Exercice sur les sommes, le télescopage et la quantité conjuguée

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Calculs algébriques

—

Symboles $\sum$ et $\prod$

Exercice

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2\ 022 \ .$$

Exercice

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \geq 2\ 022\ .$$

Nous avons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right).\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k}\right)^2-\left(\sqrt{k+1}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-k-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{p=1}^{n} \sqrt{p} = \sum_{k=1+1}^{n+1} \sqrt{k+1-1} - \sum_{p=1}^{n} \sqrt{p}$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{p=1}^{n} \sqrt{p} = \sqrt{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} - \sum_{p=2}^{n} \sqrt{p} - \sqrt{1}$$

$$\iff \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sqrt{n+1} - 1\ .$$

Ainsi, nous pouvons trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ en résolvant l'inéquation ci-dessous :

$$S_n \geq 2\ 022$$

$$\iff \sqrt{n+1} - 1 \geq 2\ 022$$

$$\iff \sqrt{n+1} \geq 2\ 023$$

$$\iff \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \geq (2\ 023)^2$$

$$\iff n + 1 \geq (2\ 023)^2$$

$$\iff n \geq (2\ 023)^2 - 1^2$$

$$\iff n \geq (2\ 023 + 1) . (2\ 023 - 1)$$

$$\iff n \geq 2\ 024 \times 2\ 022$$

$$\iff n \geq 4\ 092\ 528\ .$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\ 092\ 528\}}\ .$$