极坐标 $\vec{r}=r\vec{i}$

$\vec{v}=\dot{r}\vec{i}+r\dot{\varphi}\vec{j}$

$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\vec{i}+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\vec{j}$

曲率半径 $\rho=\dfrac{(1+f'^2)^{3/2}}{|f''|}$

$\rho=\dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}$

转动参考系 $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{r'}$

$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{v'}+\vec{\omega}\times\vec{r'}$,

$\vec{a}=\vec{a_0}+\vec{a'}+\dfrac{D\vec{\omega}}{Dt}\times\vec{r'}+2\vec{\omega}\times\vec{v'}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'})$

有心力场 $\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0 \end{cases}$

$E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)$

$=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}+V(r)=\frac{1}{2}m\dot{r}+V_{有效}(r)$

对万有引力: $r=\dfrac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$

$r_0=\dfrac{L^2}{m\beta}$, $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m\beta^2}}$, $\beta=GMm$

刚体 1. 自由刚体6个自由度 (三个转动、三个平动)

2. 内力做功为0

$dA=\vec{F}_{ik}d\vec{r}_i+\vec{F}_{ki}d\vec{r}_k=\vec{F}_{ik}d(\vec{r}_i-\vec{r}_k)$

$\because(\vec{r}_i-\vec{r}_k)^2=C$ 与 $\vec{F}_{ik}$ 平行

知 $2(\vec{r}_i-\vec{r}_k)\cdot d(\vec{r}_i-\vec{r}_k)=0\Rightarrow(\vec{r}_i-\vec{r}_k)\perp d(\vec{r}_i-\vec{r}_k)$

3. 刚体角速度的绝对性

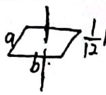
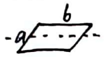
4. 刚体定轴转动对某点的角动量

$\vec{L}=I\vec{\omega}-\sum m_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{\rho}_i$

5. 转动惯量

细棒 $\begin{cases}中心 & \frac{1}{12}ml^2 \\ 端点 & \frac{1}{3}ml^2\end{cases}$ 球 $\frac{2}{5}mR^2$ 球壳 $\frac{2}{3}mR^2$

圆环 mR^2 圆柱 $\frac{1}{2}mR^2$

 $\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$  $\frac{1}{12}ma^2$

平行轴定理 $I_D=I_C+md^2$

垂直轴定理(对薄板) $I_z=I_x+I_y$

流体力学

1. 静力学 $\dfrac{\partial p}{\partial x}=\rho f_i$

eg. 旋转抛物面

$\dfrac{\partial p}{\partial r}=\rho\omega^2 r$, $\dfrac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$

$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2-\rho gz+p_0$

令 $p=p_0\Rightarrow z=\dfrac{\omega^2r^2}{2g}$

2. 伯努力方程 $p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=C$

振动与波

1. 简谐振动 $x=A\cos(wt+\varphi)$

$\tan\varphi=-\dfrac{v_0}{wx_0}$, $A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{w_0^2}}$

2. 阻尼振动 $m\ddot{x}=-kx-\eta\dot{x}$

$\Rightarrow\ddot{x}+2\beta\dot{x}+w_0^2x=0$

阻尼因子/衰减常数 $\beta=\dfrac{\eta}{2m}$

固有频率 $w_0=\sqrt{\dfrac{\beta}{m}}$

特征根 $\lambda=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-w_0^2}$

$\beta>w_0$ 过阻尼 $\beta=w_0$ 临界阻尼 $\beta<w_0$ 欠阻尼

品质因数 $Q=2\pi\dfrac{E}{\Delta E}=\dfrac{w_0}{2\beta}$

3. 受迫振动 $m\ddot{x}=-kx-\eta\dot{x}+F_0\cos(wt)$

$\Rightarrow\ddot{x}+2\beta\dot{x}+w_0^2x=f_0\cos(wt)$

稳态解: $x=A\cos(wt-\varphi)$

$A=\dfrac{f_0}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+4\beta^2w^2}}$, $\tan\varphi=\dfrac{2\beta w}{w_0^2-w^2}$

振幅共振: $\dfrac{dA}{dw}=0\Rightarrow w=\sqrt{w_0^2-2\beta^2}$

能量共振: $\overline{P_{阻}}=\overline{P_{驱}}$

$\dfrac{dp}{dw}=0\Rightarrow w=w_0$

4. 振动的合成与分解

同方向同频率 $x=x_1+x_2=A\cos(wt+\varphi)$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

$\tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

同方向不同频

$x=2A\cos\left(\dfrac{w_1-w_2}{2}t+\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{w_1+w_2}{2}t+\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

拍频 $\nu=|\Delta\nu|=\left|\dfrac{w_1-w_2}{2\pi}\right|$

正交同频 $\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}-\dfrac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$

5. 机械波的表示 $x=A\cos[(t-\frac{y}{v})w]=A\cos 2\pi(\nu t-\frac{y}{\lambda})$

波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

6. 波动方程与波速

$v=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$ 弦: $v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

7. 干涉、驻波

设入射波 $y_1=A\cos(wt-kx)$, 则反射波为 (端点 $x=l$)

① 自由端 (无半波损)

$y_2=A\cos[wt-k(2l-x)]$

$y=y_1+y_2=2A\cos(kx-kl)\cos(wt-kl)$ $x=l$ 为波腹

② 固定端 (有半波损)

$y_2=A\cos[wt+kx-2kl-\pi]$

$y=2A\cos(kx-kl-\frac{\pi}{2})\cos(wt-kl-\frac{\pi}{2})$ $x=l$ 为波节

群速度 $=v-\lambda\dfrac{dv}{d\lambda}$

8. 多普勒

$\nu'=\nu\dfrac{V\pm V_0}{V\mp V_s}$ 相: $\nu'=\nu\sqrt{\dfrac{c+u}{c-u}}$

3. 极坐标系 $\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}-2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

4. 天体运动 $h=r^2\dot{\theta}=|\vec{r}\times\vec{v}|$

$r=\dfrac{P}{1+\varepsilon\cos\theta}$, $P=\dfrac{L^2}{GMm^2}=\dfrac{h^2}{GM}$, $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$

有心力场中质点的运动

离心势能 $F_c=mw^2r=\dfrac{L^2}{mr^3}\Rightarrow V_c(r)=\dfrac{L^2}{2mr^2}$

轨道特征 $V_r=\dot{r}=0$, $r^2+G\dfrac{Mm}{E}r-\dfrac{mh^2}{2E}=0$

(1) 抛物线: $r_1=\dfrac{h^2}{2GM}=\dfrac{P}{2}$ (3) 圆: $r_3=\dfrac{h^2}{GM}=P$

比内公式 $h^2u^2\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\dfrac{f}{m}$, $h=r^2\dot{\theta}$, $u=\dfrac{1}{r}$

5. 转动惯量: 矩形 $\frac{1}{12}m(l_1^2+l_2^2)$ 球体 $\frac{2}{5}mr^2$

圆盘/圆柱 $\frac{1}{2}mr^2$ 薄球壳 $\frac{2}{3}mr^2$

圆环/筒 $\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$ 厚球壳 $\frac{2}{5}m\dfrac{r_2^5-r_1^5}{r_2^3-r_1^3}$

圆柱 $\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}mL^2$

回转半径 $R=\sqrt{\dfrac{I}{m}}$

运动学描述 (瞬心M) $\vec{V_B}=\vec{V_A}+\vec{\omega_A}\times\vec{AB}$

$\vec{R}_{MA}=\vec{AM}=\dfrac{\vec{\omega}\times\vec{v_A}}{\omega^2}$, $\vec{v_p}=\vec{\omega}\times\vec{R_{PM}}$

瞬时轴转动定理 $M_M=I_M\beta+\frac{1}{2}\omega\dfrac{dI_M}{dt}$

6. 伯努利方程 $p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=C$

流量计(U形) $Q_V=\sqrt{\dfrac{2(\rho'-\rho)gh}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}\cdot S_1S_2$

流量计(开口向上) $Q_V=\sqrt{\dfrac{2gh}{S_1^2-S_2^2}}\cdot S_1S_2$

黏滞定律 $\Delta f=\eta\Delta S\dfrac{dv}{dz}$

泊肃叶公式 (圆管内定常层流)

$(p_1-p_2)\pi r^2+2\pi rl\eta\dfrac{dv}{dr}=0$

$v=\dfrac{p_1-p_2}{4l\eta}(R^2-r^2)$, $Q=\dfrac{\pi(p_1-p_2)R^4}{8l\eta}$

斯托克斯公式 $f=6\pi r v\eta$

黏滞阻力 $f=4\pi rv\eta$ 压差阻力 $f=2\pi rv\eta$

7. 同方向同频率简谐振动的合成

$x=A\cos(wt+\varphi)$, $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

同方向不同频率简谐振动的合成

$x=2A\cos\left(\dfrac{w_1-w_2}{2}t+\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{w_1+w_2}{2}t+\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

拍频 $\Delta\nu=|\nu_1-\nu_2|$

振子 $A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{w^2}}$, $\tan\varphi=-\dfrac{v_0}{wx_0}$

复摆 $\ddot{\theta}+\dfrac{mgl_c}{I_0}\theta=0$, $w=\sqrt{\dfrac{mgl_c}{I_0}}$, $L=\dfrac{I_0}{ml_c}$

阻尼振动 $m\ddot{x}=F_x+f_x=-kx-\gamma\dot{x}$

$\Rightarrow\ddot{x}+2\beta\dot{x}+w_0^2x=0$, $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$, $w_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

过阻尼 $\beta>w_0$, $x=e^{-\beta t}\left(A_1e^{\sqrt{\beta^2-w_0^2}t}+A_2e^{-\sqrt{\beta^2-w_0^2}t}\right)$

临界阻尼 $\beta=w_0$, $x=(A_1+A_2t)e^{-\beta t}$

欠阻尼 $\beta<w_0$, $x=Ae^{-\beta t}\cos(wt+\varphi)$

品质因数 $Q=\dfrac{2\pi E}{\Delta E}=\dfrac{w_0}{2\beta}$ $(\beta\ll w_0)$

受迫振动

$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+w_0^2x=f_0\cos wt$, $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$, $w_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $f_0=\dfrac{F_0}{m}$

$x=A\cos(wt+\varphi)$, $A=\dfrac{f_0}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+4\beta^2w^2}}$, $\tan\varphi=-\dfrac{2\beta w}{w_0^2-w^2}$

振幅共振 $w_r=\sqrt{w_0^2-2\beta^2}$, $A_m=\dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{w_0^2-\beta^2}}$

共振峰宽 $w_2-w_1=\Delta w_1+\Delta w_2=2\beta$

共振曲线锐度 $S=\dfrac{w_0}{\Delta w_1+\Delta w_2}=\dfrac{w_0}{2\beta}=Q$

干涉 $y_i=A_i\cos(wt-\frac{2\pi}{\lambda}r_i+\varphi_i)$

$\Rightarrow y=A\cos(wt+\varphi)$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$, $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2+\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$

相反简谐波 $y_i=A\cos(wt\mp\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_i)$

$y=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(wt+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

多普勒效应 $\nu=\dfrac{u\pm V_B}{u\mp V_S}\nu_0$

8. 狭义相对论

$x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $y=y'$, $z=z'$, $t=\dfrac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=\dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$, $u_y=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}u_y'}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$, $u_z=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}u_z'}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$

$u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$, $u_y'=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$, $u_z'=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$

$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$, $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, $E_k=E-E_0$

多普勒效应 $\nu=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\varphi}\nu_0$

(1) $\varphi=0$, $S\to B$, $\nu=\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_0>\nu_0$

(2) $\varphi=\pi$, $\leftarrow S|B$, $\nu=\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\nu_0<\nu_0$

(3) $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, $S\uparrow\downarrow B$, $\nu=\sqrt{1-\beta^2}\nu_0<\nu_0$

孙旭磊

极坐标系 $\frac{d\hat{r}}{d\theta}=\hat{\theta}$，$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}=-\hat{r}$

$\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$，$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

曲率半径 $\rho=\frac{(1+f'^2)^{3/2}}{|f''|}$，$\rho=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}$

非惯性参考系 $\vec{f}_c=mr'\omega^2\hat{r}$，$\vec{f}_{cor}=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'=-2mv'\omega\hat{\theta}$

由于转动参考系角速度 $\vec{\omega}$ 的变化而产生的力：

$\vec{f}=-m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'=-mr'\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta}$

角动量 $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$，力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

有心力场 $E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)$

$=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}+V(r)=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_{有效}(r)$

天体运动 $h=r^2\dot{\theta}=|\vec{r}\times\vec{v}|$

$r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$，$r_0=\frac{L^2}{m\beta}$，$\varepsilon=\sqrt{1+2\frac{EL^2}{m\beta^2}}$，$\beta=GMm$

转动惯量 圆柱、圆盘 $\frac{1}{2}mR^2$　　球 $\frac{2}{5}mR^2$

圆环(转轴沿直径) $\frac{1}{2}mR^2$　　球壳 $\frac{2}{3}mR^2$

细棒 中心 $\frac{1}{12}ml^2$，端点 $\frac{1}{3}ml^2$　　厚球壳 $\frac{2}{5}m\frac{r_2^5-r_1^5}{r_2^3-r_1^3}$

$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$　　$\frac{1}{12}ma^2$

圆环/筒 $\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$　　圆柱 $\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}mL^2$

对于圆环、圆盘、球、球壳，在瞬心系中，惯性力对瞬时转轴的力矩为0，故可不考虑惯性力.

- 平行轴定理 $I=I_c+md^2$
- 垂直轴定理(薄板) $I_z=I_x+I_y$

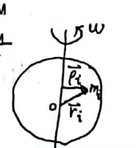
刚体运动学 (M为瞬心) $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}_A\times\vec{AB}$

$\vec{R}_{MA}=\vec{AM}=\frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_A}{\omega^2}$，$\vec{v}_P=\vec{\omega}\times\vec{R}_{PM}$

瞬时轴转动定理 $M_M=I_M\beta+\frac{1}{2}\omega\frac{dI_M}{dt}$

刚体定轴转动对某点的角动量

$\vec{L}=I\vec{\omega}-\sum m_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{\rho}_i$



流体静力学 平衡方程 $\rho\vec{f}=\nabla p$

eg. 旋转抛物面 $\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\omega^2r$，$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$

(积) $p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2-\rho gz+p_0$

令 $p=p_0\Rightarrow z=\frac{\omega^2r^2}{2g}$

伯努利方程 $\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gz+p=C$

文丘里流量计 $Q=A_1A_2\sqrt{\frac{2gh}{A_1^2-A_2^2}}$　U形流量计 $Q=A_1A_2\sqrt{\frac{2(\rho'-\rho)gh}{\rho(A_1^2-A_2^2)}}$

皮托管测流速 $v=\sqrt{2gh}$

黏性流体 黏滞定律 $\Delta f=\eta\Delta S\frac{dv}{dz}$ (相邻两层)

圆管内定常层流 $(p_1-p_2)\pi r^2+2\pi rl\eta\frac{dv}{dr}=0$

$\Rightarrow v=\frac{p_1-p_2}{4l\eta}(R^2-r^2)$，$Q=\frac{\pi(p_1-p_2)R^4}{8l\eta}$ (泊肃叶公式)

雷诺数 $Re=\frac{vr\rho}{\eta}$

黏滞阻力 $=4\pi rv\eta$，压差阻力 $=2\pi rv\eta$

斯托克斯公式 $f=6\pi rv\eta$

矢量 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$　　**单位** $1dyn=10^{-5}N$

简谐振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$，$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}$

$\ddot{x}+\omega x=0$，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$　　$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$

复摆 $I_0\ddot{\varphi}=-mgh\varphi$

$T=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$

等值摆长 $l_0=\frac{I_0}{mh}=\frac{I_C+mh^2}{mh}=h+\frac{I_C}{mh}$

振动的合成 · 同方向同频率 $x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$，$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

· 同方向不同频 $x=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$

拍频 $\Delta\nu=|\nu_1-\nu_2|=\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}\right|$

· 正交同频 $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$

$\varphi_1=\varphi_2$，$\varphi_1=\varphi_2+\pi$：直线　　$\varphi_1-\varphi_2=\frac{\pi}{2}$：椭圆(逆时针/左旋)

阻尼振动 $m\ddot{x}=-kx-h\dot{x}\Rightarrow\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$，$\omega_0^2=\frac{k}{m}$ (固有角频率)，$2\beta=\frac{h}{m}$ (阻尼因数)

· 欠阻尼 $\beta<\omega_0$：$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$，$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega_f t+\varphi)$

· 临界阻尼 $\beta=\omega_0$：$x=(A_1+A_2t)e^{-\beta t}$

· 过阻尼 $\beta>\omega_0$：$x=e^{-\beta t}\left(A_1e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}+A_2e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right)$

品质因数 $Q=\frac{2\pi E}{\Delta E}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}$ $(\beta\ll\omega_0)$

受迫振动 · 恒定外力：仅改变平衡位置

· 周期外力：$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t$

稳态解 $x=A\cos(\omega t-\varphi)$ 强迫力提供的能量全用来补偿阻尼能耗

$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$，$\tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

振幅共振：$\frac{dA}{d\omega}=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

能量共振：$\frac{dP}{d\omega}=0\Rightarrow\omega=\omega_0$

共振峰宽 $\omega_2-\omega_1=\Delta\omega_1+\Delta\omega_2=2\beta$

共振峰锐度 $S=\frac{\omega_0}{2\beta}=Q$

系统放大倍数 $k=\frac{f_0/2\beta\omega_0}{f_0/\omega_0^2}=\frac{\omega_0}{2\beta}=Q$

波 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]=A\cos(\omega t+\varphi_1)$

波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

波的干涉 $y_i=A\cos(\omega t\mp kx+\varphi_i)$ (相反传播)　相邻波腹距 $\frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$

设入射波 $y_1=A\cos(\omega t-kx)$，则反射波为(端点 $x=l$)：

· 自由端(无半波损)：$y_2=A\cos(\omega t+kx-2kl)$

$y=y_1+y_2=2A\cos(kx-kl)\cos(\omega t-kl)$　$x=l$ 为波腹

· 固定端(有半波损)：$y_2=A\cos(\omega t+kx-2kl-\pi)$

$y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx-kl-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t-kl-\frac{\pi}{2}\right)$　$x=l$ 为波节

群速度 $v_g=v_p-\lambda\frac{dv_p}{d\lambda}=\frac{\omega_g}{k_g}$

多普勒效应 非相：$\nu'=\frac{v\pm v_0}{v\pm v_s}\nu$　　$\nu'=\frac{v+v_D\cos\beta}{v-v_s\cos\alpha}\nu$

相：$\nu'=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\varphi}\nu$

· $\varphi=0$：$\nu'=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu$　　· $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$：$\nu'=\sqrt{1-\beta^2}\nu$.

狭义相对论 $x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，$y'=y$，$z'=z$，$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

K　K' → v

$u_x'=\frac{u_x-v}{1-u_x\frac{v}{c^2}}$，$u_y'=\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x\frac{v}{c^2}}$，$u_z'=\frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x\frac{v}{c^2}}$

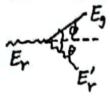
角度变换公式：(粒子运动) $\tan\theta'=\frac{u\sin\theta\sqrt{1-v^2/c^2}}{u\cos\theta-v}$

(光行差公式) $\tan\theta'=\frac{\sin\theta\sqrt{1-v^2/c^2}}{\cos\theta-v/c}$，$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$

钟慢 $\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$　　**尺缩** $L=L'\sqrt{1-v^2/c^2}$

动力学 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$　　$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$ (光子 $p=\frac{E}{c}$)　　$E_k=E-E_0$

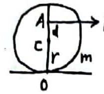
康普顿散射



$$\begin{cases}m_0c^2+h\nu=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+h\nu'\\\frac{h\nu}{c}=\frac{h\nu'}{c}\cos\theta+\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\phi\\\frac{h\nu'}{c}\sin\theta=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\phi\end{cases}$$

$\Rightarrow h\nu'=\frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}$，$\Delta\lambda=2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$

刚体例题 纯滚动. 判断O处静摩擦力f方向.

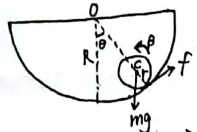


设无摩擦，则 $Fd=I\beta$，$I=\frac{2}{5}mr^2$，$a_c=\frac{F}{m}$

$a_0=a_c-\beta r=\frac{F}{m}\left(1-\frac{5d}{2r}\right)$

$\therefore d<\frac{2}{5}r$ 时，$a>0$，f与F反向；$d>\frac{2}{5}$ 时同向.

振动例题(刚体) 纯滚动、小振动.



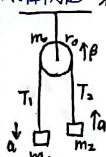
$$\begin{cases}-mg\sin\theta+f=m(R-r)\ddot{\theta}\\r\beta=-(R-r)\ddot{\theta}\\fr=\frac{2}{5}mr^2\beta\end{cases}$$

$\Rightarrow\frac{7}{5}(R-r)\ddot{\theta}+g\theta=0$，$T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$

刚体例题 纯滚动

$$\begin{cases}mg\cos\theta=m\dot{\theta}^2(R+r)+m\dot{v}\sin\theta+N\\m(R+r)\ddot{\theta}=mg\sin\theta+m\dot{v}\cos\theta-f\\Mv+m(v-(R+r)\dot{\theta}\cos\theta)=0\\\dot{\theta}(R+r)-\omega r=0\\fr=\frac{2}{5}mr^2\dot{\omega}\end{cases}$$

刚体例题 有质量的滑轮



$$\begin{cases}m_1g-T_1=m_1a\\T_2-m_2g=m_2a\\(T_1-T_2)R=\frac{1}{2}m_0R^2\beta\\\beta\cdot R=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2(m_1-m_2)}{2(m_1+m_2)+m_0}g\\T_1=\frac{m_1(4m_2+m_0)}{2(m_1+m_2)+m_0}g\\T_2=\frac{m_2(4m_1+m_0)}{2(m_1+m_2)+m_0}g\end{cases}$$

刚体例题 有摩擦力矩.

从静止开始下落需时间t

测转动惯量 $I=\frac{(m_1-m_2)g-2h\left(\frac{m_1}{t_1^2}-\frac{m_2}{t_2^2}\right)}{2h\left(\frac{1}{t_1^2}-\frac{1}{t_2^2}\right)}R^2$

刚体例题 纯滚动.

$$\begin{cases}mg\sin\theta-f=ma\\f\cdot r=I\beta\\a=\beta r\end{cases}\Rightarrow a=\frac{mr^2}{I+mr^2}g\sin\theta$$

求纯滚条件：$mg\cos\theta=N$，$f\leq\mu N$　$\Rightarrow\mu\geq\frac{\tan\theta}{\frac{mr^2}{I}+1}$

球缺体积 $V=\frac{\pi}{3}(3R-h)\cdot h^2$

模量 杨氏模量 $Y=\frac{应力}{应变}=\frac{F/S}{\Delta l/l}$　　切变模量 N

固体中纵波 $u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$，横波 $\sqrt{\frac{N}{\rho}}$

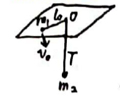
弹性绳上横波 $u=\sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$ → 线密度.

狭义相对论 $a_x=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{vu_x'}{c^2}\right)^3}a_x'$，$a_y=\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{vu_x'}{c^2}\right)^2}a_y'-\frac{\frac{vu_y'}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{vu_x'}{c^2}\right)^3}a_x'$

$p_x'=\frac{p_x-vE/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，$p_y'=p_y$，$p_z'=p_z$，$E'=\frac{E-vp_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$f_x'=\frac{f_x-\frac{v}{c^2}\vec{u}\cdot\vec{f}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$，$f_y'=\frac{f_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$，$f_z'=\frac{f_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$

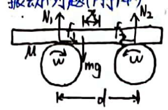
振动例题 给 m_1 一个径向的小冲量，求 m_2 振动角频率.



$$\begin{cases}l_0=\frac{m_1v_0^2}{m_2g}\\m_1\frac{v^2}{l+l_0}-T=m_1\ddot{l}\\m_1v(l+l_0)=m_1v_0l_0\\T-m_2g=m_2\ddot{l}\end{cases}\xrightarrow[\text{略去小量}]{\text{泰勒展开}}(m_1+m_2)\ddot{l}+\frac{3m_2^2g^2}{m_1v_0^2}l=0$$

$\Rightarrow\omega_0=\frac{m_2g}{m_1v_0}\sqrt{\frac{3m_1}{m_1+m_2}}$

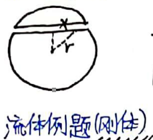
振动例题(刚体) 求周期



$$\begin{cases}N_1\left(\frac{d}{2}-x\right)=N_2\left(\frac{d}{2}+x\right)\\mg=N_1+N_2\\f_1=\mu N_1,\ f_2=\mu N_2\end{cases}$$

$\Rightarrow-\frac{2\mu mg}{d}x=m\ddot{x}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$

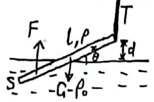
振动例题(天体) 沿天体一条弦挖隧道



$-\frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot m}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=m\ddot{x}$

即 $\ddot{x}+\frac{4}{3}G\pi\rho x=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}$

流体例题(刚体)

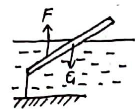


$G=\rho lSg$，$F=\rho_0S(l-x)g$

$G\cdot\frac{l}{2}\cos\theta=F\left(\frac{l-x}{2}+x\right)\cos\theta$

$\Rightarrow x=l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$

$\theta=\arcsin\frac{d}{x}=\arcsin\frac{d}{l\sqrt{1-\rho/\rho_0}}$

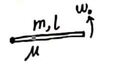


$G\cdot\frac{l}{2}\cos\theta=F\left(\frac{l-x}{2}\right)\cos\theta$

$\Rightarrow x=l(1-\sqrt{\rho/\rho_0})$

$\theta=\arcsin\frac{d}{l(1-\sqrt{\rho/\rho_0})}$

刚体例题 求从转动到停止所需时间.



$M=\int_0^l x\cdot\frac{dx}{l}m\cdot\mu g=\int_0^l\frac{\mu mg}{l}xdx=\frac{\mu mgl}{2}$

$I=\frac{1}{3}ml^2$，$\beta=\frac{M}{I}=\frac{3\mu g}{2l}$，$t=\frac{\omega_0}{\beta}=\frac{2l\omega_0}{3\mu g}$

相对论例题

$F=d(mv)/dt\Rightarrow Fds=mvdv+v^2dm$

$v^2=\left(1-\frac{m_0^2}{m^2}\right)c^2\Rightarrow mvdv=\frac{m_0^2c^2}{m^2}dm$

$\rightarrow W=\int Fds=(m-m_0)c^2$

相对论例题

α星距地球4.3 ly　A以0.8c（v）去该星，往返途中隔0.01a发无线电信号，B在地球上隔0.01a发信号. (1) A到α星前，B收到几个信号？

→地系：$x=4.3l.y$，$T=\frac{x}{v}$. A到α星时，B恰收到A在M点发出的信号.

$\frac{OM}{c}=\frac{x-OM}{v}\Rightarrow OM=\frac{cx}{c+v}$，$t=\frac{OM}{v}\Rightarrow t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}OM}{\sqrt{1-\beta^2}}=1.796a\Rightarrow179$个.

(2) A到α星前，A收到几个信号？→ 飞船系.同理 ⇒107个.

(3) A、B共各收几个？ A:1075　B:645

(4) A返回地球时，比B年轻4.3岁. (在A系中：到达α星时刻，瞬间由K'系跳到K''系，A系时间不变，K系α星时间不变，地球时间突增)