

第六讲 图（上）

浙江大学 陈 越

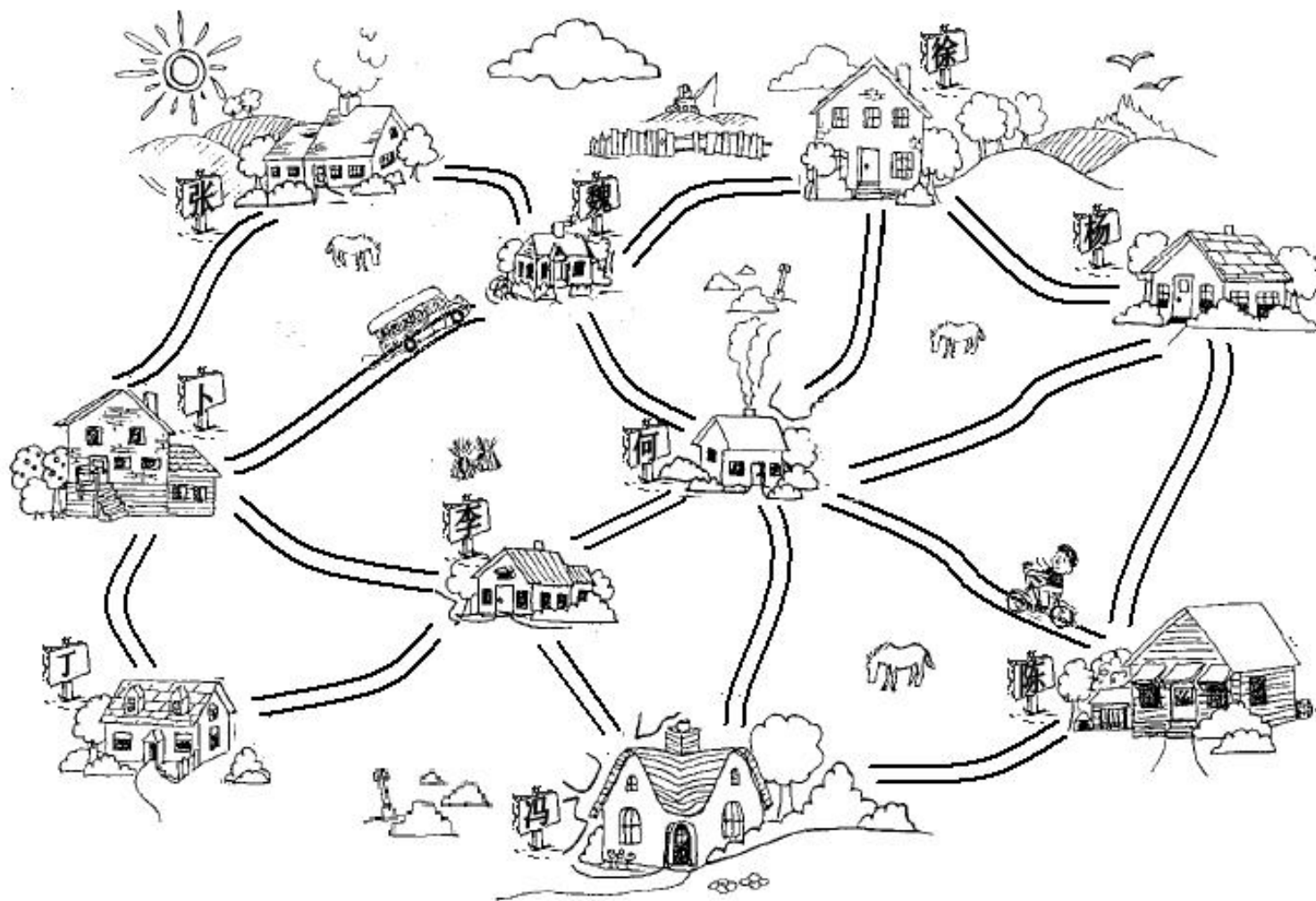
6.1 什么是图

六度空间理论 (Six Degrees of Separation)



全球互联网
用户数量

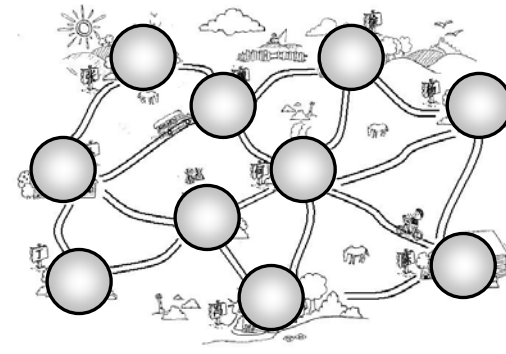
约 30 亿



从陈家庄到张家村，怎么走最快呢？
怎么修公路使得村村通的花费最少呢？

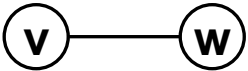
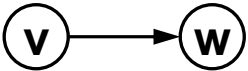


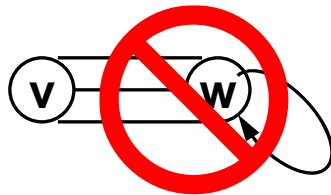
什么是“图” (Graph)



- 表示“多对多”的关系
- 包含

- 一组顶点：通常用 **V (Vertex)** 表示顶点集合
- 一组边：通常用 **E (Edge)** 表示边的集合

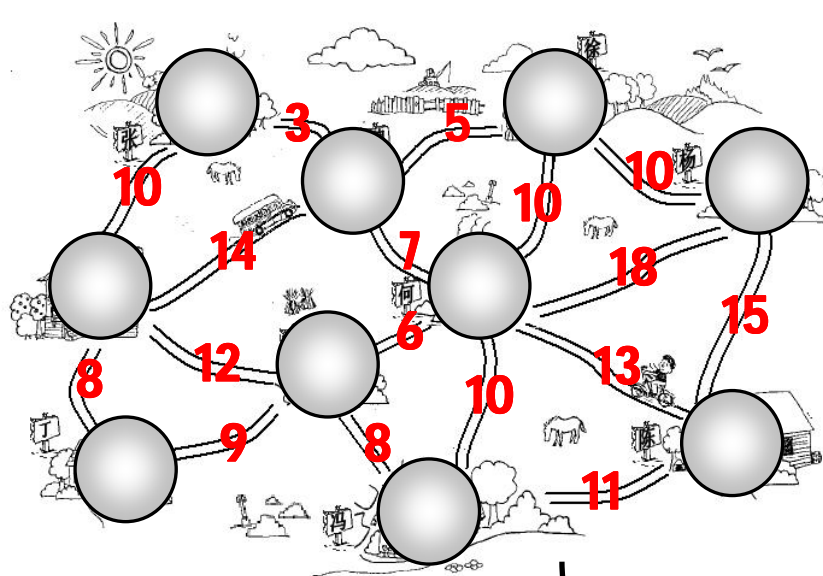
- 边是顶点对： $(v, w) \in E$ ，其中 $v, w \in V$ 
- 有向边 $\langle v, w \rangle$ 表示从v指向w的边（单行线） 
- 不考虑重边和自回路 无向边：认为两个顶点之间只有一条边，有向边：认为只能从一个顶点到另一个不同顶点



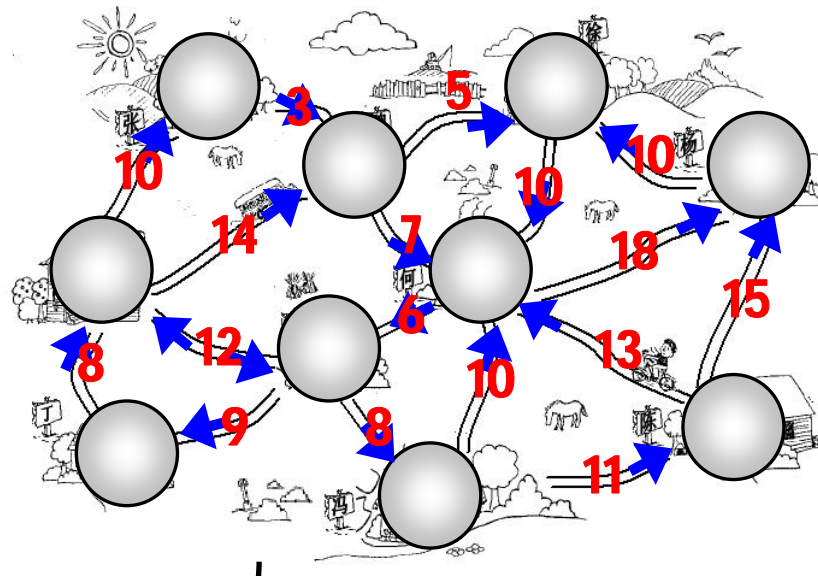
抽象数据类型定义

- 类型名称：图（Graph）
- 数据对象集： $G(V, E)$ 由一个非空的有限顶点集合 V 和一个有限边集合 E 组成。
至少一个顶点
- 操作集：对于任意图 $G \in \text{Graph}$ ，以及 $v \in V, e \in E$
 - **Graph Create()**：建立并返回空图；
 - **Graph InsertVertex(Graph G, Vertex v)**：将 v 插入 G ；
 - **Graph InsertEdge(Graph G, Edge e)**：将 e 插入 G ；
 - **void DFS(Graph G, Vertex v)**：从顶点 v 出发深度优先遍历图 G ；
 - **void BFS(Graph G, Vertex v)**：从顶点 v 出发宽度优先遍历图 G ；
 - **void ShortestPath(Graph G, Vertex v, int Dist[])**：计算图 G 中顶点 v 到任意其他顶点的最短距离；
 - **void MST(Graph G)**：计算图 G 的最小生成树；
 -

常见术语



无向图



有向图

网 络

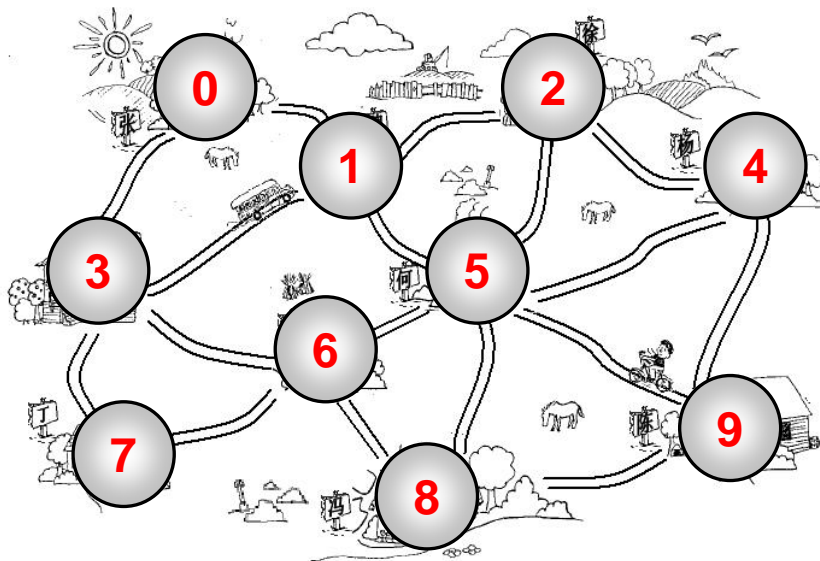
带权重的图

还有好多，用到再说.....

怎么在程序中表示一个图

- 邻接矩阵 $G[N][N]$ —— N 个顶点从0到 $N-1$ 编号

$$G[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{若 } \langle v_i, v_j \rangle \text{ 是 } G \text{ 中的边} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$



对角线全是0；对称（无向图有一半存储浪费）

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
v_2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
v_3	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
v_4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
v_5	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
v_6	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
v_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0

怎么在程序中表示一个图

■ 邻接矩阵

□ 问题：对于无向图的存储，怎样可以省一半空间？

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
v_2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
v_3	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
v_4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
v_5	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
v_6	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
v_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0

用一个长度为 $N(N+1)/2$ 的 1维数组A 存储 $\{G_{00}, G_{10}, G_{11}, \dots, G_{n-1\ 0}, \dots, G_{n-1\ n-1}\}$, 则 G_{ij} 在A中对应的下标是:

$$\left(\underbrace{i * (i+1) / 2}_{\text{上一行上三角元素个数}} + \underbrace{j}_{\text{改行元素下标}} \right)$$

对于 网络，只要把 $G[i][j]$ 的值定义为边 $\langle v_i, v_j \rangle$ 的权重即可。

问题： v_i 和 v_j 之间若没有边该怎么表示？

怎么在程序中表示一个图

■ 邻接矩阵 — 有什么好处？

- ☑ 直观、简单、好理解
- ☑ 方便检查任意一对顶点间是否存在边
- ☑ 方便找任一顶点的所有“邻接点”（有边直接相连的顶点）
- ☑ 方便计算任一顶点的“度”（从该点发出的边数为“出度”，指向该点的边数为“入度”）
 - 无向图：对应行（或列）非0元素的个数
 - 有向图：对应行非0元素的个数是“出度”；对应列非0元素的个数是“入度”

怎么在程序中表示一个图

■ 邻接矩阵 — 有什么不好？

☑ 浪费空间 — 存稀疏图（点很多而边很少）有大量无效元素

● 对稠密图（特别是完全图）还是很合算的

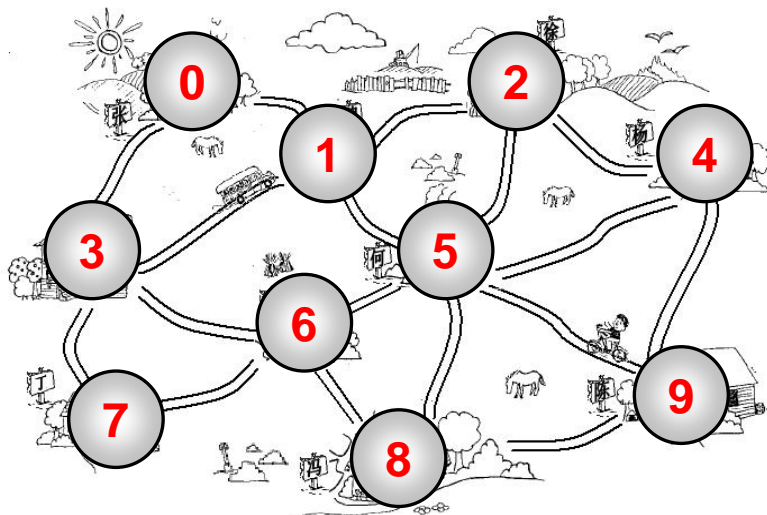
任意两个顶点都有边

☑ 浪费时间 — 统计稀疏图中一共有多少条边

怎么在程序中表示一个图

- 邻接表: $G[N]$ 为指针数组, 对应矩阵每行一个链表, 只存非0元素

对于网络, 结构中要增加权重的域。



```
G[0] → 1 → 3 → ●
G[1] → 5 → 3 → 0 → 2 → ●
G[2] → 1 → 5 → 4 → ●
G[3] → 7 → 1 → 0 → 6 → ●
G[4] → 2 → 5 → 9 → ●
G[5] → 2 → 1 → 4 → 6 → 8 → 9 → ●
G[6] → 5 → 8 → 7 → 3 → ●
G[7] → 6 → 3 → ●
G[8] → 9 → 5 → 6 → ●
G[9] → 4 → 5 → 8 → ●
```

给每一个结点创建一个链表 (表示不唯一)

一定要够稀疏才合算啊~~~~~

怎么在程序中表示一个图

■ 邻接表

☑ 方便找任一顶点的所有“邻接点”

☑ 节约稀疏图的空间

- 需要 N 个头指针 + $2E$ 个结点（每个结点至少2个域）
每个边存两遍

☑ 方便计算任一顶点的“度”？

- 对无向图：是的链表上串的数量
- 对有向图：只能计算“出度”；需要构造“逆邻接表”（存指向自己的边）来方便计算“入度”

☑ 方便检查任意一对顶点间是否存在边？

☹ No

图除了邻接矩阵和邻接表表示，还有其他表示方法，取决于具体应用