

第七章 非线性控制系统分析

习题与解答

7-1 设一阶非线性系统的微分方程为

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试确定系统有几个平衡状态, 分析平衡状态的稳定性, 并画出系统的相轨迹。

解 令 $\dot{x} = 0$ 得

$$-x + x^3 = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$$

系统平衡状态

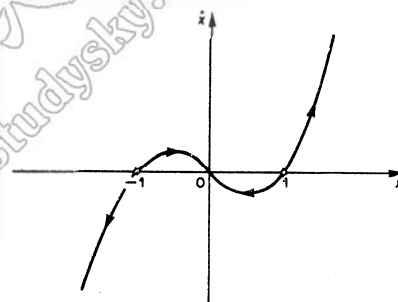
$$x_e = 0, -1, +1$$

其中: $x_e = 0$: 稳定的平衡状态;

$x_e = -1, +1$: 不稳定平衡状态。

计算列表, 画出相轨迹如图解7-1所示。

| | | | | | | | |
|------------|----|----|---------------|---|--------------|---|----|
| x | -2 | -1 | $-1/\sqrt{3}$ | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | 2 |
| \dot{x} | -6 | 0 | 0.385 | 0 | -0.385 | 0 | 6 |
| \ddot{x} | 11 | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 11 |



图解 7-1 系统相轨迹

可见: 当 $|x(0)| < 1$ 时, 系统最终收敛到稳定的平衡状态; 当 $|x(0)| > 1$ 时, 系统发散; $x(0) < -1$ 时, $x(t) \rightarrow -\infty$; $x(0) > 1$ 时, $x(t) \rightarrow \infty$ 。

注: 系统为一阶, 故其相轨迹只有一条, 不可能在整个 $\dot{x} \sim x$ 平面上任意分布。

7-2 试确定下列方程的奇点及其类型, 并用等倾斜线法绘制相平面图。

(1) $\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$

(2)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

解 (1) 系统方程为

$$\begin{cases} \text{I: } \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 & (x > 0) \\ \text{II: } \ddot{x} + \dot{x} - x = 0 & (x < 0) \end{cases}$$

令 $\ddot{x} = \dot{x} = 0$, 得平衡点: $x_e = 0$ 。

系统特征方程及特征根:

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + s + 1 = 0, & s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} & (\text{稳定的焦点}) \\ \text{II: } s^2 + s - 1 = 0, & s_{1,2} = -1.618, +0.618 & (\text{鞍点}) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -\dot{x} - |x|, \quad \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = -\dot{x} - |x|$$

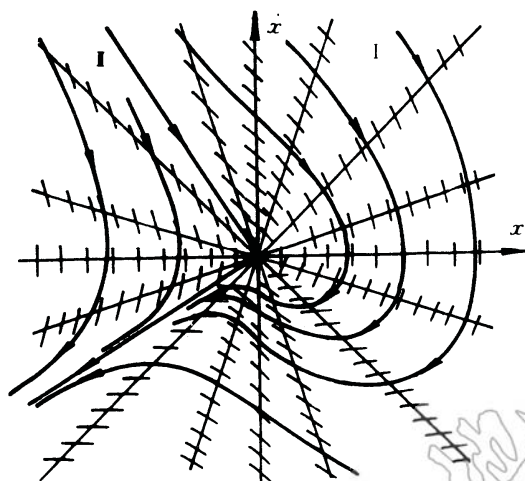
$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -1 - \frac{|x|}{\dot{x}}, \quad \dot{x} = \frac{-1}{1+\alpha}|x| = \beta|x|$$

$$\begin{cases} \text{I: } \alpha = -1 - \frac{1}{\beta} & (x > 0) \\ \text{II: } \alpha = \frac{1}{\beta} - 1 & (x < 0) \end{cases}$$

计算列表

| β | $-\infty$ | -3 | -1 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | 3 | ∞ |
|--------------------------------|-----------|------|----|------|-----------|-----|----|------|----------|
| $x > 0: \alpha = -1 - 1/\beta$ | -1 | -2/3 | 0 | 2 | $-\infty$ | -4 | -2 | -4/3 | -1 |
| $x < 0: \alpha = -1 + 1/\beta$ | -1 | -4/3 | -2 | -4 | ∞ | 2 | 0 | -2/3 | -1 |

用等倾斜线法绘制系统相平面图如图解7-2 (a) 所示。



图解7-2 (a) 系统相平面图

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 & \text{①} \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 & \text{②} \end{cases}$$

由式①: $x_2 = \dot{x}_1 - x_1$ ③

式③代入②: $(\ddot{x}_1 - \dot{x}_1) = 2x_1 + (\dot{x}_1 - x_1)$

即 $\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - x_1 = 0$ ④

令 $\dot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$

得平衡点: $x_e = 0$

由式④得特征方程及特征根为

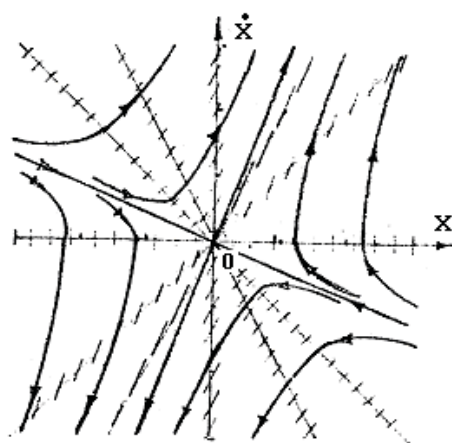
$$s^2 - 2s - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 2.414 \\ -0.414 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$$

画相轨迹, 由④式

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 \frac{d\dot{x}_1}{dx} = \dot{x}_1 \alpha = 2\dot{x}_1 + x_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{\alpha - 2}$$

计算列表



图解7-2 (b)

| | | | | | | | |
|----------------------|----------|-----|---|----------|----|-----|----------|
| α | 2 | 2.5 | 3 | ∞ | 1 | 1.5 | 2 |
| $\beta=1/(\alpha-2)$ | ∞ | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | ∞ |

用等倾斜线法绘制系统相平面图如图解 7-2 (b) 所示。

7-3 已知系统运动方程为 $\ddot{x} + \sin x = 0$, 试确定奇点及其类型, 并用等倾斜线法绘制相平面图。

解 求平衡点, 令 $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ 得

$$\sin x = 0$$

平衡点 $x_e = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

将原方程在平衡点附近展开为台劳级数, 取线性项。

设

$$F(x) = \ddot{x} + \sin x = 0$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right|_{\ddot{x}_e} \Delta \ddot{x} + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} \Delta x = 0$$

$$\Delta \ddot{x} + \cos x_e \cdot \Delta x = 0$$

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x} + \Delta x = 0 & x_e = k\pi \quad (k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \\ \Delta \ddot{x} - \Delta x = 0 & x_e = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \end{cases}$$

特征方程及特征根:

$$k \text{ 为偶数时 } s^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

$$k \text{ 为奇数时 } s^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad (\text{鞍点})$$

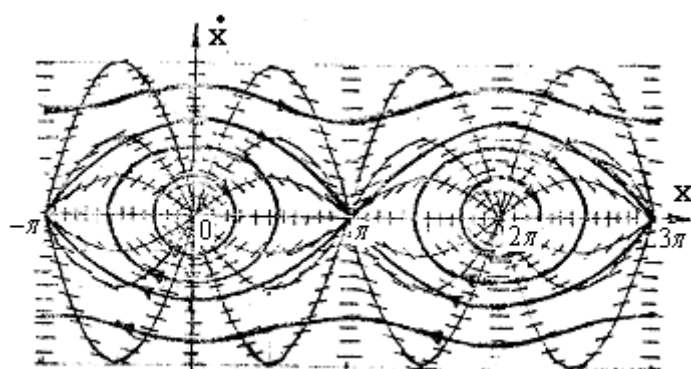
用等倾斜线法作相平面

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + \sin x = \dot{x} \cdot \alpha + \sin x = 0$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha} \sin x$$

| | | | | | | | | | |
|-------------|-----|----|------|------|----------|-----|-----|----|------|
| α | -2 | -1 | -1/2 | -1/4 | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 |
| $-1/\alpha$ | 1/2 | 1 | 2 | 4 | ∞ | -4 | -2 | -1 | -1/2 |

作出系统相平面图如图解7-3所示。



图解7-3

7-4 若非线性系统的微分方程为

$$(1) \quad \ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + x\dot{x} + x = 0$$

试求系统的奇点, 并概略绘制奇点附近的相轨迹图。

解 (1) 由原方程得

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -(3\dot{x} - 0.5)\dot{x} - x - x^2 = -3\dot{x}^2 + 0.5\dot{x} - x - x^2$$

$$\text{令} \quad \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$$

$$\text{得} \quad x + x^2 = x(x+1) = 0$$

解出奇点 $x_e = 0, -1$

在奇点处线性化处理。

在 $x_e = 0$ 处:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ \dot{x}=0}} \cdot x + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=0 \\ \dot{x}=0}} \cdot \dot{x} \\ &= (-1 - 2x) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} = -x + 0.5\dot{x} \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$$

特征方程及特征根

$$s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4}}{2} = 0.25 \pm j0.984 \quad (\text{不稳定的焦点})$$

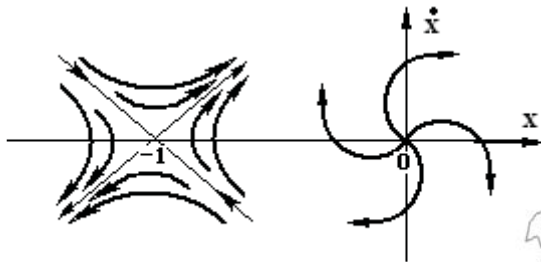
在 $x_e = -1$ 处

$$\ddot{x} = (-1 - 2x) \Big|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot \dot{x} = x + 0.5\dot{x}$$

即 $\ddot{x} - 0.5\dot{x} - x = 0$

特征根 $s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4}}{2} = \begin{cases} 1.218 \\ -0.718 \end{cases}$ (鞍点)

概略画出奇点附近的相轨迹如图解7-4(1)所示:



图解7-4(1)

(2) 由原方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -x\dot{x} - x$$

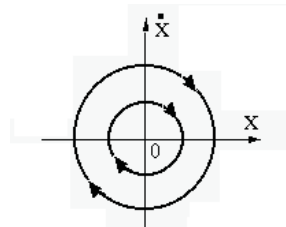
令 $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ 得奇点 $x_e = 0$, 在奇点处线性化

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} \\ &= (-\dot{x} - 1) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x - x \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} \end{aligned}$$

得 $\ddot{x} = -x$

即 $\ddot{x} + x = 0$

特征根 $s_{1,2} = \pm j$ 。奇点 $x_e = 0$ (中心点) 处的相轨迹如图解7-4(2)所示。



图解7-4(2)

7-5 非线性系统的结构图如图7-36所示。

系统开始是静止的, 输入信号 $r(t) = 4 \times 1(t)$, 试写出开关线方程, 确定奇点的位置和类型, 画出该系统的相平面图, 并分析系统的运动特点。

解 由结构图, 线性部分传递函数为

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{1}{s^2}$$

得

$$\ddot{c}(t) = m(t)$$

①

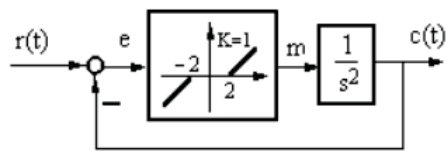


图7-36 非线性系统

由非线性环节有

$$m(t) = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 \quad \text{I} \\ e(t) - 2 & e > 2 \quad \text{II} \\ e(t) + 2 & e < -2 \quad \text{III} \end{cases} \quad (2)$$

由综合点得

$$c(t) = r(t) - e(t) = 4 - e(t) \quad (3)$$

将③、②代入①得

$$\ddot{e}(t) = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 \quad \text{I} \\ 2 - e(t) & e > 2 \quad \text{II} \\ -2 - e(t) & e < -2 \quad \text{III} \end{cases}$$

开关线方程为 $e(t) = \pm 2$

$$\text{I: } \ddot{e}(t) = 0 \quad \dot{e} = c \quad (\text{常数})$$

$$\text{II: } \ddot{e} + e - 2 = 0$$

$$\text{令 } \ddot{e} = \dot{e} = 0 \text{ 得奇点 } e_0^{\text{II}} = 2$$

特征方程及特征根

$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

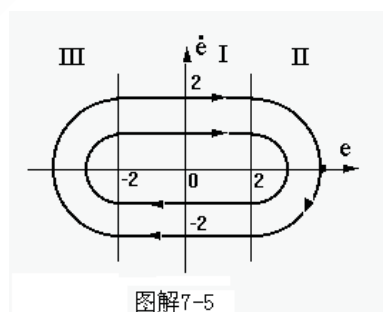
$$\text{III: } \ddot{e} + e + 2 = 0$$

$$\text{令 } \ddot{e} = \dot{e} = 0 \text{ 得奇点 } e_0^{\text{III}} = -2$$

特征方程及特征根

$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

绘出系统相轨迹如图解7-5所示, 可看出系统运动呈现周期振荡状态。



图解7-5

7-6 图7-37所示为一带有库仑摩擦的二阶系统, 试用相平面法讨论库仑摩擦对系统单位阶跃响应的影响。

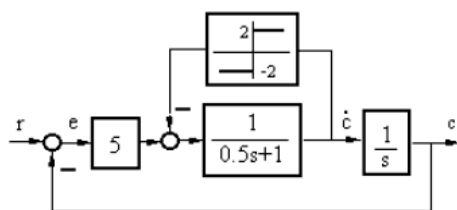


图 7-37 有库仑摩擦的二阶系统

解 由系统结构图有

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{5}{s} \cdot \frac{1}{0.5s + 1 \pm 2} \quad \begin{cases} +: & \dot{c} > 0 \\ -: & \dot{c} < 0 \end{cases}$$

$$s(0.5s + 1 \pm 2)C(s) = 5E(s)$$

$$\begin{cases} 0.5\ddot{c} + 3\dot{c} = 5e & \dot{c} > 0 & \text{I} \\ 0.5\ddot{c} - \dot{c} = 5e & \dot{c} < 0 & \text{II} \end{cases} \quad (1)$$

因为

$$c = r - e = 1 - e \quad (2)$$

②代入①式有

$$\begin{cases} \ddot{e} + 6\dot{e} + 10e = 0 & \dot{e} < 0 & \text{I} \\ \ddot{e} - 2\dot{e} + 10e = 0 & \dot{e} > 0 & \text{II} \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + 6s + 10 = 0 & s_{1,2} = -3 \pm j & (\text{稳定的焦点}) \\ \text{II: } s^2 - 2s + 10 = 0 & s_{1,2} = 1 \pm j3 & (\text{不稳定的焦点}) \end{cases}$$

依题意

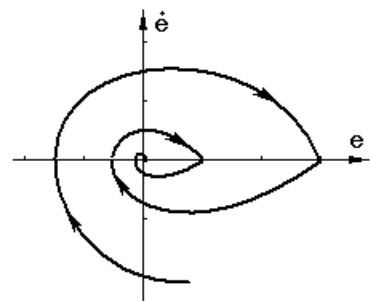
$$c(0) = 0, \dot{c}(0) = 0$$

可得

$$e(0) = 1 - c(0) = 1$$

$$\dot{e}(0) = \dot{c}(0) = 0$$

以(1, 0)为起点概略作出系统相轨迹。可见系统阶跃响应过程是振荡收敛的。



图解7-6

7-7 已知具有理想继电器的非线性系统如图7-38所示。

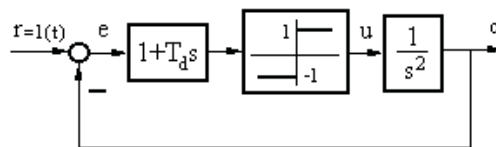


图7-38 具有理想继电器的非线性系统

试用相平面法分析:

- (1) $T_d = 0$ 时系统的运动;
- (2) $T_d = 0.5$ 时系统的运动, 并说明比例微分控制对改善系统性能的作用;
- (3) $T_d = 2$ 时系统的运动特点。

解 依结构图, 线性部分微分方程为

$$\ddot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为

$$u = \begin{cases} 1 & e + T_d \dot{e} > 0 \quad \text{I} \\ -1 & e + T_d \dot{e} < 0 \quad \text{II} \end{cases} \quad (2)$$

开关线方程:

$$\dot{e} = \frac{-1}{T_d} e$$

由综合口:

$$c = r - e = 1 - e \quad (3)$$

③、②代入①并整理得

$$\ddot{e} = \begin{cases} -1 & e + T_d \dot{e} > 0 \quad \text{I} \\ +1 & e + T_d \dot{e} < 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

在 I 区:

$$\dot{e} = \dot{e} \frac{de}{de} = -1$$

解出:

$$\dot{e}^2 = -2e \quad (e > 0) \quad (\text{抛物线})$$

同理在 II 区可得:

$$\dot{e}^2 = 2e \quad (e < 0) \quad (\text{抛物线})$$

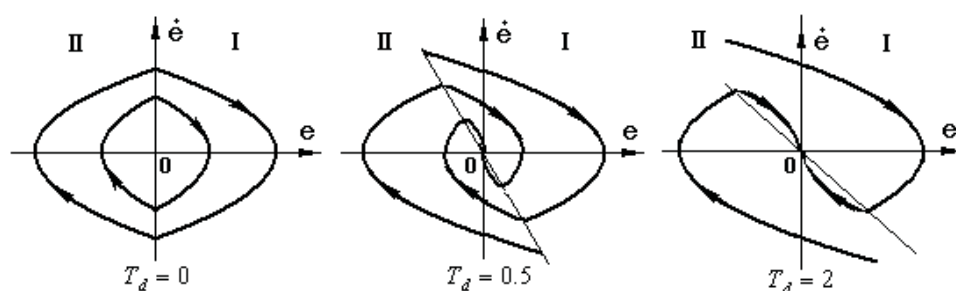
开关线方程分别为

$$T_d = 0 \text{ 时, } e = 0;$$

$$T_d = 0.5 \text{ 时, } \dot{e} = -2e;$$

$$T_d = 2 \text{ 时, } \dot{e} = -0.5e.$$

概略作出相平面图如图解7-7所示。



图解7-7

由相平面图可见: 加入比例微分控制可以改善系统的稳定性; 当微分作用增强时, 系统振荡性减小, 响应加快。

7-8 具有饱和非线性特性的控制系统如图 7-39 所示, 试用相平面法分析系统的阶跃响应。

解 非线性特性的数学表达式为

$$y = \begin{cases} e & |e| < a \quad \text{I} \\ M & e > a \quad \text{II} \\ -M & e < -a \quad \text{III} \end{cases}$$

线性部分的微分方程式为

$$T\ddot{c} + \dot{c} = Ky$$

考虑到 $r - c = e$, 上式又可以写成

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = T\ddot{r} + \dot{r}$$

输入信号为阶跃函数, 在 $t > 0$ 时有, $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, 因此有

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = 0$$

根据已知的非线性特性, 系统可分为三个线性区域。

I 区: 系统的微分方程为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad (|e| < a)$$

按前面确定奇点的方法, 可知系统在该区有一个奇点 $(0, 0)$, 奇点的类型为稳定焦点。图解 7-8 (a) 为 I 区的相轨迹, 它们是一簇趋向于原点的螺旋线。

II 区: 系统的微分方程为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM = 0 \quad (e > a)$$

设一般情况下, 初始条件为 $e(0) = e_0$, $\dot{e}(0) = \dot{e}_0$ 。则上式的解为

$$e(t) = e_0 + (\dot{e}_0 + KM)T - (\dot{e}_0 + KM)Te^{-t/T} - KMt$$

对上式求一次导数, 得

$$\dot{e}(t) = (\dot{e}_0 + KM)e^{-t/T} - KM$$

故当初始条件 $e'_0 = -KM$ 时, 相轨迹方程为 $e' = -KM$ 。

$$\text{当 } e'_0 \neq -KM \text{ 时, 相轨迹方程为 } e = e_0 + (\dot{e}_0 - \dot{e})T + KMT \ln \left| \frac{\dot{e} + KM}{\dot{e}_0 + KM} \right|$$

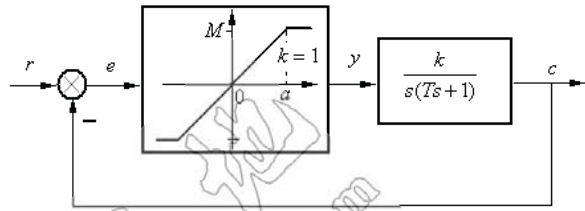


图 7-39 非线性系统结构图

由此可作出该区的相轨迹, 如图解 7-8(b) 所示, 相轨迹渐进于直线 $\dot{e} = -KM$ 。

III区: 此时系统的微分方程为

$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM = 0 \quad (e < -a)$$

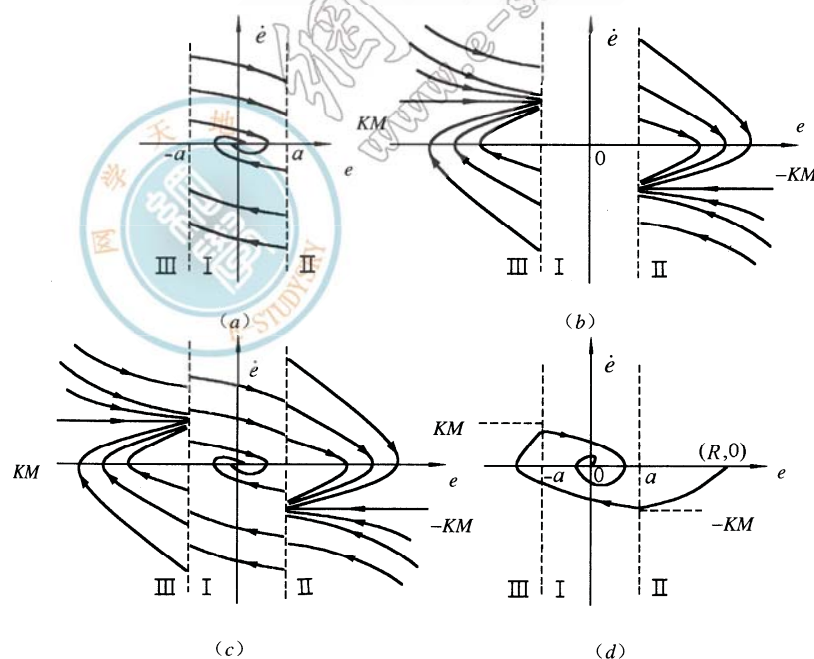
将 II 区相轨迹方程中的 KM 改变符号, 即得 III 区的相轨迹方程

$$\begin{cases} \dot{e} = KM & (\dot{e}_0 = KM) \\ e = e_0 + (\dot{e}_0 - \dot{e})T - KMT \ln \left| \frac{\dot{e} + KM}{\dot{e}_0 + KM} \right| & (\dot{e}_0 \neq KM) \end{cases}$$

该区的相轨迹如图解 7-8(c) 所示。

将以上各区的相轨迹连接起来, 便是系统的整个相平面图, 如图解 7-8(d) 所示。

假使系统原来处于静止状态, 则在阶跃输入作用时, 相轨迹的起始点应为 $e(0) = R$, $\dot{e}(0) = 0$ 。此时的系统的相平面图如图解 7-8(d) 所示。由图可知, 系统在阶跃输入作用时, 系统是稳定的, 其稳态误差为零。动态过程具有衰减振荡性质, 最大超调量可从图中量得。



图解 7-8 非线性系统的相平面图

7-9 试推导非线性特性 $y = x^3$ 的描述函数。

解 $y(t) = A^3 \sin^3 \omega t$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \omega t \cdot d\omega t = \frac{4A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t)^2 \cdot d\omega t \\ &= \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\omega t + \cos^2 2\omega t) \cdot d\omega t = \frac{A^3}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \right] - \frac{A^3}{\pi} \left[\sin 2\omega t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\omega t + 1}{2} \cdot d\omega t \\ &= \frac{A^3}{2} - 0 + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\omega t \cdot d\omega t + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega t = \frac{3A^3}{4} \\ N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = \frac{3A^2}{4} \end{aligned}$$

7-10 三个非线性系统的非线性环节一样, 线性部分分别为

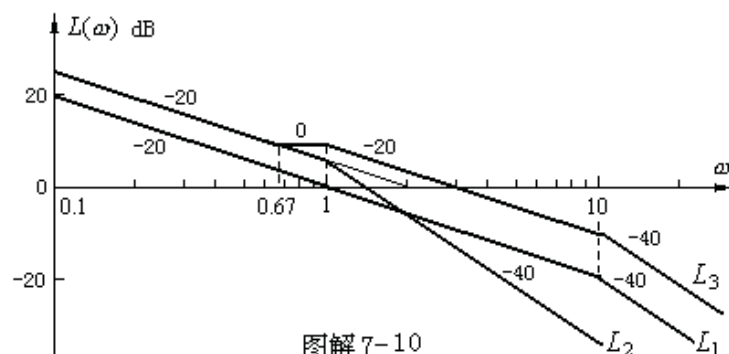
$$(1) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

试问用描述函数法分析时, 哪个系统分析的准确度高?

解 线性部分低通滤波特性越好, 描述函数法分析结果的准确程度越高。分别作出三个系统线性部分的对数幅频特性曲线如图解7-10所示。



图解 7-10

由对数幅频特性曲线可见, L_2 的高频段衰减较快, 低通滤波特性较好, 所以系统 (2) 的描述函数法分析结果的准确程度较高。

7-11 将图7-40所示非线性系统简化成环节串联的典型结构图形式, 并写出线性部分的传递函数。

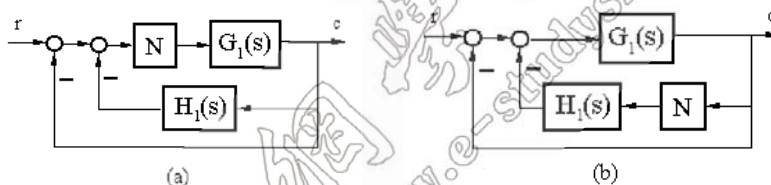


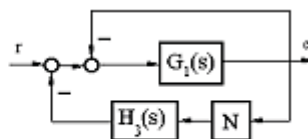
图7-40 非线性系统结构图

解 (a) 将系统结构图等效变换为图解7-11 (a) 的形式。

$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$



图解7-11 (a)

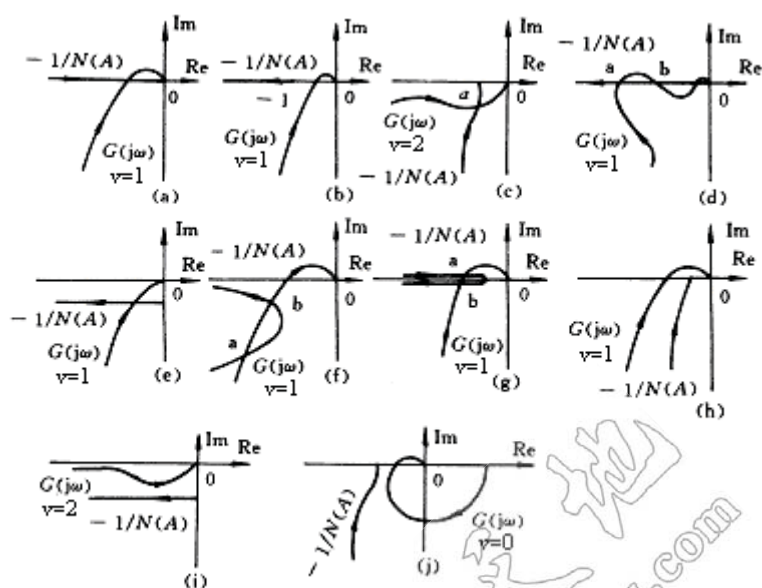


图解7-11 (b)

(b) 将系统结构图等效变换为图解7-11(b)的形式。

$$G(s) = H_1(s) \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

7-12 判断题7-41图中各系统是否稳定; $-1/N(A)$ 与 $G(j\omega)$ 两曲线交点是否为自振点。



题7-41图 自振分析

- 解 (a) 不是
(b) 是
(c) 是
(d) a 、 c 点是, b 点不是
(e) 是
(f) a 点不是, b 点是
(g) a 点不是, b 点是
(h) 系统不稳定
(i) 系统不稳定
(j) 系统稳定

7-13 已知非线性系统的结构图如图7-42所示

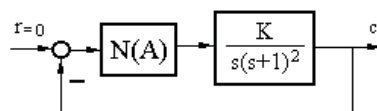


图7-42 7-13题图

图中非线性环节的描述函数为

$$N(A) = \frac{A+6}{A+2} \quad (A > 0)$$

试用描述函数法确定:

- (1) 使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时, 线性部分的K值范围;
- (2) 判断周期运动的稳定性, 并计算稳定周期运动的振幅和频率。

解 (1)

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-(A+2)}{A+6}$$

$$\frac{-1}{N(0)} = \frac{-1}{3}, \quad \frac{-1}{N(\infty)} = -1$$

$$\frac{dN(A)}{dA} = \frac{-4}{(A+2)^2} < 0$$

$N(A)$ 单调降, $-1/N(A)$ 也为单调降函数。画出负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图解7-13所示, 可看出, 当K从小到大变化时, 系统会由稳定变为自振, 最终不稳定。

求使 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ 的 ω 值:

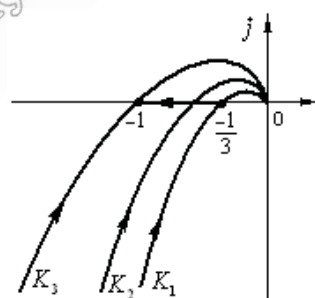
令 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctg\omega = -180^\circ$

得 $\arctg\omega = 45^\circ, \quad \omega = 1$

令 $|G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \Big|_{\omega=1}$

$$= \frac{K}{2} = \begin{cases} \frac{1}{3} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \\ 1 \rightarrow K_3 = 2 \end{cases}$$

可得出K值与系统特性之间的关系:



图解7-13

$$K: \quad 0 \longrightarrow 2/3 \longrightarrow 2 \longrightarrow \infty$$

稳定 自振 不稳定

(2) 由图解7-13可见, 当 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 相交时, 系统一定会自振。由自振条件

$$N(A)G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{A+6}{A+2} \cdot \frac{-K}{2} = \frac{-(A+6)K}{2(A+2)} = -1$$

$$(A+6)K = 2A+4$$

解出

$$\begin{cases} A = \frac{6K-4}{2-K} \\ \omega = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3} < K < 2\right)$$

7-14 具有滞环继电特性的非线性控制系统如图 7-43 (a) 所示, 其中 $M=1$, $h=1$ 。

- (1) 当 $T=0.5$ 时, 分析系统的稳定性, 若存在自振, 确定自振参数;
- (2) 讨论 T 对自振的影响。

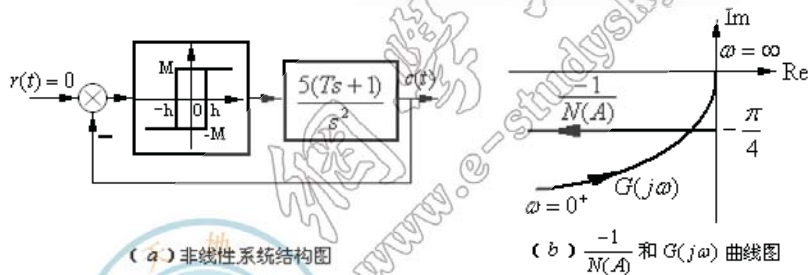


图 7-43 非线性系统结构图及自振分析

解 具有滞环继电特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4hM}{\pi A^2}, \quad A > h$$

代入 $M=1$, $h=1$, 有

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} - j \frac{4}{\pi A^2}$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A (\sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} + j \frac{1}{A})}{4(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} - j \frac{1}{A})(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} + j \frac{1}{A})} = -\frac{\pi}{4} \sqrt{A^2 - 1} - j \frac{\pi}{4}$$

其负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线如题 7-43 (b) 所示, $G(j\omega)$ 曲线位于第三象限, 两曲线必然有交点, 且该点为自振点。

$$G(s) = \frac{5(Ts + 1)}{s^2}$$

$$G(j\omega) = -\frac{5}{\omega^2} - j\frac{5T}{\omega}$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

根据虚部相等, 有

$$-j\frac{5T}{\omega} = -j\frac{\pi}{4}$$

$$\omega = \frac{20T}{\pi}$$

自振角频率随 T 增大而增大, 当 $T = 0.5$ 时, $\omega = 3.18$ 。

根据实部相等, 有

$$-\frac{5}{\left(\frac{20T}{\pi}\right)^2} = -\frac{\pi}{4}\sqrt{A^2 - 1}$$

解出非线性输入端振幅为

$$A = \sqrt{\frac{\pi^2}{400T^4} + 1}$$

当 $T = 0.5$ 时, $A = 1.18$ 。自振振幅随 T 增大而减小。

7-15 非线性系统如图7-44所示, 试用描述函数法分析周期运动的稳定性, 并确定系统输出信号振荡的振幅和频率。

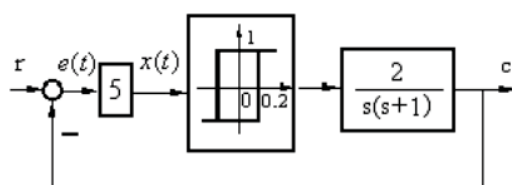


图 7.44 非线性系统

解 将系统结构图等效变换为图解7-15。

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{-10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega(\omega^2+1)}$$

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j\frac{4 \times 0.2}{\pi A^2}$$

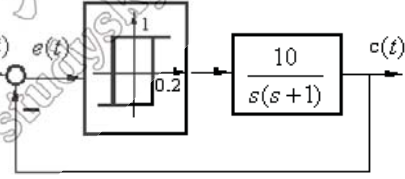
$$= \frac{4}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j\frac{0.2}{A} \right]$$

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j\frac{0.2}{A}} = \frac{-\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} + j\frac{0.2\pi}{A}$$

令 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 的实部、虚部分别相等得

$$\frac{10}{\omega^2+1} = \frac{\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2}$$

$$\frac{10}{\omega(\omega^2+1)} = \frac{0.2\pi}{4} = 0.157$$



图解7-15

两式联立求解得 $\omega = 3.91$, $A = 0.806$ 。

由图7-44, $r(t) = 0$ 时, 有 $c(t) = -e(t) = \frac{1}{5}x(t)$, 所以 $c(t)$ 的振幅为 $\frac{0.806}{5} = 0.161$ 。

7-16 用描述函数法分析图7-45所示系统的稳定性, 并判断系统是否存在自振。若存在自振, 求出自振振幅和自振频率 ($M > h$)。

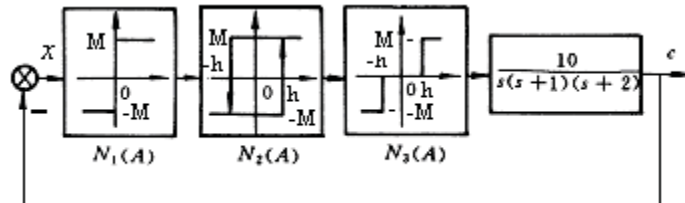


图7-45 非线性系统结构图

解 因为 $M > h$, 所以当 $x = -c > 0$ 时 $N_1(A)$ 环节输出为 $M > h$, $N_2(A)$ 环节输出也为 $M > h$ 。同样 $N_3(A)$ 输出也是 M ; 当 $x < 0$ 时情况类似。所以实际上 $N_2(A)$ 和 $N_3(A)$ 不起作用, 系统可等效为如图解7-16 (a) 的形式。

画出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图解7-16 (b) 所示。可见系统一定自振。由自振条件

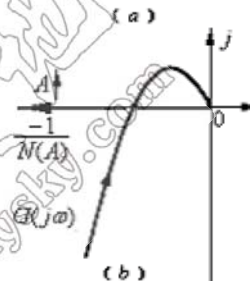
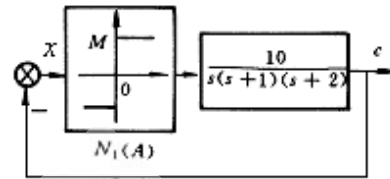
$$N_1(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

即
$$\frac{4M}{\pi A} \cdot \frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = -1$$

$$\frac{40M}{\pi A} = -j\omega(1+j\omega)(2+j\omega) = 3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)$$

比较实部、虚部有
$$\begin{cases} \frac{40M}{\pi A} = 3\omega^2 \\ \omega(2-\omega^2) = 0 \end{cases}$$

解出
$$\begin{cases} A = 2.12M \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases}$$



图解 7-16

7-17 试用描述函数法说明图7-46所示系统必然存在自振, 并确定输出信号 c 的自振振幅和频率, 分别画出信号 c 、 x 、 y 的稳态波形。

解

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}, \quad \frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4}$$

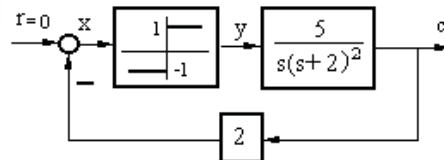


图 7-46 非线性系统结构图

绘出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图解7-17(a)所示, 可见 D 点是自振点, 系统一定会自振。

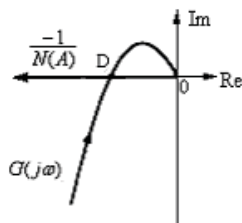
由自振条件可得

$$N(A) = \frac{-1}{G(j\omega)}$$

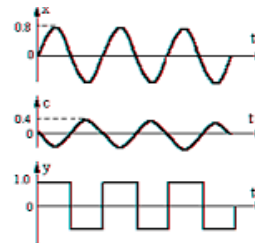
即
$$-\frac{4}{\pi A} = \frac{-j\omega(j\omega+2)^2}{10} = \frac{-4\omega^2}{10} - \frac{j\omega(4-\omega^2)}{10}$$

令虚部为零解出 $\omega=2$, 代入实部
得 $A=0.796$ 。则输出信号的自振幅
值为: $A_c = A/2 = 0.398$ 。

画出 c 、 x 、 y 点的信号波形
如图解7-17(b)所示。



图解7-17(a)



图解7-17(b)

