

Exercice sur les sommes, l'identité remarquable et le télescopage

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Techniques de calculs

—
Calculs algébriques

—
Exercices

Exercice

Calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} .$$

Exercice

Calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} .$$

Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^4 + 2k^2 + 1) - k^2}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^2 + 1)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^2 + k + 1) \cdot (k^2 - k + 1)}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(k^2 + k + 1) - (k^2 - k + 1)}{(k^2 + k + 1) \cdot (k^2 - k + 1)}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-1)k+1} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p(p+1)+1} \right]$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k-1+1) \cdot (k+1) + 1} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p(p+1) + 1} \right]$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=-1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1) + 1} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p(p+1) + 1} \right]$$

$$\begin{aligned} \iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k(k+1) + 1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p(p+1) + 1} \dots \right. \\ &\quad \dots \left. - \frac{1}{n(n+1) + 1} \right] \end{aligned}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n(n+1) + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1) + 1 - 1}{n(n+1) + 1} \right]$$

$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n^2 + n}{2(n^2 + n + 1)}}.$$