Exercice sur le produit des entiers pairs et impairs

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Calculs algébriques

—

Symboles $\sum$ et $\prod$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$.
1°) Exprimer à l'aide du factorielle de n, notée $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.
2°) On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \ .$$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$.
1°) Exprimer à l'aide du factorielle de n, notée $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.
2°) On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} .$$

1°) Nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ A_n := \prod_{k=1}^{n} (2k) = \left(\prod_{k=1}^{n} 2\right) . \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = 2^n n!$$

$$\iff \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ A_n = 2^n n!} .$$

2°) Nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ B_n := \prod_{k=0}^{n} (2k+1) = 1\ .\left(\prod_{k=0}^{n} 2k+1\right) = \left(\frac{A_n}{A_n}\right).\left(\prod_{k=0}^{n} 2k+1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{\left(\prod\limits_{p=1}^{n} 2p\right).\left(\prod\limits_{k=0}^{n} 2k+1\right)}{\prod\limits_{q=1}^{n} (2q)} = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{2n+1} k\right)}{2^n n!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}}\ .$$