

Problème sur les intégrales de Wallis

Loïc Thomas Pierre ALAVOINE

Mathématiques



Sommaire

1 Enoncé du problème

2 Correction proposée

Enoncé du problème

Equipments

1 Enoncé du problème

2 Correction proposée

Enoncé du problème

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$

1°) Calculer I_0 et I_1 .

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} . En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3°) Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1} .

4°) Préciser la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5°) Fournir, à l'aide de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2 . En déduire un équivalent simple de I_n .

Correction proposée

Equipments

1 Enoncé du problème

2 Correction proposée

Correction proposée - Question 1

1°) Calculer I_0 et I_1 .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} . En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On va faire une intégration par parties sur la quantité I_n en utilisant la relation suivante : $\sin^n(x) = \sin(x)\sin^{n-1}(x)$. Les fonctions $u : x \mapsto -\cos(x)$ et $v : x \mapsto \sin^{n-1}(x)$ sont de classe C^1 . De plus, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad u'(x) = \sin(x) \text{ et } v'(x) = (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin^{n-1}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) v'(x) dx \end{aligned}$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} . En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$= \left[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx$$

$$= \cos(0) \sin^{n-1}(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx$$

$$= 0 - 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \quad \text{car } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sin^2(x)] \sin^{n-2}(x) dx$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} . En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}}$$

Si on multiplie par I_{n-1} l'égalité ci-dessus, nous avons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-1} I_{n-2}$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} . En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la suite $(n I_n I_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Prenons $n = 1$, alors :

$$1 I_1 I_{1-1} = I_1 I_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$
$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}}$$

Correction proposée - Question 3

3°) Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1} .

D'après la question 2°, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \forall p \in \mathbb{N}^*, I_{2p} &= \left(\frac{2p-1}{2p} \right) I_{2p-2} = \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \left[\frac{(2p-2)-1}{2p-2} \right] I_{(2p-2)-2} \\
 &= \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \left(\frac{2p-3}{2p-2} \right) I_{2p-4} = \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \left(\frac{2p-3}{2p-2} \right) \left[\frac{(2p-4)-1}{2p-4} \right] I_{(2p-4)-2} \\
 &= \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \left(\frac{2p-3}{2p-2} \right) \left(\frac{2p-5}{2p-4} \right) I_{2p-6} \\
 &= \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \left(\frac{2p-3}{2p-2} \right) \left(\frac{2p-5}{2p-4} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} \right) I_0 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)}{\prod_{l=1}^p (2l)} \right]
 \end{aligned}$$

Correction proposée - Question 3

3°) Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1} .

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)}{\prod_{l=1}^p (2l)} \right] \left[\frac{\prod_{n=1}^p (2n)}{\prod_{m=1}^p (2m)} \right] = \frac{\pi (2p)!}{2 \left[\prod_{k=1}^p (2k) \right]^2} = \frac{\pi (2p)!}{2^{2p+1} (p!)^2}$$

On observe que pour $p = 0$, nous avons la formule qui est toujours juste. Ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{\pi (2p)!}{2^{2p+1} (p!)^2}$$

En utilisant la réponse obtenue à la question 2°), nous avons :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{\pi}{2I_{2p} (2p+1)} \iff \forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Correction proposée - Question 4

4°) Préciser la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous avons :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\implies \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

Ainsi :

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction proposée - Question 5

5°) Fournir, à l'aide de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2 . En déduire un équivalent simple de I_n .

D'après la question 4°), nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \implies \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1}I_n \leq I_n^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq I_{n-1} \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_{n+1}I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$$

D'après la question 2°), nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

Par encadrement, nous pouvons en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nI_n^2}{\pi} = 1$$

Correction proposée - Question 5

5°) Fournir, à l'aide de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2 . En déduire un équivalent simple de I_n .

De plus, nous savons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$$

Ainsi :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$