Exercice sur la convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Limite d'une suite réelle

Samedi 16 novembre 2025

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un $u_n := \dfrac{3n}{2n^2-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_1,\ |u_n| \leq 10^{-4}$.

2°) Trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_2,\ |u_n| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un $u_n := \dfrac{3n}{2n^2-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1°) Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_1,\ |u_n| \leq 10^{-4}$.
2°) Trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_2,\ |u_n| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.

Répondre à la seconde question permet de résoudre l'entièreté de l'exercice. C'est ce que nous allons faire. La première chose que nous allons calculer est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est 0. Ensuite, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et trouvons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $|u_n - 0| \leq \varepsilon \iff \left|\dfrac{3n}{2n^2-1}\right| \leq \varepsilon \iff \dfrac{3n}{2n^2-1} \leq \varepsilon$ (car $n \in \mathbb{N}^*$) $\iff 3n \leq (2\varepsilon)\, n^2 - \varepsilon \iff (2\varepsilon)\, n^2 - 3n - \varepsilon \geq 0$. Définissons l'application f_ε de la manière suivante :

$$f_\varepsilon\ :\ \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_\varepsilon(x) := 2\varepsilon x^2 - 3x - \varepsilon \end{cases}.$$

Nous pouvons remarquer que f_ε est convexe car $2\varepsilon > 0$, de plus, le discriminant vaut $\Delta := b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\,(2\varepsilon)\,(-\varepsilon) = 9 + 8\varepsilon^2 > 0$, donc nous avons deux racines réelles disctinctes. Intéressons à la plus grande racine qui vaut :

$$x_2 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{9+8\varepsilon^2}}{2(2\varepsilon)} = \frac{3+\sqrt{9+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} > 0 \quad .$$

Ainsi, nous avons $\forall\ x \in [x_2, +\infty[,\ f(x) \geq 0$. Etant donné que nous cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons prendre la partie entière supérieure de x_2 car nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$. Ainsi, l'entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ recherché est :

$$\boxed{N_2(\varepsilon) := \left\lceil \frac{3+\sqrt{9+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \right\rceil} \quad .$$

Utilisons le résultat obtenu ci-dessus afin de répondre à la première question. Nous posons $\varepsilon := 10^{-4}$, alors :

$$N_2\left(10^{-4}\right) := \left\lceil \frac{3+\sqrt{9+8\left(10^{-4}\right)^2}}{4.10^{-4}} \right\rceil = \left\lceil 7\ 500 + 2\ 500\sqrt{9+8.10^{-8}} \right\rceil$$

$$\implies N_2\left(10^{-4}\right) \approx \lceil 7\ 500 + 7\ 500,000\ 033 \rceil = \lceil 15\ 000,000\ 033 \rceil = 15\ 001\ .$$

Nous pouvons vérifier notre résultat en prenant $n := N_2\left(10^{-4}\right) - 1 = 15.10^3$ et en calculant $|u_n|$:

$$|u_n| = \left|\frac{3n}{2n^2-1}\right| = \frac{3n}{2n^2-1} = \frac{3\left(15.10^3\right)}{2\left(15.10^3\right)^2 - 1} = \frac{45\ 000}{450\ 000\ 000 - 1}$$

$$\Longleftrightarrow |u_n| = \frac{45\ 000}{449\ 999\ 999} \approx 0,0001000000002222 > 10^{-4}\ .$$

Prenons $n := N_2\left(10^{-4}\right) = 15\ 001$ et calculons $|u_n|$:

$$|u_n| = \left|\frac{3n}{2n^2-1}\right| = \frac{3n}{2n^2-1} = \frac{45\ 003}{2\left(15\ 001\right)^2 - 1} = \frac{45\ 003}{450\ 060\ 002 - 1}$$

$$\Longleftrightarrow |u_n| = \frac{45\ 003}{450\ 060\ 001} \approx 0,0000999933339999 < 10^{-4}\ .$$

Finalement :

$$\boxed{N_1 := 15\ 001}\ .$$

Une autre façon pour résoudre l'exercice consiste à observer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2n^2 - 1 \geq 2n^2 - n \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2 - 1} \leq \frac{1}{2n^2 - n}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3n}{2n^2 - 1} \leq \frac{3n}{2n^2 - n} \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2n - 1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left| \frac{3}{2n - 1} - 0 \right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow 3 \leq 2\varepsilon n - \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{3 + \varepsilon}{2\varepsilon}\ .$$

Etant donné que nous cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons prendre la partie entière supérieure car nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$. Ainsi, l'entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ recherché est :

$$\boxed{N_2\left(\varepsilon\right) := \left\lceil \frac{3 + \varepsilon}{2\varepsilon} \right\rceil}\ .$$

Utilisons le résultat obtenu ci-dessus afin de répondre à la première question. Nous posons $\varepsilon := 10^{-4}$, alors :

$$N_2\left(10^{-4}\right) := \left\lceil 1,5\left(10^{-4}\right)^{-1} + 0,5 \right\rceil = \lceil 15\ 000,5 \rceil = \boxed{15\ 001}\ .$$

Une dernière façon pour résoudre l'exercice consiste à observer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - 1 \geq 0 \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 2n^2 - 1 \geq n^2 \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2 - 1} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3n}{2n^2 - 1} \leq \frac{3n}{n^2} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{n}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left|\frac{3}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \iff 3 \leq \varepsilon n \iff n \geq \frac{3}{\varepsilon}\ .$$

Etant donné que nous cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons prendre la partie entière supérieure car nous savons que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$. Ainsi, l'entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ recherché est :

$$\boxed{N_2(\varepsilon) := \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil}\quad .$$

Utilisons le résultat obtenu ci-dessus afin de répondre à la première question. Nous posons $\varepsilon := 10^{-4}$, alors :

$$N_2\left(10^{-4}\right) := \left\lceil 3\left(10^{-4}\right)^{-1} \right\rceil = \lceil 30\ 000 \rceil = \boxed{30\ 000}\ .$$

Pour conclure, la première méthode fournit le résultat le plus précis au prix d'un certain nombre de calculs, la deuxième méthode propose d'utiliser un encadrement fournissant un résultat moins fin mais plus rapide à obtenir, enfin, la dernière méthode est similaire à la deuxième mais avec un résultat encore moins fin.