2024 级数学分析甲 II(H) 第一次小测

Record: grapesea

2025 年 3 月 27 日

Multiple-Choice: 单项选择；Multiple-Answer: 多项选择

1. Multiple-Choice (10 Points)

对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \ln n}{n} x^n$，下述叙述正确的有（B）.

A. 其收敛半径为 2.

B. 其在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 上一致收敛.

C. 其收敛域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

D. 其在 $(0, \frac{1}{2})$ 上一致收敛.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n \ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= 2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 2$$

故收敛半径为 $\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n} > \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 散

$x=-\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 敛.

故收敛域 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

D. 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上：$\forall$ 充分大 $N>0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2e^2}$，$n=[N]+1$，$p=n$，$x=\frac{1-\frac{1}{n}}{2}$

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{2^{n+k}\ln(n+k)}{n+k}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{2}\right)^{n+k}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{\ln(n+k)}{n+k}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+k}$$

$$>\frac{\ln N}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N} = \frac{\ln N}{2e^2} \geqslant \frac{1}{2e^2}$$

（不太确定是否有疏漏）

2. Multiple-Answer (10 Points)

下述级数中收敛的有（CD）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ ×

B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$ ×

C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ✓

D. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(e-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ ✓

A. $\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{4n}}\left(\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{4n}}\left(1+\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n}\right)+1+\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n}\right)-\sqrt{2}\right)$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

与 $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ 敛散性同，故发散.

B. 由调和级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n+\gamma+\varepsilon_n$ 知

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{\frac{1}{n\ln n}}=1$ 与 $\sum\frac{1}{n\ln n}$ 同发散.

C. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

与 $\sum\frac{1}{n^2}$ 同收敛

D. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!}$ $\theta\in(0,1)$

代入 $x=1$ 知 $e-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)\cdot n}$ 必收敛.

或，由换序的方法可算出是 1.

3. Multiple-Choice (10 Points)

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x^{2025}}\mathrm{d}x$ (1) 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n^3\pi}{1+n^2}$ (2)，则（ C ）

A. 级数 (1),(2) 均条件收敛

B. 级数 (1) 条件收敛，而级数 (2) 绝对收敛

C. 级数 (1) 绝对收敛，而级数 (2) 条件收敛

D. 级数 (1),(2) 均绝对收敛

(1) $0<\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x^{2025}}dx$

$<\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin x\,dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{n}}$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}2\sin^2\frac{\pi}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{(\frac{\pi}{n})^2}=2$

故原级数与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 敛散性同，故绝对收敛

(2) $\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$

$=\sin(n\pi-\frac{n\pi}{n^2+1})$

$=(-1)^{n-1}\sin\frac{n\pi}{n^2+1}$

1° $0<\frac{n\pi}{n^2+1}\leq\frac{\pi}{2}$，且 $n\uparrow$，$\frac{n\pi}{n^2+1}\downarrow$，$\sin\frac{n\pi}{n^2+1}\downarrow$，$\to 0$

故由 Leibniz，收敛.

2° 对 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n\pi}{n^2+1}$

由 $\sin\frac{n\pi}{n^2+1}\sim\frac{n\pi}{n^2+1}\sim\frac{\pi}{n}$ $(n\to+\infty)$ 知条件收敛.

4. Multiple-Choice (10 Points)

设对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$a_n > 0$。且满足级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛。记 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$，则下述论述错误的有（ D ）.

A. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 必收敛 ✓

B. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 必收敛 ✓

C. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$ 必收敛 ✓

D. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ 必收敛 ✗.

A. $\sum a_n$ 正项，则 $\exists N$，$\forall n > N$，$\sqrt{n}\ln n > 1$

则 $\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n} < a_n$ 由比较判别知收敛.

B. Cauchy 不等式 $\left(\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)^2 \le \underbrace{\sum a_n}_{敛} \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{敛}$

故原级数收敛.

C. $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}} = \sum\left(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right) = \sqrt{r_1} - \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{r_n} = \sqrt{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k}$ 敛.

D. 取 $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$，则 $\sqrt{\frac{a_n}{n}} = \frac{1}{n\ln n}$ 散.

5. Multiple-Answer (10 Points)

下述命题中正确的有（BC）

A. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x^n)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

B. 函数列 $\{nx(1-x)^n\}$ 在 $[0,1]$ 上点态收敛，但非一致收敛

C. 设对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+, f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。若对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+, x_n\in[0,1]$ 且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$，以及 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则有 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$

D. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^3x}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛

A. $\lim_{n\to+\infty} x^n(1-x^n) = 0 \quad x\in[0,1]$.

取 $x=(1-\frac{1}{n})$，则 $\sup|x^n(1-x^n)| \geq (1-\frac{1}{n})^n\cdot[1-(1-\frac{1}{n})^n] \to \frac{1}{e}\cdot(1-\frac{1}{e}) > 0$.

则不一致收敛

B. $x=0$ 或 1 显然收敛.

取定 $x=x_0$ $a_n = nx(1-x)^n$，则 $\sum a_n$ 是差比数列构成的数项级数

$\sum a_n = x(1-x)\cdot\left(\underbrace{\sum n(1-x)^{n-1}}\right)$

是 $(0,1)$ 上内闭一致收敛的，故可积，$\triangleq f$

$\int f\,dx = \sum(-1)(1-x)^n = \frac{-(1-x)}{1-(1-x)} = 1-\frac{1}{x}$

则 $f = (\frac{-1}{x}+1)' = \frac{1}{x^2}$ 故点态收敛于 $\frac{1}{x^2}$.

$\lim_{n\to+\infty}(nx(1-x)^n) = 0$

$\sup|nx(1-x)^n| > 0$，因为只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有 $nx(1-x)^n = n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{n-1}+1)^n} = \frac{1}{e}$

故不一致收敛

C. $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in\mathbb{Z}_+$ 当 $n>N_1$ 时

对 $\forall x\in[0,1]$，$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 对上述 δ，$\exists N_2\in\mathbb{Z}_+$，$n>N_2$，$|x_n-x_0|<\delta$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时 $|f_n(x_n)-f(x_0)| \leq \underbrace{|f_n(x_n)-f(x_n)|}_{\text{一致收敛 } <\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_n)-f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$

$<\varepsilon$.

因此命题得证.

D. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1+n^3x} = 0 \quad \sup\left|\frac{n}{1+n^3x}\right| \to +\infty$ 只要取 $x=\frac{1}{n^3}\to 0$.

6. Multiple-Choice (10 Points)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+(n+1)!}$ 的和为（ C ）.

A. $2e-1$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $2e-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{n!+(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)\cdot n!}$$

$$= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) = \frac{1}{2}$.

7. Multiple-Answer(10 Points)

下述命题中正确的有（ABD）

A. 对 $\forall x\in(0,2\pi)$，有：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$

xhm.
P89：Gibbs现象
P104.5

B. 设对 $\forall n\in\mathbb{Z}^{+}$，$u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(0)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(1)$ 都绝对收敛，则：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛且一致收敛

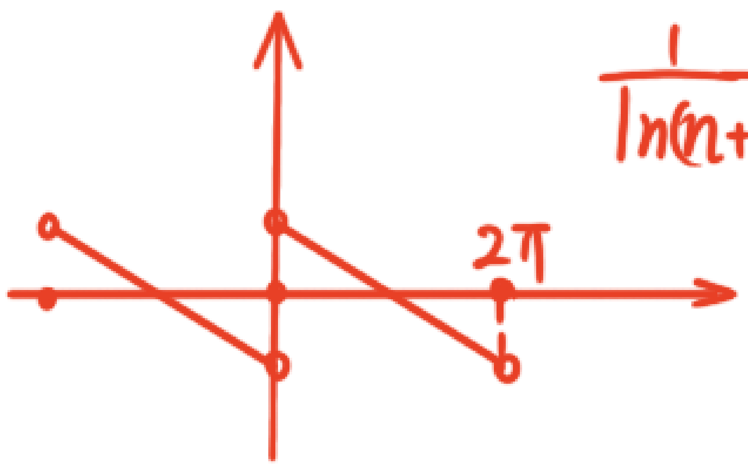
xhm
P64.5(1)

C. 幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ 的收敛域为：$\cancel{[}(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是发散的正项级数，则有：存在收敛于 0 的正数数列 $\{b_n\}$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 发散

$\frac{1}{n+1}$.　　$\frac{1}{\ln(n+1)}$

A. 对右边奇延拓后周期延拓.



$a_0=0\quad a_n\equiv 0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\int_0^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$

$=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{n\pi}t\sin t\,dt=-\frac{1}{n}[(-1)^n-1]-\frac{1}{n^2\pi}(\sin t-t\cos t)\Big|_0^{n\pi}$

$=\frac{1-(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}=\frac{1}{n}$　故原式成立.

B. $u_n(x)\le\max(u_n(0),u_n(1))$，构造 $a_n=\max\{u_n(0),u_n(1)\}$

则 $\sum a_n$ 敛

由优级数判别 $\sum u_n(x)$ 也一致收敛且绝对收敛.

C. $\lim\limits_{n\to+\infty}[(1+\frac{1}{n})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}=e$.　故 $r=\frac{1}{e}$

当 $x=-\frac{1}{e}$ 时　$\sum(1+\frac{1}{n})^{n^2}(-\frac{1}{e})^n=\sum[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{-e}]^n$

$=(-1)^n(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e})^n$　是↑. $\to1$，不符 Leibniz 判别

D. 取 $a_n=\frac{1}{n+1}$　$b_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ 显然是发散. 由积分判别法.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 敛散性同　$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t}$　发散

8. Multiple-Choice (10 Points)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ x^2, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ 的 Fourier 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$，$S(x)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$ 的和函数，则 $S(\frac{7}{2})=$ (D)

$T=2$.

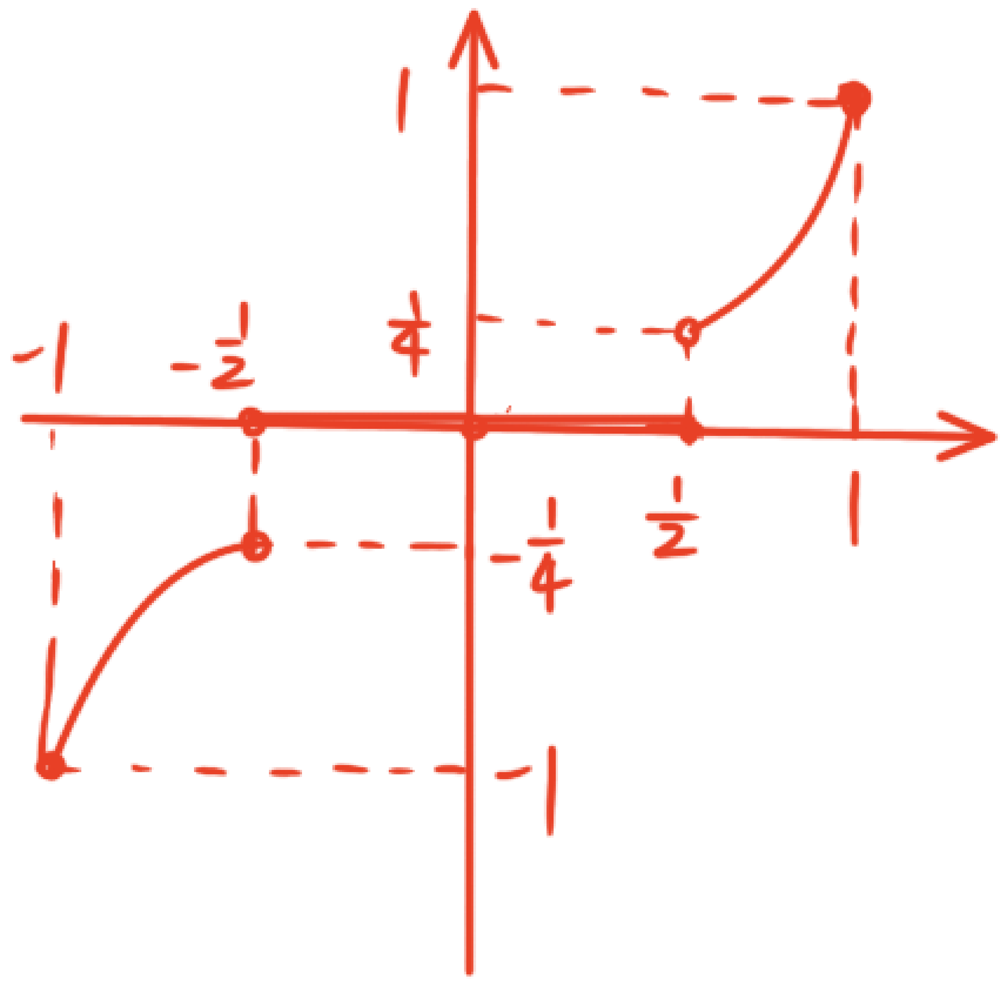
A. $\frac{1}{8}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{8}$

对 $f(x)$ 奇延拓得 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & -1\le x\le -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ x^2 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$



周期为 2.

则 $S(\frac{7}{2}) = S(-\frac{1}{2}) = \dfrac{f(-\frac{1}{2}+0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}$

$= -\frac{1}{8}$ (收敛定理)

9. Multiple-Choice (10 Points)

以下命题正确的是（ B ）.

A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $[0, \pi)$ 上内闭一致收敛

B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $(0, \pi]$ 上内闭一致收敛

C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $[0, \pi]$ 上一致收敛

D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上某个连续函数的 Fourier 级数

ABC. 考虑说明在 0 的右邻域内非一致收敛：

对 $\forall N_0 \in \mathbb{Z}_+$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，$n = N_0$，取 $p = N_0$，$x = \frac{\pi}{4N_0}$，则 $\frac{\pi}{4} < \frac{(N_0+1)\pi}{4N_0} \le (N_0+k)x \le \frac{\pi}{2}$

则 $\sum_{k=1}^{N_0} \frac{\sin(N_0+k)x}{\sqrt{N_0+k}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{\sqrt{N_0+k}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot N_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2N_0}}$ 故 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(N_0+k)x \le 1$

$= \frac{\sqrt{N_0}}{2} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$

这表明 $x \to 0^+$ 时不一致收敛.

D. 运用 Parseval 恒等式

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad a_n = 0$.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{发散}}$ 故不是某连续函数的 Fourier 展开式.

10. Multiple-Choice (10 Points)

对于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$，以下命题正确的是（D）

A. 无法判定该级数的敛散性

B. 该级数发散

C. 该级数绝对收敛

D. 该级数条件收敛

1° 收敛 √ （Leibniz）

2° 非绝对收敛，因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

所以与 $\sum \frac{1}{n}$ 同发散

故条件收敛.