

Exercice sur la convergence d'une suite réelle vers une limite finie dans \mathbb{Z}

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Analyse
—

Nombres réels, suites numériques

—
Exercices

Exercice :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} . Montrer que cette suite est stationnaire.

Exercice :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} . Montrer que cette suite est stationnaire.

Nous allons résoudre l'exercice de deux manières. La première façon consiste à montrer que la limite de la suite (qui est unique) est un entier relatif en raisonnant par l'absurde. Une fois cela fait, il suffira de revenir à la définition d'une suite convergente et choisir de façon judicieuse une marge d'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ afin de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien stationnaire. La seconde façon de résoudre l'exercice consiste à utiliser directement la définition d'une suite convergente et choisir de façon judicieuse une marge d'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ afin de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien stationnaire en contrôlant l'écart entre deux termes de la suite à valeurs dans \mathbb{Z} .

Raisonnons par l'absurde en supposant que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Ainsi :

$$\exists! l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon .$$

A partir d'un certain rang, on a donc :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon.$$

Si $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors $\lfloor l \rfloor < l < \lfloor l \rfloor + 1$, cherchons un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \lfloor l \rfloor &< l - \varepsilon \wedge l + \varepsilon < \lfloor l \rfloor + 1 \\ \iff \varepsilon &< l - \lfloor l \rfloor \wedge \varepsilon < \lfloor l \rfloor - l + 1 \\ \iff \varepsilon &< \{l\} \wedge \varepsilon < 1 - \{l\}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\varepsilon \in]0, \min(\{l\}, 1 - \{l\})[$, alors :

$$\lfloor l \rfloor < l - \varepsilon \leq l \leq l + \varepsilon < \lfloor l \rfloor + 1.$$

Il y a donc aucun entier relatif dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in]0, \min(\{l\}, 1 - \{l\})[$, ou autrement dit : $\mathbb{Z} \cap [l - \varepsilon, l + \varepsilon] = \emptyset$. Or, à partir d'un certain rang, $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $u_n \in \mathbb{Z}$, c'est absurde d'appartenir à un intervalle sans entiers relatifs et en même temps d'être à valeurs dans \mathbb{Z} . Donc $l \in \mathbb{Z}$. Enfin, on a la définition de la convergence de la suite qui nous donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

A partir d'un certain rang, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Prenons un $\varepsilon \in]0; 1[$, par exemple $\varepsilon := \frac{1}{2}$, alors $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}$. Or, $\forall n \geq N$, $u_n \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$. La distance entre ces deux entiers relatifs à partir d'un certain rang N est 0,5 ce qui veut dire que $u_n = l$ pour tout n supérieur ou égal à N . C'est la définition d'une suite stationnaire.

Passons à la seconde résolution. Reprenons la définition de la convergence pour notre suite :

$$\exists! l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon .$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N, |u_n - u_N| = |u_n - l + l - u_N| \leq |u_n - l| + |u_N - l| \leq 2\varepsilon .$$

Prenons un $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, par exemple $\varepsilon := \frac{1}{3}$, on a alors :

$$\forall n \geq N, |u_n - u_N| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3} .$$

A partir d'un certain rang N , on a $(u_n - u_N) \in \mathbb{Z}$ et en même temps nous avons $-1 < -\frac{2}{3} \leq u_n - u_N \leq \frac{2}{3} < 1$, donc $u_n - u_N = 0$. Ainsi :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq N, u_n = u_N.$$

C'est la définition de la suite stationnaire, par ailleurs, on en déduit que la limite est u_N et que cette limite appartient à \mathbb{Z} .