

Exercice pour montrer qu'un nombre complexe est réel

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Nombres complexes

—

Exercices

Exercice :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

Exercice :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

Nous allons le montrer de deux façons. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{(z-i) \overline{(1-iz)}}{(1-iz) \overline{(1-iz)}} &= \frac{(z-i)(1+i\bar{z})}{|1-iz|^2} = \frac{z + i|z|^2 - i + \bar{z}}{|1-iz|^2} = \frac{z + \bar{z} + i(|z|^2 - 1)}{|1-iz|^2} \\ &\iff \frac{z-i}{1-iz} = \frac{2\Re(z) + i(|z|^2 - 1)}{|1-iz|^2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que $|1-iz|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et que pour avoir un nombre réel, il faut et il suffit d'avoir la partie imaginaire nulle, *id est* :

$$|z|^2 - 1 = 0 \iff |z|^2 = 1.$$

La seconde façon de résoudre cet exercice consiste à se rappeler qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$:

$$\frac{z-i}{1-iz} = \overline{\left(\frac{z-i}{1-iz}\right)} \iff \frac{z-i}{1-iz} = \frac{\bar{z}+i}{1+i\bar{z}} \iff (z-i)(1+i\bar{z}) = (1-iz)(\bar{z}+i)$$

$$z + i|z|^2 - i + \bar{z} = \bar{z} + i - i|z|^2 + z \iff 2i|z|^2 - 2i = 0 \iff |z|^2 = 1 .$$