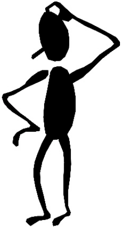
Problème de récurrence sur une inégalité

Loïc Thomas Pierre ALAVOINE

Mathématiques



Sommaire

Enoncé du problème

Enoncé du problème

Enoncé du problème

Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$

Correction proposée

Correction proposée

Correction proposée

Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel non-nul n.

Initialisation : L'inégalité est évidente mais par soucis de rigueur on peut le vérifier. Pour $n = 1$, nous avons :

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1$,
- $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1 = \sqrt{1} + \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} \approx 1,414 > 1$.

D'où l'initialisation.

Hérédité : Supposons l'inégalité vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.
Or, ce que nous voulons montrer, c'est l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)+1} - 1 = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1$$

Correction proposée

Ainsi, il suffit de montrer l'inégalité suivante pour obtenir l'hérédité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1$$

Pour démontrer cette inégalité, on va raisonner par équivalences logiques successives :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

Correction proposée

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)^2 \leq \left(2\sqrt{n+1}\right)^2 \quad \text{car } \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+2}+\sqrt{n} > 0$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sqrt{n+2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n}\right) + \left(\sqrt{n}\right)^2 \leq 2^2\left(n+1\right)$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ n + 2 + 2\sqrt{n\left(n+2\right)} + n \leq 4\left(n+1\right)$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2n + 2 + 2\sqrt{n\left(n+2\right)} \leq 4n + 4$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n\left(n+2\right)} \leq 2n + 2$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n\left(n+2\right)} \leq n + 1$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left[\sqrt{n\left(n+2\right)}\right]^2 \leq \left(n+1\right)^2 \quad \text{car } \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n\left(n+2\right)} > 0$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ n\left(n+2\right) = n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$$

$$\iff 0 \leq 1$$

Correction proposée

Ainsi, par équivalences successives, nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1 \Longleftrightarrow 0 \leq 1$$

On en déduit donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1$$

L'hérédité a été prouvé. Donc, d'après le principe de récurrence, nous avons montré que :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1}$$