

Exercice sur la partie entière et les suites réelles

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—
Analyse

—
Nombres réels, suites numériques

—
Exercices

Exercice :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui se définit comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et donner sa limite si cette dernière converge.

Exercice :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui se définit comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et donner sa limite si cette dernière converge.

Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kx$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{nx(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor \leq \frac{nx(n+1)}{2n^2}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{2n}$$

Nous pouvons définir deux suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n := \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} \wedge w_n := \frac{x}{2} + \frac{x}{2n}.$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n < u_n \leq w_n.$$

De plus, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont **la même limite** qui est $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} + \frac{x-2}{2n} = \frac{x}{2} \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} + \frac{x}{2n} = \frac{x}{2}.$$

D'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), nous avons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge (existence la limite) vers $\frac{x}{2}$ (valeur de cette limite).