Propriété d'Archimède

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

L'ensemble des nombres réels

Proposition : $\mathbb{R}$ est archimédien

L'ensemble $\mathbb{R}$ est **archimédien**, ce qui signifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx > y\ .$$

Remarque 1 : Un peu d'histoire ...

C'est un hommage à Archimède (287 jusqu'à 212 av. J.-C.) qui l'avait utilisée de manière intensive pour sa méthode d'exhaustion. La méthode d'exhaustion est un procédé ancien de calcul d'aires, de volumes et de longueurs de figures géométriques complexes. On appelle quadrature la recherche de l'aire d'une surface et rectification celle de la longueur d'une courbe. Dans le cas du calcul de l'aire A d'une figure plane, la méthode d'exhaustion consiste en un double raisonnement par l'absurde : on suppose que son aire est strictement supérieure à A, puis on aboutit à une contradiction ; on suppose ensuite que son aire est strictement inférieure à A, puis on aboutit à une autre contradiction. On parvient ainsi à montrer que l'aire de la figure est A.

Remarque 2 : Intuition sur la propriété d'Archimède

La propriété d'Archimède indique que pour deux valeurs, la plus grande pourra toujours être mesurée à l'aune de la plus petite : en ajoutant un nombre fini de fois la plus petite valeur, on finira toujours par dépasser la plus grande.

Remarque 3 : Autres ensembles archimédiens

C'est une propriété simple et partagée par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (il y en a d'autres).

Remarque 4 : Dépendance de l'entier n par rapport à x et y

Il est important de comprendre que l'entier n ici dépend de la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$ et de $y \in \mathbb{R}$ considérée : on peut, si nécessaire, souligner ce point (ou cette dépendance) en écrivant $n(x, y)$ au lieu de n. Ainsi, nous pouvons écrire la définition de la façon suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n(x, y) \in \mathbb{N},\ nx > y\ .$$

Remarque 5 : Unicité de l'entier n ?

L'entier n n'est bien évidemment pas unique, tout entier supérieur convient. Cela est explicite dans la proposition par l'utilisation du quantificateur $\exists$ au lieu du quantificateur $\exists!$.

Remarque 6 : Inégalité large pour $nx > y$?

Nous pouvons nous demander si l'inégalité stricte $nx > y$ peut de manière équivalente être une inégalité large $nx \geq y$. En effet, certains ouvrages fournissent une inégalité large, il est donc légitime de se poser la question.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(x, y, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ tel que $nx \geq y$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé), alors il existe un entier naturel $n+1$ qui fournit l'inégalité stricte $(n+1)\,x > y$ désirée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La réciproque est immédiate puisque l'inégalité stricte implique l'inégalité large. Ainsi, nous avons :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx > y$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx \geq y\ .$$

Remarque 7 : Restriction ou équivalence quand $y \in \mathbb{R}_+^*$?

Dans certains ouvrages, on restreint y à $\mathbb{R}_+^*$, il est légitime de se demander si cela est possible.

$\boxed{\Longrightarrow}$ La proposition nous donne pour tout $y \in \mathbb{R}$, étant donné que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$, on en déduit que la proposition implique celle avec $y \in \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Dans l'autre sens, si pour un $x \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque et un $y \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque il existe un $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $nx \geq y$, alors si nous avons un $\hat{y} \in \mathbb{R}$, l'inégalité $nx \geq \hat{y}$ reste vraie. En effet, si ce $\hat{y}$ est strictement positif alors pas de soucis (on respecte la condition $y \in \mathbb{R}_+^*$) et si ce $\hat{y}$ est négatif ou nul alors on peut observer que $nx > 0 \geq \hat{y}$ ($n = 1$ est suffisant dans cette situation). Ainsi, nous avons l'équivalence suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx \geq y$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx \geq y\ .$$

Cette formulation équivalente est la situation où x et y représentent des longueurs qui ont une réalité physique.

Remarque 8 : Pourquoi $x \in \mathbb{R}_+^*$?

Si $x = 0$, alors quelque soit la valeur de n, l'inégalité $nx \geq y$ ne sera jamais respectée si $y \in \mathbb{R}_+^*$. De même, si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors quelque soit la valeur de n, l'inégalité $nx \geq y$ ne sera jamais respectée si $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque 9 : Une autre formulation

Pour dire que l'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien, nous pouvons écrire de manière équivalente :

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > y\ .$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, nous pouvons définir $z := \dfrac{y}{x} \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $n > z \Longleftrightarrow n > \dfrac{y}{x} \Longleftrightarrow nx > y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $nx > y \Longleftrightarrow n > y$. Nous avons donc l'équivalence suivante :

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > y$$

$$\Longleftrightarrow\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx > y\ .$$

Remarque 10 : Dépendance de l'entier n par rapport à y pour l'autre formulation

Il est important de comprendre que l'entier n ici dépend de la valeur de $y \in \mathbb{R}$ considérée : on peut, si nécessaire, souligner ce point (ou cette dépendance) en écrivant $n(y)$ au lieu de n. Ainsi, nous pouvons écrire la définition de la façon suivante :

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n(y) \in \mathbb{N},\ n > y\ .$$

Remarque 11 : Unicité de l'entier n pour l'autre formulation ?

L'entier n n'est bien évidemment pas unique, tout entier supérieur convient. Cela est explicite dans l'autre formulation par l'utilisation du quantificateur $\exists$ au lieu du quantificateur $\exists!$.

Remarque 12 : Inégalité large pour l'autre formulation ?

Nous pouvons nous demander si l'inégalité stricte $n > y$ peut de manière équivalente être une inégalité large $n \geq y$. En effet, certains ouvrages fournissent une inégalité large, il est donc légitime de se poser la question.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(y, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ tel que $x \geq y$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé), alors il existe un entier naturel $n + 1$ qui fournit l'inégalité stricte $(n + 1) > y$ désirée.
$\boxed{\Longleftarrow}$ La réciproque est immédiate puisque l'inégalité stricte implique l'inégalité large. Ainsi, nous avons :

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ n > y \iff \forall\ y \in \mathbb{R},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ n \geq y\ .$$

Remarque 13 : Restriction ou équivalence quand $y \in \mathbb{R}_+^*$ pour l'autre formulation ?

$\boxed{\Longrightarrow}$ L'autre formulation nous donne pour tout $y \in \mathbb{R}$, étant donné que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$, on en déduit que l'autre formulation implique celle avec $y \in \mathbb{R}_+^*$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Dans l'autre sens, si pour un $y \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque il existe un $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $n \geq y$, alors si nous avons un $\hat{y} \in \mathbb{R}$, l'inégalité $n \geq \hat{y}$ reste vraie. En effet, si ce $\hat{y}$ est strictement positif alors pas de soucis (on respecte la condition $y \in \mathbb{R}_+^*$) et si ce $\hat{y}$ est négatif ou nul alors on peut observer que $n > 0 \geq \hat{y}$ ($n = 1$ est suffisant dans cette situation). Ainsi, nous avons l'équivalence suivante :

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ nx \geq\ y \iff \forall\ y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ nx \geq y\ .$$

Eléments de preuve :

Il faut raisonner par l'absurde en supposant que $\mathbb{R}$ n'est pas archimédien et qu'il existe donc un $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}_x := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$, soit majoré par un $y \in \mathbb{R}$ et non vide afin de pouvoir utiliser la propriété de la borne supérieure. Il suffit de considérer pour un $\hat{n} \in \mathbb{N}$ fixé l'inégalité $\hat{n}x \leq \sup(\mathcal{A}_x)$ et de chercher une contradiction avec l'inégalité $(\hat{n}+1)\,x \leq \sup(\mathcal{A}_x)$.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathbb{R}$ n'est pas archimédien, *id est* :

$$\neg\left(\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nx > y\right)$$

$$\iff\ \exists\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ nx \leq y\ .$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il n'existe aucun entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$ (ce qui revient à dire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ nx \leq y$). Posons l'ensemble $\mathcal{A}_x$ qui se définit de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est majoré par notre y et non vide car $0 \in \mathcal{A}_x$.

En effet $0 = 0 \times x$ (on utilise l'entier $n = 0$). Ainsi, d'après la propriété de la borne supérieure, la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{A}_x$ existe et l'on notera cette dernière $\sup(\mathcal{A}_x)$.

Ce qu'il faut sentir dans l'idée de cette preuve est que l'on voit bien qu'en raisonnant par l'absurde, on aboutit à quelque chose qui n'est pas possible dès le début de la démonstration. En effet, l'idée selon laquelle il serait impossible de dépasser strictement un réel y en ajoutant un nombre fini de fois un réel strictement positif x est totalement faux. De ce fait, on comprend bien que la borne supérieure de $\mathcal{A}_x$ n'a pas de sens (ce n'est pas le plus petit des majorants) et que l'on pourra toujours trouver un majorant plus petit que $\sup(\mathcal{A}_x)$, contredisant ainsi que le fait que c'est le plus petit des majorants.

Soit $\hat{n} \in \mathbb{N}$, nous avons alors $\hat{n}x \leq \sup(\mathcal{A}_x)$. Etant donné que cette inégalité fonctionne pour tout entier naturel, nous avons également l'inégalité $(\hat{n}+1)x \leq \sup(\mathcal{A}_x)$ qui est vraie. Cette dernière nous fournit l'inégalité $\hat{n}x \leq \sup(\mathcal{A}_x) - x$. Vu que $\hat{n}$ a été choisi de façon arbitraire dans $\mathbb{N}$, cette inégalité est vrai pour tous les éléments de $\mathcal{A}_x$. Ainsi, $\sup(\mathcal{A}_x) - x$ est un majorant de $\mathcal{A}_x$ et vu que $x \in \mathbb{R}_+^*$, ce dernier est plus petit que $\sup(\mathcal{A}_x)$: nous avons trouvé un majorant de $\mathcal{A}_x$ plus petit que le plus petit des majorants de $\mathcal{A}_x$. Il y a contradiction. ■