数学分析（甲）II（H）2024-2025 春夏期末

Alarm5854 整理自：https://www.cc98.org/topic/6212811

2025 年 6 月 25 日

1. (10 分) 叙述二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的定义, 并使用可微的定义证明函数
$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处可微。

2. (40 分) 计算
   (a) 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+ze^z=2\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切线。
   (b) 计算 $I_1=\iint_D|y-x^2|\,dx\,dy$，其中 $D=[-1,1]\times[0,2]$
   (c) 计算 $I_2=\int_C(-2xe^{-x^2}\sin y)\,dx+(e^{-x^2}\cos y+x)\,dy$，其中曲线 C 为平面上的上半单位圆周 $y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$，取逆时针为正方向。
   (d) 计算 $I_3=\iint_S(x^2-x)\,dy\,dz+(y^2-y)\,dz\,dx+(z^2+1)\,dx\,dy$, 其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1,z\geq 0$, 取上侧为正方向。
   (e) 计算 $I_4=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

3. (10 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $D=(0,1)\times(0,1)$ 上，若 $f'_y(x,y)$ 在 D 内处处存在且有界，以及对固定的 y，$f(x,y)$ 关于 x 连续，证明：$f(x,y)$ 在 D 内连续。

4. (10 分) 考察方向导数与条件极值，题目想不起来了，暂空。

5. (10 分) 已知 $f(x)=1+x$，且有 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx),x\in[0,\pi]$，请计算极限 $\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}$。

6. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，令 $f_1(x)=f(x),x\in[0,1]$，且 $f_{n+1}(x)=\int_x^1 f_n(t)\,dt,\forall n\in\mathbb{Z}^+,x\in[0,1]$ 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

7. (10 分) 设 $a_n>0,n\in\mathbb{Z}^+$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，其余项 $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k,n\in\mathbb{N}$。证明：
   (a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散。
   (b) 对 $\forall p>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^{p-1}}$ 收敛。