Exercice sur les sommes, identité remarquable et télescopage

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Calculs algébriques

—

Symboles $\sum$ et $\prod$

Dimanche 11 novembre 2025

Sommaire

Enoncé de l'exercice

Enoncé de l'exercice

Enoncé de l'exercice

Calculer :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}\ .$$

Solution de l'exercice

Solution de l'exercice

Solution de l'exercice

Calculer :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}\ .$$

Nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k^4 + 2k^2 + 1) - k^2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\left(k^2 + 1\right)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\left(k^2 + k + 1\right).\left(k^2 - k + 1\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\left(k^2 + 1\right)^2 - k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(k^2 + k + 1\right) - \left(k^2 - k + 1\right)}{\left(k^2 + k + 1\right).\left(k^2 - k + 1\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)\,k + 1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,(p+1) + 1} \right]$$

Solution de l'exercice

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0-1}^{n-1} \frac{1}{(k-1+1)\,.\,(k+1)+1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,(p+1)+1}\right]$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=-1}^{n-1} \frac{1}{k\,(k+1)+1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,(p+1)+1}\right]$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k\,(k+1)+1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p\,(p+1)+1} - \frac{1}{n\,(n+1)+1}\right]$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n\,(n+1)+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n\,(n+1)+1-1}{n\,(n+1)+1}\right]$$

$$\iff \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n^2+n}{2\,(n^2+n+1)}}\,.$$