Renormalização em redes

Método de Geometrias Escondidas

Autor: Alan Piovesana
Orientador: José Antônio Brum

Instituto de Física Gleb Wataghin
UNICAMP

22 de abril de 2021

Índice

Introdução

Motivação

nature physics

ARTICLES

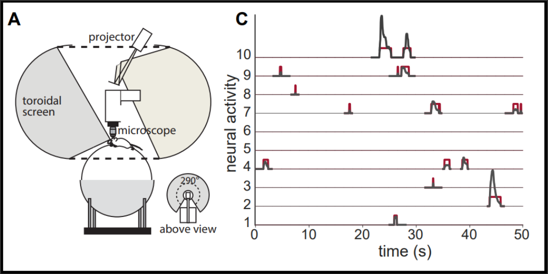
https://doi.org/10.1038/s41567-018-0072-5

Multiscale unfolding of real networks by geometric renormalization

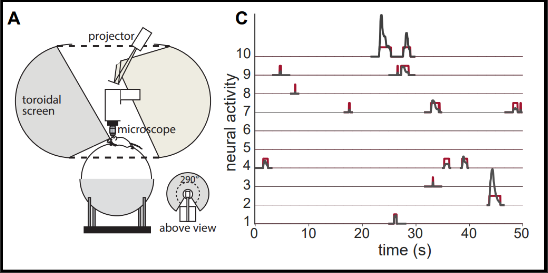
Guillermo García-Pérez[1,2], Marián Boguñá[1,2] and M. Ángeles Serrano[1,2,3*]

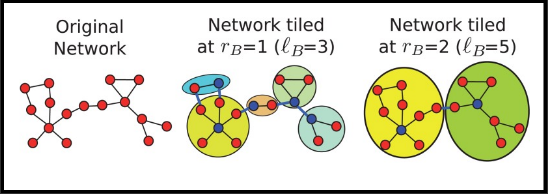
Symmetries in physical theories denote invariance under some transformation, such as self-similarity under a change of scale. The renormalization group provides a powerful framework to study these symmetries, leading to a better understanding of the universal properties of phase transitions. However, the small-world property of complex networks complicates application of the renormalization group by introducing correlations between coexisting scales. Here, we provide a framework for the investigation of complex networks at different resolutions. The approach is based on geometric representations, which have been shown to sustain network navigability and to reveal the mechanisms that govern network structure and evolution. We define a geometric renormalization group for networks by embedding them into an underlying hidden metric space. We find that real scale-free networks show geometric scaling under this renormalization group transformation. We unfold the networks in a self-similar multilayer shell that distinguishes the coexisting scales and their interactions. This in turn offers a basis for exploring critical phenomena and universality in complex networks. It also affords us immediate practical applications, including high-fidelity smaller-scale replicas of large networks and a multiscale navigation protocol in hyperbolic space, which betters those on single layers.

Renormalização Topológica

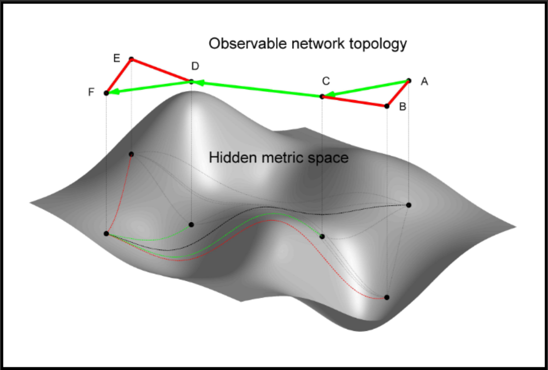


Renormalização Topológica

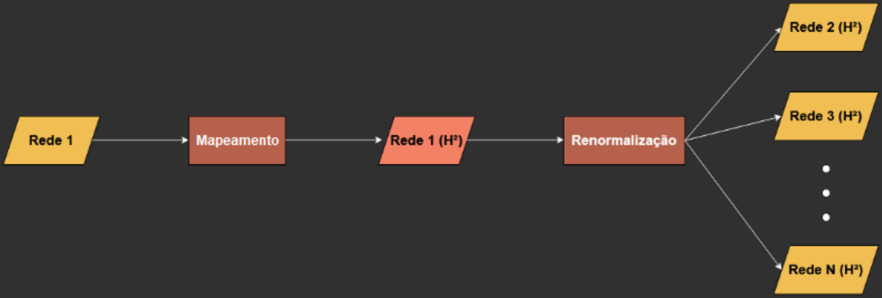




Renormalização Geométrica



Estratégia do projeto - Serrano et. al.



Construindo as redes: modelo $\mathcal{H}^2$

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{H}^2$

- Modelo geométrico **(teórico)** de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa no disco hiperbólico
- Paradigma popularidade vs similaridade: $\{r_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, mais próximo do centro do disco

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{H}^2$

- Modelo geométrico **(teórico)** de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa no disco hiperbólico
- Paradigma popularidade vs similaridade: $\{r_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, mais próximo do centro do disco

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{H}^2$

- Modelo geométrico **(teórico)** de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa no disco hiperbólico
- Paradigma popularidade vs similaridade: $\{r_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, mais próximo do centro do disco

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{H}^2$

- Modelo geométrico **(teórico)** de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa no disco hiperbólico
- Paradigma popularidade vs similaridade: $\{r_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, mais próximo do centro do disco

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{H}^2$

- Modelo geométrico **(teórico)** de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa no disco hiperbólico
- Paradigma popularidade vs similaridade: $\{r_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, mais próximo do centro do disco

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{H}^2$

- Modelo geométrico **(teórico)** de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa no disco hiperbólico
- Paradigma popularidade vs similaridade: $\{r_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, mais próximo do centro do disco

Distribuições das variáveis no $\mathcal{H}^2$

Distribuição da popularidade r: (comprimento da circunferência)/(área do disco no $\mathcal{H}^2$)

$$\boxed{\rho(r) = \alpha \frac{sinh(\alpha r)}{cosh(\alpha \hat{R}) - 1}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j: Fermi-Dirac

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\beta}{2}(x_{ij} - \hat{R})}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{H}^2$

Distribuição da popularidade r: (comprimento da circunferência)/(área do disco no $\mathcal{H}^2$)

$$\boxed{\rho(r) \;=\; \alpha\frac{sinh(\alpha r)}{cosh(\alpha\hat{R})-1}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j: Fermi-Dirac

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 \;+\; e^{\frac{\beta}{2}(x_{ij}-\hat{R})}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{H}^2$

Distribuição da popularidade r: (comprimento da circunferência)/(área do disco no $\mathcal{H}^2$)

$$\boxed{\rho(r) = \alpha \frac{sinh(\alpha r)}{cosh(\alpha \hat{R}) - 1}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j: Fermi-Dirac

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\beta}{2}(x_{ij} - \hat{R})}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{H}^2$

Distribuição da popularidade r: (comprimento da circunferência)/(área do disco no $\mathcal{H}^2$)

$$\boxed{\rho(r) \;=\; \alpha\frac{sinh(\alpha r)}{cosh(\alpha\hat{R}) - 1}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j: Fermi-Dirac

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 \;+\; e^{\frac{\beta}{2}(x_{ij}-\hat{R})}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{H}^2$

Distribuição da popularidade r: (comprimento da circunferência)/(área do disco no $\mathcal{H}^2$)

$$\boxed{\rho(r) \;=\; \alpha\frac{sinh(\alpha r)}{cosh(\alpha\hat{R}) - 1}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j: Fermi-Dirac

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\beta}{2}(x_{ij}-\hat{R})}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{H}^2$

Distribuição da popularidade r: (comprimento da circunferência)/(área do disco no $\mathcal{H}^2$)

$$\boxed{\rho(r) \;=\; \alpha\frac{sinh(\alpha r)}{cosh(\alpha\hat{R})-1}}$$

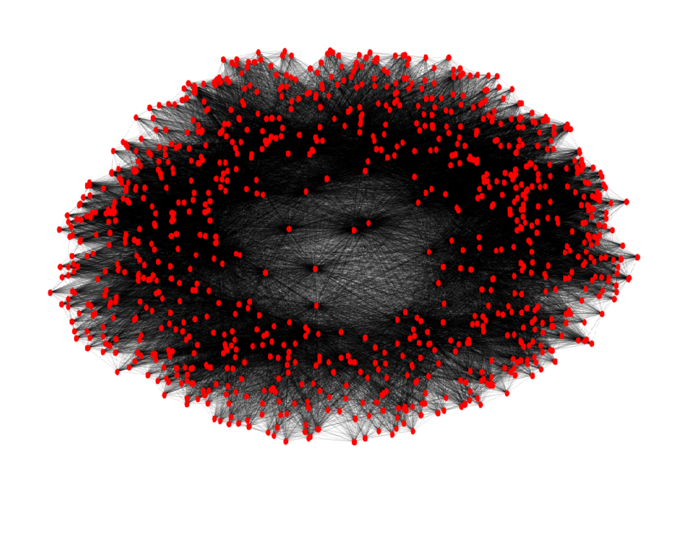
Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}}$$

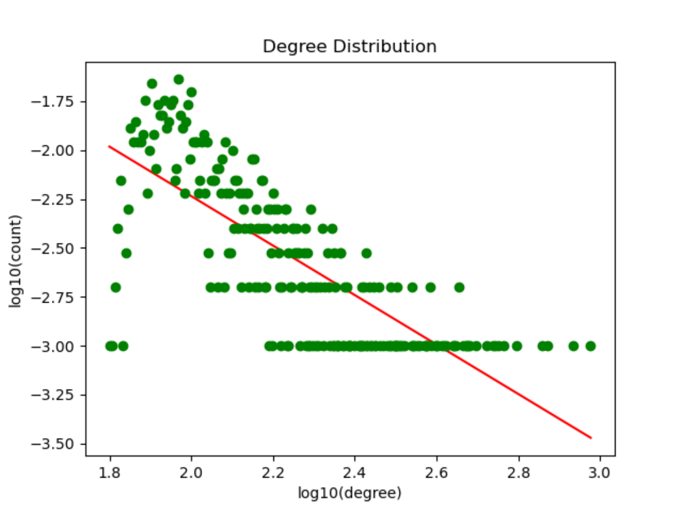
Probabilidade de ligação entre os nós i e j: Fermi-Dirac

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 \;+\; e^{\frac{\beta}{2}(x_{ij}-\hat{R})}}}$$

Redes no $\mathcal{H}^2$



Redes no $\mathcal{H}^2$



Construindo as redes: modelo $\mathcal{S}^1$

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{S}^1$

- Outro modelo geométrico de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa na circunferência $\mathcal{S}^1$
- Mesmo paradigma de antes, mas agora a popularidade é descrita por um grau escondido: $\{\kappa_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, maior seu κ, mas sem representação visual

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{S}^1$

- Outro modelo geométrico de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa na circunferência $\mathcal{S}^1$
- Mesmo paradigma de antes, mas agora a popularidade é descrita por um grau escondido: $\{\kappa_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, maior seu κ, mas sem representação visual

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{S}^1$

- Outro modelo geométrico de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa na circunferência $\mathcal{S}^1$
- Mesmo paradigma de antes, mas agora a popularidade é descrita por um grau escondido: $\{\kappa_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, maior seu κ, mas sem representação visual

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{S}^1$

- Outro modelo geométrico de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa na circunferência $\mathcal{S}^1$
- Mesmo paradigma de antes, mas agora a popularidade é descrita por um grau escondido: $\{\kappa_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, maior seu κ, mas sem representação visual

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{S}^1$

- Outro modelo geométrico de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa na circunferência $\mathcal{S}^1$
- Mesmo paradigma de antes, mas agora a popularidade é descrita por um grau escondido: $\{\kappa_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, maior seu κ, mas sem representação visual

Redes no espaço hiperbólico - modelo $\mathcal{S}^1$

- Outro modelo geométrico de construção de redes
- Cada nó tem uma posição fixa na circunferência $\mathcal{S}^1$
- Mesmo paradigma de antes, mas agora a popularidade é descrita por um grau escondido: $\{\kappa_i, \theta_i\}$
- Quanto mais similares 2 nós, mais próximos angularmente
- Quanto mais popular um nó, maior seu κ, mas sem representação visual

Distribuições das variáveis no $\mathcal{S}^1$

Distribuição da popularidade κ: lei de potência

$$\boxed{\rho(\kappa) \sim \kappa^{-\gamma}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu\kappa_i\kappa_j}\right)^{\beta}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{S}^1$

Distribuição da popularidade κ: lei de potência

$$\boxed{\rho(\kappa) \ \sim \ \kappa^{-\gamma}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \ = \ \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu\kappa_i\kappa_j}\right)^{\beta}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{S}^1$

Distribuição da popularidade κ: lei de potência

$$\boxed{\rho(\kappa) \;\sim\; \kappa^{-\gamma}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu\kappa_i\kappa_j}\right)^{\beta}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{S}^1$

Distribuição da popularidade κ: lei de potência

$$\boxed{\rho(\kappa) \sim \kappa^{-\gamma}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu\kappa_i\kappa_j}\right)^{\beta}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{S}^1$

Distribuição da popularidade κ: lei de potência

$$\boxed{\rho(\kappa) \;\sim\; \kappa^{-\gamma}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

$$\boxed{\rho(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu\kappa_i\kappa_j}\right)^{\beta}}}$$

Distribuições das variáveis no $\mathcal{S}^1$

Distribuição da popularidade κ: lei de potência

$$\boxed{\rho(\kappa) \ \sim \ \kappa^{-\gamma}}$$

Distribuição da similaridade θ: uniforme

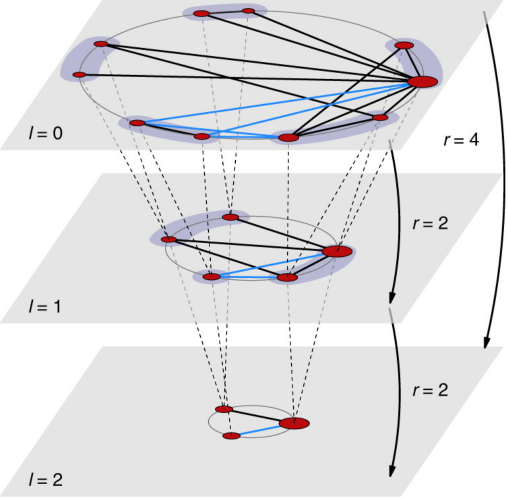
$$\boxed{\rho(\theta) \ = \ \frac{1}{2\pi}}$$

Probabilidade de ligação entre os nós i e j:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu\kappa_i\kappa_j}\right)^{\beta}}}$$

Passo de renormalização: modelo $\mathcal{S}^1$

Probabilidade de ligação



Probabilidade de ligação

Probabilidade de que os nós i e j estejam ligados na camada L:

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} (1 - p_e)$$

Com p_e sendo a probabilidade de ligação do par e na camada anterior:

$$p_e = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_e}{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e}\right)^\beta}$$

Probabilidade de ligação

Probabilidade de que os nós i e j estejam ligados na camada L:

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} (1 - p_e)$$

Com p_e sendo a probabilidade de ligação do par e na camada anterior:

$$p_e = \frac{1}{1 + \left(\frac{R \Delta \theta_e}{\mu (\kappa_m \kappa_n)_e} \right)^\beta}$$

Probabilidade de ligação

Probabilidade de que os nós i e j estejam ligados na camada L:

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} (1 - p_e)$$

Com p_e sendo a probabilidade de ligação do par e na camada anterior:

$$p_e = \frac{1}{1 + \left(\frac{R \Delta\theta_e}{\mu (\kappa_m \kappa_n)_e} \right)^{\beta}}$$

Probabilidade de ligação

Probabilidade de que os nós i e j estejam ligados na camada L:

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} (1 - p_e)$$

Com p_e sendo a probabilidade de ligação do par e na camada anterior:

$$p_e = \frac{1}{1 + \left(\frac{R \Delta \theta_e}{\mu (\kappa_m \kappa_n)_e} \right)^{\beta}}$$

Expandindo p'_{ij}

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_e}{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e} \right)^{\beta}} \right] = 1 - \frac{1}{\prod_{e=1}^{r^2} \left[1 + \left(\frac{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e} \right)^{\beta} \right]}$$

Expandindo p'_{ij}

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_e}{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e} \right)^{\beta}} \right] = 1 - \frac{1}{\prod_{e=1}^{r^2} \left[1 + \left(\frac{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e} \right)^{\beta} \right]}$$

Expandindo p'_{ij}

$$p'_{ij} = 1 - \prod_{e=1}^{r^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_e}{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e} \right)^{\beta}} \right] = 1 - \frac{1}{\prod_{e=1}^{r^2} \left[1 + \left(\frac{\mu(\kappa_m \kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e} \right)^{\beta} \right]}$$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]=$$

$$1+\sum_{e=1}^{r^2}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}$$

$$+\sum_{e=1}^{r^2-1}\sum_{f=e+1}^{r^2}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_f}{R\Delta\theta_f}\right)^{\beta}+\dots$$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]=$$

$$1+\sum_{e=1}^{r^2}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}$$

$$+\sum_{e=1}^{r^2-1}\sum_{f=e+1}^{r^2}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_f}{R\Delta\theta_f}\right)^{\beta}+\ldots$$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]=$$

$$1+\sum_{e=1}^{r^2}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}$$
$$+\sum_{e=1}^{r^2-1}\sum_{f=e+1}^{r^2}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_f}{R\Delta\theta_f}\right)^{\beta}+\ldots$$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1
  $\implies R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\Longrightarrow R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\Longrightarrow R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\implies R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\implies R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\frac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\implies R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\Longrightarrow R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Primeiras aproximações

- Variações angulares em um mesmo cluster são muito menores do que entre clusters diferentes: $\Delta\theta_{ij} \approx \Delta\theta$
- No $\mathcal{S}^1$, a densidade de nós é constante e igual a 1 $\Longrightarrow R = \frac{N}{2\pi} \gg 1$ em redes grandes
- O parâmetro μ é constante em cada camada
- Portanto: $\frac{\mu}{R} \ll 1$

Assim, descartamos termos de ordem superior em $\dfrac{\mu}{R\Delta\theta}$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]\approx$$

$$1+\left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{\beta}\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}$$

$$+\left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{2\beta}\sum_{e=1}^{(r^2-1)}\sum_{f=e+1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}(\kappa_m\kappa_n)_f^{\beta}+\ldots$$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]\approx$$

$$1\;+\;\left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{\beta}\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}$$

$$+\;\left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{2\beta}\sum_{e=1}^{(r^2-1)}\;\sum_{f=e+1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}(\kappa_m\kappa_n)_f^{\beta}\;+\;\dots$$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]\approx$$

$$1\ +\ \left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{\beta}\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}$$
$$+\ \left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{2\beta}\sum_{e=1}^{(r^2-1)}\ \sum_{f=e+1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}(\kappa_m\kappa_n)_f^{\beta}\ +\ \ldots$$

Expandindo o denominador

$$\prod_{e=1}^{r^2}\left[1+\left(\frac{\mu(\kappa_m\kappa_n)_e}{R\Delta\theta_e}\right)^{\beta}\right]\approx$$

$$1\;+\;\left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{\beta}\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}$$

$$\cancel{+\;\left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{2\beta}\sum_{e=1}^{(r^2-1)}\sum_{f=e+1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}(\kappa_m\kappa_n)_f^{\beta}}\;+\;\ldots$$

Denominador em primeira ordem

$$p'_{ij} \approx 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{\beta} \sum_{e=1}^{r^2} (\kappa_m \kappa_n)_e^{\beta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p'_{ij} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2} (\kappa_m \kappa_n)_e^{\beta}}}}$$

Denominador em primeira ordem

$$p'_{ij} \approx 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu}{R\Delta\theta}\right)^{\beta} \sum_{e=1}^{r^2} (\kappa_m \kappa_n)_e^{\beta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p'_{ij} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2} (\kappa_m \kappa_n)_e^{\beta}}}}$$

Finalmente, o passo de renormalização

Probabilidades de ligação antes e após a troca de escala:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu(\kappa_i\kappa_j)}\right)^{\beta}}} \qquad \boxed{p'_{ij} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2} (\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}}}}$$

Invariância de escala: encontrar variáveis com ' tais que:

$$\left(\frac{R'\Delta\theta'_{ij}}{\mu'\kappa'_i\kappa'_j}\right)^{\beta'} = \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2} (\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}}$$

Finalmente, o passo de renormalização

Probabilidades de ligação antes e após a troca de escala:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu(\kappa_i\kappa_j)}\right)^{\beta}}} \qquad \boxed{p'_{ij} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}}}}$$

Invariância de escala: encontrar variáveis com ’ tais que:

$$\left(\frac{R'\Delta\theta'_{ij}}{\mu'\kappa'_i\kappa'_j}\right)^{\beta'} = \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}}$$

Finalmente, o passo de renormalização

Probabilidades de ligação antes e após a troca de escala:

$$\boxed{p_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta_{ij}}{\mu(\kappa_i\kappa_j)}\right)^{\beta}}} \qquad \boxed{p'_{ij} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}}}}$$

Invariância de escala: encontrar variáveis com ' tais que:

$$\left(\frac{R'\Delta\theta'_{ij}}{\mu'\kappa'_i\kappa'_j}\right)^{\beta'} = \left(\frac{R\Delta\theta}{\mu}\right)^{\beta} \frac{1}{\sum_{e=1}^{r^2}(\kappa_m\kappa_n)_e^{\beta}}$$

Após mais algumas aproximações, o passo de renormalização

$$\boxed{\theta_i' = \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} (\theta_j \kappa_j)^\beta}{\sum_{j=1}^{r} \kappa_j^\beta} \right)^{1/\beta}}$$

$$\boxed{\kappa_i' = \left(\sum_{j=1}^{r} \kappa_j^\beta \right)^{1/\beta}}$$

Após mais algumas aproximações, o passo de renormalização

$$\boxed{\theta_i' = \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} (\theta_j \kappa_j)^{\beta}}{\sum_{j=1}^{r} \kappa_j^{\beta}} \right)^{1/\beta}}$$

$$\boxed{\kappa_i' = \left(\sum_{j=1}^{r} \kappa_j^{\beta} \right)^{1/\beta}}$$

Qualidade do modelo

Generalização para D dimensões

Se a similaridade for D-dimensional:

$$\beta \mapsto \beta/D$$

$$\boxed{\kappa_i' = \left(\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D} \right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

$$\boxed{\theta_i' = \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} (\theta_j \kappa_j)^{\beta/D}}{\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D}} \right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

Generalização para D dimensões

Se a similaridade for D-dimensional:

$$\beta \mapsto \beta/D$$

$$\boxed{\kappa_i' = \left(\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D}\right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

$$\boxed{\theta_i' = \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} (\theta_j \kappa_j)^{\beta/D}}{\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D}}\right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

Generalização para D dimensões

Se a similaridade for D-dimensional:

$$\beta \mapsto \beta/D$$

$$\boxed{\kappa_i' = \left(\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D} \right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

$$\boxed{\theta_i' = \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} (\theta_j \kappa_j)^{\beta/D}}{\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D}} \right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

Generalização para D dimensões

Se a similaridade for D-dimensional:

$$\beta \mapsto \beta/D$$

$$\boxed{\kappa_i' = \left(\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D}\right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

$$\boxed{\theta_i' = \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} (\theta_j \kappa_j)^{\beta/D}}{\sum_{j=1}^{r} (\kappa_j)^{\beta/D}}\right)^{\frac{1}{\beta/D}}}$$

A generalização é necessária?

Comparando redes com valores diferentes de D, algumas métricas ficam aproximadamente invariantes:

- Distribuição cumulativa de graus
- Coeficiente de *clustering*
- Grau médio de primeiros vizinhos

A generalização é necessária?

Comparando redes com valores diferentes de D, algumas métricas ficam aproximadamente invariantes:

- Distribuição cumulativa de graus
- Coeficiente de *clustering*
- Grau médio de primeiros vizinhos

A generalização é necessária?

Comparando redes com valores diferentes de D, algumas métricas ficam aproximadamente invariantes:

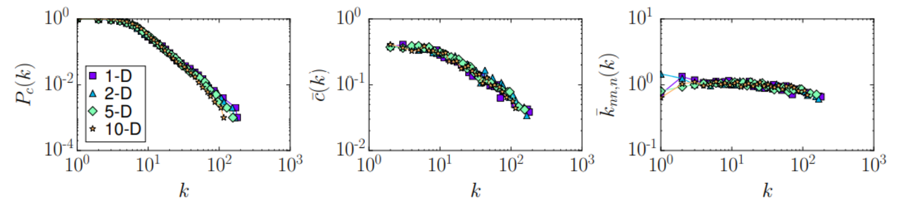
- Distribuição cumulativa de graus
- Coeficiente de *clustering*
- Grau médio de primeiros vizinhos

A generalização é necessária?

Comparando redes com valores diferentes de D, algumas métricas ficam aproximadamente invariantes:

- Distribuição cumulativa de graus
- Coeficiente de *clustering*
- Grau médio de primeiros vizinhos

A generalização é necessária?



Do modelo às redes reais: Mercator

Artigo

Mercator: uncovering faithful hyperbolic embeddings of complex networks

Guillermo García-Pérez,[1,2,*] Antoine Allard,[3,4,*] M. Ángeles Serrano,[5,6,7] and Marián Boguñá[5,6,†]

[1] *QTF Centre of Excellence, Turku Centre for Quantum Physics, Department of Physics and Astronomy, University of Turku, FI-20014 Turun Yliopisto, Finland*

[2] *Complex Systems Research Group, Department of Mathematics and Statistics, University of Turku, FI-20014 Turun Yliopisto, Finland*

[3] *Département de physique, de génie physique et doptique, Université Laval, Québec (Québec), Canada G1V 0A6*

[4] *Centre de modélisation mathématique, Université Laval, Québec (Québec), Canada G1V 0A6*

[5] *Departament de Física de la Matèria Condensada, Universitat de Barcelona, Martí i Franquès 1, E-08028 Barcelona, Spain*

[6] *Universitat de Barcelona Institute of Complex Systems (UBICS), Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain*

[7] *Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA), Passeig Lluís Companys 23, E-08010 Barcelona, Spain*

We introduce Mercator, a reliable embedding method to map real complex networks into their hyperbolic latent geometry. The method assumes that the structure of networks is well described by the Popularity×Similarity $\mathbb{S}^1/\mathbb{H}^2$ static geometric network model, which can accommodate arbitrary degree distributions and reproduces many pivotal properties of real networks, including self-similarity patterns. The algorithm mixes machine learning and maximum likelihood approaches to infer the coordinates of the nodes in the underlying hyperbolic disk with the best matching between the observed network topology and the geometric model. In its fast mode, Mercator uses a model-adjusted machine learning technique performing dimensional reduction to produce a fast and accurate map, whose quality already outperform other embedding algorithms in the literature. In the refined Mercator mode, the fast-mode embedding result is taken as an initial condition in a Maximum Likelihood estimation, which significantly improves the quality of the final embedding. Apart from its accuracy as an embedding tool, Mercator has the clear advantage of systematically inferring not only node orderings, or angular positions, but also the hidden degrees and global model parameters, and has the ability to embed networks with arbitrary degree distributions. Overall, our results suggest that mixing machine learning and maximum likelihood techniques in a model-dependent framework can boost the meaningful mapping of complex networks.

Preâmbulo

Maximum likelihood: Para relacionar κ_i (intrínseca ao $\mathcal{S}^1$) com o grau k_i de cada nó da rede real, escolhemos os $\{\kappa\}$ que maximizam a probabilidade de se obter a matriz de adjacência $\{a_{ij}\}$ dadas as coordenadas $\{\kappa_i, \theta_i\}$ do $\mathcal{S}^1$:

$$\max \ \mathcal{L}(\{a_{ij}\} \,|\, \{\kappa_i, \theta_i\},\ \mathcal{S}^1)$$

Pode-se provar que isso equivale à seguinte equação:

$$k_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}$$

Preâmbulo

Maximum likelihood: Para relacionar κ_i (intrínseca ao $\mathcal{S}^1$) com o grau k_i de cada nó da rede real, escolhemos os $\{\kappa\}$ que maximizam a probabilidade de se obter a matriz de adjacência $\{a_{ij}\}$ dadas as coordenadas $\{\kappa_i, \theta_i\}$ do $\mathcal{S}^1$:

$$\max\ \mathcal{L}(\{a_{ij}\} \mid \{\kappa_i, \theta_i\},\ \mathcal{S}^1)$$

Pode-se provar que isso equivale à seguinte equação:

$$k_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}$$

Preâmbulo

Maximum likelihood: Para relacionar κ_i (intrínseca ao $\mathcal{S}^1$) com o grau k_i de cada nó da rede real, escolhemos os $\{\kappa\}$ que maximizam a probabilidade de se obter a matriz de adjacência $\{a_{ij}\}$ dadas as coordenadas $\{\kappa_i, \theta_i\}$ do $\mathcal{S}^1$:

$$\max\ \mathcal{L}(\{a_{ij}\} \mid \{\kappa_i, \theta_i\},\ \mathcal{S}^1)$$

Pode-se provar que isso equivale à seguinte equação:

$$k_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}$$

Preâmbulo

Maximum likelihood: Para relacionar κ_i (intrínseca ao $\mathcal{S}^1$) com o grau k_i de cada nó da rede real, escolhemos os $\{\kappa\}$ que maximizam a probabilidade de se obter a matriz de adjacência $\{a_{ij}\}$ dadas as coordenadas $\{\kappa_i, \theta_i\}$ do $\mathcal{S}^1$:

$$\text{max } \mathcal{L}(\{a_{ij}\} \mid \{\kappa_i, \theta_i\},\ \mathcal{S}^1)$$

Pode-se provar que isso equivale à seguinte equação:

$$k_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}$$

Preâmbulo

Laplacian eigenmaps: A projeção da rede no $\mathbb{R}^2$ é feita minimizando uma função erro:

$$\vec{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{S}^1 \mapsto \vec{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2 \, , \; i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\min \epsilon = \sum_{ij} |\vec{y}_i - \vec{y}_j|^2 \, w\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \iff \min \; \vec{y}^T L \vec{y}$$

Definindo um peso $w_{ij} = a_{ij} e^{-d_{ij}^2/\sigma^2}$ e a matriz $D = \sum_j w_{ij}$
Junto com a condição de normalização: $\vec{y}^T D \vec{y} = 1$, podemos reescrever:

$$(L - \lambda D)\vec{y} = 0 \implies \boxed{L\vec{y} = \lambda D\vec{y}}$$

Preâmbulo

Laplacian eigenmaps: A projeção da rede no $\mathbb{R}^2$ é feita minimizando uma função erro:

$$\vec{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{S}^1 \mapsto \vec{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2 \ , \ i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\min \ \epsilon = \sum_{ij} |\vec{y}_i - \vec{y}_j|^2 \, w\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \Longleftrightarrow \min \ \vec{y}^T L \vec{y}$$

Definindo um peso $w_{ij} = a_{ij} e^{-d_{ij}^2/\sigma^2}$ e a matriz $D = \sum_j w_{ij}$

Junto com a condição de normalização: $\vec{y}^T D \vec{y} = 1$, podemos reescrever:

$$(L - \lambda D)\vec{y} = 0 \implies \boxed{L\vec{y} = \lambda D \vec{y}}$$

Preâmbulo

Laplacian eigenmaps: A projeção da rede no $\mathbb{R}^2$ é feita minimizando uma função erro:

$$\vec{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{S}^1 \mapsto \vec{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2 \;,\; i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\text{min } \epsilon = \sum_{ij} |\vec{y}_i - \vec{y}_j|^2 \, w\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \Longleftrightarrow \text{min } \; \vec{y}^T L \vec{y}$$

Definindo um peso $w_{ij} = a_{ij} e^{-d_{ij}^2/\sigma^2}$ e a matriz $D = \sum_j w_{ij}$
Junto com a condição de normalização: $\vec{y}^T D \vec{y} = 1$, podemos reescrever:

$$(L - \lambda D)\vec{y} = 0 \implies \boxed{L\vec{y} = \lambda D \vec{y}}$$

Preâmbulo

Laplacian eigenmaps: A projeção da rede no $\mathbb{R}^2$ é feita minimizando uma função erro:

$$\vec{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{S}^1 \mapsto \vec{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2 \ , \ i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\text{min } \epsilon = \sum_{ij} |\vec{y}_i - \vec{y}_j|^2 \, w\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \iff \text{min } \ \vec{y}^T L \vec{y}$$

Definindo um peso $w_{ij} = a_{ij} e^{-d_{ij}^2/\sigma^2}$ e a matriz $D = \sum_j w_{ij}$

Junto com a condição de normalização: $\vec{y}^T D \vec{y} = 1$, podemos reescrever:

$$(L - \lambda D)\vec{y} = 0 \implies \boxed{L\vec{y} = \lambda D \vec{y}}$$

Preâmbulo

Laplacian eigenmaps: A projeção da rede no $\mathbb{R}^2$ é feita minimizando uma função erro:

$$\vec{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{S}^1 \mapsto \vec{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2 \ , \ i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\text{min } \epsilon = \sum_{ij} |\vec{y}_i - \vec{y}_j|^2 \, w\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \iff \text{min } \ \vec{y}^T L \vec{y}$$

Definindo um peso $w_{ij} = a_{ij} e^{-d_{ij}^2/\sigma^2}$ e a matriz $D = \sum_j w_{ij}$
Junto com a condição de normalização: $\vec{y}^T D \vec{y} = 1$, podemos reescrever:

$$(L - \lambda D)\vec{y} = 0 \implies \boxed{L\vec{y} = \lambda D \vec{y}}$$

Preâmbulo

Laplacian eigenmaps: A projeção da rede no $\mathbb{R}^2$ é feita minimizando uma função erro:

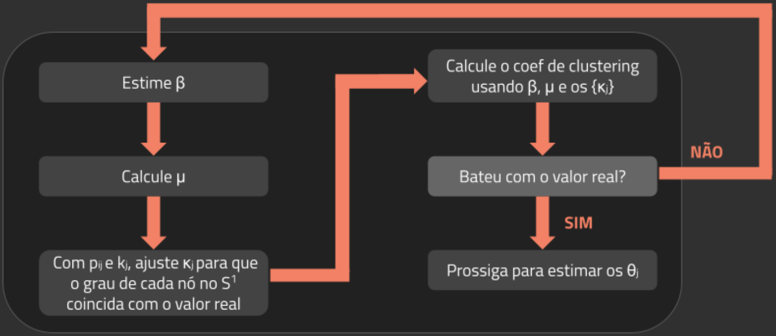
$$\vec{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{S}^1 \mapsto \vec{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2 \; , \; i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\text{min } \epsilon = \sum_{ij} |\vec{y}_i - \vec{y}_j|^2 \, w\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \Longleftrightarrow \text{min } \; \vec{y}^T L \vec{y}$$

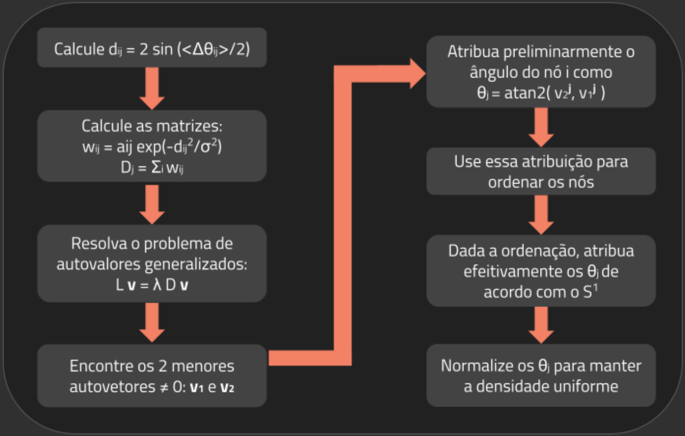
Definindo um peso $w_{ij} = a_{ij} e^{-d_{ij}^2/\sigma^2}$ e a matriz $D = \sum_j w_{ij}$
Junto com a condição de normalização: $\vec{y}^T D \vec{y} = 1$, podemos reescrever:

$$(L - \lambda D)\vec{y} = 0 \implies \boxed{L\vec{y} = \lambda D \vec{y}}$$

Algoritmo (*Fast Mode*) - Parte I



Algoritmo (*Fast Mode*) - Parte II

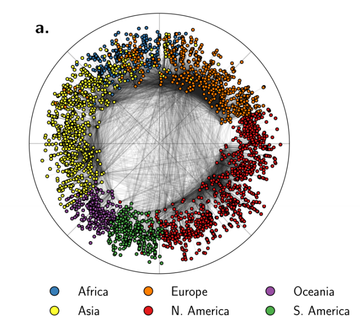


Validação em redes reais - metadados

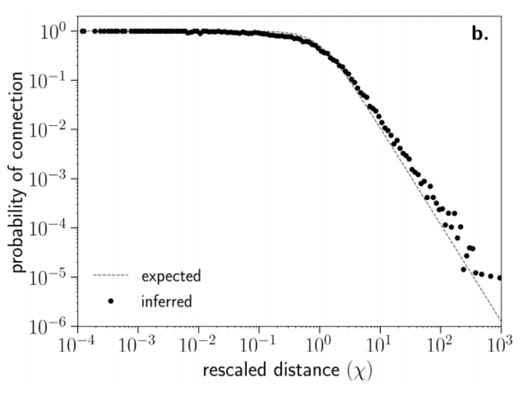
Rede de aeroportos no $\mathcal{S}^1$: proximidade angular dos nós reflete a similaridade geográfica

Validação em redes reais - metadados

Rede de aeroportos no $\mathcal{S}^1$: proximidade angular dos nós reflete a similaridade geográfica



Validação em redes reais - probabilidade de ligação



Próximos passos

Testando outras variáveis

Vimos que aumentar a dimensão da similaridade (θ) altera pouco a topologia da rede.

Mas e utilizar outras variáveis fora do paradigma popularidade-similaridade?

Testando outras variáveis

Vimos que aumentar a dimensão da similaridade (θ) altera pouco a topologia da rede.

Mas e utilizar outras variáveis fora do paradigma popularidade-similaridade?

Obrigado!

Referências I

- Boguñá, M., Krioukov, D. & Claffy, K. C. Navigability of complex networks. *Nature Physics* **5**, 74–80. ISSN: 1745-2481. http://dx.doi.org/10.1038/NPHYS1130 (nov. de 2008).
- García-Pérez, G., Allard, A., Serrano, M. Á. & Boguñá, M. Mercator: uncovering faithful hyperbolic embeddings of complex networks. arXiv: 1904.10814 [physics.soc-ph] (2019).
- García-Pérez G. Boguñá M., S. M. A. Multiscale unfolding of real networks by geometric renormalization. *Nature Physics* **14**. https://doi.org/10.1038/s41567-018-0072-5 (2018).
- Krioukov, D., Papadopoulos, F., Kitsak, M., Vahdat, A. & Boguñá, M. Hyperbolic geometry of complex networks. *Physical Review E* **82**. ISSN: 1550-2376. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106 (set. de 2010).

Referências II

Meshulam, L., Gauthier, J. L., Brody, C. D., Tank, D. W. & Bialek, W. Coarse–graining and hints of scaling in a population of 1000+ neurons. arXiv: 1812.11904 [physics.bio-ph] (2018).

Rossi, R. A. & Ahmed, N. K. *The Network Data Repository with Interactive Graph Analytics and Visualization.* em *AAAI* (2015). http://networkrepository.com.

Song, C., Havlin, S. & Makse, H. A. Self-similarity of complex networks. *Nature* **433,** 392–395. ISSN: 1476-4687. http://dx.doi.org/10.1038/nature03248 (jan. de 2005).