

Exercice sur la convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Analyse
—

Nombres réels, suites numériques

—
Exercices

Exercice :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par $u_n := \frac{n^2 - 2}{n^2 + n}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1°) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- 2°) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 3°) Démontrer à l'aide de la définition d'une suite réelle convergente et de la réponse obtenue à la deuxième question, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$.

Exercice :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par $u_n := \frac{n^2 - 2}{n^2 + n}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2°) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3°) Démontrer à l'aide de la définition d'une suite réelle convergente et de la réponse obtenue à la deuxième question, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$.

1°) Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, ce qui revient à montrer de façon équivalente que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)^2 + (n+1)} - \frac{n^2 - 2}{n^2 + n}$$

$$\iff u_{n+1} - u_n = \frac{(n^2 + 2n + 1 - 2)(n^2 + n) - (n^2 - 2)(n^2 + 2n + 1 + n + 1)}{(n^2 + 2n + 1 + n + 1)(n^2 + n)}$$

$$\iff u_{n+1} - u_n = \frac{(n^2 + 2n - 1)(n^2 + n) + (2 - n^2)(n^2 + 3n + 2)}{(n^2 + 3n + 2)(n^2 + n)}$$

Développons notre expression :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^4 + n^3 + 2n^3 + 2n^2 - n^2 - n + 2n^2 + 6n + 4 - n^4 - 3n^3 - 2n^2}{(n^2 + 3n + 2)(n^2 + n)}$$
$$\iff u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 + 5n + 4}{(n^2 + 3n + 2)(n^2 + n)} > 0 \iff u_{n+1} > u_n .$$

Nous avons donc **notre suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui est strictement croissante**. Une autre façon de montrer la stricte croissance de notre suite est de définir la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0; -1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} \end{cases} .$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$, nous avons alors :

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + x} \right)' = \frac{2x(x^2 + x) - (x^2 - 2)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$$

$$\iff f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2}{(x^2 + x)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x^2 + x)^2} > 0.$$

La fonction f est strictement croissante car la dérivée de f est strictement positive.

2°) La limite de la suite est 1 car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \right) \left(\frac{1 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

3°) Nous avons notre suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui a pour limite 1, ce qui peut s'exprimer en revenant à la définition de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq N \implies |u_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|u_n - 1| \leq \varepsilon \iff \left| \frac{n^2 - 2}{n^2 + n} - 1 \right| \leq \varepsilon \iff \left| \frac{n^2 - 2 - n^2 - n}{n^2 + n} \right| \leq \varepsilon$$

$$\iff \left| \frac{-(2+n)}{n^2+n} \right| \leq \varepsilon \iff \frac{2+n}{n^2+n} \leq \varepsilon \iff \varepsilon n^2 + \varepsilon n \geq 2+n$$

$$\iff \varepsilon n^2 + (\varepsilon - 1)n - 2 \geq 0.$$

Nous allons définir la fonction g_ε suivante :

$$g_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad g_\varepsilon(x) := \varepsilon x^2 + (\varepsilon - 1)x - 2 \end{cases}.$$

Nous avons $\varepsilon > 0$, ce qui fait que g_ε est convexe, calculons son déterminant :

$$\Delta := b^2 - 4ac = (\varepsilon - 1)^2 + 8\varepsilon = \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 + 8\varepsilon = \varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1 > 0.$$

Nous avons donc deux racines distinctes réelles, prenons la plus grande :

$$x_2 := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1}}{2\varepsilon} > \frac{1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2}}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} > 0.$$

De plus, nous avons $\forall x \in [x_2, +\infty[, g_\varepsilon(x) \geq 0$, donc, l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ est :

$$N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1}}{2\varepsilon} \right\rceil.$$

Nous avons explicité l'expression de notre entier $N \in \mathbb{N}^*$ (qui dépend du choix de ε), testons ce dernier avec $\varepsilon := 1$:

$$N(1) := \left\lceil \frac{1 - 1 + \sqrt{1^2 + 6 + 1}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2,$$

$$\left| u_{N(1)} - 1 \right| = \left| \frac{2^2 - 2}{2^2 + 2} - 1 \right| = \left| \frac{2}{6} - 1 \right| = \frac{2}{3} < \varepsilon := 1.$$