Samuel Gómez Jiménez

Tarea 5: Procesos estocásticos de variables financieras (Parte 2)
Análisis del Riesgo

Indicaciones: Contesta correctamente las siguientes preguntas, incluye todos los procedimientos necesarios para llegar a la solución. Remarca tu respuesta final. En algunos casos se presentan las respuestas finales.

Pregunta 1: Juan es un entusiasta de las finanzas y ha creado un derivado de nombre CHUCKY.MX el cual tiene como subyacente el precio de GFINBURO.MX. Juan sabe que el comportamiento de GFINBURO.MX puede modelarse con la ecuación $dS = S\mu dt + S\sigma dW$. Además, el derivado se relaciona con el subyacente por medio de la ecuación $G = ln\, S^2$.

- Mediante el uso del cálculo de ITO, determina una expresión para dG. Después calcula el valor esperado y la varianza de dG. R: $dG = (2\mu - \sigma^2)dt + 2\sigma dW$
- Si $\mu = 30\%, \sigma = 10\%$ anual. ¿Qué es más probable, que el cambio en el precio del derivado CHUCHY sea mayor que cero en el próximo 1 año, es decir $P(dG > 0)$ o que el precio de GFINBURO aumente en el próximo año? Nota que son preguntas diferentes que parecen similares y se relacionan. R= *igualmente probable*

a.

$$dG = \left[\frac{dG}{dt} + \frac{dG}{dx} a(x,t) + \frac{1}{2}\frac{dG^2}{dx^2} b^2(x,t)\right] dt + \frac{dG}{dx} b(x,t)\, dW$$

$$dG = \left[0 + \frac{2}{S}(S\mu) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{S^2}\right)(S^2\sigma^2)\right] dt + \frac{2}{S}(S\sigma)\, dW$$

$$dG = (2\mu - \sigma^2)\, dt + 2\sigma\, dW$$

$$E[dG] = E\left[(2\mu - \sigma^2)dt + \cancel{2\sigma dW}\right] = (2\mu - \sigma^2)dt$$

$$V[dG] = V\left[\cancel{(2\mu - \sigma^2)dt} + 2\sigma dW\right] = V\left[2\sigma\sqrt{dt}\,\epsilon\right] = 4\sigma^2 dt$$

b. $dt = 1$

$$E[dG] = (2 \cdot 0.3 - 0.1^2) = 0.59$$

$$V[dG] = 4(0.1)^2 = 0.04$$

CHUCKY:

$$P(dG > 0): \quad z = \frac{0 - 0.59}{\sqrt{0.04}} = -2.95 \rightarrow P = 1 - 0.0016 = 99.84\%$$

GFINBURO:

$$P(S_1 - S_0 > 0) \longrightarrow P(\ln S_1^2 - \ln S_0^2 > 0):$$

$$\ln S_1^2 - \ln S_0^2 = (2\mu - \sigma^2)\,dt + 2\sigma\,dW$$

$$\cancel{2}\ln\left(S_1/S_0\right) = (\cancel{2}\mu - \sigma^2)\,dt + \cancel{2}\sigma\,dW$$

$$\ln\left(S_1/S_0\right) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dW$$

Reescribimos el problema a:

$$P\left(\ln S_1/S_0 > \varnothing\right):$$

$$E\left[\ln S_1/S_0\right] = E\left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dW\right] = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt$$

$$= 0.3 - \tfrac{1}{2}(0.1)^2 = 0.295$$

$$V\left[\ln S_1/S_0\right] = V\left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dW\right] = \sigma^2\,dt$$

$$= (0.1)^2 = 0.01$$

$$z = \frac{0 - 0.295}{\sqrt{0.01}} = -2.95 \longrightarrow P = 99.84\,\%$$

Respuesta: Son igualmente probables.

Pregunta 2: Una compañía tiene un portafolio de inversiones compuesto por determinado activo cuyo precio $Z(t)$ sigue un proceso estocástico modelado por la ecuación diferencia estocástica:

$$dZ(t) = 0.05Z(t)dt + 0.20Z(t)dW(t)$$

Donde $\mu = 0.05$ es la tasa de crecimiento anual $\sigma = 0.20$ es la volatilidad anual del precio de la materia prima, y $W(t)$ es un proceso de Wiener. El valor del portafolio de la compañía está dado por $X(t) = \ln Z(t)$. Considera que el precio inicial $Z(0) = 100$. Determina

- La ecuación diferencia estocástica que determina el comportamiento de $X(t)$
- El valor esperado de $X(t)$ y su varianza en un año

Hint: para este ejercicio recuerda que $dX(t)$ representa un cambio infinitesimal en la variable $X(t)$ por lo que para obtener el valor esperado de $X(t)$ es necesario resolver

$$\int_0^t E[dX(s)]ds = E[X(t)] - E[X(0)]$$

De la misma manera

$$V[X(t)] = \int_0^t V[dX(t)]\,ds$$

a. $$dX = \left[\varnothing + \frac{1}{Z_t}(0.05\,Z_t) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_t^2}\right)\left(0.2^2\,Z_t^2\right)\right]dt + \frac{1}{Z_t}(0.2\,Z_t)\,dW$$

$$dX = (0.05 - \tfrac{1}{2}(0.04))\,dt + 0.2\,dW$$
$$= 0.03\,dt + 0.2\,dW$$

b. dt, $t = 1$

$$E[dX] = E[0.03\,dt + \cancel{0.2\,dW}] = 0.03$$
$$V[dX] = V[\cancel{0.03\,dt} + 0.2\,dW] = 0.04$$

I. $$E[X_1] = \int_0^1 0.03\,ds + E[X_0] = 0.03 + \ln(Z_0 = 100) = 4.635$$

II. $$V[X_1] = \int_0^1 0.04\,ds = 0.04$$

Pregunta 3: Dada la ecuación diferencial estocástica que describe el comportamiento de los activos,

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S\sigma dW(t)$$

Determina S(t) y usa las propiedades de una distribución log- normal para encontrar $V(S(t))$.

$$\ln(S_{t+1}) - \ln(S_t) = \left[\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right]dt + \sigma\,dW$$
$$\ln(S_{t+1}) = \ln(S_t) + \left[\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right]dt + \sigma\,dW$$
$$\hookrightarrow S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW}$$

$$V[S_t] = S_t^2\left[e^{2a + 2b^2} - e^{2a + b^2}\right]$$

donde:

$$a = E\left[(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)dt + \cancel{\sigma\,dW}\right] = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\,dt$$

&

$$b^2 = V\left[\cancel{(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)}dt + \sigma\,dW\right] = \sigma^2 dt$$

$$\therefore V[S_t] = S_t^2\left[e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + 2\sigma^2 dt} - e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma^2 dt}\right]$$
$$= S_t^2\left[e^{(2\mu + \sigma^2)dt} - e^{2\mu\, dt}\right]$$
$$= S_t^2\left[e^{2\mu dt}\left(e^{\sigma^2 dt} - 1\right)\right]$$

Pregunta 4: La siguiente ecuación diferencial estocástica define el comportamiento anual de un activo que cotiza en una bolsa de valores

$$\boldsymbol{dS(t) = 0.50S(t)dt + 0.25S(t)dW(t)}$$

determina lo siguiente

- $S_T, E[S_T], V[S_T]$
- $\ln S_T, E[\ln S_T], V[\ln S_T]$
- La probabilidad de que, dentro de un año, el precio del activo incremente un 30% de su valor actual S.
- La probabilidad de que en 6 meses el precio del activo se ubique entre 42 y 45.

a. $$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW} = \underline{S_0 e^{0.46875\,dt + 0.25\,dW}}$$

$$E[S_t] = S_t e^{\mu dt} = \underline{S_t e^{0.5\,dt}}$$

$$V[S_t] = S_t^2\left[e^{2\mu dt}\left(e^{\sigma^2 dt} - 1\right)\right] = \underline{S_t^2 e^{dt}\left(e^{0.0625\,dt} - 1\right)}$$

b. $$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW = \underline{\ln(S_0) + 0.46875\,dt + 0.25\,dW}$$

$$E[\ln S_t] = E\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \cancel{\sigma dW}\right] = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt$$

$$= \underline{\ln(S_0) + 0.46875\,dt}$$

$$V[\ln S_t] = V\left[\cancel{\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt} + \sigma dW\right] = \underline{\sigma^2 dt = 0.0625\,dt}$$

c. $S_t = 1.3\,S_0$

$E[\ln S_t] = \ln(S_0) + 0.46875$

$V[\ln S_t] = 0.0625$

$$P(S_t > 1.3\,S_0): \quad z = \frac{\ln(1.3 S_0) - \ln(S_0) - 0.46875}{\sqrt{0.0625}} = \frac{\ln\left(\frac{1.3 \cancel{S_0}}{\cancel{S_0}}\right) - 0.46875}{0.25}$$

$$\approx -0.83 \longrightarrow P = 1 - 0.2033 = \underline{79.67\ \%}$$

Pregunta 5: El precio al contado de ciertas materias primas tiene un comportamiento que puede describirse con la siguiente ecuación que define un proceso de ITO:

$$dZ(t) = K\mu Z(t)dt + \sigma Z(t)dW(t)$$

donde K es una constante y μ, σ representan el rendimiento y la volatilidad del precio *Z(t)*, respectivamente y $dW(t)$ corresponde al proceso de Wiener. Si $X(t) = Z(t)^2$ representa el precio de un derivado sobre esas materias primeras;

- Determina $dX(t), E[dX(t)], V[dX(t)]$.

a. $dX = \left[\emptyset + 2Z(K\mu Z) + \frac{1}{2}(2)(\sigma^2 Z^2) \right] dt + 2Z(\sigma Z) dW$

$= \left[2Z^2 K\mu + \sigma^2 Z^2 \right] dt + 2Z^2 \sigma \, dW$

$= Z^2 (2K\mu + \sigma^2)\, dt + 2Z^2 \sigma \, dW$ //

b. $E[dX] = E\left[Z^2(2K\mu + \sigma^2)\, dt + \cancel{2Z^2\sigma \, dW} \right] = Z^2(2K\mu + \sigma^2)\, dt$ //

c. $V[dX] = V\left[\cancel{Z^2(2K\mu + \sigma^2)\, dt} + 2Z^2\sigma \, dW \right] = 4Z^4\sigma^2 dt$ //

Pregunta 6: Supongamos que *x* es el rendimiento al vencimiento con capitalización continua de un bono cupón cero que paga $1 en el momento T. Supongamos también que *x* sigue el proceso

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdW$$

donde a, x0, y s son constantes positivas y dW es el proceso de Wiener. Determina cual es el proceso que sigue el precio del bono.

Ecuación del precio de un bono en un momento $t \leq T$:

$P(t) = e^{-x(T-t)}$

$\frac{\partial P}{\partial t} = e^{-x(T-t)} \, d\left[-x_t (T-t)\right] = x e^{-x(T-t)}$

$\frac{\partial P}{\partial x} = -(T-t)\, e^{-x(T-t)}$

$\frac{\partial P^2}{\partial x^2} = (T-t)^2 e^{-x(T-t)}$

$$dP = \left[x e^{-x(T-t)} - (T-t) e^{-x(T-t)} \left[a \left(X_0 - x \right) \right] + \frac{1}{2} (T-t)^2 e^{-x(T-t)} \left(s^2 x_t^2 \right) \right] dt$$

$$- (T-t) e^{-x(T-t)} s x_t \; dW$$

Cambiamos $e^{-x(T-t)}$ por $P(t)$ y factorizamos:

$$dP = P(t) \left[x_t - (T-t) \left[a \left(X_0 - x_t \right) \right] + \frac{1}{2} (T-t)^2 s^2 x_t^2 \right] dt - P(t) (T-t) s x_t \, dW$$

Pregunta 7: SI la variable S tiene un comportamiento de ITO dado por la ecuación

$$dS = S\mu dt + \sigma S dw$$

Determina cual es el proceso que sigue la variable y, en cada caso e identifica los coeficientes que multiplican a dt y dW. Escribe estos coeficientes en términos de y, NO de S.

- $y = 2S$
- $y = e^S$
- $y = \frac{e^{r(T-t)}}{S}$

a. $$dy = \left[\varnothing + 2 (S\mu) + \varnothing \right] dt + 2 (S\sigma) dW$$

con $S = \frac{y}{2}$:

$$dy = y \mu \, dt + y \sigma \, dW$$

b. $$dy = \left[\varnothing + e^S (S\mu) + \frac{1}{2} e^S (S^2 \sigma^2) \right] dt + e^S (S\sigma) dW$$

con $S = \ln y$:

$$dy = y \left[\mu \ln(y) + \frac{1}{2} \sigma^2 \ln(y)^2 \right] dt + y \sigma \ln(y) \, dW$$

c. $$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{e^{r(T-t)}}{S} \, d\left[r(T-t) \right] = -\frac{r}{S} e^{r(T-t)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{-e^{r(T-t)}}{s^2}$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial s^2} = \frac{2e^{r(T-t)}}{s^3}$$

$$dy = \left[-\frac{r}{s}e^{r(T-t)} - \frac{e^{r(T-t)}}{s^{\cancel{2}}}(\cancel{s}\mu) + \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{\cancel{2}e^{r(T-t)}}{s^{\cancel{3}}}\right)(\cancel{s^2}\sigma^2)\right]dt - \frac{e^{r(T-t)}}{s^{\cancel{2}}}(\cancel{s}\sigma)\,dW$$

$$\text{con} \quad S = \frac{e^{r(T-t)}}{y} :$$

$$dy = \left[-ry - y\mu + y\sigma^2\right]dt - y\sigma\,dW$$

$$= y\left[\sigma^2 - r - \mu\right]dt - y\sigma\,dW$$

Pregunta 8: Considera un activo cuyo rendimiento mensual es de 5% y cuya volatilidad también mensual es del 2%. El precio actual del activo es de 17. Determina $P(S_{t+1} > 19)$ en 6 meses. Para encontrar esta probabilidad sigue los siguientes pasos:

- Identifica μ, σ, dt y usa la ecuación correcta para encontrar el comportamiento del precio para dentro de 6 meses.
- Usando tu resultado anterior determina $E[ln(S_{t+1})], V[ln(S_{t+1})]$
- Usando tu resultado anterior calcula $P(\ln S_{t+1} > \ln 19)$ por las propiedades de los logaritmos, esta probabilidad es equivalente a $P(S_{t+1} > 19)$

a. $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.02$, $dt = 6$

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]dt + \sigma\,dW$$

b. $$E[\ln S_t] = E\left[\ln(S_0) + \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]dt + \cancel{\sigma\,dW}\right] = \ln(S_0) + \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]dt$$

$$= \ln(17) + \left(0.05 - \frac{1}{2}(0.02)^2\right)(6)$$

$$= 3.132$$

$$V[\ln S_t] = V\left[\cancel{\ln(S_0) + \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]dt} + \sigma\,dW\right] = \sigma^2\,dt$$

$$= (0.02)^2(6)$$

$$= 0.0024$$

c. $P(\ln(S_t) > 19)$:

$$Z = \frac{\ln(19) - 3.132}{\sqrt{0.0024}} = -3.83 \longrightarrow P = \text{Prácticamente garantizado}$$