Exercice sur la convergence de deux suites réelles et inégalité

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Exercices

Exercice :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ avec $l_1 < l_2$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, nous avons $u_n < v_n$.

Exercice :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ avec $l_1 < l_2$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, nous avons $u_n < v_n$.

Nous pouvons revenir à la définition de la convergence d'une suite réelle :

$$\exists!\ l_1 \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N_1 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1\ ,$$

$$\exists!\ l_2 \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N_2 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N_2 \Longrightarrow |v_n - l_2| \leq \varepsilon_2\ .$$

Ainsi :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq \max(N_1, N_2) \Longrightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1\ \wedge\ |v_n - l_2| \leq \varepsilon_2\ .$$

Nous avons alors pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $\max(N_1, N_2)$:

$$0 < l_2 - l_1 = |l_2 - l_1| \leq |l_2 - v_n + v_n - u_n + u_n - l_1|$$

$$\Longrightarrow l_2 - l_1 \leq |l_2 - v_n + u_n - l_1| + |v_n - u_n| \leq |l_2 - v_n| + |u_n - l_1| + |v_n - u_n|$$

$$\Longrightarrow l_2 - l_1 \leq |v_n - l_2| + |u_n - l_1| + |v_n - u_n| \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + |v_n - u_n|\ .$$

Nous allons poser $\varepsilon := \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ainsi :

$$|v_n - u_n| \geq l_2 - l_1 - 2\varepsilon \ .$$

On veut à partir d'un certain rang :

$$v_n > u_n \Longleftrightarrow v_n - u_n > 0 \Longrightarrow |v_n - u_n| > 0 \ .$$

Ainsi, il suffit que :

$$l_2 - l_1 - 2\varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon \in \left]0, \frac{l_2 - l_1}{2}\right[} \ .$$

Finalement, nous pouvons prendre par exemple $\varepsilon := \dfrac{l_2 - l_1}{3}$ pour avoir à partir d'un certain rang $v_n > u_n$.

Il s'agit d'un résultat attendu, en effet, il suffit que la zone de contrôle $[l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1]$ soit disjointe de la zone de contrôle $[l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2]$ afin d'avoir à partir d'un certain rang $v_n > u_n$, *id est* :

$$l_1 + \varepsilon_1 < l_2 - \varepsilon_2 \Longleftrightarrow 0 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < l_2 - l_1 \ .$$

Nous allons poser $\varepsilon := \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ainsi :

$$0 < 2\varepsilon < l_2 - l_1 \Longleftrightarrow \varepsilon \in \left]0, \frac{l_2 - l_1}{2}\right[\ .$$