第四章 射频电路优化设计(1)

第一节 引言

- 电路分析：根据电路结构与元器件参数计算电路性能指标；
- 电路综合：根据电路结构及性能指标要求，优化设计电路参数；
- 优化设计方法概况：

解析法：通过电路响应解析公式，求极值获参数变量最优值；

搜索法：利用优化目标函数变化规律进行搜索向最优点前进；

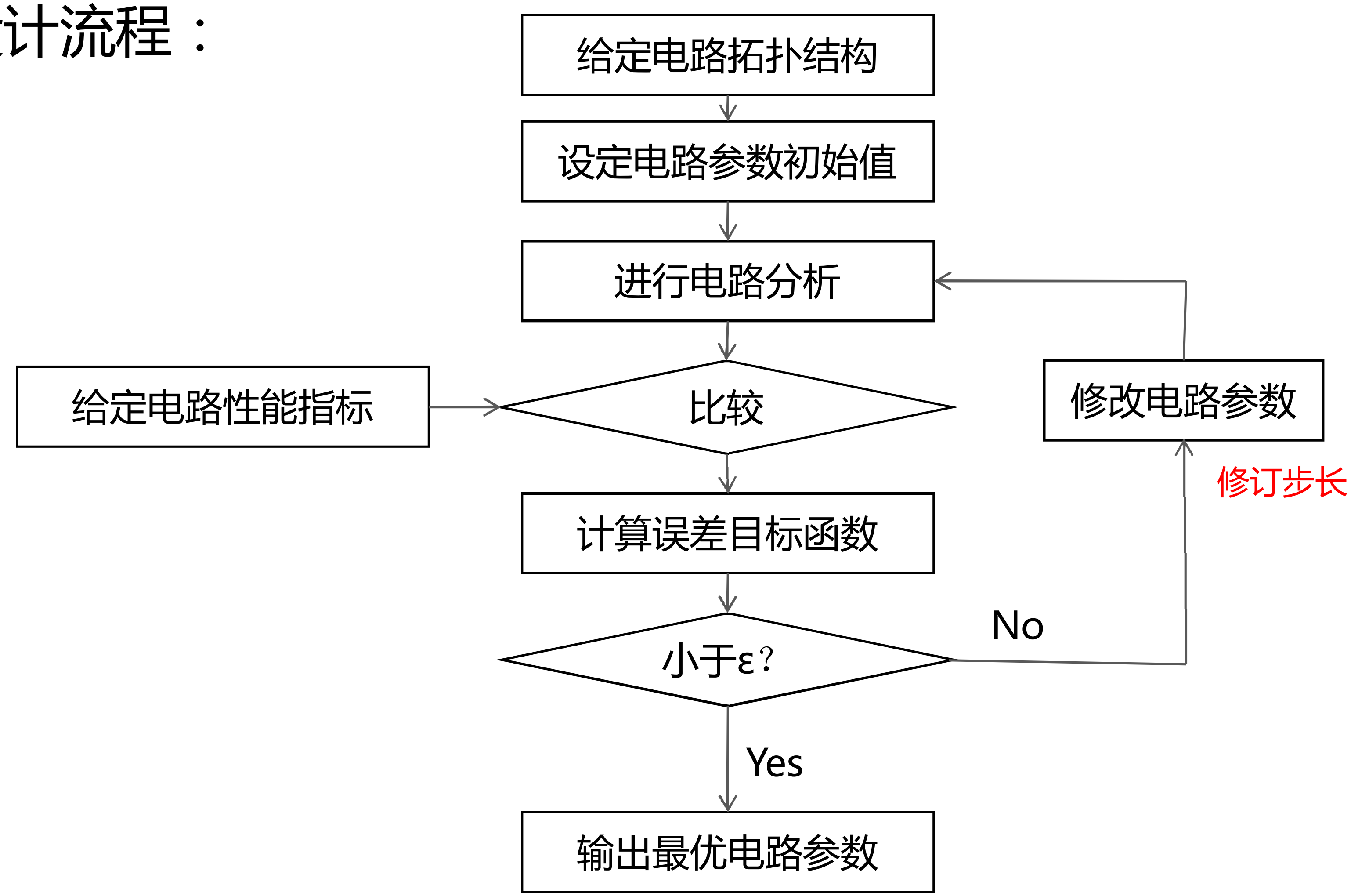
消去法：消去不存在最优点的变量域，缩小寻优范围；

逼近法：对邻近数点进行分析，找出趋向最优点方向，逼近之；

逼近法的代表有：梯度法与直接法；

第四章 射频电路优化设计(2)

- 优化设计流程：



第四章 射频电路优化设计(3)

第二节 目标函数的概念

- 误差函数：电路性能指标与给定性能指标之差与参数之关系；
- 寻找最优电路参数的过程即是让误差函数获得最小值的过程；
- 误差函数取最小值的要求可以转化为某一特性求极值的过程；
- 直接用于优化设计的该求极值特性函数即为目标函数；
- 目标函数的确定由优化设计的方便进行而定；

一. 目标函数表达式

- 设待优化的电路参数矢量为：$\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$
- 误差函数的一般表达式为：

第四章 射频电路优化设计(4)

$$E(\mathbf{x},\omega)=W(\omega)\left|T(\mathbf{x},\omega)-T_r(\omega)\right| \tag{4.1}$$

误差函数　加权系数　特性曲线　指定特性曲线

- 目标函数的构造：

目标函数　频率采样点数　P=1,2，…

$$\phi(\mathbf{x})=\left[\sum_{i=1}^{m}W(\omega_i)\left|T(\mathbf{x},\omega_i)-T_r(\omega_i)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$

待优化的指标特性

- 待优化的指标特性可以是：增益，相位，驻波比，噪声系数等；

二. 目标函数的极值

- 展开成台劳级数：

$$\phi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{x}_0)+\nabla\phi(\mathbf{x}_0)^T\cdot\Delta\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{x}+\cdots \tag{4.3}$$

第四章 射频电路优化设计(5)

其中： $$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \left[x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}, \cdots, x_n - x_{n0}\right]^T \tag{4.4}$$

$$\nabla\phi(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right]^T \tag{4.5}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

第四章 射频电路优化设计(6)

目标函数极小点充要条件：

$$\begin{cases} \nabla \phi(\mathbf{x}_0) = 0 \\ \mathbf{A} > 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

二阶偏导数矩阵为正定矩阵

三. 目标函数的凸分析

- 目标函数的极值点不一定是作用域内的最大最小点；
- 凸函数定义：对作用域D内的任意两点x_1,x_2，恒有：

$$\phi\left[\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2\right] \leq \alpha\phi(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)\phi(\mathbf{x}_2) \tag{4.8}$$

- 凸函数在作用域D内的极小值就是D内的最小值；

则为凸函数

- 若在D内 $\phi(\mathbf{x})$ 有连续的二阶偏导数，且处处满足：$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$

第四章 射频电路优化设计(7)

第三节　最小二乘法与曲线拟合

- 工程技术中实验与测量中经常用最小二乘法进行数据处理；
- 用多组离散实验或测量数据获得特性近似公式过程叫曲线拟合；

一. 最小二乘问题的提出

- 研究一下线性方程组的求解：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (4.9)
$$

$m = n$　为适定方程，有唯一解

$m > n$　为超定(矛盾)方程，无解

$m < n$　为亚定方程，有无穷多解

第四章 射频电路优化设计(8)

- 针对矛盾方程组情况，寻求一个近似解，使得：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \Rightarrow \left\| \underbrace{\mathbf{A}\overset{\sim}{\mathbf{x}}}_{\text{近似解}} - \mathbf{B} \right\|^{\text{欧氏空间范数}} = \underbrace{\min}_{\text{最小}} \tag{4.10}$$

- $\tilde{\mathbf{x}}$ 就称为最小二乘解，最小二乘法就是找出范数最小值解的方法；
- 最小二乘解存在的充要条件：

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}) = 0 \tag{4.11}$$

- 最小二乘解表达式为：

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{x}}}_{n} = \underbrace{(\mathbf{AA}^T)^{-1}}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{A}^T}_{n \times m} \overset{m}{\mathbf{B}} \tag{4.12}$$

第四章 射频电路优化设计(9)

二. 多项式拟合法

- 当某对象与参数关系之解析式未知，可用多项式近似表示，如：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{4.13}$$

- 测试了m组数据，求拟合多项式系数a_i：

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{\ 2} \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^{\ 2} \\ &\cdots\cdots \\ y_m &= a_0 + a_1 x_m + a_2 x_m^{\ 2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} \color{red}{\mathbf{A}} & \color{red}{\mathbf{x}} & & \color{red}{\mathbf{B}} \\ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\ 2} \\ 1 & x_2 & x_2^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^{\ 2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.14}$$

代入(4.12)式即可解出系数；

第四章 射频电路优化设计(10)

三. 正交多项式拟合法

$$y = \phi(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \ldots + a_n p_n(x) \quad (4.15)$$

- 正交多项式定义：

$$\sum_{k=1}^{m} p_i(x_k) p_j(x_k) = 0 \quad i \neq j \quad (4.16)$$

- 拟合多项式函数Φ(x)的目标是使以下均方差最小：

$$\sigma_m^{\ 2} = \sum_{k=1}^{m} W_k \left[\phi(x_k) - y_k \right]^2 = \min \quad (4.17)$$

第四章 射频电路优化设计(11)

- 经推导，得拟合多项式系数为：

$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i y_i p_j(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} W_i p_j{}^2(x_i)} \quad j = 0,1,2,..,n \tag{4.18}$$

- $p_i(x)$的选择，如下是常用的一种递推多项式：

$$\begin{aligned}
&p_0(x) = 1 \\
&p_1(x) = (x-\alpha_1)p_0(x) \\
&\cdots\cdots \\
&p_{j+1}(x) = (x-\alpha_{j+1})p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x) \quad j = 1,2,...,n-1
\end{aligned} \tag{4.19}$$

第四章 射频电路优化设计(12)

其中：

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i x_i p_j^{\ 2}(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} W_i p_j^{\ 2}(x_i)}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i p_j^{\ 2}(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} W_i p_{j-1}^{\ 2}(x_i)} \qquad (4.20)$$

- 对于非线性二乘法思路基本类同。

第四章 射频电路优化设计(13)

第四节　单元函数优化

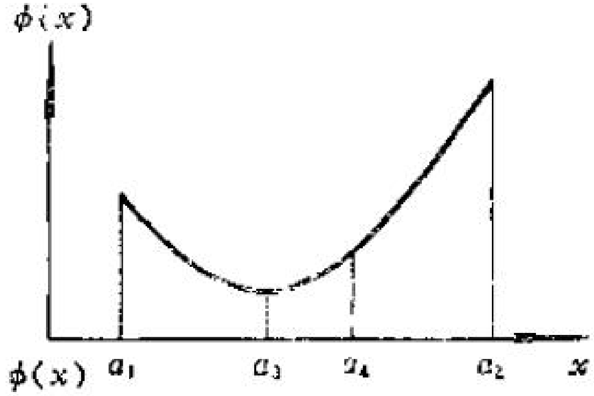
- 单元函数优化是多元函数优化的基础；

一. 菲波纳西法和黄金分割法

- 它们都属于消去法；
- 设目标函数为$\Phi(x)$，求在范围$[a_1,a_2]$内$|\Phi(x)|$最小值及所在点x_0；
- 优化运算过程：

a) 域内选取两点a_3,a_4 ，计算对应函数值；

b) 对所得函数值$\Phi(x_3)$， $\Phi(x_4)$进行比较，得到下一步搜索范围；



第四章 射频电路优化设计(14)

若$\Phi(x_3)<\Phi(x_4)$，则极小值点位于$(x_1，x_4)$内；

若$\Phi(x_3)>\Phi(x_4)$，则极小值点位于$(x_3，x_2)$内；

c) 在缩小后的搜索区间在进行巡查，直至找到极小值点(或近似点)；

1. 菲波纳西法

• 利用菲波纳西数列规律与特点选择搜索区间的中间计算点；

序数

菲波那西序数

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	…

菲波纳西数

第四章 射频电路优化设计(15)

- 第一次选择的两个中间计算点为：

$$a_4 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(a_2 - a_1)$$

$$a_3 = a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(a_1 - a_2) \qquad (4.21)$$

n-1为预计要寻查的次数

例：n-1=10为预计10次

$F_{n-1}=F_{10}=89$

- 第一次区间缩短率为：$\eta_1 = F_{n-1}/F_n$ 第二次缩短率为：$\eta_2 = F_{n-2}/F_{n-1}$

第n-1次缩短率为： $\eta_{n-1} = F_{n-(n-1)}/F_{n-(n-2)} = 1/F_2$

总缩短率为：

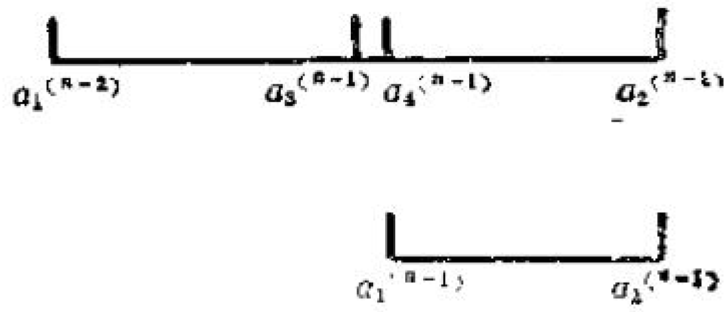
$$\eta_0 = \eta_1\eta_2\cdots\eta_{n-1} = \frac{F_{n-1}}{F_n}\cdot\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_n} \qquad (4.22)$$

若寻查精度为0.001，则： $\eta_0 \approx 0.001 \Rightarrow F_n = 987 \Rightarrow n = 15$

第四章 射频电路优化设计(16)

2. 黄金分割法

• 第一次选择的两个中间计算点为：



$$a_3 = a_2 - \eta(a_2 - a_1)$$
$$a_4 = a_1 + \eta(a_2 - a_1) \quad (4.23)$$

η为黄金分割率， η =0.618

若寻查n-1次，则总缩短率为：$\eta_0 = \eta^{n-1}$

3. 变量范围与寻查次数的确定

• 一般有实际问题的物理意义确定；

• 例如：由微带线特性阻抗Z_c计算其宽度W，考虑Z_c太高，线太窄，不易制作， Z_c太低，线太宽，易产生横向高次模；所以Z_c范围选择在(10-150)Ω。 Z_c误差为0.5Ω，则允许的相对误差为：

第四章 射频电路优化设计(17)

$$\delta=\frac{\varepsilon}{a_2-a_1}=\frac{0.5}{150-10}=7.14\times10^{-4}$$

寻查次数n的确定：$\delta=\left(0.618\right)^{n-1}\Rightarrow n=16.05$ 取整数：$n=17$

二. 外推内插法

- 上面的方法需要知道寻查范围，但实际情况中往往不知道；
- 用外推法找出合适的寻查范围，再用上面的方法寻优计算；

1. 外推法

- 设一维函数F=Φ(x)，研究其极值点求解；
- 任选一初值点x_1，在寻查方向取步长D处点$x_2=x_1+D$；
- 计算两点处函数值$\Phi(x_1)$,$\Phi(x_2)$，比较之；

第四章 射频电路优化设计(18)

计算$\Phi(x_1),\Phi(x_2)$

$\Phi(x_1)>\Phi(x_2)$?

$\Phi(x_2)<\Phi(x_1)$ → $x_3=x_2+2D$

$\Phi(x_2)>\Phi(x_1)$ → 寻查方向错误，令D=-D重新寻查

$\Phi(x_3)>\Phi(x_2)$?

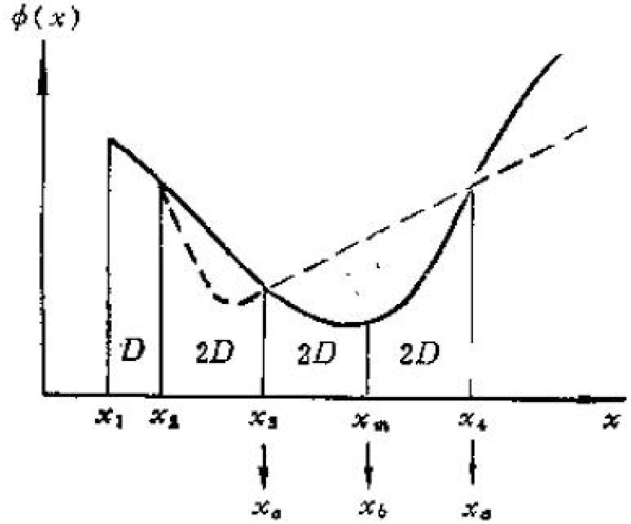
$\Phi(x_3)<\Phi(x_2)$ → $x_4=x_3+4D$ → 继续寻查

$\Phi(x_3)>\Phi(x_2)$ → 曲线上升,极小点位于x_1，x_3之间 减小步长$x_3=x_2+D$

$$x_k-x_{k-1}=2(x_{k-1}-x_{k-2})$$

$$x_{k-2}<x_{min}<x_k$$

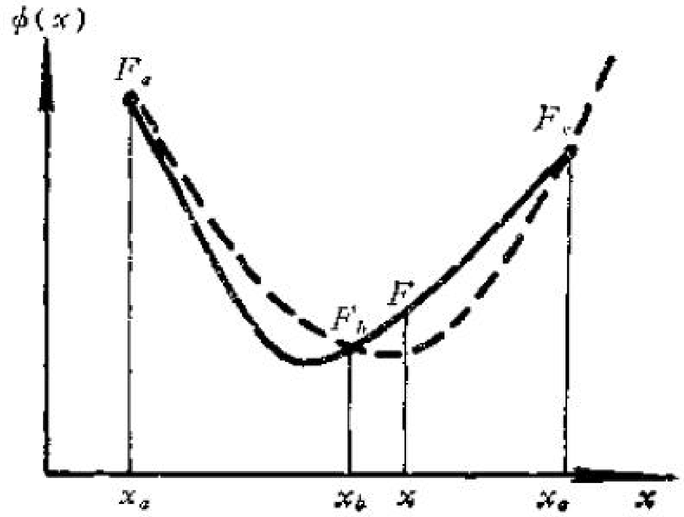
新增计算点 $x_m=(x_{k-1}+x_k)/2$



第四章 射频电路优化设计(19)

2. 二次插值法

- 在极小点所在区域取三个点，并计算相应函数值；
- 用此三点做一拟合抛物曲线，用抛物线极小点近似函数极小点；
- 抛物线方程： $p(x)=k_0+k_1x+k_2x^2$



$$
\begin{aligned}
p(x_a)&=\phi(x_a)=F_a=k_0+k_1x_a+k_2x_a^2\\
p(x_b)&=\phi(x_b)=F_b=k_0+k_1x_b+k_2x_b^2\\
p(x_c)&=\phi(x_c)=F_c=k_0+k_1x_c+k_2x_c^2
\end{aligned}
\qquad (4.24)
$$

- 求导，令为零：

$$p'(x)=k_1+2k_2x=0 \qquad (4.25)$$

第四章 射频电路优化设计(20)

- 解上联立方程组及求导式：

$$x_* = -\frac{k_1}{2k_2}$$

$$k_1 = \frac{F_a(x_b{}^2 - x_c{}^2) + F_b(x_c{}^2 - x_a{}^2) + F_c(x_a{}^2 - x_b{}^2)}{(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)} \qquad (4.26)$$

$$k_2 = -\frac{F_a(x_b - x_c) + F_b(x_c - x_a) + F_c(x_a - x_b)}{(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)}$$

- 结果化简： $x_* = A/(2B)$

$$A = F_a(x_b{}^2 - x_c{}^2) + F_b(x_c{}^2 - x_a{}^2) + F_c(x_a{}^2 - x_b{}^2) \qquad (4.27)$$

$$B = F_a(x_b - x_c) + F_b(x_c - x_a) + F_c(x_a - x_b)$$

第四章 射频电路优化设计(21)

- 在以上四个点中，舍去函数值大的边点，剩下的三个点继续插值；
- 直到剩下的三个点函数值相近到允许的范围，寻查结束；
- 三次插值法原理类同，使用的拟合曲线方程为三次多项式；

第四章 射频电路优化设计(22)

第五节 多元函数优化之梯度法

- 大致有两大类：梯度法和直接比较法；
- 梯度法：沿函数曲线法线(梯度) 的反方向(下降最快方向)寻查；

  代表：最速下降法，牛顿法，共轭梯度法，变尺度法等；
- 直接比较法：选几个变量点，比较函数值，找出下降方向寻查；

  代表：变量交替法，单纯形法，鲍威尔法等；无需计算梯度

一. 最速下降法

- 它属于梯度法中最基本的一种；
- 给定目标函数Φ($\mathbf{x}$)，$\mathbf{x}$是n维矢量， Φ($\mathbf{x}$)在$\mathbf{x}_k$处的梯度$\mathbf{g}_k$为：

第四章 射频电路优化设计(23)

$$\mathbf{g}_k = \nabla\phi(\mathbf{x}_k) = \left[\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right]^T_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} \tag{4.28}$$

- 寻查方向$\mathbf{p}_k$为梯度$\mathbf{g}_k$的反方向：

$$\mathbf{p}_k = -\nabla\phi(\mathbf{x}_k) \tag{4.29}$$

- 在寻查方向作步长寻点：

优化步长因子

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t\mathbf{p}_k \Rightarrow \phi(\mathbf{x}_k + t_k\mathbf{p}_k) = \min \tag{4.30}$$

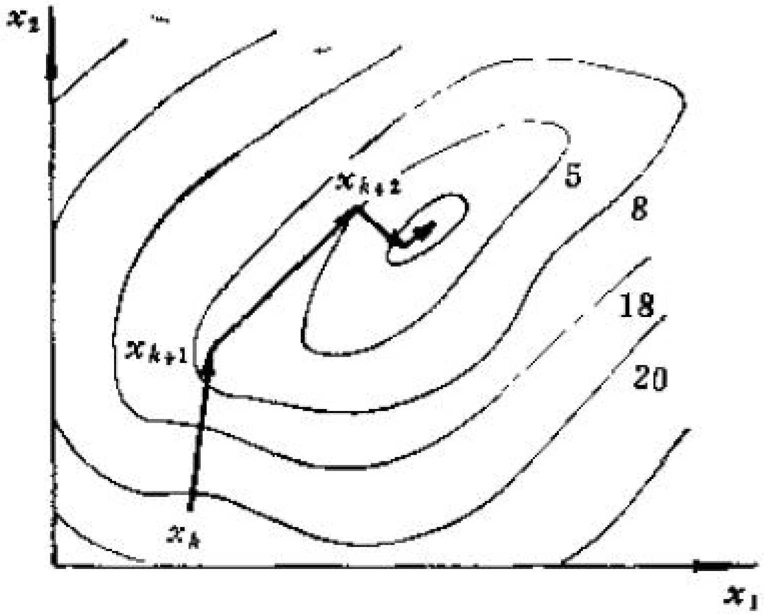
- 判断寻查误差：

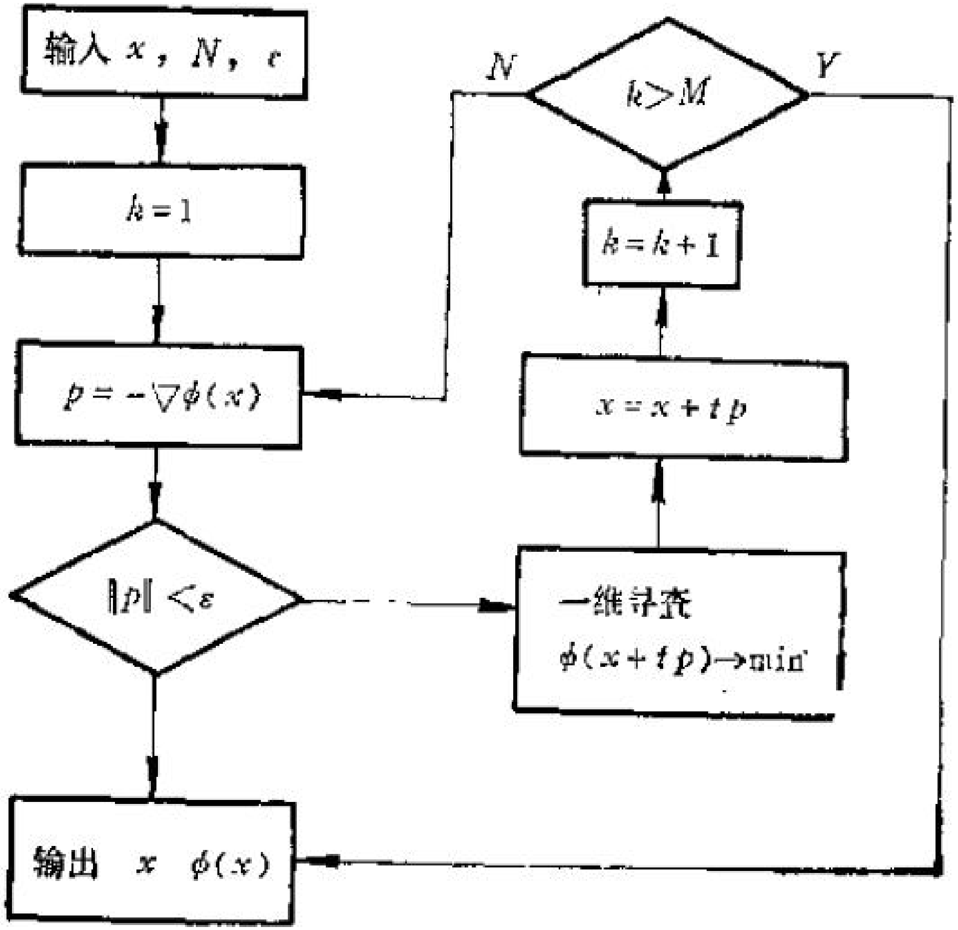
$$\left|\nabla\phi(\mathbf{x}_{k+1})\right| < \varepsilon \xRightarrow{\text{不满足}} \mathbf{p}_{k+1} = -\nabla\phi(\mathbf{x}_{k+1}) \tag{4.31}$$

继续寻查

第四章 射频电路优化设计(24)

- 最速下降法图示及流程：





第四章 射频电路优化设计(25)

二. 共轭梯度法

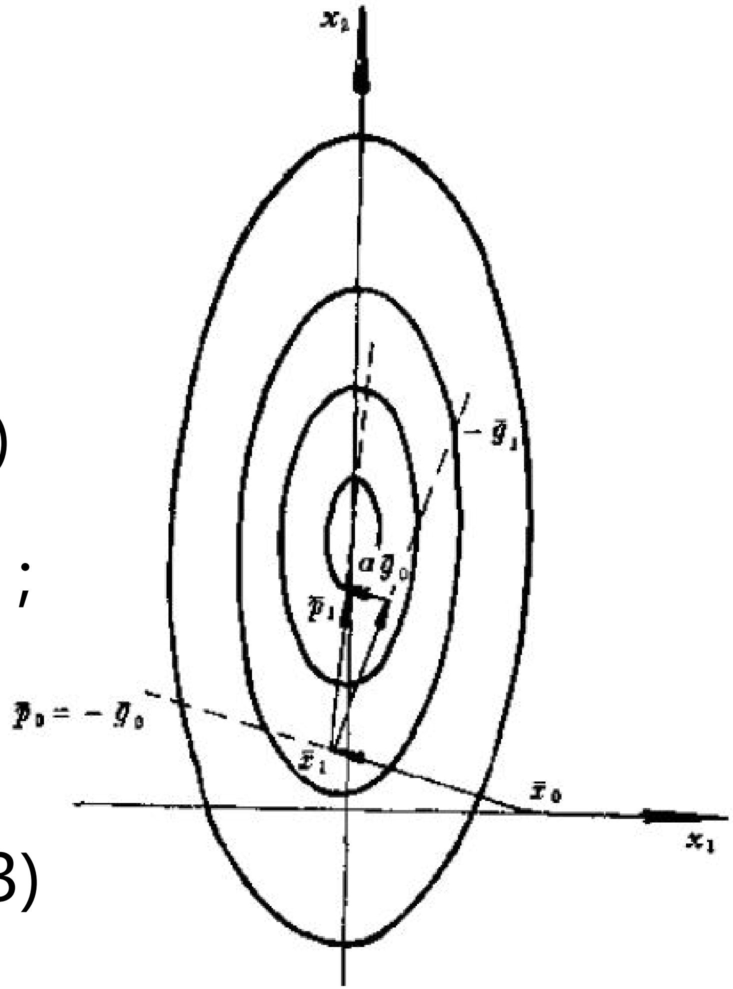
- 最速下降法的一种改进方法；
- 以二元寻优函数为例；
- 第一次寻查按最速下降法；

$$\mathbf{p}_0 = -\mathbf{g}_0 = -\nabla\phi(\mathbf{x}_0) \qquad (4.32)$$

- 第二次寻查时梯度反向并未指向极小点；
- 确定共轭梯度方向；

二阶偏导矩阵(汉森矩阵)

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k{}^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k \Delta\mathbf{x} \qquad (4.33)$$



第四章 射频电路优化设计(26)

- 第二次寻查方向与第一次满足：$\mathbf{p}_1{}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_0 = 0$ 则互为共轭梯度方向
- 简化公式避免求解二次偏导矩阵：

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{g}_1 + \frac{\left\|\mathbf{g}_1\right\|^2}{\left\|\mathbf{g}_0\right\|^2}\mathbf{p}_0 \Rightarrow \mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_k + \frac{\left\|\mathbf{g}_{k+1}\right\|^2}{\left\|\mathbf{g}_k\right\|^2}\mathbf{p}_k \tag{4.34}$$

三. 牛顿-瑞夫森法

- 牛顿-瑞夫森法是用最少寻查次数找到极小点的方法(一次)；
- 展开台劳级数：

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k{}^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k \Delta\mathbf{x} \tag{4.35}$$

第四章 射频电路优化设计(27)

- 设 $\mathbf{x}_m$是极小点，有：

$$\nabla\phi(\mathbf{x}_m) = \mathbf{g}_k + \mathbf{A}_k\Delta\mathbf{x} = 0 \tag{4.36}$$

- 由此：

$$\mathbf{A}_k\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{g}_k \Rightarrow \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{g}_k \Rightarrow \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{g}_k \tag{4.37}$$

- 上面是Φ(**x**)为二次时是严格的，当Φ(**x**)为任意高次函数时：

寻查反方向称为牛顿方向 $$\mathbf{p}_k = -\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{g}_k \Rightarrow \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - t_k\mathbf{p}_k \tag{4.38}$$

四. 变尺度法

- 为了避免计算汉森矩阵，用一个一阶偏导方向矩阵$\mathbf{H}_i$近似$\mathbf{A}^{-1}$：
- 不同的$\mathbf{H}_i$构成不同的变尺度法；

第四章 射频电路优化设计(28)

1. DFP变尺度法

- 分别在$\mathbf{x}_i$和$\mathbf{x}_{i+1}$处展开成台劳级数：

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_i + \mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \tag{4.39}$$

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{i+1} + \mathbf{A}_{i+1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}) \tag{4.40}$$

- 根据台劳级数展开的唯一性，上两式相等，有：

$$\mathbf{g}_{i+1} + \mathbf{A}_{i+1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{g}_i + \mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \tag{4.41}$$

- 假设Φ(**x**)为二次时： $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{A}_i = \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i) = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i \tag{4.42}$$

变量位移

梯度差

第四章 射频电路优化设计(29)

- 找一个方向矩阵$\mathbf{H}_{i+1}$近似$\mathbf{A}^{-1}$：，假设$\mathbf{H}_i$已知，求$\mathbf{H}_{i+1}$：

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i \Rightarrow \mathbf{H}_{i+1}\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i \quad (4.43)$$

- 设校正矩阵为$\mathbf{E}_i$，即$\mathbf{H}_{i+1}=\mathbf{H}_i+\mathbf{E}_i$ ：

$$(\mathbf{H}_i + \mathbf{E}_i)\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i \Rightarrow \mathbf{E}_i\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{y}_i \quad (4.44)$$

- 据此认为$\mathbf{E}_i$应有一下形式：

待求向量

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{s}_i\mathbf{q}_i^T - \mathbf{H}_i\mathbf{y}_i\mathbf{w}_i^T \quad (4.45)$$

- 两边同乘以$\mathbf{y}_i$，有： $$\mathbf{E}_i\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i\mathbf{q}_i^T\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{y}_i\mathbf{w}_i^T\mathbf{y}_i \quad (4.46)$$

- 选择$\mathbf{q}_i$，$\mathbf{w}_i$，使： $$\mathbf{q}_i^T\mathbf{y}_i = \mathbf{w}_i^T\mathbf{y}_i = 1 \quad (4.47)$$ 此时：(4.46)与(4.44)完全相同

第四章 射频电路优化设计(30)

- 选择$\mathbf{q}_i$，$\mathbf{w}_i$具有以下形式：

$$\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{s}_i \qquad \text{待定常数}$$
$$\mathbf{w}_i = \mu_i \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \tag{4.48}$$

- 代入式(4.47)：$\lambda_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{y}_i = \mu_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{y}_i = 1$ (4.49)

- 得：

$$\lambda_i = \frac{1}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{y}_i}$$
$$\mu_i = \frac{1}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{y}_i} \tag{4.50}$$

- 代入式(4.45)：

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{y}_i} \tag{4.51}$$

第四章 射频电路优化设计(31)

- 最后得：

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{y}_i} \tag{4.52}$$

无需求二阶偏导数矩阵及其逆，此时第一次寻查仍用最速下降法；

2. BFGS变尺度法

- 当函数维数较大时，DFP方法不稳定，BFGS是其改进方法；
- 第一次寻查仍用最速下降法：

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_0 = \mathbf{I} \quad \textit{where } \mathbf{I} \textit{ is unit matrix} \\ &\mathbf{p}_0 = -\mathbf{H}_0 \mathbf{g}_0 \quad \textit{where } \mathbf{g}_0 = \nabla \phi(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{4.53}$$

- 以后寻查用BFGS变尺度公式：

第四章 射频电路优化设计(32)

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \frac{\mu_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \mathbf{s}_i^T - \mathbf{s}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{y}_i} \tag{4.54}$$

其中：

$$\mu_i = 1 + \frac{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{y}_i} \tag{4.55}$$

第i次寻查方向： $\mathbf{p}_{i+1} = -\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{g}_{i+1}$ (4.56)

- 寻优收敛判断可取以下条件之一：

$$\left\|\mathbf{g}_i\right\| \le \varepsilon_1 \quad \left\|\mathbf{s}_i\right\| \le \varepsilon_2 \quad \frac{\left|\phi(\mathbf{x}_{i+1}) - \phi(\mathbf{x}_i)\right|}{\left|\phi(\mathbf{x}_i)\right|} \le \varepsilon_3 \quad \left|\phi(\mathbf{x}_i)\right| \le \varepsilon_4 \tag{4.57}$$

第四章 射频电路优化设计(33)

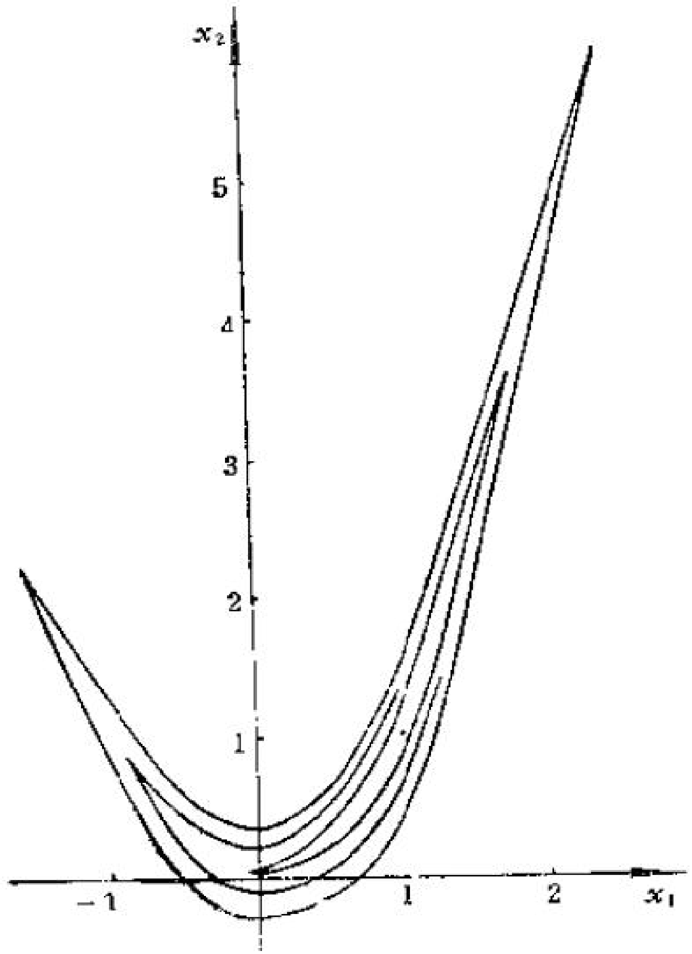
五. 几种方法的比较

- 各有自己的优缺点及适用情况；
- 通常用同一个目标函数做校验；
- 常用的有罗森布鲁克香蕉函数：

$$\phi(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^{\ 2})^2 + (1 - x_1)^2$$

(4.58)

其极小点在： $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ \phi(\mathbf{x}_{\min}) = 0$



罗森布鲁克函数等值线图

第四章 射频电路优化设计(34)

第六节 多元函数优化之直接法

- 梯度法由于需要计算梯度，在目标函数比较复杂时难于应用；
- 直接法可以避免计算梯度，只需在几个点计算函数值做比较；

一. 单纯形法

- 单纯性：由直线构成的最简单图形；
- 二维空间：三角形；三维空间：四面体形；N维空间：N+1顶点图形；
- 以二元函数Φ($\mathbf{x}$)为例，任意选三个点$\mathbf{x}_H$，$\mathbf{x}_G$，$\mathbf{x}_L$构造三角形；
- 这里$\Phi(\mathbf{x}_H) > \Phi(\mathbf{x}_G) > \Phi(\mathbf{x}_L)$，设$\mathbf{x}_C$为$\mathbf{x}_G$，$\mathbf{x}_L$的中点；

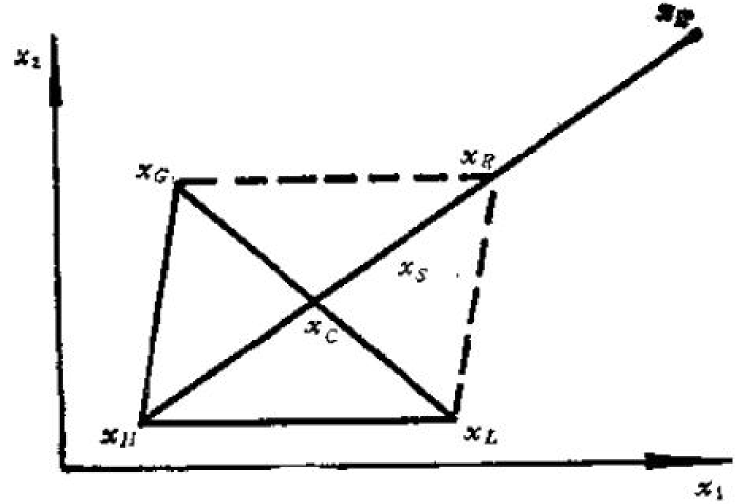
第四章 射频电路优化设计(35)

- $\mathbf{x}_H$指向$\mathbf{x}_C$为寻查方向；如图所示；
- 在此方向选定反射点$\mathbf{x}_R$，满足：

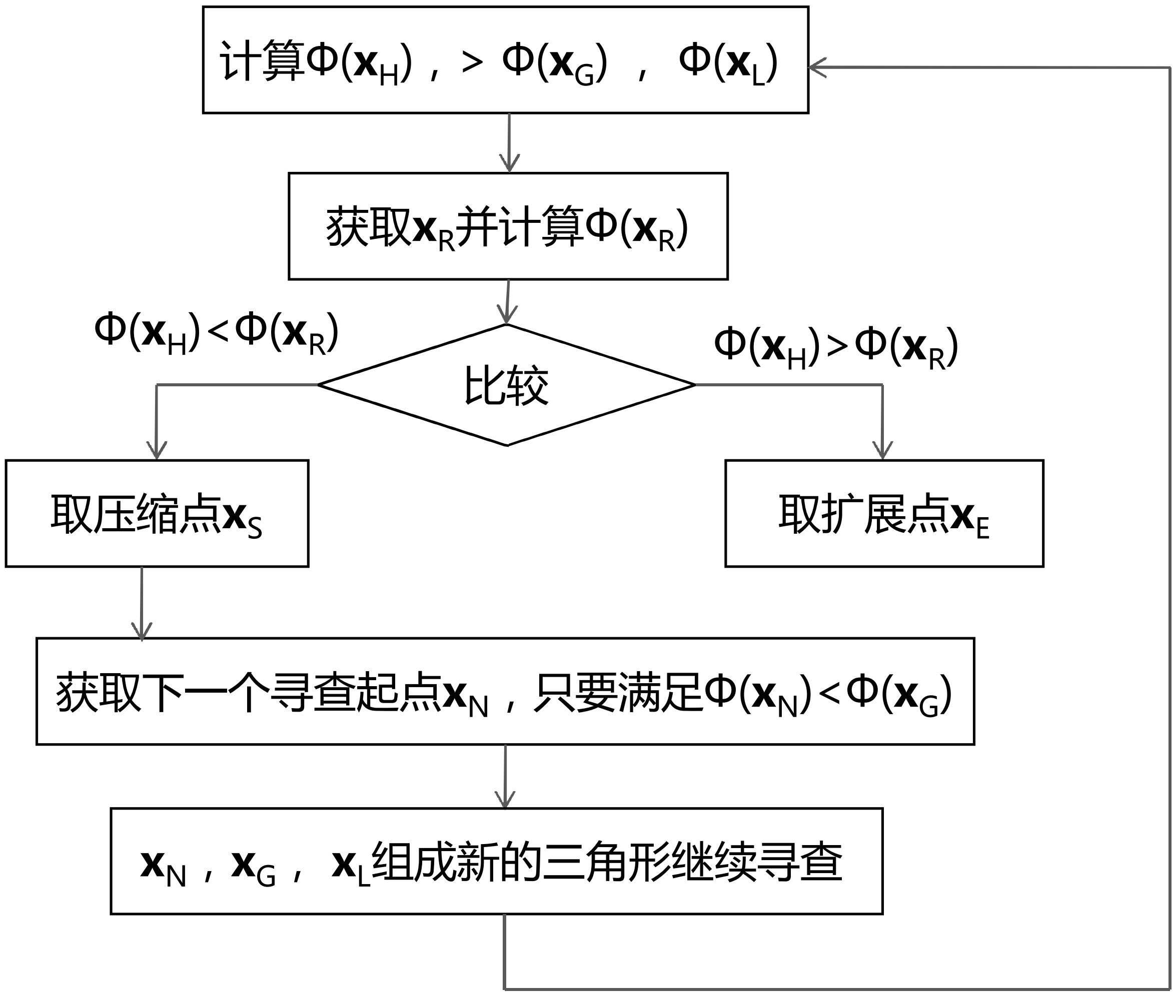
两点距离符号

$$\overline{\mathbf{x}_H\mathbf{x}_R} = 2\overline{\mathbf{x}_H\mathbf{x}_C} \qquad (4.59)$$

- 寻查流程图如下所示：
- 具体实现编程参考资料；



第四章 射频电路优化设计(36)



第一次寻查完成

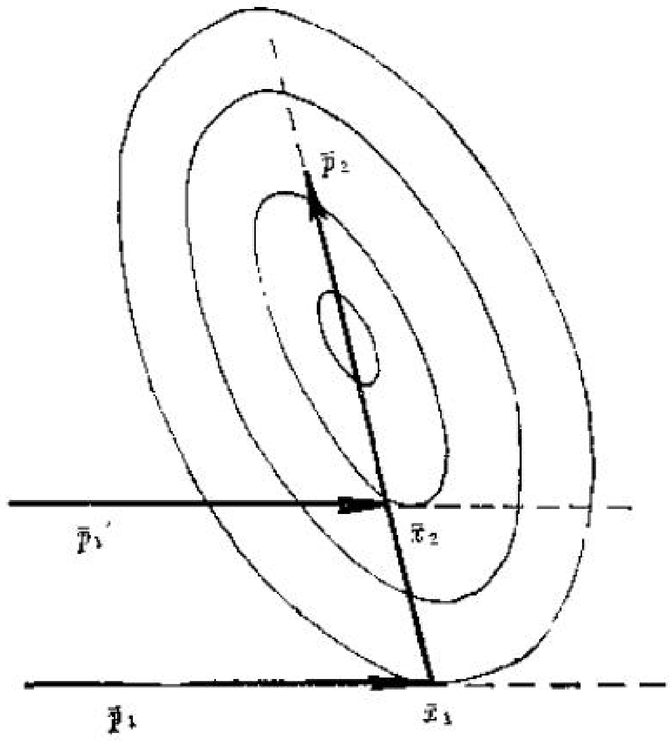
第四章 射频电路优化设计(37)

二. 鲍威尔法

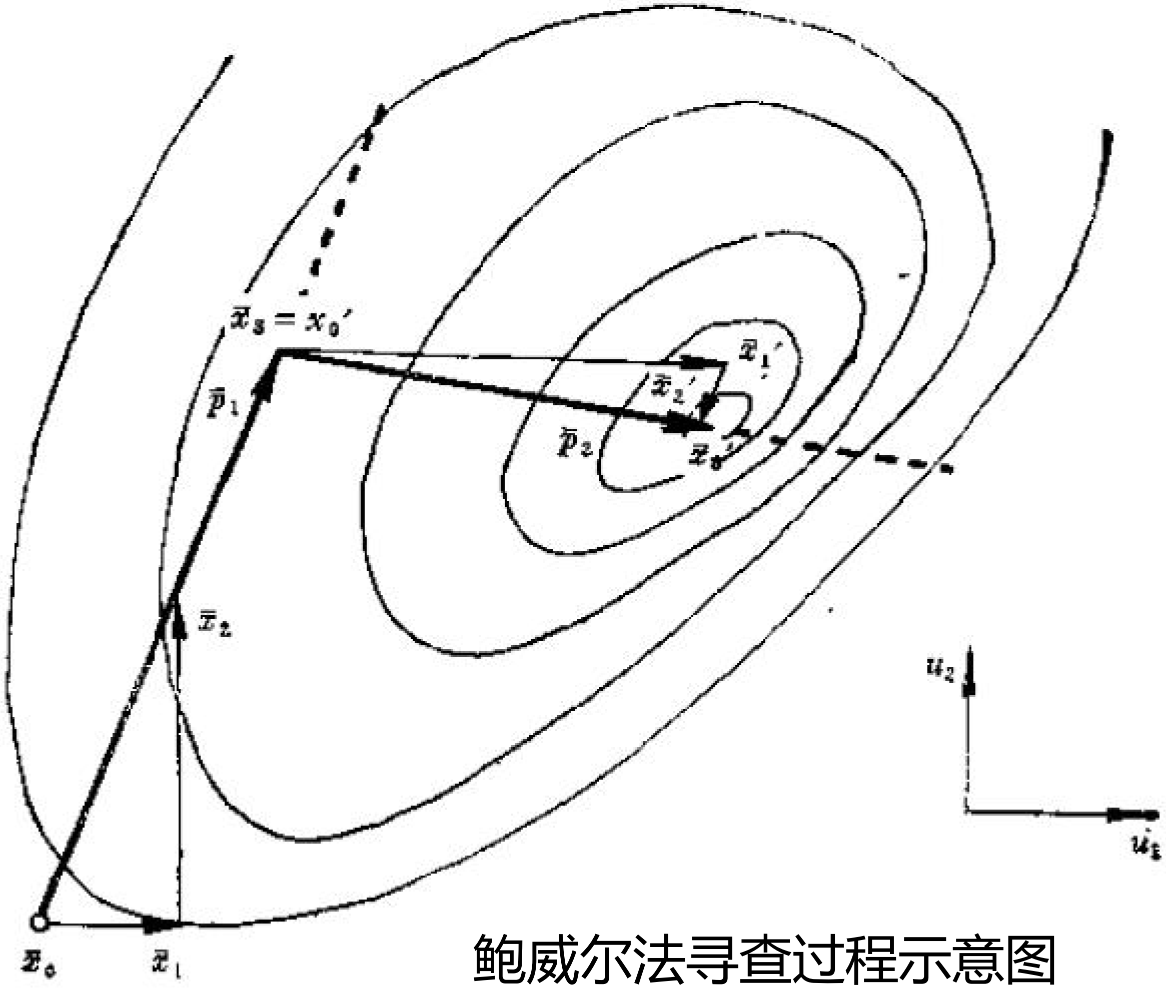
- 鲍威尔法：利用近似共轭梯度方向进行巡查，可以快速收敛；
- 二元函数极值点附近等值线看成椭圆；
- 在平行寻查方向$\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$得两极小点$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$；
- 连接两点$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$直线将通过函数极小点；
- 数学证明方向$\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$相当于汉森共轭；

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{A} \mathbf{p}_2 = 0 \qquad (4.60)$$

- 当函数等值线不是椭圆，近似共轭；
- 下图为鲍威尔法寻查过程几何说明：



第四章 射频电路优化设计(38)



鲍威尔法寻查过程示意图

第四章 射频电路优化设计(39)

- 第一步：坐标轮换一维寻查，初始点$\mathbf{x}_0(u_1,u_2)$；

  从$\mathbf{x}_0$先沿u_1寻查找到极小点$\mathbf{x}_1$，再沿u_2找到极小点$\mathbf{x}_2$；

  连接$\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2$得寻查方向$\mathbf{p}_1=\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0$，找到极小点$\mathbf{x}_3$；

  第一次循环结束；

- 第二步：更换寻查方向；

  找出$[\Phi(\mathbf{x}_0)-\Phi(\mathbf{x}_1)],[\Phi(\mathbf{x}_0)-\Phi(\mathbf{x}_2)]$较大者舍弃不用如图中$u_2$方向；

  从$\mathbf{x}_0'=\mathbf{x}_3$出发沿$u_1$方向寻查找到极小点$\mathbf{x}_1'$；

  再沿$\mathbf{p}_1$方向找到极小点$\mathbf{x}_2'$ ； $\mathbf{p}_2=\mathbf{x}_2'-\mathbf{x}_1'$就是$\mathbf{p}_1$的共轭方向；

  沿$\mathbf{p}_2$方向找到极小点$\mathbf{x}_3'$ ；第二次寻查循环结束；两次循环基本接近极小点

第七节 带约束条件的优化法

- 以上介绍的方法没有对优化变量附加约束条件：无约束最优化；
- 实际优化变量需要附加一定的约束条件：带约束最优化；
- 约束条件可用函数不等式表示：

约束条件个数

$$y_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.61}$$

- 给定约束条件与无约束条件其优化结果差别往往很大；
- 解决的办法是将有约束条件转化为无约束条件；

第四章 射频电路优化设计(41)

一. 变量置换法

- 变量置换法种类很多，但基本上是把约束条件转化为三角函数；

1. 约束条件为有界不等式

$$x_{iL} \le x_i \le x_{iH} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.62}$$

变量转换式一：

$$x_i = x_{iL} + (x_{iH} - x_{iL}) \sin^2 y_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.63}$$

变量转换式二：

$$x_i = \frac{(x_{iL} + x_{iH})}{2} + \frac{(x_{iH} - x_{iL})}{2} \sin^2 y_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.64}$$

新变量变化范围：$-\infty < y_i < \infty \qquad -1 \le \sin y_i \le 1$

第四章 射频电路优化设计(42)

2. 约束条件为无界不等式

$$x_{iL} < x_i < x_{iH} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.65}$$

变量转换式：

$$x_i = x_{iL} + \frac{1}{\pi}(x_{iH} - x_{iL})\cot^{-1} y_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.66}$$

新变量变化范围：$-\infty < y_i < \infty \quad 0 < \cot^{-1} y_i < \pi$

3. 约束条件为比值不等式

$$\lambda_L < x_2 / x_1 < \lambda_H \quad x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \tag{4.67}$$

变量转换式：

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{y_1} c\,\mathrm{os}\left[\theta_l + (\theta_H - \theta_l)\sin^2 y_2\right] \\ x_2 &= e^{y_1} \sin\left[\theta_l + (\theta_H - \theta_l)\sin^2 y_2\right] \end{aligned} \tag{4.68}$$

第四章 射频电路优化设计(43)

其中：$\begin{cases} \theta_l = \tan^{-1}(\lambda_l) \\ \theta_H = \tan^{-1}(\lambda_H) \end{cases} \quad 0 < \theta_l < \theta_H < \pi / 2$ (4.69)

二. 罚函数法

- 将约束条件作为附加函数(罚函数)加入目标函数进行优化计算；

1. 等式约束罚函数 $y_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, 2, ..., m$

- 目标函数改造为：

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{W}) = \phi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} W_i y_i^2(\mathbf{x}) \tag{4.70}$$

2. 不等式约束罚函数 $y_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, ..., m$

第四章 射频电路优化设计(44)

- 目标函数改造为：

罚项系数

$$p(\mathbf{x}, M_k) = \phi(\mathbf{x}) + M_k \sum_{i=1}^{m} \left[y_i(\mathbf{x}) - \left| y_i(\mathbf{x}) \right| \right]^2 / 4 \qquad (4.71)$$

其中：

$$\left[y_i(\mathbf{x}) - \left| y_i(\mathbf{x}) \right| \right]^2 / 4 = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}) & y_i(\mathbf{x}) < 0 \\ 0 & y_i(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \qquad (4.72)$$

满足约束条件罚函数为0

罚项系数规律： $0 < M_1 < M_2 < M_3 \cdots < M_k$

$$\lim_{k \to \infty} M_k = \infty$$

3. 梯度优化法的罚函数(略)