Consideremos que hay N precios datos

S_t : precio en el tiempo t

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$$

De la serie de rendimiento ...

$$\mu = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1} R_t$$ Media $\rightarrow$ Valor esperado $\approx \emptyset$ en términos diarios

$\underbrace{R_t = \mu \cdot \Delta t}$, donde Δt = Intervalo de tiempo

"El rendimiento es proporcional al tiempo"

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta S = S \mu \Delta t$$

"El cambio en el precio puede ser modelado por un precio inicial · el promedio de los rendimientos y un intervalo de tiempo"

Si $\Delta t \rightarrow \emptyset$, entonces : $ds = s\mu \, dt$

Resolvemos :

$$\int \frac{ds}{s} = \int \mu \, dt$$

$$\ln s = \mu t + C$$

$$\boxed{s = S_0 e^{\mu t}}$$

$dx = \underbrace{a\,dt}_{\mu} + \underbrace{b\,dW}_{\sigma^2}$, $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$, $\varepsilon \sim N(0,1)$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum (R_t - \mu)^2$$

$E[dx] = a\,dt + \emptyset = a\,dt$ $\qquad E[dW] = \emptyset$

$V[dx] = \emptyset + b^2 dt$ $\qquad V[dW] = dt$

$ds = s\mu \, dt$

$$dx = a\,dt + b\sqrt{dt}\,\varepsilon$$

$$\frac{dS}{S} = \mu \, dt + \sigma \, dW$$

$$\boxed{dS = S\mu \, dt + S\sigma \, dW}$$ Proceso de Ito

↳ EDE que define el comportamiento de los activos a través del modelo del cambio del precio.

$$E[dS] = S\mu \, dt \quad , \quad V[dS] = \sigma^2 S^2 \, dt$$

$$\therefore \quad dS \sim N\left(S\mu \, dt, \ \sigma^2 S^2 \, dt\right)$$

μ & σ de la ecuación anterior definen los parámetros de lo que sería el drift rate y la tasa de vaianza de un proceso estocástico.

Debe haber una relación entre dS, σ, μ y dt.

Ejemplo 1:

Considera que se ha calculado el valor de μ y σ anual de un activo con:

- $\mu = 16\%$ rend. anual
- $\sigma = 30\%$ vol. anual

I) ¿Unidad de tiempo? Año

II) Escribir la ecuación EDE del activo, para cualquier tiempo

$$dS = S(.16) \, dt + S(.30) \, dW$$

III) Comportamiento (EDE) en 3 meses

$$dt = \frac{1}{4} \longrightarrow dS = S(.16)\frac{1}{4} + S(0.30)\sqrt{1/4} \, \varepsilon_t$$

IV) Comportamiento de 1 día

$$dt = \frac{1}{252} \longrightarrow ds = s(.16)\frac{1}{252} + s(.30)\sqrt{1/252}\,\varepsilon_e$$

"año de bolsa"

V) Si el precio observado hoy es de \$50, cuál es la EDE que describe el precio en 10 días

$$dt = \frac{10}{252} \longrightarrow ds = 50(.16)\frac{10}{252} + 50(.30)\sqrt{10/252}\,\varepsilon_e$$

$$ds = \frac{20}{63} + 2.9881\,\varepsilon_e$$

VI) Probabilidad de un cambio negativo en el precio del activo (10 días, con $S_0 = 50$)

$$E[ds] = 0.3174 \qquad P(ds < \emptyset) = P\left(z < \frac{\emptyset - E[ds]}{\sqrt{V[ds]}}\right)$$

$$V[ds] = 2.9881^2$$

$$= P(z < -0.1062)$$

$$= P(z < -0.11) = 45.62\,\%$$

VII) Valor esperado del precio en 10 días?

$$VE = S_0 + E[ds] = 50 + 0.3174 = 50.3174$$

VIII) Intervalo de confianza al 95 % para el cambio del precio en 10 días.

$$X \pm \mu \pm \sigma\,(1.645)$$