Préparation à l'agrégation externe

Niveau MPSI/L1 (corrigés)

Loïc ALAVOINE

9 décembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

1.1 Exercice 1

1.1.1 Enoncé

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall \ x \in \mathbb{R},\ 2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3 \ .$$

1.1.2 Solution

Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Nous allons dans un premier temps prendre une application f respectant la propriété décrite ci-dessus et un $x \in \mathbb{R}$ afin d'obtenir des conditions nécessaires. Ainsi, nous avons :

$$2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3 \ ,$$

en prenant $-x \in \mathbb{R}$,

$$2f(-x) + f(x) = 3x^2 - x + 3 \ .$$

Prenons deux fois la première équation et soustrayons cette dernière par la seconde :

$$4f(x) + 2f(-x) - 2f(-x) - f(x) = 6x^2 + 2x + 6 - 3x^2 + x - 3$$

$$\Longleftrightarrow 3f(x) = 3x^2 + 3x + 3 \Longleftrightarrow f(x) = x^2 + x + 1 \ .$$

Nous allons maintenant voir si nos conditions nécessaires sont également des conditions suffisantes :

$$2f(x) + f(-x) = 2x^2 + 2x + 2 + x^2 - x + 1 = 3x^2 + x + 3 \ .$$

Ainsi, il y a une unique application qui convient :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := x^2 + x + 1 \end{cases} \ .$$

1.2 Exercice 2

1.2.1 Enoncé

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\ .$$

1.2.2 Solution

Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Nous allons dans un premier temps prendre une application f respectant la propriété décrite ci-dessus et un $x \in \mathbb{R}^*$ afin d'obtenir des conditions nécessaires. Ainsi, nous avons :

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\ ,$$

en prenant $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}\ .$$

Prenons la première équation et soustrayons cette dernière par trois fois la seconde :

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) - 9f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2} \Longleftrightarrow -8f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2} \Longleftrightarrow f(x) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8}\ .$$

Nous allons maintenant voir si nos conditions nécessaires sont également des conditions suffisantes :

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8} + 3\left(\frac{3x^2}{8} - \frac{1}{8x^2}\right) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8} + \frac{9x^2}{8} - \frac{3}{8x^2} = x^2\ .$$

Ainsi, il y a une unique application qui convient :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := \dfrac{3}{8x^2} - \dfrac{x^2}{8} \end{cases}\ .$$

Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Exercice 1

2.1.1 Enoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$.
1°) Exprimer à l'aide du factorielle de n, notée $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.
2°) On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \ .$$

2.1.2 Solution

1°) Nous avons :

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \ A_n := \prod_{k=1}^{n} (2k) = \left(\prod_{k=1}^{n} 2 \right) . \left(\prod_{k=1}^{n} k \right) = 2^n n!$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall \ n \in \mathbb{N}, \ A_n = 2^n n!} \ .$$

2°) Nous avons :

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \ B_n := \prod_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 \ . \left(\prod_{k=0}^{n} 2k+1 \right) = \left(\frac{A_n}{A_n} \right) . \left(\prod_{k=0}^{n} 2k+1 \right)$$

$$\Longleftrightarrow \forall \ n \in \mathbb{N}, \ B_n = \frac{\left(\prod_{p=1}^{n} 2p \right) . \left(\prod_{k=0}^{n} 2k+1 \right)}{\prod_{q=1}^{n} (2q)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{2n+1} k \right)}{2^n n!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall \ n \in \mathbb{N}, \ B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}} \ .$$

2.2 Exercice 2

2.2.1 Enoncé

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \geq 2\ 022\ .$$

2.2.2 Solution

Nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right).\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k}\right)^2-\left(\sqrt{k+1}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-k-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{p=1}^{n} \sqrt{p} = \sum_{k=1+1}^{n+1} \sqrt{k+1-1} - \sum_{p=1}^{n} \sqrt{p}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{p=1}^{n} \sqrt{p} = \sqrt{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} - \sum_{p=2}^{n} \sqrt{p} - \sqrt{1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sqrt{n+1} - 1\ .$$

Ainsi, nous pouvons trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ en résolvant l'inéquation ci-dessous :

$$S_n \geq 2\ 022$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 \geq 2\ 022$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{n+1} \geq 2\ 023$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \geq (2\ 023)^2$$

$$\Longleftrightarrow n+1 \geq (2\ 023)^2$$

$$\Longleftrightarrow n \geq (2\ 023)^2 - 1^2$$

$$\Longleftrightarrow n \geq (2\ 023+1).(2\ 023-1)$$

$$\Longleftrightarrow n \geq 2\ 024 \times 2\ 022$$

$$\Longleftrightarrow n \geq 4\ 092\ 528\ .$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\ 092\ 528\}}\ .$$

2.3 Exercice 3

2.3.1 Enoncé

Calculer :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}\ .$$

2.3.2 Solution

Nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k^4 + 2k^2 + 1) - k^2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k^2 + 1)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k^2 + k + 1)\,.\,(k^2 - k + 1)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(k^2 + k + 1\right) - \left(k^2 - k + 1\right)}{(k^2 + k + 1)\,.\,(k^2 - k + 1)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)\,k + 1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,(p+1) + 1}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0-1}^{n-1} \frac{1}{(k - 1 + 1)\,.\,(k + 1) + 1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,(p+1) + 1}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=-1}^{n-1} \frac{1}{k\,(k+1) + 1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,(p+1) + 1}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k\,(k+1) + 1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p\,(p+1) + 1} - \frac{1}{n\,(n+1) + 1}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n\,(n+1) + 1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n\,(n+1) + 1 - 1}{n\,(n+1) + 1}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n^2 + n}{2\,(n^2 + n + 1)}}\ .$$

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Exercice 1

3.1.1 Enoncé

Calculer la partie réelle du nombre complexe $A \coloneqq \dfrac{3-i}{(1+i)\,(1+2i)}$.

3.1.2 Solution

Nous avons :

$$A \coloneqq \frac{3-i}{(1+i)\,(1+2i)} = \frac{3-i}{1+2i+i-2} = \frac{(3-i)\,(-1-3i)}{(-1+3i)\,(-1-3i)} = \frac{-3-9i+i-3}{1+9}$$

$$\Longleftrightarrow A = \frac{-6-8i}{10} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \; .$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathfrak{Re}\,(A) = -0,6} \; .$$

3.2 Exercice 2

3.2.1 Enoncé

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$. Montrer que $\dfrac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

3.2.2 Solution

Nous allons le montrer de deux façons. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, nous avons alors :

$$\frac{(z-i)\,\overline{(1-iz)}}{(1-iz)\,\overline{(1-iz)}} = \frac{(z-i)(1+i\overline{z})}{|1-iz|^2} = \frac{z+i|z|^2-i+\overline{z}}{|1-iz|^2} = \frac{z+\overline{z}+i\left(|z|^2-1\right)}{|1-iz|^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z-i}{1-iz} = \frac{2\mathfrak{Re}\,(z)+i\left(|z|^2-1\right)}{|1-iz|^2}\ .$$

Nous pouvons remarquer que $|1-iz|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et que pour avoir un nombre réel, il faut et il suffit d'avoir la partie imaginaire nulle, *id est* :

$$|z|^2-1=0 \Longleftrightarrow |z|^2=1 \Longleftrightarrow |z|=1\ .$$

La seconde façon de résoudre cet exercice consiste à se rappeler qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si, $z=\overline{z}$. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$:

$$\frac{z-i}{1-iz} = \overline{\left(\frac{z-i}{1-iz}\right)} \Longleftrightarrow \frac{z-i}{1-iz} = \frac{\overline{z}+i}{1+i\overline{z}} \Longleftrightarrow (z-i)(1+i\overline{z}) = (1-iz)(\overline{z}+i)$$

$$\Longleftrightarrow z+i|z|^2-i+\overline{z} = \overline{z}+i-i|z|^2+z \Longleftrightarrow 2i|z|^2-2i=0 \Longleftrightarrow |z|^2=1 \Longleftrightarrow |z|=1\ .$$

3.3 Exercice 3

3.3.1 Enoncé

Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$, montrer que $\dfrac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

3.3.2 Solution

Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$, nous avons alors :

$$\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathfrak{Im}\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1-z}{1+z} = \overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)} \Longleftrightarrow \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}$$
$$\Longleftrightarrow (1-z)(1+\overline{z}) = (1+z)(1-\overline{z}) \Longleftrightarrow 1+\overline{z}-z-|z|^2 = 1-\overline{z}+z-|z|^2$$
$$\Longleftrightarrow 2\overline{z} = 2z \Longleftrightarrow z = \overline{z} \Longleftrightarrow \mathfrak{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{z \in \mathbb{R}}\ .$$

3.4 Exercice 4

3.4.1 Enoncé

Montrer que :

$$\forall\ z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}\left(z\right) = \frac{z+\overline{z}}{2},\ \mathfrak{Im}\left(z\right) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \text{ et } \overline{\overline{z}} = z\ .$$

3.4.2 Solution

Soit $z \in \mathbb{C}$, on alors :

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{\mathfrak{Re}\left(z\right) + i\mathfrak{Im}\left(z\right) + \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\mathfrak{Im}\left(z\right)}{2} = \frac{2\mathfrak{Re}\left(z\right)}{2} = \mathfrak{Re}\left(z\right)\ ,$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{\mathfrak{Re}\left(z\right) + i\mathfrak{Im}\left(z\right) - \mathfrak{Re}\left(z\right) + i\mathfrak{Im}\left(z\right)}{2i} = \frac{2i\mathfrak{Im}\left(z\right)}{2i} = \mathfrak{Im}\left(z\right)\ ,$$

Enfin :

$$\overline{z} = \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\mathfrak{Im}\left(z\right) = \mathfrak{Re}\left(\overline{z}\right) + i\mathfrak{Im}\left(\overline{z}\right)$$

ce qui nous amène à :

$$\overline{\overline{z}} = \mathfrak{Re}\left(\overline{z}\right) - i\mathfrak{Im}\left(\overline{z}\right) = \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\left[-\mathfrak{Im}\left(z\right)\right] = \mathfrak{Re}\left(z\right) + i\mathfrak{Im}\left(z\right) = z\ .$$

Chapitre 4

Raisonnement, opérations sur les ensembles

4.1 Exercice 1

4.1.1 Enoncé

Soient $a \leq b$ deux réels. prouver par double inclusion que :

$$[a, b] = \{(1-\lambda)\,a + \lambda b \mid \lambda \in [0;1]\} \ .$$

4.1.2 Solution

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \{(1-\lambda)\,a + \lambda b \mid \lambda \in [0;1]\}$, alors il existe un $\lambda \in [0;1]$ tel que $x = (1-\lambda)\,a + \lambda b = a + \lambda\,(b-a)$. On sait que :

$$b \geq a \iff b - a \geq 0 \iff \lambda\,(b-a) \geq 0 \iff a + \lambda\,(b-a) \geq a \ .$$

De plus :

$$\lambda\,(b-a) \leq 1\,(b-a) \iff a + \lambda\,(b-a) \leq a + (b-a) \iff a + \lambda\,(b-a) \leq b \ .$$

On a donc $x \in [a;b]$, ce qui nous donne $\{(1-\lambda)\,a + \lambda b \mid \lambda \in [0;1]\} \subset [a;b]$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in [a;b]$, si $a = b$ alors $x \in \{a\} \iff x = a + 0\,(b-a)$. Dans ce cas, on peut poser $\lambda := 0$ et nous avons $x = (1-\lambda)\,a + \lambda b$, donc $x \in \{(1-\lambda)\,a + \lambda b \mid \lambda \in [0;1]\}$.
Supposons maintenant que $x \in [a;b]$ et $a < b$. Ainsi, nous avons :

$$a \leq x \leq b \iff a - a \leq x - a \leq b - a \iff \frac{0}{b-a} \leq \frac{x-a}{b-a} \leq \frac{b-a}{b-a} \iff 0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1 \ .$$

Posons $\lambda := \dfrac{x-a}{b-a}$, alors :

$$a + \lambda\,(b-a) = a + \left(\frac{x-a}{b-a}\right).\,(b-a) = a + x - a = x \ .$$

Donc $x \in \{(1-\lambda)\,a + \lambda b \mid \lambda \in [0;1]\}$, nous avons alors $[a;b] \subset \{(1-\lambda)\,a + \lambda b \mid \lambda \in [0;1]\}$, d'où l'égalité.

Chapitre 5

Applications, relations, entiers naturels

5.1 Exercice 1

5.1.1 Enoncé

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset E$ et $B \subset E$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

5.1.2 Solution

Nous allons procéder par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A \cup B)$,
alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$,
alors $x \in A$ ou $x \in B$ tel que $y = f(x)$,
alors $[x \in A$ tel que $y = f(x)]$ ou $[x \in B$ tel que $y = f(x)]$,
alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$,
alors $y \in f(A) \cup f(B)$,
alors $y \in f(A) \cup f(B)$,
donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$,
alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$,
alors [il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$] ou [il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$],
alors [il existe $x_1 \in A \cup B$ tel que $y = f(x_1)$] ou [il existe $x_2 \in B \cup A$ tel que $y = f(x_2)$],
alors $y \in f(A \cup B)$ ou $y \in f(B \cup A)$,
alors $y \in f(A \cup B)$,
donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

5.2 Exercice 2

5.2.1 Enoncé

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset F$ et $B \subset F$, montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

5.2.2 Solution

Nous allons procéder par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A \cup B$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$,
alors $[x \in E$ tel que $f(x) \in A]$ ou $[x \in E$ tel que $f(x) \in B]$,
alors $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$,
alors $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
donc $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
$\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
alors $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$,
alors $[x \in E$ tel que $f(x) \in A]$ ou $[x \in E$ tel que $f(x) \in B]$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A \cup B$,
alors $x \in f^{-1}(A \cup B)$,
donc $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.

5.3 Exercice 3

5.3.1 Enoncé

1°) Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset E$ et $B \subset E$, montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2°) Montrer que f injective $\Longrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3°) Fournir un contre-exemple qui permet d'illustrer pourquoi il faut avoir une application injective pour avoir l'égalité.
4°) Finalement, montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Longrightarrow f$ injective et conclure.

5.3.2 Solution

1°) Soit $y \in f(A \cap B)$,
alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$,
alors $x \in A$ et $x \in B$ tel que $y = f(x)$,
alors $[x \in A$ tel que $y = f(x)]$ et $[x \in B$ tel que $y = f(x)]$,
alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$,
alors $y \in f(A) \cap f(B)$,
donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2°) Supposons que l'application f est injective et soit $y \in f(A) \cap f(B)$,
alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$,
alors [il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$] et [il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$],
alors $f(x_1) = f(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$ que l'on notera x (par injectivité de f),
alors [il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$] et [il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$],
alors il existe $x \in A$ et $x \in B$ tel que $y = f(x)$,
alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$,
alors $y \in f(A \cap B)$,
alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$,
nous avons avec la première question l'égalité.

3°) Nous pouvons construire une application f surjective avec $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $f(A) = f(B) = \{3\}$. Ainsi, nous avons $f(A \cap B) = \varnothing \neq \{3\} = f(A) \cap f(B)$.

4°) Pour montrer que f est injective, il faut prouver que $\forall (x, \hat{x}) \in E^2,\ f(x) = f(\hat{x}) \Longrightarrow x = \hat{x}$. Raisonnons par contraposition en prenant $(x, \hat{x}) \in E^2$ tel que $x \neq \hat{x}$. Nous avons alors $\{x\} \neq \{\hat{x}\}$ d'où $\{x\} \cap \{\hat{x}\} = \varnothing$. Ainsi, nous avons $f(\{x\} \cap \{\hat{x}\}) = f(\varnothing) = \varnothing$ mais aussi (par hypothèse) $f(\{x\} \cap \{\hat{x}\}) = f(\{x\}) \cap f(\{\hat{x}\})$, ce qui donne $f(\{x\}) \cap f(\{\hat{x}\}) = \varnothing$, ce qui permet de conclure que $f(x) \neq f(\hat{x})$. Nous avons ainsi l'injectivité de f nous permettant finalement d'aboutir à l'équivalence suivante :

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) .$$

Nous aurions pu raisonner par implication directe en prenant $(x, \hat{x}) \in E^2$ tel que $f(x) = f(\hat{x})$. Nous avons alors $A := \{x\}$, $B := \{\hat{x}\}$, $f(A) = \{f(x)\}$ et $f(B) = \{f(\hat{x})\}$. Ainsi, nous avons $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \cap \{f(\hat{x})\} = \{f(x)\} \neq \varnothing$ et $f(A \cap B) = f(\{x\} \cap \{\hat{x}\}) = f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$, donc $\{x\} \cap \{\hat{x}\} \neq \varnothing$, donc $x = \hat{x}$. L'application f est injective.

5.4 Exercice 4

5.4.1 Enoncé

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec $A \subset F$ et $B \subset F$, montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

5.4.2 Solution

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A \cap B$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$,
alors $[x \in E$ tel que $f(x) \in A]$ et $[x \in E$ tel que $f(x) \in B]$,
alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$,
alors $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
$\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$,
alors $[x \in E$ tel que $f(x) \in A]$ et $[x \in E$ tel que $f(x) \in B]$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$,
alors $x \in E$ tel que $f(x) \in A \cap B$,
alors $x \in f^{-1}(A \cap B)$,
donc $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.

5.5 Exercice 5

5.5.1 Enoncé

Sur l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$, on définit la relation ~ par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \exists\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p,\ u_n = v_n\ .$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

5.5.2 Solution

Montrons que la relation ~ est réflexive, *id est* :

$$\forall\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ \exists\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p,\ u_n = u_n\ .$$

L'entier $p = 0 \in \mathbb{N}$ convient.

Montrons que la relation ~ est transitive, *id est* :

$$\forall\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \wedge\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\ .$$

Supposons que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \exists\ p_1 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p_1,\ u_n = v_n\ .$$

Et supposons également :

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \exists\ p_2 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p_2,\ v_n = w_n\ .$$

Nous avons alors :

$$\exists\ p = \max(p_1, p_2) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p,\ u_n = v_n\ \wedge\ v_n = w_n\ .$$

$$\Longrightarrow \exists\ p = \max(p_1, p_2) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p,\ u_n = w_n \Longleftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\ .$$

Montrons que la relation ~ est symétrique :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p,\ u_n = v_n$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq p,\ v_n = u_n$$

$$\Longleftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ .$$

Ainsi, la relation ~ est réflexive, transitive et symétrique, donc la relation ~ est une relation d'équivalence.

Chapitre 6

Nombres réels, suites numériques

6.1 Exercice 1

6.1.1 Enoncé

Montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se définissant pour tout entier naturel n comme $u_n := (-1)^n$ est divergente (à partir de la définition de divergence).

6.1.2 Solution

Soit $l \in \mathbb{R}$, il faut trouver un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que quelque soit le rang $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel n tel que $n \geq N$ et $|u_n - l| > \varepsilon$. Nous pouvons faire l'observation que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \in \{-1; 1\}$, ainsi, si n est pair, nous avons $u_n = 1$. Donc, quelque soit $N \in \mathbb{N}$, on pourra toujours trouver un entier n pair en prenant $n := N$ si N est pair ou $n := N + 1$ si N est impair qui respecte l'inégalité $n \geq N$ (le cas d'égalité correspond à N qui est pair). Enfin, pour un n pair qui respecte $n \geq N$, nous voulons avoir $|1 - l| > \varepsilon$. Pour ce faire, pour $l \neq 1$ nous pouvons prendre $\varepsilon := \dfrac{|1-l|}{2}$, en revanche, quand $l = 1$, notre ε que nous avons définit devient nul (or, il ne faut pas). On se rend bien compte que le choix de ε dépend de la valeur de l, on a donc une dépendance que l'on peut noter $\varepsilon(l)$. Remarquons que si n est impair, alors $u_n = -1$. De plus, on pourra toujours trouver un entier n impair en prenant $n := N + 1$ si N est pair ou $n := N$ si N est impair qui respecte l'inégalité $n \geq N$ (le cas d'égalité correspond à N qui est impair). Enfin, pour un n impair qui respecte $n \geq N$, nous allons avoir $|u_n - l| = |-1 - 1| = |1 + 1| = 2$. Il suffit donc de prendre $\varepsilon := 1$ quand $l = 1$.

6.2 Exercice 2

6.2.1 Enoncé

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := n^{-1}$.
1°) Pour $\varepsilon := 10^{-3}$, trouver un entier $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.
2°) Enfin, démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0 (en utilisant la définition).

6.2.2 Solution

1°) Techniquement répondre à la question 2°) permet de répondre aux deux questions mais nous allons répondre dans l'ordre et nous vérifierons si le résultat de la question 2°) permet de fournir l'entier attendu pour la question 1°). Soit $\varepsilon := 10^{-3}$, cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \left|n^{-1}\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n^{-1} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \varepsilon^{-1} = \left(10^{-3}\right)^{-1} = 10^3$. Cela était attendu, l'entier recherché vaut $N_1 := 1000 \in \mathbb{N}^*$.

2°) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - 0| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \left|n^{-1}\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n^{-1} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \varepsilon^{-1}$. Plusieurs choix sont possibles. Par exemple, $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$, ainsi, nous pouvons prendre $N(\varepsilon) := \left\lceil \varepsilon^{-1} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$. Un autre exemple est $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + 1 > x$, ainsi, nous pouvons prendre $N(\varepsilon) := \left\lfloor \varepsilon^{-1} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. A noter que l'utilisation de partie entière supérieure ou inférieure permet d'obtenir un entier N qui respecte l'inégalité $N \geq \varepsilon^{-1}$, en effet, rien ne nous assure que ε^{-1} est un entier. Finalement, pour la première solution nous avons $N\left(10^{-3}\right) := \left\lceil \left(10^{-3}\right)^{-1} \right\rceil = \left\lceil 10^3 \right\rceil = 1\ 000 \in \mathbb{N}^*$, et la deuxième solution est $1\ 001 \in \mathbb{N}^*$. On se rend compte que la première solution fournit un entier N plus petit que la seconde solution, on valorisera donc la première.

6.3 Exercice 3

6.3.1 Enoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un $u_n := \dfrac{3n}{2n^2-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1°) Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_1,\ |u_n| \leq 10^{-4}$.
2°) Trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N_2,\ |u_n| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.

6.3.2 Solution

Répondre à la seconde question permet de résoudre l'entièreté de l'exercice. C'est ce que nous allons faire. La première chose que nous allons calculer est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est 0. Ensuite, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et trouvons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $|u_n - 0| \leq \varepsilon \iff \left|\dfrac{3n}{2n^2-1}\right| \leq \varepsilon \iff \dfrac{3n}{2n^2-1} \leq \varepsilon$ (car $n \in \mathbb{N}^*$) $\iff 3n \leq (2\varepsilon)\, n^2 - \varepsilon \iff (2\varepsilon)\, n^2 - 3n - \varepsilon \geq 0$. Définissons l'application f_ε de la manière suivante :

$$f_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_\varepsilon(x) := 2\varepsilon x^2 - 3x - \varepsilon \end{cases} .$$

Nous pouvons remarquer que f_ε est convexe car $2\varepsilon > 0$, de plus, le discriminant vaut $\Delta := b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2\varepsilon)(-\varepsilon) = 9 + 8\varepsilon^2 > 0$, donc nous avons deux racines réelles disctinctes. Intéressons à la plus grande racine qui vaut :

$$x_2 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{9+8\varepsilon^2}}{2(2\varepsilon)} = \frac{3+\sqrt{9+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} > 0 \quad .$$

Ainsi, nous avons $\forall\ x \in [x_2, +\infty[\,,\ f(x) \geq 0$. Etant donné que nous cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons prendre la partie entière supérieure de x_2 car nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$. Ainsi, l'entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ recherché est :

$$\boxed{N_2(\varepsilon) := \left\lceil \frac{3+\sqrt{9+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \right\rceil} \quad .$$

Utilisons le résultat obtenu ci-dessus afin de répondre à la première question. Nous posons $\varepsilon := 10^{-4}$, alors :

$$N_2\left(10^{-4}\right) := \left\lceil \frac{3+\sqrt{9+8\left(10^{-4}\right)^2}}{4.10^{-4}} \right\rceil = \left\lceil 7\ 500 + 2\ 500\sqrt{9+8.10^{-8}} \right\rceil$$

$$\implies N_2\left(10^{-4}\right) \approx \lceil 7\ 500 + 7\ 500{,}000\ 033 \rceil = \lceil 15\ 000{,}000\ 033 \rceil = 15\ 001 \ .$$

Nous pouvons vérifier notre résultat en prenant $n := N_2\left(10^{-4}\right) - 1 = 15.10^3$ et en calculant $|u_n|$:

$$|u_n| = \left|\frac{3n}{2n^2-1}\right| = \frac{3n}{2n^2-1} = \frac{3\left(15.10^3\right)}{2\left(15.10^3\right)^2 - 1} = \frac{45\ 000}{450\ 000\ 000 - 1}$$

$$\iff |u_n| = \frac{45\ 000}{449\ 999\ 999} \approx 0{,}000\ 100\ 000\ 000\ 222\ 2 > 10^{-4} \ .$$

Prenons $n := N_2\left(10^{-4}\right) = 15\ 001$ et calculons $|u_n|$:

$$|u_n| = \left|\frac{3n}{2n^2-1}\right| = \frac{3n}{2n^2-1} = \frac{45\ 003}{2\,(15\ 001)^2 - 1} = \frac{45\ 003}{450\ 060\ 002 - 1}$$

$$\iff |u_n| = \frac{45\ 003}{450\ 060\ 001} \approx 0{,}000\ 099\ 993\ 333\ 999\ 9 < 10^{-4} \ .$$

Finalement :

$$\boxed{N_1 := 15\ 001} \ .$$

Une autre façon pour résoudre l'exercice consiste à observer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2n^2 - 1 \geq 2n^2 - n \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2-1} \leq \frac{1}{2n^2-n}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3n}{2n^2-1} \leq \frac{3n}{2n^2-n} \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2n-1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left|\frac{3}{2n-1} - 0\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow 3 \leq 2\varepsilon n - \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon}\ .$$

Etant donné que nous cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons prendre la partie entière supérieure car nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$. Ainsi, l'entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ recherché est :

$$\boxed{N_2(\varepsilon) := \left\lceil \frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rceil}\ .$$

Utilisons le résultat obtenu ci-dessus afin de répondre à la première question. Nous posons $\varepsilon := 10^{-4}$, alors :

$$N_2\left(10^{-4}\right) := \left\lceil 1,5\left(10^{-4}\right)^{-1} + 0,5 \right\rceil = \lceil 15\ 000,5 \rceil = \boxed{15\ 001}\ .$$

Une dernière façon pour résoudre l'exercice consiste à observer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2n^2 - 1 \geq n^2 \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2-1} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3n}{2n^2-1} \leq \frac{3n}{n^2} \Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{n}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left|\frac{3}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow 3 \leq \varepsilon n \Longleftrightarrow n \geq \frac{3}{\varepsilon}\ .$$

Etant donné que nous cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons prendre la partie entière supérieure car nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$. Ainsi, l'entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ recherché est :

$$\boxed{N_2(\varepsilon) := \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil}\ .$$

Utilisons le résultat obtenu ci-dessus afin de répondre à la première question. Nous posons $\varepsilon := 10^{-4}$, alors :

$$N_2\left(10^{-4}\right) := \left\lceil 3\left(10^{-4}\right)^{-1} \right\rceil = \lceil 30\ 000 \rceil = \boxed{30\ 000}\ .$$

Pour conclure, la première méthode fournit le résultat le plus précis au prix d'un certain nombre de calculs, la deuxième méthode propose d'utiliser un encadrement fournissant un résultat moins fin mais plus rapide à obtenir, enfin, la dernière méthode est similaire à la deuxième mais avec un résultat encore moins fin.

6.4 Exercice 4

6.4.1 Enoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que cette suite est stationnaire.

6.4.2 Solution

Nous allons résoudre l'exercice de deux manières. La première façon consiste à montrer que la limite de la suite (qui est unique) est un entier relatif en raisonnant par l'absurde. Une fois cela fait, il suffira de revenir à la définition d'une suite convergente et choisir de façon judicieuse une marge d'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ afin de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien stationnaire. La seconde façon de résoudre l'exercice consiste à utiliser directement la définition d'une suite convergente et choisir de façon judicieuse une marge d'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ afin de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien stationnaire en contrôlant l'écart entre deux termes de la suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $l \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Ainsi :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

A partir d'un certain rang, on a donc :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Si $l \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ alors $\lfloor l \rfloor < l < \lfloor l \rfloor + 1$, cherchons un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que :

$$\begin{aligned} &\lfloor l \rfloor < l - \varepsilon\ \wedge\ l + \varepsilon < \lfloor l \rfloor + 1 \\ \iff &\varepsilon < l - \lfloor l \rfloor\ \wedge\ \varepsilon < \lfloor l \rfloor - l + 1 \\ \iff &\varepsilon < \{l\}\ \wedge\ \varepsilon < 1 - \{l\}\ . \end{aligned}$$

Ainsi, si $\varepsilon \in \left]0, \min\left(\{l\}, 1 - \{l\}\right)\right[$, alors :

$$\lfloor l \rfloor < l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon < \lfloor l \rfloor + 1\ .$$

Il y a donc aucun entier relatif dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in \left]0, \min\left(\{l\}, 1 - \{l\}\right)\right[$, ou autrement dit : $\mathbb{Z} \cap [l - \varepsilon, l + \varepsilon] = \varnothing$. Or, à partir d'un certain rang, $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $u_n \in \mathbb{Z}$, c'est absurde d'appartenir à un intervalle sans entiers relatifs et en même temps d'être à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Donc $l \in \mathbb{Z}$. Enfin, on a la définition de la convergence de la suite qui nous donne :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

A partir d'un certain rang, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Prenons un $\varepsilon \in]0;1[$, par exemple $\varepsilon := \frac{1}{2}$, alors $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}$. Or, $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$. La distance entre ces deux entiers relatifs à partir d'un certain rang N est $0,5$ ce qui veut dire que $u_n = l$ pour tout n supérieur ou égal à N. C'est la définition d'une suite stationnaire.

Passons à la seconde résolution. Reprenons la définition de la convergence pour notre suite :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi :

$$\forall\ n \geq N,\ |u_n - u_N| = |u_n - l + l - u_N| \leq |u_n - l| + |u_N - l| \leq 2\varepsilon\ .$$

Prenons un $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, par exemple $\varepsilon := \frac{1}{3}$, on a alors :

$$\forall\ n \geq N,\ |u_n - u_N| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}\ .$$

A partir d'un certain rang N, on a $(u_n - u_N) \in \mathbb{Z}$ et en même temps nous avons $-1 < -\frac{2}{3} \leq u_n - u_N \leq \frac{2}{3} < 1$, donc $u_n - u_N = 0$. Ainsi :

$$\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N,\ u_n = u_N\ .$$

C'est la définition de la suite stationnaire, par ailleurs, on en déduit que la limite est u_N et que cette limite appartient à $\mathbb{Z}$.

6.5 Exercice 5

6.5.1 Enoncé

1°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in \,]a,b[$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \,]a,b[$.
2°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$). Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $l > 0$).

6.5.2 Solution

1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers une (unique) limite $l \in \mathbb{R}$, nous pouvons exprimer cela en revenant à la définition de la convergence d'une suite :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi, à partir d'un certain rang N, nous avons pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, l'inégalité suivante :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Vu que cette inégalité est vraie à partir d'un certain rang N et pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le but du jeu va être de choisir une valeur ε suffisament petite qui permet de se retrouver dans l'ouvert $]a,b[$, *id est* :

$$a < l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon < b$$

Nous voulons donc :

$$a < l - \varepsilon\ \wedge\ l + \varepsilon < b \Longleftrightarrow \varepsilon < l - a\ \wedge\ \varepsilon < b - l\ .$$

Il est rigoureux de souligner que $l \in \,]a,b[$ et que par conséquent, $l - a > 0$ et $b - l > 0$. Ainsi, si nous choisissons $\varepsilon \in \,]0, \min(l-a, b-l)[$, nous aurons tous les termes de notre suite qui à partir d'un certain rang N seront dans l'ouvert $]a,b[$. A titre d'exemple, nous pouvons prendre $\varepsilon := \dfrac{\min(l-a,b-l)}{2}$ pour se retrouver dans l'ouvert $]a,b[$ à partir d'un certain rang N. Nous avons répondu à la première question. Enfin, une petite remarque consiste à voir que le résultat $\min(l-a,b-l)$ est relativement intuitif. En effet, on mesure la distance entre la valeur de la limite $l \in \mathbb{R}$ et les deux bordures (a et b) de notre ouvert $]a,b[$. Si on prend la plus petite distance, alors toute valeur de contrôle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieure à cette dernière convient.

2°) La première question permet de répondre rapidement à la seconde. En effet, ce second résultat découle du premier résultat que nous venons de démontrer. Si nous prenons un intervalle ouvert contenant $l \in \mathbb{R}_+^*$ et inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, alors le résultat est prouvé. Ainsi, l'ouvert $\left]\dfrac{l}{2}, \dfrac{3l}{2}\right[$ convient pour répondre à cette question. Nous allons maintenant proposer une autre façon de répondre à ce problème (si on n'a pas vu le lien entre les deux questions) qui consiste à revenir à la définition de la convergence d'une suite réelle :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi, à partir d'un certain rang N, nous avons pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, l'inégalité suivante :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon\ .$$

Vu que cette inégalité est vraie à partir d'un certain rang N et pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le but du jeu va être de choisir une valeur ε suffisament petite qui permet de se retrouver dans $\mathbb{R}_+^*$, *id est* :

$$0 < l - \varepsilon \leq u_n \Longrightarrow \varepsilon \in \,]0, l[\ .$$

Nous pouvons prendre à titre d'exemple $\varepsilon := \dfrac{l}{2}$ et nous avons à partir d'un certain rang N, les termes u_n de la suite qui sont contenus dans $\left[\dfrac{l}{2}, \dfrac{3l}{2}\right] \subset \mathbb{R}_+^*$.

6.6 Exercice 6

6.6.1 Enoncé

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ avec $l_1 < l_2$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, nous avons $u_n < v_n$.

6.6.2 Solution

Nous pouvons revenir à la définition de la convergence d'une suite réelle :

$$\exists!\ l_1 \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N_1 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1 \ ,$$

$$\exists!\ l_2 \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N_2 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N_2 \Longrightarrow |v_n - l_2| \leq \varepsilon_2 \ .$$

Ainsi :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq \max(N_1, N_2) \Longrightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1 \ \wedge\ |v_n - l_2| \leq \varepsilon_2 \ .$$

Nous avons alors pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $\max(N_1, N_2)$:

$$0 < l_2 - l_1 = (l_2 - v_n) + (v_n - u_n) + (u_n - l_1) \leq |l_2 - v_n| + (v_n - u_n) + |u_n - l_1|$$

$$\Longrightarrow 0 < l_2 - l_1 \leq |v_n - l_2| + (v_n - u_n) + |u_n - l_1| \leq \varepsilon_2 + (v_n - u_n) + \varepsilon_1 \ .$$

Nous allons poser $\varepsilon := \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ainsi :

$$v_n - u_n \geq l_2 - l_1 - 2\varepsilon \ .$$

On veut à partir d'un certain rang :

$$v_n > u_n \Longleftrightarrow v_n - u_n > 0 \ .$$

Ainsi, il suffit que :

$$l_2 - l_1 - 2\varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon \in \left]0, \frac{l_2 - l_1}{2}\right[} \ .$$

Finalement, nous pouvons prendre par exemple $\varepsilon := \dfrac{l_2 - l_1}{3}$ pour avoir à partir d'un certain rang $v_n > u_n$. Il s'agit d'un résultat attendu, en effet, il suffit que la zone de contrôle $[l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1]$ soit disjointe de la zone de contrôle $[l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2]$ afin d'avoir à partir d'un certain rang $v_n > u_n$, *id est* :

$$l_1 + \varepsilon_1 < l_2 - \varepsilon_2 \Longleftrightarrow 0 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < l_2 - l_1 \ .$$

Nous allons poser $\varepsilon := \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ainsi :

$$0 < 2\varepsilon < l_2 - l_1 \Longleftrightarrow \varepsilon \in \left]0, \frac{l_2 - l_1}{2}\right[\ .$$

6.7 Exercice 7

6.7.1 Enoncé

Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n\ .$$

6.7.2 Solution

Faisons une disjonction de cas avec une congruence modulo quatre.
Ainsi, si $n \equiv 0\,[4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k$, d'où :

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{4k-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+4}{4} \right\rfloor &= \left\lfloor 2k - \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor k+1 \rfloor \\ &= 2k - 1 + k + k + 1 = 4k = n\ .\end{aligned}$$

Si $n \equiv 1\,[4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k+1$, d'où :

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{4k+1-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+1+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+1+4}{4} \right\rfloor &= \lfloor 2k \rfloor + \left\lfloor k + \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor k + 1 + \frac{1}{4} \right\rfloor \\ &= 2k + k + k + 1 = 4k + 1 = n\ .\end{aligned}$$

Si $n \equiv 2\,[4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k+2$, d'où :

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{4k+2-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+2+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+2+4}{4} \right\rfloor &= \left\lfloor 2k + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor k+1 \rfloor + \left\lfloor k + 1 + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= 2k + k + 1 + k + 1 = 4k + 2 = n\ .\end{aligned}$$

Si $n \equiv 3\,[4]$, alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n := 4k+3$, d'où :

$$\left\lfloor \frac{4k+3-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+3+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+3+4}{4} \right\rfloor$$

$$= \lfloor 2k+1 \rfloor + \left\lfloor k + 1 + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor k + 1 + \frac{3}{4} \right\rfloor = 2k + 1 + k + 1 + k + 1 = 4k + 3 = n\ .$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n}\ .$$

6.8 Exercice 8

6.8.1 Enoncé

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui se définit comme $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et donner sa limite si cette dernière converge.

6.8.2 Solution

Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ k \in [\![1, n]\!],\ kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx \\
\Longrightarrow\ &\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx \\
\Longleftrightarrow\ &\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{nx(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{nx(n+1)}{2n^2} \\
\Longleftrightarrow\ &\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{2n}\ .
\end{aligned}$$

Nous pouvons définir deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n := \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n}\ \wedge\ w_n := \frac{x}{2} + \frac{x}{2n}\ .$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n < u_n \leq w_n\ .$$

De plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont **la même limite** qui est $\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} = \frac{x}{2}\ \wedge\ \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{x}{2n} = \frac{x}{2}\ .$$

D'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), nous avons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge (existence la limite) vers $\dfrac{x}{2}$ (valeur de cette limite).

6.9 Exercice 9

6.9.1 Enoncé

Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien.

6.9.2 Solution

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathbb{R}$ n'est pas archimédien, *id est* :

$$\neg\left(\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ y \in \mathbb{R},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ nx > y\right)$$

$$\iff\ \exists\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ y \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ nx \leq y\ .$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il n'existe aucun entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$ (ce qui revient à dire que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ nx \leq y$). Posons l'ensemble $\mathcal{A}_x$ qui se définit de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est majoré par notre y et non vide car $0 \in \mathcal{A}_x$. En effet $0 = 0 \times x$ (on utilise l'entier $n = 0$). Ainsi, d'après la propriété de la borne supérieure, la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{A}_x$ existe et l'on notera cette dernière $\sup(\mathcal{A}_x)$.

Ce qu'il faut sentir dans l'idée de cette preuve est que l'on voit bien qu'en raisonnant par l'absurde, on aboutit à quelque chose qui n'est pas possible dès le début de la démonstration. En effet, l'idée selon laquelle il serait impossible de dépasser strictement un réel y en ajoutant un nombre fini de fois un réel strictement positif x est totalement faux. De ce fait, on comprend bien que la borne supérieure de $\mathcal{A}_x$ n'a pas de sens (ce n'est pas le plus petit des majorants) et que l'on pourra toujours trouver un majorant plus petit que $\sup(\mathcal{A}_x)$, contredisant ainsi que le fait que c'est le plus petit des majorants.

Soit $\hat{n} \in \mathbb{N}$, nous avons alors $\hat{n}x \leq \sup(\mathcal{A}_x)$. Etant donné que cette inégalité fonctionne pour tout entier naturel, nous avons également l'inégalité $(\hat{n}+1)\,x \leq \sup(\mathcal{A}_x)$ qui est vraie. Cette dernière nous fournit l'inégalité $\hat{n}x \leq \sup(\mathcal{A}_x) - x$. Vu que $\hat{n}$ a été choisi de façon arbitraire dans $\mathbb{N}$, cette inégalité est vrai pour tous les éléments de $\mathcal{A}_x$. Ainsi, $\sup(\mathcal{A}_x) - x$ est un majorant de $\mathcal{A}_x$ et vu que $x \in \mathbb{R}_+^*$, ce dernier est plus petit que $\sup(\mathcal{A}_x)$: nous avons trouvé un majorant de $\mathcal{A}_x$ plus petit que le plus petit des majorants de $\mathcal{A}_x$. Il y a contradiction.

6.10 Exercice 10

6.10.1 Enoncé

Montrer que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha\ .$$

6.10.2 Solution

Nous avons :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
$$\iff \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha \leq x + \alpha < (\lfloor x \rfloor + \alpha) + 1\ .$$

La définition de la partie entière de $\lfloor x+\alpha \rfloor$ est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leq x + \alpha < n + 1\ .$$

Vu que $\lfloor x \rfloor + \alpha \in \mathbb{Z}$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha}\ .$$

Proposons une seconde façon de résoudre l'exercice, pour cela repartons de la double inégalité classique de la partie entière :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\ .$$

Ainsi :

$$\forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha \leq x + \alpha < \lfloor x \rfloor + \alpha + 1\ . \quad (\star)$$

De plus :

$$\forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor \leq x + \alpha < \lfloor x+\alpha \rfloor + 1$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor \leq x + \alpha\ \wedge\ x + \alpha < \lfloor x+\alpha \rfloor + 1$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ -\lfloor x+\alpha \rfloor \geq -x - \alpha\ \wedge\ -x - \alpha > -\lfloor x+\alpha \rfloor - 1$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ -\lfloor x+\alpha \rfloor - 1 < -x - \alpha \leq -\lfloor x+\alpha \rfloor\ . \quad (\star\star)$$

En additionnant la partie gauche et la partie droite des équations $(\star)$ et $(\star\star)$, nous avons :

$$\forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor - 1 < 0\ \wedge\ 0 < \lfloor x \rfloor + \alpha + 1 - \lfloor x+\alpha \rfloor$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor < 1\ \wedge\ -1 < \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \,]-1;1[\ .$$

Or, nous savons que :

$$\forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \mathbb{Z}\ .$$

Donc :

$$\forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \mathbb{Z} \cap \,]-1;1[$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \{0\}$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor = 0$$
$$\iff \forall\ (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha = \lfloor x+\alpha \rfloor\ .$$

6.11 Exercice 11

6.11.1 Enoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par $u_n := \dfrac{n^2-2}{n^2+n}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
1°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2°) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3°) Démontrer à l'aide de la définition d'une suite réelle convergente et de la réponse obtenue à la deuxième question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$.

6.11.2 Solution

1°) Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, ce qui revient à montrer de façon équivalente que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \geq u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)^2 + (n+1)} - \frac{n^2-2}{n^2+n}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{\left(n^2+2n+1-2\right)\left(n^2+n\right) - \left(n^2-2\right)\left(n^2+2n+1+n+1\right)}{\left(n^2+2n+1+n+1\right)\left(n^2+n\right)}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{\left(n^2+2n-1\right)\left(n^2+n\right) + \left(2-n^2\right)\left(n^2+3n+2\right)}{\left(n^2+3n+2\right)\left(n^2+n\right)}$$

Développons notre expression :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^4 + n^3 + 2n^3 + 2n^2 - n^2 - n + 2n^2 + 6n + 4 - n^4 - 3n^3 - 2n^2}{\left(n^2+3n+2\right)\left(n^2+n\right)}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+5n+4}{\left(n^2+3n+2\right)\left(n^2+n\right)} > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n \ .$$

Nous avons donc notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est strictement croissante. Une autre façon de montrer la stricte croissance de notre suite est de définir la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0;-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := \dfrac{x^2-2}{x^2+x} \end{cases} .$$

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, nous avons alors :

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2+x}\right)' = \frac{2x\left(x^2+x\right) - \left(x^2-2\right)(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}$$

$$\Longleftrightarrow f'(x) = \frac{2x^3+2x^2-2x^3-x^2+4x+2}{\left(x^2+x\right)^2} = \frac{x^2+4x+2}{\left(x^2+x\right)^2} > 0 \ .$$

La fonction f est strictement croissante car la dérivée de f est strictement positive.

2°) La limite de la suite est 1 car :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2}\right)\left(\frac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

3°) Nous avons notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui a pour limite 1, ce qui peut s'exprimer en revenant à la définition de la façon suivante :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon \ .$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|u_n - 1| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{n^2-2}{n^2+n} - 1\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{n^2-2-n^2-n}{n^2+n}\right| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{-(2+n)}{n^2+n}\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{2+n}{n^2+n} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \varepsilon n^2 + \varepsilon n \geq 2+n$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon n^2 + (\varepsilon - 1)\, n - 2 \geq 0 \ .$$

Nous allons définir la fonction g_ε suivante :

$$g_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_\varepsilon(x) := \varepsilon x^2 + (\varepsilon - 1)\, x - 2 \end{cases} \ .$$

Nous avons $\varepsilon > 0$, ce qui fait que g_ε est convexe, calculons son déterminant :

$$\Delta := b^2 - 4ac = (\varepsilon - 1)^2 + 8\varepsilon = \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 + 8\varepsilon = \varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1 > 0 \ .$$

Nous avons donc deux racines disctinctes réelles, prenons la plus grande :

$$x_2 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}}{2\varepsilon} > \frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2}}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} > 0 \ .$$

De plus, nous avons $\forall\ x \in [x_2, +\infty[\ ,\ g_\varepsilon(x) \geq 0$, donc, l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ est :

$$N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}}{2\varepsilon} \right\rceil \ .$$

Nous avons explicité l'expression de notre entier $N \in \mathbb{N}^*$ (qui dépend du choix de ε), testons ce dernier avec $\varepsilon := 1$:

$$N(1) := \left\lceil \frac{1-1+\sqrt{1^2+6+1}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2 \ ,$$

$$\left|u_{N(1)} - 1\right| = \left|\frac{2^2-2}{2^2+2} - 1\right| = \left|\frac{2}{6} - 1\right| = \frac{2}{3} < \varepsilon := 1 \ .$$

6.12 Exercice 12

6.12.1 Enoncé

Montrer l'existence et l'unicité de la partie entière par défaut.

6.12.2 Solution

Pour rappel, soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle la partie entière par défaut de x l'unique entier relatif n inférieur ou égal à x et $n+1$ strictement supérieur à x. En d'autres termes :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists!\ n \in \mathbb{Z},\ n \leq x < n+1\ .$$

Nous allons montrer de deux façons similaires et une autre un peu plus directe, l'unicité et de quatre façons similaires l'existence.

⋆ **Preuve de l'unicité par l'absurde**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe deux entiers n et m relatifs distincts, *id est*, $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $n \neq m$, ainsi, nous avons :

$$n \leq x < n+1\ \wedge\ m \leq x < m+1 \iff n \leq x < n+1\ \wedge\ -m-1 < -x \leq -m\ .$$

On additionne les inégalités de gauche ensemble et les inégalités de droite ensemble :

$$n-m-1 < 0\ \wedge\ 0 < n-m+1 \iff n-m < 1\ \wedge\ -1 < n-m \iff n-m \in \left]-1;1\right[\ .$$

Or, $(n-m) \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$n-m \in \mathbb{Z} \cap \left]-1;1\right[\iff n-m \in \{0\} \iff n=m\ .$$

Il y a contradiction car nous avons supposé que n et m étaient différents, or, on aboutit à $n = m$, donc, la partie entière, si elle existe (et elle existe) est unique.

⋆ **Preuve de l'unicité par obtention d'une condition nécessaire**
Les calculs sont similaires, toutefois, le raisonnement ne l'est pas. En effet, dans la première démonstration de l'unicité, on suppose que les entiers relatifs n et m ne sont pas égaux et on aboutit au contraire ce qui est absurde. Dans cette seconde démonstration, nous allons supposer que si nous avons deux entiers relatifs n et m qui respecte la définition de la partie entière d'un même $x \in \mathbb{R}$, alors nous avons nécessairement $n = m$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe deux entiers n et m relatifs distincts tels que :

$$n \leq x < n+1\ \wedge\ m \leq x < m+1 \iff n \leq x < n+1\ \wedge\ -m-1 < -x \leq -m\ .$$

On additionne les inégalités de gauche ensemble et les inégalités de droite ensemble :

$$n-m-1 < 0\ \wedge\ 0 < n-m+1 \iff n-m < 1\ \wedge\ -1 < n-m \iff n-m \in \left]-1;1\right[\ .$$

Or, $(n-m) \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$n-m \in \mathbb{Z} \cap \left]-1;1\right[\iff n-m \in \{0\} \iff n=m\ .$$

Alors, on a nécessairement $n = m$. La partie entière, si elle existe (et elle existe) est unique.

⋆ **Preuve de l'unicité par la façon rapide**
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux entiers relatifs n et m distincts tels que $n < m$ (sans pertes de généralité). Alors, puisque n et m sont deux entiers relatifs, nous avons $n+1 \leq m$ et donc $x < n+1 \leq m \leq x$, ce qui est absurde.

⋆ **Preuve de l'existence par la première propriété fondamentale (de l'ordre) dans $\mathbb{Z}$**
Nous savons que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. Le but va être de fournir un entier qui encadrera correctement notre réel x. Soit $x \in \mathbb{R}$, nous allons nous intéresser

à la partie gauche de l'inégalité que l'on souhaite obtenir en définissant un ensemble $\mathcal{A}_x$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \ .$$

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un $\hat{n} \in \mathbb{Z}$ tel que $\hat{n} > |x| \iff \hat{n} > x > -\hat{n}$. Ainsi, nous avons $-\hat{n} \in \mathbb{Z}$ tel que $-\hat{n} \leq x$ (car l'inégalité stricte implique l'inégalité large), donc $-\hat{n} \in \mathcal{A}_x$ (notre ensemble $\mathcal{A}_x$ est donc une partie de $\mathbb{Z}$ non vide). Enfin, nous avons notre $x \in \mathbb{R}$ qui majore $\mathcal{A}_x$, ainsi, $\mathcal{A}_x$ admet un plus grand élément que l'on notera n_{max}. Nous avons donc $n_{max} \leq x$ et $n_{max} + 1 \in \mathbb{Z}$. Sauf que $n_{max} + 1 \notin \mathcal{A}_x$ par définition de n_{max}. Ainsi, $\neg\,(n_{max} + 1 \leq x) \iff n_{max} + 1 > x$. D'où finalement l'existence d'un entier relatif (ici n_{max}) qui fournit l'encadrement désiré.

$\star$ **Preuve de l'existence par la seconde propriété fondamentale (de l'ordre) dans $\mathbb{Z}$**
Nous savons que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément. Le but va être de fournir un entier qui encadrera correctement notre réel x. Soit $x \in \mathbb{R}$, nous allons nous intéresser à la partie droite de l'inégalité que l'on souhaite obtenir en définissant un ensemble $\mathcal{A}_x$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} \mid x < n\} \ .$$

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un $\hat{n} \in \mathbb{Z}$ tel que $\hat{n} > |x| \iff \hat{n} > x > -\hat{n}$. Ainsi, nous avons $\hat{n} \in \mathbb{Z}$ tel que $x < \hat{n}$, donc $\hat{n} \in \mathcal{A}_x$ (notre ensemble $\mathcal{A}_x$ est donc une partie de $\mathbb{Z}$ non vide). Enfin, nous avons notre $x \in \mathbb{R}$ qui minore $\mathcal{A}_x$, ainsi, $\mathcal{A}_x$ admet un plus petit élément que l'on notera n_{min}. Nous avons donc $x < n_{min}$ et $n_{min} - 1 \in \mathbb{Z}$. Sauf que $n_{min} - 1 \notin \mathcal{A}_x$ par définition de n_{min}. Ainsi, $\neg\,(x < n_{min} - 1) \iff x \geq n_{min} - 1$. D'où finalement l'existence d'un entier relatif (ici n_{min}) qui fournit l'encadrement désiré. Dans ce cas il suffit de poser $m \coloneqq n_{min} - 1$ pour obtenir les deux inégalités.

$\star$ **Preuve de l'existence par la première propriété fondamentale (de l'ordre) dans $\mathbb{N}$**
Nous savons que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. Le but va être de fournir un entier qui encadrera correctement notre réel x. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, nous allons nous intéresser à la partie gauche de l'inégalité que l'on souhaite obtenir en définissant un ensemble $\mathcal{A}_x$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\} \ .$$

Une question légitime est de se demander pourquoi on prend un x dans l'ensemble des réels positifs $\mathbb{R}_+$ et non dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ tout court. La raison étant qu'il faut faire cette distinction car si par exemple $x = -2$, alors il n'existe aucun entier naturel n tel que $n \leq -2$ (donc notre ensemble $\mathcal{A}_x$ est vide, ne permettant pas d'utiliser la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$).
Pour revenir à la preuve, nous avons $0 \leq x$, donc $0 \in \mathcal{A}_x$, donc notre ensemble $\mathcal{A}_x$ n'est pas vide. Enfin, nous avons notre $x \in \mathbb{R}_+$ qui majore $\mathcal{A}_x$, ainsi, $\mathcal{A}_x$ admet un plus grand élément que l'on notera n_{max}. Nous avons donc $n_{max} \leq x$ et $n_{max} + 1 \in \mathbb{N}$. Sauf que $n_{max} + 1 \notin \mathcal{A}_x$ par définition de n_{max}. Ainsi, $\neg\,(n_{max} + 1 \leq x) \iff n_{max} + 1 > x$. D'où finalement l'existence d'un entier relatif (ici n_{max}) qui fournit l'encadrement désiré pour un réel positif ou nul x.
Soit un $x \in \mathbb{R}_-^*$, étant donné que $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel $\hat{n}$ tel que $\hat{n} > -x \iff \hat{n} + x > 0$. Ainsi, nous avons $(\hat{n} - x) \in \mathbb{R}_+$, nous pouvons utiliser ce que nous avons démontré précédemment pour un réel positif ou nul, de sorte qu'il existe un (unique) $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq \hat{n} + x < m + 1 \iff m - \hat{n} \leq x < m - \hat{n} + 1$, ce qui fournit l'encadrement désiré.

$\star$ **Preuve de l'existence par la seconde propriété fondamentale (de l'ordre) dans $\mathbb{N}$**
Nous savons que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Le but va être de fournir un entier qui encadrera correctement notre réel x. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, nous allons nous intéresser à la partie droite de l'inégalité que l'on souhaite obtenir en définissant un ensemble $\mathcal{A}_x$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid x < n\} \ .$$

Une question légitime est de se demander pourquoi on prend un x dans l'ensemble des réels positifs $\mathbb{R}_+$ et non dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ tout court. La raison étant qu'il faut faire cette distinction car si par exemple $x = -11$, alors $\mathcal{A}_x = \mathbb{N}$ et on aura le plus petit élément qui sera $n_{min} = 0$ et l'élément $n_{min} - 1 = -1$ qui n'encadrent pas x.
Pour revenir à la preuve, nous avons $0 \leq x < n$, donc $0 \in \mathcal{A}_x$, donc notre ensemble $\mathcal{A}_x$ n'est pas vide (il est immédiat que c'est une partie de $\mathbb{N}$). Ainsi, $\mathcal{A}_x$ admet un plus petit élément que l'on notera n_{min}. Nous

avons donc $x < n_{min}$ et $n_{min} - 1 \notin \mathcal{A}_x$ par définition de n_{min}. Ainsi, $\neg\,(x < n_{min} - 1) \Longleftrightarrow x \geq n_{min} - 1$. D'où finalement l'existence d'un entier relatif qui fournit l'encadrement désiré pour un réel positif ou nul x.
Soit un $x \in \mathbb{R}_-^*$, étant donné que $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel $\hat{n}$ tel que $\hat{n} > -x \Longleftrightarrow \hat{n} + x > 0$. Ainsi, nous avons $(\hat{n} - x) \in \mathbb{R}_+$, nous pouvons utiliser ce que nous avons démontré précédemment pour un réel positif ou nul, de sorte qu'il existe un (unique) $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq \hat{n} + x < m + 1 \Longleftrightarrow m - \hat{n} \leq x < m - \hat{n} + 1$, ce qui fournit l'encadrement désiré.

6.13 Exercice 13

6.13.1 Enoncé

Montrer que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

6.13.2 Solution

Pour résoudre cet exercice, il suffit de revenir à la définition de la partie entière qui est la suivante :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\ .$$

Montrer la croissance de la fonction partie entière revient à montrer que :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor\ .$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1\ .$$

On sait que $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor + 1$ sont des entiers relatifs, ainsi :

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor\ .$$

On a bien montré la croissance (qui n'est pas stricte) de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$.

6.14 Exercice 14

6.14.1 Enoncé

Étant donné deux réels x et y, a-t-on toujours $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

6.14.2 Solution

Nous pouvons exhiber un contre-exemple en prenant $x = 1,5$ et $y = 1,5$:

$$\lfloor 1,5 + 1,5 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3 \neq 2 = 1 + 1 = \lfloor 1,5 \rfloor + \lfloor 1,5 \rfloor \ .$$

6.15 Exercice 15

6.15.1 Enoncé

Montrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

6.15.2 Solution

Il faut revenir à la définition de la partie entière qui est :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\ .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors, nous avons pour $-x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor -x \rfloor \leq -x < \lfloor -x \rfloor + 1 \Longleftrightarrow \lfloor -x \rfloor \leq -x\ \wedge\ -x < \lfloor -x \rfloor + 1$$

$$\Longleftrightarrow -\lfloor -x \rfloor \geq x\ \wedge\ x > -\lfloor -x \rfloor - 1 \Longleftrightarrow -\lfloor -x \rfloor - 1 < x \leq -\lfloor -x \rfloor\ .$$

On a $n \coloneqq -\lfloor -x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$n - 1 < x \leq n\ .$$

Il s'agit bien de la définition de la partie entière par excès.

6.16 Exercice 16

6.16.1 Enoncé

Montrer la propriété d'Archimède multiplicative sur $\mathbb{R}$.

6.16.2 Solution

La propriété d'Archimède multiplicative sur $\mathbb{R}$ s'énonce de la manière suivante :

$$\forall\ x > 1,\ \forall\ y \in \mathbb{R},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ x^n > y\ .$$

Posons $r := x - 1 > 0$ car $x > 1$. Nous allons utiliser le binôme de Newton sur x de la façon suivante :

$$\forall\ x > 1,\ x^n = (1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} r^k = \binom{n}{0} 1^{n-0} r^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} r^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} r^k$$

$$\iff \forall\ x > 1,\ x^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} r + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} r^k = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} + \frac{n! r}{1!\,(n-1)!} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} r^k$$

$$\iff \forall\ x > 1,\ x^n = 1 + nr + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} r^k \geq nr\ .$$

Nous pouvons minorer car les termes 1 et $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} r^k$ sont positifs. Etant donné que $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe pour n'importe quel $y \in \mathbb{R}$, un entier $n \in \mathbb{N}$ de sorte que pour notre quantité $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $nr > y$. Par transitivité de l'inégalité, on a le résultat désiré.

6.17 Exercice 17

6.17.1 Enoncé

Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ défini par :

$$\mathcal{A} := \left\{ x \in [0;1] \;\middle|\; \exists\ k\ [\![0;2^n]\!],\ x := \frac{k}{2^n} \right\}$$

est dense dans $[0;1]$.

6.17.2 Solution

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans le compact $[0;1]$, il faut pour tout couple (a,b) dans $[0;1]^2$ tel que $a < b$ avoir l'existence d'un x appartenant à $\mathcal{A}$ de sorte à avoir $a < x < b$. Une première chose intéressante à faire et à vérifier étant de savoir si $\mathcal{A}$ n'est pas vide. On voit de manière assez immédiate que $0 = \dfrac{0}{2^n} \in \mathcal{A}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, on a n dans la définition de $\mathcal{A}$ qui est un entier naturel, car si c'était un entier relatif, on pourrait avoir un nombre plus grand que 1. On sent bien que la façon de montrer à l'aide de la partie entière par défaut, que l'ensemble des rationnels est dense dans l'ensemble des réels va pouvoir probablement nous aider. On va très certainement expliciter l'entier k mais nous allons nous intéresser au dénominateur 2^n. L'idée est de trouver dans un premier temps un nombre compris entre a et b de façon stricte. Une façon de procéder consiste à ce dire que l'on pourrait ajouter à a une quantité strictement positive qui dépendra du choix de la valeur de $n \in \mathbb{N}$. On pourrait chercher un $n \in \mathbb{N}$ de sorte à avoir :

$$a < a + \frac{1}{2^n} < b\ .$$

On se rend compte que quelque soit la valeur de n dans $\mathbb{N}$, on aura toujours $a < a + \dfrac{1}{2^n}$. La question légitime est plutôt de savoir s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ de sorte à avoir $a + \dfrac{1}{2^n} < b$. On comprend intuitivement qu'il suffit de prendre un n suffisament grand pour être strictement inférieur à la borne b. La justification de l'existence d'un tel $n \in \mathbb{N}$ revient à se demander s'il existe un tel entier de sorte que :

$$a + \frac{1}{2^n} < b \Longleftrightarrow \frac{1}{2^n} < b - a \Longleftrightarrow 2^n > \frac{1}{b-a}\ .$$

L'existence d'un tel entier n est assuré par la propriété multiplicative d'Archimède sur $\mathbb{R}$ (on a $x := 2 > 1$ et $y := (b-a)^{-1} \in \mathbb{R}$). Ensuite, on va s'intéresser à trouver un nombre rationnel de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ de sorte à avoir :

$$a < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \leq a + \frac{1}{2^n} < b\ .$$

On se doute que le q va correspondre à notre 2^n, et donc il va s'agir de trouver ce p. Il s'agit de la partie entière de $2^n a$ qui est le plus grand élément du sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide et majoré de $\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq 2^n a\}$ (majoré par $2^n a$ et non vide car 0 appartient à cet ensemble). Ainsi, nous avons :

$$\lfloor 2^n a \rfloor \leq 2^n a < \lfloor 2^n a \rfloor + 1 \Longleftrightarrow \frac{\lfloor 2^n a \rfloor}{2^n} \leq a < \frac{\lfloor 2^n a \rfloor + 1}{2^n} \Longleftrightarrow \frac{\lfloor 2^n a \rfloor}{2^n} \leq a < \frac{\lfloor 2^n a \rfloor}{2^n} + \frac{1}{2^n}\ .$$

On commence à être correct, reprenons la dernière inégalité :

$$\frac{\lfloor 2^n a \rfloor}{2^n} \leq a < \frac{\lfloor 2^n a \rfloor}{2^n} + \frac{1}{2^n} \leq a + \frac{1}{2^n} < a + (b-a) = b \Longleftrightarrow a < \frac{\lfloor 2^n a \rfloor + 1}{2^n} < b\ .$$

Nous avons $0 \leq a < b \leq 1$, ainsi :

$$0 \leq \lfloor 2^n a \rfloor \leq 2^n a < 2^n \Longleftrightarrow 0 \leq \lfloor 2^n a \rfloor < 2^n \Longleftrightarrow 0 \leq \lfloor 2^n a \rfloor \leq 2^n - 1 \Longleftrightarrow 1 \leq \lfloor 2^n a \rfloor + 1 \leq 2^n\ .$$

Ainsi, notre k recherché est bien $\lfloor 2^n a \rfloor + 1$ qui appartient à l'intervalle $[\![1;2^n]\!] \subset [\![0;2^n]\!]$. $\mathcal{A}$ est dense dans $[0;1]$.