Exercice sur la convergence d'une suite réelle vers une limite finie dans un ouvert

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Limite d'une suite réelle

Exercice

1°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in]a,b[$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in]a,b[$.

2°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$). Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$).

Exercice

1°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in]a,b[$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in]a,b[$.
2°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$). Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$).

1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers une (unique) limite $l \in \mathbb{R}$, nous pouvons exprimer cela en revenant à la définition de la convergence d'une suite :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi, à partir d'un certain rang N, nous avons pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, l'inégalité suivante :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Vu que cette inégalité est vraie à partir d'un certain rang N et pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le but du jeu va être de choisir une valeur ε suffisament petite qui permet de se retrouver dans l'ouvert $]a,b[$, *id est* :

$$a < l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon < b$$

Nous voulons donc :

$$a < l - \varepsilon \ \wedge \ l + \varepsilon < b \Longleftrightarrow \varepsilon < l - a \ \wedge \ \varepsilon < b - l \ .$$

Il est rigoureux de souligner que $l \in \left]a, b\right[$ et que par conséquent, $l - a > 0$ et $b - l > 0$. Ainsi, si nous choisissons $\varepsilon \in \left]0, \min\left(l - a, b - l\right)\right[$, nous aurons tous les termes de notre suite qui à partir d'un certain rang N seront dans l'ouvert $\left]a, b\right[$. A titre d'exemple, nous pouvons prendre $\varepsilon := \dfrac{\min\left(l - a, b - l\right)}{2}$ pour se retrouver dans l'ouvert $\left]a, b\right[$ à partir d'un certain rang N. Nous avons répondu à la première question. Enfin, une petite remarque consiste à voir que le résultat $\min\left(l - a, b - l\right)$ est relativement intuitif. En effet, on mesure la distance entre la valeur de la limite $l \in \mathbb{R}$ et les deux bordures (a et b) de notre ouvert $\left]a, b\right[$. Si on prend la plus petite distance, alors toute valeur de contrôle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieure à cette dernière convient.

2°) La première question permet de répondre rapidement à la seconde. En effet, ce second résultat découle du premier résultat que nous venons de démontrer. Si nous prenons un intervalle ouvert contenant $l \in \mathbb{R}_+^*$ et inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, alors le résultat est prouvé. Ainsi, l'ouvert $\left]\dfrac{l}{2}, \dfrac{3l}{2}\right[$ convient pour répondre à cette question.

Nous allons maintenant proposer une autre façon de répondre à ce problème (si on n'a pas vu le lien entre les deux questions) qui consiste à revenir à la définition de la convergence d'une suite réelle :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi, à partir d'un certain rang N, nous avons pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, l'inégalité suivante :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Vu que cette inégalité est vraie à partir d'un certain rang N et pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le but du jeu va être de choisir une valeur ε suffisament petite qui permet de se retrouver dans $\mathbb{R}_+^*$, *id est* :

$$0 < l - \varepsilon \leq u_n \Longrightarrow \varepsilon \in \left]0; 1\right[\ .$$

Nous pouvons prendre à titre d'exemple $\varepsilon := \dfrac{l}{2}$ et nous avons à partir d'un certain rang N, les termes u_n de la suite qui sont contenus dans $\left[\dfrac{l}{2}, \dfrac{3l}{2}\right] \subset \mathbb{R}_+^*$.