Exercice sur une propriété de la partie entière

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Exercices

Exercice :

Montrer que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha\ .$$

Exercice :

Montrer que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha\ .$$

Nous avons :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha \leq x+\alpha < (\lfloor x \rfloor + \alpha) + 1\ .$$

La définition de la partie entière de $\lfloor x+\alpha \rfloor$ est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leq x+\alpha < n+1\ .$$

Vu que $\lfloor x \rfloor + \alpha \in \mathbb{Z}$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha}\ .$$

Proposons une seconde façon de résoudre l'exercice, pour cela repartons de la double inégalité classique de la partie entière :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\ .$$

Ainsi :

$$\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha \leq x + \alpha < \lfloor x \rfloor + \alpha + 1\ . \quad (\star)$$

De plus :

$$\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x + \alpha \rfloor \leq x + \alpha < \lfloor x + \alpha \rfloor + 1$$

$$\iff \forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x + \alpha \rfloor \leq x + \alpha\ \wedge\ x + \alpha < \lfloor x + \alpha \rfloor + 1$$

$$\iff \forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ -\lfloor x + \alpha \rfloor \geq -x - \alpha\ \wedge\ -x - \alpha > -\lfloor x + \alpha \rfloor - 1$$

$$\iff \forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ -\lfloor x + \alpha \rfloor - 1 < -x - \alpha \leq -\lfloor x + \alpha \rfloor\ . \quad (\star\star)$$

En additionnant la partie gauche et la partie droite des équations $(\star)$ et $(\star\star)$, nous avons :

$$\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor - 1 < 0\ \wedge\ 0 < \lfloor x \rfloor + \alpha + 1 - \lfloor x + \alpha \rfloor$$

$$\iff \forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor < 1\ \wedge\ -1 < \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor$$

$$\iff \forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor) \in \left]-1;1\right[\ .$$

Or, nous savons que :

$$\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \mathbb{Z}\ .$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \mathbb{Z} \cap \left]-1;1\right[\\
\iff &\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ (\lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor) \in \{0\} \\
\iff &\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor = 0 \\
\iff &\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \alpha = \lfloor x+\alpha \rfloor\ .
\end{aligned}$$