刚体力学小测解答

TA：疏宇[†] 师驰昊[*]

December 10$^{\text{th}}$, 2025

1 习题 1：进动参考系中的角动量分析

1.1 题目描述

一高速自转的杠杆陀螺稳定地进动. 在跟着陀螺一起进动的参考系里, 陀螺的角动量是否恒定? 试从受力分析的角度解释之.

1.2 详细解答

1.2.1 1. 结论

结论: 在跟着陀螺一起进动的参考系 (旋转参考系) 里, 陀螺的角动量矢量 $\vec{L}$ 是**恒定**的 (即大小和方向均不随时间变化).

1.2.2 2. 运动学分析 (坐标系变换)

设陀螺的自转角动量为 $\vec{L}$, 进动角速度为 $\vec{\Omega}$.

- **在惯性系（地面系）中:** 陀螺受到重力产生的力矩 $\vec{\tau}$ 作用. 根据角动量定理:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{in}} = \vec{\tau} \tag{1}$$

  对于稳定进动, 重力力矩 $\vec{\tau}$ 的方向始终垂直于角动量 $\vec{L}$ 和竖直轴, 其作用恰好是改变角动量的方向而不改变其大小. 此时有动力学关系:

$$\vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \tag{2}$$

  这说明在惯性系中, 角动量 $\vec{L}$ 随时间转动, 并不恒定.

- **在进动系（旋转系）中:** 设参考系以角速度 $\vec{\Omega}$ 绕竖直轴转动. 根据矢量导数的旋转变换公式 (Transport Theorem), 任意矢量 $\vec{A}$ 在惯性系和旋转系中的时间变化率满足:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{in}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \tag{3}$$

  我们将角动量矢量 $\vec{L}$ 代入上式:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{in}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\Omega} \times \vec{L} \tag{4}$$

[†]School of Gifted Young, USTC, email:shuyu2023@mail.ustc.edu.cn
[*]School of Gifted Young, USTC, email:1984019655@qq.com

结合惯性系中的动力学方程 $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{in}} = \vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$, 我们得到:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\Omega} \times \vec{L} \tag{5}$$

由此解得:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rot}} = \vec{0} \tag{6}$$

这从运动学推导上证明了: 在进动参考系中, 陀螺相对于该参考系静止 (仅有绕轴自转, 轴的方向不变), 因此其角动量矢量恒定.

1.2.3 3. 受力分析 (动力学解释)

在非惯性系中分析问题时, 必须引入惯性力矩. 在以角速度 $\vec{\Omega}$ 旋转的参考系中, 角动量定理的形式变为:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rot}} = \vec{\tau}_{\text{real}} + \vec{\tau}_{\text{inertial}} \tag{7}$$

其中:

1. **真实力矩 $\vec{\tau}_{\textbf{real}}$:** 即重力产生的力矩 $\vec{\tau} = \vec{r}_c \times m\vec{g}$. 在稳定进动中, 我们已知 $\vec{\tau}_{\text{real}} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$.

2. **惯性力矩 $\vec{\tau}_{\textbf{inertial}}$:** 这里起主要作用的是**科里奥利力矩**. 对于高速自转的陀螺, 其中的质量微元 $\mathrm{d}m$ 具有相对速度 $\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$. 科里奥利力为 $\mathrm{d}\vec{F}_{cor} = -2\mathrm{d}m(\vec{\Omega} \times \vec{v}')$. 对整个刚体积分求矩, 可以证明 (对于对称陀螺) 科里奥利力产生的合力矩为:

$$\vec{\tau}_{\text{inertial}} = -\vec{\Omega} \times \vec{L} \tag{8}$$

这个力矩的方向与重力力矩相反, 起到了 "恢复" 或 "平衡" 的作用.

综合分析: 在进动系中, 总力矩为:

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \vec{\tau}_{\text{real}} + \vec{\tau}_{\text{inertial}} = (\vec{\Omega} \times \vec{L}) + (-\vec{\Omega} \times \vec{L}) = \vec{0} \tag{9}$$

由于在进动参考系中, 陀螺所受的合外力矩 (包含惯性力矩) 为零, 根据角动量定理, 其角动量保持守恒.

2 习题 2: 半球碗内的小球纯滚动

2.1 题目描述

半径为 r 的小球在半径为 R 的半球形大碗内作纯滚动. 这种运动是简谐振动吗? 若是, 求其振动周期.

2.2 详细解答

2.2.1 1. 物理模型与几何关系

设小球质量为 m, 它是实心均匀球体, 其绕质心的转动惯量为 $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}mr^2$. 设小球球心与大碗球心连线与竖直方向的夹角为 θ.

- **轨迹半径:** 小球质心 (球心) 绕大碗中心运动的轨迹半径为 $R' = R - r$.
- **线速度:** 质心的线速度大小为 $v = R'\dot{\theta} = (R - r)\dot{\theta}$.
- **纯滚动约束:** 设小球自转角速度为 ω. 纯滚动意味着接触点瞬时速度为零, 即质心速度等于自转线速度:

$$v = \omega r \implies \omega = \frac{v}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\theta} \tag{10}$$

2.2.2 2. 机械能守恒法求解

系统在运动过程中只有重力做功 (静摩擦力不做功), 故机械能守恒. 取大碗底部 (最低点) 为重力势能零点.

(1) 动能 T: 动能包含质心平动动能和绕质心转动动能:

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left[(R - r)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left[\frac{R - r}{r}\dot{\theta}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{11}$$

(2) 势能 V: 当偏角为 θ 时, 质心升高的高度为 $h = (R - r)(1 - \cos\theta)$.

$$V = mgh = mg(R - r)(1 - \cos\theta) \tag{12}$$

(3) 建立运动方程: 总机械能 $E = T + V = \text{const}$. 对时间 t 求导:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R - r)(1 - \cos\theta)\right] = 0 \tag{13}$$

执行求导运算 (注意 $\frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ 和 $\frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\sin\theta\dot{\theta}$):

$$\frac{7}{10}m(R - r)^2 \cdot (2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + mg(R - r)\sin\theta \cdot \dot{\theta} = 0 \tag{14}$$

假设小球在运动 ($\dot{\theta} \neq 0$), 我们可以约去公因子 $m(R - r)\dot{\theta}$:

$$\frac{7}{5}(R - r)\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{15}$$

整理得到非线性微分方程:

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)}\sin\theta = 0 \tag{16}$$

2.2.3 3. 简谐振动近似与周期

结论判定: 上述方程 $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ 严格来说描述的是**物理摆**的运动, 不是标准的简谐振动 (SHM). 但在**小角度近似** ($\theta \ll 1$) 下, 我们有 $\sin\theta \approx \theta$. 此时方程化为:

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0 \tag{17}$$

这符合简谐振动方程的标准形式 $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

固有角频率与周期: 由方程可知, 系统的固有角频率平方为:

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)} \tag{18}$$

因此, 振动周期 T 为:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} \tag{19}$$

2.2.4 4. 结果讨论

- 只有在偏角 θ 很小的情况下, 该运动才可视为简谐振动.
- 纯滚动条件引入的转动惯量使得等效质量增加 (系数从 1 变为 7/5), 导致周期比无摩擦滑动的单摆周期 ($2\pi\sqrt{(R-r)/g}$) 更长.
- 注意公式中的 $(R-r)$, 若 r 不可忽略, 必须使用轨迹半径而非大碗半径.