1. 解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 2x_3 + 10x_4 = 4 \end{cases}$$

解：

利用初等行变换将线性方程组的增广矩阵化为行最简形，具体过程如下：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 14 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 x_3, x_4 为自由未知量，分别令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

于是方程组的通解为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意实数。}$$

2. 设在线性空间V(F)中，向量β是$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$的线性组合，但不是$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}\}$的线性组合，证明：$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta)$.

解：

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1} + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

$k_r \neq 0$（否则，与已知矛盾），

则 $$\boldsymbol{\alpha}_r = k_r^{-1}(\boldsymbol{\beta} - k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为等价向量组，所以，

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r) = L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}).$$

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一个n维向量空间组($r \geq 2$)，且向量组在向量组$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_r$，$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_r,\cdots,\beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{r-1}$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关的充分必要条件是$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关

解：

$$\beta_1 + \beta_2, + \cdots + \beta_r = (r-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2, + \cdots + \beta_r)$$

对于任意α_i，i=1,2,⋯,r，上式两侧同时减去β_i，

则有

$$\alpha_i = \frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2, + \cdots + \beta_r) - \beta_i$$

因此

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}\text{（同构）}.$$

$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$和$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$二者秩数相同，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关当且仅当$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

4. 设$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,0,1)\in\mathbb{R}^3$

(1)求α_1,α_2的夹角.

(2)用Schmidt正交化方法将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$化为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基.

(3)求$\mu=(3,1,2)$在这组基下的坐标。

解:

(1) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) 先$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$化为$\mathbb{R}^3$的一组正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

之后将正交基β_1,β_2,β_3标准化

$$r_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$r_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$r_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

r_1,r_2,r_3即为所求.

(3) $\mu=(3,1,2)$在基r_1,r_2,r_3下的坐标为$(2\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

5. $\mathbb{R}^4$的子空间W_1和W_2为:

$$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$$
$$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$$

(1)求W_1的基，并扩充为$\mathbb{R}^4$的基.

(2)分别求出W_1+W_2和$W_1\cap W_2$的基和维数.

解:

(1) 根据W_1的定义，可得W_1的一组基$e_1=(1,1,0,0)$，$e_2=(1,0,-1,0)$，$e_3=(1,0,0,1)$.

令$e_4=(1,0,0,0)$，可验证，e_1,e_2,e_3,e_4线性无关，可为$\mathbb{R}^4$的一组基.

(2) W_1+W_2:

根据W_2的定义，可得W_2的一组基$\alpha_1=(1,-1,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,-1,0)$，$\alpha_3=(1,0,0,-1)$.

$$W_1+W_2=L\{e_1,e_2,e_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\mathbb{R}^4$$

因此W_1+W_2的基可为e_1,e_2,e_3,e_4，dim(W_1+W_2)=4.

$W_1 \cap W_2$:

根据$W_1 \cap W_2$的定义，得到以下线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} x_1= \quad x_3 \\ x_2=-x_4 \end{cases}$$

因此$W_1 \cap W_2$的一组基为β_1=(1,0,1,0),β_2=(0,1,0,-1)，dim($W_1 \cap W_2$)=2.

6. 证明：$\{1,x-2,(x-2)^2\}$是$\mathbb{R}[x]_3$的一组基，并求$f(x)=a+bx+cx^2$关于这组基的坐标.

解 设
$$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0,$$
$$k_1+k_2(x-2)+k_3(x-2)^2=0(\text{零多项式}),$$

$$\begin{cases} k_1-2k_2+4k_3=0, \\ k_2-4k_3=0, \\ k_3=0. \end{cases}$$

方程组只有零解，所以，$1,(x-2),(x-2)^2$线性无关. 又因为 $\dim R[x]_3$

$\{1,(x-2),(x-2)^2\}$是$R[x]_3$的一组基.

设
$$f(x)=k_4f_1+k_5f_2+k_6f_3,$$

$$\begin{cases} k_4-2k_5+4k_6=a, \\ k_5-4k_6=b, \\ k_6=c. \end{cases}$$

方程组的解
$$\begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+2b+4c \\ b+4c \\ c \end{bmatrix}$$

是$f(x)$关于基$\{1,(x-2),(x-2)^2\}$的坐标.

7. 设V是实数域上的2×2矩阵关于矩阵加法和数乘所构成的实数域上的线性空间，定义V上的变换$\sigma(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} a+b & b-c \\ a+c & 0 \end{bmatrix}$，证明σ是V上的线性变换，并求σ的核Kerσ及其维数和像Imσ和σ的秩.

解:

设

$$\forall A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2},\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

则σ满足加法封闭性

$$\begin{aligned}
&\sigma(A+B) \\
&=\sigma(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}) \\
&=\begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & (b_1+b_2)-(c_1+c_2) \\ (a_1+a_2)+(c_1+c_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & b_1-c_1 \\ a_1+c_1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2+b_2 & b_2-c_2 \\ a_2+c_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$=\sigma(A)+\sigma(A)$

且σ满足数乘封闭性

$$
\begin{aligned}
&\sigma(\lambda A)\\
&=\sigma(\begin{bmatrix}\lambda a_1 & \lambda b_1\\ \lambda c_1 & \lambda d_1\end{bmatrix})\\
&=\begin{bmatrix}\lambda a_1+\lambda b_1 & \lambda b_1-\lambda c_1\\ \lambda a_1+\lambda c_1 & 0\end{bmatrix}\\
&=\lambda\sigma(A)
\end{aligned}
$$

因此σ是V上的线性变换.

根据核空间定义，对$\forall A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\in \mathrm{Ker}(\sigma)$，有$\sigma(A)=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & b_1-c_1\\ a_1+c_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，即

$$
\begin{cases}a_1+b_1=0\\ b_1-c_1=0\\ a_1+c_1=0\end{cases}
$$

解方程组得

$$
\begin{cases}a_1=-c_1\\ b_1=\ \ c_1\end{cases}
$$

因此$\mathrm{Ker}(\sigma)=L\{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\}$，$\dim(\mathrm{Ker}(\sigma))=2$.

根据像空间定义，$\mathrm{Im}\sigma=L\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\}=L\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\}$，σ的秩$r(\sigma)=\dim(\mathrm{Im}(\sigma))=2$.

8. 设$\mathbb{R}[x]_3=\{a+bx+cx^2|a,b,c\in\mathbb{R}\}$,λ是待定常数,σ是$\mathbb{R}[x]_3$上的线性变换,$\sigma(p(x))=x^2p''(x)+1$,求所有可能的$f(x)\in\mathbb{R}[x]_3$满足$\sigma(f(x))=\lambda f(x)$及相应的待定常数λ.

解:本题证明出σ不是$\mathbb{R}[x]_3$上的线性变换,或用$\sigma(p(x))=x^2p''(x)+1$计算出所有可能的$f(x)\in\mathbb{R}[x]_3$使满足$\sigma(f(x))=\lambda f(x)$及相应的待定常数λ都算对。

9. 下列命题是否正确？若正确，请证明；若不正确，请给出反例或证明.

(1)$V_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4|x_1=x_4,x_2+x_3=0\}$是$\mathbb{R}^4$的子空间.

解：正确。需说明a.单位元(0,0,0,0)属于空间V_1；b.加法满足封闭性；c.数乘满足封闭性.

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$都是n维实向量，且$(\alpha_i,\beta_j)=0\ (i=1,2,\ldots s,\ j=1,2,\ldots,t)$，则$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}+r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}\le n$.

解：正确。

根据$(\alpha_i,\beta_j)=0$可得到，$L\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}\subseteq L^{\perp}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$，

因此$r(L\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\})\le r(L^{\perp}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\})$，

由正交补空间性质可知$r(L^{\perp}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\})=n-r(L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\})$，

因此$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}+r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}\le n$成立.

(3)若σ：V→ W是线性映射，且dimV>dimW，则σ的核为0.

解：错误。详解参考A卷9(3)题.

(4)存在$\mathbb{R}^2$上的线性变换，使得该变换分别将(0,1),(0,-1),(3,2)映射为(0,1),(2,0),(-4,2).

解：错误。

反正法，若存在$\mathbb{R}^2$上的线性变换σ满足上述映射，则应满足$\sigma((0,1)+(0,-1))=\sigma((0,1))+\sigma((0,-1))$，而左式$=\sigma((0,0))=(0,0)$，右式$=(0,1)+(2,0)$，左式$\neq$右式，矛盾，故不存在满足上述条件的线性变换$\sigma$.