

# Guía de Ejercicios Número 2

## Diseño de Filtros IIR

### Grupo 1

**AUTORES:**

Federico TONDI (59341)  
Franco MORICONI (58495)  
Alan VEKSELMAN (59378)  
Carola PEDROSA (59059)  
Franco SCAPOLLA (58465)

**PROFESORES:**

Daniel JACOBY

## Contenido

<b>1. Ejercicio 4</b>	<b>3</b>
1.1. $H_a(s)$ . . . . .	4
1.2. $H_b(s)$ . . . . .	5
1.3. $H_c(s)$ . . . . .	5
<b>2. Ejercicio 6</b>	<b>6</b>
2.1. Implementaciones . . . . .	7
2.1.1. $n = 2$ . . . . .	7
2.1.2. $n = 3$ . . . . .	7
2.1.3. $n = 4$ . . . . .	8
2.1.4. $n = 5$ . . . . .	8
2.1.5. $n = 6$ . . . . .	9
2.1.6. $n = 7$ . . . . .	9
2.1.7. $n = 8$ . . . . .	9
2.2. Comparación de resultados . . . . .	10
<b>3. Ejercicio 9</b>	<b>12</b>
3.1. Butterworth . . . . .	13
3.2. Cauer . . . . .	16
<b>4. Ejercicio 11</b>	<b>19</b>
4.1. Sistema I . . . . .	19
4.2. Sistema II . . . . .	20
4.3. Aplicación . . . . .	21
4.3.1. Filtro con fase nula . . . . .	24

## 1. Ejercicio 4

Dada una  $H(s)$  se pide encontrar la  $H(z)$  correspondiente usando el método invariante al impulso y representar gráficamente el módulo de la respuesta en frecuencia de  $H(s)$  y  $H(z)$ . En primer lugar, se debe explicar el método invariante al impulso para el diseño IIR. Con esta técnica, se preserva la respuesta impulsiva del filtro analógico dado que la respuesta al impulso del filtro digital es una versión muestreada de la respuesta al impulso del filtro analógico. Por ende, se tiene:

$$h_D(nT) = h_A^*(t) \quad (1.1)$$

Evaluada en  $t=nT$ . Por lo tanto se tiene que:

$$h_A^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_A \delta(t - nT) \quad (1.2)$$

Y si se transforman ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$H_A(j\omega) = H_D(e^{j\omega T}) = \frac{h_A(0^+)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_A(j\omega + jn\omega_s) \quad (1.3)$$

Luego, se imponen 2 condiciones, por un lado:

$$H_A(j\omega) \cong 0 \forall |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \quad (1.4)$$

Y con esta condición se tiene que:

$$\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} H_A(j\omega + n\omega_s) \cong 0 \quad (1.5)$$

Además de esto se impone una segunda condición dada por:

$$h_A(0^+) \cong 0 \quad (1.6)$$

Y por ende:

$$H_D(e^{j\omega T}) \cong \frac{1}{T} H_A(j\omega), |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \quad (1.7)$$

Estas condiciones generan restricciones sobre como es el filtro a diseñar y la forma de  $H(s)$ . Con la primera condición en 1.4 que acota en banda a la señal, implica que  $H_A(s)$  no puede ser una transferencia pasa altos por ejemplo. Con esto se llega a que:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = 0 \quad (1.8)$$

Y con esto se puede también concluir que si  $H(s)$  es un cociente de polinomios, su grado debe

diferir en por lo menos uno. Siguiendo con este análisis para la condición 2 en 1.6 se llega a:

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[H(s)] = 0 \quad (1.9)$$

Y con esa expresión se concluye que el grado del denominador debe superar en uno al del numerador. Juntando estos dos razonamientos, se concluye finalmente que el grado del denominador sea mayor que el del numerador en por lo menos dos. En todos los casos se puede ver que la respuesta del filtro digital es igual a la del analógico multiplicada por el factor  $\frac{1}{T}$ , que se puede eliminar si se quiere multiplicando  $H_D(z)$  por  $T$ .

### 1.1. $H_a(s)$

Para  $H_a(s)$  se tiene:

$$H_a(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \quad (1.10)$$

Si se hacen fracciones simples sobre esta función se obtiene:

$$H_a(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{4}{s+4} \quad (1.11)$$

Por lo que quedan dos polos simples y por ende se puede aplicar la fórmula directamente, resultando en:

$$H_D(z) = \frac{4}{1 - z^{-1}e^{-2T}} - \frac{4}{1 - z^{-1}e^{-4T}} \quad (1.12)$$

Si se grafican ambas funciones, se obtiene:

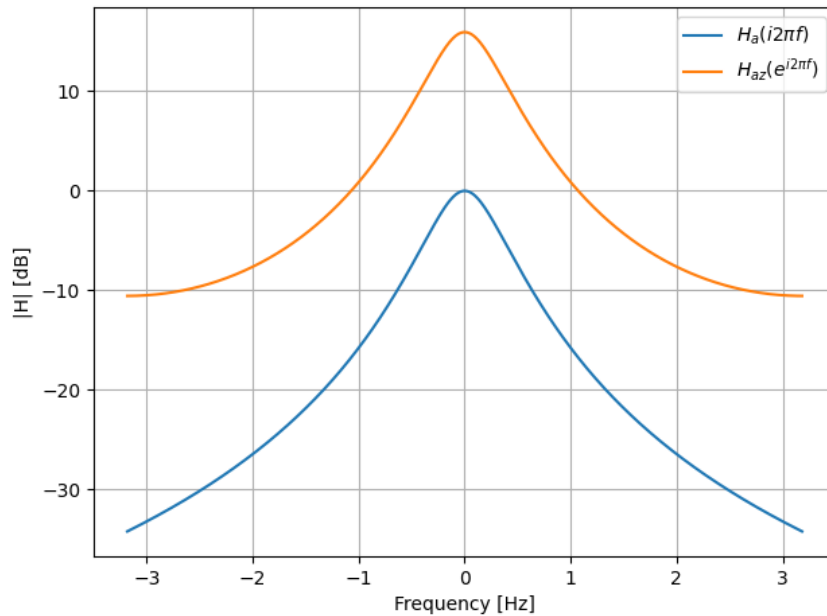


FIGURA 1.1:  $H_a(s)$  y  $H_D(z)$

### 1.2. $H_b(s)$

Para  $H_b(s)$  se tiene:

$$H_b(s) = \frac{8}{s(s+2)(s+4)} \quad (1.13)$$

Si se hacen fracciones simples sobre esta función se obtiene:

$$H_b(s) = \frac{-2}{s+2} + \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s} \quad (1.14)$$

Por lo que quedan dos polos simples y por ende se puede aplicar la fórmula directamente, resultando en:

$$H_D(z) = \frac{-2}{1 - z^{-1}e^{-2T}} + \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-4T}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (1.15)$$

Si se grafican ambas funciones, se obtiene:

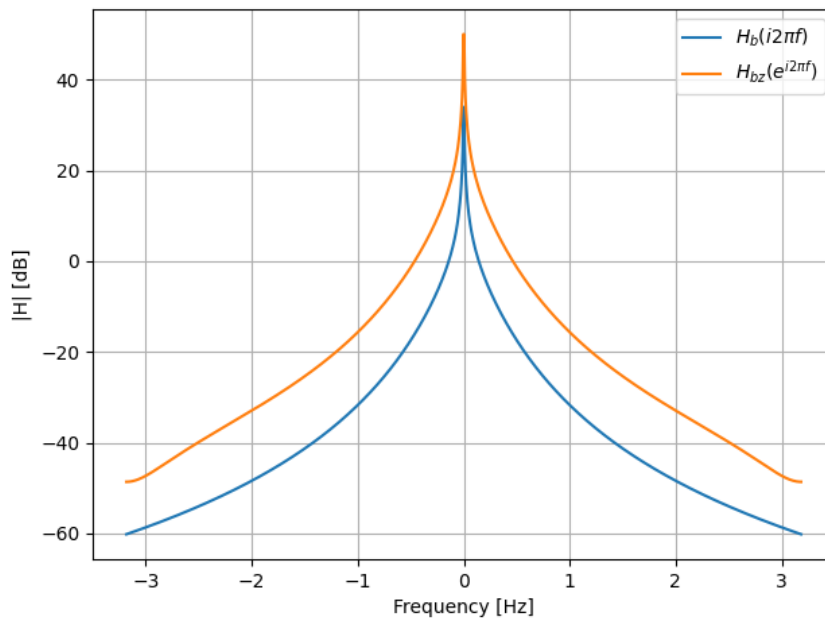


FIGURA 1.2:  $H_b(s)$  y  $H_D(z)$

### 1.3. $H_c(s)$

Para  $H_c(s)$  se tiene:

$$H_c(s) = \frac{(s+1)}{(s+0.5)(s+4)} \quad (1.16)$$

Si se hacen fracciones simples sobre esta función se obtiene:

$$H_c(s) = \frac{\frac{1}{7}}{s+0.5} + \frac{\frac{6}{7}}{s+4} \quad (1.17)$$

Por lo que quedan dos polos simples y por ende se puede aplicar la fórmula directamente, resultando en:

$$H_D(z) = \frac{\frac{1}{7}}{1 - z^{-1}e^{-0.5T}} + \frac{\frac{6}{7}}{1 - z^{-1}e^{-4T}} \quad (1.18)$$

Si se grafican ambas funciones, se obtiene:

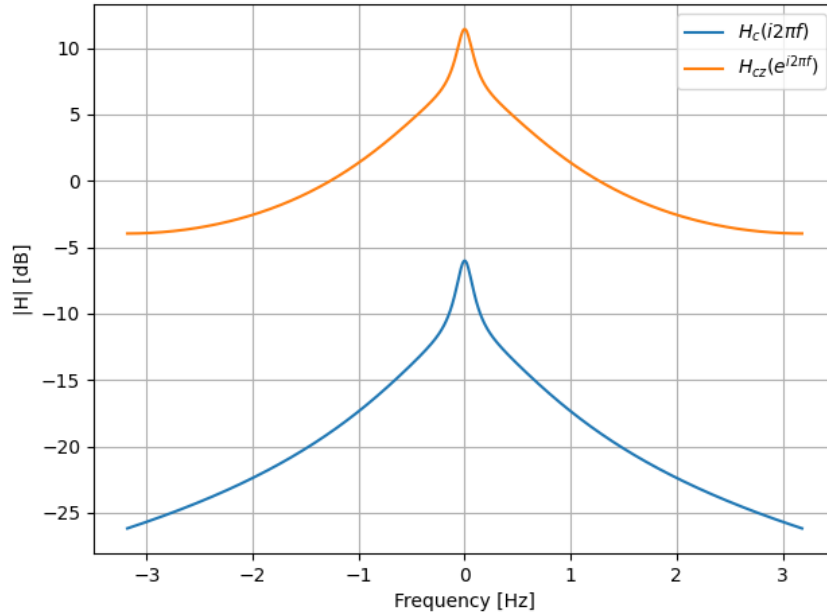


FIGURA 1.3:  $H_c(s)$  y  $H_D(z)$

## 2. Ejercicio 6

En este ejercicio se pide diseñar distintos filtros de Butterworth, con las siguientes condiciones de diseño:

- $f_s = \frac{1}{T} = 10\text{kHz}$
- $A_p = 2\text{dB}$
- $f_p = 2\text{kHz}$
- $n = 2 - 8$

Haciendo prewarping de la frecuencia de paso, tendremos que ésta será:

$$\omega_P = 2f_s \cdot \text{tg} \left( \frac{\Omega_P}{2f_s} \right) = 14.531 \frac{\text{krad}}{\text{seg}} = 2.31\text{kHz} \quad (2.1)$$

Con este valor, podemos obtener  $\omega_C$ , que será:

$$\omega_C = \frac{\omega_P}{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{2n}}} \quad (2.2)$$

Para los distintos  $n$  (2 a 8),  $\omega_C$  tomará los siguientes valores:

$n$	$\omega_C \left( \frac{krad}{seg} \right)$
2	16.61
3	15.89
4	15.54
5	15.33
6	15.195
7	15.098
8	15.026

TABLA 2.1: Valores de  $\omega_C$  en función de  $n$

## 2.1. Implementaciones

### 2.1.1. $n = 2$

Para  $n = 2$ , la transferencia será:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_{C2}^2} \cdot s^2 + \frac{1.4142}{\omega_{C2}} \cdot s + 1} \quad (2.3)$$

Cuyos polos son:

$$z_{1,2} = -11749.05 \pm 11749.275j$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_{2,1} = \pm 11761.25j$$

Por lo tanto, la  $H(z)$  será:

$$H(z) = -\frac{6696.08 \cdot z^2}{z^2 - 0.24 \cdot z + 0.0954} \quad (2.4)$$

### 2.1.2. $n = 3$

Para  $n = 3$ , la transferencia será:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_{C3}} + 1\right) \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_{C3}^2} + \frac{s}{\omega_{C3}} + 1\right)} \quad (2.5)$$

Cuyos polos son:

$$z_i = -15889.55 \mid -7944.78 \pm 13760.75j$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_i = 15889.55 \mid -7944.78 \pm 4586.92$$

Por lo tanto, la  $H(z)$  será:

$$H(z) = \frac{z^2 \cdot (5921.12 \cdot z + 2129.96)}{z^3 - 0.38 \cdot z^2 + 0.24 \cdot z - 0.042} \quad (2.6)$$

### 2.1.3. $n = 4$

Para  $n = 4$ , la transferencia será:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^4}{\omega_{C4}^4} + 2.6131 \cdot \frac{s^3}{\omega_{C4}^3} + 3.4142 \cdot \frac{s^2}{\omega_{C4}^2} + 2.6131 \cdot \frac{s}{\omega_{C4}} + 1} \quad (2.7)$$

Cuyos polos son:

$$z_i = -5946.34 \pm 14355.6j \mid -14355.37 \pm 5946.89j$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_i = -7178.06 \pm 2973.275j \mid 7178.06 \pm 17327.33j$$

Por lo tanto, la  $H(z)$  será:

$$H(z) = \frac{-5.46 \cdot 10^{-12} \cdot z^3 + 3131.517 \cdot z^2 + 4151.86 \cdot z + 421.48}{z^4 - 0.543 \cdot z^3 + 0.42 \cdot z^2 - 0.13 \cdot z + 0.0174} \quad (2.8)$$

### 2.1.4. $n = 5$

Para  $n = 5$ , la transferencia será:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^5}{\omega_{C5}^5} + 3.2361 \cdot \frac{s^4}{\omega_{C5}^4} + 5.2361 \cdot \frac{s^3}{\omega_{C5}^3} + 5.2361 \cdot \frac{s^2}{\omega_{C5}^2} + 3.2361 \cdot \frac{s}{\omega_{C5}} + 1} \quad (2.9)$$

Cuyos polos son:

$$z_i = -12403.805 \pm 9011.06j \mid -15331.455 \mid -4737.43 \pm 14581.13j$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_i = -12405.243 \pm 17071.98j \mid 29047.85 \mid -2118.683 \pm 6520.29j$$

Por lo tanto, la  $H(z)$  será:

$$H(z) = \frac{-4.23 \cdot 10^{-11} \cdot z^4 + 1193.68 \cdot z^3 + 4228.6 \cdot z^2 + 1613.46 \cdot z + 61.9}{z^5 - 0.715 \cdot z^4 + 0.63 \cdot z^3 - 0.264 \cdot z^2 + 0.065 \cdot z - 0.007} \quad (2.10)$$



### 2.1.5. n = 6

Para n = 6, la transferencia será:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^6}{\omega_{C6}^6} + 3.8637 \cdot \frac{s^5}{\omega_{C6}^5} + 7.4641 \cdot \frac{s^4}{\omega_{C6}^4} + 9.1416 \cdot \frac{s^3}{\omega_{C6}^3} + 7.4641 \cdot \frac{s^2}{\omega_{C6}^2} + 3.8637 \cdot \frac{s}{\omega_{C6}} + 1} \quad (2.11)$$

Cuyos polos son:

$$z_i = -10744.8 \pm 10744.21j \mid -3932.68 \pm 14677.29 \mid -14677.03 \pm 3933.644j$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_i = -23153.661 \pm 1.2622j \mid 3101.48 \pm 5372.06j \mid 20051.18 \pm 34721.75j$$

Por lo tanto, la H(z) será:

$$H(z) = \frac{1.456 \cdot 10^{-11} \cdot z^5 + 357.515 \cdot z^4 + 2980.71 \cdot z^3 + 2750.82 \cdot z^2 + 438.83 \cdot z + 7.23}{z^6 - 0.89 \cdot z^5 + 0.87 \cdot z^4 - 0.452 \cdot z^3 + 0.156 \cdot z^2 - 0.0314 \cdot z + 0.00282} \quad (2.12)$$

### 2.1.6. n = 7

Para n = 7, la transferencia será:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^7}{\omega_{C7}^7} + 4.494 \cdot \frac{s^6}{\omega_{C7}^6} + 10.098 \cdot \frac{s^5}{\omega_{C7}^5} + 14.592 \cdot \frac{s^4}{\omega_{C7}^4} + 14.592 \cdot \frac{s^3}{\omega_{C7}^3} + 10.098 \cdot \frac{s^2}{\omega_{C7}^2} + 4.494 \cdot \frac{s}{\omega_{C7}} + 1} \quad (2.13)$$

Cuyos polos son:

$$z_i = -13605.8 \pm 6545.325j \mid -9410.97 \pm 11806.47 \mid -3359.98 \pm 14719.7j \mid -15098.313$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_i = -22579.8 \pm 46764.54j \mid -15580.99 \pm 19515.29j \mid 5565.12 \pm 1259.91j \mid 65191.334$$

Por lo tanto, la H(z) será:

$$H(z) = \frac{-3.69 \cdot 10^{-10} \cdot z^6 + 88.383 \cdot z^5 + 1627.189 \cdot z^4 + 3027.46 \cdot z^3 + 1176.46 \cdot z^2 + 92.87 \cdot z + 0.7}{z^7 - 1.066 \cdot z^6 + 1.136 \cdot z^5 - 0.699 \cdot z^4 + 0.3 \cdot z^3 - 0.086 \cdot z^2 + 0.0145 \cdot z - 0.00113} \quad (2.14)$$

### 2.1.7. n = 8

Para n = 8, la transferencia será:

$$H(s) = \left( s_D^8 + 5.126 \cdot s_D^7 + 13.137 \cdot s_D^6 + 21.85 \cdot s_D^5 + 25.7 \cdot s_D^4 + 21.85 \cdot s_D^3 + 13.137 \cdot s_D^2 + 5.126 \cdot s_D + 1 \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Donde  $s_D = \frac{s}{\omega_{C8}}$ . Sus polos son:

$$z_i = -12492.83 \pm 8349.58j \mid -2931.1 \pm 14737.5 \mid -14736.47 \pm 2936.43j \mid -8350.16 \pm 12492.44j$$

Y sus respectivos residuos son:

$$r_i = -63275.4 \pm 12609.54j \mid 4416 \pm 2950.26j \mid 53631.28 \pm 80089.53j \mid 5229.1 \pm 26215.42j$$

Por lo tanto, la  $H(z)$  será:

$$H(z) = \frac{-1.23 \cdot 10^{-10} \cdot z^7 + 18.63 \cdot z^6 + 730.76 \cdot z^5 + 2487.37 \cdot z^4 + 1893.69 \cdot z^3 + 377.69 \cdot z^2 + 16.22 \cdot z + 0.0582}{z^8 - 1.24 \cdot z^7 + 1.433 \cdot z^6 - 0.52 \cdot z^5 + 0.187 \cdot z^4 - 0.0453 \cdot z^3 + 0.0067 \cdot z^2 - 0.000452} \quad (2.16)$$

## 2.2. Comparación de resultados

Para verificar que los filtros estuvieran funcionando, se decidió realizar los gráficos superpuestos de las distintas transferencias con su versión analógica. Los resultados se ven a continuación:

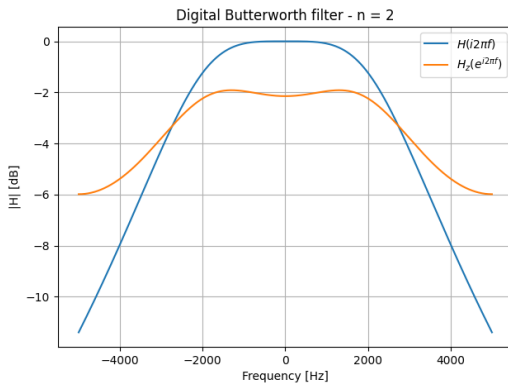


FIGURA 2.1:  $n = 2$

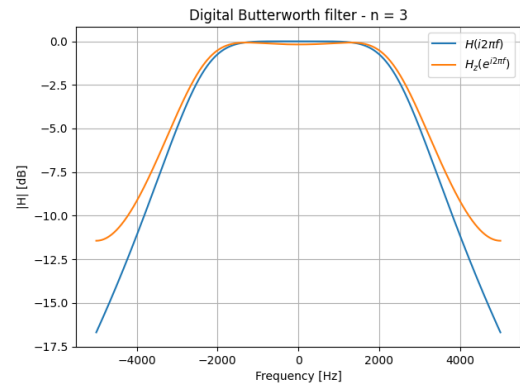


FIGURA 2.2:  $n = 3$

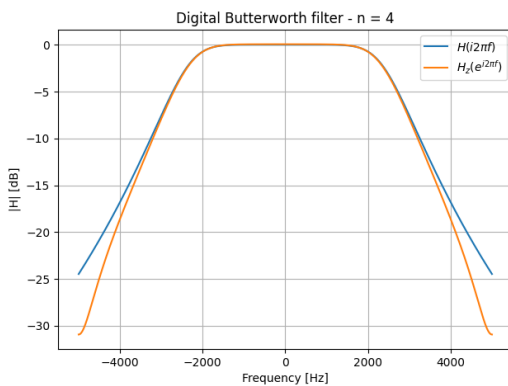


FIGURA 2.3:  $n = 4$

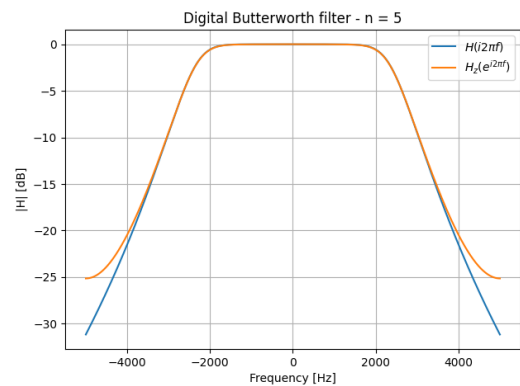
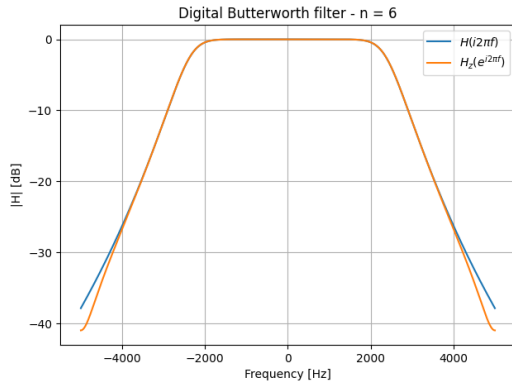
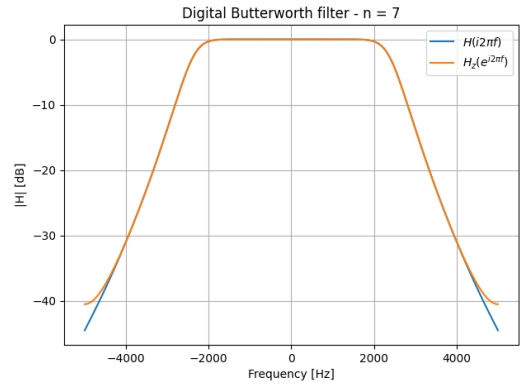
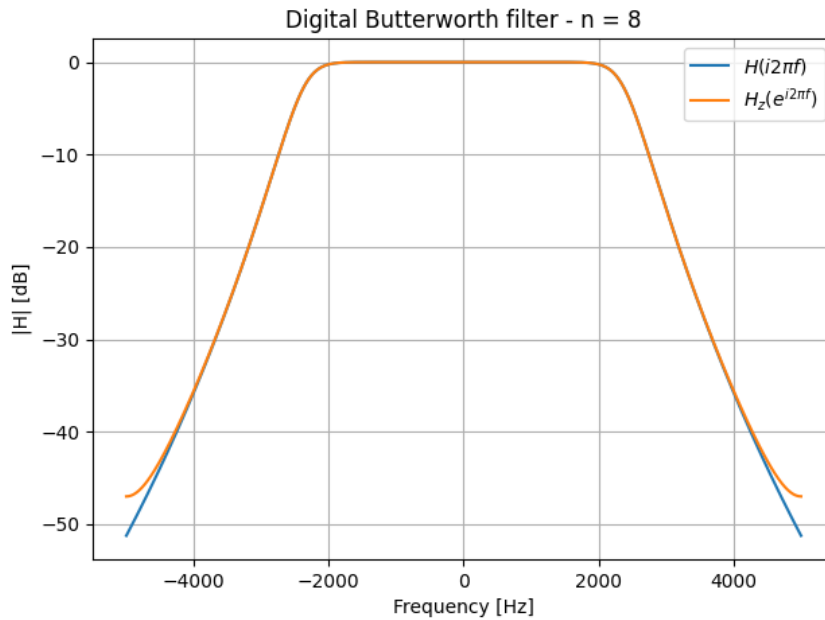


FIGURA 2.4:  $n = 5$

FIGURA 2.5:  $n = 6$ FIGURA 2.6:  $n = 7$ FIGURA 2.7:  $n = 3$ 

Como se puede observar de la Fig. 2.1, el caso de  $n = 2$  es una mala reproducción del filtro analógico. La ganancia en banda pasante es mucho menor a 0dB, mientras que en las puntas ( $\pm \frac{f_s}{2}$ ), la atenuación analógica es considerablemente mayor (casi un 100%). Esto se debe principalmente a las repeticiones periódicas del espectro, que no dejan que la repetición anterior baje demasiado porque la siguiente ya comienza a subir.

Sin embargo, con  $n = 3$  ya se evidencia un seguimiento más aceptable del filtro analógico por parte del digital. Como se observa en la Fig. 2.2, ahora la ganancia en banda pasante sí será correcta. Sin embargo, los bordes siguen presentando una desviación importante con respecto a lo esperado.

A partir de  $n = 4$ , es decir, a partir de la Fig. 2.3, la ganancia en banda pasante del filtro digital se pegará casi de forma perfecta al analógico. En las puntas, seguirá oscilando (a veces, atenúa más uno, y otras veces, el otro). Sin embargo, ahora los valores estarán porcentualmente

más cercanos, y la desviación no será tan extrema como con  $n = 2$ .

Las conclusiones que se pueden sacar es que, en caso de trabajar con filtros de orden bajo, o en caso de trabajar con señales de frecuencia alta, es más conveniente usar filtros analógicos. Sin embargo, si se está utilizando un filtro de orden alto, y con señales de frecuencia considerablemente menor a  $\frac{f_s}{2}$ , entonces conviene un filtro digital. Éste respetará a la perfección a la transferencia analógica en la zona de frecuencias bajas, y traerá consigo la mayor simplicidad a la hora del diseño en relación al caso analógico.

### 3. Ejercicio 9

Se busca diseñar un filtro por el método bilineal con las siguientes especificaciones:

$f_p$	1kHz
$f_a$	1,9kHz
$A_p$	1dB
$A_a$	30dB
$f_s$	10kHz

Se puede demostrar que una transferencia analógica  $H(s)$  puede representarse como una combinación de sumadores, multiplicadores, e integradores. Tanto el sumador como el multiplicador tiene una representación digital exacta. No ocurre lo mismo con el integrador. Los métodos de integración numérica buscan encontrar una aproximación a la transferencia analógica del integrador ( $H(s) = \frac{1}{s}$ ) en el dominio digital. En particular, la ecuación diferencial que representa al integrador es

$$y(t) = \int_0^t x(r)dr \quad (3.1)$$

Si se discretiza tomando  $t = kT$  siendo  $T$  el período de muestreo, lo anterior queda como

$$y(kT) = \int_0^{kT-T} x(t)dt + \int_{kT-T}^{kT} x(t)dt = y(kT-T) + \int_{kT-T}^{kT} x(t)dt \quad (3.2)$$

Por lo tanto se busca encontrar una estimación de la integral en un período de muestreo de  $x(t)$ . La transformación bilineal aproxima esta integral como el área del paralelogramo definido al unir con una recta  $x$  en  $kT-T$  con  $x$  en  $kT$ . Se tendrá entonces que

$$y(kT) = y(kT-T) + \frac{x(kT-T) + x(kT)}{2}T \quad (3.3)$$

Por lo que la aproximación del integrador en el dominio digital es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \approx \frac{1}{s} \quad (3.4)$$

Luego la transformación que se aplicará para hallar la transferencia en el dominio digital a partir de la analógica será  $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ . Por lo que en un principio la transferencia digital queda:

$$H_D(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (3.5)$$

Si  $w$  es la frecuencia analógica, y  $\Omega$  es la digital, despejando  $z$  de la transformación anterior, se encuentra la siguiente relación entre ambas:

$$\Omega = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (3.6)$$

Se observa entonces que hay una relación no lineal entre ambas frecuencias. Por lo tanto, si se aplica la transformación mencionada antes a la transferencia analógica directamente, esta relación no lineal causará que a partir de cierta frecuencia la respuesta en frecuencia digital se comprima frente la analógica. Este fenómeno se llama phase warping. Para corregirlo, se realiza un pre-warping sobre la plantilla digital antes de pasarla al dominio analógico, a través de la relación  $w = \frac{T}{2} \tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$ , luego se diseña en el campo analógico y luego se transforma al digital con la transformación bilineal.

### 3.1. Butterworth

En primer lugar se utilizará una aproximación de Butterworth para el diseño en el dominio analógico. Para encontrar el orden y los polos y ceros analógicos se utilizará la librería `scipy.signal` de Python. De aquí se obtiene que el orden del filtro es 7, y que además hay 7 ceros en el infinito, que deben agregarse a la transferencia digital en  $z = -1$ , multiplicando a dicha transferencia por  $(z + 1)^7$ . Por otro lado, antes de convertir los 7 polos al dominio digital con la transformación bilineal, debe hacerse el pre-warping mencionado anteriormente. Efectuado eso, los polos quedan:

$p_1$	$-6661.994030$
$p_{2,3}$	$-1731.687478 \pm 6970.750383j$
$p_{4,5}$	$-4557.099841 \pm 5271.164746j$
$p_{6,7}$	$-6162.344939 \pm 2748.599902j$

Los mismos se pueden representar en un diagrama de polos y ceros, que se incluye en la figura [3.1](#).

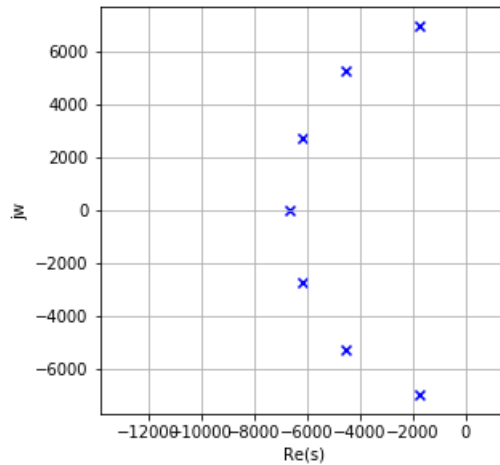


FIGURA 3.1: Diagrama de polos y ceros luego del pre-warping

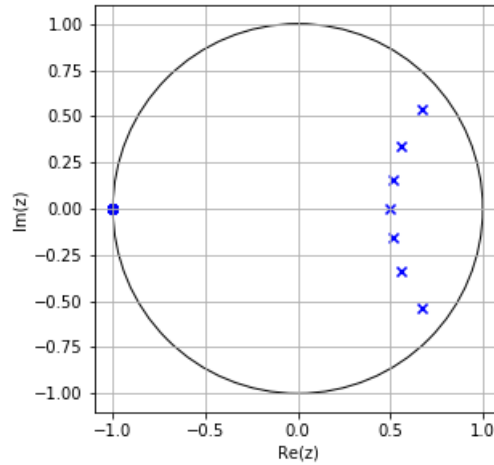
De la transformación bilineal presentada en la sección anterior se puede despejar  $z$  en función de  $s$  como:

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (3.7)$$

Luego se hallan los polos en el dominio digital aplicando esta transformación en cada uno de los polos analógicos, tomando que  $T = \frac{1}{f_s} = 0,001s$ , obteniendo los siguientes resultados

$z_1$	0.500263
$z_{2,3}$	$0.668916 \pm 0.535329j$
$z_{4,5}$	$0.557114 \pm 0.334233j$
$z_{6,7}$	$0.512224 \pm 0.158873j$

Se observa que se obtuvo una transferencia estable, todos los polos en el semiplano izquierdo de  $s$  se transformaron en polos dentro de la circunferencia unitaria en  $z$ . Los polos y ceros en  $z$  también pueden graficarse, como se ve en la figura 3.5. Notamos que los ceros en el infinito de la transferencia analógica se agregaron en  $z = -1$ .

FIGURA 3.2: Diagrama de polos y ceros en  $z$ 

De forma similar a como se hacía en el diseño de filtros analógicas, se divide la transferencia digital en etapas de segundo orden de la forma

$$H(z) = \frac{A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_2 z^2 + B_1 z + B_0} \quad (3.8)$$

Para agrupar las etapas, se toma cada par de polos complejos conjugados junto con dos ceros en  $z=-1$ , y el último cero se agrupa con el polo real. De esta forma se obtienen tres etapas de orden 2 y una de orden 1. Para las de orden dos el numerador será  $(z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1$ , de donde  $A_2 = 1$ ,  $A_1 = 2$ ,  $A_0 = 1$ . Para la de primer orden, el numerador será  $z + 1$ , luego  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_0 = 1$ .

Para las etapas de segundo orden, como los polos son complejos conjugados, si se toma al polo  $p = Re^{jw_0}$ , el denominador será de la forma  $(z - Re^{jw_0})(z - Re^{-jw_0})$ , donde el valor de  $R$  y  $w_0$  dependerá del polo analizado. Si se desarrolla lo anterior, se llega a que el denominador queda  $z^2 - 2R\cos(w_0)z + R^2$ , de donde  $B_2 = 1$ ,  $B_1 = -2R\cos(w_0)$  y  $B_0 = R^2$ . Para las etapas de primer orden, el denominador es de la forma  $z - p$  y se tendrá  $B_2 = 0$ ,  $B_1 = 1$ ,  $B_0 = -p$ . Computando dichos valores, se obtienen los siguientes valores:

Etapas	$A_2$	$A_1$	$A_0$	$B_2$	$B_1$	$B_0$
Etapas 1	1	2	1	1	-1.0244	0.2876
Etapas 2	1	2	1	1	-1.1142	0.4220
Etapas 3	1	2	1	1	-1.3378	0.7340
Etapas 4	0	1	1	0	1	-0.5002

Se normaliza la ganancia de forma que la misma sea 1 en  $z = 1$ , y se grafican la transferencia digital y analógica en un mismo gráfico.

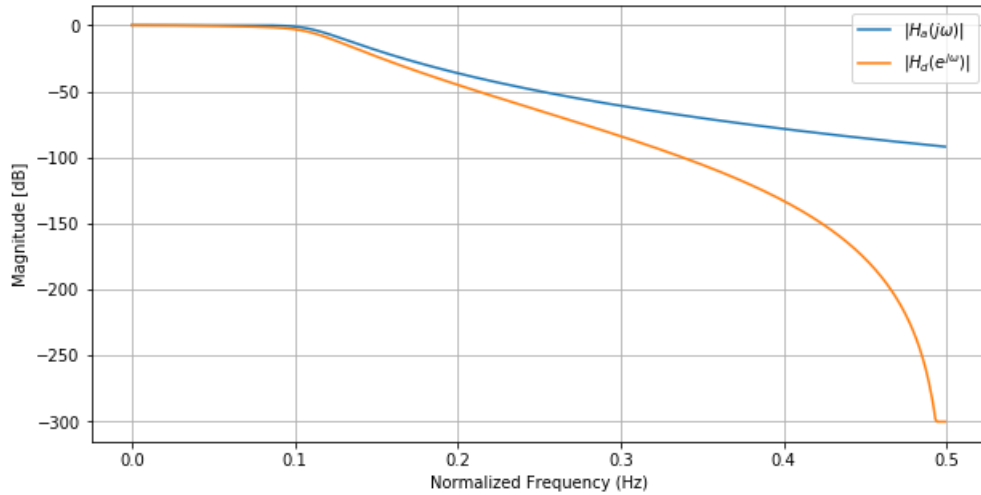


FIGURA 3.3: Respuesta en frecuencia en magnitud de la transferencia analógica y digital

Se aprecia cómo en la banda de paso, es decir entre 0 Hz y  $\frac{f_p}{f_s} = 0,1\text{Hz}$ , la ganancia de ambos filtros se mantiene prácticamente igual y con valor de  $0\text{dB}$ , lo cual es lo buscado, ya que el filtro no introduce ninguna ganancia en la banda de paso. Esta similitud entre las transferencias más o menos se mantiene hasta la frecuencia de atenuación  $\frac{f_a}{f_s} = 0,19\text{Hz}$ , gracias al efecto de pre warping, aunque ya comienza a verse una caída más pronunciada en la transferencia digital. Con la introducción del pre-warping se logra la que respuesta en frecuencia tanto analógica como digital coincidan hasta frecuencias cercanas a la banda de atenuación, a partir de la cual la digital comienza a caer más rápido.

### 3.2. Cauer

Ahora se busca diseñar un filtro con las mismas especificaciones que en la sección anterior, pero utilizando la aproximación de Cauer. Nuevamente para hallar el orden y las ubicaciones de los polos y ceros se utiliza la librería `scipy signal` de Python. En este caso, el filtro analógico queda de orden 3. Además, por la aproximación utilizada se tendrá ceros de transmisión. En particular, se tendrá dos ceros de transmisión y uno en el infinito. Se aplica el pre warping a los polos, y se obtienen las siguientes singularidades

Polos	-
$p_1$	-3480.326183
$p_{2,3}$	$-1423.876613 \pm 6380.834656j$
Ceros	-
$\zeta_{1,2}$	$\pm 12273.90338883j$
$\zeta_3$	$\infty$

Lo anterior se puede representar en un diagrama de polos y ceros en el plano analógico. Se



observan los dos ceros de transmisión.

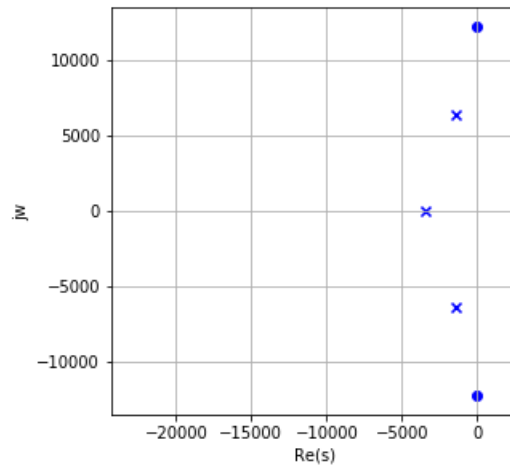


FIGURA 3.4: Diagrama de polos y ceros luego del pre warping

Nuevamente aplicando la transformación bilineal sobre los polos y los ceros de transmisión, se encuentran los mapeos de esas singularidades en el plano  $z$ . El cero en el infinito se transforma en un cero en  $z = -1$ . Los polos y ceros quedan ahora:

Polos	-
$z_{p1}$	0.703554
$z_{p2,p3}$	$0.714948 \pm 0.510776j$
Ceros	-
$z_{k1,k2}$	$0.452832 \pm 0.891596j$
$z_{k3}$	-1

Se grafica el diagrama de polos y ceros, obteniendo

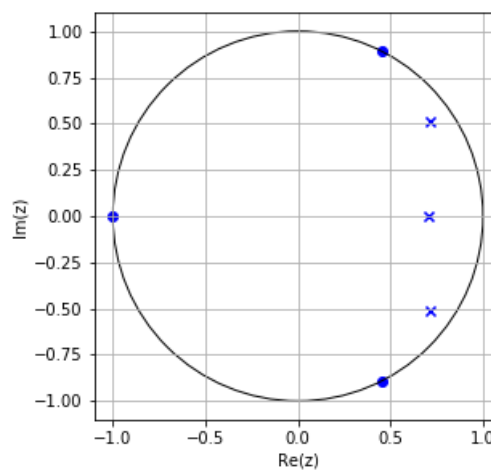


FIGURA 3.5: Diagrama de polos y ceros en el plano  $z$

Nuevamente se aprecia que la transformación dio un sistema estable, ya que los tres polos están dentro del círculo unitario. Además, se observa que los ceros de transmisión se mapearon correctamente a ceros sobre la circunferencia unitaria (recordar que el eje  $j\omega$  se mapea a dicha circunferencia). También se observa el cero en el infinito introducido en -1. Como se trata de un pasabajas, se nota que los polos están en torno a  $z = 1$ , que se corresponde con las frecuencias bajas.

Para agrupar las etapas, se toman los dos polos conjugados con los ceros de transmisión, y el polo real con el cero en  $z = -1$ . Se tienen así dos etapas, una de orden 2 y otra de orden 1. Para la segunda, de forma similar al caso anterior el numerador será de la forma  $z + 1$  de donde  $A_2 = 0$ ,  $A_1 = 1$  y  $A_0 = 1$ , mientras que el denominador tendrá  $B_2 = 0$ ,  $B_1 = 1$  y  $B_0 = -z_p$ . Para la de segundo orden, como los polos son nuevamente complejos conjugados, el denominador se puede escribir de la misma forma que en el caso anterior. Ahora ocurrirá que los ceros también son pares complejos conjugados, de donde el el numerador queda expresado igual que el denominador (pero con distintos coeficientes) y se tendrá  $A_2 = 1$ ,  $A_1 = -2\cos(w_0)$ , y  $A_0 = 1$ , donde  $w_0$  es la frecuencia digital de los ceros y se reemplazó que su módulo es uno pues están sobre la circunferencia unitaria. Calculando esos valores, se obtiene:

Etapas	$A_2$	$A_1$	$A_0$	$B_2$	$B_1$	$B_0$
Etapas 1	0	1	1	0	1	-0.7035
Etapas 2	1	-0.9056	1	1	-1.4298	0.7720

Se normaliza la ganancia para que la misma sea 1 en  $z = 1$ , y se grafican ambas respuestas en frecuencia.

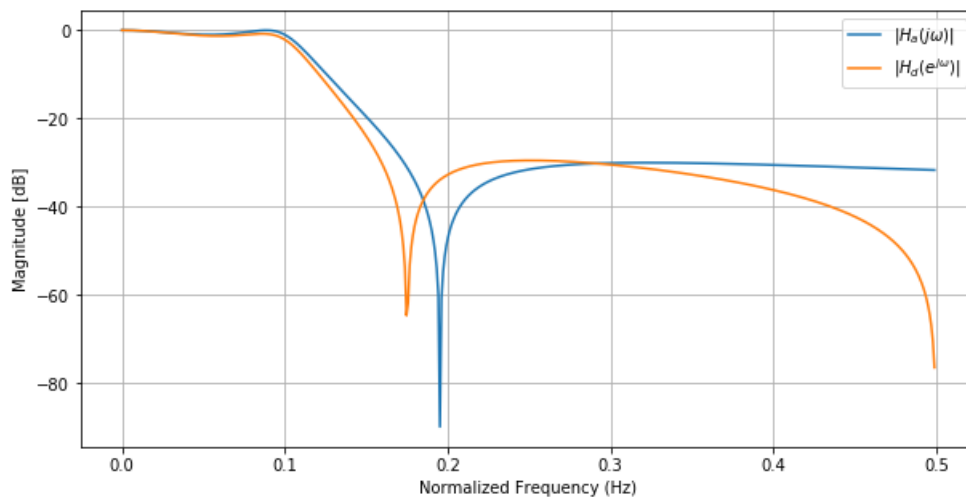


FIGURA 3.6: Respuesta en frecuencia en magnitud de la transferencia analógica y digital

Se observa que de forma similar al caso anterior, las transferencias coinciden en la banda de paso y hasta la frecuencia de atenuación, gracias al pre warping. Se observa cómo el pico del cero de transmisión en la frecuencia digital se encuentra a una frecuencia ligeramente menor que en la

analógica, lo cual se explica por el hecho de que no se aplicó el pre warping a la frecuencia del cero de transmisión.

## 4. Ejercicio 11

Se sabe que  $h(n)$  es la respuesta impulsiva de un filtro causal y que la entrada al mismo es una secuencia finita  $x(n)$ . Luego, se realizan las siguientes operaciones:

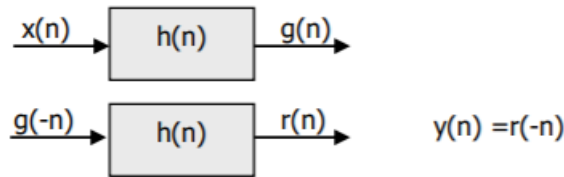


FIGURA 4.1: Sistema I a analizar

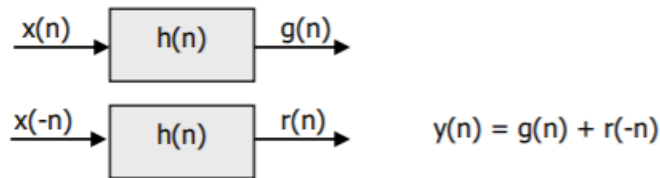


FIGURA 4.2: Sistema II a analizar

Se proceden a analizar ambos sistemas. El objetivo es hallar la respuesta impulsiva tanto en tiempo como en frecuencia de cada sistema completo cuya entrada es  $x(n)$  y salida  $y(n)$ .

### 4.1. Sistema I

En principio, se muestran en la figura 4.1 las siguientes relaciones:

$$G(Z) = H(Z) \cdot X(Z) \quad (4.1)$$

$$R(Z) = H(Z) \cdot G(Z^{-1}) \quad (4.2)$$

También se explicita la siguiente relación, donde aplicamos las dos igualdades anteriores para desarrollarla:

$$Y(Z) = R(Z^{-1}) = H(Z^{-1})G(Z) = H(Z^{-1})H(Z)X(Z) \quad (4.3)$$

Entonces, es claro que si  $Y(Z) = H_I(Z)X(Z)$ , observando el resultado de 4.3 podemos plantear que:

$$H_I(Z) = H(Z^{-1})H(Z) \quad (4.4)$$

Y por ende:

$$h_I(n) = h(n) * h(-n) \quad (4.5)$$

También se observa que, como  $H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n}$ , la relación entre  $H(Z^{-1})$  y  $H(Z)$  es que son conjugadas, lo cual se ve con mayor facilidad si se reemplaza  $Z$  por  $e^{-j\omega t}$ . Al ser conjugados y ser  $H_I(Z)$  el producto entre ambas, para su amplitud y fase se obtiene:

$$|H_I(e^{j2\pi f})| = |H(e^{j2\pi f})|^2 \quad (4.6)$$

$$\Theta(H_I(e^{j2\pi f})) = 0 \quad (4.7)$$

Este sistema, entonces, logra amplificar en amplitud por la respuesta impulsiva elevada al cuadrado, a la vez que evita producir cambios en la fase de la entrada.

## 4.2. Sistema II

En esta ocasión, la figura 4.2 nos muestra que:

$$G(Z) = H(Z) \cdot X(Z) \quad (4.8)$$

$$R(Z) = H(Z) \cdot X(Z^{-1}) \quad (4.9)$$

Una vez más, se explicita la salida  $y(n)$ , la cual toma la siguiente forma tras aplicarle transformada  $Z$ :

$$Y(Z) = G(Z) + R(Z) = H(Z)X(Z) + H(Z^{-1})X(Z) = [H(Z^{-1}) + H(Z)]X(Z) \quad (4.10)$$

De nuevo, podemos identificar  $H_{II}(Z)$  en esta última expresión de modo tal que:

$$H_{II}(Z) = H(Z) + H(Z^{-1}) \quad (4.11)$$

Y en el dominio del tiempo discreto  $n$ , esto resulta:

$$h_{II}(n) = h(-n) + h(n) \quad (4.12)$$

Esta vez, si bien no es un producto de conjugados, sí es una suma de conjugados. Esto implica que el componente imaginario desaparece y  $H_{II}(Z)$  será real. Entonces, su amplitud y fase será:

$$|H_{II}(e^{j2\pi f})| = 2 \cdot \text{Re}(H_{II}(e^{j2\pi f})) \quad (4.13)$$

$$\Theta(H_{II}(e^{j2\pi f})) = 0 \quad (4.14)$$

### 4.3. Aplicación

Se dispuso hallar la respuesta impulsiva de un filtro pasabajos utilizando la aproximación de Legendre con las siguientes especificaciones:

- $f_p = 1\text{kHz}$
- $A_p = 0.2\text{dB}$
- $f_a = 1.9\text{kHz}$
- $A_a = 30\text{dB}$

La frecuencia de muestreo del sistema es  $f_s = 20\text{kHz}$ .

Haciendo uso del programa en python para hallar transferencias con la aproximación de Legendre, se llega a que los polos de la transferencia son:

- $-846.646 + j \cdot 6810.512$
- $-846.646 - j \cdot 6810.512$
- $-2380.246 + j \cdot 5438.096$
- $-2380.246 - j \cdot 5438.096$
- $-3466.936 + j \cdot 3010.566$
- $-3466.936 - j \cdot 3010.566$
- $-3847.032$

No obstante, como se quiere hallar un filtro digital y usar la transformación *bilineal*, sabiendo que la frecuencia en el dominio digital es "más rápida" que en dominio analógico, se debe hacer un ajuste. Para ello se realiza un "*prewrapping*", que consiste en modificar la frecuencia en el dominio analógico para que la frecuencia en el dominio digital sea la deseada. Siendo  $\omega$  la frecuencia analógica y  $\Omega$  la frecuencia digital, la relación entre ambas es de la forma:

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (4.15)$$

Siendo que  $T = \frac{1}{f_s} = 50\mu s$ .

Imponiendo que  $\Omega_p = 2\pi \cdot 1\text{kHz} = 6.28\text{krad}/2$  y  $\Omega_a = 2\pi \cdot 1.9\text{kHz} = 11.93$ , se obtiene que:

$$\omega_p = 6.335\text{krad}/s \quad (4.16)$$

$$\omega_a = 12.305\text{krad}/s \quad (4.17)$$

Volviendo a calcular los polos de la transferencia  $H(s)$  con estas nuevas frecuencias:

- $-853.628 + j \cdot 6866.675$
- $-853.628 - j \cdot 6866.675$
- $-2399.875 + j \cdot 5482.942$
- $-2399.875 - j \cdot 5482.942$
- $-3495.526 + j \cdot 3035.393$
- $-3495.526 - j \cdot 3035.393$
- $-3878.756$

Para obtener la transferencia  $H(z)$  se aplica la transformación bilineal:

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (4.18)$$

De la transformación, se pueden calcular los polos de  $z$ :

- $0.904 + j \cdot 0.32$
- $0.904 - j \cdot 0.32$
- $0.856 + j \cdot 0.24$
- $0.856 - j \cdot 0.24$
- $0.83 + j \cdot 0.128$
- $0.83 - j \cdot 0.128$
- $0.823$

Con los polos hallados, se pueden hallar las transferencias del sistema tanto para la frecuencia analógica como para la discreta.

$$H(s) = \frac{1.4258 \cdot 10^{26}}{s^7 + 1.738 \cdot 10^4 \cdot s^6 + 2.112 \cdot 10^8 \cdot s^5 + 1.689 \cdot 10^{12} \cdot s^4 + 9.88 \cdot 10^{15} \cdot s^3 + 4.041 \cdot 10^{19} \cdot s^2 + 1.075 \cdot 10^{23} \cdot s + 1.4258 \cdot 10^{26}} \quad (4.19)$$

$$H(z) = \frac{6.974 \cdot 10^{-5}}{z^7 - 6.004 \cdot z^6 + 15.623 \cdot z^5 - 22.82 \cdot z^4 + 20.197 \cdot z^3 - 10.826 \cdot z^2 + 3.253 \cdot z - 0.422} \quad (4.20)$$

A continuación se grafican ambas transferencias, llevadas a una misma escala horizontal para poder compararlas.

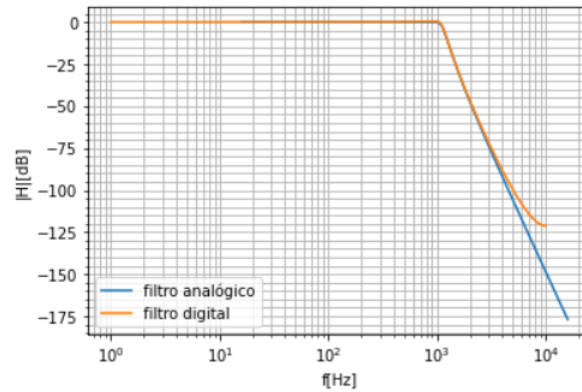


FIGURA 4.3: Comparación entre el módulo del filtro analógico y digital

Se puede observar ambas transferencias se asemejan bastante hasta la frecuencia  $f_a$ , y luego éstas comienzan a separarse. No obstante se logró conseguir una transferencia en el dominio digital que cumple correctamente lo pedido.

Junto con el módulo de las funciones transferencia se grafica la fase de ambos.

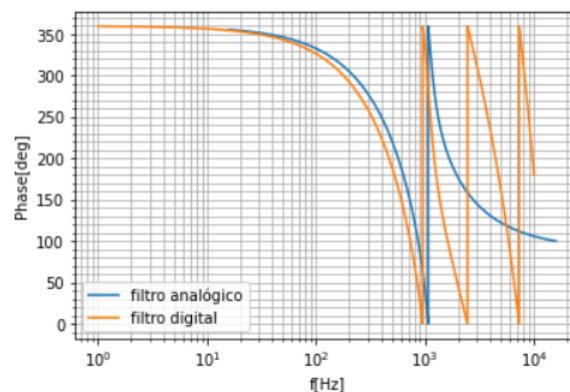


FIGURA 4.4: Comparación entre las fases de los filtros analógico y digital

En el caso de la fase, el filtro analógico y digital presentan más diferencias. Más adelante se pedirá cierta condición para la fase, por lo que en este punto esta diferencia no es tan relevante como parece. Un dato a considerar es que los cambios abruptos en las curvas se debe a la normalización de la fase entre 0 y  $360^\circ$ .

Con estas funciones transferencia se procedió a graficar la respuesta al impulso del sistema.

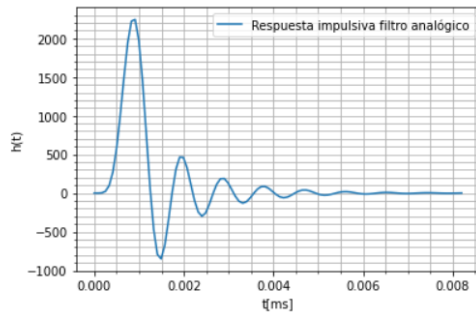


FIGURA 4.5: Respuesta impulsiva del filtro analógico

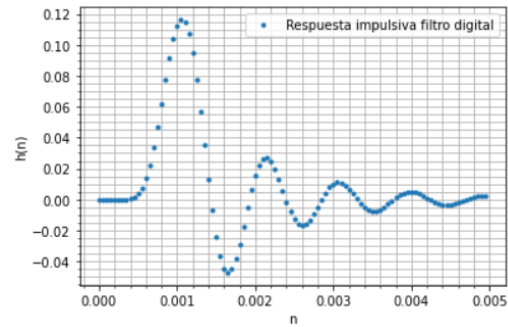


FIGURA 4.6: Respuesta impulsiva del filtro digital

Cabe notar que ambas respuestas impulsivas tienen la misma forma lo cual es esperable gracias a la similitud entre sus funciones transferencia, pero se diferencian en el dominio temporal y los valores que pueden tomar debido a uno es analógico y el otro digital.

#### 4.3.1. Filtro con fase nula

Ya obtenido el filtro, en el siguiente análisis se procederá a buscar otro filtro con fase nula. Para hallar dicho filtro, se parte del filtro hallado y se utilizan los sistemas I y II estudiados previamente. Primero se analizará el uso del primer sistema.

Por medio de la Eq. 4.4, se puede hallar la transferencia para el sistema I.

$$\frac{4.86 \cdot 10^{-9} \cdot z^7}{-0.42 \cdot z^{14} + 5.78 \cdot z^{13} - 36.95 \cdot z^{12} + 145.65 \cdot z^{11} - 395.98 \cdot z^{10} + 785.51 \cdot z^9 - 1172.5 \cdot z^8 + \dots} \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\dots + 1337.81 \cdot z^7 - 1172.5 \cdot z^6 + 785.51 \cdot z^5 - 395.99 \cdot z^4 + 145.65 \cdot z^3 - 36.96 \cdot z^2 + 5.79 \cdot z - 0.42}$$

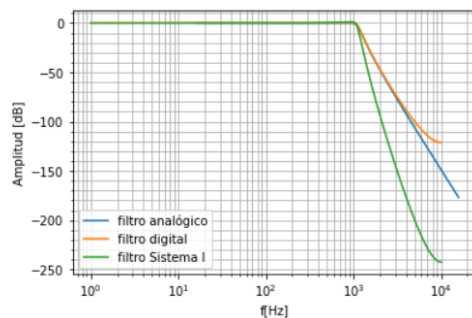


FIGURA 4.7: Comparación del módulo de la transferencia del filtro del sistema I con los filtro anteriores

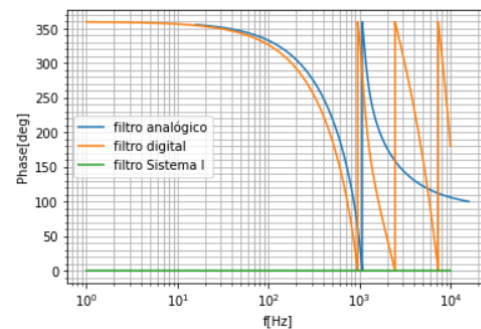


FIGURA 4.8: Comparación de la fase de la transferencia del filtro del sistema I con los filtro anteriores

De los gráficos se pueden observar 2 rasgos importantes. En primer lugar, la fase del filtro del sistema I es nula como se esperaba según lo analizado, y en segundo lugar, el módulo de la transferencia tiene un decaimiento mayor gracias a que el módulo de dicho filtro es el cuadrado del



filtro hallado por Legendre. Con lo cual se evidencian que las cuentas realizadas son consistentes con lo hallado.