Table des matières

Table des figures

Table des codes informatiques

Table des tableaux

Chapitre 1

Analyse vectorielle

1.1 Exercice 1 (★ ☆ ☆ ☆ ☆)

1.1.1 Enoncé

Déterminer le vecteur unitaire s'étendant de l'origine vers le point G(2 ; -2 ; -1).

1.1.2 Solution

Rappel # 1 : Un vecteur unitaire est un vecteur dont sa norme euclidienne est égale à un.

Nous avons le vecteur **G** s'étendant de l'origine vers le point G(2 ; -2 ; -1) s'exprimant de la façon suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z$$

Pour répondre au problème posé, il suffit donc de normaliser le vecteur **G** par sa norme euclidienne (*id est* $\|\mathbf{G}\|_2$).

Rappel # 2 : La normalisation d'un vecteur est une technique qui consiste à diviser par la norme euclidienne du vecteur (en supposant qu'il ne s'agit pas du vecteur nul, sinon on divise par zéro ...) les différentes composantes de notre vecteur afin d'obtenir un nouveau vecteur qui a une norme euclienne égale à un.

Ainsi, nous avons le vecteur unitaire $\mathbf{u}_G$ suivant :

$$\mathbf{u}_G = \frac{\mathbf{G}}{\|\mathbf{G}\|_2} = \frac{2\mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2\mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z}{\sqrt{9}} = \frac{2\mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{u}_x - \frac{2}{3}\mathbf{u}_y - \frac{1}{3}\mathbf{u}_z$$

On peut vérifier que le vecteur obtenu est bien unitaire (*id est* $\|\mathbf{u}_G\|_2 = 1$) :

$$\|\mathbf{u}_G\|_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

1.2 Exercice 2 (★ ☆ ☆ ☆ ☆)

1.2.1 Enoncé

On se donne les points M(-1 ; 2 ; 1), N (3 ; -3 ; 0), et P(-2 ; -3 ; -4).

1°) Déterminer le vecteur **MN** allant du point M vers le point N.
2°) Déterminer le vecteur **MN**+**MP**, qui est la somme du vecteur allant du point M vers le point N et du vecteur allant du point M vers le point P.
3°) Déterminer la quantité suivante $\|\mathbf{M}\|_2$, qui est la norme euclidienne du vecteur allant de l'origine au point M.
4°) Déterminer $\mathbf{u}_{MP}$, qui est le vecteur unitaire allant du point M au point P.
5°) Déterminer la quantité suivante $\|2\mathbf{P} - 3\mathbf{N}\|_2$, qui est la norme euclidienne d'une combinaison linéaire du vecteur **P** (vecteur allant de l'origine au point P) et du vecteur **N** (vecteur allant de l'origine au point N).

1.2.2 Solution

1°) Il suffit d'utiliser la relation de Chasles afin de fournir une expression explicite du vecteur **MN** :

$$\mathbf{M} + \mathbf{MN} = \mathbf{N} \Longleftrightarrow \mathbf{MN} = \mathbf{N} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\mathbf{u}_x - 5\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z$$

2°) On fait le même raisonnement que pour la question 1°) en appliquant la relation de Chasles sur les vecteurs **MN** et **MP** :

$$\mathbf{MN} + \mathbf{MP} = (\mathbf{N} - \mathbf{M}) + (\mathbf{P} - \mathbf{M}) = \mathbf{N} + \mathbf{P} - 2\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2+2 \\ -3-3-4 \\ 0-4-2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{MN} + \mathbf{MP} = \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}_x - 10\mathbf{u}_y - 6\mathbf{u}_z$$

3°) La norme euclidienne du vecteur **M** vaut :

$$\|\mathbf{M}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

4°) Le vecteur unitaire allant du point M au point P vaut :

$$\mathbf{u}_{MP} = \frac{\mathbf{MP}}{\|\mathbf{MP}\|_2} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{M}}{\|\mathbf{MP}\|_2} = \frac{1}{\|\mathbf{MP}\|_2}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{MP}\|_2}\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{u}_{MP} = \frac{-\mathbf{u}_x - 5\mathbf{u}_y - 5\mathbf{u}_z}{\sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-5)^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{51}}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{-5}{\sqrt{51}}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{-5}{\sqrt{51}}\right)\mathbf{u}_z$$

5°) Pour cette question, calculons dans un premier temps le vecteur $2\mathbf{P} - 3\mathbf{N}$:

$$2\mathbf{P} - 3\mathbf{N} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} = -13\mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_y - 8\mathbf{u}_z$$

Nous pouvons maintenant calculer la norme euclidienne du vecteur ci-dessus et obtenir ainsi la réponse désirée :

$$\|2\mathbf{P} - 3\mathbf{N}\|_2 = \sqrt{(-13)^2 + (3)^2 + (-8)^2} = \sqrt{169+9+64} = \sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = \sqrt{11^2 \times 2}$$

$$\Longleftrightarrow \|2\mathbf{P} - 3\mathbf{N}\|_2 = 11\sqrt{2} \approx 15,56$$

1.3 Exercice 3 (★ ☆ ☆ ☆ ☆)

1.3.1 Enoncé

Rappel : Un champ de vecteurs peut être compris comme étant une application qui prend en entrée un vecteur et qui fournit en sortie un autre vecteur.

Soit $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ un champ de vecteurs que l'on définit de la manière suivante :

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(x;y;z) = \frac{125\left[(x-1)\,\mathbf{u}_x + (y-2)\,\mathbf{u}_y + (z+1)\,\mathbf{u}_z\right]}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

1°) Evaluer le champ de vecteurs $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ au point P(2 ; 4 ; 3).
2°) Déterminer un vecteur unitaire qui donne la direction du champ de vecteurs $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ en P.
3°) Déterminer la surface f(x ; y ; z) sur laquelle $\|\mathbf{S}(\mathbf{r})\|_2 = 1$.

1.3.2 Solution

1°) Pour cette première question, il suffit de remplacer les variables x, y et z par les coordonnées du point P :

$$\mathbf{S}(\mathbf{P}) = \mathbf{S}(2;4;3) = \frac{125\left[(2-1)\,\mathbf{u}_x + (4-2)\,\mathbf{u}_y + (3+1)\,\mathbf{u}_z\right]}{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (3+1)^2} = \left(\frac{125}{21}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{250}{21}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{500}{21}\right)\mathbf{u}_z$$

2°) Il suffit de normaliser la réponse obtenue dans la question 1°) par la norme euclidienne de $\mathbf{S}(\mathbf{P})$ (*id est* $\|\mathbf{S}(\mathbf{P})\|_2$) :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{S}(\mathbf{P})} = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{P})}{\|\mathbf{S}(\mathbf{P})\|_2} = \frac{\left(\frac{125}{21}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{250}{21}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{500}{21}\right)\mathbf{u}_z}{\sqrt{\left(\frac{125}{21}\right)^2 + \left(\frac{250}{21}\right)^2 + \left(\frac{500}{21}\right)^2}} = \left(\frac{125}{\sqrt{328125}}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{250}{\sqrt{328125}}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{500}{\sqrt{328125}}\right)\mathbf{u}_z$$

3°) Pour cette question, on va utiliser la condition qui est donnée :

$$\|\mathbf{S}(\mathbf{r})\|_2 = 1 \Longleftrightarrow \frac{125\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} = 1$$

$$\Longleftrightarrow f(x;y;z) := \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} = 125$$

1.4 Exercice 4 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

1.4.1 Enoncé

Soit $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ un champ de vecteurs que l'on définit de la manière suivante :

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(x;y;z) = y\mathbf{u}_x - 2,5x\mathbf{u}_y + 3\mathbf{u}_z$$

De plus, considérons le point $Q(4;5;2)$.

1°) Evaluer le champ de vecteurs $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ au point $Q(4;5;2)$.
2°) Déterminer la composante scalaire de $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ dans la direction du vecteur $\mathbf{u}_N = \left(\frac{2}{3}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{1}{3}\right)\mathbf{u}_y$