2023~2024 学年春夏学期《普通物理学 I（H）》课程

期中测试参考答案

(1)　　[3 points]

答案： A

解析： 因为地球自转的缘故，从高空自由落体的物体受到科里奥利力（地转偏向力）$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 的影响，其落点产生偏移。地球自西向东自转，其角速度$\boldsymbol{\omega}$方向指向正北（地轴北极）；墨尔本位于南半球，此处的落体速度$\boldsymbol{v}$垂直于地面向下，指向地心。利用右手螺旋法则可以判断此时$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$方向朝东，故落体的落点偏东，选 A。——注意，这个结论并不受物体是在北半球还是南半球的影响。

科里奥利力是对旋转参考系中进行直线运动的质点引入的一种惯性力，是非惯性系中引入的假想力，故没有施力物体。由于我们的地球在不断自转，本质是个非惯性系，所以在地球表面附近运动的物体往往也会受到科里奥利力的作用而发生偏转，此时它被称作“地转偏向力”。总的而言，在北半球运动的物体有向右偏转的趋势，在南半球运动的物体则有向左偏转的趋势。因此，北半球的河流，流向的右侧因侵蚀较强而多峭壁，左侧则多平缓河岸，南半球反之；长途飞机、洲际导弹等长距离飞行器在设计轨道时也要考虑科里奥利力的影响。该现象还主宰着全球的大气环流，使得北半球低纬度地区的偏北风变成东北风、南半球低纬度地区的偏南风变成西南风，形成了所谓的信风带。此外，北半球的低压区（如热带气旋等）逆时针旋转而南半球的则顺时针旋转也是处于同样的原因。我们利用科里奥利力的原理设计傅科摆，可以证明地球在自转。但要注意的是：因为地球自转非常慢，所以科里奥利力的效应只有在较大的时空尺度上才比较明显，对于马桶或水槽漩涡旋转方向之类的小尺度、短时间过程的影响并不显著。

(2)　　[3 points]

答案： D

解析： 根据牛顿第二定律的原始形式（或动量定理）知$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$，故动量$\boldsymbol{p}$的时间导数实质就是合外力，题中所问为合外力的幅值。由于该质点做匀速圆周运动，合外力的幅值为$F = mv^2/r$，显然与v^2成正比，故选 D。

(3)　　[3 points]

答案： D

解析： 由题意，航天器与木星的这个相遇过程可以看作是完全弹性碰撞。利用完全弹性碰撞中动量和能量守恒，解得航天器末速度为

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{m-M}{m+M}v_0 + \frac{2M}{m+M}(-V)$$

其中m为航天器质量、M为木星质量，显然有$M \gg m$，故上式近似为

$$v_{\mathrm{f}} = -v_0 - 2V$$

解得$v_{\mathrm{f}} = -38\ \mathrm{km/s}$，负号表示反向离开，故选 D。——可见航天器被明显加速。

这就是“引力弹弓”效应，它能够利用行星的相对运动速度和引力来改变飞行器的速度，从而为飞行器高效加速或减速，节省燃料和时间。在从地球上发射飞行器到外太阳系乃至飞出太阳系，为了使飞行器达到足够的速度，必须使飞行器飞掠木星和土星等巨行星，借助这些行星的“引力弹弓”效应来加速。水手 10 号、旅行者 1 号、伽利略号、尤利西斯号、信使号、卡西尼号、新视野号、朱诺号等探测器都曾借助过“引力弹弓”效应。

“引力弹弓”的概念在《星际穿越》和《火星救援》等电影中都有提及。在小说和电影《流浪地球》中，被推动的地球之所以需要冒险接近木星，就是为了借助木星的“引力弹弓”效应为地球加速从而飞出太阳系。电影中主要情节背景为在此过程中出现意外致使地球被木星引力俘获，而原著小说中并无此情节，小说中的原始设定更加复杂，需要同时借助太阳和木星的引力缓慢修正地球轨道。

(4) [3 points]

答案： B

解析： 当子弹进入沙子后，受到沙子的阻力作用而减速（忽略重力），直至停止。整个过程里只有阻力做负功，根据动能定理

$$\frac{1}{2}m\,\mathrm{d}(v^2) = -f\,\mathrm{d}y = -bv\,\mathrm{d}y$$

整理并分离变量，两端积分，即

$$\int_0^{y_{\max}}\mathrm{d}y = \int_{v_0}^{0} -\frac{m}{b}\,\mathrm{d}v \quad\Longrightarrow\quad y_{\max} = \frac{mv_0}{b}$$

故子弹能够穿透沙子的最大深度 $y_{\max} = \dfrac{mv_0}{b} = 10.0\ \mathrm{cm}$，选 B。

另一种做法是利用动量定理，即

$$m\,\mathrm{d}v = -f\,\mathrm{d}t = -bv\,\mathrm{d}t$$

此时若利用链式法则代换 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}y(\mathrm{d}t/\mathrm{d}y) = \mathrm{d}y/v$，则还原到动能定理形式。或者也可以直接分离变量并两端积分，以求得子弹速度关于时间的演化（以子弹进入沙子为 $t=0$ 时刻）

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} -\frac{m}{bv}\,\mathrm{d}v \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{v_0}{v}\right) \quad\Longrightarrow\quad v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

再对速度积分求得位移关于时间的演化

$$y = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{mv_0}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

则当 $t\to\infty$ 时（即子弹最终停下时）的位移为 $y = y_{\max} = mv_0/b$，结果相同。

(5) [3 points]

答案： D

解析： 注意这里的摩擦力并不是集中于一点，而是分布在整个圆盘与桌子的接触面上。一个典型的方法是将圆盘分解为许多圆环，对单个圆环进行分析。设圆环的半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$，将圆盘面密度记作 σ（有 $\sigma = m/\pi R^2$），则单个圆环所受的摩擦阻力矩 $\mathrm{d}\tau = \mu\cdot 2\pi r\sigma g\cdot r\,\mathrm{d}r$，则整个圆盘所受的总摩擦阻力矩为

$$\tau = \int \mathrm{d}\tau = \int_0^R 2\pi\sigma\mu g r^2 \mathrm{d}r = \frac{2}{3}\sigma\pi R^3 \mu g = \frac{2}{3}\mu m g R$$

这是一个恒定的阻力矩，该阻力矩使圆盘减速。圆盘的转动惯量为$I = \frac{1}{2}mR^2$，根据定轴转动定律，可求出减速到零所需时间为$t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{I\omega_0}{\tau} = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}$，故选 D。

(6)　　[3 points]

答案：　C

解析：　由题意可知，液面、导管入口、导管出口三个位置中，液面和导管出口都是与外界连通的，其压强等于大气压。则当导管入口处水的压强恰好为零时，对以上三个位置联立伯努利方程

$$p_0 + \rho g(h+H) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

以及对导管的入口和出口处联立连续性方程

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

以上解得$h = \frac{S_1^2}{(S_2^2 - S_1^2)}\left(\frac{p_0}{\rho g} - \frac{S_2^2}{S_1^2}H\right)$，故选 C。

(7)　　[4 points]

答案：　$r_C = \frac{9}{28}R$　　　$I_O = \frac{157}{512}MR^2$

解析：　本题中的“月牙”形薄片，可视作一个半径为R的大圆盘叠加上了一个“负质量”、半径为$3R/4$的小圆盘，该小圆盘的圆心距离大圆盘圆心（O 点）的距离为$R/4$，小圆盘的“质量”为$-9M/16$，则剩余的“月牙”其质心位置到 O 点的距离r_C满足

$$r_C = \left|\frac{M\cdot 0 - 9M/16\cdot(R/4)}{M - 9M/16}\right| = \frac{9}{28}R$$

而“月牙”绕 O 点的转动惯量为（注意利用平行轴定理将转轴都移动到 O 点）

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9M}{16}\cdot\left(\frac{3R}{4}\right)^2 + \frac{9M}{16}\cdot\left(\frac{R}{4}\right)^2\right) = \frac{157}{512}MR^2$$

(8)　　[2 points]

答案：　$F_N = \frac{17}{7}mg$

解析：　假设实心球到达半圆轨道底部时质心速度为v_c、角速度为ω，则根据纯滚动条件和机械能守恒分别有

$$v_c = \omega r$$

$$mg(R-r) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

其中球绕其质心的转动惯量$I_c=\dfrac{2}{5}mr^2$，联立求得$v_c=\sqrt{\dfrac{10}{7}g(R-r)}$。再根据向心力公式

$$F_N-mg=\frac{mv_c^2}{R-r}$$

则轨道给球的支持力$F_N=\dfrac{17}{7}mg$。

(9)　[4 points]

答案：　(a)　$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(10x-2y)\boldsymbol{e}_x-2x\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$ (N)　　(b)　$W=18$ J

解析：　(a)　题中给出了三维保守力场的势能函数$U(x,y,z)=-5x^2+2xy+3z$ (J)，注意保守力是势能的负梯度，故可求得力场的表达式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(x,y,z)&=-\nabla U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\\&=(10x-2y)\boldsymbol{e}_x-2x\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z\ \text{(N)}\end{aligned}$$

(b)　保守力的做功只和质点初末位置有关，等于运动过程中势能的减少量。因此用初位置(0 m, 0 m, 0 m)处的势能减末位置(3 m, 3 m, 3 m)处的势能即得该过程中的做功，即

$$W=-\Delta U=0\ \text{J}-(-18\ \text{J})=18\ \text{J}$$

(10)　[2 points]

答案：　$R_{max}=2.95$ km

解析：　根据机械能守恒，可计算出天体的逃逸速度（第二宇宙速度）为$v_2=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$。对于题中所描述的“黑洞”，为了让包括光在内的任何物质都无法逃逸，其逃逸速度需大于光速，即$v_2>c$。将太阳质量$M_S=1.99\times10^{30}$ kg代入，解得太阳若保持现有的质量坍缩为黑洞，其半径必须缩小至$R<\dfrac{2GM_S}{c^2}=2.95$ km，故最大半径$R_{max}=2.95$ km。

这样定义的临界半径也被称作“史瓦西半径”，它的涵义是——如果特定质量的物质被压缩到该半径值以内，将没有任何已知类型的力可以阻止该物质自身的引力将物质整体压缩为一个奇点，此时光也无法逃逸，不可能有任何物质从它上面发射出来，这也就形成了一个“黑洞”。我们已经计算出太阳的史瓦西半径大约2.95 km，而地球的史瓦西半径大约8.86 mm。我们宇宙的平均物质密度约为10^{-29} g/cm^3，如果将宇宙看作一个密度均匀的球体，它的史瓦西半径大约为10^{26} m（即百亿光年）的量级。如果认为宇宙也是靠引力束缚让包括光在内的物质无法逃逸，将宇宙也看作黑洞，就可以用史瓦西半径来估计宇宙的半径。

史瓦西半径需要用广义相对论才能严格推导，但我们利用牛顿经典力学也能推出完全一致的结果。

(11)　[6 points]

答案：　(a)　$v_P=3\omega A$　　$a_P=16\omega^2 A$　　(b)　$\varrho_P=\dfrac{9}{16}A$

解析：　(a)　根据题目中给出的粒子运动方程

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(3\omega t + \pi/2) \\ y(t) = A\cos(4\omega t - \pi/3) \end{cases}$$

求得其速度方程

$$\begin{cases} v_x(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -3\omega A\sin(3\omega t + \pi/2) \\ v_y(t) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -4\omega A\sin(4\omega t - \pi/3) \end{cases}$$

以及加速度方程

$$\begin{cases} a_x(t) = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = -9\omega^2 A\cos(3\omega t + \pi/2) \\ a_y(t) = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = -16\omega^2 A\cos(4\omega t - \pi/3) \end{cases}$$

将$t = \pi/3\omega$代入，解得 P 点处$v_x = 3\omega A$、$v_y = 0$、$a_x = 0$、$a_y = 16\omega^2 A$，所以 P 点处速度和加速度的幅值分别为$v_{\mathrm{P}} = 3\omega A$和$a_{\mathrm{P}} = 16\omega^2 A$。

(b) 根据上述计算结果容易发现，P 点处速度朝向$+x$方向、加速度朝向$+y$方向，两者恰好垂直，说明切向加速度$a_{\tau\mathrm{P}} = 0$，加速度只有法向分量，即法向加速度$a_{\mathrm{nP}} = 16\omega^2 A$，则可求出轨迹在 P 点处的曲率半径为$\varrho_{\mathrm{P}} = \dfrac{v_{\mathrm{P}}^2}{a_{\mathrm{nP}}} = \dfrac{9}{16}A$。

(12)　[4 points]

答案： (a) $F = C\rho S v^2$　　(b) $v_2 = 100\ \mathrm{km/h}$

解析： (a) 由题意，认为鸟飞行时的升力只和它的翅膀面积S、飞行速度v、空气密度ρ有关。用C表示无量纲系数，则可以设升力F的表达式为$F = C\rho^\alpha S^\beta v^\gamma$，对应的量纲式为

$$\ln[F] = \alpha\ln[\rho] + \beta\ln[S] + \gamma\ln[v]$$

又因为$[F] = [\mathrm{L}]^1[\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}$、$[\rho] = [\mathrm{L}]^{-3}[\mathrm{M}]^1$、$[S] = [\mathrm{L}]^2$、$[v] = [\mathrm{L}]^1[\mathrm{T}]^{-1}$，列出方程组

$$\begin{cases} -3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ \alpha = 1 \\ -\gamma = -2 \end{cases}$$

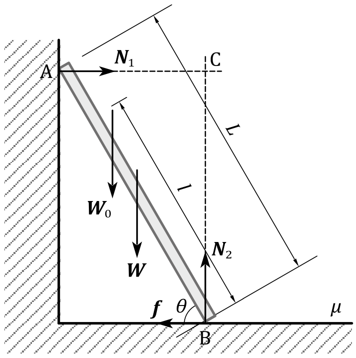
解得$\alpha = 1$、$\beta = 1$、$\gamma = 2$，故升力表达式为$F = C\rho S v^2$。

(b) 鸟能够起飞的条件是翅膀升力大于自身重力，即$F = C\rho S v^2 > mg$，故起飞速度需要满足的条件为$v > \sqrt{\dfrac{mg}{C\rho S}}$。如果假设鸟身体的线度为$L$，而且假设鸵鸟和燕子具有和它们身体表面积成比例的翅膀，则翅膀面积与线度的平方成正比（$S \propto L^2$）、质量与线度的立方成正比（$m \propto L^3$），因此起飞速度需要和线度的平方根成正比（$v \propto L^{1/2}$）。已知鸵鸟身体的尺寸（线度）是燕子的25倍，故鸵鸟若想起飞，其起飞速度至少是燕子的5倍。如果燕子的起飞速度为$v_1 = 20\ \mathrm{km/h}$，则鸵鸟起飞至少需要$v_2 = 5v_1 = 100\ \mathrm{km/h}$——这已经接近猎豹奔跑的速度，对鸵鸟来说是难以达到的。鸵鸟的奔跑速度差不多只有50 km/h 左右。

上面的比例关系还告诉我们，像麻雀这样的小鸟和天鹅这样的大鸟，起飞和着陆的姿势是不会相同的。小鸟只需从枝头跳到空中用翅膀拍打一两下，就能达到起飞的临界速度；大鸟则首先要沿着地面或水面奔跑或滑行一段，或者从一个高的栖木向下俯冲，才能达到起飞的临界速度。

(13) [10 points]

解： 设梯子的重力为$\boldsymbol{W}$、工人的重力为$\boldsymbol{W}_0$、墙对梯子的支持力为$\boldsymbol{N}_1$、地面对梯子的支持力为$\boldsymbol{N}_2$，地面对梯子的静摩擦力为$\boldsymbol{f}$。将$\boldsymbol{N}_1$和$\boldsymbol{N}_2$的作用线延长后的交点 C 点作为力矩平衡的转轴，列出系统的平衡方程为



水平方向受力平衡 $\sum F_x = N_1 - f = 0$

竖直方向受力平衡 $\sum F_y = N_2 - W - W_0 = 0$

绕 C 点的力矩平衡 $\sum \tau_{\mathrm{C}} = WL\cos\theta/2 + W_0 l\cos\theta - fL\sin\theta = 0$

解得$N_1 = f = (W/2 + W_0 l/L)\cot\theta$、$N_2 = W + W_0$，又因为静摩擦力必须满足$f \le \mu N_2$，则有$(W/2 + W_0 l/L)\cot\theta \le \mu(W + W_0)$。故如果要保证安全、梯子不滑动，$l$应当满足

$$l \le \mu L\tan\theta\left(1 + \frac{W}{W_0}\right) - \frac{WL}{2W_0}$$

故l的最大值$l_{\max} = \mu L\tan\theta\left(1 + \frac{W}{W_0}\right) - \frac{WL}{2W_0}$，这就是工人在安全前提下最高能攀登到的地方。

——观察这个表达式，可以发现如果μ越大或θ越大都能允许攀登得越高，与直观感受相符。

(14) [10 points]

解： (a) 胶水球击中直棒瞬间，系统整体以直棒悬点为转轴满足角动量守恒。胶水球粘在棒上后，整个组合体转动惯量$I' = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{4M+3m}{12}L^2$。则根据角动量守恒有

$$mv\frac{L}{2} = I'\omega$$

解得碰后瞬间的角速度为$\omega = \left(\frac{6m}{4M+3m}\right)\frac{v}{L} = 4.00\ \mathrm{rad/s}$。

(b) 组合体摆起的过程满足机械能守恒，则有摆到最大高度时

$$\frac{1}{2}I'\omega^2 = \left(Mg\frac{L}{2} + mg\frac{L}{2}\right)(1-\cos\theta)$$

解得此时的摆角$\theta = \arccos\left(1 - \frac{3m^2v^2}{(4M+3m)(M+m)gL}\right) = 1.06\ \mathrm{rad} = 60.7°$。

(15) [10 points]

解： 飞船进入尘埃云后，设t时刻的总质量（含黏附于其上的尘埃）为m、速度为v。此时起每经过$\mathrm{d}t$时间，飞船向前行进$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$的距离，扫过了质量为$\mathrm{d}m = \rho A\,\mathrm{d}s$的尘埃，这些尘埃原本的速度为零，黏附在飞船上后获得和飞船相同的速度。设经历这一小段飞行后飞船速度变化为$\mathrm{d}v$，列出动量定理

$$mv - (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) = 0$$

整理并忽略高阶小量，写出

$$m\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}m = \mathrm{d}(mv) = 0$$

故mv始终为常量，等于飞船进入气体云前的$m_0 v_0$。（亦可理解为系统始终动量守恒。）则任意时刻m与v的关系为

$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$

将上述关系与$\mathrm{d}m = \rho A\,\mathrm{d}s = \rho A v\,\mathrm{d}t$都代入$m\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}m = 0$，整理并分离变量后得到

$$\frac{\rho A}{m_0 v_0}\mathrm{d}t = -\frac{1}{v^3}\mathrm{d}v$$

两边积分

$$\frac{\rho A}{m_0 v_0}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} -\frac{1}{v^3}\mathrm{d}v \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\rho A}{m_0 v_0}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right)$$

解得速度随时间的变化为

$$v(t) = v_0\sqrt{\frac{m_0}{2\rho A v_0 t + m_0}}$$

再将速度对时间积分，解得位移随时间的变化为

$$s(t) = \int_0^t v_0\sqrt{\frac{m_0}{2\rho A v_0 t + m_0}}\,\mathrm{d}t = \frac{m_0}{\rho A}\left(\sqrt{1 + \frac{2\rho A v_0}{m_0}t} - 1\right)$$

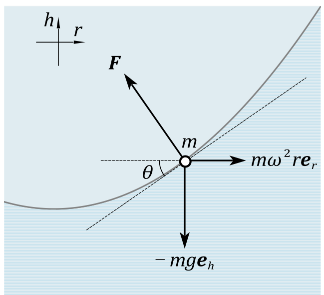
(16) [10 points]

解： (a) 由题意，水中处处具有相同的角速度ω。在水的表面任取一质量为m的小质元，它受到三个力的作用而平衡——周围的水和大气对它的作用力$\boldsymbol{F}$（它一定垂直于水的表面）、重力$-mg\boldsymbol{e}_h$、惯性离心力$m\omega^2 r\boldsymbol{e}_r$。利用与$\boldsymbol{F}$垂直的方向合力为零，有

$$m\omega^2 r\cos\theta - mg\sin\theta = 0$$

其中θ为该质元处水面的倾斜角，即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = \tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$$



分离变量并两边积分

$$\int \mathrm{d}h = \int \frac{\omega^2 r}{g}\mathrm{d}r$$

得到水面的形状为

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0$$

这是一个旋转抛物面。其中h_0为常量。——这也就是水桶旋转带动桶里的水旋转的情况。

(b) 如果水中处处具有相同的比角动量l，根据$l = L/m = v_r r = \omega r^2$，水中各处的角速度将不再相同，而是与$r^2$成反比，即

$$\omega = \frac{l}{r^2}$$

则上述关于$\tan\theta$的关系变为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}=\tan\theta=\frac{l^2}{gr^3}$$

分离变量并两边积分

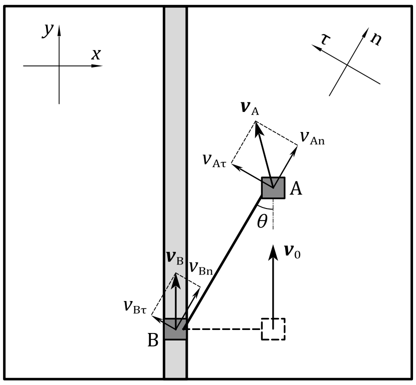
$$\int \mathrm{d}h=\int \frac{l^2}{gr^3}\mathrm{d}r$$

得到水面的形状为

$$h=-\frac{l^2}{2gr^2}+h_0$$

这是一个“漏斗形”的曲面。其中h_0为常量。——江面上的旋涡、由搅拌器转出来的旋涡、或者存在漏水口(例如浴缸放水)时产生的旋涡、甚至龙卷风，都可能形成类似这样的形状。

(17) [10 points]



解： 如图，由于桌面是光滑的，所以滑块 A 在被推动后一直以$\boldsymbol{v}_0$的初速度沿y方向滑动。直到滑动与滑块 B 距离恰好等于L的位置，此时连接滑块 A 和 B 的绳子突然绷紧。在绳绷紧瞬间，滑块 A 和 B 都存在速度的突变，系统整体存在能量损失，但满足沿y方向的动量守恒以及以滑块 B 所在位置为转轴的角动量守恒。设绳子绷紧后瞬间滑块 A 和 B 的速度分别为$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$。

我们将$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$分别按沿绳和垂直于绳的方向分解。由于滑块 B 只能在凹槽中运动，故$\boldsymbol{v}_B$的方向只能沿凹槽，它的沿绳分量为$v_{Bn}=v_B\cos\theta$。由于此时绳子已经绷直，滑块 A 和 B 各自沿绳方向的速度分量必须相同，故$\boldsymbol{v}_A$的沿绳分量也是$v_{An}=v_{Bn}=v_B\cos\theta$。由几何关系显然有$\theta=30°$。

则根据绳子绷紧前后系统的沿y方向动量守恒

$$mv_0=mv_B+mv_{An}\cos\theta+mv_{A\tau}\sin\theta$$

以及以滑块 B 所在位置为转轴的角动量守恒

$$mv_0\frac{L}{2}=mv_{A\tau}L$$

联立解得

$$v_B=v_0\frac{1-\sin\theta/2}{1+\cos^2\theta}=\frac{3}{7}v_0$$

所以滑块 B 刚开始运动时的速度$\boldsymbol{v}_B$的大小是$\frac{3}{7}v_0$，方向平行于凹槽，且与$\boldsymbol{v}_0$方向相同。

(18) [10 points]

解： (a) 将探测器自身质量记作m。探测器在半径$r=R_E+h$的圆轨道上，总能量为

$$E_1=-\frac{GM_Em}{2r}=-\frac{GM_Em}{2(R_E+h)}$$

探测器在半长轴$a=(R_E+h+d)/2$的椭圆轨道（地月转移轨道）上，总能量为

$$E_2=-\frac{GM_\mathrm{E}m}{2a}=-\frac{GM_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}+h+d}$$

则在 A 点加速前探测器的动能为

$$E_{\mathrm{k}1}=E_1-\left(-\frac{GM_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}+h}\right)=\frac{GM_\mathrm{E}m}{2(R_\mathrm{E}+h)}$$

在 A 点加速后探测器的动能为

$$E_{\mathrm{k}2}=E_2-\left(-\frac{GM_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}+h}\right)=-\frac{GM_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}+h+d}+\frac{GM_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}+h}$$

故可求得在 A 点加速前后的速度增量为

$$\begin{aligned}\Delta v&=\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}2}}{m}}-\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}1}}{m}}\\&=\sqrt{\frac{GM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}+h}}\left(\sqrt{\frac{2d}{R_\mathrm{E}+h+d}}-1\right)=3.13\ \mathrm{km/s}\end{aligned}$$

本题中描述的变轨过程其实是简化过的，实际过程会复杂一些。总体来说，如果航天器发射时的火箭动力比较低（例如发射“嫦娥一号”时），就只能先发射到较低的近地圆轨道，再通过多次变轨不断增加椭圆轨道的远地点高度（让这个椭圆越来越“扁”），最后到达地月转移轨道飞向月球，到被月球的引力捕获后再进行一个类似的减速变轨过程直到最终变为圆轨道环绕月球。而当我们发射“嫦娥五号”“嫦娥六号”或“天问一号”时，由于已经拥有了“长征五号”火箭，有足够的动力，就可以直接发射进入地月（地火）转移轨道，不需要再在地球附近进行反复的变轨。

(b) “嫦娥六号”探测器在霍曼转移轨道上从 A 点到 B 点，其位置与地球中心的连线扫过半个椭圆。根据开普勒第三定律，探测器在完整椭圆轨道上的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\mathrm{E}}}=2\pi\sqrt{\frac{(R_\mathrm{E}+h+d)^3}{8GM_\mathrm{E}}}$$

又根据开普勒第二定律，探测器在霍曼转移轨道上从 A 点到 B 点所花费的时间应该是上述周期的一半，即

$$t_\mathrm{AB}=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{(R_\mathrm{E}+h+d)^3}{8GM_\mathrm{E}}}=4.29\times10^5\ \mathrm{s}=4.97\ \mathrm{d}$$

——即大约五天。“嫦娥六号”探测器于 2024 年 5 月 3 日发射，5 月 8 日进入绕月轨道，耗时恰好大约 5 天。

(c) 比尔・纳尔逊言论中的科学性错误在于他误认为“月球背面永远处于黑暗之中”。月球是因为被地球潮汐锁定而永远只有一面朝向地球，但并不是永远只有一面朝向太阳。我们将看不到地球（在地球上也无法看见）的那一面称作“月球背面”，但月球背面也和正面一样有以 29.53 天为周期的昼夜交替，在大约一半的时间都能被阳光照射。事实上，只要当地球上看到的月相不是满月时，月球背面就存在是白昼的区域。（其他答案言之成理亦可。）

该事件的新闻来源可参见：https://www.msn.com/en-us/news/politics/nasa-administrator-has-no-idea-why-china-is-going-to-far-side-of-moon-that-is-always-in-dark/ar-AA1nEcgs 、 https://www.wral.com/story/china-s-latest-mission-could-reveal-the-secrets-of-the-moon-s-hidden-side/21412842/；知乎讨论可参见：https://www.zhihu.com/question/653971173。