Exercice sur la convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Exercices

Exercice :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par $u_n := \dfrac{n^2-2}{n^2+n}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2°) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3°) Démontrer à l'aide de la définition d'une suite réelle convergente et de la réponse obtenue à la deuxième question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$.

Exercice :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par $u_n := \dfrac{n^2-2}{n^2+n}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
1°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2°) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3°) Démontrer à l'aide de la définition d'une suite réelle convergente et de la réponse obtenue à la deuxième question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$.

1°) Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, ce qui revient à montrer de façon équivalente que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \geq u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)^2 + (n+1)} - \frac{n^2-2}{n^2+n}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{\left(n^2+2n+1-2\right)\left(n^2+n\right) - \left(n^2-2\right)\left(n^2+2n+1+n+1\right)}{\left(n^2+2n+1+n+1\right)\left(n^2+n\right)}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{\left(n^2+2n-1\right)\left(n^2+n\right) + \left(2-n^2\right)\left(n^2+3n+2\right)}{\left(n^2+3n+2\right)\left(n^2+n\right)}$$

Développons notre expression :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^4 + n^3 + 2n^3 + 2n^2 - n^2 - n + 2n^2 + 6n + 4 - n^4 - 3n^3 - 2n^2}{\left(n^2 + 3n + 2\right)\left(n^2 + n\right)}$$

$$\iff u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 + 5n + 4}{\left(n^2 + 3n + 2\right)\left(n^2 + n\right)} > 0 \iff u_{n+1} > u_n \ .$$

Nous avons donc notre suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est strictement croissante. Une autre façon de montrer la stricte croissance de notre suite est de définir la fonction f suivante :

$$f \ : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\left\{0;-1\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x\right) := \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + x} \end{cases} .$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0;-1\right\}$, nous avons alors :

$$f'\left(x\right) = \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + x}\right)' = \frac{2x\left(x^2 + x\right) - \left(x^2 - 2\right)\left(2x + 1\right)}{\left(x^2 + x\right)^2}$$

$$\iff f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2}{\left(x^2+x\right)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2}{\left(x^2+x\right)^2} > 0 \ .$$

La fonction f est strictement croissante car la dérivée de f est strictement positive.

2°) La limite de la suite est 1 car :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2}\right)\left(\frac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

3°) Nous avons notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui a pour limite 1, ce qui peut s'exprimer en revenant à la définition de la façon suivante :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon \ .$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|u_n - 1| \leq \varepsilon \iff \left|\frac{n^2-2}{n^2+n} - 1\right| \leq \varepsilon \iff \left|\frac{n^2 - 2 - n^2 - n}{n^2+n}\right| \leq \varepsilon$$

$$\iff \left|\frac{-(2+n)}{n^2+n}\right| \leq \varepsilon \iff \frac{2+n}{n^2+n} \leq \varepsilon \iff \varepsilon n^2 + \varepsilon n \geq 2+n$$

$$\iff \varepsilon n^2 + (\varepsilon - 1)\, n - 2 \geq 0 \ .$$

Nous allons définir la fonction g_ε suivante :

$$g_\varepsilon \ : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad g_\varepsilon(x) := \varepsilon x^2 + (\varepsilon - 1)\, x - 2 \end{cases} \ .$$

Nous avons $\varepsilon > 0$, ce qui fait que g_ε est convexe, calculons son déterminant :

$$\Delta := b^2 - 4ac = (\varepsilon - 1)^2 + 8\varepsilon = \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 + 8\varepsilon = \varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1 > 0 \ .$$

Nous avons donc deux racines disctinctes réelles, prenons la plus grande :

$$x_2 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}}{2\varepsilon} > \frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2}}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} > 0 \ .$$

De plus, nous avons $\forall\ x \in [x_2, +\infty[\,,\ g_\varepsilon(x) \geq 0$, donc, l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ est :

$$N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}}{2\varepsilon} \right\rceil .$$

Nous avons explicité l'expression de notre entier $N \in \mathbb{N}^*$ (qui dépend du choix de ε), testons ce dernier avec $\varepsilon := 1$:

$$N(1) := \left\lceil \frac{1-1+\sqrt{1^2+6+1}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2 ,$$

$$\left|u_{N(1)} - 1\right| = \left| \frac{2^2-2}{2^2+2} - 1 \right| = \left| \frac{2}{6} - 1 \right| = \frac{2}{3} < \varepsilon := 1 .$$