

Exercice sur la partie entière & disjonction de cas

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Analyse
—

Nombres réels, suites numériques

—
Exercices

Exercice :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n .$$

Exercice :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n .$$

Faisons une disjonction de cas avec une congruence modulo quatre.

Ainsi, si $n \equiv 0 [4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k$, d'où :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{4k-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+4}{4} \right\rfloor &= \left\lfloor 2k - \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor k+1 \rfloor \\ &= 2k - 1 + k + k + 1 = 4k = n . \end{aligned}$$

Si $n \equiv 1 [4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k + 1$, d'où :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{4k+1-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+1+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+1+4}{4} \right\rfloor &= \lfloor 2k \rfloor + \left\lfloor k + \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor k + 1 + \frac{1}{4} \right\rfloor \\ &= 2k + k + k + 1 = 4k + 1 = n . \end{aligned}$$

Si $n \equiv 2 [4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k + 2$, d'où :

$$\left\lfloor \frac{4k+2-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+2+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+2+4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor 2k + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor k+1 \rfloor + \left\lfloor k+1 + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ = 2k + k + 1 + k + 1 = 4k + 2 = n .$$

Si $n \equiv 3 [4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k + 3$, d'où :

$$\left\lfloor \frac{4k+3-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+3+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+3+4}{4} \right\rfloor \\ = \lfloor 2k+1 \rfloor + \left\lfloor k+1 + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor k+1 + \frac{3}{4} \right\rfloor = 2k+1 + k+1 + k+1 = 4k+3 = n .$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n} .$$