

# 第一讲 基本概念

浙江大学 陈 越

## 1.2 什么是算法

# 定义

## ■ 算法 (Algorithm)

- ❑ 一个有限指令集
- ❑ 接受一些输入（有些情况下不需要输入）
- ❑ 产生输出 至少有一个输出
- ❑ 一定在有限步骤之后终止 像操作系统就可以无限执行下去
- ❑ 每一条指令必须
  - 有充分明确的目标，不可以有歧义
  - 计算机能处理的范围之内
  - 描述应不依赖于任何一种计算机语言以及具体的实现手段

# 例1：选择排序算法的伪码描述

```
void SelectionSort ( int List[], int N )
{ /* 将N个整数List[0]...List[N-1]进行非递减排序 */
  for ( i = 0; i < N; i ++ ) {
    MinPosition = ScanForMin( List, i, N-1 );
    /* 从List[i]到List[N-1]中找最小元，并将其位置赋给MinPosition */
    Swap( List[i], List[MinPosition] );
    /* 将未排序部分的最小元换到有序部分的最后位置 */
  }
}
```

抽象 —

**List**到底是数组还是链表（虽然看上去很像数组）？

list可以是数组也可以是链表，这个和具体的实现有关，与算法无关

**Swap**用函数还是用宏去实现？

# 什么是好的算法？

- **空间复杂度 $S(n)$**  —— 根据算法写成的程序在执行时占用存储单元的长度。这个长度往往与输入数据的规模有关。空间复杂度过高的算法可能导致使用的内存超限，造成程序非正常中断。
- **时间复杂度 $T(n)$**  —— 根据算法写成的程序在执行时耗费时间的长度。这个长度往往也与输入数据的规模有关。时间复杂度过高的低效算法可能导致我们在有生之年都等不到运行结果。

## 1.1 例2

```
void PrintN ( int N )
{ if ( N ){
    PrintN( N - 1 );
    printf("%d\n", N );
}
return;
}
```

.....	100000	99999	99998	..... .....	1	.....
-------	--------	-------	-------	-------------	---	-------

PrintN(100000)

PrintN(99999)

PrintN(99998)

PrintN(99997)

..... .....

PrintN(0)

空间复杂度太大，占用过大的内存，非正常退出

$$S(N) = C \cdot N$$

## 1.1 例3 第一个函数的时间复杂度比第二个大

```
double f( int n, double a[], double x )
{ int i;
  double p = a[0];
  for ( i=1; i<=n; i++ )           (1+2+.....+n)
    p += (a[i] * pow(x, i));      =(n2+n)/2次乘法
  return p;
}
```

$T(n) = C_1n^2 + C_2n$

```
double f( int n, double a[], double x )
{ int i;
  double p = a[n];
  for ( i=n; i>0; i-- )
    p = a[i-1] + x*p;              n次乘法!
  return p;
}
```

$T(n) = C \cdot n$

# 什么是好的算法？

- 在分析一般算法的效率时，我们经常关注下面两种复杂度
  - 最坏情况复杂度  $T_{worst}(n)$  平均复杂度不好衡量，一般关心最坏情况复杂度
  - 平均复杂度  $T_{avg}(n)$

$$T_{avg}(n) \leq T_{worst}(n)$$

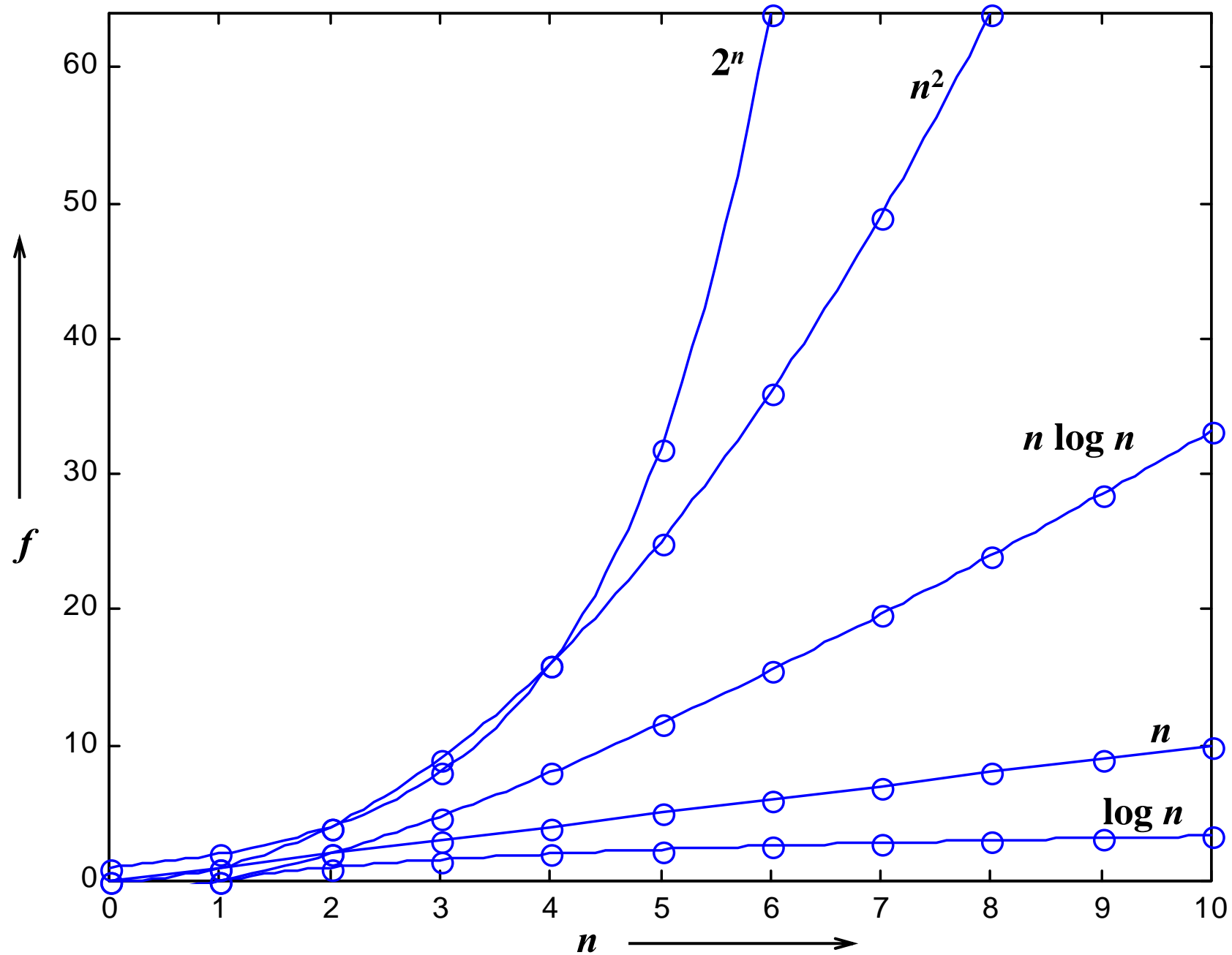


# 复杂度的渐进表示法

- $T(n) = O(f(n))$  表示存在常数  $C > 0, n_0 > 0$  使得当  $n \geq n_0$  时有  $T(n) \leq C \cdot f(n)$   $O(f(n))$  相当于  $T(n)$  的上界
- $T(n) = \Omega(g(n))$  表示存在常数  $C > 0, n_0 > 0$  使得当  $n \geq n_0$  时有  $T(n) \geq C \cdot g(n)$  欧米茄( $g(n)$ ) 相当于  $T(n)$  的下界
- $T(n) = \Theta(h(n))$  表示同时有  $T(n) = O(h(n))$  和  $T(n) = \Omega(h(n))$

## 输入规模 $n$

函数	1	2	4	8	16	32
1	1	1	1	1	1	1
$\log n$	0	1	2	3	4	5
$n$	1	2	4	8	16	32
$n \log n$	0	2	8	24	64	160
$n^2$	1	4	16	64	256	1024
$n^3$	1	8	64	512	4096	32768
$2^n$	2	4	16	256	65536	4294967296
$n!$	1	2	24	40320	2092278988800	$26313 \times 10^{33}$



【tips】 编程时如果出现 $n$ 平方或者阶乘时，考虑优化时间复杂度，提高效率

	每秒10亿指令计算机的运行时间表						
$n$	$f(n)=n$	$n \log_2 n$	$n^2$	$n^3$	$n^4$	$n^{10}$	$2^n$
10	.01 $\mu$ s	.03 $\mu$ s	.1 $\mu$ s	1 $\mu$ s	10 $\mu$ s	10sec	1 $\mu$ s
20	.02 $\mu$ s	.09 $\mu$ s	.4 $\mu$ s	8 $\mu$ s	160 $\mu$ s	2.84hr	1ms
30	.03 $\mu$ s	.15 $\mu$ s	.9 $\mu$ s	27 $\mu$ s	810 $\mu$ s	6.83d	1sec
40	.04 $\mu$ s	.21 $\mu$ s	1.6 $\mu$ s	64 $\mu$ s	2.56ms	121.36d	18.3min
50	.05 $\mu$ s	.28 $\mu$ s	2.5 $\mu$ s	125 $\mu$ s	6.25ms	3.1yr	13d
100	.10 $\mu$ s	.66 $\mu$ s	10 $\mu$ s	1ms	100ms	3171yr	4*10 <sup>13</sup> yr
1,000	1.00 $\mu$ s	9.96 $\mu$ s	1ms	1sec	16.67min	3.17*10 <sup>13</sup> yr	32*10 <sup>283</sup> yr
10,000	10 $\mu$ s	130.03 $\mu$ s	100ms	16.67min	115.7d	3.17*10 <sup>23</sup> yr	
100,000	100 $\mu$ s	1.66ms	10sec	11.57d	3171yr	3.17*10 <sup>33</sup> yr	
1,000,000	1.0ms	19.92ms	16.67min	31.71yr	3.17*10 <sup>7</sup> yr	3.17*10 <sup>43</sup> yr	

$\mu$ s = 微秒 = 10<sup>-6</sup>秒  
ms = 毫秒 = 10<sup>-3</sup>秒

sec = 秒  
min = 分钟

hr = 小时  
d = 日  
yr = 年

# 复杂度分析小窍门

- 若两段算法分别有复杂度  $T_1(n) = O(f_1(n))$  和  $T_2(n) = O(f_2(n))$ ，则
  - $T_1(n) + T_2(n) = \max(O(f_1(n)), O(f_2(n)))$  两端算法求和，取复杂度的最大值
  - $T_1(n) \times T_2(n) = O(f_1(n) \times f_2(n))$  两端算法求积，取复杂度的乘积
- 若  $T(n)$  是关于  $n$  的  $k$  阶多项式，那么  $T(n) = \Theta(n^k)$
- 一个 **for** 循环的时间复杂度等于循环次数乘以 循环体代码的复杂度 要考虑循环体内代码执行的复杂度，不只是简单考虑循环次数
- **if-else** 结构的复杂度取决于 **if** 的条件判断复杂度和两个分枝部分的复杂度，总体复杂度取三者中最大