2024-2025 学年秋冬学期线性代数 I（H）

linko

January 2025

一、已知 $(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$, 且满足

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 2a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

当 a 为多少时方程有解？写出有解时方程组的通解

二、已知 $t\in R$, 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -t & -2\\ -t & 1 & t\\ -2 & t & 9\end{pmatrix}$$

问当 t 为多少时，A:

(1) 正定

(2) 半正定

(3) 不定, 且问此时 A 的正负惯性系数分别是多少

三、已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

(实在不记得数据了，不过原题的数据比较恶心，求出来的逆矩阵很丑，要做好心理准备)

求 $|A|$ 与 A 的逆矩阵

四、设 V 是所有系数为实数、次数不超过 2 的多项式按一般的多项式加法、实数乘法构成的线性空间

$$W=\{p(x)|p(x)\in V,p(1)=0\}$$

(1) 求证：W 是线性空间

(2) 求 W 的维数和 W 的一组基

(3) 求出 σ 满足：σ 是 $V \to W$ 的线性映射, 满足 $\sigma^2 = \sigma$，且 $\sigma(1) = 0$

五、F 是一个数域，$A \in F^{n\times n}, \beta \in F^n$，且满足 $A^n\beta = 0$, 但 $A^{n-1}\beta \neq 0$

(1) 求证：$\beta, A\beta, ...A^{n-1}\beta$ 是 F^n 的一组基

(2) 求证：$A^n = 0$

(3) 设 $W = \{\alpha | \alpha \in F^n, A\alpha = 0\}$，求 W 的维数

六、定义映射 $T : R^4 \to R^3$ 使得:$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3, -x_2 + 2x_3 - x_4, x_1 - x_3 + 2x_4)$

(1) 证明:T 是线性映射, 求出 T 的像空间和核

(2) 求 T 关于自然基的矩阵 A

(3) 设 r 是 T 的秩，E_r 是 r 阶单位矩阵，求出可逆矩阵 P, Q 使得

$$PA = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

七、A 是 n 阶矩阵，$n \geq 3$,A 不是对称矩阵，$r(A) = 2$

(1) 求证:$\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R^n$, 使 $A = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T$

(2) 写出 A 可对角化的一个充分条件

(3) 写出 A 可对角化的一个必要条件

八、判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定

(1) 若向量 α_1 与 α_2 线性相关，β_1 与 β_2 线性相关，则 $\alpha_1 + \beta_1$ 与 $\alpha_2 + \beta_2$ 线性相关

(2) 若 A 为实对称矩阵,$A^2 = 0$, 则 $A = 0$

(3) 若 A 为复对称矩阵,$A^2 = 0$, 则 $A = 0$

(4)V 是一个线性空间,σ 是一个 $V \to V$ 的线性映射，U 为 σ 的像空间,W 为 σ 的核, 则 $V = U + W$