# 振动与波动

## 第〇部分：

## 机械振动 (Mechanical Vibrations)

### 1. 简谐振动 (Simple Harmonic Motion, SHM)

**核心定义**：回复力 $F = -kx$ 或加速度 $a = -\omega_0^2 x$。

- **运动方程**：

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - $A$：振幅（由初始能量决定）
  - $\omega_0$：固有角频率（由系统属性 $m, k$ 决定）
  - $\varphi_0$：初相位（由 $t = 0$ 时的位置和速度决定）
- **特征参量关系**：

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}, \quad v_{max} = \omega_0 A, \quad a_{max} = \omega_0^2 A$$

- **常见模型周期公式**：
  i. **弹簧振子**：$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
  ii. **单摆**：$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ （小角度近似）
  iii. **复摆 (Physical Pendulum)**：$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$
    - $I$：转动惯量，$d$：质心到悬点的距离。
    - 可逆摆（卡特摆）原理，$T_1 = T_2$ 时满足 $Md_1d_2 = I_c$。
- **能量守恒**：

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const}$$

  - 平均动能 = 平均势能 = $\frac{1}{4}kA^2$。

## 2. 振动的合成 (Synthesis of Vibrations)

- **同方向、同频率**：
  - 合振幅：$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$
  - 推荐使用**旋转矢量法**求解三角形，比代数法更直观。
- **同方向、不同频率 (拍/Beats)**：
  - 条件：$\omega_1 \approx \omega_2$。
  - 拍频（振幅变化的频率）：$\nu_{beat} = |\nu_1 - \nu_2|$。
- **相互垂直、同频率 (李萨如图形)**：
  - 轨迹方程：$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi)$
  - $\Delta\varphi = \pm\pi/2 \to$ 正椭圆/圆；$\Delta\varphi = 0, \pi \to$ 直线。

## 3. 阻尼振动与受迫振动 (Damped & Forced Oscillation)

- **阻尼振动方程**：

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

  - **欠阻尼 ($\beta < \omega_0$)**：$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_f t + \varphi)$
    - 假周期：$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$
    - **【习题考点】**：阻尼导致周期略微变大（$T' > T_0$）。
    - 品质因数：$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$。
- **受迫振动方程**：

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \quad (f_0 = F_0/m)$$

  - **稳态解**：$x = B\cos(\omega t - \varphi)$
  - **振幅响应**：

$$B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

  - **共振 (Resonance)**：
    - 共振频率：$\omega = \omega_0$。
    - 共振时外力做功功率最大，完全用于克服阻力做功（$f_{damping} = -F_{drive}$）。

# 机械波 (Mechanical Waves)

## 1. 波的基本描述

- **波函数 (平面简谐波)**：
  沿 $+x$ 传播：$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$
  - 波速 (Phase Velocity)：$u = \lambda/T = \omega/k$。
  - 波数：$k = 2\pi/\lambda$。
  - **【易错点】**：区分**波速** $u$ (取决于介质，常数) 与 **质点振动速度** $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ (随时间变化)。
- **波速公式 (取决于介质性质)**：
  - 弦线（横波）：$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ($T$:张力, $\mu$:线密度)
  - 固体棒（纵波）：$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ ($Y$:杨氏模量)
  - 流体/空气（声波）：$u = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ ($\gamma$:绝热指数)

## 2. 波的能量与能流

- **能量密度**：$w \propto \rho A^2\omega^2$。
  - **关键特征**：在行波中，动能和势能**同相**变化（同时最大，同时为零）。
- **能流密度 (强度 I)**：

$$I = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A^2$$

  - 球面波能量守恒，$I \propto 1/r^2$，故振幅 $A \propto 1/r$。

## 3. 波的叠加与干涉

- **相干条件**：频率相同、振动方向相同、相位差恒定。
- **相位差与波程差**：$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + (\varphi_2 - \varphi_1)$。
  - 加强（波腹）：$\Delta\varphi = 2n\pi$
  - 减弱（波节）：$\Delta\varphi = (2n+1)\pi$
- **驻波 (Standing Waves)**：
  - 方程：$y = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$ (视原点选取而定)
  - 特征：不传播能量，各点振幅随位置变化。
  - **边界条件 **：
    - **固定端**：波节，反射波相位突变 $\pi$ (半波损失)。
    - **自由端**：波腹，反射波相位不变。
  - 波腹/波节间距：$\lambda/4$；相邻波节间距：$\lambda/2$。

## 4. 色散与群速度 (Dispersion & Group Velocity)

- **色散**：波速 $u$ 随频率 $\omega$ 变化。
- **群速度 (能量传播速度)**：

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

  - 在深水波等色散介质中，需要利用微分法计算 $u_g$ 与 $u$ 的关系。

# 第三部分：多普勒效应 (Doppler Effect)

**通式 (机械波)**：

$$\nu_R = \nu_S \left( \frac{u \pm v_R}{u \mp v_S} \right)$$

- $\nu_R$：接收频率，$\nu_S$：波源频率。
- $u$：波速（声速）。
- $v_R$：观察者速度，$v_S$：波源速度。
- **符号法则**：**相互靠近取上方符号，相互远离取下方符号**。
  - 分子（观察者）：向波源运动 $\rightarrow$ 频率变大 (+)；远离 $\rightarrow$ 变小 (-)。
  - 分母（波源）：向观察者运动 $\rightarrow$ 波长变短/频率变大 (-)；远离 $\rightarrow$ 变大 (+)。

**特殊场景**：

1. **反射 (雷达/墙壁)**：
   - 步骤1：物体作为接收者，计算 $\nu'$。
   - 步骤2：物体反射时作为新波源（频率 $\nu'$），最终观察者接收 $\nu''$。
2. **拍频**：直接声与反射声形成的拍，$\nu_{beat} = |\nu_{direct} - \nu_{reflected}|$。
3. **冲击波 (Shock Wave)**：当 $v_S > u$，形成马赫锥，$\sin\theta = u/v_S = 1/M$。

# 第一部分：

## 题目 1：弹簧质量对周期的影响

**【题目】**

如果弹簧质量不可忽略，弹簧振子的振动周期比原表达式的结果大还是小，还是不变？试定性说明之。

**【详细解答】**

- **结论**：振动周期比原表达式的结果**大**。
- **说明**：
  在理想弹簧振子中，我们认为只有物块 $m$ 具有惯性。但在实际情况中，如果弹簧质量 $m_s$ 不可忽略，弹簧的各部分都在随物块做往复运动（靠近固定端速度小，靠近物块端速度大）。
  这意味着系统振动时，需要同时驱动物块和弹簧运动，系统的**等效质量**（Effective Mass）实际上变成了 $M' = m + \alpha m_s$（理论计算中 $\alpha \approx 1/3$）。
  根据周期公式：

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m + \alpha m_s}{k}}$$

  显然 $T' > 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。因此，考虑弹簧质量后，系统的惯性增大，导致振动周期**变大**。

# 题目 2：不同重力环境下的振动（月球实验）

**【题目】**
如果将一个单摆和一个弹簧谐振子放到月球上去，它们的振动频率会如何变化？

**【详细解答】**

- **单摆**：
  单摆的振动频率公式为 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$。
  因为单摆的回复力主要来源于重力的切向分量，所以其运动性质高度依赖重力加速度 $g$。
  由于月球上的重力加速度 $g_{月}$ 小于地球，因此单摆在月球上的振动频率**减小**（走得更慢）。
- **弹簧谐振子**：
  弹簧振子的振动频率公式为 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$。
  可以看到，该公式仅由弹簧劲度系数 $k$ 和物体质量 $m$ 决定，与重力加速度 $g$ **无关**（重力仅改变振子的平衡位置，不改变振动周期）。
  因此，弹簧谐振子在月球上的振动频率**不变**。

# 题目 1：波的传输特性

**【题目】**
波能传递能量，它是否也传递动量？是否也传递角动量？

**【详细解答】**

- **传递能量？ 是**。
  波传播过程本质上就是振动能量在介质中传递的过程。
- **传递动量？ 是**。
  无论是机械波还是电磁波，都携带动量。例如，声波射向障碍物会产生“声辐射压力”，光波照射物体会产生“光压”。虽然介质质点没有随波迁移，但波场本身具有动量密度。
- **传递角动量？ 是（在特定条件下）**。
  如果波具有旋转性质，例如**圆偏振光**或**涡旋声波**，它们携带角动量。当这些波被物体吸收时，会施加一个力矩，使物体发生转动。

# 题目 2：暖水瓶灌水的声学现象

**【题目】**
往暖水瓶灌水时会听到发出的声音声调逐渐升高，解释这一现象产生的物理原因。

**【详细解答】**

1. **声源机制**：灌水时，水流冲击引起瓶内空气柱的振动，产生声音。
2. **共振频率**：瓶内空气柱类似于一个管乐器。随着水位的不断升高，瓶口到水面之间的**空气柱长度 $L$ 逐渐减小**。
3. **物理联系**：空气柱振动的基频公式为 $f = \frac{v}{4L}$（其中 $v$ 为声速）。可以看出，频率 $f$ 与长度 $L$ 成反比。
4. **结论**：当水越灌越满，空气柱越短，振动频率越高。在听觉上，表现为声音的**声调（音调）逐渐升高**。经验丰富的人可以根据听到的音调高低来判断水是否快灌满了。

# 题目 3：界面处的振动方向

**【题目】**
波的传播方向在介质界面处发生改变，介质中质点的振动方向发生改变吗？

**【解析思路】**

1. **区分概念**：区分“波的传播方向”（波速方向）和“质点振动方向”（位移方向）。
2. **场景想象**：
   - **横波**：振动垂直于传播。如果传播方向变了（如折射），为了保持垂直关系，振动方向通常也会随之旋转。
   - **纵波**：振动平行于传播。如果传播方向变了，振动方向必须跟着变。
3. **边界条件**：在界面处，波的反射和折射遵循连续性条件，这往往导致振动矢量发生偏转。

**【详细解答】**
**是的，通常会发生改变。**

- **对于纵波**：质点振动方向与波的传播方向共线。当波发生折射或反射导致传播方向改变时，质点的振动方向必然随之改变，以保持与新的传播方向平行。
- **对于横波**：质点振动方向与传播方向垂直。
  - 在**折射**时，由于波线偏折，为了保持横波特性（振动 $\perp$ 传播），质点的振动方向通常会发生旋转。
  - 在**反射**时，质点的振动方向甚至可能发生相位突变（如半波损失，振动方向反向），或者与原方向成一定角度。

# 题目 4：多普勒效应与相对性原理

**【题目】**
运动是相对的，对于孤立的A, B，A相对于B运动与B相对于A运动是区分不开的。而在多普勒效应中，波源与观察者的地位不对等，是否违反相对性原理？

**【解析思路】**

1. **矛盾点**：伽利略相对性原理认为A动还是B动是等价的。但声波多普勒效应公式中，源动（$f = f_0 \frac{v}{v-v_s}$）和人动（$f = f_0 \frac{v+v_o}{v}$）公式形式不同。
2. **关键第三方**：声波需要**介质**（如空气）。
3. **破局**：有了介质，就有了“绝对参考系”。A动是指A相对于空气动，B动是指B相对于空气动。这两种物理状态是不一样的（一个有风，一个没风），所以公式不同很正常。
4. **对比光波**：光波不需要介质，所以相对论多普勒效应中，源动和人动是完全对称的，只取决于相对速度。

**【详细解答】**
**不违反相对性原理。**

1. **机械波（声波）的情况**：
   - 机械波的传播依赖于**介质**（如空气）。介质的存在提供了一个特定的参考系。
   - “波源运动”是指波源相对于介质运动，“观察者运动”是指观察者相对于介质运动。这两种情况在物理上是**可以区分**的（例如：波源运动时，波长被压缩；观察者运动时，波长不变，只是接收速度变了）。
   - 既然物理过程不同，公式形式不同并不违反相对性原理。相对性原理是指物理定律在所有惯性系中形式相同，而不是说所有具体的物理现象在不同参考系看都一样。
2. **相对性原理的适用性**：
   - 如果我们将参考系从“随介质静止”变换到“随波源运动”，我们必须对介质的速度也进行变换。如果我们正确地应用伽利略变换（或洛伦兹变换）处理包括介质在内的所有要素，物理定律依然成立。
3. **光波的对比**：
   - 对于光波（电磁波），由于没有传播介质，不存在“相对于介质静止”的参考系。

- 根据狭义相对论，光波的多普勒效应只与波源和观察者的**相对速度**有关，公式是完全对称的。这也进一步印证了相对性原理的普适性。

# 第三部分：

## 题目 1：

在水平桌面上，质量分别为 $M$ 和 $m$ ($M > m$) 的两物块由一劲度系数 $k$ 的弹簧相连。物块与桌面间的摩擦系数均为 $\mu$。开始时，弹簧处于原长，$m$ 静止，而 $M$ 以 $v_0$ 的速度拉伸弹簧。已知初速度：

$$v_0 = \sqrt{\frac{6Mmg^2\mu^2}{k(M+m)}}$$

求：当弹簧达最大拉伸时的伸长量。

## 1. 物理过程分段

我们将运动过程分为两个阶段：

1. **静止阶段**：物块 $M$ 运动，但弹簧弹力不足以克服 $m$ 的最大静摩擦力，此时 $m$ 保持静止。
2. **相对运动阶段**：弹簧拉力超过 $m$ 的摩擦力，$m$ 开始加速，两物块同时运动。

## 2. 第一阶段：$m$ 临界滑动点

设 $x$ 为弹簧伸长量。当 $m$ 刚要滑动时，满足：

$$kx_c = \mu mg \implies x_c = \frac{\mu mg}{k}$$

在此过程中，对物块 $M$ 应用动能定理（从 $x = 0$ 到 $x = x_c$）：

$$\Delta E_k = W_{\text{total}}$$

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = -\frac{1}{2}kx_c^2 - \mu Mgx_c$$

其中 $v_1$ 是 $m$ 开始滑动瞬间 $M$ 的速度。整理得：

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}kx_c^2 - \mu Mgx_c \quad \dots(1)$$

## 3. 第二阶段：双体滑动与能量守恒

当 $x > x_c$ 时，$m$ 开始滑动。分析两物体的运动方程：

- $M\ddot{x}_M = -k(x_M - x_m) - \mu Mg$
- $m\ddot{x}_m = k(x_M - x_m) - \mu mg$

设相对位移（弹簧伸长量）$x = x_M - x_m$，其加速度为 $\ddot{x} = \ddot{x}_M - \ddot{x}_m$：

$$\ddot{x} = \left(-\frac{kx}{M} - \mu g\right) - \left(\frac{kx}{m} - \mu g\right)$$

$$\ddot{x} = -kx\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)$$

**重要结论**：此时相对运动方程中摩擦力项相互抵消。对于相对运动系统（折合质量 $\mu^* = \frac{Mm}{M+m}$），**机械能守恒**。

建立从 $m$ 开始滑动（状态 1）到最大伸长（状态 2）的能量守恒方程：

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}\mu^* v_{\text{rel},1}^2 + \frac{1}{2}kx_c^2 = \frac{1}{2}\mu^* v_{\text{rel},2}^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

- 在状态 1：$v_{\text{rel},1} = v_1 - 0 = v_1$。
- 在状态 2：相对速度为 0，即 $v_{\text{rel},2} = 0$。

代入得：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Mm}{M+m}\right)v_1^2 + \frac{1}{2}kx_c^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

## 4. 代数计算

将方程两边乘以 2，并将 (1) 式中的 $\frac{1}{2}Mv_1^2$ 代入：

$$\frac{m}{M+m}(Mv_1^2) + kx_c^2 = kx_{\max}^2$$

$$\frac{m}{M+m}\left(Mv_0^2 - kx_c^2 - 2\mu Mgx_c\right) + kx_c^2 = kx_{\max}^2$$

代入 $v_0$ 和 $x_c$ 的表达式：

1. **动能项**：

$$\frac{m}{M+m}M\left(\frac{6Mmg^2\mu^2}{k(M+m)}\right) = \frac{6M^2m^2g^2\mu^2}{k(M+m)^2}$$

2. **势能与功项**：

$$kx_{\max}^2 = \frac{6M^2m^2g^2\mu^2}{k(M+m)^2} - \frac{m}{M+m}(kx_c^2 + 2\mu Mgx_c) + kx_c^2$$

注意到 $kx_c^2 = \frac{\mu^2m^2g^2}{k}$，以及 $2\mu Mgx_c = \frac{2\mu^2Mmg^2}{k}$。
简化后得：

$$kx_{\max}^2 = \frac{m^2g^2\mu^2}{k(M+m)^2}\left(6M^2 - M(M+m)\right)$$

$$kx_{\max}^2 = \frac{m^2g^2\mu^2}{k(M+m)^2}(5M^2 - Mm)$$

## 5. 最终结果

解出 $x_{\max}$：

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m^2g^2\mu^2}{k^2(M+m)^2}M(5M-m)}$$

# 题目 2：

**【题目】**

质量 $m$ 的水银盛在截面积为 $S$ 的竖直开口 $U$ 形管内，从试管一端朝里轻轻吹一口气，管内水银面便会上下振动。水银密度为 $\rho$，略去水银与管壁间的黏力，试求水银面振动周期 $T$。

**【解析思路】**

1. **模型识别**：这是典型的**简谐运动（SHM）**模型。
2. **回复力法**：
   - 设液面偏离平衡位置 $x$。
   - 此时左侧液面下降 $x$，右侧上升 $x$，两管液面高度差为 $h = 2x$。
   - 产生回复力的正是这高出部分的液柱重力。
3. **动力学方程**：利用牛顿第二定律 $F = -k_{eff}x$ 找出等效劲度系数 $k_{eff}$。

**【详细解答】**
设水银面在平衡位置时，两管液面相平。
当液面发生微小位移 $x$ 时，两管液面高度差为 $2x$。

此时，使整个水银柱回到平衡位置的**回复力** $F$ 为高度差部分水银的重力：

$$F = -(S \cdot 2x \cdot \rho)g = -(2\rho g S)x$$

这符合简谐运动的受力形式 $F = -kx$，其中等效劲度系数 $k_{eff} = 2\rho g S$。

根据简谐运动周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，代入 $k_{eff}$：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}$$

**结论**：水银面的振动周期为 $2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}$。

# 题目 3：

质量为 $m$ 的重物悬挂于劲度系数为 $k$ 的弹簧下端，平衡于 $O$ 点。从 $t = 0$ 开始，弹簧上端 $O'$ 以 $x' = a\sin\omega t$ 的方式上下振动（以向下为正）。设系统的阻尼系数为 $\delta$。求：1. 稳定后物体将如何运动？2. 物体运动与时间的关系如何？

# 1. 建立运动微分方程

设物体偏离平衡位置的位移为 $x(t)$（向下为正）。
此时弹簧上端的位移为 $x'(t) = a\sin\omega t$。

**受力分析**：

- **恢复力**：弹簧的总伸长变化量为 $x - x'$。由于重力已被静伸长抵消，物体受到的净弹性力为 $F_k = -k(x - x')$。
- **阻尼力**：通常与速度成正比，方向相反。根据题目给出的“阻尼系数 $\delta$”，对应的力为 $F_d = -2m\delta\dot{x}$。

根据牛顿第二定律：

$$m\ddot{x} = -k(x - x') - 2m\delta\dot{x}$$

整理方程：

$$m\ddot{x} + 2m\delta\dot{x} + kx = kx'$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}a\sin\omega t$$

令固有频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$，得到标准的受迫振动方程：

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a\sin\omega t$$

# 问题 (1) 解答

**稳定后的运动状态**：

该微分方程的解包含两部分：

1. **瞬态解**（对应齐次方程）：含 $e^{-\delta t}$ 项，随时间推移迅速衰减至 0。
2. **稳态解**（对应非齐次特解）：由驱动力决定。

**结论**：
稳定后，物体将做**等幅简谐运动**（受迫振动）。

- **频率**：与驱动频率 $\omega$ 相同。
- **振幅**：恒定不变。
- **相位**：落后于驱动源 $x'$ 一个固定的相位角 $\phi$。

# 问题 (2) 解答

**运动与时间的关系**：

设稳态解为 $x(t) = A\sin(\omega t - \phi)$。

根据受迫振动的振幅与相位公式：

1. **振幅 $A$**：
   驱动力（加速度项）幅值为 $F_0 = \omega_0^2 a$。

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$$

代入得：

$$A=\frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$$

2. **相位差** $\phi$：

$$\phi=\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

**最终运动方程**：

$$x(t)=\frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\sin(\omega t-\phi)$$

其中 $\omega_0=\sqrt{k/m}$，且 $\tan\phi=\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$。

# 题目 1：

**【题目】**

如图所示，一根线密度为 $\rho_l=0.15\mathrm{g/cm}$ 的弦线，一端与一频率为 $50\mathrm{Hz}$ 的音叉相连，另一端跨过一定滑轮后悬一重物给弦线提供张力，重物质量为 $m$，音叉到滑轮间的距离 $l=1\mathrm{m}$。当音叉振动时，为使弦上形成一个、二个波腹，则重物的质量 $m$ 应分别为多大？取 $g=9.8\mathrm{m/s}^2$。

**【解析思路】**

1. **单位换算**：物理计算第一步，统一单位。$\rho_l=0.15\mathrm{g/cm}=0.015\mathrm{kg/m}$。
2. **驻波条件**：两端固定（音叉端振幅很小，近似波节），弦长 $l$ 必须是半波长的整数倍。

$$l=n\cdot\frac{\lambda}{2}\quad(n=1\text{ 为一个波腹},n=2\text{ 为两个})$$

3. **波速公式**：弦线上横波速度 $v=\sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$，其中张力 $T=mg$。
4. **关联公式**：$v=\lambda f$。

**【详细解答】**

由驻波条件可知，波长必须满足：

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

波速与波长、频率的关系：

$$v = \lambda f = \frac{2lf}{n}$$

另一方面，由弦线波速公式：

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} = \sqrt{\frac{mg}{\rho_l}}$$

联立上述两式，解得质量 $m$：

$$\sqrt{\frac{mg}{\rho_l}} = \frac{2lf}{n} \implies m = \frac{\rho_l}{g}\left(\frac{2lf}{n}\right)^2 = \frac{4l^2f^2\rho_l}{n^2g}$$

代入数值：
$l = 1\text{m}, f = 50\text{Hz}, \rho_l = 0.015\text{kg/m}, g = 9.8\text{m/s}^2$。
常数项 $K = \frac{4\times1^2\times50^2\times0.015}{9.8} = \frac{150}{9.8} \approx 15.306$。

1. **当形成一个波腹时 ($n = 1$)**：

$$m_1 = \frac{K}{1^2} = \frac{150}{9.8} \approx 15.31 \text{ kg}$$

2. **当形成两个波腹时 ($n = 2$)**：

$$m_2 = \frac{K}{2^2} = \frac{15.306}{4} \approx 3.83 \text{ kg}$$

**点拨**：

- **n** 代表驻波的“回路”数或波腹数。
- $m$ 与 $n^2$ 成反比。这意味着要形成更多波腹（波长变短），需要减小张力，从而减小波速。

# 第二部分：

## 题目 9.1：简谐运动方程的变换

**【题目】**
把简谐振动 $x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$，
(1) 写成正弦函数的表达式；
(2) 分别以周期 $T$ 和频率 $\nu$ 代替 $\omega$，写出两种表达式；
(3) 求速度 $v$ 和加速度 $a$；
(4) (作图题略) 作 $x-t, v-t, a-t$ 图。
**【详细解答】**
(1) **正弦表达式**
利用三角恒等式 $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$：

$$x = A\sin\left((\omega t + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{2}\right) = A\sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

(2) **周期与频率表达**
由 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，代入原式：

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

由 $\omega = 2\pi\nu$，代入原式：

$$x = A\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(3) **速度与加速度**
对位移 $x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ 对时间求导：

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

再对速度求导：

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

或者写成 $a = -\omega^2 x$。

# 题目 9.6：复摆的共轭点性质

**【题目】**
证明：每个复摆都有两个支点，当摆动轴通过其中一个支点的摆动周期与通过另一点的摆动周期相等时，这两个支点到质心的距离 $l_1$ 和 $l_2$ 满足：$Ml_1l_2 = I_C$，式中 $M$ 是复摆的总质量，$I_C$ 是复摆对过质心的水平轴的转动惯量。

**【解析思路】**

1. **物理模型**：复摆（Physical Pendulum）。
2. **核心公式**：复摆周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}}$，其中 $l$ 是悬点到质心的距离，$I$ 是绕悬点的转动惯量。
3. **平行轴定理**：$I = I_C + Ml^2$。
4. **代数推导**：建立方程 $T(l_1) = T(l_2)$，求解 $l_1$ 与 $l_2$ 的关系。

**【详细解答】**
设复摆绕悬挂点（支点）的转动惯量为 $I$，悬挂点到质心距离为 $l$。
复摆周期公式为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}}$$

根据平行轴定理，$I = I_C + Ml^2$，代入周期公式：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + Ml^2}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{Mgl} + \frac{l}{g}}$$

题目中已知两个不同的悬挂点到质心距离分别为 $l_1$ 和 $l_2$，且周期相等 $T_1 = T_2$。
则有：

$$\frac{I_C}{Mgl_1} + \frac{l_1}{g} = \frac{I_C}{Mgl_2} + \frac{l_2}{g}$$

消去 $g$，移项整理：

$$\frac{I_C}{M}\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) = l_2 - l_1$$

通分左边：

$$\frac{I_C}{M}\frac{l_2-l_1}{l_1l_2}=-(l_1-l_2)=l_2-l_1$$

由于 $l_1\neq l_2$，我们可以约去 $(l_2-l_1)$：

$$\frac{I_C}{Ml_1l_2}=1$$

整理得证：

$$Ml_1l_2=I_C$$

**【点拨】**
这就是**卡特可逆摆**（Kater's Reversible Pendulum）测量重力加速度的原理基础。两点互为“共轭点”。

## 题目 9.7：旋转系统的微振动

**【题目】**
在光滑的水平桌面上开有一小孔，一条穿过小孔的细绳两头各系一质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的小球，位于桌面上的小球 $m_1$ 以 $v_0$ 的速度绕小孔作匀速圆周运动，而小球 $m_2$ 则悬在空中，保持静止。(1) 求位于桌面部分的细绳的长度 $l_0$；(2) 若给 $m_1$ 一个径向的小冲量，则 $m_2$ 将作上下小振动，求振动角频率 $\omega_0$ 。

**【解析思路】**

1. **稳态分析**：$m_1$ 做匀速圆周运动的向心力由绳子张力提供，张力等于 $m_2$ 的重力。
2. **动态分析（微扰法）**：
   - 当 $m_1$ 半径发生微小变化 $r=l_0+x$ 时，根据**角动量守恒**，$m_1$ 的切向速度会变化。
   - 列出径向动力学方程（牛顿第二定律），包含张力（变力，与 $m_2$ 加速度有关）和离心力项。
   - 进行**线性化近似**（泰勒展开），忽略高阶小量，整理成标准简谐振动方程 $\ddot{x}+\omega^2x=0$。

**【详细解答】**
**(1) 求平衡长度 $l_0$**
$m_1$ 做匀速圆周运动，向心力由张力 $T$ 提供。
$m_2$ 静止，张力 $T=m_2g$。
方程：

$$m_1\frac{v_0^2}{l_0}=T=m_2g$$

解得：

$$l_0 = \frac{m_1 v_0^2}{m_2 g}$$

**(2) 求振动角频率** $\omega_0$
设 $m_1$ 偏离平衡位置的径向位移为 $x$（即此时半径 $r = l_0 + x$）。
由于绳长固定，当 $m_1$ 向外移动 $x$，$m_2$ 向上移动 $x$。
此时系统的**角动量守恒**。设初始角动量为 $L = m_1 v_0 l_0$。
新的切向速度 $v'$ 满足 $m_1 v' r = L \implies v' = \frac{v_0 l_0}{l_0 + x}$。

对 $m_1$ 列径向牛顿第二定律（向里为正方向）：

$$T - m_1 \frac{v'^2}{r} = -m_1 \ddot{x}$$

对 $m_2$ 列竖直方向牛顿第二定律（向上为正，注意 $m_2$ 随 $x$ 联动）：

$$T - m_2 g = m_2 \ddot{x} \implies T = m_2(g + \ddot{x})$$

联立消去 $T$：

$$m_2(g + \ddot{x}) - m_1 \frac{(v_0 l_0)^2}{(l_0 + x)^3} = -m_1 \ddot{x}$$

整理：

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = m_1 \frac{v_0^2 l_0^2}{(l_0 + x)^3} - m_2 g$$

利用**线性近似**：当 $x \ll l_0$ 时，$(l_0 + x)^{-3} \approx l_0^{-3}(1 - \frac{3x}{l_0})$。
代入右边各项：

$$右边 \approx m_1 \frac{v_0^2 l_0^2}{l_0^3}(1 - \frac{3x}{l_0}) - m_2 g$$

$$= \frac{m_1 v_0^2}{l_0} - \frac{3 m_1 v_0^2}{l_0^2} x - m_2 g$$

利用第一问结论 $\frac{m_1 v_0^2}{l_0} = m_2 g$，第一项和第三项抵消：

$$(m_1+m_2)\ddot{x} = -\left(\frac{3m_1 v_0^2}{l_0^2}\right)x$$

再将 $l_0 = \frac{m_1 v_0^2}{m_2 g}$ 代入括号内的 $l_0$（只代入分母中的一个 $l_0$ 以简化形式，或者直接全部代入）：
等效劲度系数 $k_{eff} = \frac{3m_1 v_0^2}{l_0^2} = \frac{3(m_2 g)}{l_0} = \frac{3m_2 g}{\frac{m_1 v_0^2}{m_2 g}} = \frac{3m_2^2 g^2}{m_1 v_0^2}$。

振动方程为：

$$\ddot{x} + \frac{k_{eff}}{m_1+m_2}x = 0$$

即 $\omega_0^2 = \frac{3m_1 v_0^2/l_0^2}{m_1+m_2}$。
将 $l_0$ 表达式代入化简：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3m_1 v_0^2}{(m_1+m_2)(\frac{m_1 v_0^2}{m_2 g})^2}} = \frac{m_2 g}{m_1 v_0}\sqrt{\frac{3m_1}{m_1+m_2}}$$

# 题目 9.11：有钉子的单摆

**【题目】**
一个单摆如图所示，摆长 $l = 150\text{cm}$，悬点 $O$ 的正下方有一固定的钉子 $A, OA = 54\text{cm}$，设摆动角度很小，求此摆的周期。

**【解析思路】**

1. **分段运动**：摆球在通过最低点左侧时，摆长为 $l$；通过最低点右侧时，绳子被钉子挡住，摆长变为 $l' = l - OA$。
2. **周期合成**：完整的周期由“左半个周期”和“右半个周期”组成。

$$T = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$$

**【详细解答】**

- 左侧摆长 $l_1 = 1.50\text{m}$。
- 右侧摆长 $l_2 = 1.50 - 0.54 = 0.96\text{m}$。

总周期：

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = \pi\left(\sqrt{\frac{1.50}{9.8}} + \sqrt{\frac{0.96}{9.8}}\right)$$

计算数值：

$$T \approx 3.1416 \times (0.3912 + 0.3130) \approx 3.1416 \times 0.7042 \approx 2.21\ \mathrm{s}$$

## 题目 9.16：扭摆测转动惯量

**【题目】**
(1) 测得圆盘摆动周期为 $T_1$；(2) 加上待测物体 $M$ 后，周期为 $T_2$。求 $M$ 绕摆轴的转动惯量。

**【解析思路】**

1. **扭摆公式**：$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$，其中 $K$ 是扭转系数，$I$ 是总转动惯量。
2. **状态对比**：
   - 状态1：$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{K} I_{盘}$
   - 状态2：$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{K}(I_{盘} + I_M)$
3. **消参求解**：利用比例关系消去 $K$。已知圆盘 $I_{盘} = \frac{1}{2}mR^2$。

**【详细解答】**
由 $T^2 \propto I$ 可知：

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{I_{盘} + I_M}{I_{盘}} = 1 + \frac{I_M}{I_{盘}}$$

解出 $I_M$：

$$I_M = I_{盘}\left(\frac{T_2^2}{T_1^2} - 1\right)$$

代入圆盘转动惯量公式 $I_{盘} = \frac{1}{2}mR^2$：

$$I_M = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{T_2^2}{T_1^2} - 1\right)$$

# 题目 9.17：双滚轮摩擦振动

**【题目】**
质量为 $m$ 的均匀木板水平地搁在两个以相同角速度 $\omega$ 相向旋转的滚轮上，间距为 $d$。滚轮与木板间的滑动摩擦系数为 $\mu$。问当木板偏离对称位置后，它如何运动？如果是作简谐振动，其周期是多少？

**【解析思路】**

1. **受力分析**：
   - 木板水平方向受两个摩擦力 $f_1, f_2$。滚轮相向转动，左轮顶端向右，右轮顶端向左。
   - 木板相对滚轮可能有相对滑动。若木板速度 $v < \text{滚轮线速度}$，则摩擦力方向恒指向板中心（复原力）。
2. **正压力变化**：
   - 当木板向右偏移距离 $x$ 时，重心右移。根据力矩平衡，右侧滚轮承担的支持力 $N_2$ 变大，左侧 $N_1$ 变小。
   - 摩擦力 $f = \mu N$，导致右侧向左的摩擦力大于左侧向右的摩擦力，合力向左。
3. **动力学方程**：列出水平方向牛顿第二定律，证明 $F \propto -x$。

**【详细解答】**
设木板向右偏离中心 $x$。
**步骤1：求支持力 $N_1, N_2$**
以木板重心为支点，根据力矩平衡（设左轮为1，右轮为2）：

$$N_1(\frac{d}{2} + x) = N_2(\frac{d}{2} - x)$$

且竖直方向平衡：$N_1 + N_2 = mg$。
解得：

$$N_1 = \frac{mg(\frac{d}{2} - x)}{d}, \quad N_2 = \frac{mg(\frac{d}{2} + x)}{d}$$

**步骤2：求水平合力**
左轮给木板的摩擦力 $f_1 = \mu N_1$（方向向右）。
右轮给木板的摩擦力 $f_2 = \mu N_2$（方向向左）。
合力 $F = f_1 - f_2$ （取向右为正）：

$$F = \mu(N_1 - N_2) = \mu\frac{mg}{d}\left[(\frac{d}{2} - x) - (\frac{d}{2} + x)\right]$$

$$F = \mu \frac{mg}{d}(-2x) = -\frac{2\mu mg}{d} x$$

**步骤3：求解周期**
合力满足 $F = -kx$ 的形式，其中等效劲度系数 $k = \frac{2\mu mg}{d}$。
这说明木板做**简谐振动**。
周期公式：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{2\mu mg}{d}}} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$$

# 题目 9.19：同方向同频率振动的合成

**【题目】**
两个方向相同、频率相同的简谐振动，其合振幅为 $10\text{cm}$，合振动的相位与第一个振动的相位差 $30°$。若第一个振动的振幅为 $A_1 = 8.0\text{cm}$，求第二个振动的振幅 $A_2$ 及第一与第二两振动的相位差。

**【解析思路】**

1. **矢量旋转法（相量法）**：处理同频率振动合成最直观的方法是利用旋转矢量。
2. **几何关系**：构建矢量三角形。
   - $\vec{A}$ 为合矢量，模长 $A = 10$。
   - $\vec{A}_1$ 为分矢量，模长 $A_1 = 8$。
   - 已知 $\vec{A}$ 与 $\vec{A}_1$ 的夹角为 $30°$。
   - 需要求 $\vec{A}_2$ 的模长以及 $\vec{A}_1$ 与 $\vec{A}_2$ 的夹角。
3. **解三角形**：利用**余弦定理**求边长，利用**正弦定理**求角度。

**【详细解答】**
**1. 求振幅 $A_2$**
在矢量三角形中，由余弦定理：

$$A_2^2 = A^2 + A_1^2 - 2AA_1 \cos(30°)$$

代入数值：

$$A_2^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_2^2 = 100 + 64 - 80\sqrt{3} \approx 164 - 138.56 = 25.44$$

$$A_2 \approx \sqrt{25.44} \approx 5.0 \text{ cm}$$

*(注：严格计算应保留根号或精确值，此处取近似值符合题目有效数字)*

**2. 求相位差 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$**
设 $\vec{A}_1$ 与 $\vec{A}_2$ 之间的夹角为 $\theta$（即相位差的补角或相关角）。
利用正弦定理：

$$\frac{A_2}{\sin(30^\circ)} = \frac{A}{\sin(180^\circ - (\phi_2 - \phi_1))}$$

或者直接求 $\vec{A}_2$ 对 $\vec{A}_1$ 的夹角。在三角形中，设 $\vec{A}_1$ 与 $\vec{A}_2$ 尾首相接的外角为相位差 $\Delta\varphi$。
根据余弦定理求 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 夹角 $\alpha$（三角形内角）：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\alpha$$

$$100 = 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{64 + 25 - 100}{80} = \frac{-11}{80} \approx -0.1375$$

$\alpha \approx 97.9^\circ$。
相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 对应的是 $\vec{A}_2$ 在 $\vec{A}_1$ 基础上的旋转角。
通过矢量图作图分析，相位差 $\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha - 30^\circ$？不，更简单的做法是用正弦定理求出 $\vec{A}$ 和 $\vec{A}_2$ 的夹角，然后相加。
更直接的方式：

$$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{A_2}{\sin 30^\circ} \implies \sin\beta = \frac{10 \times 0.5}{5} = 1 \implies \beta = 90^\circ$$

这里 $\beta$ 是 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 构成的三角形中 $A_1$ 对应的角。
这意味着 $A_2$ 垂直于 $A_1$？让我们复核一下数据。
若 $A_2 = 5.04$，$A_1 = 8$，$A = 10$。$8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89 \neq 100$。前面的 $A_2$ 近似值导致误差。

精确计算：$A_2 = \sqrt{164 - 80\sqrt{3}}$。
由正弦定理求 $\vec{A}_1$ 与 $\vec{A}_2$ 的夹角（三角形外角）：

$$\frac{A_2}{\sin 30^\circ} = \frac{A}{\sin(180^\circ - \Delta\phi)}$$

$$\sin(\Delta\phi) = \frac{A\sin 30^\circ}{A_2} = \frac{5}{5.04} \approx 0.992$$

$\Delta\phi \approx 82.5^\circ$。

**结论**：$A_2 \approx 5.0\mathrm{cm}$，相位差 $\varphi_1 - \varphi_2 \approx 82.5^\circ$。

## 题目 9.20：相互垂直的振动合成（李萨如图形）

**【题目】**
已知两组相互垂直的振动为：
(1) $x = a\sin\omega t, y = b\cos\omega t$
(2) $x = a\cos\omega t, y = b\sin\omega t$
每组合成的结果各是什么运动，它们之间有何不同？

**【解析思路】**

1. **轨迹方程**：利用三角公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 消去时间参数 $t$，得到 $x$ 和 $y$ 的关系式。
2. **运动方向（旋向）**：取特殊时刻 $t = 0$ 和 $t = \Delta t$（一小段时间后），观察质点位置变化方向。

**【详细解答】**
**(1) 第一组**

- **轨迹**：
  $\frac{x}{a} = \sin\omega t, \frac{y}{b} = \cos\omega t$。
  平方相加：$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$。
  这是一个**椭圆**方程。
- **旋向**：
  当 $t = 0$ 时，$x = 0, y = b$（质点在上方顶点）。
  当 $t > 0$ 且很小时，$x = a\sin\omega t > 0$，$y = b\cos\omega t \approx b$（但略小于 $b$）。
  质点从 $(0, b)$ 向右移动进入第一象限。
  **结论**：**顺时针**旋转的椭圆运动。

**(2) 第二组**

- **轨迹**：
  同理，$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$。
  也是**椭圆**方程。
- **旋向**：
  当 $t = 0$ 时，$x = a, y = 0$（质点在右侧顶点）。
  当 $t > 0$ 且很小时，$x$ 减小，$y > 0$。
  质点从 $(a, 0)$ 向上移动进入第一象限。
  **结论**：**逆时针**旋转的椭圆运动。

# 题目 9.23：阻尼对周期的影响

**【题目】**
某阻尼振动的振幅在一个周期后减为原来的 $1/3$，问此振动周期较无阻尼存在时的周期 $T_0$ 大百分之几?

**【解析思路】**

1. **阻尼因子求解**：根据振幅衰减公式 $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$。
   已知 $A(T') = A_0 e^{-\beta T'} = \frac{1}{3} A_0$，可得 $\beta T' = \ln 3$。
2. **频率关系**：有阻尼角频率 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$。
3. **周期关系**：$T' = \frac{2\pi}{\omega'}$，$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$。
4. **近似计算**：通常阻尼较小时使用近似，但本题衰减较快（一个周期剩1/3），建议用精确公式或二项式展开。

**【详细解答】**
由 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$，代入 $\omega' = \frac{2\pi}{T'}$ 和 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$：

$$\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \beta^2$$

由衰减条件知 $\beta = \frac{\ln 3}{T'}$，代入上式：

$$\frac{4\pi^2}{T'^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{(\ln 3)^2}{T'^2}$$

移项整理：

$$\frac{4\pi^2 + (\ln 3)^2}{T'^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\frac{T'}{T_0} = \sqrt{\frac{4\pi^2 + (\ln 3)^2}{4\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{(\ln 3)^2}{4\pi^2}}$$

计算数值：$\ln 3 \approx 1.0986$。

$$\frac{T'}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{1.2069}{39.478}} \approx \sqrt{1 + 0.03057} \approx 1.0151$$

所以 $\frac{T'-T_0}{T_0} \approx 1.5\%$。

**结论**：周期增大了约 **1.5%**。

## 题目 9.25：火车铁轨共振问题

**【题目】**
火车在铁轨上行驶时，每经过一接轨处便受到一次震动... 设铁轨每段长 $12.5\text{m}$，车箱上每个弹簧承受的重量为 $0.50\text{t}$，弹簧每受 $1.0\text{t}$ 重的力将压缩 $10\text{mm}$... 问火车以什么速率行驶时，弹簧的振幅最大?

**【解析思路】**

1. **共振条件**：驱动力频率等于系统的固有频率 ($f_{drive} = f_0$)。
2. **系统参数**：
   - 振动质量 $m = 0.50\ \text{t} = 500\ \text{kg}$（注意：这是振动的物体）。
   - 弹簧劲度系数 $k$：由"1.0t重的力压缩10mm"计算。$F = 1000 \times 9.8\ \text{N}$，$\Delta x = 0.01\ \text{m}$。
3. **固有频率**：$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$，周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。
4. **驱动周期**：火车每经过一节铁轨受到一次冲击，周期 $T = \frac{L}{v}$。
5. **求解**：令 $T = T_0$，解出 $v$。

**【详细解答】**

**1. 求劲度系数 $k$**

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{1000 \times 9.8}{0.01} = 9.8 \times 10^5\ \text{N/m}$$

**2. 求固有周期 $T_0$**

振动质量 $m = 500\ \text{kg}$。

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{500}{9.8\times 10^5}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1960}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{44.27} \approx 0.1419\ \mathrm{s}$$

**3. 求共振速度 $v$**
当车轮撞击接缝的周期等于固有周期时发生共振：

$$\frac{L}{v} = T_0 \implies v = \frac{L}{T_0}$$

$$v = \frac{12.5}{0.1419} \approx 88.08\ \mathrm{m/s}$$

**结论**：火车速度约为 **88 m/s** 时振幅最大。

## 题目 9.26：受迫振动的阻尼系数

**【题目】**
一物体挂在弹簧下... 固有周期 $T_0 = 0.5\mathrm{s}$... 加上竖直正弦力 $F_{max} = 100\mathrm{dyn}$... 共振时振幅 $A = 5.0\mathrm{cm}$，阻尼力 $f = -\alpha v$。求阻尼系数 $\alpha$ 和最大摩擦力 $f_{max}$。

**【解析思路】**

1. **单位制**：题目使用了 **CGS制**（厘米-克-秒），注意 $1\ \mathrm{dyn} = 10^{-5}\ \mathrm{N}$。建议最终转为 SI 单位或保持一致。
2. **共振特性**：在位移共振（严格说是速度共振，但阻尼小时两者频率近似）时，$\omega \approx \omega_0$。
3. **能量/力平衡视角**：
   - 共振时，外力做功完全用于克服阻尼力做功。
   - 或者从方程解出发：共振时振幅 $A = \frac{F_0}{\alpha\omega_0}$（因为 $(k - m\omega^2)$ 项为0）。
4. **最大阻尼力**：$f_{max} = \alpha v_{max} = \alpha(\omega_0 A)$。有趣的是，由上式可知 $f_{max} = F_0$。

**【详细解答】**
**1. 准备数据**
$F_0 = 100\ \mathrm{dyn} = 10^{-3}\ \mathrm{N}$。
$T_0 = 0.5\ \mathrm{s} \implies \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4\pi\ \mathrm{rad/s}$。
$A = 5.0\ \mathrm{cm} = 0.05\ \mathrm{m}$。

**2. 求阻尼系数 $\alpha$**
在共振状态下，振幅公式简化为：

$$A = \frac{F_0}{\alpha\omega_0}$$

$$\alpha = \frac{F_0}{A\omega_0} = \frac{10^{-3}}{0.05 \times 4\pi} = \frac{10^{-3}}{0.2\pi} \approx \frac{0.001}{0.628}$$

$$\alpha \approx 1.59 \times 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot s/m}$$

**3. 求最大摩擦力 $f_{max}$**
阻尼力 $f = \alpha v$。最大值出现在速度最大时。

$$v_{max} = \omega_0 A$$

$$f_{max} = \alpha v_{max} = \alpha\omega_0 A$$

将 $\alpha = \frac{F_0}{A\omega_0}$ 代入上式：

$$f_{max} = \left(\frac{F_0}{A\omega_0}\right) \cdot \omega_0 A = F_0$$

$$f_{max} = 100\ \mathrm{dyn} = 0.001\ \mathrm{N}$$

**结论**：$\alpha = 1.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot s/m}$，$f_{max} = 0.001\ \mathrm{N}$。

# 第一部分：波的传播基础参数

## 题目 9.27：相位差与波速计算

**【题目】**
如图所示，在波的传播路程上有 $A, B$ 两点，介质的质点都作简谐振动，$B$ 点的相位比 $A$ 点落后 $30^\circ$ 。已知 $A, B$ 之间的距离为 $2.0\mathrm{cm}$，振动周期为 $2.0\mathrm{s}$，求波速 $v$ 和波长 $\lambda$。

**【解析思路】**

1. **物理含义**：“$B$ 点相位落后于 $A$ 点”，说明波是从 $A$ 传向 $B$ 的（先振动的相位超前）。
2. **相位与距离的关系**：相位差 $\Delta\phi$ 与距离 $\Delta x$ 的比值等于 $2\pi$ 与波长 $\lambda$ 的比值。

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi}=\frac{\Delta x}{\lambda}$$

3. **波速公式**：$v=\frac{\lambda}{T}$。

**【详细解答】**

**1. 求波长 $\lambda$**

已知相位差 $\Delta\phi=30^\circ=\frac{\pi}{6}$。
距离 $\Delta x=2.0\text{ cm}$。
根据波程与相位的比例关系：

$$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{\Delta\phi}{2\pi}=\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{12}$$

$$\lambda=12\Delta x=12\times 2.0=24\text{ cm}$$

**2. 求波速 $v$**

已知周期 $T=2.0\text{ s}$。

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{24\text{ cm}}{2.0\text{ s}}=12\text{ cm/s}$$

**结论**：波速 $v=12\text{cm/s}$，波长 $\lambda=24\text{cm}$。

## 题目 9.28：波速与质点振动速度的区别

**【题目】**

某简谐波波长为 $10\text{m}$，传至 $A$ 处引起 $A$ 处质点振动，振动周期为 $0.20\text{s}$，振幅为 $0.50\text{cm}$。试问：
(1) 波的传播速度 $v$ 是多少？
(2) 质点经过平衡位置时的运动速度是多少？

**【解析思路】**

1. **区分概念**：
   - **波速 ($v$)**：能量或波形在介质中传播的速度，取决于介质性质。$v=\lambda/T$。
   - **质点振动速度 ($v_p$)**：介质中某一质点在平衡位置附近往复运动的速度。$v_p=\dot{y}(t)$。
2. **极值计算**：质点在平衡位置时速度最大，公式为 $v_{max}=\omega A$。

**【详细解答】**

**(1) 求波的传播速度 $v$**

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{10\ \mathrm{m}}{0.20\ \mathrm{s}} = 50\ \mathrm{m/s}$$

**(2) 求质点经过平衡位置时的速度**

这是求解简谐运动的最大速度。
角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.20} = 10\pi\ \mathrm{rad/s}$。
振幅 $A = 0.50\ \mathrm{cm}$。

$$v_{max} = \omega A = 10\pi\ \mathrm{s}^{-1} \times 0.50\ \mathrm{cm} = 5\pi\ \mathrm{cm/s}$$

代入 $\pi \approx 3.14$:

$$v_{max} \approx 5 \times 3.14 = 15.7\ \mathrm{cm/s}$$

**【易错点】**

学生容易混淆波速（$50\mathrm{m/s}$）和质点速度（$0.157\mathrm{m/s}$）。可以看出两者数量级差异巨大，一个是波跑得快，一个是质点在原地抖动。

# 题目 9.32：波型转换与反射定律

**【题目】**

波遇到两种介质的界面时发生反射，设入射波与反射波的振动方向不变。如果入射波是一纵波，要使反射波是一横波，设纵波在介质中的传播速度是横波传播速度的 $\sqrt{3}$ 倍。问入射角为多少?

**【解析思路】**

1. **物理图像**:
   - **入射纵波**：质点振动方向平行于波的传播方向（平行于入射光线）。
   - **反射横波**：质点振动方向垂直于波的传播方向（垂直于反射光线）。
2. **“振动方向不变”的几何约束**:
   题目条件“振动方向不变”意味着入射波的振动矢量与反射波的振动矢量在空间中平行。
   由于 $\vec{V}_{inc} \parallel \vec{k}_{inc}$ 且 $\vec{V}_{ref} \perp \vec{k}_{ref}$，若 $\vec{V}_{inc} \parallel \vec{V}_{ref}$，则必然导致**入射光线垂直于反射光线**（即 $\vec{k}_{inc} \perp \vec{k}_{ref}$）。
3. **角度关系**:
   设入射角为 $i$，反射角为 $r$。
   由光线垂直关系可知：$i + r = 90^\circ$，即 $r = 90^\circ - i$。
4. **广义斯涅尔定律（反射定律）**:
   波在界面发生波型转换（Mode Conversion）时，需满足相位匹配（边界连续性），即 $\frac{\sin i}{v_{in}} = \frac{\sin r}{v_{out}}$

。

**【详细解答】**
设入射角为 $i$，反射角为 $r$。
根据题目“振动方向不变”的分析，入射波线与反射波线互相垂直：

$$i + r = 90^\circ$$

根据波的反射定律（匹配不同波速）：

$$\frac{\sin i}{v_{纵}} = \frac{\sin r}{v_{横}}$$

将 $r = 90^\circ - i$ 和 $v_{纵} = \sqrt{3} v_{横}$ 代入上式：

$$\frac{\sin i}{\sqrt{3} v_{横}} = \frac{\sin(90^\circ - i)}{v_{横}}$$

$$\frac{\sin i}{\sqrt{3}} = \cos i$$

$$\tan i = \sqrt{3}$$

解得：

$$i = 60^\circ$$

**结论**：入射角为 $60^\circ$。

## 题目 9.33：群速度与波的拍现象

**【题目】**
两正弦波向同一方向前进... 求：(1) 相位相同点移动速度 $u$; (2) 相邻两点距离 $D$; (3) 证明 $u$ 为群速度; (4) 拍频公式。

**【解析思路】**
这是一道推导**群速度（Group Velocity）**定义的经典题目。

1. **构建相位**：$\Phi(x,t) = 2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}) = 2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{vt}{\lambda})$。
2. **等相条件**：令 $\Phi_1 = \Phi_2$，求解 $x$ 对 $t$ 的导数即为速度。
3. **微元近似**：利用微分定义 $\lambda_1 \approx \lambda_2$ 推导群速度公式。

**【详细解答】**

**(1) 求等相点的移动速度 $u$**

设某时刻 $t$，位置 $x$ 处的两波相位相同：

$$2\pi\left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{v_1 t}{\lambda_1}\right) = 2\pi\left(\frac{x}{\lambda_2} - \frac{v_2 t}{\lambda_2}\right)$$

整理方程：

$$x\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = t\left(\frac{v_1}{\lambda_1} - \frac{v_2}{\lambda_2}\right)$$

$$x\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} = t\frac{v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$$

由此得移动速度 $u = \frac{x}{t}$：

$$u = \frac{v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

**(2) 求相邻等相点距离 $D$**

“相邻”意味着相位差变化了 $2\pi$。即两波波数之差 $k_1 - k_2$ 乘以距离 $D$ 等于 $2\pi$。

$$|k_1 - k_2|D = 2\pi$$

$$\left|\frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2}\right| D = 2\pi$$

$$D\frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\lambda_1\lambda_2} = 1 \implies D = \frac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|}$$

**(3) 证明 $u$ 为群速度**

设 $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda + d\lambda$，$v_1 = v, v_2 = v + dv$。

将 (1) 中结果代入：

$$u = \lim_{d\lambda \to 0} \frac{v(\lambda + d\lambda) - (v + dv)\lambda}{(\lambda + d\lambda) - \lambda}$$

展开分子，忽略二阶小量（若有）：

$$\text{分子} = v\lambda + vd\lambda - v\lambda - \lambda dv = vd\lambda - \lambda dv$$

$$\text{分母} = d\lambda$$

$$u = \frac{vd\lambda - \lambda dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

这正是瑞利群速度公式。

**(4) 证明拍频**

拍频 $\nu_{beat}$ 是固定空间点处，振幅变化的频率。它等于两波频率之差。

$$\nu_{beat} = |\nu_1 - \nu_2| = \left| \frac{v_1}{\lambda_1} - \frac{v_2}{\lambda_2} \right|$$

通分可得：

$$\nu_{beat} = \frac{|v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1|}{\lambda_1\lambda_2}$$

这与题目要求证明的“两个频率之差”一致。

# 题目 9.37：驻波方程与边界条件

**【题目】**

设入射波方程为 $y_1 = A\sin(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda})$，在 $x = 0$ 处反射。在下列两种情况下，求当没有衰减时合成的驻波方程，并说明何处是波腹？何处是波节？

(1) 反射端是自由端；

(2) 反射端是固定的。

【解析思路】

1. **构造反射波方程**：
   - 反射波沿 $-x$ 方向传播，形式为 $f(t,x) \sim \sin(\omega t - kx + \phi_0)$。
   - **自由端**：在界面 $x=0$ 处，位移任意，但相位无突变（半波损失为0）。即 $y_{ref}(0,t) = y_{in}(0,t)$。
   - **固定端**：在界面 $x=0$ 处，位移恒为0，相位突变 $\pi$（存在半波损失）。即 $y_{ref}(0,t) = -y_{in}(0,t)$。
2. **叠加合成**：利用和差化积公式 $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$。
3. **波腹与波节**：寻找振幅项最大值（波腹）和零值（波节）的坐标条件。

【详细解答】
已知入射波 $y_1 = A\sin(\omega t + kx)$，其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$。

**(1) 反射端是自由端**
反射波与入射波在 $x=0$ 处同相。反射波向 $-x$ 传播：

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx)$$

合成波 $y = y_1 + y_2$：

$$y = A[\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)]$$

利用和差化积公式：

$$y = 2A\cos(kx)\sin(\omega t) = 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin(\omega t)$$

- **波节（振幅为0）**：$\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}) = 0 \implies \frac{2\pi x}{\lambda} = (k' + \frac{1}{2})\pi \implies x = \frac{2k'+1}{4}\lambda\,(k' = 0, 1, \dots)$。
- **波腹（振幅最大）**：$|\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})| = 1 \implies \frac{2\pi x}{\lambda} = k'\pi \implies x = \frac{k'}{2}\lambda$。

**(2) 反射端是固定端**
反射波在 $x=0$ 处发生 $\pi$ 的相位突变（反相）。

$$y_2 = -A\sin(\omega t - kx) = A\sin(\omega t - kx + \pi)$$

合成波 $y = y_1 + y_2$：

$$y = A[\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)]$$

利用公式 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$：

$$y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) = 2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos(\omega t)$$

- **波节**：$\sin(\frac{2\pi x}{\lambda}) = 0 \implies x = \frac{k'}{2}\lambda$。
- **波腹**：$|\sin(\frac{2\pi x}{\lambda})| = 1 \implies x = \frac{2k'+1}{4}\lambda$。

# 题目 9.38：波包与群速度计算

**【题目】**

以下两列波在介质中叠加：$y_1 = A\cos(6t - 5x), y_2 = A\cos(5t - 4x)$。求：(1) 相速度 $v_{p1}, v_{p2}$；(2) 合成波方程及振幅为零的相邻两点距离；(3) 群速度 $v_g$。

**【解析思路】**

1. **识别参数**：波函数标准形式为 $\cos(\omega t - kx)$。
2. **相速度**：$v_p = \omega/k$。
3. **合成（拍）**：利用 $\cos A + \cos B$ 公式，将结果整理为“包络项 $\times$ 载波项”。包络项决定了群速度。
4. **群速度**：定义为 $v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$。

**【详细解答】**

**(1) 求相速度**

对于 $y_1$：$\omega_1 = 6, k_1 = 5 \implies v_{p1} = 6/5 = 1.2\ \mathrm{m/s}$。
对于 $y_2$：$\omega_2 = 5, k_2 = 4 \implies v_{p2} = 5/4 = 1.25\ \mathrm{m/s}$。

**(2) 合成波方程与节点距离**

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos(6t - 5x) + \cos(5t - 4x)]$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{(6-5)t - (5-4)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(6+5)t - (5+4)x}{2}\right)$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{11t}{2} - \frac{9x}{2}\right)$$

其中前一项 $2A\cos(\frac{t}{2} - \frac{x}{2})$ 为**振幅包络**（拍）。

振幅为零即包络项为零：

$$\frac{t}{2} - \frac{x}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$$

相邻两点距离 $\Delta x$ 满足 $\frac{\Delta x}{2} = \pi$，即：

$$\Delta x = 2\pi \text{ m}$$

**(3) 求群速度**

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{6-5}{5-4} = 1 \text{ m/s}$$

也可以从包络函数 $\cos(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x)$ 直接看出传播速度为系数比：$(1/2)/(1/2) = 1$。

## 题目 9.40：深水波的色散关系

**【题目】**

对于深水波，色散关系为 $\omega^2 = gk + \frac{Sk^3}{\rho}$。
(1) 求相速度 $v_p$ 和群速度 $v_g$ 与 $k$ 的关系；
(2) 证明当波长接近 $1.7 \times 10^{-2}\text{m}$ 时，$v_p = v_g$，并求该值。

**【解析思路】**

1. **定义代入**：$v_p = \frac{\omega}{k}$。直接开根号即可。
2. **微分求导**：$v_g = \frac{d\omega}{dk}$。技巧是对原方程 $\omega^2 = \dots$ 两边微分：$2\omega d\omega = (\dots)dk$，从而得到 $\frac{d\omega}{dk}$。
3. **极值条件**：令 $v_p = v_g$，解出对应的 $k$ 或 $\lambda$。

**【详细解答】**

**(1) 推导速度公式**

由 $\omega = \sqrt{gk + \frac{Sk^3}{\rho}}$：

**相速度**：

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Sk}{\rho}}$$

**群速度**：

对 $\omega^2 = gk + \frac{Sk^3}{\rho}$ 两边对 $k$ 求导：

$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = g + \frac{3Sk^2}{\rho}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + \frac{3Sk^2}{\rho}}{2\omega} = \frac{g + \frac{3Sk^2}{\rho}}{2\sqrt{gk + \frac{Sk^3}{\rho}}}$$

**(2) 求解相等条件**

令 $v_p = v_g$：

$$\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Sk}{\rho}} = \frac{g + \frac{3Sk^2}{\rho}}{2k\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Sk}{\rho}}}$$

交叉相乘整理：

$$2\left(\frac{g}{k} + \frac{Sk}{\rho}\right) = \frac{g}{k} + \frac{3Sk}{\rho}$$

$$\frac{2g}{k} + \frac{2Sk}{\rho} = \frac{g}{k} + \frac{3Sk}{\rho}$$

$$\frac{g}{k} = \frac{Sk}{\rho} \implies k^2 = \frac{g\rho}{S}$$

对应的波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{S}{g\rho}}$。

代入数据：$S = 7.2 \times 10^{-2}, \rho = 10^3, g = 9.8$。

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{7.2 \times 10^{-2}}{9.8 \times 10^3}} \approx 1.7 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

得证。

此时的速度值：

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{Sk}{\rho}}=\sqrt{2\frac{g}{k}}=\sqrt{2g\sqrt{\frac{S}{g\rho}}}=\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{gS}{\rho}}$$

或直接代入 $k$ 计算：$v \approx 0.23\ \mathrm{m/s}$。

## 题目 9.42：双车相遇问题

**【题目】**
甲车 $v_A = 43.2\mathrm{km/h}$。乙车鸣笛。甲听到：相向行驶时 $\nu_1 = 512\mathrm{Hz}$，交错后 $\nu_2 = 428\mathrm{Hz}$。求乙车频率 $\nu_0$ 和乙车速度 $u$。声速 $u_0 = 340\mathrm{m/s}$。

**【解析思路】**

1. **单位换算**：$v_A = 43.2/3.6 = 12\mathrm{m/s}$。
2. **公式应用**：$f_{obs} = f_{src}\frac{u_0 \pm v_{obs}}{u_0 \mp v_{src}}$。
3. **场景分析**：
   - **相向（接近）**：甲（观察者）迎源运动（分子+），乙（波源）迎人运动（分母-）。
   - **背向（远离）**：甲离源运动（分子-），乙离人运动（分母+）。
4. **联立求解**：建立两个方程求解 $\nu_0$ 和 $u$。

**【详细解答】**
设乙车速度为 $u$。
**接近过程**：

$$512 = \nu_0 \frac{340+12}{340-u} \quad —(1)$$

**远离过程**：

$$428 = \nu_0 \frac{340-12}{340+u} \quad —(2)$$

(1)式除以(2)式消去 $\nu_0$：

$$\frac{512}{428} = \frac{352}{340-u} \cdot \frac{340+u}{328}$$

$$\frac{128}{107} \approx 1.196 = \frac{352}{328} \cdot \frac{340+u}{340-u}$$

解此方程得 $u \approx 18.44\ \mathrm{m/s} = 66.4\ \mathrm{km/h}$。
代回 (1) 式求 $\nu_0$：

$$\nu_0 = 512 \times \frac{340 - 18.44}{352} \approx 468\ \mathrm{Hz}$$

# 题目 9.43：人持音叉走向墙壁

**【题目】**
人手持 $\nu = 500\mathrm{Hz}$ 音叉，以 $u = 1.0\mathrm{m/s}$ 走向墙壁。声速 $v = 334\mathrm{m/s}$。求拍频。

**【解析思路】**

1. **拍频来源**：人听到两个声音。
   - 声音1：直接从音叉传到耳朵。因为人、音叉、耳朵一起动，相对静止，无多普勒效应。$\nu_1 = 500\mathrm{Hz}$。
   - 声音2：墙壁反射的回声。
2. **反射分析**：
   - **第一步（波源→墙）**：墙是观察者，波源（音叉）靠近。墙接收频率 $\nu' = \nu \frac{v}{v-u}$。
   - **第二步（墙→人）**：墙是波源（反射 $\nu'$），人是观察者，人靠近墙。人接收频率 $\nu_2 = \nu' \frac{v+u}{v}$。
   - **综合**：$\nu_2 = \nu \frac{v+u}{v-u}$。
3. **拍频计算**：$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$。

**【详细解答】**
直接听到的频率：$\nu_1 = 500\mathrm{Hz}$。
听到反射波的频率（相当于虚波源以 $2u$ 速度靠近）：

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{v+u}{v-u} = 500 \times \frac{334+1}{334-1} = 500 \times \frac{335}{333} \approx 503\ \mathrm{Hz}$$

拍频：

$$\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_1| = 503 - 500 = 3\ \mathrm{Hz}$$