控制障碍函数的发展

# 仿射控制系统

考虑一个控制仿射非线性系统：



其中和是局部利普希茨的，系统状态，系统输入。

# 指数控制李雅普诺夫函数（ES-CLF）

一个连续函数是一个ES-CLF，如果存在正常数对于满足：



其中分别是相对于的李导数。

ES-CLF的存在产生了一族控制器，该控制器指数地将系统稳定到零动态。特别是，考虑一组控制值:



由此可见，局部李普希茨控制器满足含义:



# 安全的概念

任何工程系统都应该设计成安全的。术语“安全攸关系统”多次用于区分那些安全性是主要设计考虑的系统。Leslie Lamport于1977年在程序正确性的背景下首次引入了安全的概念。安全性（safety）要求“坏的”事情不发生，而活性（liveness）要求“好的”事情最终发生。例如，渐近稳定性可以被视为活性性质的一个例子，在这种意义上，最终达到渐近稳定的平衡点。双重地，不变性可以被视为安全属性的一个例子，在这个意义上，任何在不变集合内开始的轨迹都不会到达集合的补集，描述了坏事发生的轨迹。基于对具有渐近稳定性的活性和具有不变性的安全性的识别，可以说安全性在控制理论中受到的关注比活性少得多。此外，李雅普诺夫函数的概念在活性性质的研究中起了主导作用。

# 控制障碍函数发展过程

## 集合的定义

集合被定义如下：



其中是连续可微函数，我们还假设是非空的并且没有孤立点，也就是说: 。

## 集合的前向不变性

动力系统背景下的安全性研究可以追溯到20世纪40年代，当时Nagumo为集合不变性提供了充要条件[1](更详细的历史说明见[2]，现代证明见[3])。

对于任何初始条件都存在一个最大区间，使得是系统在上的唯一解，当系统是前向完备时，，这允许我们定义安全，也就是说，当时，对于有，则该集合被称为前向不变的，也就是说集合是安全的，即系统是安全的。

## 倒数障碍函数

通常使用与集合相关联的障碍函数的两个概念:一个是在集合边界上无界的，即当时，，这里称为倒数障碍函数(RBF)，另一个是在集合边界上消失的，即当时，，这里称为归零障碍函数(ZBF)[5]。障碍函数(BF)是类李雅普诺夫函数，选择术语“障碍”的动机是它在优化文献[4]中的使用，其中障碍函数被添加到成本函数，以避免不期望区域。障碍函数现在在控制和验证文献中很常见，因为它们与李雅普诺夫函数有着天然的关系，它们能够建立安全、避免不测属性，以及它们与多目标控制的关系。障碍函数对具有控制输入的系统的自然扩展是控制障碍函数(CBF)，它首先由[6]提出，CBF在许多方面与Lyapunov函数扩展到的控制Lyapunov函数(CLF)并行[5]。

注：2004年提出的障碍验证和Nagumo定理相似，都是对集合边界提出约束，为了把约束扩展到整个集合，提出使用类李雅普诺夫函数的方法，即障碍函数的方法扩展到整个集合。

在每种情况下，关键点是对候选BF的导数施加不等式约束，以建立使给定集合正向不变的一类控制器。定义(C)BF的类李雅普诺夫条件本质上与实现集合的前向不变性的控制器类耦合。因此考虑如何定义障碍函数远离集合边界的演化是至关重要的，因为这将直接转化为施加在BF上的条件。在RBF的情况下,文献[7]是强制,就像在早期关于ZBF利用的工作中所做的那样[8]。但这可能并不理想，因为它要求的所有子水平集都是不变的，特别地，它不允许解离开子水平集，即使这样做会使它保持在中。

文献[9]提出了一种限制较少的障碍函数形式，把的条件放宽到，其中为正。当解远离的边界时，这个不等式允许增长。当解接近边界时，增长速率下降到零。此文还介绍了通过使用二次规划(QP)将CBF与CLF统一起来的思想，将安全与稳定需求有效地结合在一个适用于控制的简洁框架中。（最近有研究表明，CBF可以与控制李雅普诺夫函数(CLF)相结合作为约束条件，形成实时求解的二次规划(QP)。可以放宽CLF约束，使其与CBF约束不冲突，从而形成可行的QP。）

注：QP缺点：它在保证系统轨迹相对于安全集的不变性的同时，作为一个硬约束，它软化了其他方面的稳定目标，以保持约束优化问题在任何地方的可行性。这种方法可以把其它的CLF最小值的平衡点引入到闭环系统中，并且这些不期望的平衡点甚至可以是渐近稳定的。基于QP方法的另一个问题是，它的操作是短视的，也就是说，安全控制只是当前状态的一个函数。虽然该方法在每个时间步长都能保证局部安全，但安全约束的满足程度取决于QP的求解频率。步长太小会导致不必要的计算，而步长太大会导致不安全的行为。此外，QP可以允许轨迹在干涉之前非常接近安全集合的边界。因此，当系统接近安全集合的边界时，QP可能变得不可行，并且该方法失败[10]。QP的可行性可以通过引入松弛变量来提高；然而，这损害了收敛到所希望的平衡点，这可能不再得到保证[11]。此外，当简单地将稳定条件与安全条件相结合时，必须小心，因为这可能改变闭环系统的期望平衡点[12]。

对于一个连续可微函数，让通过被定义。如果存在类函数和使得对于都满足下式：



那么函数是一个倒数控制障碍函数(RCBF)。

给定一个控制障碍函数，我们考虑所有满足的控制值：



给定由定义的具有相应控制障碍函数的集合，系统的任何Lipschitz连续控制器使得集合向前不变[9]。

## 归零障碍函数

对于RCBF，考虑到当时，，这种情况不适用于嵌入式处理器，所以提出了CBF新形式。

对于一个连续可微函数，让通过被定义。如果存在扩展的类函数对于满足下式：



那么被称为定义在()上的归零控制障碍函数(ZCBF)。如果和都是局部李普希茨连续的，则ZCBF 称为局部李普希茨连续的。在大于的集合上定义可以考虑模型扰动的影响。

给定一个ZCBF ，对于所有定义集合：



对于一个连续可微函数，让通过被定义。如果在上是ZCBF，那么的李普希兹连续控制器将会使得集合前向不变[5]。

## 其他形式控制障碍函数

2016年[13]提出指数控制障碍函数(ECBF)用于解决具有高相对阶系统，2020年[14]提出鲁棒自适应控制障碍函数(RaCBF)用于处理含有未知参数的系统：2020年[15]提出积分控制障碍函数(ICBF)，可用于处理非仿射控制系统，且考虑输入约束。



**附录**

以后再说……

**参考文献**

1. M. Nagumo, “Uber die lage der integralkurven gewohnlicher differ-entialgleichungen,” Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series, vol. 24, pp. 551–559, 1942.
2. F. Blanchini, “Set invariance in control,” Automatica, vol. 35, no. 11, pp. 1747–1767, 1999.
3. R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu, Manifolds, tensor analysis, and applications. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 75.
4. A. Forsgren, P. E. Gill, and M. H. Wright, “Interior methods for nonlinear optimization,” SIAM Rev., vol. 44, no. 4, pp. 525–597, 2002.
5. A. D. Ames, X. Xu, J. W. Grizzle, and P. Tabuada, “Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 62, no. 8, pp. 3861–3876, 2017.
6. P. Wieland and F. Allgower, “Constructive safety using control barrier functions,” in Proc. 7th IFAC Symp. Nonlin. Control Syst., 2007, pp. 462–467.
7. K. P. Tee, S. S. Ge, and E. H. Tay, “Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems,” Automatica, vol. 45, no. 4, pp. 918–927, 2009.
8. S. Prajna, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas, “A framework for worst-case and stochastic safety verification using barrier certificates,” IEEE Trans. Autom. Control, vol. 52, no. 8, pp. 1415–1428, 2007.
9. A. D. Ames, J. W. Grizzle, and P. Tabuada, “Control barrier function based quadratic programs with application to adaptive cruise control,” in Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on. IEEE, 2014, pp. 6271–6278.
10. W. Xiao, C. Belta, and C. G. Cassandras, “Feasibility-guided learning for robust control in constrained optimal control problems,” in Proc. Conf. Decis. Control (to appear), 2020. preprint available at arXiv:1912.04066.
11. M. Jankovic, “Robust control barrier functions for constrained stabilization of nonlinear systems,” Automatica, vol. 96, pp. 359–367, 2018.
12. M. F. Reis, A. P. Aguiar, and P. Tabuada, “Control barrier functionbased quadratic programs introduce undesirable asymptotically stable equilibria,” IEEE Contr. Syst. Lett., vol. 5, no. 2, pp. 731–736, 2020.
13. Nguyen Q, Sreenath K, editors. Exponential control barrier functions for enforcing high relative-degree safety-critical constraints. 2016 American Control Conference (ACC); 2016: IEEE.
14. Lopez BT, Slotine JJE, How JP. Robust adaptive control barrier functions: An adaptive & data-driven approach to safety. IEEE Control Systems Letters. 2020;PP(99).
15. Ames AD, Notomista G, Wardi Y, Egerstedt M. Integral control barrier functions for dynamically defined control laws. IEEE Control Systems Letters. 2020;5(3):887-92.