说明

本答案仅仅是个人的理解，可能存在不恰当的地方，请大家批判吸收。(经过实际检验其实只有 97% 的准确/doge)

答案

1 A falling string

(a)
通过题目意思，我们知道末端应该是自由下落的，所以

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

(b)
重力是保守力，支持力不是保守力；
重力做功仅与初末位置有关，而支持力其在某个位置的大小并不固定（对于同一物体取决于物体做的运动加速度大小，对于不同物体更是不同)，故重力是保守力而支持力不是保守力。
(c)

$$N = N_1 + N_2 \tag{2}$$

其中 N_1 代表对静止部分的支持力，N_2 代表由于运动部分的冲击带来的冲击力；

$$N_1 = \lambda hg \tag{3}$$

$$N_2 = \frac{dP}{dt} \tag{4}$$

$$dP = dm \cdot v = \lambda v dt \cdot v \tag{5}$$

$$N_2 = \lambda v^2; \tag{6}$$

所以我们就得到了

$$N = N_1 + N_2 = 3\lambda hg \tag{7}$$

参考给分：4+8+13

2 Rod hinged to a massive pulley

(a)
由于滑轮视作实心圆柱，我们将他分为一个个空心圆柱壳，再积分就可以得到实心圆柱的转动惯量。显然每个空心圆柱壳绕中心轴旋转的转动惯量为

$$I_r = \rho L \cdot 2\pi r \cdot r^2 dr \tag{1}$$

式中 L 是圆柱的长度，r 是该空心圆柱壳的半径，ρ 是圆柱的密度。将一个个空心圆柱壳积起来就是实心圆柱，并注意到

$$\rho L \cdot \pi {R_P}^2 = M_P \tag{2}$$

故有

$$I_P = \int_0^{R_P} \rho L \cdot 2\pi r \cdot r^2 \, dr = \frac{1}{2} M_P {R_P}^2 \tag{3}$$

(b)
设杆的线密度为 λ, 以过某一端的轴为转轴，其转动惯量可写作

$$I_R = \int_0^L \lambda r^2 \, dr \tag{4}$$

并注意到

$$M_R = \lambda L \tag{5}$$

故有

$$I_R = \frac{1}{3} M_R L^3 \tag{6}$$

(c)
设物块 A 的加速度为 a_A，正方向向下；设左边绳子上的张力为 T_A，右边的绳子张力为 T_B；滑轮的角加速度为 β_P，正方向为逆时针；设杆绕轴转动的角加速度为 β_R 正方向为顺时针。(注意上述正方向的选取其实是随意的，算出来是负值说明与正方向相反即可)
对物块 A 进行受力分析有

$$M_A g - T_A = M_A a_A \tag{7}$$

对滑轮进行受力分析有

$$T_A - T_B = I_P \beta_P \tag{8}$$

对杆 B 列出转动定律有

$$T_B L - M_R g \frac{L}{2} = I_R \beta_R \tag{9}$$

又由无滑动条件和同一根绳上的加速度关联有

$$\beta_B L = a_B = \beta_P R_P = a_A \tag{10}$$

联立解得（可以用卡西欧的解多元方程组，把数据带进去直接就出来了）

$$a_T = a_B = 5.67 m/s^2 \tag{11}$$

解出来是正数说明方向向上
(d)
B 做圆周运动，故其向心加速度为

$$a_R = \omega^2 L = 9.8 m/s^2 \tag{12}$$

方向向右
参考给分 3+3+15+4

3 Coupled harmonic oscillators

(a)
设物块 1 向右的位移为 x_1, 物块 2 向右的位移为 x_2, 则有

$$k(x_2 - x_1) = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \tag{1}$$

$$k(x_1 - x_2) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \tag{2}$$

(b)
关于 x_{10},x_{20} 的方程组如下

$$\begin{cases} \frac{k}{m_2}(x_{20} - x_{10}) + \omega^2 x_1 0 = 0 \\ \frac{k}{m_1}(x_{10} - x_{20}) + \omega^2 x_2 0 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

写出系数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{-k}{m_1}+\omega^2 & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & \frac{-k}{m_2}+\omega^2 \end{vmatrix}$$

令行列式值为零就可以得到

$$\omega_1 = 0; \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} \tag{4}$$

作出运动的草图，ω_1 代表了平动，ω_2 代表了质心位置不变的振动, 如下所示

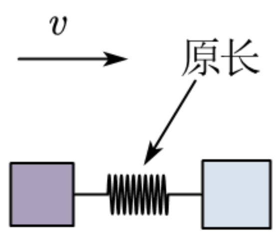

Figure 1: $\omega = 0$

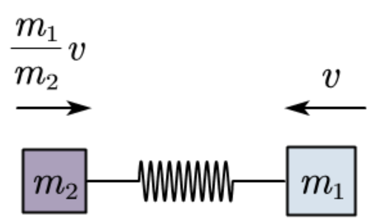

Figure 2: $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$

(c)
由完全弹性碰撞容易得到题目所给的初始条件，根据我们求出来的两个本征角频率我们可以自然的设出 x_{10} 和 x_{20} 的一般形式

$$\begin{cases} x_{10} = acos\omega t + bsin\omega t + c + dt \\ x_{20} = a'cos\omega t + b'sin\omega t + c' + d't \end{cases} \tag{5}$$

且由（b）中草图分析我们知道前两项对应着质心位置不变的振动，后两项对应着平动, 故应该存在如下的关系

$$\begin{cases} m_1 a = -m_2 a' \\ m_1 b = -m_2 b' \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} c = c' \\ d = d' \end{cases} \tag{7}$$

代入初始条件，即

$$\begin{cases} x_{10} = 0 \\ v_{10} = v_0 \\ x_{20} = 0 \\ v_{20} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

得到

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{v_0}{\omega} \\ c = 0 \\ d = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 \end{cases} \tag{9}$$

式中 $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$, 故同时可得

$$\phi = -arctan\frac{b}{a} = -\frac{\pi}{2} \tag{10}$$

参考给分：6+12+7

4 Transverse wave on a string

(a)
很经典的波方程推导，不会的可以看看 ppt，这里仅写出最后答案.
首先是第一个假设绳子张力处处相等等于 T，然后是第二个假设绳子振幅足够小满足 $tan\theta = sin\theta = \theta$, 然后利用牛顿运动定律不难得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{1}$$

(b)
根据题目意思，由波的叠加原理可得

$$y_{total}(x,t) = y(x,t) + y'(x,t) = Asin(kx - \omega t) + Asin(kx + \omega t + \phi) \tag{2}$$

利用题目所给三角公式，有

$$y_{total}(x,t) = 2Asin(kx + \frac{\phi}{2})cos(\omega t + \frac{\phi}{2}) \tag{3}$$

要使得 x_0 处振幅保持为零就应该要让第一项始终为零，此时无论第二项怎么随时间变化最终结果都是零，即

$$kx + \frac{\phi}{2} = m\pi \tag{4}$$

$$m \in \mathcal{Z}$$

即

$$\phi = 2m\pi - 2kx_0 \tag{5}$$

(我们发现 (b) 问其实顺着题目意思来就可以了)
(c)
其实这一小问也只需要顺着题目意思来就可以
取 y 处的一段质元，对其进行受力分析。如题所述张力由重力提供，故

$$T(y) = \mu yg \tag{6}$$

列出牛顿定律，即

$$T(y)\frac{\partial z}{\partial y}|_{y+dy} - T(y)\frac{\partial z}{\partial y}|_y = \mu dy\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{7}$$

又有

$$\frac{\partial z}{\partial y}|_{y+dy} - \frac{\partial z}{\partial y}|_{y} = dy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{8}$$

代入 T(y) 得到波方程

$$yg\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{9}$$

当我们再把正弦波解代入上述波方程时发现不成立，故不满足正弦波方程解。
参考给分：6+8+11