

# Exercice sur les sommes, la quantité conjuguée et le télescopage

Loïc ALAVOINE

**Mathématiques**

—  
**Techniques de calculs**

—  
**Calculs algébriques**

—  
**Exercices**

# Exercice

Déterminer le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2\ 022.$$

# Exercice

Déterminer le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2022.$$

Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2 - (\sqrt{k+1})^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - k - 1}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sum_{p=1}^n \sqrt{p} = \sum_{k=1+1}^{n+1} \sqrt{k+1-1} - \sum_{p=1}^n \sqrt{p}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{p=1}^n \sqrt{p} = \sqrt{n+1} + \sum_{k=2}^n \sqrt{k} - \sum_{p=2}^n \sqrt{p} - \sqrt{1}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sqrt{n+1} - 1 .$$

Ainsi, nous pouvons trouver le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}^*$  en résolvant l'inéquation ci-dessous :

$$\begin{aligned} S_n &\geq 2\,022 \\ \iff \sqrt{n+1} - 1 &\geq 2\,022 \\ \iff \sqrt{n+1} &\geq 2\,023 \\ \iff (\sqrt{n+1})^2 &\geq (2\,023)^2 \\ \iff n+1 &\geq (2\,023)^2 \\ \iff n &\geq (2\,023)^2 - 1^2 \\ \iff n &\geq (2\,023 + 1) \cdot (2\,023 - 1) \end{aligned}$$

$$\iff n \geq 2\ 024 \times 2\ 022$$

$$\iff n \geq 4\ 092\ 528 .$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\ 092\ 528\}} .$$