

Exercice pour montrer qu'un nombre complexe est réel

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Techniques de calculs

—
Nombres complexes

—
Exercices

Exercice :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, montrer que $\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.

Exercice :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, montrer que $\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = 0 \iff \frac{1-z}{1+z} = \overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)} \iff \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}} \\ &\iff (1-z)(1+\bar{z}) = (1+z)(1-\bar{z}) \iff 1 + \bar{z} - z - |z|^2 = 1 - \bar{z} + z - |z|^2 \\ &\iff 2\bar{z} = 2z \iff z = \bar{z} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$