Chương 6

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

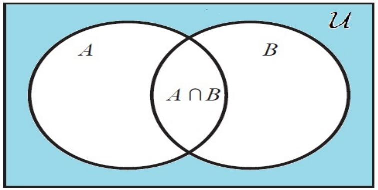
Đại học Khoa Học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 6. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

- Phương pháp sơ đồ Ven
- Nguyên lý bù trừ
- Đa thức quân xe

6.1. Phương pháp sơ đồ Ven

Nhận xét. Xét sơ đồ Ven



Ta ký hiệu

- $\mathcal{U}$ là tập vũ trụ
- $\overline{A}$ là phần bù của A trong $\mathcal{U}$
- $|A|$ là số phần tử của A.

Khi đó

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\mathcal{U}| - |A| - |B| + |A \cap B| \qquad (1)$$

Ví dụ. Một trường học có 100 sinh viên, trong đó có 50 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi trường đó có bao nhiêu sinh viên không học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp?

Giải. Gọi là $\mathcal{U}$ là tập hợp sinh viên của trường. Gọi A là tập hợp sinh viên học tiếng Anh và P là tập hợp sinh viên học tiếng Pháp. Ta có

$$|\mathcal{U}| = 100,\ |A| = 50,\ |P| = 40 \text{ và } |A \cap P| = 20.$$

Theo yêu cầu bài toán ta cần tính $|\overline{A} \cap \overline{P}|$. Ta có

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{P}| &= |\mathcal{U}| - |A| - |P| + |A \cap P| \\ &= 100 - 50 - 40 + 20 = 30. \end{aligned}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu hoán vị các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ sao cho chữ số đầu lớn hơn 1 và chữ số cuối nhỏ hơn 8?

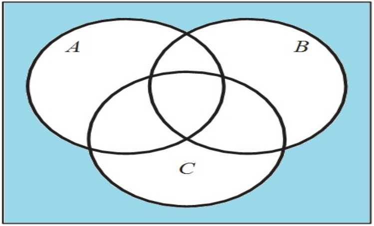
Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập tất cả các hoán vị của $0, 1, 2, ..., 9$; A là tập tất cả các hoán vị với chữ số đầu là 0 hoặc 1 và B là tập tất cả các hoán vị với chữ số cuối là 8 hoặc 9. Khi đó yêu cầu của bài toán là tính $|\overline{A} \cap \overline{B}|$.

Ta có $|\mathcal{U}| = 10!$, $|A| = 2 \times 9!$, $|B| = 2 \times 9!$ và $|A \cap B| = 2 \times 2 \times 8!$.

Áp dụng công thức **(1)** ta được

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{B}| &= |\mathcal{U}| - |A| - |B| + |A \cap B| \\ &= 10! - (2 \times 9!) - (2 \times 9!) + (2 \times 2 \times 8!) = 2338560. \end{aligned}$$

Câu hỏi. Hãy mở rộng công thức **(1)** cho trường hợp 3 tập hợp.



Đáp án. Công thức là

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = &|\mathcal{U}| - |A| - |B| - |C| \\ &+ |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\ &- |A \cap B \cap C| \qquad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Đối với trường hợp 3 tập hợp là A_1, A_2 và A_3, ta có thể viết công thức **(2)** như sau:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |\mathcal{U}| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le 3} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Ví dụ. Một trường có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp, 40 sinh viên học tiếng Đức, mỗi cặp ngôn ngữ có 20 sinh viên học và có 10 sinh viên học cả 3 ngôn ngữ. Hỏi trường có bao nhiêu sinh viên không học cả 3 tiếng Anh, Pháp và Đức?

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp sinh viên của trường. Gọi A là tập hợp sinh viên học tiếng Anh, P là tập hợp sinh viên học tiếng Pháp và D là tập hợp sinh viên học tiếng Đức. Khi đó $|\mathcal{U}| = 100$,

- $|A| = |P| = |D| = 40$,
- $|A \cap P| = |P \cap D| = |A \cap D| = 20$,
- $|A \cap P \cap D| = 10$.

Theo công thức **(2)** ta được

$$|\overline{A} \cap \overline{P} \cap \overline{D}| = 100 - (40 + 40 + 40) + (20 + 20 + 20) - 10 = 30.$$

Nhận xét. Số các số nguyên dương $\leq n$ mà chia hết cho k là phần nguyên $[n/k]$.

Ví dụ. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000 mà chia hết cho 7?

Đáp án. $\left[\dfrac{999}{7}\right] = 142.$

Ví dụ. Có bao nhiêu số nguyên dương ≤ 1000 mà nguyên tố cùng nhau với 70?

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp các số nguyên dương ≤ 1000. Ta có ước nguyên tố của 70 là 2, 5 và 7. Do đó muốn đếm các số nguyên tố cùng nhau với 70 ta cần đếm những số không chia hết cho 2, 5 và 7.

Gọi A_1, A_2 và A_3 lần lượt là tập các số nguyên trong $\mathcal{U}$ chia hết cho $2, 5$ và 7. Khi đó đáp án cần tìm của bài toán là $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$. Ta có

$$|\mathcal{U}| = 1000, \quad |A_1| = [1000/2] = 500,$$

$$|A_2| = [1000/5] = 200, \quad |A_3| = [1000/7] = 142.$$

Ta có một số chia hết cho 2 và 5 khi và chỉ khi số đó chia hết cho 10. Do đó $|A_1 \cap A_2| = [1000/10] = 100$. Tương tự ta có,

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{2 \times 7}\right] = 71, \; |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{5 \times 7}\right] = 28.$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{2 \times 5 \times 7}\right] = 14.$$

Áp dụng công thức **(2)** ta được

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| &= 1000 - (500 + 200 + 142) + (100 + 71 + 28) - 14 \\ &= 343.\end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 2000 mà nguyên tố cùng nhau với

a) 200 b) 396

6.2. Nguyên lý bù trừ

Trong phần này chúng ta sẽ mở rộng công thức ở phần 6.1 cho trường hợp n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Để đơn giản về mặt ký hiệu ta viết "$\cap$" như là phép nhân. Ví dụ $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ sẽ được viết là $A_1A_2A_3$. Bằng việc sử dụng ký hiệu này, ta có số lượng phần tử không thuộc tất cả các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sẽ được viết là $|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n|$.

Định lý. *Cho tập vũ trụ $\mathcal{U}$ và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập hợp con của $\mathcal{U}$. Ta đặt S_k là tổng số phần tử của tất cả tập giao của đúng k tập hợp từ các $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$, cụ thể*

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,\ S_2 = \sum_{1\le i<j\le n} |A_iA_j|, \ldots,\ S_n = |A_1A_2\ldots A_n|.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n| &= |\mathcal{U}| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k \\ &= |\mathcal{U}| - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n\end{aligned}$$

Hệ quả. *Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập hợp con của tập vũ trụ $\mathcal{U}$. Khi đó*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \\ &= S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n.\end{aligned}$$

Chứng minh. Từ Định lý trên ta có

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n| &= |\mathcal{U}| - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n \\ &= |\mathcal{U}| - \Big(S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n\Big).\end{aligned}$$

Mặt khác
$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |\mathcal{U}| - |\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n|.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh ■

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_i \leq 7$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$.

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình **(∗)**. Ta có

$$|\mathcal{U}| = K_4^{18} = \binom{4+18-1}{18} = 1330.$$

Gọi A_i là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình **(∗)** thỏa tính chất $x_i \geq 8$. Khi đó kết quả của bài toán là $|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4|$.

Bằng việc giải những bài toán tìm số nghiệm nguyên ta được

- $|A_i| = K_4^{10} = \binom{13}{10} = 286$ với $1 \leq i \leq 4$.
- $|A_iA_j| = K_4^{2} = \binom{5}{2} = 10$ với $1 \leq i < j \leq 4$.
- $|A_iA_jA_k| = 0$ với $1 \leq i < j < k \leq 4$.
- $|A_1A_2A_3A_4| = 0$.

Vì vai trò của các A_i $(1 \leq i \leq 4)$ là như nhau nên ta có:

- $S_1 = \sum_{i=1}^{4} |A_i| = 4 \times 286 = 1144.$
- $S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i A_j| = \binom{4}{2} \times 10 = 60.$
- $S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i A_j A_k| = \binom{4}{3} \times 0 = 0.$
- $S_4 = |A_1 A_2 A_3 A_4| = 0.$

Áp dụng Định lý, ta có

$$\begin{aligned} |\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4| &= |\mathcal{U}| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \\ &= 1330 - 1144 + 60 - 0 + 0 = 246. \end{aligned}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách lấy 6 lá bài từ bộ bài 52 lá sao cho

a. có đầy đủ 4 nước (cơ, rô, chuồn và bích).
b. ít nhất một nước không có.

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tất cả bộ 6 lá bài được lấy từ bộ bài 52 lá và A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là tất cả bộ 6 lá bài mà không có nước cơ, rô, chuồn và bích. Ta có

- $|\mathcal{U}| = \binom{52}{6}$
- $|A_1| = \binom{39}{6}$
- $|A_1A_2| = \binom{26}{6}$
- $|A_1A_2A_3| = \binom{13}{6}$
- $|A_1A_2A_3A_4| = 0$

Vì vai trò A_1, A_2, A_3, A_4 là như nhau nên ta có:

- $S_1 = 4\binom{39}{6}$
- $S_2 = \binom{4}{2}\binom{26}{6}$
- $S_3 = \binom{4}{3}\binom{13}{6}$
- $S_4 = 0$

a. $|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4| = |\mathcal{U}| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 8682544.$

b. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 11675976.$

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 7$, $x_3 \leq 10$.

Đáp án. 524

Ví dụ. Có bao nhiêu toàn ánh từ tập hợp có 6 phần tử vào tập hợp có 3 phần tử?

Giải. Giả sử tập nguồn là A, tập đích là $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp các ánh xạ từ A vào B và P_i là tập hợp các ánh xạ mà có ảnh không chứa b_i $(i = 1, 2, 3)$. Khi đó kết quả của bài toán là $|\overline{P}_1\overline{P}_2\overline{P}_3|$.

Bằng việc giải những bài toán tìm số ánh xạ ta được

$$|\mathcal{U}| = 3^6, \qquad |P_1| = 2^6, \qquad |P_1P_2| = 1^6, \qquad |P_1P_2P_3| = 0.$$

Vì vai trò của các P_1, P_2, P_3 là như nhau nên ta có:

$$S_1 = \binom{3}{1} 2^6 = 192, \qquad S_2 = \binom{3}{2} \times 1 = 3, \qquad S_3 = 0.$$

Áp dụng Định lý, ta có

$$\begin{aligned}|\overline{P}_1\overline{P}_2\overline{P}_3| &= |\mathcal{U}| - S_1 + S_2 - S_3\\ &= 729 - 192 + 3 - 0 = 540.\end{aligned}$$

Định lý. *Cho m và n là hai số nguyên dương với $m \geq n$. Khi đó số toàn ánh từ tập hợp có m phần tử và tập hợp có n phần tử là:*

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m$$

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu cách phân công 5 công việc khác nhau cho 4 người với điều kiện mỗi người đều có ít nhất một công việc.

Giải. Số cách phân công chính là số toàn ánh từ tập có 5 phần tử vào tập có 4 phần tử. Do đó số cách phân công là

$$4^5 - \binom{4}{1}3^5 + \binom{4}{2}2^5 - \binom{4}{3}1^5 = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240.$$

Định lý. *Cho tập vũ trụ $\mathcal{U}$ và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập hợp con của U. Khi đó số phần tử thuộc đúng m tập hợp, ký hiệu* $\boldsymbol{N_m}$, *là*

$$N_m = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} S_{m+i}$$
$$= S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \ldots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n$$

Nếu ta gọi $\boldsymbol{N_m^*}$ *là số phần tử thuộc ít nhất m tập hợp thì*

$$N_m^* = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i-1}{m-1} S_{m+i}$$
$$= S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \ldots + (-1)^{n-m} \binom{n-1}{m-1} S_n.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi tam phân (chỉ gồm 0, 1, 2) có độ dài 4

a) chứa đúng 2 chữ số 1 b) chứa ít nhất 2 chữ số 1

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp tất cả những chuỗi tam phân có độ dài 4. Gọi A_i $(1 \leq i \leq 4)$ là tập hợp tất cả các chuỗi tam phân có chữ số tại vị trí i là 1. Ta có

- $|\mathcal{U}| = 3^4$
- $S_1 = \binom{4}{1} 3^3$
- $S_2 = \binom{4}{2} 3^2$
- $S_3 = \binom{4}{3} 3^1$
- $S_4 = \binom{4}{4} 3^0$

Áp dụng Định lý trên ta được:

a) $N_2 = S_2 - \binom{3}{2} S_3 + \binom{4}{2} S_4 = 24.$

b) $N_2^* = S_2 - \binom{2}{1} S_3 + \binom{3}{1} S_4 = 33.$

Ví dụ. Có 5 lá thư và 5 phong bì thư ghi sẵn địa chỉ. Mỗi phong bì thư được bỏ vào ngẫu nhiên đúng một lá thư. Hỏi xác suất để **không** lá thư nào đúng địa chỉ là bao nhiêu? Tổng quát hóa bài toán với n (nguyên dương) lá thư và n phong bì thư.

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp tất cả các cách bỏ 5 lá thư vào 5 phong bì thư và A_i $(1 \le i \le 5)$ là tập hợp các cách bỏ lá thư mà lá thứ i đúng địa chỉ. Bây giờ ta đi tìm $|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_5|$. Ta có

- $|\mathcal{U}| = 5!$
- $S_1 = \binom{5}{1} 4! = \frac{5!}{1!}$
- $S_2 = \binom{5}{2} 3! = \frac{5!}{2!}$
- $S_3 = \binom{5}{3} 2! = \frac{5!}{3!}$
- $S_4 = \binom{5}{4} 1! = \frac{5!}{4!}$
- $S_5 = \binom{5}{5} 0! = \frac{5!}{5!}$

Áp dụng Định lý ta được

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_5| &= |\mathcal{U}| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5\\ &= 5! - \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!}\\ &= 5!\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k}{k!} = 44.\end{aligned}$$

Như vậy xác suất để không lá thư nào đúng địa chỉ là

$$\frac{|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_5|}{|\mathcal{U}|} = \frac{44}{5!} \approx 0.367$$

Tổng quát.

$$|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n| = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Xác suất

$$\frac{|\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n|}{|\mathcal{U}|} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} \quad \text{(khi } n \text{ lớn)}$$

6.3. Đa thức quân xe

Ví dụ. Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Giới thiệu. Xe là một quân cờ quan trọng trong cờ tướng cũng như cờ vua, nó có quyền ăn bất cứ quân cờ nào khác màu (của đối phương) ở trên cùng dòng hay cùng cột (không bị cản trở bởi một quân cờ khác). Một số bài toán đếm có thể đưa về dạng tính số cách đặt k quân xe trên một bàn cờ sao cho hai quân xe bất kỳ không thể ăn nhau, tức là không có 2 quân xe nào trên cùng một dòng hay một cột.

Định nghĩa. Tập hợp tất các hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ được ký hiệu là $\boldsymbol{S_n}$. Mỗi hoán vị của $\sigma \in S_n$ được xem như là một song ánh từ $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ví dụ, hoán vị $\sigma = 3\,2\,1$ được xem như là song ánh $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ với $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$.

Nhận xét. Một hoán vị $\sigma \in S_n$ tương đương với một cách đặt n quân xe trên bàn cờ $n \times n$ ở các tọa độ $\boldsymbol{(i, \sigma(i))}$ (với $1 \le i \le n$), hiển nhiên không có 2 quân xe nào ăn nhau.

Ví dụ. Hoán vị $\sigma = 4\,2\,3\,1$ tương đương với cách đặt quân xe

	1	2	3	4
1				●
2		●		
3			●	
4	●			

Định nghĩa. Xét các tập con $X_1, X_2 \ldots, X_n \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Ta đặt

$$\boldsymbol{P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(i) \notin X_i \text{ với } 1 \leq i \leq n\}}.$$

Tập X_i $(1 \leq i \leq n)$ được gọi là tập các vị trí cấm của i. Các hoán vị thuộc $P(X_1, \ldots, X_n)$ được gọi là ***hoán vị với vị trí cấm***.

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hợp các hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Phân tích Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.

		X	X	
				X
X		X	X	
	X			X

Để giải bài này chúng ta có thể sử dụng nguyên lý bù trừ (hơi phức tạp). Trong phần này chúng ta sẽ dùng phương pháp ***đa thức quân xe*** để giải.

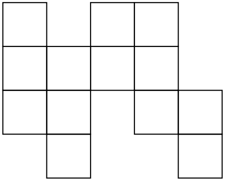
Ví dụ. Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp.

Phân tích. Ta biểu diễn 4 người và 5 công việc thành một bàn cờ 4×5 như hình sau.

	1	2	3	4	5
A		X			X
B					X
C			X		
D	X		X	X	

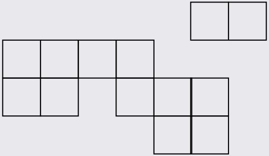
Ta dễ thấy một cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp chính là một cách đặt 4 quân xe vào bàn cờ.

Để đơn giản ta có thể xóa các ô cấm ra khỏi bàn cờ. Như vậy bàn cờ trên sẽ thành



Định nghĩa. Một ***bàn cờ*** là một tập con của mảng $m \times n$ ô vuông.

Ví dụ. Tập hợp các ô vuông sau là một bàn cờ



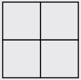
Định nghĩa. Cho C là một bàn cờ có m ô vuông và số nguyên k với $0 \leq k \leq m$. Gọi $\boldsymbol{r_k(C)}$ là cách đặt k quân xe lên bàn cờ sao cho 2 quân xe bất kỳ không thể ăn nhau. ***Đa thức quân xe*** được định nghĩa là

$$\boldsymbol{R(C, x) = r_0(C) + r_1(C)x + r_2(C)x^2 + \ldots + r_m(C)x^m}.$$

Ta dễ thấy $r_0(C) = 1$ và $r_1(C) = m$.

Nhận xét. Ta có thể hoán đổi tùy ý các dòng (hay các cột) trên bàn cờ mà không làm thay đổi đa thức quân xe của bàn cờ.

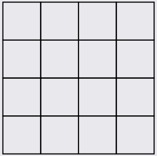
Ví dụ. Cho C là bàn cờ 2×2



Khi đó, ta có 4 cách đặt một quân xe, 2 cách đặt hai quân xe và không có cách đặt ba quân xe trở lên. Do đó đa thức quân xe của C là

$$\boldsymbol{R(C, x) = 1 + 4x + 2x^2}.$$

Ví dụ. Cho C là bàn cờ 4×4



Hãy tìm đa thức quân xe của C.

Giải. Ta có $r_0(C) = 1, \;\; r_1(C) = 16.$

- Với 2 quân xe, ta có $\binom{4}{2}$ cách chọn vị trí dòng đặt quân xe. Với mỗi cách chọn dòng, quân xe thứ 1 có 4 cách chọn, quân xe thứ 2 có 3 cách chọn. Như vậy

$$r_2(C) = \binom{4}{2} \times 4 \times 3 = 72.$$

- Lý luận tương tự, ta có

$$r_3(C) = \binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 = 96.$$

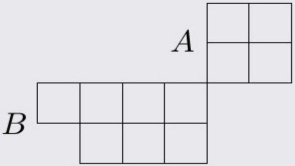
$$r_4(C) = \binom{4}{4} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Vậy

$$\boldsymbol{R(C,x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4}.$$

Định nghĩa. Hai phần A, B của bàn cờ C được gọi là ***rời nhau*** nếu không có ô vuông nào trong A cùng dòng hay cùng cột với một ô vuông nào đó trong B.

Ví dụ. Hai phần A, B của bàn cờ sau là rời nhau



Định lý. *Nếu bàn cờ C chỉ gồm hai phần rời nhau A và B thì*

$$\boldsymbol{R(C,x) = R(A,x) \times R(B,x)}$$

Chứng minh. Với k quân xe, ta đặt i quân xe ở A và $k-i$ quân xe ở B. Như vậy số cách đặt k quân xe vào C là $r_i(A)\, r_{k-i}(B)$.

Do đó

$$r_k(C) = \sum_{i=0}^{k} r_i(A)\, r_{k-i}(B).$$

Từ hệ thức này ta có

$$\boldsymbol{R(C,x) = R(A,x) \times R(B,x)}.$$

Định lý. *Cho* $\blacksquare$ *là ô vuông tùy ý của bàn cờ* C*. Gọi* D *là bàn cờ có được từ* C *bằng cách xóa dòng và cột chứa* $\blacksquare$ *và* E *là bàn cờ có được từ* C *bằng cách xóa ô* $\blacksquare$*. Khi đó*

$$\boldsymbol{R(C,x) = xR(D,x) + R(E,x)}.$$

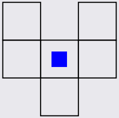
Chứng minh. Với k quân xe ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. Ô $\blacksquare$ được đặt 1 quân xe nên $k-1$ quân xe còn lại được đặt trên D nên có $r_{k-1}(D)$ cách đặt.

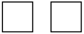
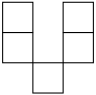
Trường hợp 2. Ô ■ không được đặt quân xe, nghĩa là k quân xe được đặt trên E nên trường hợp này ta có $r_k(E)$ cách đặt. Vậy với $k \geq 1$ thì $r_k(C) = r_{k-1}(D) + r_k(E)$. Do đó

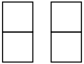
$$\begin{aligned} R(C,x) &= 1 + \sum_{k\geq 1} r_k(C)x^k \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1} r_{k-1}(D)x^k + \sum_{k\geq 1} r_k(E)x^k \\ &= x\sum_{k\geq 0} r_k(D)x^k + (1 + \sum_{k\geq 1} r_k(E)x^k) \\ &= xR(D,x) + R(E,x) \end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm đa thức quân xe của bàn cờ C sau



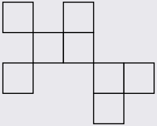
Giải. Ta có

$R(C,x) = xR\Big($  $, x\Big) + R\Big($  $, x\Big)$

$= x(1+2x) + R\Big($  $, x\Big) \times R\Big($  $, x\Big)$

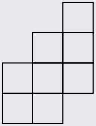
$$= x(1+2x) + (1+4x+2x^2)(1+x)$$
$$= 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3.$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Đáp án. $1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$

Ví dụ.(tự làm) Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Đáp án. $1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$

Định lý. *Cho $P(X_1, \ldots, X_n)$ là tập hợp các hoán vị $\sigma \in S_n$ với vị trí cấm $X_1, \ldots, X_n$. Gọi B là bàn cờ được tạo từ các vị trí cấm này. Khi đó số hoán vị của $P(X_1, \ldots, X_n)$ là*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)!\, r_k(B).$$

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hợp các hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

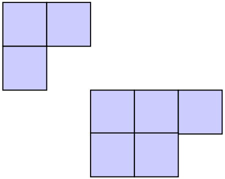
Giải. Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.

		X	X	
				X
X		X	X	
	X			X

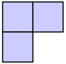
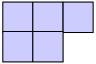
Hoán vị dòng 1 với dòng 4 và cột 1 với cột 5, ta được

X	X			
X				
		X	X	X
		X	X	

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm, ta có



Vì B tạo bởi 2 phần rời nhau nên

$R(C, x) = R\Big($  $, x\Big) \times R\Big($  $, x\Big)$

$$= (1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 4x^2)$$

$$= 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.$$

Theo định lý trên ta có số hoán vị với vị trí cấm là

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (5-k)!\, r_k(B)$$

$$= \; 5! \times 1 - 4! \times 8 + 3! \times 20 - 2! \times 17 + 1! \times 4 - 0! \times 0 = 18.$$

Ví dụ.(tự làm) Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi có bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Hướng dẫn. Ta thêm người E vào và người này thích hợp với mọi công việc. Khi đó bài toán đưa về việc tìm số cách phân công 5 người cho 5 công việc. Đây cũng chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

Bàn cờ 5×5 với ô cấm

	1	2	3	4	5
A		X			X
B					X
C			X		
D	X		X	X	
E					

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm. Khi đó

Đáp án. $R(B,x) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4$. Suy ra số cách phân công công việc là

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!\,r_k(B) = 24.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \{1,2,3,4\}$ và $B = \{u,v,w,x,y,z\}$. Hỏi có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B **không** thỏa tất cả các điều kiện:

$f(1) = u$ hoặc v; $\quad f(2) = w$;

$f(3) = w$ hoặc x; $\quad f(4) = x, y,$ hoặc z.

Hướng dẫn. Đặt $A' = A \cup \{5,6\}$. Xét bài toán tìm tất cả các đơn ánh từ $A' \to B$ không thỏa các điều kiện trên. Với mỗi cách xây dựng một đơn ánh f từ A vào B ta được $2! = 2$ các xây dựng song ánh từ A' vào B (vì có 2 các chọn ảnh của 5 và 6).

Bài toán tìm số song ánh từ $A' \to B$ chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

Đáp án. Đa thức quân xe: $R(C,x) = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 4x^4$

Khi đó số song ánh từ $A' \to B$ thỏa điều kiện là

$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k (6-k)!\, r_k(C) = 152.$$

Như vậy số đơn ánh f từ A vào B thỏa điều kiện bài toán là $\dfrac{152}{2} = 76.$

Ví dụ.(tự làm) Một **xáo trộn** (derangement) là một hoán vị các phần tử của tập hợp sao cho không có phần tử nào xuất hiện đúng vị trí ban đầu. Ví dụ $A = \{1,2,3,4,5\}$, khi đó 21453 là một xáo trộn, nhưng 21543 không là một xáo trộn vì 4 trùng với vị trí ban đầu. Hãy

a) tìm số xáo trộn của các phần tử của tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$;

b) tìm số xáo trộn của các phần tử của tập hợp $A = \{1,2,\ldots,n\}$ với n là nguyên dương.