

Exercice sur les sommes, identité remarquable et télescopage

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Calculs algébriques

—

Symboles \sum et \prod

Dimanche 11 novembre 2025

1 Enoncé de l'exercice

2 Solution de l'exercice

Énoncé de l'exercice

Enoncé de l'exercice

1 Enoncé de l'exercice

2 Solution de l'exercice

Enoncé de l'exercice

Calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} .$$

Solution de l'exercice

Solution de l'exercice

1 Enoncé de l'exercice

2 Solution de l'exercice

Solution de l'exercice

Calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^4 + 2k^2 + 1) - k^2}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^2 + 1)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^2 + k + 1) \cdot (k^2 - k + 1)}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k^2 + 1)^2 - k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(k^2 + k + 1) - (k^2 - k + 1)}{(k^2 + k + 1) \cdot (k^2 - k + 1)}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-1)k+1} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p(p+1)+1} \right]$$

Solution de l'exercice

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k-1+1) \cdot (k+1) + 1} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p(p+1) + 1} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=-1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1) + 1} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p(p+1) + 1} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k(k+1) + 1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p(p+1) + 1} - \frac{1}{n(n+1) + 1} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n(n+1) + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1) + 1 - 1}{n(n+1) + 1} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n^2 + n}{2(n^2 + n + 1)}}.$$

Solution de l'exercice