

# Exercice sur le produit des entiers pairs et impairs

Loïc ALAVOINE

**Mathématiques**

—

**Techniques de calculs**

—

**Calculs algébriques**

—

**Exercices**

## Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1°) Exprimer à l'aide du factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , le produit  $A_n$  des entiers pairs compris entre 1 et  $2n$ .

2°) On note  $B_n$  le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et  $2n + 1$ . En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $A_n$ , montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} .$$

## Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1°) Exprimer à l'aide du factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , le produit  $A_n$  des entiers pairs compris entre 1 et  $2n$ .

2°) On note  $B_n$  le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et  $2n + 1$ . En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $A_n$ , montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} .$$

1°) Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n := \prod_{k=1}^n (2k) = \left( \prod_{k=1}^n 2 \right) \cdot \left( \prod_{k=1}^n k \right) = 2^n n!$$

$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 2^n n!} .$$

2°) Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n := \prod_{k=0}^n (2k+1) = 1 \cdot \left( \prod_{k=0}^n 2k+1 \right) = \left( \frac{A_n}{A_n} \right) \cdot \left( \prod_{k=0}^n 2k+1 \right)$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{\left( \prod_{p=1}^n 2p \right) \cdot \left( \prod_{k=0}^n 2k+1 \right)}{\prod_{q=1}^n (2q)} = \frac{\left( \prod_{k=1}^{2n+1} k \right)}{2^n n!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}}.$$