Proposition - Partie réelle, partie imaginaire et involution de la conjugaison

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Techniques de calculs

—

Nombres complexes

—

L'ensemble des nombres complexes

—

Conjugué d'un nombre complexe

Proposition : Partie réelle, partie imaginaire et involution

$$\forall\ z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}\left(z\right) = \frac{z + \overline{z}}{2},\ \mathfrak{Im}\left(z\right) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \text{ et } \overline{\overline{z}} = z\ .$$

Remarque 1 :

Faire attention au dénominateur de $\mathfrak{Im}\left(z\right) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Eléments de preuve :

Partir de l'expression la plus compliquée et utiliser la définition du conjugué d'un nombre complexe z :

$$\bar{z} := \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\mathfrak{Im}\left(z\right)\ .$$

Démonstration :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on alors :

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{\mathfrak{Re}\left(z\right) + i\mathfrak{Im}\left(z\right) + \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\mathfrak{Im}\left(z\right)}{2} = \frac{2\mathfrak{Re}\left(z\right)}{2} = \mathfrak{Re}\left(z\right)\ ,$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{\mathfrak{Re}\left(z\right)+i\mathfrak{Im}\left(z\right)-\mathfrak{Re}\left(z\right)+i\mathfrak{Im}\left(z\right)}{2i} = \frac{2i\mathfrak{Im}\left(z\right)}{2i} = \mathfrak{Im}\left(z\right)\ ,$$

Enfin :

$$\overline{z} = \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\mathfrak{Im}\left(z\right) = \mathfrak{Re}\left(\overline{z}\right) + i\mathfrak{Im}\left(\overline{z}\right)$$

ce qui nous amène à :

$$\overline{\overline{z}} = \mathfrak{Re}\left(\overline{z}\right) - i\mathfrak{Im}\left(\overline{z}\right) = \mathfrak{Re}\left(z\right) - i\left[-\mathfrak{Im}\left(z\right)\right] = \mathfrak{Re}\left(z\right) + i\mathfrak{Im}\left(z\right) = z\ .$$

Méthodologie : Caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur

Pour prouver qu'un nombre complexe est réel, il est équivalent de montrer que $z = \overline{z}$. Ce résultat provient de la résolution de l'équation $\mathfrak{Im}\left(z\right) = 0$ et de l'utilisation de la proposition.

Pour prouver qu'un nombre complexe est un imaginaire pur, il est équivalent de montrer que $z = -\overline{z}$. Ce résultat provient de la résolution de l'équation $\mathfrak{Re}\left(z\right) = 0$ et de l'utilisation de la proposition.