Exercice sur la partie entière et les suites réelles

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Exercices

Exercice :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui se définit comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et donner sa limite si cette dernière converge.

Exercice :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui se définit comme $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et donner sa limite si cette dernière converge.

Nous avons :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ k \in [\![1, n]\!],\ kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$$

$$\Longrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{nx\,(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{nx\,(n+1)}{2n^2}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{2n}\ .$$

Nous pouvons définir deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n := \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n}\ \wedge\ w_n := \frac{x}{2} + \frac{x}{2n}\ .$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n < u_n \leq w_n\ .$$

De plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont **la même limite** qui est $\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} = \frac{x}{2}\ \wedge\ \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{x}{2n} = \frac{x}{2}\ .$$

D'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), nous avons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge (existence la limite) vers $\dfrac{x}{2}$ (valeur de cette limite).