浙江大学 2024-2025 学年秋冬学期期中考试

《 线 性 代 数 H 》

考试时间：<u>120</u> 分钟。

注意事项：

1. 所有题目必须做在答题纸上！
2. 做在试卷上的一律无效！

1-8 题每题 10 分，第 9 题 20 分

1. 解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$$

解

对增广矩阵进行如下初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

根据最后一个矩阵，注意到第 1,3,5 列为主元列，于是容易得到线性方程组的一组特解 γ 和解空间的一组基（基础解系）$\{\eta_1, \eta_2\}$：

$$\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此，线性方程组的解为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \gamma,$$

或

$$\begin{cases} x_1 & = -2k_1 + k_2 + 3, \\ x_2 & = k_1, \\ x_3 & = k_2, \\ x_4 & = -1, \\ x_5 & = 2. \end{cases}$$

□

2. 已知线性空间 V 中 $m(m>1)$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。证明：存在 m 个不全为 0 的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使对 V 中任一向量 β，向量组 $\{\beta,\alpha_1+c_1\beta,\cdots,\alpha_m+c_m\beta\}$ 都线性相关。

证明

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关可知,存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$。由于 $m>1$ 且 k_i 不全为 0，必存在不全为 0 的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得 $c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_mk_m=-1$（事实上，$\mathrm{r}(\{\mathrm{k_1},\mathrm{k_2},\cdots,\mathrm{k_m}\})=\mathrm{r}(\{\mathrm{k_1},\mathrm{k_2},\cdots,\mathrm{k_m},-1\})=1$）。于是对任意的 β，$\beta+k_1(\alpha_1+c_1\beta)+k_2(\alpha_2+c_2\beta)+\cdots+k_m(\alpha_m+c_m\beta)=0$。 □

3. 设 $a\in\mathbb{F}$ 为常数，证明：

$$\{f_1=(a^{n-1},a^{n-2},\cdots,a,1),f_2=(a^{n-2},a^{n-3},\cdots,1,0),\cdots,f_n=(1,0,\cdots,0,0)\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 中的一组基，并求向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在这组基下的坐标。

解

设 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{F}$ 满足 $k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0$。考虑向量第 n 个分量，可得 $k_1=0$；考虑第 $n-1$ 个分量，可得 $k_2=0$；类似地，可得 $k_3=\cdots=k_n=0$。又因为 $\dim\mathbb{F}^n=n$，因此 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 构成了 $\mathbb{F}^n$ 中的一组基。

设向量 α 在这组基下的坐标为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则有 $Ax'=\alpha'$，其中

$$A=\begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1\\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

这是一个非齐次线性方程组，可由初等行变换求出方程组的解：

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 & a_1\\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 0 & a_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 0 & a^{n-2} & \cdots & 1 & a_1-a^{n-1}a_n\\ 0 & a^{n-3} & \cdots & 0 & a_2-a^{n-2}a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}-aa_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1-aa_2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2-aa_3\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}-aa_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}-aa_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2-aa_3\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1-aa_2\end{array}\right)$$

因此，$x=(a_n,a_{n-1}-aa_n,\cdots,a_2-aa_3,a_1-aa_2)$。 □

4. 设

$$W_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$W_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}.$$

证明：$\mathbb{R}^n=W_1\oplus W_2$。

证明

设 $\alpha \in W_1 \bigcap W_2$，则 α 既是第一个线性方程组的解，也是第二个线性方程组的解，不难看出 $\alpha = 0$，从而 $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$。而 W_1 和 W_2 分别是下列线性方程组的解空间：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{1\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

由线性方程组解的定理，不难看出 $\dim W_1 = 1, \dim W_2 = n-1$。因此，

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = 1 + (n-1) = n = \dim \mathbb{R}^n,$$

故 $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$。 □

5. 设 $\mathbb{R}^3$ 中两个子空间为

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\},$$

$$W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1 = (1,2,1), \alpha_2 = (1,1,-1), \alpha_3 = (1,3,3).$$

（1） 求 W_1 的一组基，并将其扩充为 $\mathbb{R}^3$ 中的基；

（2） 分别求出 $W_1 + W_2$ 以及 $W_1 \bigcap W_2$ 的维数及其一组基。

解

（1） 解线性方程组可得 W_1 的一组基 $\{(-1,0,1)\}$。注意到 $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ 与其线性无关，因此得到 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基 $\{(-1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$(答案不唯一)。

（2） $W_1 = L(\{(-1,0,1)\}), W_2 = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$。于是，$W_1 + W_2 = L(\{(-1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\})$，$W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$，且 $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 0$。

□

6. （1） 设 $\alpha_1 = (1,0,0,0,1), \alpha_2 = (1,-1,0,1,0), \alpha_3 = (2,1,1,0,0) \in \mathbb{R}^5, W = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，试求 W 的一组单位正交基；

（2） 在内积空间 $V(\mathbb{R})$ 中两两正交的非零向量组 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 是线性无关的。

解

（1） 根据 Schmidt 正交化方法，可得 W 的一组单位正交基：

$$u_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), u_2 = (\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5}, 0, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}), u_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}).$$

（2） 教材 p80【定理 2.9】

$\square$

7. 设 V 是实数域上二阶矩阵关于矩阵加法和数乘组成的实数域上的线性空间，定义 V 上的变换为

$$\varphi(A)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(a+c)&b+d\\2(a+c)&b+d\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

证明 φ 是 V 上的线性变换，并求 φ 的秩和核空间 $\ker\varphi$ 的维数。

解

$\forall A,B\in V$，根据矩阵乘法的左、右分配律，有

$$\varphi(A+B)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(A+B)\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\varphi(A)+\varphi(B).$$

$\forall c\in\mathbb{R},A\in V$，有

$$\varphi(cA)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}cA\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=c\varphi(A).$$

因此，φ 是 V 上的线性变换。

（1） **方法一：**
选择 V 上的一组基为 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$（$E_{ij}$ 为第 (i,j) 元素为 1，其余元素为 0 的二阶方阵），则可以计算 φ 在这组基下的表示矩阵：

$$(\varphi(E_{11}),\varphi(E_{12}),\varphi(E_{21}),\varphi(E_{22}))=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&1&0&1\\2&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

表示矩阵的秩为 2，因此 $\mathrm{r}(\varphi)=2$。根据维数公式，$\dim(\ker\varphi)=4-2=2$。

（2） **方法二：**
将矩阵看作按行展开的行向量，设 $\bar{\varphi}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上与 φ 定义相同的线性变换，则

$$\bar{\varphi}((a,b,c,d)')=(2(a+c),b+d,2(a+c),b+d)'=\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&1&0&1\\2&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}.$$

于是，$\dim(\ker\varphi)=\dim(\ker\bar{\varphi})$，即上式右端蕴含的齐次线性方程组的解空间的维数。不难得到 $\dim(\ker\varphi)=2$。根据维数公式，$\mathrm{r}(\varphi)=4-2=2$。

$\square$

8. 设 $\sigma,\tau\in L(V,V),\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$。证明：$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$ 的充分必要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$。

证明

由于 σ, τ 均为幂等变换，所以

$$(\sigma+\tau)^2 = \sigma^2+\tau^2+\sigma\tau+\tau\sigma = \sigma+\tau+\sigma\tau+\tau\sigma.$$

充分性显然，下面证明必要性。
若 $(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$，则 $\sigma\tau+\tau\sigma=0$。于是，

$$[\sigma(\sigma\tau+\tau\sigma)\sigma]\tau = [\sigma\tau\sigma+\sigma\tau\sigma]\tau = 2\sigma\tau\sigma\tau = 0,$$

即 $\sigma\tau\sigma\tau=0$。另一方面，

$$\sigma(\sigma\tau+\tau\sigma)\tau = \sigma\tau+\sigma\tau\sigma\tau = 0.$$

故 $\sigma\tau=-\sigma\tau\sigma\tau=0$，从而 $\tau\sigma=-\sigma\tau=0$。 □

9. 下列命题是否正确？若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

（1） 设 V_1, V_2, V_3 是 V 的子空间，则 $V_1\bigcap(V_2+V_3)=V_1\bigcap V_2+V_1\bigcap V_3$。

（2） 设向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但不能由其中任何一个个数小于 m 的部分向量线性表示，则这 m 个向量线性无关。

（3） 若 $\sigma: V\to W$ 是线性映射，且 $\dim V>\dim W$，则 $\ker\sigma\neq\{0\}$。

（4） 存在线性映射 $\sigma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$，使得 $\sigma(1,-1,1)=(1,0), \sigma(1,1,1)=(0,1)$。

解

（1） **错误。**
取 $V=\mathbb{R}^2, V_1=L(\{(1,1)\}), V_2=L(\{(1,0)\}), V_3=L(\{(0,1)\})$，则 $V_1\bigcap(V_2+V_3)=V_1$，而 $V_1\bigcap V_2+V_1\bigcap V_3=\{0\}$，故 $V_1\bigcap(V_2+V_3)\neq V_1\bigcap V_2+V_1\bigcap V_3$。

（2） **正确。**
设 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m=0$。若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，即 $c_i(i=1,2,\cdots,m)$ 不全为 0，不妨设 $c_j\neq 0$。则 α_j 可表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_m$ 的线性组合。而 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$，于是 β 可表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，与题目矛盾。故 c_i 全部为 0，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

（3） **正确。**
设 V 的一组基为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\alpha_i\in\ker\sigma$。根据线性映射的定义，有 $\sigma(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\sigma(\alpha_i)=0$。由于 $\dim V>\dim W$，故 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性相关，所以 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$ 不全为 0，从而 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\alpha_i\neq 0$，即 $\ker\sigma\neq\{0\}$。

（4） **正确。**
假设存在这样的线性映射 σ，则存在一个 2×3 阶的矩阵 A，满足

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} a_{11}-a_{12}+a_{13} &= 1 \\ a_{11}+a_{12}+a_{13} &= 0 \\ a_{21}-a_{22}+a_{23} &= 0 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

上述线性方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩均为 4，因此方程组有解且不唯一。所以符合题意的线性映射存在，且有无穷多个。

若将题目中的“线性映射”改为“线性同构”，则由教材 p111【定理 3.8】可知，这样的线性同构是不存在的。

$\square$