浙江大学 2024-2025 学年春夏学期期中考试

《 线 性 代 数 H 》

考试时间：120 分钟。

姓名：______________ 学号：______________

注意事项：

1. 所有题目必须做在答题纸上！
2. 做在试卷上的一律无效！

1-8 题每题 10 分，第 9 题 20 分

1. 判断下列两条直线

$$L_1:\begin{cases} x &= 2t \\ y &= -3+3t \\ z &= 4t \end{cases}, \quad L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}$$

是否共面？是否相交？如果相交求其交点。

2. 设 U 是 V 的子空间使得 $\dim V/U=1$。证明存在 $\varphi\in\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ 使得 $\mathrm{null}\varphi=U$。

3. 下列 V' 表示线性空间 $V(\mathbb{F})$ 的对偶空间。

（1） 设 $\varphi\in V'$，若 $u\in V$ 不属于 $\mathrm{null}\varphi$。证明 $V=\mathrm{null}\varphi\oplus\{au:a\in\mathbb{F}\}$。

（2） 设 V 是有限维的，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是 V' 的基。证明存在 V 的基使得其对偶基是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$。

4. 设 $p,q\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 为两个无公共零点的非常数多项式，记 $m=\deg p, n=\deg q$。证明存在 $r\in\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ 和 $s\in\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$，使得

$$rp+sq=1.$$

5. 设 V 是有限维的，且 $S,T\in\mathcal{L}(V)$。证明 ST 和 TS 具有相同的特征值。

6. 设 V 是有限维的，$T\in\mathcal{L}(V), p\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 为非常数多项式，$\alpha\in\mathbb{C}$。证明：α 是 $p(T)$ 的特征值，当且仅当 T 有一个特征值 λ 使得 $\alpha=p(\lambda)$。

7. 设 $S\in\mathcal{L}(V)$ 是 V 上的一个单的算子。定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 如下：对 $u,v\in V$，有 $\langle u,v\rangle_1=\langle Su,Sv\rangle$。证明：$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 是 V 上的内积。

8. 设 n 是正整数，$f\in C[-\pi,\pi]$，这里 $C[-\pi,\pi]$ 表示 $[-\pi,\pi]$ 上的实值连续函数构成的向量空间。

（1） 证明

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

是 $C[-\pi,\pi]$ 上的规范正交组，其上的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

（2） 对每个非负整数 k，定义

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

证明

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

9. 下列命题是否正确？若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

（1） 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$，则 φ 或者是满射，或者是零映射。

（2） 设 U 是 V 的子空间。$\Gamma : \mathcal{L}(V/U, W) \to \mathcal{L}(V, W)$ 定义为 $\Gamma(S) = S \circ \pi$，则 $\mathrm{range}\Gamma = \{T \in \mathcal{L}(V, W) : \forall u \in U, Tu = 0\}$。

（3） $\mathbb{R}^2$ 上存在内积使得该内积确定的范数为：$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$，有 $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$。

（4） 设 φ 是 $C[-1, 1]$ 上由 $\varphi(f) = f(0)$ 定义的线性泛函，则存在 $g \in C[-1, 1]$ 使得对每个 $f \in C[-1, 1]$，均有 $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$。其中，$C[-1, 1]$ 上的内积定义为

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

参考答案

1.【解析】直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $S_1=(2,3,4)$ 和 $S_2=(1,1,2)$，显然 S_1 和 S_2 不平行。分别取 L_1 上的点 $P_1=(0,-3,0)$ 和 L_2 上的点 $P_2=(1,-2,2)$，可得

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(S_1\times S_2)=0.$$

因此，两条直线共线且相交。将 L_1 的方程代入 L_2，即

$$\frac{2t-1}{1}=\frac{-1+3t}{1}=\frac{4t-2}{2},$$

可得 $t=0$。于是，交点为 $(0,-3,0)$。

2.【证明】设 $w+U$ 为 V/U 的一组基，从而 $\forall v\in V$，存在唯一的 $a\in\mathbb{F}$，使得 $v+U=a(w+U)=aw+U$。定义映射 $\varphi:V\to\mathbb{F}$，满足 $\varphi(v)=a$，显然 φ 是良定义的。

接下来验证 φ 是线性的。$\forall v_1,v_2\in V$，存在唯一的 $a_1,a_2\in\mathbb{F}$，使得

$$v_1+U=a_1w+U,\quad v_2+U=a_2w+U.$$

从而，$v_1+v_2=(a_1+a_2)w+U$，即

$$\varphi(v_1+v_2)=a_1+a_2=\varphi(v_1)+\varphi(v_2),$$

加性满足。$\forall\lambda\in\mathbb{F}$，有

$$\lambda v_1=\lambda(a_1w+U)=\lambda a_1w+U,$$

从而

$$\varphi(\lambda v_1)=\lambda a_1=\lambda\varphi(v_1),$$

齐性满足。

根据 φ 的定义，$\forall u\in U$，有 $u+U=0w+U$, 因此，$\varphi(u)=0$，即 $u\in\mathrm{null}\varphi$，所以 $U\subset\mathrm{null}\varphi$。另一方面，$\forall v\in\mathrm{null}\varphi$，必有 $v+U=0w+U$，即 $v\in U$，所以 $\mathrm{null}\varphi\subset U$。综上，$\mathrm{null}\varphi=U$。

3.【解析】

（1） 由于 $\varphi(u)\neq0$, 因此 $\varphi(\frac{u}{\varphi(u)})=1$。从而 $\forall v\in V$, $\varphi(v)=\varphi(\frac{\varphi(v)}{\varphi(u)}u)$, 即 $\varphi(v-\frac{\varphi(v)}{\varphi(u)}u)=0$。记 $w=v-\frac{\varphi(v)}{\varphi(u)}u\in\mathrm{null}\varphi$, 于是 $v=w+\frac{\varphi(v)}{\varphi(u)}u\in\mathrm{null}\varphi+\{au:a\in\mathbb{F}\}$。又因为 $u\notin\mathrm{null}(\varphi)$, 所以 $\mathrm{null}(\varphi)\bigcap\{au:a\in\mathbb{F}\}=\{0\}$。综上，$V=\mathrm{null}\varphi\oplus\{au:a\in\mathbb{F}\}$。

（2） 这里给出两种证明方法。

（a）方法 **1:**

因为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\neq0$，由 (1) 结论可得，存在 $u_1,\cdots,u_n\in V$，使得

$$V=\mathrm{null}\varphi_1\oplus\{au_1:a\in\mathbb{F}\}=\cdots=\mathrm{null}\varphi_n\oplus\{au_n:a\in\mathbb{F}\}.$$

接下来证明 $u_1,\cdots,u_n$ 是线性无关的，从而构成了 V 的一组基。假设 $u_1,\cdots,u_n$ 是线性相关的，则存在一组不全为 0 的 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{F}$，使得

$$a_1u_1+\cdots+a_nu_n=0.$$

不失一般性，不妨设 $a_1 \neq 0$，上式两边同时施加 φ_1，则有

$$a_2\varphi_1(u_2) + \cdots + a_n\varphi_1(u_n) = -a_1\varphi_1(u_1) \neq 0,$$

从而必存在 $k \in \{2, \cdots, n\}$，使得 $\varphi_1(u_k) \neq 0$。又因为 $\varphi_k(u_k) \neq 0$，容易验证 φ_1 和 φ_k 是线性相关的，与题目条件矛盾，因此 $u_1, \cdots, u_n$ 是线性无关的。由线性无关性可以进一步得到，$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, j \neq k, u_k \in \mathrm{null}\varphi_j$。

$\forall k \in \{1, \cdots, n\}$，定义 $v_k = \dfrac{u_k}{\varphi_k(u_k)}$，从而有

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

综上，$v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基，且其对偶基是 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$。

（b）方法 **2：**

$\forall k \in \{1, \cdots, n\}$，定义

$$U_k = \bigcap \{\mathrm{null}\varphi_j : j \in \{1, \cdots, n\} \backslash \{k\}\}.$$

于是，$\dim U_k = \dim V - (n-1) = 1$，从而存在 $u_k \neq 0$，使得 $U_k = \mathrm{span}(u_k)$，并且注意到

$$\mathrm{null}\varphi_1 \bigcap \cdots \bigcap \mathrm{null}\varphi_n = \{0\}.$$

由于 $u_k \neq 0$，从而 $u_k \notin \mathrm{null}\varphi_k$。定义 $v_k = \dfrac{u_k}{\varphi_k(u_k)}$，从而有 $\varphi_k(u_k) = 1$，以及 $\varphi_j(u_k) = 0, j \neq k$。

设存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

对上式两边同时施加 φ_j，可得 $a_j = 0$。于是，$v_1, \cdots, v_n$ 线性无关，从而构成了 V 的一组基。由于

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases},$$

因此 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基，且其对偶基是 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$。

4.【证明】由于 p, q 为非常数多项式，所以 $m, n \geqslant 1$。设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为 p 的零点，$\mu_1, \cdots, \mu_n$ 为 q 的零点。由于 p, q 没有公共零点，所以 $p(\mu_j) \neq 0, q(\lambda_k) \neq 0, \forall j, k$。

定义 $T : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}_{m+n-1}(\mathbb{C})$：

$$T(r, s) = rp + sq.$$

容易验证 T 是线性映射。若存在 $(r, s) \in \mathrm{null}T$，即 $rp + sq = 0$，则 $\forall j \in \{1, \cdots, n\}, k \in \{1, \cdots, m\}$，有

$$r(\mu_j)p(\mu_j) + s(\mu_j)q(\mu_j) = r(\mu_j)p(\mu_j) = 0 \implies r(\mu_j) = 0,$$

$$r(\lambda_k)p(\lambda_k) + s(\lambda_k)q(\lambda_k) = s(\lambda_k)q(\lambda_k) = 0 \implies s(\lambda_k) = 0.$$

又因为 $r \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}), s \in \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$，故 r 最多有 $n-1$ 个零点，s 最多有 $m-1$ 个零点。因此，$r=s=0$，即 $\operatorname{null}T=\{0\}$，所以 T 是单射。又因为

$$\dim \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C}) = \dim \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) + \dim \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C}) = n+m = \dim \mathcal{P}_{m+n-1}(\mathbb{C}),$$

所以 $\dim \operatorname{range}T = \dim \mathcal{P}_{m+n-1}(\mathbb{C})$，即 T 是满射。故存在 $r \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ 和 $s \in \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$，使得

$$rp + sq = 1.$$

5.【证明】设 λ 是 ST 的特征值。若 $\lambda = 0$，当且仅当 ST 不可逆，当且仅当 TS 不可逆，当且仅当 TS 具有零特征值。

假设 $\lambda \neq 0$，v 是 ST 关于 λ 的特征向量，即 $STv = \lambda v$。由于 $\lambda \neq 0, v \neq 0$，从而 $Tv \neq 0$。注意到

$$(TS)(Tv) = T(STv) = T(\lambda v) = \lambda Tv,$$

从而 λ 也是 TS 的特征值。类似可得 TS 的特征值也是 ST 的特征值。综上，ST 和 TS 具有相同的特征值。

6.【证明】充分性：若 λ 是 T 的特征值，则存在 $v \neq 0$ 满足 $Tv = \lambda v$。于是，$p(T)v = p(\lambda)v = \alpha v$，即 α 是 $p(T)$ 的特征值。

必要性：设 α 是 $p(T)$ 的一个特征值，则存在 $v \neq 0$，满足 $p(T)v = \alpha v$。定义多项式 $q(z) := p(z) - \alpha$，由于 $\deg p \geqslant 1$，从而 $\deg q \geqslant 1$，故存在分解：

$$q(z) = c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m),$$

其中，$c \neq 0, m \geqslant 1$。注意到 $q(T)v = (p(T) - \alpha I)v = 0$，即

$$c(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_m I)v = 0.$$

于是，必然存在 $k \in \{1, \cdots, m\}$，使得 $T - \lambda_k I$ 不是单射，即 λ_k 是 T 的一个特征值。进一步，$p(\lambda_k) = q(\lambda_k) + \alpha = \alpha$。

7.【证明】正定性：$\forall v \in V$，$\langle v, v\rangle_1 = \langle Sv, Sv\rangle \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $Sv = 0$。由于 S 是单射，因此等价于 $v = 0$。

第一个位置的加性：$\forall u, v, w \in V$，注意到

$$\langle u+v, w\rangle_1 = \langle S(u+v), Sw\rangle = \langle Su, Sw\rangle + \langle Sv, Sw\rangle = \langle u, w\rangle_1 + \langle v, w\rangle_1.$$

第一个位置的齐性：$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F}$，注意到

$$\langle \lambda u, v\rangle_1 = \langle S(\lambda u), Sv\rangle = \lambda\langle Su, Sv\rangle = \lambda\langle u, v\rangle_1.$$

共轭对称性：$\forall u, v \in V$，注意到

$$\langle u, v\rangle_1 = \langle Su, Sv\rangle = \overline{\langle Sv, Su\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle_1}.$$

综上，$\langle \cdot, \cdot\rangle_1$ 是 V 上的内积。

8.【证明】

（1） $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}=1,$$

$$\langle\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}dx=1,$$

$$\langle\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}dx=1,$$

$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}dx=0,$$

$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}dx=0.$$

$\forall j,k\in\{1,\cdots,n\},j\neq k$，有

$$\langle\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos{(j+k)x}+\cos{(j-k)x}dx=0,$$

$$\langle\frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos{(j-k)x}-\cos{(j+k)x}dx=0.$$

最后，$\forall j,k\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$\langle\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}dx=0.$$

综上，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

是 $C[-\pi,\pi]$ 上的规范正交组。

（2） $\forall k\geqslant 1$，

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\sqrt{2}\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle,$$

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos{(kx)}dx=\langle f,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\rangle,$$

$$b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin{(kx)}dx=\langle f,\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\rangle.$$

由 (1) 结论，$\forall n\geqslant 1$，有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\|f\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2.$$

根据单调收敛定理，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ 是一个收敛级数。对上式两边同时取极限，可得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2.$$

9.【解析】

（1） 正确。

若 $\varphi \neq 0$，则存在 $u \in V$，使得 $\varphi(u) \neq 0$，从而有 $\varphi(\dfrac{u}{\varphi(u)}) = 1$。于是，$\forall a \in \mathbb{F}$，有

$$\varphi(\frac{a}{\varphi(u)}u) = a,$$

即 φ 是满射。

（2） 正确。

$\forall T \in \mathrm{range}\mathit{\Gamma}$,存在 $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$,使得 $T = S \circ \pi$。于是,$\forall u \in U$,$Tu = (S \circ \pi)u = S(0) = 0$。反之，$\forall T \in \{T \in \mathcal{L}(V, W) : \forall u \in U, Tu = 0\}$，定义 $S : V/U \to W, S(v+U) = Tv$。容易验证 S 是良定义的，并且 S 的线性可以由 T 的线性得到。由 S 的定义可知，$T = S \circ \pi$，即 $T \in \mathrm{range}\mathit{\Gamma}$。综上，$\mathrm{range}\mathit{\Gamma} = \{T \in \mathcal{L}(V, W) : \forall u \in U, Tu = 0\}$。

（3） 错误。

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < |x| < |y|$，考虑向量 $u = (x, y)$ 和 $v = (-x, y)$。于是，

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 4y^2 + 4x^2 \neq 4y^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

即不满足平行四边形恒等式。因此，$\|\cdot\|$ 不是一个范数。

（4） 错误。

假设存在这样的 g，定义 $f(x) = x^2 g(x)$，于是

$$0 = f(0) = \varphi(f) = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} [xg(x)]^2 dx,$$

从而 $\forall x \in [-1, 1], xg(x) = 0$ 恒成立，即 $g(x) = 0, \forall x \in [-1, 1] \backslash \{0\}$。由 $g(x)$ 的连续性，可知 $g \equiv 0, \forall x \in [-1, 1]$。所以，$\forall f \in C[-1, 1]$，

$$f(0) = \varphi(f) = \langle f, g \rangle = 0,$$

显然不成立。因此，不存在这样的 g。