力学 A（PHYS1001A.04）：刚体部分习题课

Course NOT easy: The Survival Guide 8, Just Roll With It

Yu Shu & Chihao Shi

School of Physics, USTC

Dec.15, 2025

刚体的核心约束

定义

刚体是任意两质点间距离保持恒定的质点系。

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = C_{ij} \quad (\text{Const}) \tag{1}$$

速度场推论： 对时间求导，得到刚体运动学的根本判据：

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \tag{2}$$

这意味着：刚体上任意两点的**相对速度**，必须**垂直**于它们的连线。

物理直觉

刚体 = 彻底冻结变形的流体。

- $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (不可压缩)
- 无剪切形变

自由度 (Degrees of Freedom)

从 $3N$ 到有限个自由度的收敛：

运动类型	DOF	独立坐标示例
自由刚体 (3D)	**6**	x_c, y_c, z_c (平动) + 3 个欧拉角 (转动)
定点运动 (Fixed Point)	**3**	ψ, θ, ϕ (欧拉角)
平面平行运动 (Planar)	**3**	x, y (基点) + θ (转角)
定轴转动 (Fixed Axis)	**1**	θ (转角)

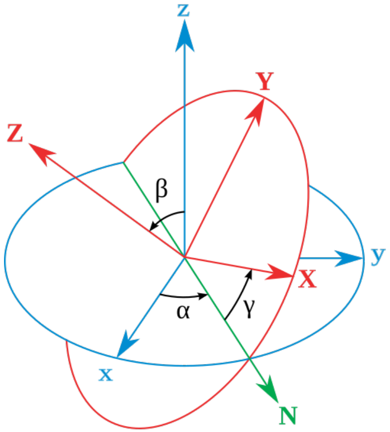
思考

如果你算出的未知数个数 > DOF，说明你可能遗漏了某些几何约束方程（如纯滚动条件）。

刚体的坐标系：欧拉角

描述定点转动的三个独立变量：将固定系 $Oxyz$ 变为固连系 $Ox'y'z'$，需进行三次旋转（$Z \to X \to Z$ 顺规）。

- **1. 进动角 (Precession)** α
  - 绕固定轴 z 旋转。
  - 决定了 **节线** ON (Line of Nodes) 的位置。
- **2. 章动角 (Nutation)** β
  - 绕节线 ON 旋转。
  - 决定了自转轴 z' 与固定轴 z 的夹角。
- **3. 自转角 (Spin)** γ
  - 绕固连轴 z' 旋转。
  - 决定了刚体绕自身轴的转动。



角速度合成公式

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{k} + \dot{\beta}\vec{n} + \dot{\gamma}\vec{k}'$$

角量的矢量性

- **有限角位移 $\Delta\vec{\theta}$：不是矢量。**
  - 原因：不满足矢量加法的交换律（先绕 X 转 90 度再绕 Y 转 $\neq$ 反之）。
- **无限小角位移 $d\vec{\theta}$：是矢量。**
- **角速度 $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$：是矢量。**

角速度的“全域性”：对于刚体上任意两点 A, B：

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}_{\text{body}}$$

重要概念

$\vec{\omega}$ 是一个**自由矢量**，不依附于任何特定点或轴。

角位移的矢量性证明

核心判据：若物理量是矢量，必须满足加法交换律 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$。对于转动，对应旋转矩阵的乘法交换律 $R_1R_2=R_2R_1$。

设绕两不同轴转动 θ_1,θ_2，旋转矩阵泰勒展开至二阶 (S 为反对称生成元矩阵)：

$$R(\theta)=I+\theta S+\frac{1}{2}\theta^2S^2+O(\theta^3)\quad(\text{其中}\sin\theta\approx\theta,\cos\theta\approx1-\theta^2/2)\tag{3}$$

1. 有限角位移 $\Delta\vec{\theta}$ (不可易)

保留二阶项，比较转动顺序：

$$R_1R_2\approx I+\theta_1S_1+\theta_2S_2+\theta_1\theta_2S_1S_2$$
$$R_2R_1\approx I+\theta_2S_2+\theta_1S_1+\theta_2\theta_1S_2S_1$$

由于矩阵乘法一般不可交换 ($S_1S_2\neq S_2S_1$)，故：

$$R_1R_2\neq R_2R_1\implies \text{非矢量}$$

2. 无限小角位移 $d\vec{\theta}$ (可易)

令 $\theta\to d\theta$，忽略二阶及高阶无穷小 ($d\theta^2\approx0$)：

$$R_1R_2\approx(I+d\theta_1S_1)(I+d\theta_2S_2)$$
$$\approx I+d\theta_1S_1+d\theta_2S_2$$
$$R_2R_1\approx I+d\theta_2S_2+d\theta_1S_1$$

显然相等！满足交换律。

速度场：基点法

任选刚体上一点 A 为基点，另一点 B 的速度可分解为：

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_A}_{\text{随基点平动}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}}_{\text{绕基点转动}} \tag{4}$$

应用场景：

- 已知铰链点速度
- 已知滚动接触点速度

几何意义：刚体的平面运动总是可以看作：

1. 随质心的平动
2. 绕质心的转动

加速度场

对速度公式求导，注意 $\vec{r}_{AB}$ 本身也在旋转 ($\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$)。

刚体两点加速度关系

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \tag{5}$$

- $\vec{a}_A$：基点加速度（平动贡献）
- $\vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB}$：**切向加速度**，源于 ω 大小改变。
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$：**法向加速度**，源于 ω 方向改变。

Survival Tip

90% 的错误源于漏掉最后一项（法向加速度）。在平面运动中，它简化为指向转轴的 $-\omega^2\vec{r}_{AB}$。

瞬时速度中心 (Instantaneous Center, ICR)

对于平面平行运动，任一瞬时必存在一点 P (可能在刚体延伸面上)，使得 $\vec{v}_P = 0$。
瞬心法的威力：

$$\vec{v}_{any} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P\to any}$$

$$v = \omega \cdot r$$

将复杂的平面运动瞬间简化为定轴转动。

寻找瞬心：

1. 两点速度垂线的交点。
2. 纯滚动接触点。

瞬心的加速度陷阱

瞬心 P 的速度为 0，但加速度 $\vec{a}_P$ 通常不为 0！
它通常指向质心（向心加速度）。
$\Rightarrow$ 严禁在一般情况下对瞬心列 $M_P = J_P\alpha$！ (除非补上惯性力矩)

转动惯量 J：质量的几何化

定义：量度刚体转动惯性大小的物理量。

$$J = \int r_\perp^2 dm = \int \rho r_\perp^2 dV \tag{6}$$

注意：$r_\perp$ 是质元到**转轴**的垂直距离。

回转半径：

$$J = mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{J/m}$$

工程意义：将刚体等效为一个薄圆环。

两大核心定理

1. 平行轴定理

$$J_d = J_c + md^2$$

陷阱：必须有一个轴是通过**质心 (C)** 的。不能在任意两轴间直接转换！

2. 垂直轴定理

$$J_z = J_x + J_y$$

限制：仅适用于**平面薄板**刚体。

定轴转动定律

对于固定轴 z，动力学方程为标量形式：

转动定律

$$M_z = J_z\alpha = J_z\frac{d\omega}{dt} \tag{7}$$

- M_z：外力对转轴的力矩代数和。
- J_z：刚体绕该轴的转动惯量。

力偶

- 定义：大小相等、方向相反、不共线的一对力。
- **性质**：力偶矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ 与参考点位置**无关**。
- 推论：可以在刚体平面内任意移动力偶，不改变其转动效应。

核心难点：$\vec{L}$ 与 $\vec{\omega}$

直觉 vs 现实

很多同学认为角动量 $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$。**错！** 这仅在转轴是**惯量主轴**时成立。

对于一般定轴转动，角动量矢量分解为：

$$\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_h \tag{8}$$

1. 纵向分量 $\vec{L}_z$

- 平行于转轴
- 大小 $L_z = J_z \omega$
- 对应标量方程 $M_z = dL_z/dt$

2. 横向分量 $\vec{L}_h$

- 垂直于转轴
- 由质量分布的**不对称性**（惯量积）产生
- 随刚体一起旋转！

物理后果：动反力

根据角动量定理 $\vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_z + \vec{L}_h) = \underbrace{J_z\dot{\omega}\vec{k}}_{\text{改变转速}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{L}_h}_{\text{改变方向}}$$

即使 ω 恒定 $(\alpha = 0)$ ...

只要 $\vec{L}_h \neq 0$，就有 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}_h \neq 0$。

这意味着：**轴承必须提供一个旋转的力矩**来强制刚体绕轴转动。

应用场景：

- **静平衡**：质心在转轴上（消除重力矩）。
- **动平衡**：转轴是惯量主轴（消除 $\vec{L}_h$，消除轴承震动）。

进阶：惯量张量 (Inertia Tensor)

角动量与角速度的线性关系可以用矩阵表达：

$$\vec{L} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{9}$$

- **对角元** J_{xx}：绕轴转动惯量。
- **非对角元** $J_{xy} = -\int xydm$：**惯量积** (Product of Inertia)，表征质量分布的不对称性。

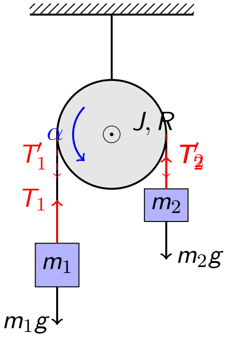
主轴定理

实对称矩阵 $\mathbf{J}$ 必可对角化。即任何刚体都存在 3 个正交的主轴，绕主轴转动时 $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$。

经典模型 A：带质量滑轮的阿特伍德机

场景：滑轮质量 M，半径 R，转动惯量 J。悬挂质量 $m_1 > m_2$。绳索不可伸长且无相对滑动。
核心差异：由于滑轮有惯性，驱动它转动需要力矩，因此两边绳子张力不再相等：$T_1 \neq T_2$
解题方程组：

1. **质点动力学** (牛顿第二定律)：$m_1 g - T_1 = m_1 a$，$T_2 - m_2 g = m_2 a$
2. **刚体定轴转动**：$(T_1 - T_2)R = J\alpha$
3. **运动学约束** (无滑移)：$a = R\alpha$



结论

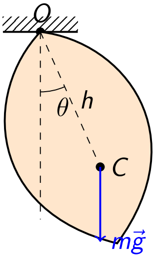
$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + J/R^2}$。滑轮的转动惯量等效增加了系统的“惯性质量”。

经典模型 B：复摆 (Physical Pendulum)

场景：刚体绕不通过质心的水平轴 O 转动。质心 C 到轴距离为 h。

动力学分析：

- **重力矩**：$M = -mgh\sin\theta$
- **转动方程**：$J_O\ddot{\theta} = -mgh\sin\theta$
- **微小摆动** $(\sin\theta \approx \theta)$：$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J_O}\theta = 0$



关键参数：

- **周期**：$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgh}}$
- **平行轴定理应用**：$J_O = J_C + mh^2$
- **等效摆长**：$l_{eq} = \frac{J_O}{mh} = h + \frac{J_c}{mh}$

拓展：打击中心 (Center of Percussion)

若在 O 点下方距离 l_{eq} 处（打击中心）施加水平冲击，O 点处瞬时无水平反力。应用：棒球棒击球的最佳位置（不震手）。

1 内容回顾与补充拓展
- 刚体运动学
- 刚体定轴转动
- 刚体的平动
- 刚体的能量
- 刚体的定点运动
- 总结与解题方法论

2 作业习题讲解

3 Q&A

分而治之：运动分解的哲学

平面平行运动 = **随基点的平动** + **绕基点的转动**。

为什么永远首选“质心”作为基点?

动力学方程中，若选任意点 A 为参考点，力矩方程为：

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \times \vec{P}$$

只有当 A 点满足以下任一条件时，惯性项 $\vec{v}_A \times \vec{P}$ 消失，方程简化为 $M = J\alpha$：

1. A 是固定点 $(\vec{v}_A = 0)$
2. A 是质心 $(\vec{v}_A \parallel \vec{P} = m\vec{v}_c)$
3. A 的加速度指向质心 (特殊情况)

标准动力学方程组

对于平面平行运动，我们总是列写以下三个独立的标量方程：

1. 质心运动定理 (平动)

$$\sum F_x = ma_{cx} \tag{10}$$

$$\sum F_y = ma_{cy} \tag{11}$$

2. 绕质心转动定理 (转动)

$$\sum M_c = J_c\alpha \tag{12}$$

注意：此处 J_c 必须是绕质心的转动惯量。

---

3. 运动学约束

- 需要寻找 a_c 与 α 之间的几何关系。
- 典型约束：纯滚动 $\Rightarrow a_c = R\alpha$。

纯滚动：约束的艺术

定义

刚体与接触面之间无相对滑动 $\Rightarrow$ 接触点相对速度为 0。

$$v_{\text{contact}} = 0 \implies v_c = R\omega, \quad a_c = R\alpha$$

静摩擦力的“二律背反”：

- **动力学角色：** 它是“约束力”(Constraint Force)。
  - 大小：未知！由牛顿方程解出，**绝不是** μN。
  - 判据：解出 f 后，若 $f \leq \mu_s N$，假设成立；否则打滑。
- **能量角色：** 它是“不做功的力”。
  - 接触点瞬时位移为 0 $\Rightarrow$ 功率 $P = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$。
  - 功能：它不消耗机械能，只负责在平动能和转动能之间进行转化。

Survival Skill：摩擦力方向怎么判？

场景：轮子受外力 F 作用

摩擦力方向并不总是阻碍运动，它阻碍的是“相对滑动的趋势”。

方法一：物理直觉法

1. 假设地面光滑 ($\mu = 0$)。
2. 分析接触点 P 的加速度 $a_P = a_c - R\alpha$ 的方向。
3. 摩擦力方向与 a_P 相反。

方法二：代数法

1. 永远假设摩擦力 f 指向正方向 (如向右)。
2. 列方程：$F + f = ma_c$，$FR - fR = J\alpha$。
3. 解出 f。
4. 若 $f > 0$，方向正确；若 $f < 0$，方向反向。

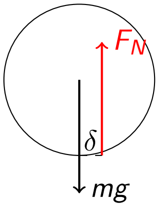
滚动摩阻：不是力，是力矩

现象：即使是纯滚动，物体最终也会停下来。静摩擦力不做功，那能量去哪了？

机制：

- 刚体/地面发生微小形变。
- 支持力 F_N 分布不均，合力作用点向前偏移距离 δ。
- 产生阻碍转动的力偶矩：

$$M_f = F_N \cdot \delta \tag{13}$$



δ 称为滚动摩阻系数（长度量纲）。通常 $\delta \ll R$，所以滚动比滑动省力得多。

瞬心法动力学的雷区

我们知道瞬心 P 处速度 $v_P = 0$，那么能否直接写 $M_P = J_P\alpha$?

瞬心法动力学的雷区

我们知道瞬心 P 处速度 $v_P = 0$，那么能否直接写 $M_P = J_P\alpha$?

一般情况：NO!

对任意动点 A 的力矩方程为：

$$\vec{M}_A = J_A\vec{\alpha} + \vec{r}_{AC} \times m\vec{a}_A$$

瞬心 P 的加速度 $\vec{a}_P$ 通常指向质心 (向心加速度 $R\omega^2$)，不为零！

瞬心法动力学的雷区

我们知道瞬心 P 处速度 $v_P = 0$，那么能否直接写 $M_P = J_P\alpha$?

一般情况：NO!

对任意动点 A 的力矩方程为：

$$\vec{M}_A = J_A\vec{\alpha} + \vec{r}_{AC} \times m\vec{a}_A$$

瞬心 P 的加速度 $\vec{a}_P$ 通常指向质心 (向心加速度 $R\omega^2$)，不为零!

特例豁免 (The Loophole)：对于圆柱/球体做纯滚动：

- 瞬心 P 为接触点。
- $\vec{a}_P$ 指向圆心 C (质心)。
- 位置矢量 $\vec{r}_{PC}$ 与 $\vec{a}_P$ 平行 $\Rightarrow$ 叉乘项为 0。

只有在这种几何对称且纯滚动的特例下，才可以直接用 $M_P = J_P\alpha$ (其中 $J_P = J_c + mR^2$)。

刚体平动解题决策树

拿到一个刚体平面运动问题：

1. **问什么？**
   - 求速度/角速度/位移 → **能量法。**
   - 求加速度/力/摩擦力 → **动力学方程组。**
2. **摩擦力怎么处理？**
   - 题目说“纯滚动”→ 设静摩擦力 f 为未知数，列 $a = R\alpha$。
   - 题目说“打滑/光滑”→ $f = \mu N$ 或 $f = 0$，无运动学约束。
   - 临界状态 → 先按纯滚动算，看算出的 f 是否大于 μN。
3. **方程怎么列？**
   - 质心平动 + 绕质心转动。
   - (仅限纯滚圆轮) 绕接触点转动 ($M_P = J_P\alpha$)。

能量法的重要作用 (Why Energy?)

标量的优雅

动力学方程 ($\vec{F} = m\vec{a}, \vec{M} = d\vec{L}/dt$) 是矢量微分方程，处理方向变化（如法向加速度）非常繁琐。能量法是标量方程，是牛顿定律的**空间积分**形式。

何时使用能量法?

- ✔ 求速率 v、角速度 ω
- ✔ 求位移 x、角度 θ
- ✔ 系统自由度少，约束力不做功

何时不能用?

- ✘ 求时间 t (除非积分)
- ✘ 求约束力 N, f (能量把它们“积”没了)
- ✘ 碰撞瞬间 (需用角动量)

柯尼希定理：动能的彻底解耦

对于平面平行运动，刚体总动能可以无交叉项地分解：

König's Theorem

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2}mv_c^2}_{\text{随质心平动}} + \underbrace{\frac{1}{2}J_c\omega^2}_{\text{绕质心转动}} \tag{14}$$

为什么没有交叉项?

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_i')^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 + \vec{v}_c \cdot \left(\sum m_i \vec{v}_i'\right)$$

在质心系中，总动量 $\sum m_i \vec{v}_i' = 0$，因此交叉项消失。

警告 (Warning)

此公式仅对**质心**成立。若选其他基点 A，必须加上交叉项，或者使用瞬心法。

瞬心法：定轴转动的等效

若已知瞬时速度中心 (ICR) P，刚体看似绕 P 做定轴转动。

$$E_k = \frac{1}{2} J_P \omega^2 \tag{15}$$

这与柯尼希定理矛盾吗?

不矛盾。利用平行轴定理 $J_P = J_c + md^2$:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}(J_c + md^2)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}m\underbrace{(d\omega)^2}_{v_c^2} \quad \text{(得证)} \end{aligned}$$

技巧

对于纯滚动轮子，用 $E_k = \frac{1}{2}J_{\text{contact}}\omega^2$ 计算动能通常比拆成两项快一倍。

刚体做功的微观机制

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A \quad (\text{力作用于 A 点})$$

$$dW = M_z d\theta \quad (\text{力矩做功})$$

1. 内力做功之和为零

- 刚体任意两点间距不变 $\Rightarrow$ 沿相互作用力方向无相对位移。
- 对比：流体（压缩做功）、弹簧（形变做功）内力做功不为零。

2. 重力的功

- 无论刚体如何翻滚，重力功只取决于质心高度变化。
- $W_g = -\Delta E_p = mg(h_{c1} - h_{c2})$。

The Big Trap: 摩擦力做功吗?

结论先行

- **纯滚动中的静摩擦力：不做功。**
- **有滑动时的动摩擦力：做负功**（耗散机械能）。

深度解析：为什么静摩擦力不做功?

- 功率 $P = \vec{f} \cdot \vec{v}_{\text{作用点}}$。
- 在纯滚动中，作用点（接触点）是瞬心，其瞬时速度 $\vec{v} = 0$。
- $\therefore P = 0 \Rightarrow W = 0$。

物理图像

静摩擦力不消耗能量，它只是能量的**搬运工**：它将轮子的转动动能转化为平动动能（加速过程），或反之。

综合应用：杆的滑落 (Slide 82)

场景：杆长 L，靠墙角静止释放。求脱离墙面时的角度 θ。
这是连接能量法与动力学方程的经典桥梁。

综合应用：杆的滑落 (Slide 82)

场景：杆长 L，靠墙角静止释放。求脱离墙面时的角度 θ。
这是连接能量法与动力学方程的经典桥梁。

Step 1: 能量法求速度 (未脱离前)

$$mgh = \frac{1}{2}J_{ICR}\omega^2$$

利用几何关系求出 $\omega(\theta)$。

Step 2: 微分求加速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega$$

求出 $\alpha(\theta)$。

Step 3: 动力学求力列写水平/垂直方向牛顿方程：

$$N_{\text{wall}} = ma_{cx}$$

需要将 a_c 用 α, ω 表示。

Step 4: 脱离判据令 $N_{\text{wall}} = 0$，解出临界角 θ。

能量模块 Survival Guide

1. **守恒判据：**
   - 只有重力做功 → 守恒。
   - 纯滚动 (有摩擦力但无位移) → 守恒。
   - 有滑动/空气阻力/轴承摩擦 → 不守恒 (用功能原理)。
2. **公式首选：**
   - 平面运动一般用柯尼希定理： $E=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$。
   - 纯转动用： $E=\frac{1}{2}J_{axis}\omega^2$。
3. **解题流：**
   - 问速度/位置 → 能量法。
   - 问力/时间 → 动力学/动量法。
   - 问变力做功 → 动能定理。

定点运动基础：直觉的失效

定义：刚体上有一点 O 固定不动。

- 自由度：**3** (欧拉角 ψ, θ, ϕ)。
- 瞬时轴：刚体绕通过 O 点的瞬时轴转动，但轴的方向在空间和刚体内部都在变化。

核心方程：

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \tag{16}$$

The Tensor Trap

在定轴转动中，我们习惯了 $L = J\omega$。但在定点运动中：

$$\vec{L} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$$

除非绕**惯量主轴**转动，否则 $\vec{L}$ 与 $\vec{\omega}$ **不平行**！

这意味着：即使没有外力矩 $(\vec{M} = 0)$，$\vec{L}$ 守恒不代表 $\vec{\omega}$ 恒定（欧拉动力学方程的物理背景）。

陀螺进动：为什么推不倒？

场景： 高速旋转的陀螺 ($|\vec{\omega}_s|$ 很大)，受重力矩作用。

直觉预期： 重力矩试图让陀螺倒下 (θ 增大)。

实际现象： 陀螺不倒，反而绕竖直轴水平旋转 (ψ 变化)。
$\Rightarrow$ 这就是**进动 (Precession)**。

条件 (规则进动)：

$$\omega_s \gg \Omega$$

(自转角速度远大于进动角速度)

- 此时可近似认为 $\vec{L} \approx \vec{L}_{spin} \parallel$ 自转轴。
- 忽略进动本身产生的微小角动量。

进动的矢量解析

微分关系

$$\vec{M} = \vec{r}_c \times m\vec{g}$$

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

几何图像推导：

1. 重力矩 $\vec{M}$ 水平，垂直于自转轴 $\vec{L}$。
2. $d\vec{L}$ 的方向与 $\vec{M}$ 相同（水平切向）。
3. $d\vec{L} \perp \vec{L} \Rightarrow \vec{L}$ **的大小不变，只改变方向。**
4. $\vec{L}$ 的端点在水平面内画圆。

进动的矢量解析

进动角速度公式

由 $\vec{v}_{tip} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{tip}$ 类比：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

大小关系： $M = \Omega L \sin\theta \Rightarrow \Omega = \frac{mgl\sin\theta}{J\omega\sin\theta}$

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega} \tag{17}$$

物理直觉：回转效应 (Gyroscopic Effect)

怎么理解“力矩引起侧向运动”？

想象 $\vec{L}$ 是一个有巨大惯性的“流速”。

- 力矩 $\vec{M}$ 像是作用在 $\vec{L}$ 箭头上的横向“推力”。
- 当你推一个高速运动的物体（如卫星），它不会立刻沿着推力方向跑，而是轨迹发生偏转。

应用实例：

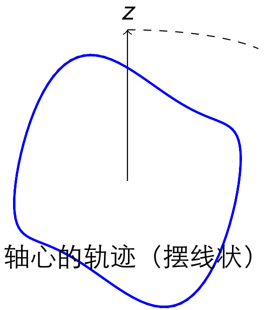
- **自行车不倒**：向左倾斜产生向后的力矩 → 前轮向左进动（转弯）→ 离心力扶正车身。
- **子弹/炮弹**：膛线使弹头旋转，利用进动保持飞行姿态稳定（抗风干扰）。

章动：进动中的“点头”震荡

如果初始释放陀螺时，直接松手（初速度为 0），它无法直接进入完美的进动状态。

能量-动量博弈机制：

1. **下落**：重力做功，势能 → 动能。
2. **加速**：获得的动能转化为进动速度 Ω。
3. **过冲**：Ω 增大导致角动量竖直分量 L_z 增加，为了守恒，陀螺必须抬头。
4. **减速**：抬头导致势能增加，Ω 减小，再次下落。



结论

章动是能量守恒与角动量守恒相互制约的结果。在有阻尼（摩擦）的情况下，章动会迅速衰减，最终稳定在规则进动。

拓展案例：宏观与微观的陀螺

1. 地球的岁差 (Precession of Equinoxes)

- **成因**：地球是椭球体（赤道隆起）。太阳和月球对隆起部分的引力不均匀，产生力矩。
- **结果**：地轴绕黄道极进动，周期约 26,000 年。
- 影响：北极星位置改变，春分点西移。

---

2. 倒立陀螺 (Tippe Top)

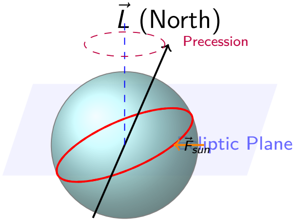
- **现象**：陀螺旋转后会自动翻转，柄朝下变为柄朝上，重心升高。
- **解释**：摩擦力矩与角动量的耦合。
  - 摩擦力矩试图改变 $\vec{L}$ 的方向。
  - 陀螺为了保持稳定性，通过翻身来适应新的旋转轴。
  - 能量来源：部分转动动能转化为重力势能（总动能减小）。

宏观案例：地球的岁差 (Precession of Equinoxes)

物理图景：地球并非完美的球体，而是一个赤道略鼓的椭球体。

成因机制：

1. **姿态**：地轴倾斜 23.5°，赤道面与黄道面（公转面）不重合。
2. **引力差**：太阳/月球对赤道隆起部分（近端与远端）的引力不等。
3. **力矩**：形成一个试图把地轴“扶正”（拉向黄道面法线）的力矩 $\vec{M}$。



Sun/Moon pull on bulge

结果：进动

地轴并没有被“扶正”，而是绕黄道极轴画圆。

- **周期**：约 25,800 年。
- **后果**：北极星轮换（织女星将来会成为北极星）。

微观案例：倒立陀螺 (Tippe Top)

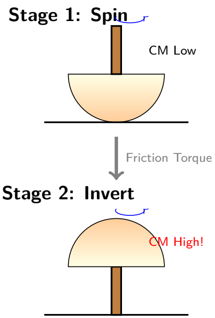
现象：一个半球形的陀螺，旋转后会自动翻转，最终以柄为轴旋转，且**重心升高**。

深度解析：这是摩擦力矩与角动量耦合的经典非线性问题。

- **滑动摩擦**：陀螺接触点存在滑动，摩擦力产生力矩 $\vec{M}_f$。
- **进动效应**：$\vec{M}_f$ 使得角动量 $\vec{L}$ 的方向发生改变（向下翻转）。
- **能量来源**：为什么重心能升高？

$$E_{\text{total}} = E_{\text{rot}} + mgh$$

系统的**转动动能**通过摩擦耗散，一部分转化为热能，另一部分“泵”入势能，使重心升高。



关键点

$\vec{L}$ 在空间中尽量保持竖直，但刚体本身相对于 $\vec{L}$ 翻了个身。

1 内容回顾与补充拓展
- 刚体运动学
- 刚体定轴转动
- 刚体的平动
- 刚体的能量
- 刚体的定点运动
- 总结与解题方法论

2 作业习题讲解

3 Q&A

The Big Picture

刚体力学不是零散公式的堆砌，而是质点系力学在强约束下的投影。

1. 几何基础

- **约束**：两点间距不变 → 相对速度 ⊥ 连线。
- **描述**：角速度 $\vec{\omega}$ 是全域自由矢量。
- **惯量**：J (标量) → $\mathbf{J}$ (张量)。

2. 动力学核心

- **定轴**：$M_z = J_z\alpha$ (+ 动反力)。
- **平面**：$\sum \vec{F} = m\vec{a}_c$ & $\sum M_c = J_c\alpha$。
- **定点**：$\vec{M} = d\vec{L}/dt$ (进动)。

3. 能量与守恒

- **动能**：柯尼希定理 (分离平动与转动)。
- **做功**：内力做功为 0；纯滚动摩擦力不做功。
- **守恒**：
  - $\vec{M}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{L}$ 守恒。
  - $M_{ext,z} = 0 \rightarrow L_z$ 守恒。

Decision Matrix

拿到一道题，如何快速锁定解法？

已知/求解目标	首选方法	关键公式/注意点
v, ω, θ, x (速度/位移)	**机械能守恒/动能定理**	$W_{nc} = \Delta E_k$ (查摩擦力是否做功)
a, α, t, f, N (力/时间)	**动力学方程组**	$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a}_c \\ M_c = J_c\alpha \end{cases}$ (慎用瞬心力矩)
碰撞/打击/角速度突变	**角动量（冲量矩）定理**	$\int M dt = \Delta L$ (选定点消除冲力力矩)
陀螺/进动	**矢量角动量定理**	$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

黄金法则：

- 看到**纯滚动** $\rightarrow$ 马上写 $v_c = R\omega, a_c = R\alpha$。
- 看到**求极值/脱离** $\rightarrow$ 找临界条件 (如 $N = 0$ 或 $f = \mu N$)。

综合模型 I：杆的滑落 (The Falling Ladder)

为什么这道题经典？因为它串联了能量、微分运动学和动力学。

题目：长 L 杆靠墙静止释放，求脱离角 θ_d。

解题链条：

1. **能量守恒** → 求 $\omega(\theta)$。
2. **运动学求导** → $\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$ → 求 $\alpha(\theta)$。
3. **质心加速度** → $\vec{a}_c$ 分解为水平/竖直分量 (需用到 ω^2 和 α)。
4. **动力学方程** → $N_{wall} = ma_{cx}$。
5. **临界判据** → 令 $N_{wall} = 0$，解出 $\theta_d = \arccos(2/3)$。

易错点警示

- **瞬心法求动能**：$E_k = \frac{1}{2}J_{ICR}\omega^2$ (快！)。
- **误区**：脱离时 $N = 0$，但这**不代表**水平加速度为 0。脱离瞬间，墙面对杆的约束解除，水平方向力确实消失，但此前积累的速度还在。
- **质心轨迹**：在脱离前，质心轨迹是圆弧（椭圆规原理）；脱离后，质心做抛体运动。

综合模型 II：台球的“滑”与“滚”

题目：水平击打半径为 R 的静止台球，击打点高 h (相对球心)。求球何时开始纯滚动?

阶段 1：击打瞬间 (Impulse)

- **平动**：$F\Delta t = mv_0 \implies v_0 = \frac{I_{imp}}{m}$
- **转动**：$(F\cdot h)\Delta t = J_c\omega_0 \implies \omega_0 = \frac{hI_{imp}}{J_c}$

状态分析

此时接触点速度 $v_P = v_0 - R\omega_0$。

- 若 $h > J_c/mR$ (击球点很高)，$R\omega_0 > v_0$，球会有向后的“回旋”，接触点向前滑。
- 若 $h = J_c/mR$ (打击中心)，$v_P = 0$，**直接进入纯滚动**!
- 若 $h = 0$ (击打中心)，$\omega_0 = 0$，纯滑动。

综合模型 II：从滑动到滚动 (Transition)

阶段 2：滑动过程 (Sliding Phase) 假设 $h = 0$ (击打中心)，则 $v_0 > 0, \omega_0 = 0$。接触点向前滑动。

- **受力**：动摩擦力 $f_k = \mu mg$ 向后。
- **动力学方程**：

$$\text{平动减速：}\quad -\mu mg = ma_c \implies a_c = -\mu g \tag{18}$$

$$\text{转动加速：}\quad \mu mgR = J_c\alpha \implies \alpha = \frac{\mu mgR}{J_c} \tag{19}$$

综合模型 II：从滑动到滚动 (Transition)

阶段 3：临界时刻 (Pure Rolling)

$$v(t) = v_0 - \mu g t, \quad \omega(t) = 0 + \frac{\mu m g R}{J_c} t$$

当满足 $v(t) = R\omega(t)$ 时，滑动结束，纯滚动开始。

$$v_0 - \mu g t = R\left(\frac{\mu m g R}{J_c} t\right) \implies t = \frac{v_0}{\mu g(1 + mR^2/J_c)}$$

综合模型 II：从滑动到滚动 (Transition)

阶段 3：临界时刻 (Pure Rolling)

$$v(t) = v_0 - \mu g t, \quad \omega(t) = 0 + \frac{\mu m g R}{J_c} t$$

当满足 $v(t) = R\omega(t)$ 时，滑动结束，纯滚动开始。

$$v_0 - \mu g t = R\left(\frac{\mu m g R}{J_c} t\right) \implies t = \frac{v_0}{\mu g(1 + mR^2/J_c)}$$

结论：对于实心球 ($J_c = \frac{2}{5}mR^2$)，最终速度 $v_{final} = \frac{5}{7}v_0$。摩擦力虽然耗散了能量，但也“转换”了动能形式。

Must-Check List

1. **转动惯量**:
   - ☐ 这是一个圆盘 (1/2) 还是圆环 (1)?
   - ☐ 平行轴定理 $J = J_c + md^2$ 必须从**质心**出发，不能乱移。
2. **力矩的正负**:
   - ☐ 设定逆时针为正后，所有的 $\vec{M}, \vec{\theta}, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 必须统一符号。
3. **摩擦力**:
   - ☐ 看到“纯滚动”，千万别写 $f = \mu N$! 它是未知数。
   - ☐ 看到“光滑平面”，意味着 $\alpha = 0$ (如果外力过质心)，物体只会滑不会转 (或匀速转)。
4. **角动量守恒**:
   - ☐ 只有合外力矩为 0 时才守恒。
   - ☐ 注意参考点的选择！碰撞问题通常选**碰撞接触点或质心**。
5. **瞬心法**:
   - ☐ 算动能？大胆用 $E = \frac{1}{2} J_P \omega^2$。
   - ☐ 算力矩？**住手！** 除非是纯滚圆轮，否则老老实实回质心。

结语

Rigid Body Dynamics

"Nature uses only the longest threads to weave her patterns, so that each small piece of her fabric reveals the organization of the entire tapestry."

— Richard Feynman

核心心法：

- 几何约束是前提。
- 质心分解是通法。
- 能量守恒是捷径。
- 矢量分析是本质。

1. 内容回顾与补充拓展
2. 作业习题讲解
3. Q&A

作业习题讲解

1. 内容回顾与补充拓展
2. 作业习题讲解
3. Q&A

Q&A

Thanks!