Définition de la convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Loïc ALAVOINE

Mathématiques

—

Analyse

—

Nombres réels, suites numériques

—

Limite d'une suite réelle

Définition : Convergence d'une suite réelle vers une limite finie

Etant donné une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** l, **converge vers** l ou encore **admet** l **pour limite**, si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Big|\; n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Remarque 1 : Exprimer en français la définition de convergence

Pour toute valeur strictement positive ε, il existe un certain rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de l inférieure à ε. De façon moins formelle, en prenant n suffisamment grand, on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de l.

Remarque 2 : Ce que l'on veut dire par limite

Contrairement à l'usage courant en français, une limite n'est pas une barrière infranchissable. La limite est davantage un « point d'équilibre » qui attire la suite et dont elle s'approche infiniment (elle peut éventuellement osciller autour, comme pour un pendule amorti).

Remarque 3 : Dépendance de l'entier N par rapport au réel ε

Il est important de comprendre que l'entier N ici (le « certain rang ») dépend de la valeur ε considérée : on peut, si nécessaire, souligner ce point (ou cette dépendance) en écrivant $N(\varepsilon)$ ou N_ε au lieu de N. Ainsi, nous pouvons écrire la définition selon les deux façons suivantes (qui ne sont qu'une façon dans les faits) :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Remarque 4 : Variations de l'entier N par rapport au réel ε

Il est intuitif de remarquer que plus notre « zone de contrôle » (ou « couloir ») est étroite, plus il faudra prendre un rang élevé (et inversement). En utilisant les variables, plus notre ε sera petit, plus notre entier $N(\varepsilon)$ sera grand (et inversement). Bien évidemment, cela suppose que notre suite est convergente, dans le cas contraire où elle diverge, ce qui vient d'être énoncé est faux.

Remarque 5 : Unicité de l'entier N ?

L'entier N n'est bien évidemment pas unique, tout entier supérieur convient. Cela est explicite dans la définition par l'utilisation du quantificateur $\exists$ au lieu du quantificateur $\exists!$. Toutefois, on s'efforcera de chercher le « meilleur » entier N, c'est à dire le plus petit possible.

Remarque 6 : Inégalité stricte pour $|u_n - l| \leq \varepsilon$?

Nous avons des inégalités larges et une inégalité stricte (un peu cachée car on utilise $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mais il est courant de voir $\forall\ \varepsilon > 0$) dans notre définition. Il est donc légitime de se demander si les inégalités larges peuvent être strictes et si l'inégalité stricte peut être large. En ce qui concerne l'inégalité large $|u_n - l| \leq \varepsilon$, on peut de manière équivalente utilisée l'inégalité stricte $|u_n - l| < \varepsilon$ de sorte que la définition devienne :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ En effet, le quantificateur $\forall$ utilisée pour la variable ε permet de se fixer/choisir un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui fait qu'il existe un entier N de sorte qu'à partir de ce rang ou pour tout rang supérieur, nous avons $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Toujours pour la même suite, on peut choisir un $\hat{\varepsilon}$ qui se définit comme $\hat{\varepsilon} := \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, nous avons bien $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ et il existe donc un entier $\hat{N}$ de sorte qu'à partir de ce rang ou pour tout rang supérieur, nous avons $|u_n - l| \leq \hat{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ainsi, pour un ε choisit de façon arbitraire, nous avons :

$$\exists\ \hat{N} \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq \hat{N} \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ La réciproque est immédiate puisque l'inégalité stricte implique l'inégalité large. Ainsi, nous avons :

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

Remarque 7 : Inégalité stricte pour $n \geq N$?

Nous avons des inégalités larges et une inégalité stricte (un peu cachée car on utilise $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mais il est courant de voir $\forall\ \varepsilon > 0$) dans notre définition.

Il est donc légitime de se demander si les inégalités larges peuvent être strictes et si l'inégalité stricte peut être large. En ce qui concerne l'inégalité large $n \geq N$, on peut de manière équivalente utilisée l'inégalité stricte $n > N$ de sorte que la définition devienne :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Big|\; n > N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ En effet, le quantificateur $\forall$ utilisée pour la variable ε permet de se fixer/choisir un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui fait qu'il existe un entier N de sorte qu'à partir de ce rang ou pour tout rang supérieur, nous avons $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre l'entier $N+1$ pour passer de l'inégalité large à l'inégalité stricte. En effet, puisque nous avons dans la définition $n \geq N$, cela reste vrai pour $n \geq N+1 > N$, d'où l'inégalité stricte $n > N$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La réciproque est immédiate puisque l'inégalité stricte implique l'inégalité large. Ainsi, nous avons :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Big|\; n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Big|\; n > N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Remarque 8 : Inégalité large pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$?

Non, on ne peut pas remplacer $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (ou $\forall\ \varepsilon > 0$) par $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ (ou $\forall\ \varepsilon \geq 0$). Sinon, en prenant $\varepsilon = 0$, on trouverait un rang N à partir duquel on aurait $|u_n - l| \leq 0$, soit $u_n = l$ (si on prend l'inégalité stricte c'est impossible). Les seules suites admettant l pour limite seraient les suites égales à l à partir d'un certain rang, *id est*, les suites stationnaires. Pour rappel, une suite est stationnaire si :

$$\exists\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq p \Longrightarrow u_{n+1} = u_n\ .$$

Remarque 9 : Les 8 différentes formulations de la définition

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n > N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \Big|\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \mid n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \mid n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

Remarque 10 : Propriété asymptotique de la convergence & la limite

La convergence et la valeur de la limite, qui sont des propriétés asymptotiques, ne dépendent pas d'un nombre fini de termes de la suite qui ont été modifiés. En effet, si un nombre fini de termes sont modifiés, on peut noter $\hat{N}$ le plus grand indice de ceux-ci et il suffit de choisir un rang N de sorte que $N > \hat{N}$ afin d'appliquer la définition, préservant ainsi la convergence et la valeur de la limite.

Remarque 11 : L'importance de l'ordre des quantificateurs

Dans toutes les phrases quantifiées, si l'on change l'ordre des quantificateurs (surtout lorsque l'on utilise le quantificateur existentielle $\exists$), on modifie le sens de la définition. Par exemple, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\exists\, l \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ ,$$

sont les suites constantes à partir d'un certain rang, *id est*, les suites stationnaires. Enfin, un élément intéressant à noter étant que l'inversion opérée amène l'entier N à être indépendant du choix de ε.

Remarque 12 : Autre formulation de la limite d'une suite pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Si nous nous plaçons dans le corps réel $\mathbb{R}$, une façon équivalente de formuler la notion de limite d'une suite est de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite si, et seulement si, tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Si nous nous plaçons dans le corps complexe $\mathbb{C}$, on a une formulation analogue en remplaçant les intervalles ouverts de centre l par les disques ouverts de centre l.

Remarque 13 : Définir une suite divergente

Etant donné une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour exprimer que cette dernière est converge, nous avons :

$$\exists\, l \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Big|\; n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi, pour dire que notre suite diverge, il suffit de nier la formulation ci-dessus :

$$\forall\, l \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \;\Big|\; n \geq N \wedge |u_n - l| > \varepsilon\ .$$

Exemple 1 : Montrer qu'une suite est divergente

Nous allons montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se définissant pour tout entier naturel n comme $u_n := (-1)^n$ est divergente (à partir de la définition de divergence).

Soit $l \in \mathbb{R}$, il faut trouver un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que quelque soit le rang $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel n tel que $n \geq N$ et $|u_n - l| > \varepsilon$. Nous pouvons faire l'observation que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \{-1; 1\}$, ainsi, si n est pair, nous avons $u_n = 1$. Donc, quelque soit $N \in \mathbb{N}$, on pourra toujours trouver un entier n pair en prenant $n := N$ si N est pair ou $n := N + 1$ si N est impair qui respecte l'inégalité $n \geq N$ (le cas d'égalité correspond à N qui est pair). Enfin, pour un n pair qui respecte $n \geq N$, nous voulons avoir $|1 - l| > \varepsilon$. Pour ce faire, pour $l \neq 1$ nous pouvons prendre $\varepsilon := \dfrac{|1-l|}{2}$, en revanche, quand $l = 1$, notre ε que nous avons définit devient nul (or, il ne faut pas).

On se rend bien compte que le choix de ε dépend de la valeur de l, on a donc une dépendance que l'on peut noter $\varepsilon(l)$. Remarquons que si n est impair, alors $u_n = -1$. De plus, on pourra toujours trouver un entier n impair en prenant $n := N + 1$ si N est pair ou $n := N$ si N est impair qui respecte l'inégalité $n \geq N$ (le cas d'égalité correspond à N qui est impair). Enfin, pour un n impair qui respecte $n \geq N$, nous allons avoir $|u_n - l| = |-1 - 1| = |1 + 1| = 2$. Il suffit donc de prendre $\varepsilon := 1$ quand $l = 1$.

Méthodologie : Convergence d'une suite à partir de la définition

- Pour utiliser cette définition : on peut choisir une valeur de ε et elle nous donne un rang N à partir du quel on dispose de l'inégalité.
- **Pour démontrer une convergence** : on part d'un ε strictement positif quelconque (« Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ») et on cherche un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$ (ou de manière équivalente, puisque ε est quelconque, $|u_n - l| \leq \alpha\varepsilon$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$).

Exemple 2 : Montrer qu'une suite est convergente

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := n^{-1}$.

1°) Pour $\varepsilon := 10^{-3}$, trouver un entier $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.
2°) Enfin, démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0 (en utilisant la définition).
1°) Techniquement répondre à la question 2°) permet de répondre aux deux questions mais nous allons répondre dans l'ordre et nous vérifierons si le résultat de la question 2°) permet de fournir l'entier attendu pour la question 1°). Soit $\varepsilon := 10^{-3}$, cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon \iff \left|n^{-1}\right| \leq \varepsilon \iff n^{-1} \leq \varepsilon \iff n \geq \varepsilon^{-1} = \left(10^{-3}\right)^{-1} = 10^3$. Cela était attendu, l'entier recherché vaut $N_1 := 1000 \in \mathbb{N}^*$.
2°) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - 0| \leq \varepsilon \iff \left|n^{-1}\right| \leq \varepsilon \iff n^{-1} \leq \varepsilon \iff n \geq \varepsilon^{-1}$. Plusieurs choix sont possibles. Par exemple, $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil \geq x$, ainsi, nous pouvons prendre $N(\varepsilon) := \left\lceil \varepsilon^{-1} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$. Un autre exemple est $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + 1 > x$, ainsi, nous pouvons prendre $N(\varepsilon) := \left\lfloor \varepsilon^{-1} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. A noter que l'utilisation de partie entière supérieure ou inférieure permet d'obtenir un entier N qui respecte l'inégalité $N \geq \varepsilon^{-1}$, en effet, rien ne nous assure que ε^{-1} est un entier. Finalement, pour la première solution nous avons $N\left(10^{-3}\right) := \left\lceil \left(10^{-3}\right)^{-1} \right\rceil = \left\lceil 10^3 \right\rceil = 1\ 000 \in \mathbb{N}^*$, et la deuxième solution est $1\ 001 \in \mathbb{N}^*$. On se rend compte que la première solution fournit un entier N plus petit que la seconde solution, on valorisera donc la première (cf. Remarque 5).