Exercice sur la convergence d'une suite réelle vers une limite finie dans $\mathbb{Z}$

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Limite d'une suite réelle

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que cette suite est stationnaire.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que cette suite est stationnaire.

Nous allons résoudre l'exercice de deux manières. La première façon consiste à montrer que la limite de la suite (qui est unique) est un entier relatif en raisonnant par l'absurde. Une fois cela fait, il suffira de revenir à la définition d'une suite convergente et choisir de façon judicieuse une marge d'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ afin de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien stationnaire. La seconde façon de résoudre l'exercice consiste à utiliser directement la définition d'une suite convergente et choisir de façon judicieuse une marge d'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ afin de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien stationnaire en contrôlant l'écart entre deux termes de la suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $l \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Ainsi :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

A partir d'un certain rang, on a donc :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon \ .$$

Si $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors $\lfloor l \rfloor < l < \lfloor l \rfloor + 1$, cherchons un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que :

$$\lfloor l \rfloor < l - \varepsilon \ \wedge \ l + \varepsilon < \lfloor l \rfloor + 1$$

$$\iff \varepsilon < l - \lfloor l \rfloor \ \wedge \ \varepsilon < \lfloor l \rfloor - l + 1$$

$$\iff \varepsilon < \{l\} \ \wedge \ \varepsilon < 1 - \{l\} \ .$$

Ainsi, si $\varepsilon \in \left]0, \min\left(\{l\}, 1 - \{l\}\right)\right[$, alors :

$$\lfloor l \rfloor < l - \varepsilon \leq l \leq l + \varepsilon < \lfloor l \rfloor + 1 \ .$$

Il y a donc aucun entier relatif dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in \left]0, \min\left(\{l\}, 1 - \{l\}\right)\right[$, ou autrement dit : $\mathbb{Z} \cap [l - \varepsilon, l + \varepsilon] = \emptyset$. Or, à partir d'un certain rang, $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $u_n \in \mathbb{Z}$, c'est absurde d'appartenir à un intervalle sans entiers relatifs et en même temps d'être à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Donc $l \in \mathbb{Z}$. Enfin, on a la définition de la convergence de la suite qui nous donne :

$$\forall \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \ N \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \ .$$

A partir d'un certain rang, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour toute valeur de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Prenons un $\varepsilon \in]0;1[$, par exemple $\varepsilon := \frac{1}{2}$, alors $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}$. Or, $\forall\ n \geq N,\ u_n \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$. La distance entre ces deux entiers relatifs à partir d'un certain rang N est $0,5$ ce qui veut dire que $u_n = l$ pour tout n supérieur ou égal à N. C'est la définition d'une suite stationnaire.

Passons à la seconde résolution. Reprenons la définition de la convergence pour notre suite :

$$\exists!\ l \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi :

$$\forall\ n \geq N,\ |u_n - u_N| = |u_n - l + l - u_N| \leq |u_n - l| + |u_N - l| \leq 2\varepsilon\ .$$

Prenons un $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, par exemple $\varepsilon := \frac{1}{3}$, on a alors :

$$\forall\ n \geq N,\ |u_n - u_N| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}\ .$$

A partir d'un certain rang N, on a $(u_n - u_N) \in \mathbb{Z}$ et en même temps nous avons $-1 < -\dfrac{2}{3} \leq u_n - u_N \leq \dfrac{2}{3} < 1$, donc $u_n - u_N = 0$. Ainsi :

$$\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N,\ u_n = u_N\ .$$

C'est la définition de la suite stationnaire, par ailleurs, on en déduit que la limite est u_N et que cette limite appartient à $\mathbb{Z}$.