

## 期末测试参考答案

### (1) [ 3 points ]

答案: C

解析: 由题意, EAST 托卡马克装置实现了离子温度  $T = 10^8 \text{ K}$  (一亿度) 的等离子体运行, 等离子体内的离子主要为氘离子 (其质量为  $m_D \approx 2m_p = 3.35 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ), 且满足麦克斯韦分布。直接代入麦克斯韦分布下粒子平均速度的公式可得

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_D}} = 1.02 \times 10^6 \text{ m/s}$$

量级上最接近  $10^6 \text{ m/s}$ , 选 C。

### (2) [ 3 points ]

答案: C

解析: 本题要求找出所描述的四个过程中哪些被热力学第一定律所禁止。注意热力学第一定律本质是能量守恒定律, 要和热力学第二定律(熵增加原理)区别开来, 分析这四个过程:

i) 一块冰投入热咖啡, 冰块变冷而咖啡变热: 即热量自发地从低温物体传给高温物体, 违反热力学第二定律 (克劳修斯表述), 无法实现, 但不一定违反热力学第一定律;

ii) 冷水被倒进冷杯子里, 水和杯子都变冷: 相当于系统凭空损失了内能, 违反热力学第一定律, 无法实现;

iii) 制造一种汽车发动机收集冰融化成水所释放的能量做功: 相当于完全从一个热源吸收热量并将它们变为有用功, 违反热力学第二定律 (开尔文表述), 无法实现, 但不一定违反热力学第一定律;

iv) 用二氧化碳气体的膨胀来获得干冰: 气体凝华成固体本身应该是一个需要放热的过程, 而气体膨胀则是一个需要对外做功的过程, 这两个过程都会导致气体内能的减少, 因此系统凭空损失了内能, 违反热力学第一定律, 无法实现 (事实上, 要想让气体凝华应该压缩它而不是使其膨胀)。

综上, 共有两项违反热力学第一定律, 选 C。

### (3) [ 3 points ]

答案: D

解析: 右侧绳被剪断瞬间, 由于左侧悬点 (记为 A 点) 的速度与加速度为零, 细棒 (看做刚体) 可以认为是在绕 A 点作定轴转动, 即 A 点为速度瞬心。设其长度为  $2L$ 、左侧绳中的张力为  $T$ , 再设该瞬间的质心加速度为  $a_c$ 、角加速度为  $\alpha$ , 根据质心运动定理 (以竖直向下为正方向) 和质心转动定理 (以质心 C 点为转轴), 可列出

$$\sum F_y = mg - T = ma_c$$

$$\sum \tau_c = TL = I_C \alpha$$

其中  $I_C = \frac{1}{12}m(2L)^2 = \frac{1}{3}mL^2$  为细棒绕质心的转动惯量, 还要注意  $a_c$  与  $\alpha$  之间满足  $a_c = L\alpha$

的运动学关系 (由  $v_c = L\omega$  求导而来)。以上联立解得  $T = \frac{1}{4}g$ , 选 D。

本题也可以取速度瞬心 A 点作为转动定理的转轴, 这样转动定理的表达式变为  $\sum \tau_A = mgL = I_A \alpha$ ,

其中  $I_C = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$  为细棒绕 A 点的转动惯量, 这样也能解出完全相同的结果。

#### (4) [ 3 points ]

答案: A

解析: 由题意可知, 当海水深度足够深时, 海面上的水波其角频率  $\omega$  与波长  $\lambda$  之间的关系为  $\omega^2 \lambda = 2\pi g$ 。根据波长与波数的关系  $\lambda = 2\pi/k$ , 可以写出角频率  $\omega$  与波数  $k$  之间的关系 (即色散关系) 为  $\omega = \sqrt{gk}$ 。因此水波的相速度为

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

水波的群速度为

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

故水波相速度和群速度之比为  $u_{ph}/u_g = 2$ , 选 A。

水面波虽然是常见的自然现象, 但对它进行分析还是稍复杂的。这主要是因为水作为液体不易压缩 (和空气不同), 水中质元的水平方向振动可以同时带动周围质元的水平和竖直方向振动, 这导致最终形成的水波既有纵波的成分又有横波的成分。如果水面到水底的深度  $h$  远大于水波的波长  $\lambda$ , 这被称为“深水波”, 其水面附近的质元几乎在作圆振动, 横波的成分非常显著; 如果水面到水底的深度  $h$  远小于水波的波长  $\lambda$ , 这被称为“浅水波”, 其水面附近的质元作较扁的椭圆振动, 整体主要呈现纵波。浅水波是无色散的 (其色散关系为  $\omega = k\sqrt{gh_0}$ , 可见  $\omega$  与  $k$  呈现线性关系, 其中  $h_0$  为平衡位置的水深), 而深水波是有色散的 (其色散关系为  $\omega = \sqrt{gk}$ , 可见  $\omega$  与  $k$  呈现非线性关系) ——无色散波的轮廓是正弦曲线, 但有色散的波的轮廓便不再是正弦曲线了, 波峰会变成尖角, 形成了我们在大海里看到的泛白的波尖, 正如我们在本题右侧的插画中看到的樣子。此外, 如果水波的波长较大, 表面张力对水波的影响也不能忽略, 此时色散关系变为  $\omega = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$  (其中  $\gamma$  和  $\rho$  分别表示水的表面张力系数和水的密度)。

#### (5) [ 3 points ]

答案: E

解析: 热机循环过程的效率定义为对外做功与从高温热源吸热之比, 而卡诺循环的效率以及向低温热源放出的热量 (绝对值) 分别为

$$\eta = 1 - T_c/T_h$$

$$Q' = nRT_c \ln(V_c/V_D)$$

其中  $T_h$  与  $T_c$  分别为高温热源和低温热源的温度。因此可以判断：高温和低温热源的温度差异越大，卡诺循环的效率  $\eta$  越高；低温热源的温度越低、等温过程前后的体积变化比例 ( $V_c/V_D$ ) 越小，则放出的热量  $Q'$  就越少。从图中可明显发现循环 2 的高温 and 低温热源温度差异比循环 1 更大、低温热源温度更低、等温过程前后的体积变化比例更小，故循环 2 的效率更高 ( $\eta_1 < \eta_2$ )、向低温热源的放热更少 ( $Q'_1 > Q'_2$ )，选 E。

## (6) [ 3 points ]

答案： D

解析： 以项链整体为研究对象利用动量定理。设项链的线密度为  $\lambda$ ，由于项链的已下落部分只受自身重力作用、未下落部分受自身重力以及桌面支持力作用（两者平衡），故项链整体所受的合外力相当于只有已下落部分的重力。设已下落部分的长度为  $y$ 、速度为  $v$ ，注意未下落部分认为保持静止，列出动量定理

$$\lambda y g dt = d(\lambda y v)$$

整理得（可以将  $yv$  看作一个整体）

$$yg = \frac{d(yv)}{dt}$$

两边同乘  $y dy$ ，并注意到  $v = dy/dt$ ，有

$$gy^2 dy = yv d(yv)$$

两边积分（利用  $t=0$  时  $v=0$  且  $y=0$ ）

$$\int_0^y gy^2 dy = \int_0^{yv} yv d(yv) \implies \frac{1}{3} gy^3 = \frac{1}{2} y^2 v^2$$

整理得到

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} gy} = \frac{dy}{dt}$$

其实到这里已经可以发现这是一个加速度  $a = \frac{1}{3}g$  的匀加速直线运动了。也可以再进行积分

得到  $y(t)$  的表达式为

$$\int_0^t dt = \int_0^y \sqrt{\frac{3}{2gy}} dy \implies y(t) = \frac{1}{6} gt^2$$

选 D。

上面的积分方法需要用到一些数学技巧。事实上，该题作为选择题，还可以走捷径——通过题目中给的五个选项判断该运动一定是一个匀加速直线运动，需要求的只是加速度  $a$  的值，故只需要在写出动量定理表达式  $yg = \frac{d(yv)}{dt} = v \frac{dy}{dt} + \frac{dv}{dt} y = v^2 + ay$  后直接将匀加速直线运动的通用表达式  $y(t) = \frac{at^2}{2}$  与  $v(t) = at$  代入比对，即可快速得到答案。——题中也给出了这样的提示。（当然这个题还可以出得更有趣一些，例如首先利用量纲分析来猜测结果的表达式形式，然后再确定其中的具体参数。）

可能有些同学利用机械能守恒，错解出答案为 C。错误的原因在于这个过程其实机械能并不守恒，已经开始运动的项链部分“带动”原本静止的项链部分开始以共速运动的这个过程本质上类似于一个完全非弹性碰撞的过程，所以会持续不断地存在机械能的损失。

**(7) [ 5 points ]**

**答案:**  $v_B = v_A \frac{a}{b}$   $a_B = v_A^2 \frac{a^2 + b^2}{b^3}$

**解析:** 滑块 A 的速度向右、滑块 B 的速度向上，但两者沿杆方向的速度分量相等，写出

$$v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$$

解得滑块 B 的速度为（利用  $\tan \theta = b/a$  的几何关系）

$$v_B = \frac{v_A}{\tan \theta} = v_A \frac{a}{b}$$

而滑块 B 的加速度为（利用  $da/dt = -v_A$  与  $db/dt = v_B$ ）

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = v_A \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{b} \right) = -v_A \frac{bv_A + av_B}{b^2}$$

再将  $v_B = v_A \frac{a}{b}$  代入，最终得到  $a_B = -v_A^2 \frac{a^2 + b^2}{b^3}$ ，则加速度大小为  $v_A^2 \frac{a^2 + b^2}{b^3}$ 。

**(8) [ 5 points ]**

**答案:** (a)  $v = 18.0 \text{ cm/s}$  (b) No.

**解析:** (a) 血管的横截面积与有效直径的平方成正比，故根据流体连续性方程可列出

$$vd^2 = v'd'^2$$

易得出血管未变窄处的血液平均流速为  $v = 18.0 \text{ cm/s}$ 。

(b) 取因受到硬斑块阻塞导致血管变狭窄处的有效直径  $d' = 3.00 \text{ mm}$  作为流体特征长度，计算血液流动的雷诺数为

$$R = \frac{\rho v' d'}{\eta} = 525$$

这远小于题中给出的临界雷诺数 2000，故流动依然呈现层流，不会发生湍流。

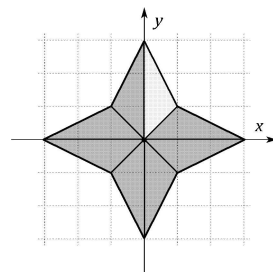
尽管如此，我们也可以直观感受到——血管若是越被阻塞，使管径越细，局部血液流速越快，雷诺数就会越大，湍流就越有可能发生（与此同时，血管阻塞也会导致流阻增大，使血液压强被迫升高来维持正常的血流量，这也是高血压的成因之一）。层流通常是无声的，但湍流却通常伴随着噪声。不管是像这道题中描述的动脉或静脉部分堵塞所可能导致的湍流，还是心脏瓣膜的启、闭所可能导致的湍流，都可能发出杂音（后者被称为“心音”）。血液循环中的湍流通常是对人体有害的，但在听诊时湍流往往能起到作用。

**(9) [ 5 points ]**

**答案:** (a)  $I_O = 28\sigma d^4$  (b)  $T = \left(\frac{10}{3}\right)^{3/2} \pi \left(\frac{d}{g}\right)^{1/2}$

**解析:** (a) 根据几何对称性可知，本题中的四芒星形“原石”挂坠，可以被划分为如图所示的 8 个一模一样的小三角形。因此，根据转动惯量的可叠加性，只要求出其中任何一个小三角形部分绕 O 点的转动惯量  $I'_O$ ，就可以求出整体绕 O 点的转动惯量  $I_O$ 。

以图中高亮的小三角形部分为例，它可以看作是区间  $0 \leq x \leq d$  上，直线  $y = x$  与直线  $y = -2x + 3d$  之间所夹的区域。注意到对于均



匀的平板有  $dm = \sigma dx dy$ ，故根据转动惯量的定义可以计算出这个小三角形部分绕 O 点的转动惯量为（需要用到二重积分）

$$\begin{aligned} I'_O &= \int r^2 dm = \sigma \int_0^d \int_x^{-2x+3d} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \sigma \int_0^d (-6x^3 + 15x^2 d - 18xd^2 + 9d^3) dx = \frac{7}{2} \sigma d^4 \end{aligned}$$

所以挂坠整体绕 O 点的转动惯量为

$$I_O = 8I'_O = 28\sigma d^4$$

(b) 将该挂坠用轻绳悬吊起来成为复摆，注意悬点 P 点与挂坠的中心点 O 点（显然也是质心位置）之间的距离  $l = 9d$ 。此外还可以得知挂坠的总面积为  $12d^2$ （当然也能用二重积分求出，但最简单的方法是直接在图里数格子），故总质量  $m = 12\sigma d^2$ 。

首先利用平行轴定理将转轴从 O 点移动到 P 点，得知该挂坠绕 P 点的转动惯量为

$$I_P = I_O + ml^2 = 1000\sigma d^4$$

再根据复摆的周期公式，解得其作小角度摆动时的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_P}{mgl}} = \frac{10}{3} \pi \sqrt{\frac{10d}{3g}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{3/2} \pi \left(\frac{d}{g}\right)^{1/2}$$

#### (10) [ 3 points ]

答案：  $v = 6.00 \text{ m/s}$

解析： 由题意可知，发射器最初发射的超声波频率为  $f = 30000 \text{ Hz}$ 。该超声波被一艘接近中的潜艇反射，设潜艇接近速率为  $v$ ，根据多普勒效应公式，潜艇接收到的超声波频率为

$$f' = \frac{c_s + v}{c_s} f$$

而潜艇发射（反射）的超声波频率等于它所接收到的超声波频率。反射波再被发射器（或任何一个静止的观察者）所接收到时，频率为

$$f'' = \frac{c_s}{c_s - v} f' = \frac{c_s + v}{c_s - v} f$$

这个反射波的频率显然大于初始波。此时反射波与初始波形成  $f_{\text{beat}} = |f'' - f| = 241 \text{ Hz}$  的拍频，故可知反射波的频率为  $f'' = 30241 \text{ Hz}$ ，并解出潜艇的接近速度为  $v = 6.00 \text{ m/s}$ 。

#### (11) [ 3 points ]

答案：  $T = 318 \text{ K}$

解析： 设银丝和铁丝达到热平衡时的温度为  $T$ ，则它们之间的热量交换满足

$$Q = m_{\text{Ag}} c_{\text{Ag}} (T - 200 \text{ K}) = m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}} (400 \text{ K} - T)$$

进一步有（根据银丝和铁丝横截面积相同且初始等长，故初始体积相等，将初始体积记作  $V$ ）

$$Q = \rho_{\text{Ag}} c_{\text{Ag}} V (T - 200 \text{ K}) = \rho_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}} V (400 \text{ K} - T)$$

整理得

$$\frac{T - 200 \text{ K}}{400 \text{ K} - T} = \frac{\rho_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{Ag}} c_{\text{Ag}}} = 1.45$$

故解得达到平衡态后的温度为  $T = 318 \text{ K}$ 。

这道题中，如果进一步知道银和铁各自的热膨胀系数，以及银丝和铁丝的直径  $d$ ，还能求出最终所形成圆弧的半径  $R$  来，所列出的方程为

$$\frac{R - d/2}{R + d/2} = \frac{1 - \alpha_{\text{Fe}}(400 \text{ K} - T)}{1 + \alpha_{\text{Ag}}(T - 200 \text{ K})}$$

此处取银丝和铁丝的中轴线作为各自计算热膨胀的基准。

## (12) [ 5 points ]

答案： (a)  $v' = \frac{15}{17}c$  (b)  $M_0 = \frac{3}{2}\sqrt{6}m_0$

解析： (a) 以 A 粒子速度方向为正方向，在静系（实验室参考系）中测得 A 粒子速度为  $v_A = 3c/5$ 、B 粒子速度  $v_B = -3c/5$ 。则不妨以 A 粒子观察 B 粒子为例求两粒子相对速度，此时牵连速度  $u = v_A = 3c/5$ 。由洛伦兹速度变换公式，求得 A 粒子观察到 B 粒子的速度为

$$v'_B = \frac{v_B - u}{1 - uv_B/c^2} = -\frac{15}{17}c$$

因此两粒子之间的相对速度为  $v' = \frac{15}{17}c$ 。（也可以以 B 粒子观察 A 粒子求解，结果一致。）

(b) 两粒子碰撞后合成新粒子，设新粒子静质量为  $M_0$ 、动量为  $P$ 、总能量为  $E$ ，该过程无能量损失，则根据动量与能量的守恒有（其中  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (3/5)^2} = 5/4$ ）

$$P = p_A + p_B = m_0\gamma\frac{3c}{5} - 2m_0\gamma\frac{3c}{5} = -\frac{3}{4}m_0c$$

$$E = \sqrt{P^2c^2 + M_0^2c^4} = m_0\gamma c^2 + 2m_0\gamma c^2 = \frac{15}{4}m_0c^2$$

因此解得新粒子的静质量为  $M_0 = \frac{3}{2}\sqrt{6}m_0$ 。

## (13) [ 10 points ]

解： (a) 据题意，该房间的温度为  $T = -20^\circ\text{C} = 253 \text{ K}$ 。空气的主要组分是 4/5 的氮气（ $\text{N}_2$ ）和 1/5 的氧气（ $\text{O}_2$ ），故空气可按双原子分子的气体处理（ $\gamma = 7/5$ ），摩尔质量为  $M_{\text{air}} = (4/5)M_{\text{N}_2} + (1/5)M_{\text{O}_2} = 28.8 \text{ g/mol}$ （或接近  $29 \text{ g/mol}$ ）。则根据题中给出的公式，直接计算该房间内空气中的声速为

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 320 \text{ m/s}$$

(b) 听者发现自己所处的位置声音最强，无论超哪个方向迈步都会导致声音变弱，说明他所处的位置正是一个干涉叠加后相长的位置，故两个扬声器发出的声波波程之差应当是波长的整数倍，即

$$\Delta L = \sqrt{(9.60 \text{ m})^2 + (5.00 \text{ m})^2} - (9.80 \text{ m}) = 1.22 \text{ m} = n\lambda = \frac{nc_s}{f}$$

故声波的频率为

$$f = n \frac{c_s}{\Delta L}$$

在人耳可听的频率范围内 ( 20 ~ 20000 Hz ),  $n$  最低可取  $n=1$ , 计算出声波的最低可能频率

$$f_1 = \frac{c_s}{\Delta L} = 262 \text{ Hz}; n \text{ 次低可取 } n=2, \text{ 计算出声波第二低的可能频率 } f_2 = 2 \frac{c_s}{\Delta L} = 525 \text{ Hz}。$$

本题第一问涉及到声波的传播速度, 题中给出了公式, 但它其实也很容易推导——这里需要利用一点: 声波的传播是一个绝热过程 ( 因为声音的传播很快, 空气来不及与外界空气交换热量 )。牛顿曾经误认为声波的传播是一个等温过程, 这导致他计算出的声速明显变小。

根据我们已经学习到的声波波速公式, 可以写出

$$c_s = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}$$

将空气视作理想气体, 根据理想气体状态方程  $pV = nRT$ , 变形则有  $p = \rho RT/M$ 。根据绝热过程中满足  $pV^\gamma = \text{常量}$ , 即  $p\rho^{-\gamma} = \text{常量}$ , 进而可推出  $T\rho^{1-\gamma} = \text{常量}$ , 因此

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = \frac{\gamma RT}{M}$$

即可求出空气中的声速为  $c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ 。

#### (14) [ 10 points ]

**解:** (a) 设平衡时弹簧的伸长量为  $x_0$ , 则写出力矩平衡方程为 ( 转轴 O 点为参考点, 以顺时针方向为正方向 )

$$\sum \tau_O = mgl/2 - kx_0 l = 0$$

解出平衡时弹簧的伸长量  $x_0 = \frac{mg}{2k}$ 。

(b) 当该 L 形尺绕其转轴有一微小角位移  $\theta$  时, 合力矩会使其产生一个角加速度  $\ddot{\theta}$ , 即 ( 同样以转轴 O 点为参考点, 以顺时针方向为正方向 )

$$\sum \tau_O = mg(l/2)\cos\theta - 2mg(2l/2)\sin\theta - k(x_0 + \Delta x)l = I_O \ddot{\theta}$$

其中  $I_O$  是 L 形尺绕 O 点的转动惯量,  $I_O = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{3}(2m)(2l)^2 = 3ml^2$ 。当  $\theta$  很小时, 可近

似取  $\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1$  以及  $\Delta x = l\theta$ , 再代入  $x_0 = mg/2k$ 。有

$$\sum \tau_O = -2mgl\theta - kl^2\theta = I_O \ddot{\theta}$$

整理得

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2mgl + kl^2}{I_O}\right)\theta = 0$$

符合简谐运动的微分方程形式  $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ , 因此这个运动是一个简谐振动。

(c) 该简谐振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgl + kl^2}{I_O}} = \sqrt{\frac{2mg + kl}{3ml}}$$

故周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3ml}{2mg + kl}}$$

### (15) [ 12 points ]

**解：** (a) 甲烷 ( $\text{CH}_4$ ) 为多原子分子气体，故取自由度  $i = 6$ ，则  $\gamma = 4/3$ 。气体的等体摩尔热容  $c_V = iR/2 = 3R$ 、等压摩尔热容  $c_p = (i + 2)R/2 = 4R$ ，则：

对 A→B 等体过程，做功  $W_{AB} = 0$ 、内能变化  $\Delta E_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = 3nR(T_B - T_A)$ ，故热交换  $Q_{AB} = 3nR(T_B - T_A)$  (放热)；

对 B→C 绝热过程，热交换  $Q_{BC} = 0$ ，内能变化  $\Delta E_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = 3nR(T_C - T_B)$ ，故做功  $W_{BC} = -3nR(T_C - T_B)$  (对外界做功)；

对 C→A 等压过程，做功  $W_{CA} = p_C(V_A - V_C) = nR(T_A - T_C)$  (对气体做功)，内能变化  $\Delta E_{CA} = nc_p(T_A - T_C) = 4nR(T_A - T_C)$ ，故热交换  $Q_{CA} = 3nR(T_A - T_C)$  (放热)。

综上，整个循环的总做功  $W = nR(T_A - T_C) - 3nR(T_C - T_B) = nR(T_A + 3T_B - 4T_C)$ ，总吸热  $Q = 3nR(T_B - T_A)$ ，则总效率为

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{nR(T_A + 3T_B - 4T_C)}{3nR(T_B - T_A)} = \frac{T_A + 3T_B - 4T_C}{3T_B - 3T_A}$$

利用  $T_A/T_C = V_A/V_C = 1/3$  (等压)、 $T_B/T_C = (V_B/V_C)^{1-\gamma} = (1/3)^{-1/3}$  (绝热)，解得  $\eta = 19.8\%$ 。

(b) 易得出甲烷的摩尔质量  $M_{\text{CH}_4} = 16 \text{ g/mol}$ ，故总摩尔数  $n = m/M_{\text{CH}_4} = 90.0 \text{ mol}$ ，则：

对 A→B 等体过程，熵变  $\Delta S_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{c_V dT}{T} = 3nR \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 4nR \ln 3 = 3.29 \text{ kJ/K}$ ；

对 B→C 绝热过程，熵变  $\Delta S_{BC} = 0$ ；

对 C→A 等压过程，熵变  $\Delta S_{CA} = \int_{T_C}^{T_A} \frac{c_p dT}{T} = 4nR \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = -4nR \ln 3 = -3.29 \text{ kJ/K}$ 。

也可以根据循环过程必须满足整个过程的总熵变  $\Delta S = 0$ ，只需要先计算出  $\Delta S_{CA}$ ，再通过 B→C 绝热过程判断出  $\Delta S_{BC} = 0$ ，便可快速得出  $\Delta S_{AB} = -\Delta S_{CA}$ 。

(c) 不妨先计算状态 C 处气体的温度，根据理想气体状态方程  $pV = nRT$ ，直接解出

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 286 \text{ K}$$

再根据 B→C 绝热过程满足  $T_B/T_C = (V_B/V_C)^{1-\gamma} = (1/3)^{-1/3}$ ，计算出状态 B 处气体温度为

$$T_B = T_C (1/3)^{-1/3} = 412 \text{ K}$$

### (16) [ 12 points ]

**解：** (a) 首先分析从杆自水平位置从静止释放直至恰好到达竖直位置 (碰撞前时刻) 这一过程，设杆到达竖直位置时的角速度为  $\omega_0$ ，则根据机械能守恒有

$$\frac{mgl}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} ml^2 \right) \omega_0^2$$



解得  $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$  (显然为逆时针), 其中已经利用了杆绕悬点的转动惯量  $I_{\text{rod}} = \frac{1}{3}ml^2$ 。

此时, 杆与球发生完全弹性碰撞, 满足机械能和角动量 (以悬挂点为转轴) 的守恒。由于杆恰好摆到垂直位置后与球发生碰撞, 且杆与球的碰撞位置恰好在与球心等高度处, 则该碰撞只给球提供了一个质心速度  $v_1$ , 未提供角速度, 碰后球在光滑轨道上作纯滑动 (没有滚动)。设碰撞后杆获得的角速度为  $\omega$  (假定为顺时针), 列出碰撞过程的机械能和角动量守恒

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega_0^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega_0 &= -\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega + mv_1l\end{aligned}$$

解得碰后球获得的质心速度  $v_1$  大小为  $v_1 = \frac{\sqrt{3gl}}{2}$ , 方向向右。

(b) 当球滑动一段距离进入粗糙轨道后, 它受到向左的滑动摩擦力  $f = \mu mg$  作用, 这一方面使球减速, 另一方面给球提供了开始滚动的力矩。分别利用质心运动定理和转动定理

$$\begin{aligned}\sum F &= -\mu mg = ma \implies a = -\mu g \implies v(t) = v_1 - \mu gt \\ \sum \tau &= \mu mgr = I\alpha \implies \alpha = \frac{5\mu g}{2r} \implies \omega(t) = \frac{5\mu g}{2r}t\end{aligned}$$

以上已经利用了球绕质心的转动惯量  $I = \frac{2}{5}mr^2$ , 直到满足纯滚动条件  $v = \omega r$  后球进入纯滚动状态, 质心速度和角速度不再改变, 此时的质心速度为  $v_2$ , 联立解得当经历时间  $t = \frac{2v_1}{7\mu g}$

后达到纯滚动, 质心速度的大小为  $v_2 = \frac{5}{7}v_1 = \frac{5}{14}\sqrt{3gl}$ , 方向向右。

(c) 当球达到纯滚动后突然与竖直墙壁发生完全弹性碰撞, 墙壁给球的冲量也是通过质心的。因此碰撞后瞬间质心速度将反向 ( $v'_2 = -v_2$ ), 但角速度仍维持  $\omega_2 = v_2/r$  不变。之后, 球继续在粗糙轨道上受到滑动摩擦力  $f = \mu mg$  的作用, 但这时的摩擦力是向右的。同理有

$$\begin{aligned}\sum F &= \mu mg = ma \implies a = \mu g \implies v(t) = -v_2 + \mu gt \\ \sum \tau &= -\mu mgr = I\alpha \implies \alpha = -\frac{5\mu g}{2r} \implies \omega(t) = \frac{v_2}{r} - \frac{5\mu g}{2r}t\end{aligned}$$

直到再次满足纯滚动条件  $v = \omega r$  后球再次进入纯滚动状态, 质心速度和角速度不再改变, 此时的质心速度为  $v_3$ 。联立解得当再经历时间  $t = \frac{4v_2}{7\mu g}$  后再次达到纯滚动, 则  $v_3 = -\frac{3}{7}v_2$ ,

故质心速度的大小为  $v_3 = \frac{3}{7}v_2 = \frac{15}{49}v_1 = \frac{15}{98}\sqrt{3gl}$ , 方向向左。

### (17) [ 12 points ]

解: (a) Alice 看到的火车长度为

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} = 0.80L_0 = 160 \text{ m}$$

而 Bob 所看到的隧道长度也是这么长。

(b) 不妨将 Alice 所在的地面系记作 S 系, Bob 所在的火车系记作 S' 系。在 S 系中, 将火车中点与隧道中点重合的时刻记作时间零点  $t = 0$ , 将此时的隧道中点记作坐标零点  $x = 0$ , 并以火车前进方向为正方向, 那么隧道入口闸门和出口闸门的位置分别为  $x_1 = -100 \text{ m}$  与  $x_2 = +100 \text{ m}$ , 而“关闭入口闸门”和“关闭出口闸门”发生的时间均为  $t_1 = t_2 = 0$ 。

利用洛伦兹变换, 求得在 S' 系中“关闭隧道入口闸门”这一事件发生的时间

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = +75/c = +2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

以及在 S' 系中“关闭隧道出口闸门”这一事件发生的时间

$$t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -75/c = -2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

因此在 S' 系中两件事不是同时发生的, 隧道出口闸门比入口闸门要提前关闭, 时间差为  $\Delta t' = t'_1 - t'_2 = 5.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ 。

(c) Alice 的做法可以将火车完全封闭在隧道内。从地面上 (Alice) 看来, 火车比隧道短, 那么在合适时刻同时关闭两道闸门当然能将火车完全封闭在隧道内, 此后火车头撞向出口处闸门并停下, 而尚未撞上闸门的火车尾端依然在隧道中行驶, 此时便将整列火车完全封闭在了隧道中。在火车上 (Bob) 看来, 尽管火车变得比隧道更长, 但是出口处闸门关闭得更早, 火车头会提前撞上出口处闸门而停下, 而此时入口处闸门还没有关闭, 火车尾端依然来得及在入口处闸门关闭前驶入隧道, 直到入口处闸门关闭后整列火车都被封闭在隧道中。两个参考系里的结果没有矛盾, 实际结局相同。(此外, 当 Bob 所乘坐的车厢被迫停下时, 他便和 Alice 处在相同的参考系里了。)

以上的描述都是定性的, 我们也可以进行定量的计算。在 Bob 看来, 隧道出口闸门关闭的时间为  $t'_2 = -2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$ , 则此时火车头的位置为  $x'_{\text{head}} = L_0/2 + vt'_2 = +55 \text{ m}$ 、而隧道出口的位置为  $x'_2 = +80 \text{ m}$ , 所以隧道出口闸门关闭时火车头距离隧道出口还有  $25 \text{ m}$ ; 同理可得, Bob 所看到的隧道入口闸门关闭的时间为  $t'_1 = +2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$ , 此时火车尾已经位于  $x'_{\text{tail}} = -L_0/2 + vt'_1 = -55 \text{ m}$  处, 而隧道入口的位置为  $x'_1 = -80 \text{ m}$ , 所以隧道入口闸门关闭时火车尾已经进入隧道  $25 \text{ m}$ ——所以, 火车确实可以完全进入隧道并被封闭在隧道内。

(d) **(Bonus)** 我们无法将火车作为刚体看待, 因为刚体模型在狭义相对论中会产生矛盾——刚体模型要求物体不产生形变, 这本质是要求固体内弹性波的速度能达到无穷大, 从而将刚体一端的运动瞬时传导到另一端, 这违背了狭义相对论中“光速是信息传递的速度上限”这一结论。(如果举一个例子, 假设有一根一光年长的棒子, 如果认为它是刚体, 则要求推动其中一端则另一端立刻感知到该运动, 这个信息的传递速度需要远超光速, 这是与相对论的理论体系不兼容的。)

其他答案言之有理亦可。