Подмасиви на пермутация

Анализ

Нека разглеждаме произволна редица от различни естествени числа **A** (индексирана от 1) с медиана **M** и дължина 2**k** + 1 (**k** $\in \mathbb{N}_0$). След като сортираме числата в нарастващ ред, в новата редица **A′**, $\mathbf{A'_{k+1}}$ = **M**. (по дефиниция за медиана) Тъй като за всяка двойка (**i**, **j**) : **i** < **j**, $\mathbf{A'_i} < \mathbf{A'_j}$ (числата са наредени), то има точно **k** по-малки числа от **M**. Аналогично има и **k** по-големи. Тъй като числата в **A′** са същите като в **A**, то това свойство е вярно и за оригиналната редица. Следователно *необходимо и достатъчно условие* за една редица от различни числа да има медиана **M** е да съдържа самото число **M** и равен брой по-малки и по-големи от него други числа.

След като сме направили това наблюдение, можем да съставим решение със сложност $O(N^3)$. Разглеждаме всички подмасиви на **A**, съдържащи **M**. Намираме броевете на по-малките и по-големите от **M** числа линейно и ако те са равни, то тази редица отговаря на условието. Ако за фиксиран ляв край, линеино се обхожда масива и се разглеждат потенциалните десни крайща, сложността се сваля до $O(N^2)$.

Нека разглеждаме разликата между броевете на по-големите и по-малките от **M** числа за даден интервал. За да има медиана **M**, тази разлика трябва да е 0. Нека означим тази разлика за подинтервала [1, **i**] на пермутацията **P** с $\mathbf{D_i}$ ($\mathbf{D_0}$ = 0, тъй като отговаря на празния интервал). За подинтервала от [**i**, **j**] на **P**, разликата $\mathbf{D_{i,j}} = \mathbf{D_j} - \mathbf{D_{i-1}}$ (Това е аналогично на похвата с частичните суми или partial sums). Заествайки $\mathbf{D_{i,j}}$ с 0 (за подинтервалите с медиана **M**), получаме, че $\mathbf{D_j} = \mathbf{D_{i-1}}$. За подинтервалите [**i**, **j**] с медиана **M** е вярно също, че **i** ≤ *индекса на **M** в **P*** ≤ **j**. Намираме линейно $\mathbf{D_i}$ за всички интервали [0, **i**] : **i** < *индекса на **M** в **P***. Нека с **C(x)** означим броя на всички стойности за **i** : $\mathbf{D_i}$ = **x** и **i** ∈ [0, *индекса на **M** в **P***). Този брои лесно би бил намиран след като се приложи алгоритъма за сортиране с броене на съответните стойности на **D**. След това за фиксиран десен край **j**, брой интервали с медиана **M** е точно $\mathbf{C(D_j)}$ - броя потенциални начала, т.е. такива със стойност **D** = $\mathbf{D_i}$. Сумирайки тези стойности на **C(x)**, получаваме крайния резултат. Полученото решение е със сложност $O(N)$.