Problème sur les intégrales de Wallis

Loïc Thomas Pierre ALAVOINE

Mathématiques

Sommaire

Enoncé du problème

Enoncé du problème

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$

1°) Calculer I_0 et I_1.
2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3°) Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1}.
4°) Préciser la monotomie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5°) Fournir, à l'aide de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2. En déduire un équivalent simple de I_n.

Correction proposée

Correction proposée - Question 1

1°) Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx = \left[-cos\left(x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = cos\left(0\right) - cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On va faire une intégration par parties sur la quantité I_n en utilisant la relation suivante : $sin^n(x) = sin(x)sin^{n-1}(x)$. Les fonctions $u : x \mapsto -cos(x)$ et $v : x \mapsto sin^{n-1}(x)$ sont de classe C^1. De plus, on a :

$$\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ u'(x) = sin(x) \text{ et } v'(x) = (n-1)cos(x)sin^{n-2}(x)$$

Ainsi :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)sin^{n-1}(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$= \left[-cos(x)sin^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sin^{n-2}(x)dx$$

$$= cos(0)sin^{n-1}(0) - cos\left(\frac{\pi}{2}\right)sin^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sin^{n-2}(x)dx$$

$$= 0 - 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sin^{n-2}(x)dx \quad \text{car } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sin^{n-2}(x)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - sin^2(x)\right] sin^{n-2}(x)dx$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\ ,\ I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\ ,\ I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\ ,\ nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$\iff \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\ ,\ I_n = \left(\tfrac{n-1}{n}\right) I_{n-2}}$$

Si on multiplie par I_{n-1} l'égalité ci-dessus, nous avons alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\ ,\ nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$$

Correction proposée - Question 2

2°) Lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. Prenons $n = 1$, alors :

$$1I_1I_{1-1} = I_1I_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}}$$

Correction proposée - Question 3

3°) Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1}.

D'après la question **2°)**, nous avons :

$$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ I_{2p} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) I_{2p-2} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left[\frac{(2p-2)-1}{2p-2}\right] I_{(2p-2)-2}$$

$$= \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) I_{2p-4} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\left[\frac{(2p-4)-1}{2p-4}\right] I_{(2p-4)-2}$$

$$= \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{2p-4}\right) I_{2p-6}$$

$$= \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{2p-4}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\right) I_0 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\prod_{k=1}^{p}(2k-1)}{\prod_{l=1}^{p}(2l)}\right]$$

Correction proposée - Question 3

3°) Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1}.

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\prod_{k=1}^{p}(2k-1)}{\prod_{l=1}^{p}(2l)}\right]\left[\frac{\prod_{n=1}^{p}(2n)}{\prod_{m=1}^{p}(2m)}\right] = \frac{\pi\,(2p)!}{2\left[\prod_{k=1}^{p}(2k)\right]^2} = \frac{\pi\,(2p)!}{2^{2p+1}\,(p!)^2}$$

On observe que pour $p = 0$, nous avons la formule qui est toujours juste. Ainsi :

$$\boxed{\forall\ p \in \mathbb{N},\ \ I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}}$$

En utilisant la réponse obtenue à la question **2°)**, nous avons :

$$\forall\ p \in \mathbb{N},\ \ I_{2p+1} = \frac{\pi}{2I_{2p}\,(2p+1)} \iff \boxed{\forall\ p \in \mathbb{N},\ \ I_{2p+1} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

Correction proposée - Question 4

4°) Préciser la monotomie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous avons :

$$\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq sin(x) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq sin^{n+1}(x) \leq sin^n(x)$$

$$\Longrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1}(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Correction proposée - Question 5

5°) Fournir, à l'aide de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2. En déduire un équivalent simple de I_n.

D'après la question **4°)**, nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \Longrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_{n+1} I_n \leq I_n^2$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq I_{n-1} \Longrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_{n+1} I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}}$$

D'après la question **2°)**, nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{\pi}{2\,(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

Par encadrement, nous pouvons en déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n I_n^2}{\pi} = 1$$

Correction proposée - Question 5

5°) Fournir, à l'aide de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2. En déduire un équivalent simple de I_n.

De plus, nous savons que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \to +\infty}$$