

Exercice sur le produit des entiers pairs et impairs

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Techniques de calculs

—
Calculs algébriques

—
Exercices

Exercice :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1°) Exprimer à l'aide du factorielle de n , notée $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.

2°) On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n + 1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n , montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} .$$

Exercice :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1°) Exprimer à l'aide du factorielle de n , notée $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.

2°) On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n , montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

1°) Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n := \prod_{k=1}^n (2k) = \left(\prod_{k=1}^n 2 \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n k \right) = 2^n n!$$

$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 2^n n!}.$$

2°) Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n := \prod_{k=0}^n (2k+1) = 1 \cdot \left(\prod_{k=0}^n 2k+1 \right) = \left(\frac{A_n}{A_n} \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^n 2k+1 \right)$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{\left(\prod_{p=1}^n 2p \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^n 2k+1 \right)}{\prod_{q=1}^n (2q)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{2n+1} k \right)}{2^n n!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}}.$$