Définition de la convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Limite d'une suite réelle

Mercredi 12 novembre 2025

Définition : Convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Etant donné une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** l, ou encore **converge vers** l, si :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Pour toute valeur strictement positive ε, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de l inférieure à ε. Ou encore, en prenant n suffisamment grand, on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de l.

Remarque 1 : Dépendance de l'entier N par rapport au réel ε

Il est important de comprendre que l'entier N ici (le « certain rang ») dépend de la valeur ε considérée : on peut, si nécessaire, souligner ce point (ou cette dépendance) en écrivant $N(\varepsilon)$ ou N_ε au lieu de N. Ainsi, nous pouvons écrire la définition selon les deux façons suivantes (qui ne sont qu'une façon dans les faits) :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Remarque 2 : Unicité de l'entier N ?

L'entier N n'est bien évidemment pas unique, tout entier supérieur convient. Cela est explicite dans la définition par l'utilisation du quantificateur $\exists$ au lieu du quantificateur $\exists!$. On s'efforcera de chercher le « meilleur » entier N, c'est à dire le plus petit.

Remarque 3 : Inégalité stricte pour $|u_n - l| \leq \varepsilon$?

Nous avons des inégalités larges et une inégalité stricte (un peu cachée car on utilise $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mais il est courant de voir $\forall\ \varepsilon > 0$) dans notre définition. Il est donc légitime de se demander si les inégalités larges peuvent être strictes et si l'inégalité stricte peut être large. En ce qui concerne l'inégalité large $|u_n - l| \leq \varepsilon$, on peut de manière équivalente utilisée l'inégalité stricte $|u_n - l| < \varepsilon$ de sorte que la définition devienne :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

En effet, le quantificateur $\forall$ utilisée pour la variable ε permet de se fixer/choisir un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui fait qu'il existe un entier N de sorte qu'à partir de ce rang ou pour tout rang supérieur, nous avons $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Toujours pour la même suite, on peut choisir un $\hat{\varepsilon}$ qui se définit comme $\hat{\varepsilon} := \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, nous avons bien $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ et il existe donc un entier $\hat{N}$ de sorte qu'à partir de ce rang ou pour tout rang supérieur, nous avons $|u_n - l| \leq \hat{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ainsi, pour un ε choisit de façon arbitraire, nous avons :

$$\exists\ \hat{N} \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq \hat{N} \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

Remarque 4 : Inégalité stricte pour $n \geq N$?

Nous avons des inégalités larges et une inégalité stricte (un peu cachée car on utilise $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mais il est courant de voir $\forall\ \varepsilon > 0$) dans notre définition. Il est donc légitime de se demander si les inégalités larges peuvent être strictes et si l'inégalité stricte peut être large. En ce qui concerne l'inégalité large $n \geq N$, on peut de manière équivalente utilisée l'inégalité stricte $n > N$ de sorte que la définition devienne :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n > N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

En effet, le quantificateur $\forall$ utilisée pour la variable ε permet de se fixer/choisir un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui fait qu'il existe un entier N de sorte qu'à partir de ce rang ou pour tout rang supérieur, nous avons $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre l'entier $N+1$ pour passer de l'inégalité large à l'inégalité stricte.

Remarque 5 : Inégalité large pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$?

Non, on ne peut pas remplacer $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $\forall\ \varepsilon > 0$) par $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ (ou $\forall\ \varepsilon \geq 0$). Sinon, en prenant $\varepsilon = 0$, on trouverait un rang N à partir duquel on aurait $|u_n - l| \leq 0$, soit $u_n = l$ (si on prend l'inégalité stricte c'est impossible). Les seules suites admettant l pour limite seraient les suites égales à l à partir d'un certain rang, *id est*, les suites stationnaires. Pour rappel, une suite est stationnaire si :

$$\exists\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq p \Longrightarrow u_{n+1} = u_n\ .$$

Remarque 6 : Les 8 différentes formulations de la définition

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n > N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \middle|\ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

Remarque 7 : Convergence indépendante des premiers termes

La condition de convergence ne dépend pas des premiers termes de la suite. Ce type de propriété dite asymptotique est conservée si l'on change les premiers termes.

Remarque 8 : L'importance de l'ordre des quantificateurs

Dans toutes les phrases quantifiées, si l'on change l'ordre des quantificateurs (surtout lorsque l'on utilise le quantificateur existentielle $\exists$), on modifie le sens de la définition. Par exemple, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\exists\ l \in \mathbb{R},\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

sont les suites constantes à partir d'un certain rang, *id est*, les suites stationnaires.

Remarque 9 : Autre formulation de la limite d'une suite pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Si nous nous plaçons dans le corps réel $\mathbb{R}$, une façon équivalente de formuler la notion de limite d'une suite est de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite si, et seulement si, tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Si nous nous plaçons dans le corps complexe $\mathbb{C}$, on a une formulation analogue en remplaçant les intervalles ouverts de centre l par les disques ouverts de centre l.