

2024 级数学分析甲 II(H) 第一次小测

Record: grapesea

2025 年 3 月 27 日

Multiple-Choice: 单项选择; Multiple-Answer: 多项选择
--

1. Multiple-Choice (10 Points)

对于幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \ln n}{n} x^n$, 下述叙述正确的有 ()

- A. 其收敛半径为 2.
- B. 其在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 上一致收敛.
- C. 其收敛域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- D. 其在 $(0, \frac{1}{2})$ 上一致收敛.

2. Multiple-Answer (10 Points)

下述级数中收敛的有 ()

A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$

B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)}$

C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$

D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$

3. Multiple-Choice (10 Points)

已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^{2025}} dx$ (1) 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{1+n^2}$ (2), 则 ()

- A. 级数 (1),(2) 均条件收敛
- B. 级数 (1) 条件收敛, 而级数 (2) 绝对收敛
- C. 级数 (1) 绝对收敛, 而级数 (2) 条件收敛
- D. 级数 (1),(2) 均绝对收敛

4. Multiple-Choice (10 Points)

设对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n > 0$ 。且满足级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛。记 $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, 则下述论述错误的有 ()

- A. 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n} \ln n}$ 必收敛
- B. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 必收敛
- C. 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}$ 必收敛
- D. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ 必收敛

5. Multiple-Answer (10 Points)

下述命题中正确的有 ()

- A. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x^n)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛
- B. 函数列 $\{nx(1-x)^n\}$ 在 $[0, 1]$ 上点态收敛, 但非一致收敛
- C. 设对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。若对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, x_n \in [0, 1]$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, 以及 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$
- D. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^3x}$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛

6. Multiple-Choice (10 Points)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + (n+1)!}$ 的和为 ()

A. $2e - 1$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $2e - \frac{1}{2}$

7. Multiple-Answer(10 Points)

下述命题中正确的有 ()

A. 对 $\forall x \in (0, 2\pi)$, 有: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$

B. 设对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1)$ 都绝对收敛, 则: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛

C. 幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$ 的收敛域为: $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

D. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是发散的正项级数, 则有: 存在收敛于 0 的正数数列 $\{b_n\}$, 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 发散

8. Multiple-Choice (10 Points)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ 的 Fourier 级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$, $S(x)$ 是级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$ 的和函数, 则 $S(\frac{7}{2}) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{8}$
- B. $-\frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $-\frac{1}{8}$

9. Multiple-Choice (10 Points)

以下命题正确的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $[0, \pi)$ 上内闭一致收敛
- B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $(0, \pi]$ 上内闭一致收敛
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $[0, \pi]$ 上一致收敛
- D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上某个连续函数的 Fourier 级数

10. Multiple-Choice (10 Points)

对于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ ，以下命题正确的是（ ）

- A. 无法判定该级数的敛散性
- B. 该级数发散
- C. 该级数绝对收敛
- D. 该级数条件收敛