Exercice pour montrer qu'un nombre complexe est réel

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Nombres complexes

—

Exercices

Exercice :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\dfrac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

Exercice :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\dfrac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

Nous allons le montrer de deux façons. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, nous avons alors :

$$\frac{(z-i)\,\overline{(1-iz)}}{(1-iz)\,\overline{(1-iz)}} = \frac{(z-i)\,(1+i\overline{z})}{|1-iz|^2} = \frac{z+i|z|^2-i+\overline{z}}{|1-iz|^2} = \frac{z+\overline{z}+i\left(|z|^2-1\right)}{|1-iz|^2}$$

$$\iff \frac{z-i}{1-iz} = \frac{2\mathfrak{Re}\,(z)+i\left(|z|^2-1\right)}{|1-iz|^2} \; .$$

Nous pouvons remarquer que $|1-iz|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et que pour avoir un nombre réel, il faut et il suffit d'avoir la partie imaginaire nulle, *id est* :

$$|z|^2 - 1 = 0 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1 \; .$$

La seconde façon de résoudre cet exercice consiste à se rappeler qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si, $z = \overline{z}$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$:

$$\frac{z-i}{1-iz} = \overline{\left(\frac{z-i}{1-iz}\right)} \Longleftrightarrow \frac{z-i}{1-iz} = \frac{\overline{z}+i}{1+i\overline{z}} \Longleftrightarrow (z-i)\,(1+i\overline{z}) = (1-iz)\,(\overline{z}+i)$$

En continuant :

$$z+i|z|^2-i+\overline{z} = \overline{z}+i-i|z|^2+z \Longleftrightarrow 2i|z|^2-2i=0 \Longleftrightarrow |z|^2=1 \Longleftrightarrow |z|=1\ .$$