), (1.10) y (1.11) en la Ecuación general (1.1) se obtiene la *forma discreta* de la ecuación de advección-difusión:

$$\underbrace{\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} \Delta V}_{\text{Término temporal}} + \underbrace{\frac{u_e S_e}{2} \phi_E - \frac{u_w S_w}{2} \phi_W + \frac{v_n S_n}{2} \phi_N - \frac{v_s S_s}{2} \phi_S}_{\text{Término convectivo}} = \underbrace{\Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \Gamma_w S_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + \Gamma_n S_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} - \Gamma_s S_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}}_{\text{Término difusivo}} + \underbrace{\bar{S}_P \Delta V}_{\text{Término fuente}}. \quad (1.12)$$

Agrupando los términos que contienen a la variable dependiente, y luego de un poco de álgebra es posible expresar la ecuación anterior en una forma más condensada:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P, \quad (1.13)$$

donde los coeficientes en dicha ecuación son

$$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}; \quad a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad (1.14)$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n S_n}{\Delta y} - \frac{v_n S_n}{2}; \quad a_S = \frac{\Gamma_s S_s}{\Delta y} + \frac{v_s S_s}{2}, \quad (1.15)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}; \quad S_P = \bar{S}_P \Delta V + \phi_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (1.16)$$

Nótese que el sistema anterior es un *sistema de ecuaciones lineales*, de lo cual podemos decir que los métodos de bajo orden (volumen finito, diferencial finitas, elemento finito) consisten en convertir la ecuación diferencial parcial original (sea ésta lineal o no lineal) en un sistema de ecuaciones lineales cuyas variables son los valores de ϕ en los puntos correspondientes al mallado elegido.

1.2. Implementación de condiciones de frontera

Para poder resolver la ecuación general de advección-difusión de manera aproximada, solamente hace falta implementar las condiciones de frontera de interés para nuestro problema particular, mismas que pueden corresponder a diferentes situaciones físicas, pero que pueden modelarse, de manera general, mediante tres distintos tipos, a saber, *Dirichlet*, *Neumann* o *Robin*. Por ahora solamente se describirán las primeras dos.

La Figura 1.4 muestra un volumen de control adyacente a la frontera este de un dominio numérico. Como se puede apreciar, debido al mallado, la variable ϕ_E (en rojo) se encuentra fuera de nuestro dominio de interés, por lo cual debemos aproximar su valor utilizando la información conocida debida a las condiciones de frontera del problema.

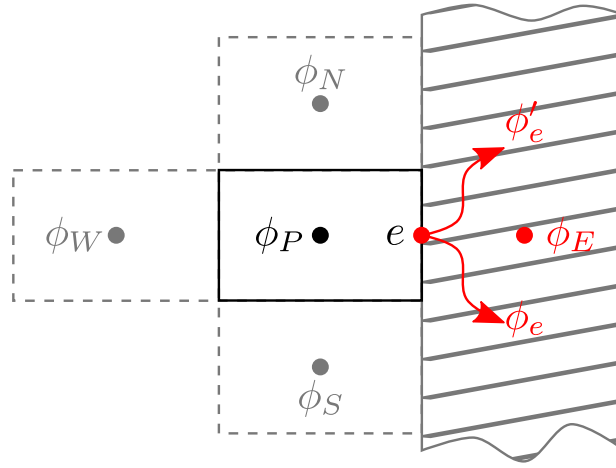


Figura 1.4: Volumen de control adyacente a la frontera este.

1.2.1. Condición del primer tipo o Dirichlet

La condición de frontera más sencilla, denominada del primer tipo, consiste en conocer el valor de la variable dependiente en la frontera, esto es, ϕ_e es conocida de antemano. Viendo la Figura 1.4, es fácil notar que el valor en la frontera se puede calcular mediante un promedio

$$\phi_e \approx \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \Rightarrow \phi_E \approx 2\phi_e - \phi_P. \quad (1.17)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la Ecuación (1.13) se llega a

$$a_P \phi_P = a_E (2\phi_e - \phi_P) + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P, \quad (1.18)$$

Simplificando es posible reescribir lo anterior como

$$(a_P + a_E) \phi_P = a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P + 2a_E \phi_e. \quad (1.19)$$

Para efectos prácticos, la ecuación anterior se puede expresar de la forma

$$a_P^* \phi_P = a_E^* \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P^*, \quad (1.20)$$

donde

$$\boxed{a_P^* = a_P + a_E, \quad S_P^* = S_P + 2a_E \phi_e, \quad a_E^* = 0.} \quad (1.21)$$

Nótese que la Ecuación (1.20) es estructuralmente igual a la Ecuación (1.13), con lo cual, la manera en la que se implementarán las condiciones de frontera será simplemente haciendo modificaciones a ciertos coeficientes de los volúmenes de control adyacentes a alguna frontera del dominio.

1.2.2. Condición del segundo tipo o Neumann

Esta condición consiste en que se conoce el valor de la derivada de la variable dependiente en la frontera del dominio (ϕ_e' es conocida). De la Figura 1.4 y empleando diferencias centrales, la aproximación de esta condición será

$$\phi_e' \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \Rightarrow \phi_E \approx \phi_P + \phi_e' \Delta x. \quad (1.22)$$

Sustituyendo en la Ecuación (1.13) se obtiene

$$a_P \phi_P = a_E (\phi_P + \phi_e' \Delta x) + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P. \quad (1.23)$$

Luego de simplificar se llega a

$$(a_P - a_E) \phi_P = a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P + a_E \phi_e' \Delta x, \quad (1.24)$$

que puede reescribirse en la forma de la Ecuación (1.20):

$$a_P^* \phi_P = a_E^* \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P^*,$$

siendo

$$\boxed{a_P^* = a_P - a_E, \quad S_P^* = S_P + a_E \phi_e' \Delta x, \quad a_E^* = 0.} \quad (1.25)$$

Ejercicio 1: Utilizando el análisis descrito, halle los coeficientes modificados para las tres fronteras restantes considerando ambos tipos de condiciones de frontera.

Finalmente, es muy importante notar algunas propiedades del sistema modelo (Ec. 1.13) que se empleará en el resto del curso, para lo cual

Ejercicio 2: Revisar el ejemplo 3.4 (página 46) de Andersson et al. (2012). Prestar especial atención a la ecuación 3.17 de dicha referencia.

El método de volumen finito para problemas unidimensionales

En este Capítulo se presenta el método de volumen finito para problemas en una sola dirección. Se comienza con una breve descripción de los dos primeros programas a resolver en el curso, uno de ellos siendo puramente difusivo, en tanto el segundo incluye la parte advectiva. Finalmente se plantean una serie de ejercicios de tarea que entrañan algunas dificultades extra, como lo son, condiciones de frontera del tercer tipo o un coeficiente difusivo que varía según la posición. En todos los casos, los ejercicios de tarea de este capítulo cuentan con solución analítica que servirá para comprobar que la implementación numérica es adecuada.

2.1. Programa 1: Difusión de calor en una pared delgada

Considere una pared delgada sometida a una diferencia de temperaturas constante. El lado izquierdo se encuentra a una temperatura $T_A = 100$ K, en tanto la pared derecha se mantiene a $T_B = 200$ K. El grosor de la pared es $L = 0.02$ m y tiene una conductividad térmica $k = 0.5$ W/(m K). Dentro de la pared existe una generación volumétrica de calor $\dot{q} = 1000$ kW/m³. La Figura 2.1 muestra un esquema del problema descrito.

Bajo estas condiciones, si el área transversal de la pared es mucho mayor que su grosor, el problema se puede considerar como unidimensional, para lo cual se puede determinar el perfil de temperatura $T(x)$ dentro de la pared.

El fenómeno se rige por la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0. \quad (2.1)$$

Solución analítica: Dada la simplicidad del problema, es posible integrar la Ecuación (2.1) dos veces y aplicar las respectivas condiciones de frontera para obtener una expresión simple para el perfil de temperatura:

$$T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{L}x - \frac{\dot{q}}{2k}x(x - L). \quad (2.2)$$

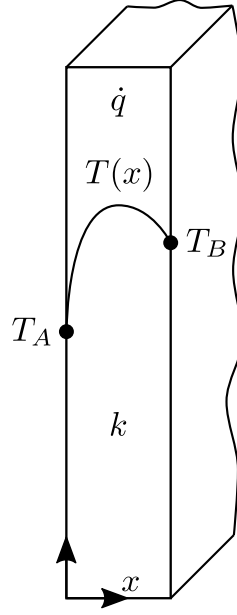


Figura 2.1: Una pared sometida a una diferencia de temperaturas constante.

Dicha solución servirá para comprobar que la solución que se obtendrá de forma numérica es correcta.

Solución numérica: Integrando la Ecuación (2.1) en un volumen de control (intervalo de tamaño Δx para el caso 1D, ver Figura 2.2) se obtiene

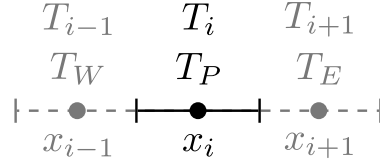


Figura 2.2: Discretización 1D.

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} \dot{q} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_S \left(k \frac{dT}{dx} \right) \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \bar{q} \Delta V = 0,$$

$$k_e S_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e - k_w S_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{q} \Delta V = 0,$$

Utilizando diferencias centrales, lo anterior se convierte en

$$k_e S_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - k_w S_w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) + \bar{q} \Delta V = 0,$$

lo cual puede simplificarse a

$$\overbrace{\left(\frac{k_e S_e}{\Delta x} + \frac{k_w S_w}{\Delta x} \right)}^{a_P} T_P = \overbrace{\frac{k_e S_e}{\Delta x}}^{a_E} T_E + \overbrace{\frac{k_w S_w}{\Delta x}}^{a_W} T_W + \overbrace{\bar{q} \Delta V}^{S_P}. \quad (2.3)$$

La implementación de las condiciones de frontera es directa, simplemente hay que corregir los coeficientes de las celdas adyacentes a las fronteras como se mostró en el Capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \text{Oeste: } a_P^* &= a_P + a_W, & S_P^* &= S_P + 2a_W T_A, & a_W^* &= 0, \\ \text{Este: } a_P^* &= a_P + a_E, & S_P^* &= S_P + 2a_E T_B, & a_E^* &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para obtener la solución numérica, hace falta resolver el sistema de ecuaciones lineales, para lo cual existen diferentes maneras, tanto directas como numéricas. De manera general preferiremos utilizar métodos iterativos para obtener soluciones aproximadas de los sistemas que se irán obteniendo durante el curso. Uno de los métodos iterativos más sencillos es el *método de Jacobi*:

$$T_P^{k+1} = \frac{a_E T_E^k + a_W T_W^k + S_P}{a_P}. \quad (2.4)$$

La Figura 2.3 muestra la comparación entre las dos soluciones para este problema en particular.

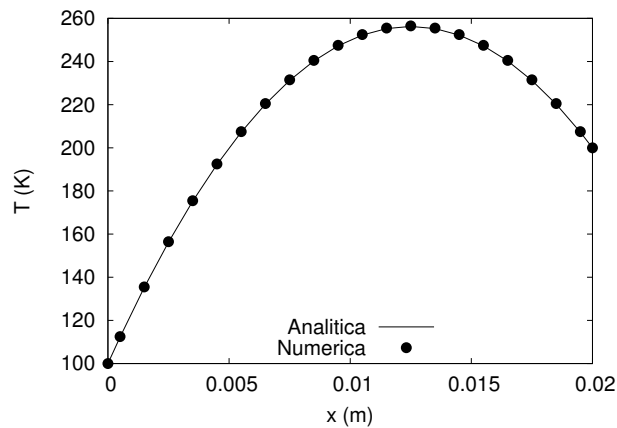


Figura 2.3: Comparación entre la solución analítica (línea sólida) y la solución numérica (puntos) para el problema de esta sección.

2.2. Programa 2: Advección-Difusión unidimensional

Ahora se procederá a agregar un término extra a la ecuación a resolver. Considere la transferencia de calor que se lleva a cabo debido a un fluido que se mueve con velocidad constante U . En esta situación, además del término difusivo presente en el modelo matemático, también se debe incluir el término advectivo, de tal forma que la ecuación diferencial adimensional que rige al fenómeno es

$$\frac{d}{dx} (\bar{U}T) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{Pe} \frac{dT}{dx} \right), \quad (2.5)$$

donde $\bar{U} = 1$ es la velocidad adimensionalizada y $Pe = UL/\alpha$ es el número de Péclet, el cual mide la razón de transferencia de calor por advección comparada con la transferencia de

calor por difusión. De manera adimensional, las condiciones de frontera son

$$T(0) = 1, \quad T(1) = 0. \quad (2.6)$$

Solución analítica: Integrando dos veces la Ecuación 2.5 e implementando las condiciones de frontera (Ec. 2.6) se obtiene:

$$T(x) = \frac{e^{Pe\bar{U}x} - e^{Pe\bar{U}}}{1 - e^{Pe\bar{U}}}. \quad (2.7)$$

Solución numérica: Para este caso, el sistema de ecuaciones lineales a resolver es muy similar al del caso meramente difusivo, sólo que los coeficientes del sistema serán

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad S_P = 0. \quad (2.8)$$

Las condiciones de frontera son del mismo tipo que en el problema anterior, por lo cual su implementación numérica será la misma. El sistema de ecuaciones lineales puede resolverse utilizando el método de Jacobi.

La Figura 2.4 muestra la solución numérica obtenida para dos números de Péclet distintos. En la imagen izquierda puede apreciarse que la solución es muy suave cuando Pe es pequeño ($Pe = 1$), sin embargo, cuando los efectos advectivos son muy intensos ($Pe = 100$) claramente se puede ver que la solución no es suave, ya que la línea se quiebra en el último volumen de control para satisfacer la condición de frontera.

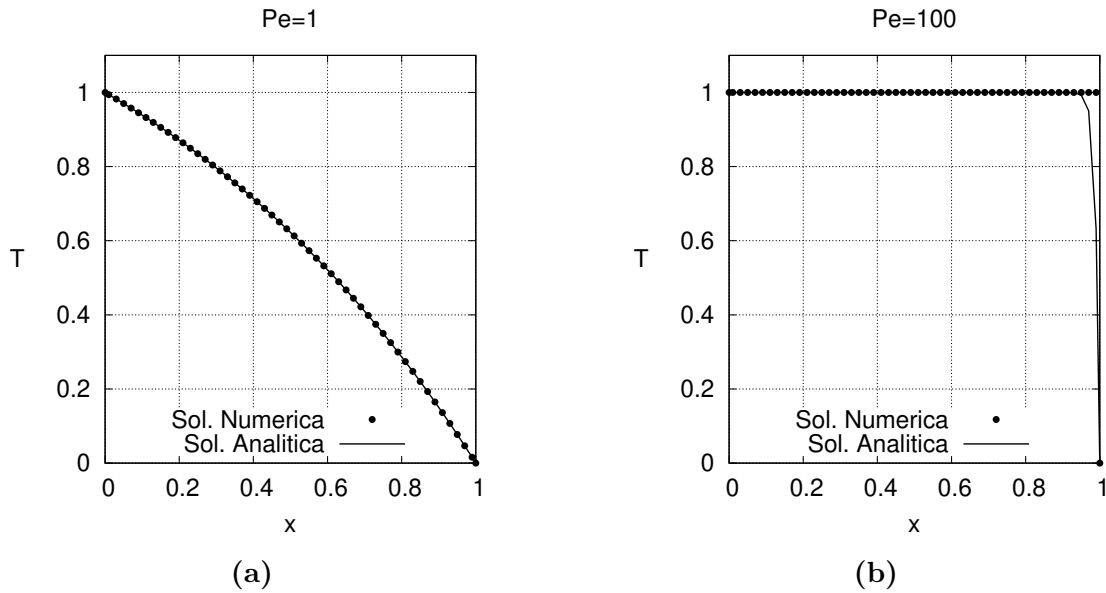


Figura 2.4: Comparación de la solución analítica (línea sólida) y la solución numérica (puntos) de la ecuación de advección-difusión 1D para dos números de Péclet distintos.

2.2.1. El esquema UPWIND

El comportamiento anterior se debe a que, para el caso de Péclet grande, la transferencia advectiva está muy favorecida hacia una dirección (derecha en este caso). Si recordamos, al discretizar el término convectivo, se llegó a

$$\int_S (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dS \approx u_e T_e S_e - u_w T_w S_w, \quad (2.9)$$

y luego se utilizó el esquema central para aproximar los valores T_e y T_w en las fronteras del volumen de control, es decir,

$$T_e \approx \frac{T_E + T_P}{2}, \quad T_w \approx \frac{T_P + T_W}{2}.$$

En las expresiones anteriores, se le está dando igual peso a las temperaturas que se encuentran a la izquierda y derecha de la respectiva frontera, sin embargo, si el fluido está muy direccionado, lo anterior no es adecuado, por lo cual se deben buscar maneras alternativas para aproximar los valores en las fronteras. Una forma sencilla de hacerlo es utilizar el *esquema UPWIND*, en el cual básicamente se considera que si el flujo va de izquierda a derecha ($\bar{U} > 0$), entonces las fronteras reciben influencia mayoritariamente del volumen de control que se encuentra a su izquierda. Caso contrario si el fluido se mueve hacia la derecha ($\bar{U} < 0$). La Figura 2.5 esquematiza esta situación.

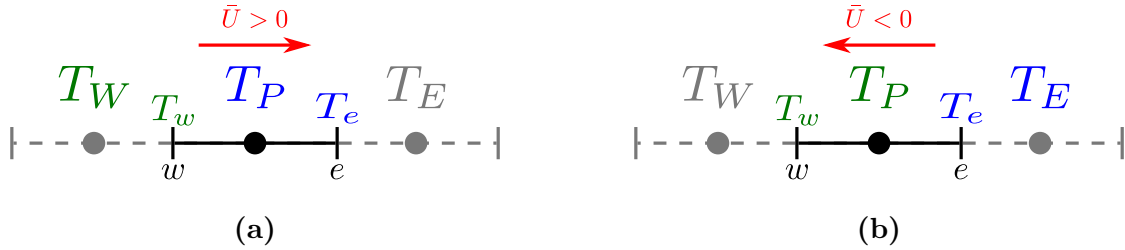


Figura 2.5: Esquema UPWIND.

Entonces la ecuación a resolver será

$$\overbrace{u_e S_e T_e - u_w S_w T_w}^{\text{Término convectivo}} = \overbrace{\Gamma S_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \Gamma S_w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right)}^{\text{Término difusivo}} + S_P. \quad (2.10)$$

De la Figura 2.5 puede verse que la aproximación de los valores de la temperatura en las fronteras del volumen de control será

$$T_w \approx T_W, \quad T_e \approx T_P, \quad \text{Si } \bar{U} > 0,$$

$$T_w \approx T_P, \quad T_e \approx T_E, \quad \text{Si } \bar{U} < 0.$$

Cualquiera que sea el caso, el sistema de ecuaciones lineales resultante tendrá la forma

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_P, \quad (2.11)$$

donde los coeficientes variarán según la dirección del flujo:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma S_e}{\Delta x}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + u_w S_w, \quad a_P = a_E + a_W, \quad \text{Si } \bar{U} > 0, \\ a_E &= \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - u_e S_e, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad \text{Si } \bar{U} < 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse de manera más condensada mediante la ecuación

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - \min(u_e S_e, 0), \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + \max(u_w S_w, 0). \quad (2.12)$$

La Figura 2.6 muestra la solución numérica obtenida para $Pe = 100$ implementando el esquema UPWIND. Puede verse que hay una mejoría notable con respecto al esquema central.

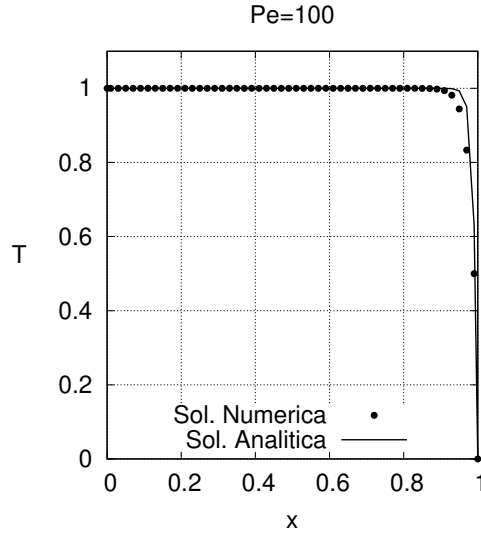


Figura 2.6: Solución numérica de la ecuación de advección-difusión 1D utilizando el esquema UPWIND ($Pe = 100$).

2.3. Tarea 1: Volumen finito en 1D

Resolver cada uno de los siguientes problemas mediante la implementación del método de volumen finito.

2.3.1. Conducción de calor en un medio compuesto

Una pared de espesor total $2L$ está compuesta por dos materiales con conductividades térmicas k_1 y k_2 , respectivamente. Si la pared se somete a dos temperaturas distintas T_A y T_B en sus extremos y dentro de la pared existe una generación de calor volumétrica \dot{q} , halle numéricamente el perfil de temperaturas como función de la coordenada x dentro de la pared.

La ecuación que rige este fenómeno de difusión es

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0. \quad (2.13)$$

Considere

$$k_1 = 1 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad k_2 = 10 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad (2.14)$$

$$\dot{q} = 1 \times 10^5 \text{ W/m}^3, \quad L = 1 \text{ cm}, \quad (2.15)$$

$$T_A = -1 \text{ K}, \quad T_B = 0.5 \text{ K}. \quad (2.16)$$

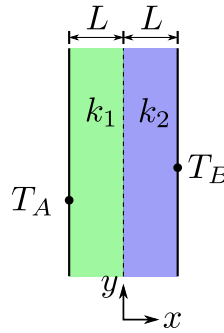


Figura 2.7: Pared compuesta por dos materiales.

Compare los resultados numéricos con la solución analítica:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{k_1 T_A + k_2 T_B}{k_1 + k_2} + \frac{T_B - T_A}{L} \frac{k_2}{k_1 + k_2} x - \frac{\dot{q}}{2} (x + L) \left(\frac{x}{k_1} - \frac{2L}{k_1 + k_2} \right), & -L \leq x \leq 0, \\ \frac{k_1 T_A + k_2 T_B}{k_1 + k_2} + \frac{T_B - T_A}{L} \frac{k_1}{k_1 + k_2} x + \frac{\dot{q}}{2} (L - x) \left(\frac{x}{k_2} + \frac{2L}{k_1 + k_2} \right), & 0 < x \leq L. \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3.2. Conducción de calor con frontera convectiva

Una pared sólida de grosor L está en contacto con el aire del ambiente. La superficie interior de la pared se encuentra a una temperatura T_0 , en tanto que la temperatura del aire, muy lejos de la pared, es T_∞ , si la conductividad térmica de la pared es k y el coeficiente convectivo de transferencia de calor en el aire es h , determine el perfil de temperatura dentro de la

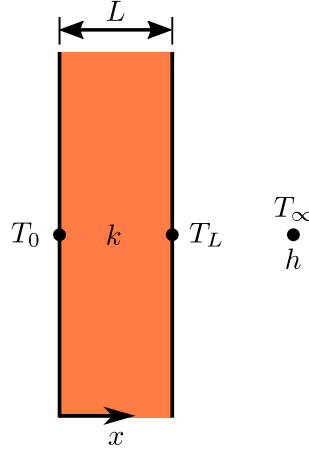


Figura 2.8: Una pared expuesta a una condición convectiva.

pared considerando que hay una generación de calor volumétrica \dot{q} . La Figura 2.8 muestra el esquema de esta situación.

La ecuación que rige a este fenómeno difusivo es

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0. \quad (2.18)$$

Considere

$$L = 0.2 \text{ m}, \quad k = 2 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad h = 10 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}, \quad (2.19)$$

$$\dot{q} = 1.5 \times 10^5 \text{ W/m}^3, \quad T_0 = 300 \text{ K}, \quad T_\infty = 100 \text{ K}. \quad (2.20)$$

Las condiciones de frontera son

$$T(0) = T_0, \quad -k \frac{dT}{dx} \bigg|_{x=L} = h (T_L - T_\infty). \quad (2.21)$$

Compare sus resultados con la solución analítica:

$$T(x) = T_0 - \frac{\dot{q}}{2k} x^2 - \left[\frac{T_0 - T_\infty - \dot{q}L \left(\frac{L}{2k} + \frac{1}{h} \right)}{\frac{k}{h} + L} \right] x. \quad (2.22)$$

¿Cuál es la temperatura de la pared exterior, T_L ?

2.3.3. Conducción de calor en un tubo

Considere un tubo cilíndrico de longitud L , radio interno r_1 y radio externo r_2 . El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura constante T_0 , en tanto el extremo derecho se encuentra térmicamente aislado. Tanto en la parte interna como externa hay intercambio de calor por convección. La Figura 2.9 muestra un esquema del fenómeno físico.

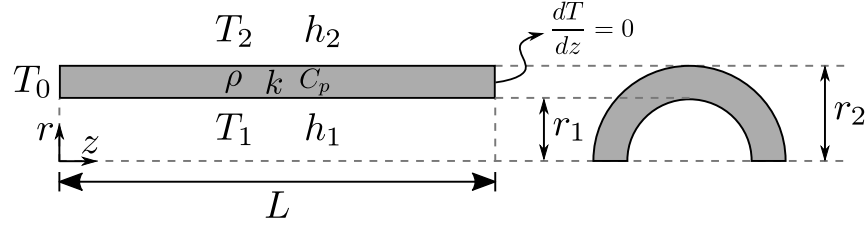


Figura 2.9: Un tubo circular con transferencia de calor convectiva interna y externa.

Considerando que la conducción de calor ocurre en la dirección axial, la ecuación de energía será

$$\rho C_p A_T \frac{\partial T}{\partial t} = k A_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + S, \quad (2.23)$$

donde A_T es el área transversal perpendicular a la dirección z y el término fuente S debe incluir la contribución convectiva dentro y fuera del tubo. La Figura 2.10 muestra los flujos de calor que ingresan al tubo debido al contacto con el fluido.

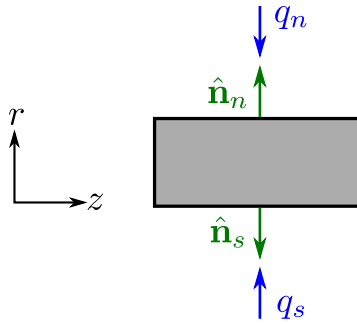


Figura 2.10: Flujos convectivos hacia el tubo.

De acuerdo a la figura, los flujos convectivos totales en el tubo son

$$\mathbf{q}_n = -h_2 A_n (T - T_2) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad \mathbf{q}_s = h_1 A_s (T - T_1) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (2.24)$$

siendo $A_n = 2\pi r_2 L$ y $A_s = 2\pi r_1 L$ las áreas laterales interna y externa del tubo, respectivamente, con lo cual, el término fuente por unidad de longitud será

$$S = \frac{\mathbf{q}_n \cdot \hat{\mathbf{n}}_n}{L} + \frac{\mathbf{q}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}_s}{L} = -2\pi h_2 r_2 (T - T_2) - 2\pi h_1 r_1 (T - T_1). \quad (2.25)$$

Considerando que el sistema se encuentra en estado estacionario y sustituyendo la Ecuación (2.25) en la Ecuación (2.23) se obtiene

$$k A_T \frac{d^2 T}{dz^2} - 2\pi h_2 r_2 (T - T_2) - 2\pi h_1 r_1 (T - T_1) = 0, \quad (2.26)$$

la cual debe cumplir las condiciones

$$T(0) = T_0, \quad \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L} = 0. \quad (2.27)$$

Considere

$$T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T_1 = 50 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T_2 = 60 \text{ }^\circ\text{C}, \quad r_1 = 7 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad r_2 = 1 \times 10^{-2} \text{ m},$$

$$L = 1 \text{ m}, \quad h_1 = 10 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}, \quad h_2 = 100 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}, \quad k = 400 \text{ W/m }^\circ\text{C}.$$

La solución analítica es

$$T(z) = (T_0 - \bar{T}) \frac{\cosh[m(L - z)]}{\cosh(mL)} + \bar{T}, \quad (2.28)$$

con

$$m^2 = \frac{2\pi h_2 r_2 + 2\pi h_1 r_1}{k A_T}, \quad \bar{T} = \frac{h_2 r_2 T_2 + h_1 r_1 T_1}{h_2 r_2 + h_1 r_1}. \quad (2.29)$$

El método de volumen finito para problemas bidimensionales

En este Capítulo se describen algunos problemas bidimensionales que son resueltos utilizando el método de volumen finito. En algunos casos se realizan comparaciones con soluciones analíticas disponibles para los casos descritos. Finalmente se incluye una serie de ejercicios para reafirmar lo descrito en el Capítulo.

3.1. Programa 3: Difusión en dos dimensiones

Considere la ecuación de *Poisson* 2D:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S(x, y), \quad (3.1)$$

definida en el dominio $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ y sujeta a las condiciones de frontera

$$\phi(-1, y) = y - y^2 + 1; \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (3.2)$$

$$\phi(1, y) = y + y^2 + 1; \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (3.3)$$

$$\phi(x, -1) = x - x^2 + 1; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3.4)$$

$$\phi(x, 1) = x + x^2 + 1; \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (3.5)$$

Si el término fuente viene dado por

$$S(x, y) = 2x + 2y, \quad (3.6)$$

la solución analítica para este problema viene dada por

$$\phi(x, y) = x^2 y + x y^2 + 1. \quad (3.7)$$

Siguiendo el proceso de discretización descrito en el Capítulo 1 se llega al sistema de ecuaciones lineales (Ec. 1.13):

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P,$$

cuyos coeficientes son

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x}, \quad a_N = \frac{\Gamma S_n}{\Delta y}, \quad a_S = \frac{\Gamma S_s}{\Delta y},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S, \quad S_P = \bar{S}_P \Delta V = (2x_P + 2y_P) \Delta V.$$

Nótese que el sistema de ecuaciones que se genera para problemas en dos dimensiones es un sistema *pentadiagonal*, para el cual hay algoritmos eficientes para su resolución.

Dado que las condiciones de frontera son del primer tipo, su implementación es la misma que para el caso unidimensional.

La Figura 3.1 muestra la comparación entre la solución analítica (colores) y la solución numérica (puntos)

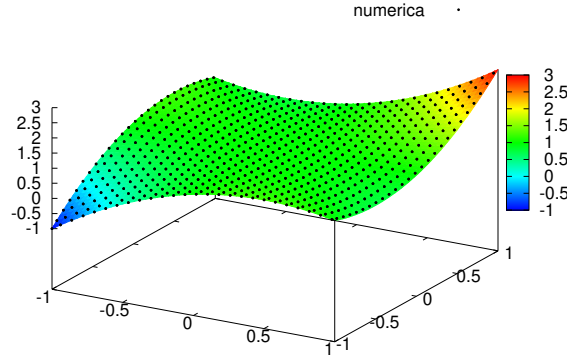


Figura 3.1: Solución de la ecuación de difusión 2D.

3.2. Programa 4: Advección-difusión en dos dimensiones

Considere una función $\phi(x, y)$ definida en el dominio $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ que satisface la ecuación

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S, \quad (3.8)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (3.9)$$

$$\phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, 1) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.10)$$

Considere que el campo de velocidades corresponde a un vórtice cuyas componentes están definidas por

$$u(x, y) = -\sin(\pi x) \cos(\pi y), \quad v(x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y), \quad (3.11)$$

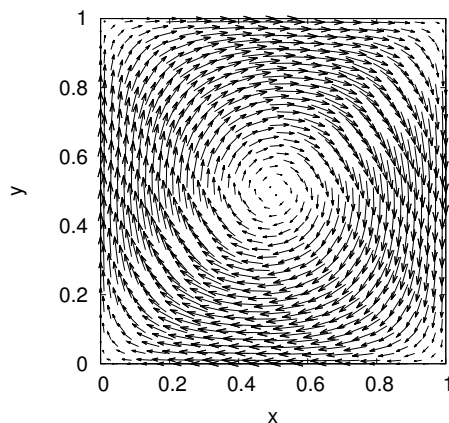


Figura 3.2: Campo de velocidades impuesto para resolver advección-difusión en dos dimensiones.

y que se muestra en la Figura 3.2.

Para este caso, el coeficiente de difusión viene dado por $\Gamma = 1/Pe$. Nótese que la parte advectiva debe incluirse en los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales de acuerdo a las Ecuaciones (1.14) y (1.15).

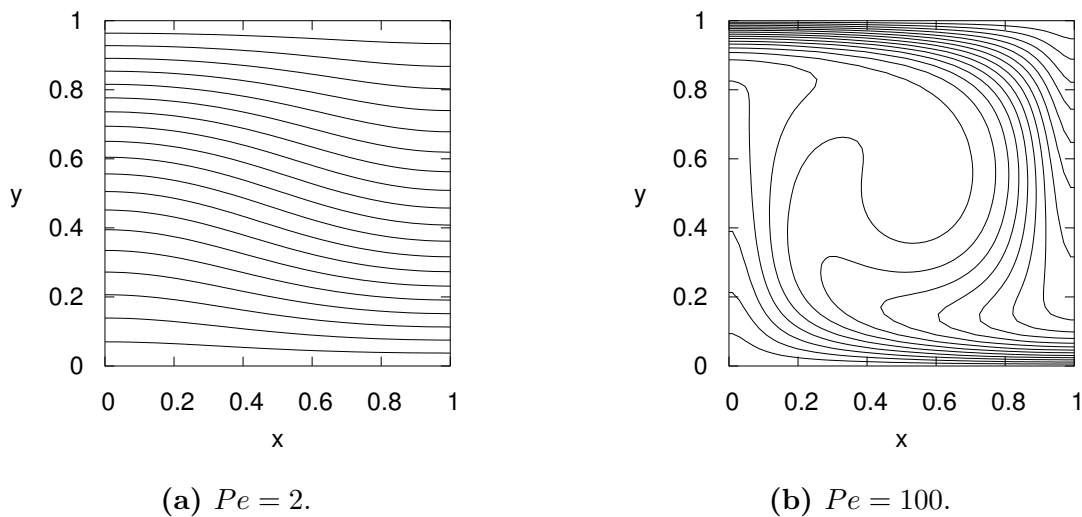


Figura 3.3: Islóneas de ϕ para el problema de advección-difusión 2D.

Al igual que en el caso unidimensional, el valor del número de Péclet indica el mecanismo principal de transferencia: para Pe pequeños domina la difusión, en tanto que para Pe domina el mecanismo advectivo. Este comportamiento puede observarse en la Figura 3.3, donde se muestran islóneas de temperatura para dos números de Péclet distintos.

3.3. Programa 5: Advección-difusión dependiente del tiempo en dos dimensiones

Si se considera que el problema anterior no se encuentra en estado estacionario, es posible resolver el problema con dependencia temporal, es decir, la ecuación a resolver será

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S, \quad (3.12)$$

con las mismas condiciones de frontera y campo de velocidad que el problema anterior.

Al realizar la discretización de la ecuación general, aparecerán términos que incluyen la parte temporal en los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales de acuerdo a la Ecuación (1.16).

La Figura 3.4 muestra el campo de temperaturas a distintos tiempos para el caso de interés considerando $Pe = 100$.

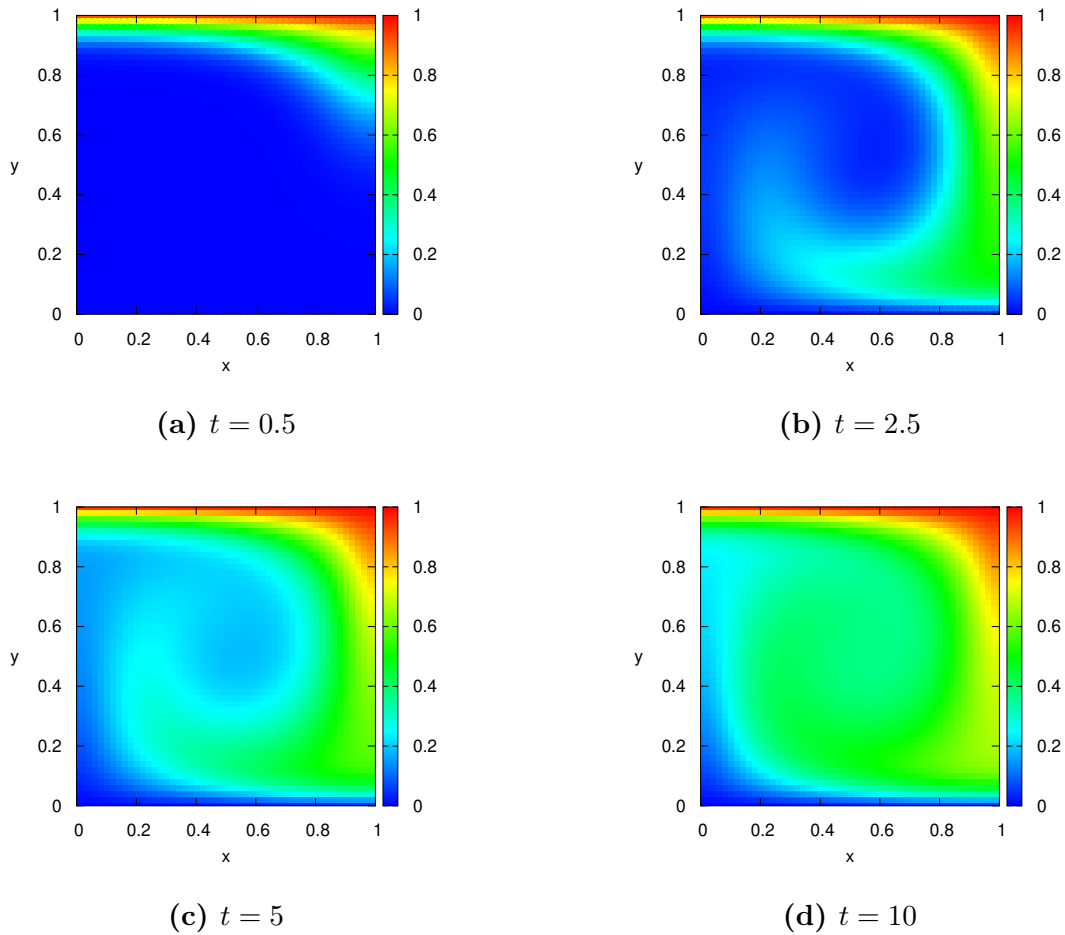


Figura 3.4: Campo de temperaturas a diferentes tiempos para el problema de advección-difusión temporal.

3.4. Tarea 2: Volumen finito en 2D

Utilizar el método de volumen finito para resolver cada uno de los siguientes problemas.

3.4.1. Ecuación de Laplace en 2D

Considere un dominio cuadrado de lado a en el cual la transferencia de calor es únicamente difusiva y está gobernada por la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (3.13)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$T(0, y) = T(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a, \quad (3.14)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(x, a) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3.15)$$

Halle el campo de temperatura del problema planteado y compare sus resultados con la solución analítica

$$T(x, y) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{\sinh(\pi y/a)}{\sinh \pi}. \quad (3.16)$$

3.4.2. Difusión en 2D con condición del tercer tipo

Considere la ecuación de Poisson en 2D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -52 \cos(4x + 6y), \quad (3.17)$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$u(x, 0) = \cos(4x), \quad \frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) + u(x, 1) = \cos(4x + 6) - \sin(4x + 6), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = -4 \sin(6y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = -4 \sin(4 + 6y). \quad (3.19)$$

Halle la distribución del escalar $u(x, y)$ y compare sus resultados con la solución analítica

$$u(x, y) = \cos(4x + 6y). \quad (3.20)$$

3.4.3. Advección-Difusión en 2D

La entrada y salida de un canal se encuentran en contacto con un medio poroso, el cual permite que haya un flujo neto a través del canal. Dicho flujo dentro del canal puede aproximarse como un flujo de Poiseuille $u(x, y) = 4y(1 - y)$, $v(x, y) = 0$. Térmicamente, el canal se encuentra sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$T(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.21)$$

$$T(L, y) = 1, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.22)$$

$$T(x, 0) = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial T(x, h)}{\partial y} = 1, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.24)$$

La ecuación de transporte que rige la transferencia de calor es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T + S, \quad (3.25)$$

donde Pe es el número de Peclet y S un término fuente. Si $S = 0$, resuelva esta ecuación para valores de número de Peclet de $Pe = 1, 20$ y 100 . En todas sus soluciones considere $t_{max} = 10$, $\Delta t = 0.005$ y grafique las isotermas para el último instante de tiempo.

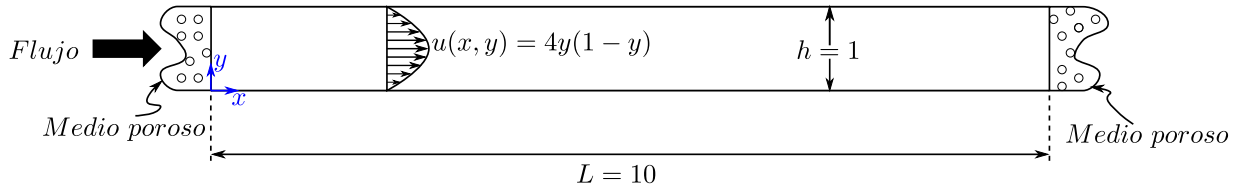


Figura 3.5: Advección-difusión en un canal.

Solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes

En este Capítulo se describe el método de volumen finito para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes expresadas en geometría cartesiana bidimensional. Se comienza con una breve descripción de las dificultades que entraña resolver numéricamente dichas ecuaciones y se explica brevemente la manera en la cual serán resueltas. Posteriormente se describen un método de corrección de presión y un método de proyección para desacoplar el campo de velocidad de el campo de presiones, lo cual permitirá resolver algunos problemas clásicos en CFD.

4.1. Algunos aspectos numéricos de las ecuaciones de Navier-Stokes

Hasta ahora se ha resuelto la ecuación general de advección-difusión considerando que el campo de velocidades es conocido y no se ve afectado por la cantidad transportada, sin embargo y de forma general, en problemas de fluidos no se conoce el campo de velocidades, sino que debe obtenerse como parte de la solución. En estos casos, se deberán resolver las ecuaciones de Navier-Stokes que, de forma adimensional, se expresan como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (4.1)$$

donde \mathbf{u} y p son el campo de velocidad y presión, respectivamente; Re es el número de Reynolds y \mathbf{f} representa cualquier fuerza de cuerpo conocida que actúa sobre el fluido de interés.

En el caso 2D, resolver lo anterior implica conocer las dos componentes de la velocidad, “ u ” y “ v ”, y el campo de presiones “ p ”, es decir, tres variables dependientes del espacio y del tiempo. Dado que la Ecuación vectorial (4.1) puede descomponerse en dos ecuaciones escalares, será necesaria una ecuación extra y condiciones de frontera e iniciales para cerrar el sistema y poder resolverlo matemáticamente. Si el fluido es incompresible, la conservación de masa se expresa mediante la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

la cual es la tercera ecuación de que echaremos mano para problemas de CFD.

Desde el punto de vista matemático es importante señalar algunas características de estas ecuaciones que deben afrontarse con cuidado al momento de resolverlas.

1. El término convectivo $[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$ es no lineal.
2. Hay fuerte acoplamiento entre las tres ecuaciones.
3. A pesar de que se cuenta con tres ecuaciones para hallar tres incógnitas, no se cuenta con una ecuación que indique el comportamiento que debe seguir el campo de presiones y, de forma general, no se cuenta con condiciones de frontera para dicha variable.

Dado que las no linealidades suelen ser muy importantes en problemas de fluidos, deben tratarse de forma adecuada.

Los primeros dos puntos serán tratados empleando una aproximación numérica semi-implícita del término convectivo.

El tercer punto se afrontará de dos maneras distintas: una metodología iterativa de corrección de presión y una técnica de proyección, ambas de las cuales permitirán obtener una “ecuación de transporte” para la presión.

Como se ha mencionado, estas tres dificultades matemáticas se afrontarán de forma numérica. Por otro lado, también surge una importante dificultad netamente numérica que debe tratarse con bastante cuidado para garantizar que las soluciones numéricamente obtenidas son físicamente correctas.

Dada la experiencia obtenida gracias a los problemas resueltos en capítulos anteriores, al realizar la discretización de las ecuaciones puede considerarse natural el colocar todas las variables dependientes en el mismo punto como se muestra en la Figura 4.1.

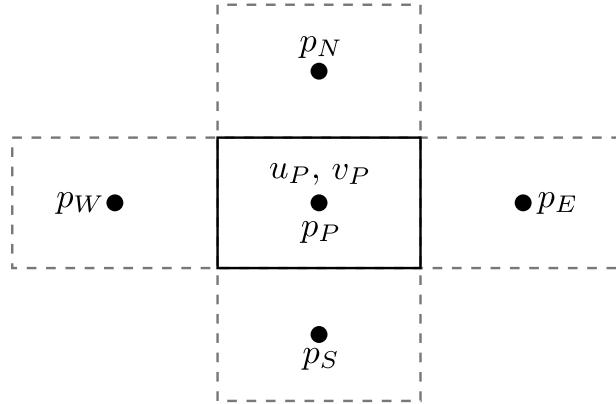


Figura 4.1: Colocación de variables en el mismo punto.

Considerando lo anterior, el cálculo del gradiente de presión se realiza considerando que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P \approx \frac{p_E - p_W}{2\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_P \approx \frac{p_N - p_S}{2\Delta y}. \quad (4.3)$$

Las expresiones anteriores luego deben insertarse como término fuente en las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento para poder obtener el campo de velocidad, sin embargo, los primeros intentos numéricos por resolver estas ecuaciones considerando la colocación de las variables en el mismo punto fueron infructuosos ya que las soluciones así obtenidas presentaban oscilaciones no físicas. Análisis numéricos arrojaron que dichas oscilaciones surgían debido al número 2 que aparece multiplicando a Δx y Δy en las expresiones (4.3) y a la ausencia de la presión p_P en dichas expresiones. Al fenómeno de oscilación debido a lo anterior se le denomina “efecto de tablero” (*checkerboard effect*).

Como se ha explicado en el párrafo anterior, el colocar todas las variables en el mismo punto hace que el efecto del gradiente de presión no se considere de manera adecuada, así que para evitar estas situaciones usaremos un arreglo distinto de las variables dentro de la malla: las componentes de la velocidad se alojarán en las caras de los volúmenes de control correspondientes a las variables escalares según se muestra en la Figura 4.2. Esta disposición de las variables se denomina malla desfasada o *staggered grid*.

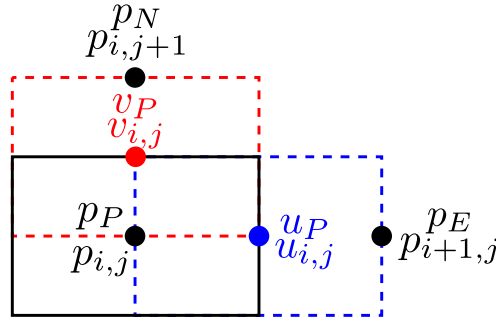


Figura 4.2: Arreglo de malla “*stagger*” o desfasada.

En la figura anterior puede notarse que la componente u de la velocidad se encuentra alojada medio volumen de control hacia la derecha, en la dirección x , en tanto la componente v se desfasa medio volumen de control hacia arriba, en la dirección y , con lo cual, para obtener el campo de velocidad emplearemos un arreglo que puede entenderse como tres mallas.

Considerando lo anterior, el cálculo del gradiente de presión se realiza utilizando

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P \approx \frac{p_E - p_P}{\Delta x} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_P \approx \frac{p_N - p_P}{\Delta y} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}, \quad (4.4)$$

con lo cual desaparecen los problemas mencionados anteriormente y tiene la ventaja de alojar las velocidades en las caras del volumen de control para la presión.

4.2. Desacople Presión-Velocidad

Para determinar el campo de presión será necesaria una “ecuación” que dicte el comportamiento de la misma.

Comenzando con la ecuación discreta para la componente u

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + S_P, \quad (4.5)$$

donde

$$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}, \quad a_W = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad (4.6)$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n S_n}{\Delta y} - \frac{v_n S_n}{2}, \quad a_S = \frac{\Gamma_s S_s}{\Delta y} + \frac{v_s S_s}{2}, \quad (4.7)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (4.8)$$

$$S_P = \bar{S}_P \Delta V - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_P \Delta V + u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} = \bar{S}_P - \frac{(p_E - p_P)}{\Delta x} \Delta V + u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (4.9)$$

Rearreglando la Ecuación 4.5, es posible reescribirla como

$$a_P u_P = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b - (p_E - p_P) A_e, \quad (4.10)$$

siendo

$$b = \bar{S}_P \Delta V + u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad A_e = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \Delta y = S_e, \quad (4.11)$$

y el subíndice nb indica que la sumatoria se realiza considerando todos los vecinos inmediatos.

Dado que la Ecuación (4.10) rige el comportamiento de la componente u de la velocidad, lo único que hace falta para resolverla es conocer la presión para incluirla en el término fuente. Dado que la presión no se conoce *a priori*, lo que se hará será suponer una presión p^* , misma que convertirá a las ecuaciones de momento en

$$a_P u_P^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b - (p_E^* - p_P^*) A_e. \quad (4.12)$$

$$a_P v_P^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b - (p_N^* - p_P^*) A_n. \quad (4.13)$$

cuya solución resultará en un campo de velocidades \mathbf{u}^* que, en general, no satisface la ecuación de continuidad.

Con miras a obtener el campo de velocidad físicamente correcto, se pueden hacer correcciones a el campo de presión supuesto y a la velocidad obtenida mediante

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}', \quad p = p^* + p', \quad (4.14)$$

donde las variables primadas representan pequeñas correcciones a las variables respectivas.

Restando la Ecuación (4.12) de la Ecuación (4.10) se llega a

$$a_P \overbrace{(u_P - u_P^*)}^{u'_P} = \sum_{nb} a_{nb} \overbrace{(u_{nb} - u_{nb}^*)}^{u'_{nb}} - \left(\overbrace{(p_E - p_E^*)}^{p'_E} - \overbrace{(p_P - p_P^*)}^{p'_P} \right) A_e, \quad (4.15)$$

o de forma más simple

$$a_P u'_P = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} - (p'_E - p'_P) A_e. \quad (4.16)$$

Dependiendo de las simplificaciones que se realicen al término de la sumatoria, es posible obtener una familia de métodos de raíz genérica SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations).

Si se resta el término $\sum a_{nb} u'_p$ de ambos lados de la ecuación y se simplifica es posible obtener

$$\left(a_P - \sum a_{nb}\right) u'_P = \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_P) - (p'_E - p'_P) A_e. \quad (4.17)$$

Si ahora se considera que la diferencia entre las correcciones de la velocidad en el centro del volumen de control con sus vecinos es pequeña (método SIMPLER, donde la C significa corregido), se puede desprestigiar el término de la sumatoria y despejar para obtener que las correcciones de la componente u de la velocidad vienen dadas por

$$u'_P = -\frac{A_e}{a_P - \sum a_{nb}} (p'_E - p'_P) = de(p'_P - p'_E). \quad (4.18)$$

Similarmente, siguiendo el mismo procedimiento para la componente v se puede concluir que

$$v'_P = -\frac{A_n}{a_P - \sum a_{nb}} (p'_N - p'_P) = dn(p'_P - p'_N). \quad (4.19)$$

Considerando las dos ecuaciones anteriores, las componentes de la velocidad se corrigen de acuerdo a

$$u_P = u_P^* + de(p'_P - p'_E), \quad (4.20)$$

$$v_P = v_P^* + dn(p'_P - p'_N), \quad (4.21)$$

siendo de y dn coeficientes que serán usados para obtener las correcciones de la presión.

Observando las ecuaciones anteriores, es claro que para poder corregir la velocidad será necesario conocer las correcciones para el campo de presiones, para lo cual se echará mano de la ecuación de continuidad discretizada

$$u_e S_e - u_w S_w + v_n S_n - v_s S_s = 0. \quad (4.22)$$

Es importante hacer notar que el cálculo de la divergencia de \mathbf{u} se realizará en los centros de los volúmenes de control para la presión. La Figura 4.3 muestra el arreglo de algunas variables en la malla *stagger*.

De acuerdo a la figura, se puede concluir que las velocidades correspondientes en las caras del volumen de control para la presión se calculan (utilizando las ecuaciones 4.20 y 4.21) de acuerdo a

$$u_e = (u_P)_e = (u_P^*)_e + (de)_e (p'_P - p'_E)_e = u_e^* + (de)_e (p'_P - p'_E), \quad (4.23)$$

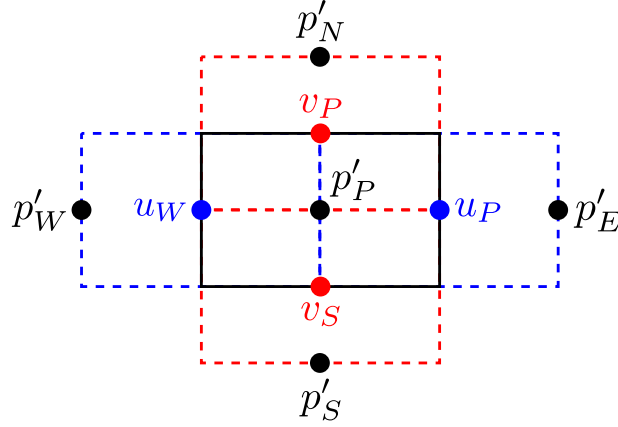


Figura 4.3: Localización de velocidades y correcciones de presión en una malla *stagger*.

$$u_w = (\mathbf{u}_P)_w = (u_P^*)_w + (de)_w (p'_P - p'_E)_w = u_w^* + (de)_w (p'_W - p'_P), \quad (4.24)$$

$$v_n = (\mathbf{v}_P)_n = (v_P^*)_n + (dn)_n (p'_P - p'_N)_n = v_n^* + (dn)_n (p'_P - p'_N), \quad (4.25)$$

$$v_s = (\mathbf{v}_P)_s = (v_P^*)_s + (dn)_s (p'_P - p'_N)_s = v_s^* + (dn)_s (p'_S - p'_P). \quad (4.26)$$

Si las ecuaciones anteriores se sustituyen en la ecuación de continuidad y se simplifica se obtiene

$$\begin{aligned} & u_e^* S_e + (de)_e S_e p'_P - (de)_e S_e p'_E - u_w^* S_w - (de)_w S_w p'_W + (de)_w S_w p'_P \\ & + v_n^* S_n + (dn)_n S_n p'_P - (dn)_n S_n p'_N - v_s^* S_s - (dn)_s S_s p'_S + (dn)_s S_s p'_P = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

que se puede reacomodar para obtener

$$\begin{aligned} [(de)_e S_e + (de)_w S_w + (dn)_n S_n + (dn)_s S_s] p'_P &= (de)_e S_e p'_E + (de)_w S_w p'_W + (dn)_n S_n p'_N + (dn)_s S_s p'_S \\ &\quad - (u_e^* S_e - u_w^* S_w + v_n^* S_n - v_s^* S_s). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si lo anterior se simplifica aún más, puede escribirse en la forma que ya nos es familiar

$$\boxed{a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + S_P,} \quad (4.29)$$

cuyos coeficientes son

$$\boxed{a_E = (de)_e S_e, \quad a_W = (de)_w S_w, \quad a_N = (dn)_n S_n, \quad a_S = (dn)_s S_s,} \quad (4.30)$$

$$\boxed{a_P = a_E + a_W + a_N + a_S, \quad S_P = -(u_e^* S_e - u_w^* S_w + v_n^* S_n - v_s^* S_s) = -\nabla \cdot \mathbf{u}^*.} \quad (4.31)$$

Es importante notar que la Ecuación (4.29) tiene la misma estructura que la forma discreta de una ecuación de transporte, pero ello no significa que las correcciones de la presión estén siendo transportadas por el fluido, sin embargo esta ecuación nos indica la manera en la

cual se comportan las correcciones para la presión, con lo cual se ha resuelto una de las dificultades mencionadas anteriormente.

Una vez teniendo las correcciones para la presión, podemos establecer la metodología SIM-PLEC que permite resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para conocer el campo de velocidades:

1. Suponer un campo de presiones p^* .
2. Con el campo de presiones supuesto, obtener el campo de velocidad \mathbf{u}^* mediante la resolución de las Ecuaciones (4.12) y (4.13).
3. Conociendo \mathbf{u}^* , se calcula el término fuente $(-\nabla \cdot \mathbf{u}^*)$ para las correcciones de la presión y se resuelve la Ecuación (4.29) para obtener p' .
4. Se corrige el campo de presiones mediante $p = p^* + p'$.
5. Se corrigen las velocidades mediante las Ecuaciones (4.20) y (4.21).
6. Se itera hasta alcanzar la convergencia siguiendo el siguiente criterio:

Se obtiene el campo de presión correcto cuando, al resolver las ecuaciones de momentum (4.12) y (4.13), se llega a un campo de velocidad con divergencia cero.

4.3. Programa 6: Lid-Driven Cavity Flow

Ahora se resolverá un problema clásico de CFD: el flujo dentro de una cavidad cuadrada generado por el deslizamiento de una de las paredes de la misma. La Figura 4.4 muestra el esquema del problema a resolver.

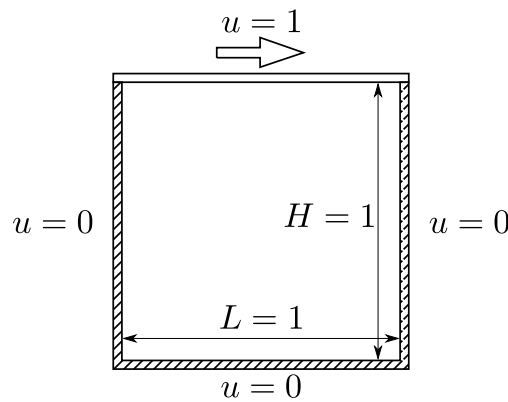


Figura 4.4: Esquema del “lid-driven cavity flow”.

Las ecuaciones de balance que modelan el fenómeno son

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v, \quad (4.34)$$

siendo Re el número de Reynolds.

En forma discreta, las Ecuaciones (4.33) y (4.34) son

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + S_{P_u}, \quad (4.35)$$

$$a_P v_P = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S + S_{P_v}, \quad (4.36)$$

cuyos coeficientes están definidos por las ecuaciones

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad (4.37)$$

$$a_N = \frac{\Gamma S_n}{\Delta y} - \frac{v_n S_n}{2}, \quad a_S = \frac{\Gamma S_s}{\Delta y} + \frac{v_s S_s}{2}, \quad (4.38)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (4.39)$$

$$S_{P_u} = u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{p_E - p_P}{\Delta x} \Delta v, \quad S_{P_v} = v_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{p_N - p_P}{\Delta y} \Delta v. \quad (4.40)$$

Un aspecto muy importante a tener en cuenta al momento de resolver las ecuaciones anteriores es calcular de la manera adecuada los flujos a través de las caras de los volúmenes de control para ambas componentes. La Figura 4.5 muestra el arreglo de las variables en la malla stagger para ambas componentes de la velocidad.

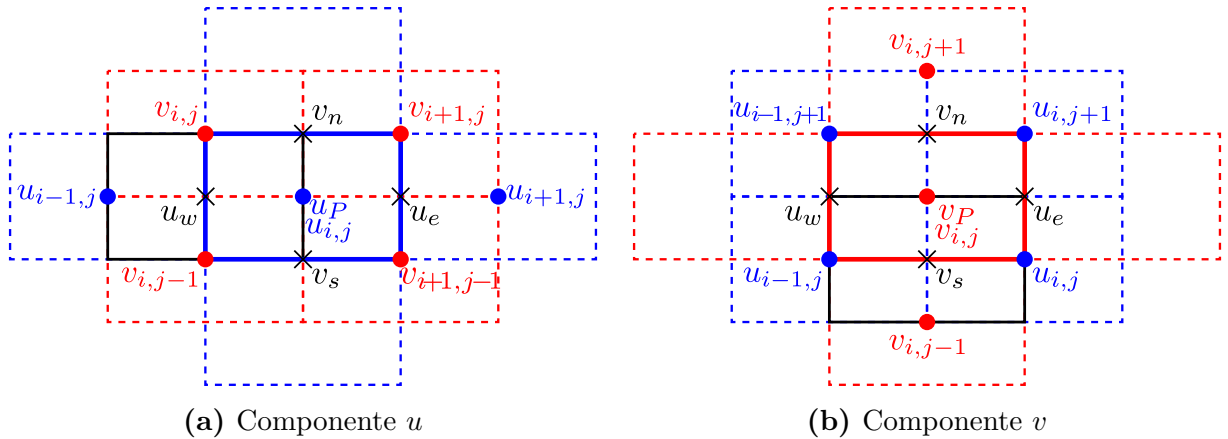


Figura 4.5: Bosquejo de los flujos por las caras en la malla “stagger”.

De la figura anterior es fácil notar que las respectivas velocidades en las caras del volumen de control para la componente u se calculan mediante

$$u_e = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}, \quad u_w = \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \quad (4.41)$$

$$v_n = \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2}, \quad v_s = \frac{v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2}, \quad (4.42)$$

en tanto que para la componente v se calculan de acuerdo a

$$u_e = \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2}, \quad u_w = \frac{u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}}{2}, \quad (4.43)$$

$$v_n = \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2}, \quad v_s = \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2}. \quad (4.44)$$

Una vez aplicando el método SIMPLEC para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes es posible visualizar la evolución temporal del flujo así como también observar el efecto del valor del número de Reynolds sobre el flujo. La Figura 4.6 muestra el campo de velocidades del flujo en estado estacionario para dos números de Reynolds distintos.

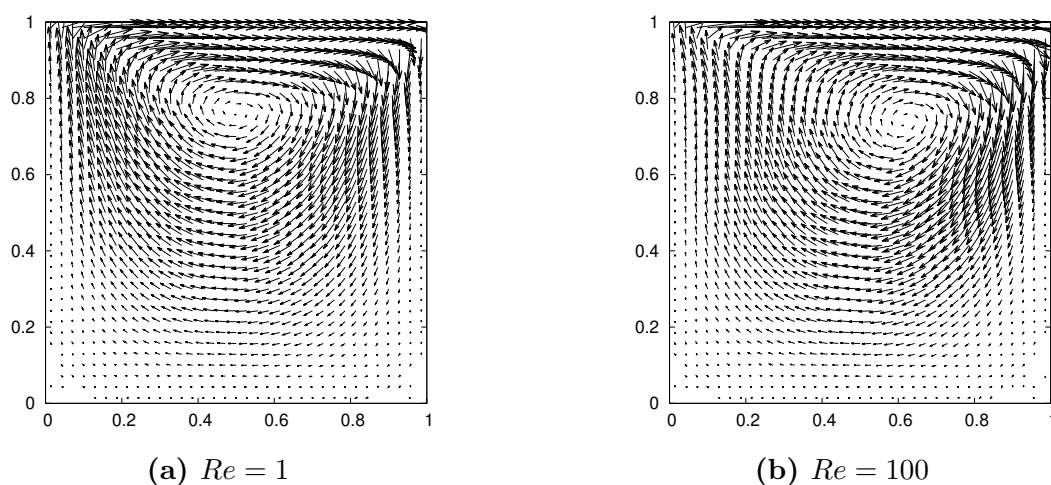


Figura 4.6: Campo de velocidades para dos números de Reynolds distintos.

Nótese que a bajos números de Reynolds el vórtice generado es muy simétrico y dicha simetría se pierde conforme aumenta el valor de Re .

4.4. Programa 7: Flujo en un canal abierto

Un problema clásico en el estudio de los fluidos corresponde al flujo de Poiseuille, mismo que se da cuando un fluido viscoso se mueve entre dos placas paralelas. La Figura 4.7 muestra la situación física descrita. En la figura puede verse que el canal es largo en comparación con su ancho, lo cual permite suponer que a la salida del canal el flujo puede considerarse como completamente desarrollado, es decir, la condición de frontera a la salida es del segundo tipo.

Las ecuaciones que describen el comportamiento son exactamente las mismas que las utilizadas en el problema anterior, lo único que cambia es el tamaño del dominio y una de las condiciones de frontera.

La Figura 4.8 muestra el campo de velocidades para $Re = 10$, puede observarse el efecto debido a la entrada del canal, sin embargo a la salida se puede apreciar que el perfil de Poiseuille alcanza a desarrollarse.

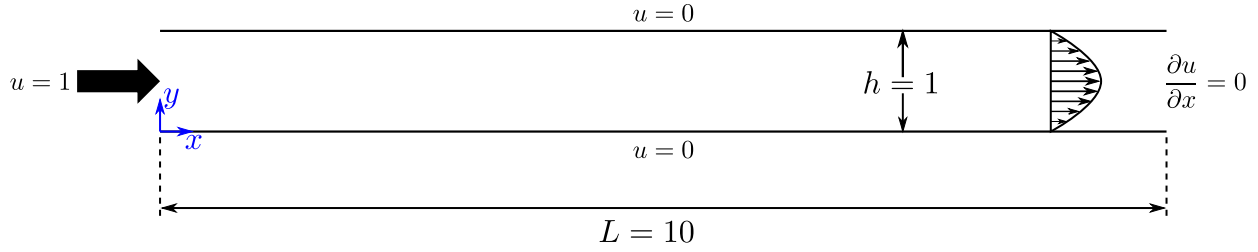


Figura 4.7: Flujo en un canal rectangular.

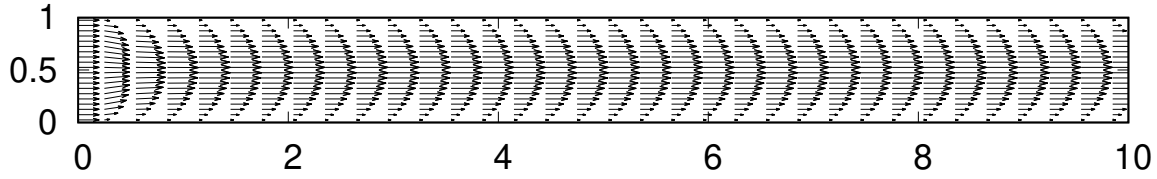


Figura 4.8: Campo de velocidades para el flujo en un canal.

4.5. Programa 8: Flujo alrededor de un obstáculo sólido

A continuación, se modificará el programa anterior para resolver el flujo alrededor de un obstáculo sólido cuadrado. Dado que la longitud característica para este problema corresponde a las dimensiones del obstáculo sólido, será necesario cambiar las dimensiones del dominio de interés de tal forma que todo esté referenciado al tamaño del obstáculo. La implementación numérica del método de solución se realizará de acuerdo al método desarrollado por Fernando Guerrero, mismo que viene descrito en la presentación que se proporcionará en clase.

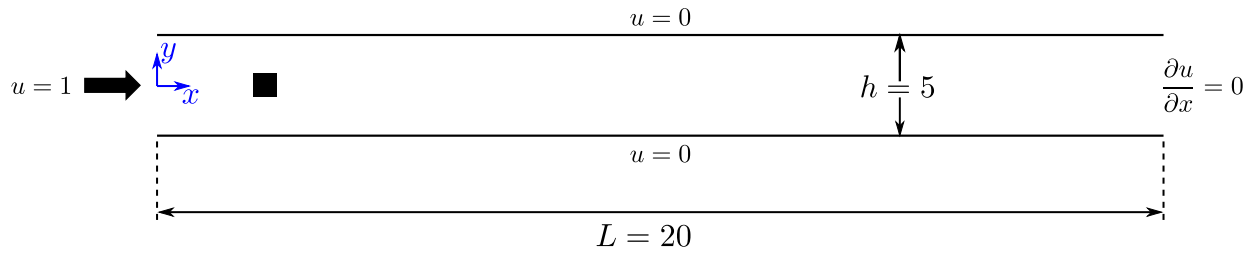


Figura 4.9: Flujo alrededor de un obstáculo sólido dentro de un canal rectangular.

La Figura 4.10 muestra un seguimiento Lagrangiano de partículas trazadoras inyectadas antes del obstáculo y las líneas de corriente para $Re = 100$ a un tiempo $t = 200$. Puede apreciarse que el flujo rodea al obstáculo sólido, se desestabiliza y genera una calle de vórtices de von Karman similar a la que normalmente se observa para un cilindro sólido.

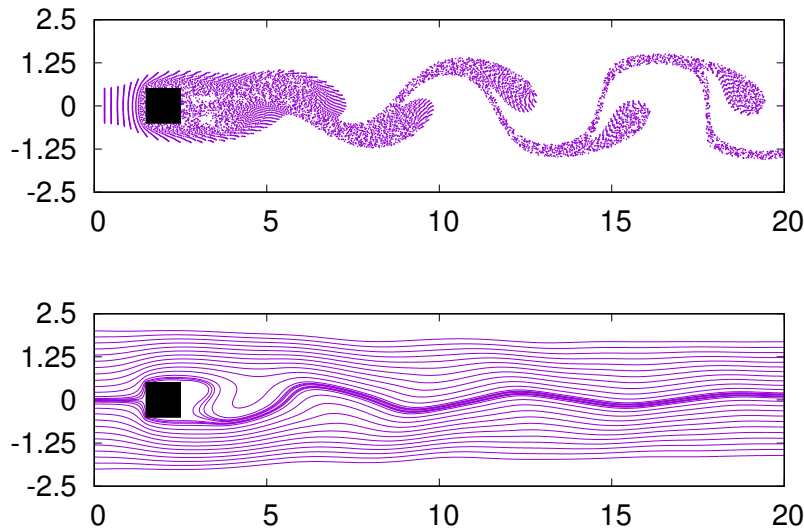


Figura 4.10: (Arriba) Seguimiento Lagrangiano y (Abajo) líneas de corriente para el flujo alrededor de un obstáculo sólido.

4.6. Programa 9: Dipolo magnético

Considere el flujo generado en un fluido conductor incompresible debido a la interacción de una corriente eléctrica y un campo magnético. Cuando la corriente eléctrica, \mathbf{j} , va de izquierda a derecha y el campo magnético, \mathbf{B} , se dirige hacia afuera del plano de la pantalla (dirección z), se genera una fuerza de *Lorentz* en la dirección y negativa (ver Figura 4.11).

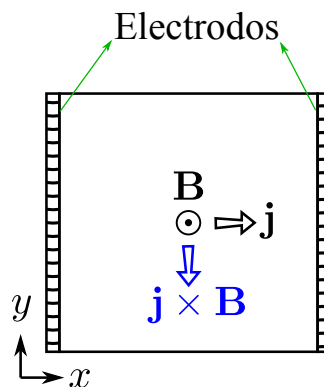


Figura 4.11: Esquema del flujo producido por una campo magnético y una corriente eléctrica aplicada.

Este sencillo experimento sirve para ilustrar un flujo Magnetohidrodinámico, es decir, el flujo de un fluido conductor que interactúa con una fuerza electromagnética.

Si el flujo debido a esta interacción viene descrito por las ecuaciones adimensionales

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - QB(x, y), \quad (4.47)$$

donde $B(x, y)$ se refiere a la distribución espacial del campo magnético debida al imán, la cual puede ser modelada por las ecuaciones de Furlani (2001). El término adimensional Q , denominado *Fuerza de Lorentz reducida*, relaciona la densidad corriente inyectada j_0 , el campo magnético característico B_0 así como las propiedades del fluido y la geometría del sistema de acuerdo a

$$Q = \frac{j_0 B_0 d}{\rho U}. \quad (4.48)$$

La Figura 4.12 muestra las líneas de corriente y el campo de velocidades para el flujo producido por un dipolo magnético con $Q = 0.01$ y $Re = 10$. Puede observarse que la velocidad del fluido es mayor justo en la parte central del imán debido a que en esa región el campo magnético es más intenso.

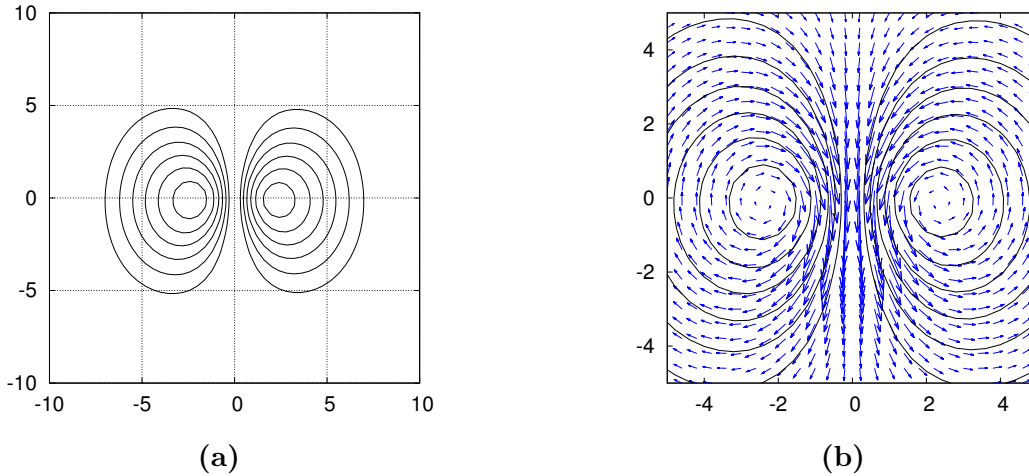


Figura 4.12: (a) Líneas de corriente para el flujo generado por un imán para $Re = 10$ y $Q = 0.01$. (b) Las líneas de corriente son tangentes al campo de velocidades.

4.7. Programa 10: Esquema de proyección (Lid-driven cavity flow)

Hasta ahora se han resuelto las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando el método SIMPLEC para el desacople de la presión y la velocidad, sin embargo es posible utilizar una metodología distinta para lograr este desacople. A continuación se describirá el esquema de proyección de Chorin and Marsden (1997).

El esquema de proyección se basa en el **teorema de descomposición de Hodge - Helmholtz**, el cual establece que todo campo vectorial \mathbf{u} puede descomponerse de manera única como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_s, \quad (4.49)$$

siendo \mathbf{u}_i la parte irrotacional del campo (esto es $\nabla \times \mathbf{u}_i = 0$) y \mathbf{u}_s la parte solenoidal (es decir $\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0$), por lo cual es posible obtener que

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \mathbf{u}_s. \quad (4.50)$$

El teorema de Hodge-Helmholtz se representa esquemáticamente en la Figura 4.13, en donde los planos representan los espacios de todos los vectores que son solenoidales o irrotacionales. De manera general, un vector \mathbf{u} se puede descomponer en las dos partes anteriormente mencionadas.

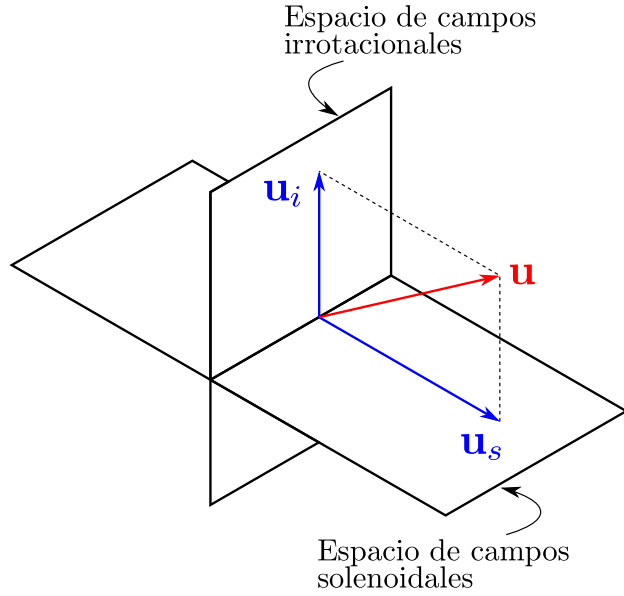


Figura 4.13: Proyección de un campo vectorial \mathbf{u} en un plano irrotacional (plano vertical) y en un espacio solenoidal (plano horizontal).

Ahora resulta natural definir el operador de proyección \mathbb{P} , el cual proyecta al campo \mathbf{u} a el espacio de campos vectoriales solenoidales...

$$\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbb{P}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_s) = \mathbb{P}\mathbf{u}_i + \mathbb{P}\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s. \quad (4.51)$$

Si se aplican estas ideas a las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que se obtiene será

$$\mathbb{P} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right] + \mathbb{P} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\mathbb{P}(\nabla p) + \frac{1}{Re} \mathbb{P}(\nabla^2 \mathbf{u}), \quad (4.52)$$

lo que resulta en

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} = \mathbb{P} \left[-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right], \quad (4.53)$$

donde el término del gradiente de presión se anula debido a que es un campo vectorial que se localiza en el espacio de los campos irrotacionales, es decir, no tiene proyección en el espacio de los campos solenoidales.

Nótese que en la ecuación anterior no es fácil separar la parte solenoidal del término que aparece entre paréntesis y se ha expresado la derivada temporal de \mathbf{u}_s solamente en términos de \mathbf{u} , lo cual ha logrado el objetivo del desacople, esto es, separar la influencia de la presión sobre la velocidad. La presión se puede recuperar entonces tomando la parte irrotacional de

$$-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (4.54)$$

4.7.1. El algoritmo de proyección

Considerando la descomposición de Helmholtz-Hodge, el algoritmo de proyección comienza ignorando el gradiente de presión de las ecuaciones de Navier-Stokes y discretizando en el tiempo

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n, \quad (4.55)$$

donde \mathbf{u}^n es el campo de velocidades obtenido en el paso de tiempo inmediato anterior y \mathbf{u}^* representa una velocidad intermedia que se obtiene fácilmente despejando la ecuación anterior

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right). \quad (4.56)$$

Si ahora se considera el gradiente de la presión se debe cumplir que

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}, \quad (4.57)$$

con \mathbf{u}^{n+1} como el campo de velocidad al tiempo actual.

Sacando la divergencia de la ecuación anterior se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla^2 p^{n+1}. \quad (4.58)$$

Dado que el campo vectorial al tiempo actual \mathbf{u}^{n+1} debe tener divergencia cero, lo anterior se simplifica a una ecuación de Poisson para la presión de la forma

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad \text{con } \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ en la frontera } \partial\Omega. \quad (4.59)$$

Con lo anteriormente dicho, el algoritmo de desacople por proyección se puede sintetizar en tres pasos:

1. Paso **Predictor**: Calcular la velocidad intermedia \mathbf{u}^* mediante la Ecuación (4.56)

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right). \quad (4.60)$$

2. Conociendo \mathbf{u}^* se obtiene la presión al tiempo actual mediante la Ecuación (4.59)

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad \text{con } \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ en la frontera } \partial\Omega. \quad (4.61)$$

3. Paso **Corrector**: Se determina la velocidad al tiempo actual mediante la Ecuación (4.57)

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}. \quad (4.62)$$

Una vez establecido el algoritmo a seguir, se pueden resolver los problemas anteriores utilizando el esquema de proyección. Para efectos del curso solamente se resolverá el “Lid-driven cavity flow” (Programa 6).

4.8. Programa 11: Convección natural

Considere un dominio cuadrado bidimensional rígido lleno con un fluido Newtoniano e incompresible. Al irse calentando el fluido que se encuentra cerca de la pared inferior disminuirá su densidad, con lo cual será más ligero que el fluido frío que se localiza cerca de la pared superior de tal forma que habrá movimiento del fluido y se generará una celda convectiva. La Figura 4.14 esquematiza la situación física descrita.

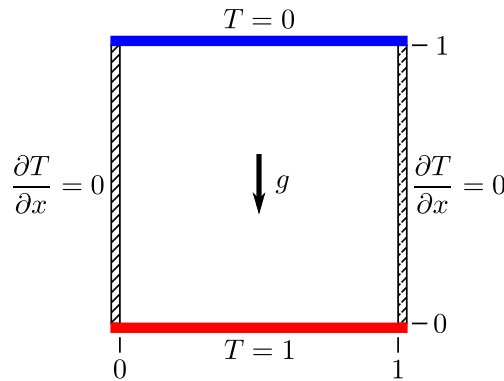


Figura 4.14: Convección natural en una cavidad cuadrada.

La situación anterior implica que hay variaciones en la densidad del fluido conforme pasa el tiempo, y dichas variaciones también dependen de las coordenadas espaciales, por lo cual la conservación de masa se expresa mediante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.63)$$

y los balances de cantidad de movimiento y energía se resumen en

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g}, \quad (4.64)$$

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) \right] = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + k \nabla^2 T. \quad (4.65)$$

En las ecuaciones anteriores, la densidad, ρ , es una función del espacio y del tiempo, \mathbf{u} es el campo de velocidades del fluido; p representa la presión en tanto que μ y λ son el primer y

segundo coeficientes de viscosidad, respectivamente. En la Ecuación (4.65), C_v , k y T son el calor específico, conductividad térmica y temperatura del fluido, respectivamente. Como puede apreciarse, el hecho de que el fluido cambie de densidad complica las ecuaciones de manera importante, llegando al punto de que ahora la densidad también es una variable que se tiene que resolver, para lo cual será necesario incluir alguna relación termodinámica que indique el comportamiento de la densidad con la temperatura.

4.8.1. La aproximación de Boussinesq

Una manera en la cual es posible simplificar las ecuaciones anteriores para el estudio de la convección en fluidos es la aproximación de Boussinesq, la cual establece que, si la diferencia de temperaturas máxima en el seno del fluido es pequeña, entonces las variaciones de la densidad pueden despreciarse en todos los términos de la ecuación de momento, excepto en el término de flotación ($\rho \mathbf{g}$) ya que la aceleración debida a la gravedad puede ser grande. En términos generales, para una variación en la temperatura $\Delta T \sim 10^\circ \text{C}$ las variaciones en la densidad y otros coeficientes son del orden del 1 %. Toda esta aproximación puede encontrarse de manera más detallada en los libros de texto de transferencia de calor, particularmente Chandrasekhar (1961) describe en términos sencillos dicha aproximación.

Con las consideraciones anteriores, la densidad puede tratarse como constante en todos los términos excepto en la fuerza de cuerpo externa. Si la variación de la densidad en este término es lineal, es decir,

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_\infty)], \quad (4.66)$$

el sistema de ecuaciones (4.63)-(4.65) puede expresarse de forma adimensional simplificada como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Ra Pr T \hat{\mathbf{j}}, \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T, \quad (4.69)$$

estando los parámetros adimensionales definidos por

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu \alpha}. \quad (4.70)$$

Para resolver numéricamente será necesario resolver una ecuación extra en el código numérico (ecuación de energía). La Figura 4.15 muestra el campo de velocidades y el campo de temperaturas en estado estacionario considerando $Pr = 0.7$ y $Ra = 8 \times 10^3$.

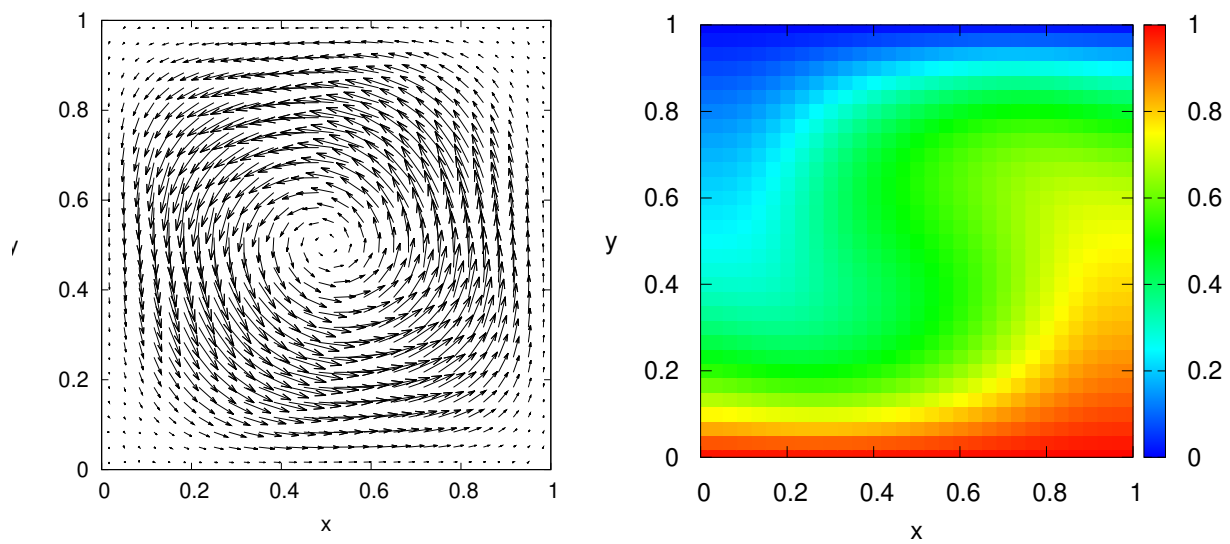


Figura 4.15: Campo de velocidades y campo de temperaturas para un problema de convección natural.

El método de volumen finito en coordenadas cilíndricas

En este Capítulo se explora la implementación del método de volumen finito para problemas en geometría cilíndrica.

5.1. Descripción del método

Como se ha visto hasta el momento, en problemas en geometría cilíndrica también estamos interesados en resolver la ecuación general de advección-difusión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S, \quad (5.1)$$

donde, para el caso de geometría cartesiana, los operadores de divergencia y gradiente se calculan mediante

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (5.2)$$

donde u_r , u_θ y u_z son las componentes radial, azimutal y axial del vector \mathbf{u} , respectivamente.

Para hallar soluciones numéricas de la ecuación general también comenzaremos por discretizar el dominio de interés, mismo que se muestra en la Figura 5.1. Algo importante a tomar en cuenta es que, aún para una malla regular ($\Delta\theta$ y Δr constantes), los volúmenes de control obtenidos luego de la discretización no son iguales, sino que su tamaño depende de la posición radial.

Al resolver la ecuación general, también encontraremos otras dificultades inherentes a la geometría. El punto $r = 0$ deberá tratarse con mucho cuidado ya que, como puede observarse en la Ecuación (5.2), es fuente de una singularidad en las ecuaciones de balance. La coordenada $\theta = 0, 2\pi$ también debe tratarse de manera adecuada ya que en esta posición debe satisfacerse la *periodicidad* de la coordenada azimutal, esto es,

$$\phi(r, \theta, z) = \phi(r, \theta + 2\pi, z). \quad (5.3)$$

Al igual que en el caso cartesiano, emplearemos una notación específica para referirnos a un volumen de control, sus vecinos y sus respectivas fronteras como se muestra en la Figura 5.2,

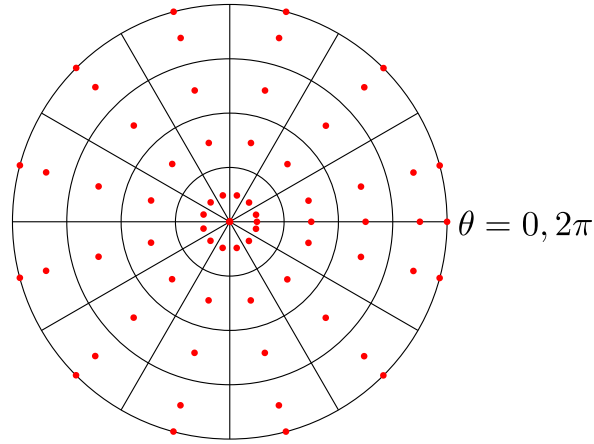


Figura 5.1: Mallado de un dominio bidimensional en coordenadas cilíndricas.

donde el centro del volumen de control de interés se denota por la letra P , en tanto que sus vecinos al norte, sur, este y oeste se indican con las letras N , S , E y W , respectivamente. Nótese que, en este caso el sentido positivo de la coordenada azimutal se toma siguiendo la convención matemática de que los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj.

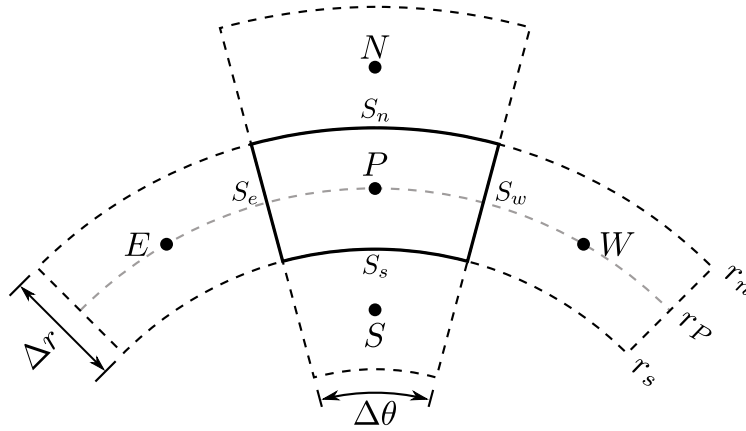


Figura 5.2: Volumen de control en coordenadas cilíndricas.

Es muy importante notar algunas diferencias cruciales con respecto al caso en coordenadas cartesianas: los volúmenes de control para el caso cilíndrico varían con la posición radial, esto es, tienen distinto tamaño aún cuando el mallado realizado sea regular, lo cual implica que Δv deberá ser calculado para cada posición radial; ligado a lo anterior, el área perpendicular a la dirección radial también varía como una función de la posición radial. Considerando lo anterior, las áreas así como el tamaño del volumen de control se pueden calcular de acuerdo con

$$S_n = r_n \Delta \theta, \quad S_s = r_s \Delta \theta, \quad \Delta V = r_P \Delta r \Delta \theta, \quad (5.4)$$

siendo r_s , r_n y r_P los radios a los cuales se localizan las caras sur y norte, así como el centro del volumen de control, respectivamente.

5.1.1. Discretización de la ecuación general

A continuación se procederá a discretizar la Ecuación general de Advección-Difusión (Ec. 1.1) para el caso bidimensional en coordenadas polares.

El término temporal se discretiza exactamente igual que para el caso cartesiano, es decir:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \approx \frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} \Delta V. \quad (5.5)$$

De igual forma que para el caso cartesiano, el superíndice cero se usa para indicar el instante de tiempo inmediato anterior.

Para el término convectivo, se hace uso del teorema de Gauss para convertir la integral de volumen en una integral de superficie (Fig. 5.3).

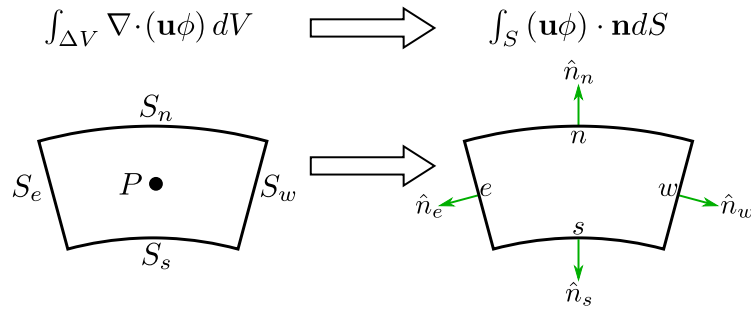


Figura 5.3: Aplicación del teorema de Gauss para el término convectivo en un volumen de control en coordenadas polares.

En la Figura 5.3, S_n , S_s , S_e y S_w son las áreas superficiales de las respectivas fronteras del volumen de control de interés. Eligiendo que el vector normal \mathbf{n} *siempre apunta hacia afuera* del volumen de control y considerando que la coordenada angular crece en el sentido contrario de las manecillas del reloj, es fácil notar que

$$\hat{n}_e = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \hat{n}_w = -\hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \hat{n}_n = \hat{\mathbf{e}}_r, \quad \hat{n}_s = -\hat{\mathbf{e}}_r. \quad (5.6)$$

Para un flujo bidimensional $\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$, el término convectivo puede aproximarse mediante

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS &\approx (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_e \cdot \hat{n}_e S_e + (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_w \cdot \hat{n}_w S_w \\ &\quad + (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_n \cdot \hat{n}_n S_n + (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_s \cdot \hat{n}_s S_s \\ &= (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_e \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\theta) S_e + (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_w \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_\theta) S_w \\ &\quad + (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_n \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r) S_n + (u_r \phi \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta)_s \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_r) S_s, \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx (u_\theta)_e \phi_e S_e - (u_\theta)_w \phi_w S_w + (u_r)_n \phi_n S_n - (u_r)_s \phi_s S_s. \quad (5.7)$$

Por simplicidad se ha considerará que $u_\theta = u$ y $u_r = v$, con lo cual es posible escribir la integral del término convectivo como

$$\int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx u_e \phi_e S_e - u_w \phi_w S_w + v_n \phi_n S_n - v_s \phi_s S_s. \quad (5.8)$$

Al igual que en el caso cartesiano, los valores de ϕ en los centros de las caras del volumen de control pueden calcularse mediante una interpolación lineal (esquema central):

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2}, \quad \phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}, \quad \phi_s = \frac{\phi_P + \phi_S}{2}, \quad (5.9)$$

con lo cual la Ecuación 5.8 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} & u_e S_e \left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2} \right) - u_w S_w \left(\frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right) + v_n S_n \left(\frac{\phi_N + \phi_P}{2} \right) - v_s S_s \left(\frac{\phi_P + \phi_S}{2} \right) \\ &= \frac{u_e S_e}{2} \phi_E - \frac{u_w S_w}{2} \phi_W + \frac{v_n S_n}{2} \phi_N - \frac{v_s S_s}{2} \phi_S + \frac{\phi_P}{2} (u_e S_e - u_w S_w + v_n S_n - v_s S_s). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Si el fluido de interés es *incompresible*, la forma discreta de la ecuación de continuidad será

$$\int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx u_e S_e - u_w S_w + v_n S_n - v_s S_s = 0, \quad (5.11)$$

con lo cual, el término convectivo se aproxima mediante la ecuación

$$\int_S (\mathbf{u}\phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx \frac{u_e S_e}{2} \phi_E - \frac{u_w S_w}{2} \phi_W + \frac{v_n S_n}{2} \phi_N - \frac{v_s S_s}{2} \phi_S. \quad (5.12)$$

La integral del término difusivo también se puede expresar como una integral de superficie mediante el teorema de Gauss:

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_S (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e S_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w S_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n S_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s S_s,$$

donde las derivadas de ϕ en las fronteras del volumen de control se pueden calcular mediante *diferencias centrales*:

$$\begin{aligned} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e &\approx \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \theta}, & \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w &\approx \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \theta}, \\ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n &\approx \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta r}, & \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s &\approx \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta r}. \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en el término difusivo se obtiene

$$\int_S (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS \approx \Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{r_P \Delta \theta} - \Gamma_w S_w \frac{\phi_P - \phi_W}{r_P \Delta \theta} + \Gamma_n S_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta r} - \Gamma_s S_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta r}. \quad (5.13)$$

Finalmente, el término fuente se puede aproximar considerando el valor promediado en el volumen de control

$$\int_{\Delta V} S dV \approx \bar{S}_P \Delta V. \quad (5.14)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (5.5), (5.12), (5.13) y (5.14) en la Ecuación general (5.1) se obtiene la *forma discreta* de la ecuación de advección-difusión:

$$\underbrace{\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} \Delta V}_{\text{Término temporal}} + \underbrace{\frac{u_e S_e}{2} \phi_E - \frac{u_w S_w}{2} \phi_W + \frac{v_n S_n}{2} \phi_N - \frac{v_s S_s}{2} \phi_S}_{\text{Término convectivo}} = \underbrace{\Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{r_P \Delta \theta} - \Gamma_w S_w \frac{\phi_P - \phi_W}{r_P \Delta \theta} + \Gamma_n S_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta r} - \Gamma_s S_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta r}}_{\text{Término difusivo}} + \underbrace{\bar{S}_P \Delta V}_{\text{Término fuente}}. \quad (5.15)$$

Agrupando los términos que contienen a la variable dependiente, y luego de un poco de álgebra es posible expresar la ecuación anterior en una forma más condensada:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P, \quad (5.16)$$

donde los coeficientes en dicha ecuación son

$$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{r_P \Delta \theta} - \frac{u_e S_e}{2}; \quad a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{r_P \Delta \theta} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad (5.17)$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n S_n}{\Delta r} - \frac{v_n S_n}{2}; \quad a_S = \frac{\Gamma_s S_s}{\Delta r} + \frac{v_s S_s}{2}, \quad (5.18)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}; \quad S_P = \bar{S}_P \Delta V + \phi_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (5.19)$$

Nótese que el sistema de ecuaciones anterior así como los coeficientes que lo componen son muy similares a los obtenidos en el caso cartesiano con la diferencia de que las áreas S_n y S_s y el volumen ΔV dependen de la posición radial.

5.2. Implementación de condiciones de frontera

Dada la enorme similitud de los sistemas de ecuaciones lineales obtenidos para los dos tipos de geometría y a que la ecuación general se ha discretizado de manera uniforme y ortogonal, la implementación de las condiciones de frontera se realiza exactamente igual que para el caso cartesiano. Por lo cual, el lector es referido a la Sección 1.2.

Problemas de FV en coordenadas cilíndricas

En este capítulo se aplica el método de volumen finito para problemas en coordenadas cilíndricas. Se comienza resolviendo la ecuación de difusión en estado estacionario para luego agregar las partes advectiva y temporal para, finalmente, resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en esta geometría.

6.1. Programa 12: Difusión en coordenadas cilíndricas

El primer problema en esta geometría que se resolverá es un problema simple de difusión. Con miras a ilustrar la forma de implementar el método de volumen finito, se resolverá la ecuación de difusión en el dominio $0.1 \leq r \leq 1$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$, es decir, por ahora no se atacará la singularidad en el origen ($r = 0$) ni la periodicidad de la coordenada azimutal ($\theta = 0, 2\pi$). La Figura 6.1 muestra un esquema del problema físico a resolver, para el cual la sección circular exterior se mantiene a una temperatura caliente $T = 1$ en tanto las otras tres fronteras del dominio se encuentran a una temperatura fría $T = 0$ y no hay generación de calor dentro del dominio de interés.

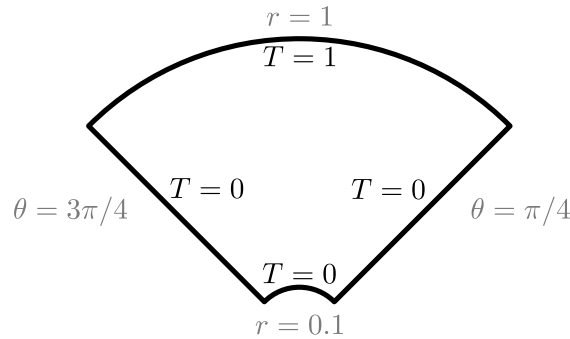


Figura 6.1: Difusión en coordenadas polares.

La ecuación que gobierna el fenómeno antes descrito es la ecuación de conducción de calor en coordenadas polares:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (6.1)$$

Después de resolver numéricamente este problema, como resultado se obtiene la distribución de temperatura en todo el dominio de interés. La Figura 6.1 muestra un mapa de colores e isolíneas de temperatura para el dominio considerado. Puede notarse que la distribución de temperaturas es simétrica con respecto al eje y , lo cual era de esperarse debido a las condiciones de frontera impuestas.

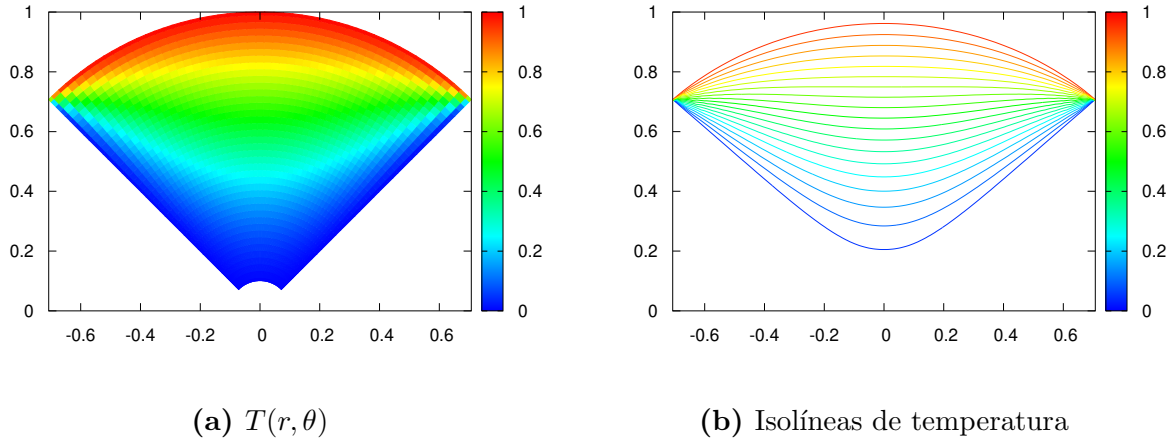


Figura 6.2

6.2. Programa 13: Advección-Difusión en coordenadas cilíndricas

En este problema, se resolverá la ecuación general incluyendo el término temporal y el término advectivo considerando que el dominio contiene un fluido cuyo campo de velocidades dentro se encuentra dado arbitrariamente y no se ve afectado por la distribución de temperaturas dentro del sistema. Adicionalmente se considerará un dominio que no incluye la singularidad en el origen ($r = 0$) pero sí la periodicidad de la coordenada angular. Un esquema del problema físico para este problema se muestra en la Figura 6.3a. El cilindro interno ($r = r_1$) se encuentra a una temperatura fija constante $T = 0$, en tanto que la temperatura del cilindro externo ($r = r_2$) varía con la posición angular de tal forma que la temperatura más alta se localiza en $\theta = 3/4\pi$ y la más baja en $\theta = \pi/4$. El campo de velocidades impuesto consta únicamente de la componente azimutal, misma que solamente depende de la posición radial.

La ecuación de balance es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T, \quad (6.2)$$

donde

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{10r} + r \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (6.3)$$

y Pe es el número de Péclet.

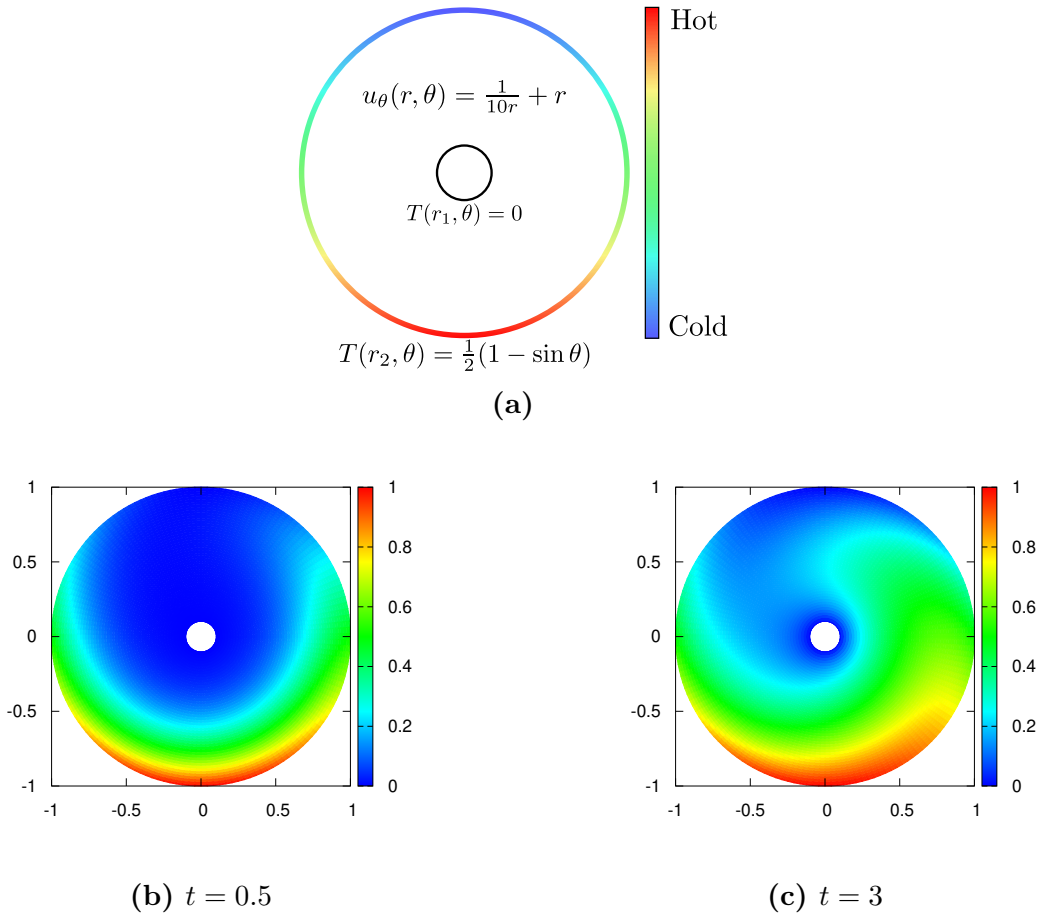


Figura 6.3

Al resolver numéricamente el problema en cuestión se obtiene la distribución de temperaturas como función del tiempo para el dominio considerado. Las figuras 6.3b y 6.3c muestran el campo de temperaturas a dos tiempos distintos para $Pe = 10$. Puede observarse que, debido al movimiento del fluido en sentido antihorario, el calor es arrastrado en esa misma dirección hasta que se alcanza el estacionario.

6.3. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

Ahora se procederá a resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en una sección cilíndrica. Como se comentó para el caso cartesiano, resolver Navier-Stokes entraña los mismos problemas, es decir, son ecuaciones no lineales que se encuentran fuertemente acopladas entre sí y no se cuenta con una ecuación que dicte el comportamiento de la presión en el sistema, además de que alojar todas las variables en el mismo punto genera oscilaciones no físicas debido al efecto de tablero (*checkerboard effect*). Todas estas dificultades se pueden atacar de la misma forma que para el caso cartesiano solamete teniendo en cuenta el cambio de las ecuaciones debido a la geometría involucrada.

Para geometrías cilíndricas bidimensionales las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + f_r, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + f_\theta. \quad (6.6)$$

La Ecuación 6.4 es la ecuación de continuidad en tanto que las Ecuaciones 6.5 y 6.6 corresponden al balance de momento en las direcciones radial y azimutal, respectivamente. Nótese que el primer término de las últimas dos ecuaciones corresponde al término temporal; el segundo es la parte advectiva en tanto que el tercer término del lado derecho corresponde a la parte difusiva. Debido al cambio de geometría, hay términos adicionales que hacen que las ecuaciones se encuentren aún más acopladas que en el caso cartesiano, sin embargo estos pueden ser tratados como términos fuente en las respectivas ecuaciones. Como resultado de lo anterior, el tratamiento de las ecuaciones es casi idéntico al empleado para el caso cartesiano, es decir, una malla stagger para la ubicación de las variables en el dominio y un método SIMPLEC para el desacople presión-velocidad, con la salvedad de que los volúmenes de control tienen tamaño distinto dependiendo de la posición radial y hay que realizar los cálculos correspondientes a los términos adicionales en las ecuaciones de momento.

La malla a emplear corresponde a una malla desfasada (*staggered grid*) como la que se muestra en la Figura 6.4. Considerando que $u = u_\theta$ y $v = u_r$, la componente azimutal se desplaza medio volumen de control en dirección contraria a las manecillas del reloj (puntos rojos) en tanto que la componente v se desplaza medio volumen de control en la dirección radial. Nótese que el índice i es utilizado para barrer los volúmenes de control en la dirección angular en tanto que el índice j corresponde a la coordenada radial (puntos azules).

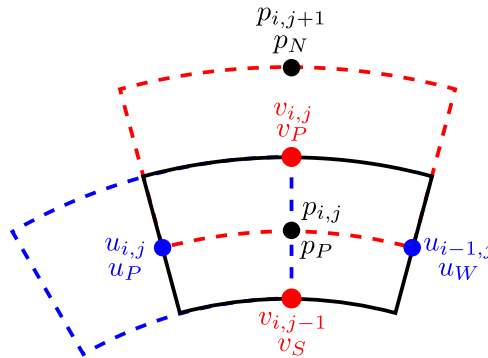
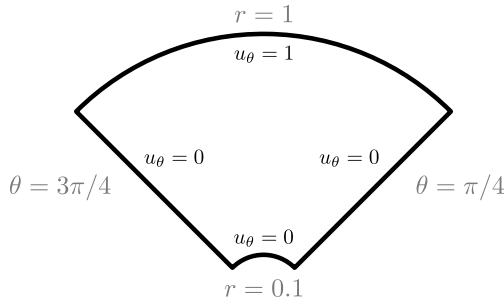


Figura 6.4: Arreglo de las variables en la malla.

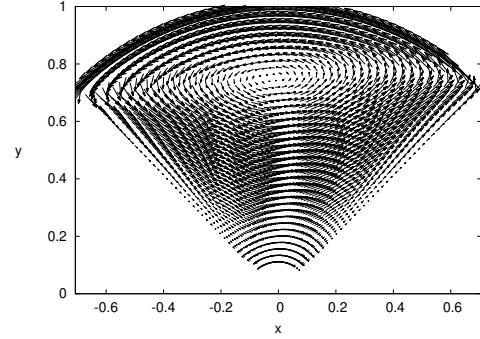
Lo anterior asegura que el cálculo del gradiente de presión en las correspondientes ecuaciones para las componentes de la velocidad se realice de manera adecuada.

6.4. Programa 14: Lid-driven cavity flow en coordenadas cilíndricas

Ahora se resolverá numéricamente el problema del flujo en una cavidad debido a una pared deslizante. La Figura 6.5a muestra un esquema del problema a resolver. Nuevamente, no se resolverá la singularidad en el origen ni la periodicidad de la coordenada azimutal.



(a) Planteamiento del problema.



(b) Campo de velocidades.

La solución numérica una vez alcanzado el estado estacionario se muestra en la Figura 6.5b para $Re = 10$. Puede notarse que, debido a que el número de Reynolds es bajo el vórtices es bastante simétrico aunque no completamente (similar a lo que ocurre para el caso cartesiano).

6.5. Programa 15: Convección natural en coordenadas cilíndricas

Finalmente, se resolverá un problema de convección natural en coordenadas cilíndricas considerando el dominio completo en la coordenada azimutal, es decir, incluyendo la periodicidad en la coordenada angular. El esquema físico para este problema se presenta en la Figura 6.6. El cilindro interno se encuentra a una temperatura caliente $T = 1$, en tanto que el exterior se mantiene frío a una temperatura $T = 0$. Ambos cilindros se mantienen en reposo, por lo cual el fluido únicamente se mueve debido a la fuerza de flotación generada por la diferencia de temperaturas impuesta.

Considerando que la aproximación de Boussinesq es válida, el sistema de ecuaciones a resolver se puede escribir de manera adimensional como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + Pr \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + RaPrT \sin \theta, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + Pr \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + RaPrT \cos \theta, \quad (6.9)$$

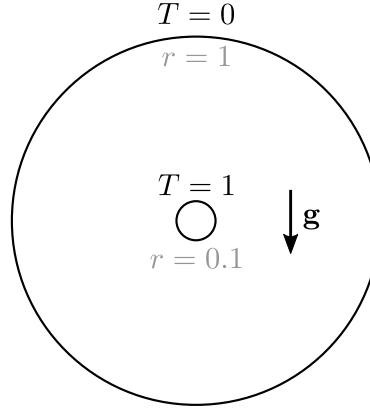
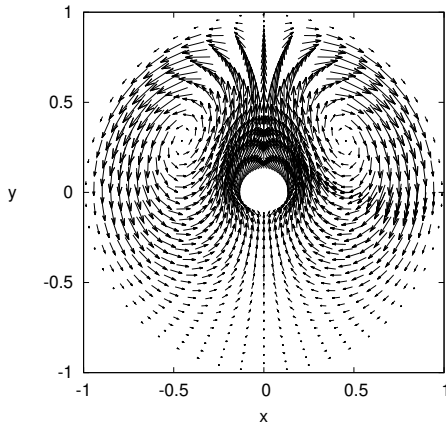


Figura 6.6: Esquema del problema de convección natural.

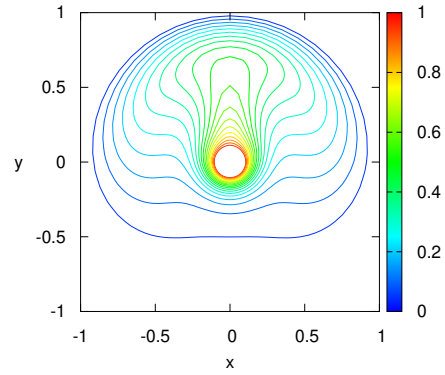
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T, \quad (6.10)$$

donde Pr y Ra son los números de Prandtl y Rayleigh, respectivamente, en tanto que la Ecuación 6.10 expresa la conservación de energía en el sistema.

La Figura 6.7 muestra la solución numérica del sistema considerado para $Pr = 0.7$ y $Ra = 1 \times 10^4$. Dado que ahora el problema implica una ecuación extra, como parte de la solución podemos visualizar los campos de velocidades y temperatura. En la Figura 6.7a se puede observar que, debido a las diferencias de temperatura el fluido asciende desde el cilindro interno hasta que el confinamiento geométrico hace que recircule en el cilindro externo. En la Figura 6.7b se muestran isolíneas de temperatura a partir de las cuales se puede observar que el calor es transportado debido al movimiento convectivo del fluido.



(a) Campo de velocidades.



(b) Isolíneas de temperatura.

Figura 6.7: Convección natural entre cilindros concéntricos.

Bibliografía

- [1] Andersson, B., Andersson, R., Hakasson, L., Mortensen, M., Sudiyo, R., and van Wachem, B. (2012). *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Cambridge University Press.
- [2] Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford.
- [3] Chorin, J. A. and Marsden, J. E. (1997). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer.
- [4] Furlani, E. P. (2001). *Permanent Magnet and Electromechanical Devices*. Academic Press.
- [5] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the finite volume method*. Longman Scientific & Technical.