

Exercice sur les sommes, la quantité conjuguée et le télescope

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Calculs algébriques

—

Exercices

Exercice

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2\,022 .$$

Exercice

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2\,022.$$

Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2 - (\sqrt{k+1})^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - k - 1}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sum_{p=1}^n \sqrt{p} = \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{p=1}^n \sqrt{p}$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{p=1}^n \sqrt{p} = \sqrt{n+1} + \sum_{k=2}^n \sqrt{k} - \sum_{p=2}^n \sqrt{p} - \sqrt{1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sqrt{n+1} - 1.$$

Ainsi, nous pouvons trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ en résolvant l'inéquation ci-dessous :

$$S_n \geq 2\,022$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 \geq 2\,022$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{n+1} \geq 2\,023$$

$$\Longleftrightarrow (\sqrt{n+1})^2 \geq (2\,023)^2$$

$$\Longleftrightarrow n+1 \geq (2\,023)^2$$

$$\Longleftrightarrow n \geq (2\,023)^2 - 1^2$$

$$\Longleftrightarrow n \geq (2\,023 + 1) \cdot (2\,023 - 1)$$

$$\Longleftrightarrow n \geq 2\,024 \times 2\,022$$

$$\Longleftrightarrow n \geq 4\,092\,528 .$$

Finalement :

$$\mathcal{S} = \{4\,092\,528\} .$$