



计算机辅助设计丛书

微波电路 计算机 辅助设计

上

高葆新 洪兴楠 陈兆武
冀复生 李章华 陈兆清

清华大学出版社

微波电路计算机辅助设计 (上) 高葆新等

清

8722T

4I

版
社

72.12.11
441

微波电路计算机辅助设计

(上)

高葆新 洪兴楠 陈兆武 编著
冀复生 李章华 陈兆清



清华大学出版社

8910007

内 容 简 介

JS/30/04

本书是工程技术性专题论著。全书分上、下两册。上册从计算机辅助设计的基本原理和概念着手，讲述微波电路计算机辅助电路分析、最优化设计、公差分析和通用程序设计。下册详细论述各种微波无源电路和微波有源电路的理论分析及设计方法。对各类分析和设计方法都给出了设计举例，并附有许多实用的子程序。

本书既具有系统性又具有专题实用性，可作为大专院校教学参考书、工程技术参考书以及科技工作者举办微波计算机辅助设计的学习班教材。

微波电路计算机辅助设计

(上)

高葆新 洪兴楠 陈兆武 编著
黄复生 李章华 陈兆精

☆

清华大学出版社出版

(北京清华园)

中国科学院印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16 印张：13 $\frac{1}{4}$ 字数：337 千字

1986年11月第1版 1988年4月第2次印刷

印数：3061~9000 定价：2.60元

ISBN 7-302-00096-4/TP·31(课)

出 版 说 明

计算机辅助设计简称为(CAD),即 Computer Aided Design 的缩写,至今已有二十多年历史。近几年呈现了突飞猛进的发展,特别是计算机硬件、图形技术、智能模拟等方面的巨大进步使 CAD 技术成为工程设计及科学研究不可缺少的重要组成部分。CAD 技术可以理解为用计算机来模拟工业产品的试制加工和调试检测过程,以及自动选择最优参数,从而达到工业产品一次设计成功。因此 CAD 可以使产品更新换代的周期缩短、质量寿命提高、成本价格成倍下降。CAD 在促进科学研究与生产进程中已发挥了巨大的作用,现在 CAD 已和 CAM (Computer Aided Manufacture 计算机辅助制造)、CAT (Computer Aided Test 计算机辅助检验)结合成 CAE 系统,这就是计算机辅助工程系统。

CAD 是计算机与工程设计紧密结合的综合应用技术。尽管各学科领域的 CAD 都是采用数值计算方法解决高精度高速度工程设计,然而,由于 CAD 是和各学科专业内容紧密相关的,因此其技术特点及侧重面又有很大不同。例如,电子电路主要用节点网络表示其拓扑结构;微波电路则较多研究数学模型及矩阵方程;机械类学科领域内的重点在于图形技术,利用屏幕显示及人机对话组装出复杂的三维几何结构;自动控制专业则需解决多变量图解及系统动态过程的数学仿真。因此,开发 CAD 系统的技术人员必须具备专业理论、数学、计算机软件三方面的知识。

为了推进与发展 CAD 应用技术,我们编著了一套计算机辅助设计丛书,其中包括微波电路、机械、建筑、控制系统、图形学等学科的 CAD 技术。每册书将针对不同学术领域把专业理论、数学方法与软件技术紧密结合起来阐述 CAD 技术的原理及应用。我们希望这套丛书能在实现我国工业与科学技术现代化进程中起到一些微薄的促进作用。

前 言

随着电子计算机的广泛应用,微波电路技术进入了一个新的阶段。一些难于解决甚至无法解决的设计课题——例如微波电路的公差分析,多倍频程宽带电路的最优设计,微波系统的寿命与可靠性等——在采用计算机辅助设计之后迎刃而解,一些费时费力的微波电路的计算、调整和测量可以用计算机数值分析或电路模拟来代替,因而大大促进了微波电路技术的深入发展。反过来,为了适应计算机运算的特点,在电路理论方面需要深入研究各种微波电路的特性,以提供严格的数学模型和物理模型;在测量技术方面需要精密测量微波元件参数,以提供足够准确的初始值。

微波电路计算机辅助设计简称微波电路CAD (Computer Aided Design)。目前所说的计算机辅助设计含义已远远超出“设计”的范畴。就广义来说,它包括电路分析CAA (Computer Aided Analysis)、电路设计CAD、工艺版图及电路制造CAM (Computer Aided Manufacture)、自动测量及自动检验CAT (Computer Aided Test),甚至总体的电路自动设计工程CAE (Computer Aided Engineering)。其中微波电路CAA和CAD已相对成熟,国外已普遍采用,并研制了不少大型通用设计程序。而CAM和CAE则处于起步阶段,虽然已经能把自动网络分析仪、数字计算机和自动版图加工设备结合在一起,使得从元件初值的测量、数据校正、电路拓扑选择、最优化设计直到版图掩模设计加工一次完成,但还不能进行微波电路自动制造。但可以确信,完善的CAM和CAE必然能够实现。

本书重点介绍基本的CAA和CAD技术以及适合于计算机的若干常用的微波电路理论模型,以满足微波电路CAD推广和应用的需要。本书的编写着重于工程技术性和实用性。需要具备的基础知识有FORTRAN程序语言、微波电子线路、微波网络和微波技术等。

本书分为两册。前4章编入上册,其主要内容是CAD的基本理论和基本的程序设计技术,包括微波电路的计算机分析、电路的最优化设计、电路敏感度与公差分析以及微波电路通用程序的设计技术。各种分析方法大都给出计算举例,并附有实用程序语句或完整的子程序,以便于读者深入理解和迅速掌握。

第五~十章是微波无源电路CAD,包括微波传输线、微波滤波器、微波电桥、定向耦合器、六端口网络等。第十一~十三章是微波有源电路CAD,包括混频、宽频带放大和负阻放大等。这些章着重于各种微波电路的计算机分析方法以及适于计算机的数学和物理模型的研究,也给出部分程序或框图。

由于各种微波电路特性各异,分析方法也不尽相同,因此本书的编写力求系统性和灵活性相结合,并且保持各章有一定的独立性。阅读顺序可先读前4章,然后根据读者所从事的专题研究内容选择下册里的有关章节。

本书是在我们从事过的部分科研工作以及CAD课程教材基础上编写的。限于知识水平,难免有错误及不当之处,望予以指正。

本书由高葆新负责主编。第一、二、三、四、十一、十三章由高葆新执笔,第八、九章由洪兴楠执笔,第七、十章由陈兆武执笔,第十二章由冀复生执笔,第五章由李章华执笔,第六章由冀复生、陈兆清执笔。

作者 1984年10月

目 录

绪论	(1)
第一章 微波电路计算机辅助分析	(5)
§ 1.1 待定导纳矩阵分析	(5)
§ 1.1.1 待定导纳矩阵定义	(5)
§ 1.1.2 待定导纳矩阵性质	(6)
§ 1.1.3 建立待定导纳矩阵的方法	(7)
§ 1.1.4 分布参数元件和有源元件的待定导纳矩阵	(17)
§ 1.1.5 多端网络组合的待定导纳矩阵	(21)
§ 1.1.6 待定导纳矩阵的化简	(24)
§ 1.2 双口网络矩阵分析	(31)
§ 1.2.1 多级级联	(31)
§ 1.2.2 并联分支链	(33)
§ 1.2.3 串联分支链	(35)
§ 1.2.4 矩阵链并联	(35)
§ 1.2.5 矩阵链串联	(37)
§ 1.2.6 矩阵的串并联与并串联	(38)
§ 1.2.7 矩阵参数之间的变换关系	(39)
§ 1.3 散射矩阵分析	(46)
§ 1.3.1 双口网络级联的S参数	(46)
§ 1.3.2 多口网络互联的S参数	(48)
§ 1.3.3 多口S矩阵的端口简化	(53)
参考文献	(56)
第二章 微波电路最优化设计	(57)
§ 2.1 概述	(57)
§ 2.1.1 最优化设计的基本原理	(57)
§ 2.1.2 最优化方法概况	(58)
§ 2.2 目标函数	(58)
§ 2.2.1 目标函数表达式	(59)
§ 2.2.2 目标函数的极值	(61)
§ 2.3 最小二乘法与曲线拟合	(64)
§ 2.3.1 最小二乘问题	(65)
§ 2.3.2 多项式拟合	(66)
§ 2.3.3 正交多项式拟合	(69)
§ 2.3.4 非线性最小二乘	(72)
§ 2.4 单变量函数优化	(74)

§ 2.4.1 菲波那西和黄金分割法	(74)
§ 2.4.2 外推内插法	(80)
§ 2.5 多变量函数优化的梯度法	(94)
§ 2.5.1 最速下降法	(94)
§ 2.5.2 共轭梯度法	(97)
§ 2.5.3 牛顿-瑞夫森法	(102)
§ 2.5.4 变尺度法	(104)
§ 2.5.5 几种优化方法的比较	(110)
§ 2.6 多变量函数优化的直接法	(112)
§ 2.6.1 单纯形法	(112)
§ 2.6.2 鲍威尔法	(118)
§ 2.7 有约束条件的优化法	(124)
§ 2.7.1 变量更换法	(124)
§ 2.7.2 罚函数法	(126)
参考文献	(131)
第三章 微波电路敏感度与公差分析	(132)
§ 3.1 微波电路敏感度及其计算	(132)
§ 3.1.1 敏感度定义	(132)
§ 3.1.2 敏感度的直接计算法	(136)
§ 3.2 台劳根定理及伴随网络	(144)
§ 3.2.1 台劳根定理	(145)
§ 3.2.2 用节点法分析电路敏感度	(146)
§ 3.2.3 用散射矩阵法分析电路敏感度	(153)
§ 3.3 多变量敏感度及公差分配	(159)
§ 3.4 蒙特-卡洛法确定公差	(162)
§ 3.4.1 蒙特-卡洛法基本原理	(163)
§ 3.4.2 伪随机数列的产生	(164)
§ 3.4.3 蒙特-卡洛公差分析法	(170)
参考文献	(175)
第四章 微波电路通用程序设计	(176)
§ 4.1 通用程序的一般要求	(176)
§ 4.2 节点分析程序	(177)
§ 4.2.1 电路拓扑及元件值输入	(177)
§ 4.2.2 待定导纳矩阵的建立	(181)
§ 4.3 双口矩阵分析程序	(183)
§ 4.3.1 电路拓扑及元件值输入	(183)
§ 4.3.2 电路元件按类型编号	(186)
§ 4.3.3 调子程序计算各元件的传输矩阵	(187)
§ 4.4 多口电路S参数分析程序	(194)
§ 4.4.1 多口网络S矩阵的建立	(195)

§ 4.4.2 关联矩阵的建立.....	(199)
§ 4.5 通用程序其它功能及调用.....	(200)
§ 4.5.1 全域最小值判断.....	(200)
§ 4.5.2 统计分析.....	(202)
§ 4.5.3 数据库.....	(203)
§ 4.5.4 通用程序使用的注意事项.....	(203)
参考文献	(204)

本 丛 书 目 录

- 一、计算机辅助机械设计
- 二、计算机图形学
- 三、计算机绘图基础教程
- 四、微波电路计算机辅助设计
- 五、计算机辅助设计控制系统
- 六、控制系统CAD软件
- 七、机械最优化设计
- 八、计算机辅助建筑设计

绪 论

计算机辅助设计在电子技术领域中发展很快,已经成为工程技术人员及科学理论研究人员必不可少的基本技能。在中低频频段,集总参数电子线路的计算机辅助设计,尤其是大规模集成电路的辅助设计发展较早,技术比较成熟。微波领域的计算机辅助设计,其内容既包括了微波电磁场问题,又包括微波电路问题,而且大多数属于分布参数电路,数学模型及电路模型比较复杂,对计算机辅助设计有更迫切的需要。具体来说,对计算机辅助设计要求的迫切性体现在以下几方面:

1. 微波传输线和微波电路元件的解析表达式往往很复杂,例如微带线特性阻抗、波导中的电抗膜片、销钉、耦合微带、微带不均匀区等的计算公式都相当繁长。为了工程设计的方便,常常用简化了的近似公式代替,于是导致设计精度不够,造成加工出来的实际电路与初始要求有较大差距。再加上微带线和槽线类型的混合集成电路调整也很困难,使得微波电路的设计往往不能达到预期的理想效果。而计算机辅助设计不仅很容易处理复杂公式,并且由于它具有数值计算的特点,即可以用离散的数值分析代替解析式分析,这对于不能用数学解析式表示的微波电路尤其有利。

2. 微波无源网络较多采用综合法设计,或者把综合解析公式做成表格和曲线以备设计者查用。尽管已有一些切比雪夫、最大平坦等特性的工程设计表格,但是由于函数类型和表格曲线数量终归有限,实际上难于满足微波设备千变万化的技术要求。而计算机辅助设计则可以进行任意特性要求的网络设计。

3. 综合法设计微波电路是根据特性要求综合出电路元件值和结构尺寸,往往给不出公差要求。例如设计微带线滤波器时,微带线的尺寸公差或基片介电常数公差就无法确定。设计人员只能凭经验来估计公差,公差值提得过高,将使制造工艺难度增加,浪费也大;公差给得过低,又可能造成废品。计算机辅助设计则可以容易地给出合理的公差要求以及成品的合格率。

4. 宽频带有源和无源网络要在极宽的频带内具有平坦响应特性,而其匹配元件有时多达10至20个,甚至更多。例如,多倍频程微波场效应晶体管放大器就是这类的典型例子。这时,若仍用常规的解析综合法,可能根本无法进行计算。只有采用计算机最优化技术才能解决这样复杂的设计要求。

5. 微波单片集成电路将是微波电路技术发展的一个极为重要的方向。在这类电路的设计中,既有集总参数元件,又有分布参数元件,而且都密集在一小片砷化镓基片上。对于这种既不能微调又无法单独测量其中局部元件的电路,只能依靠严格的精确设计,计算机辅助设计将是唯一手段。

一般所说的微波电路计算机辅助设计包含的技术内容相当广泛,大体上有下述几个主要方面:

1. 快速计算

这是早期计算机的主要应用。它对于繁杂的计算解析公式,尤其是重复性的大量数据表格的计算更为合适。若用人力计算,有时要长达几个月甚至几年;而用计算机则可以迅速取

得结果。快速计算至今仍为极重要的内容。

2. 电路分析

对于已知元件数值或结构尺寸的微波电路，用计算机计算电路特性参数叫做计算机辅助分析。这里所说的元件是指传输线段、半导体管、电阻、电容等，电路特性是指增益、反射系数、输入和输出阻抗等。

微波电路的一般研究过程是先设计原理电路，然后加工焊装，最后实验调测，检查其特性是否符合原定要求，再反复调整。而用计算机辅助分析就可直接算出电路特性，不必进行加工、焊装和测量。亦即用计算机代替人力进行实验工作，从而节省了加工，加快了研究工作过程。有些难于进行的微波测量工作也可以由计算机给出准确结果。

电路分析又是最优化设计和公差分析的基础。往往一次最优化设计过程需要调用分析程序几十次，甚至几百次。因此，电路分析是计算机辅助设计的最基本内容。

3. 网络综合

按照对微波电路的指标要求，用计算机和综合解析式试找电路元件的联接方式和元件值，再由计算机组装电路和修改元件参数，最后找出一个能满足指标的合理电路，这个过程叫综合。目前的电路综合过程中，电路拓扑结构的选择主要依靠设计人员的经验，采用人机对话的方式由人机配合产生。以微波滤波器为例，首先要选择传输线类型（微带线还是同轴线），再确定结构型式（交叉指型还是并联耦合），然后凭经验选试不同的综合函数，最后试算定型。只有对极少数简单电路，计算机才具有自动选择拓扑结构的能力。

4. 电路模拟

电路模拟主要包含两类工作：

（1）求微波元器件的数学模型。有相当多的微波元器件，其特性不能用严格的解析式表示。在这种情况下，需要测量它们的频率特性曲线，然后用计算机找一个近似的数学公式（例如用多项式）来代表它们。这就是解析式模拟。

（2）求微波元器件等效电路。测出微波元件在一系列频率点上的 S 参数，用计算机反复试算，找一个集总参数电路，只要此电路的 S 参数与微波元件的 S 参数一致，这个电路就是微波元件的等效电路，这就是电路模拟。例如，微波二极管等效电路包括引线电感 L_i 、结电容 C_j 、电阻 R_j 和管壳电容 C_s ，先测出微波二极管在某频域一系列频率点上的 s_{11} 值，再用计算机反复更改 L_i 、 C_j 、 R_j 、 C_s 的数值，使等效电路的 s_{11} 逼近微波管的测量值，最后即可得到等效电路。

5. 最优化设计

根据给定的电路拓扑结构和要求的电路理想特性，用计算机按一定规律凑试出一组最佳的元件数值，使电路特性最好地逼近理想特性，这个过程叫最优化设计。最优化设计往往是微波电路计算机辅助设计的核心，许多难于用解析式表达的复杂电路，也可以用最优化设计找出颇为理想的数值解答。

6. 公差分析

对于已经设计完成的微波电路，模仿元件值的实际变化（例如环境温度引起的变化，时间引起的老化，元件值自身误差等），以判断各元件参数漂移及误差对总电路特性的影响。根据影响程度的大小来确定公差。电路特性受元件值变化影响的程度用敏感度来表示。对敏感度大的元件，应给以严格的公差要求，而对敏感度小的元件，则可放松其公差，从而对元件提出严格而合理的公差要求。有了公差分析不仅可以节省大量人力和时间，而且可以解决

许多用实验无法判断的公差要求。

7. 微波测量中的精密校准和数据处理

微波测量的精确度往往受测量仪表的误差所限制。例如，各种仪表元件都有一定的驻波系数、失配反射、损耗、刻度不均匀等误差因素。采用计算机控制的自动测量设备，是先测量出仪表设备的内部固定误差，并存储于计算机内，待测完电路之后再自动扣除仪表的内部误差。这种自动修正误差的结果使测量精度大大提高。此外，在自动测量过程中测得的大量数据，可由计算机实时处理，换算成有用的结果数据，打印成表格或曲线。利用计算机可以快速采集大量数据并暂时存储起来，以解决快速测量尤其是许多微波瞬变过程的测量问题。

8. 自动化设计

上述的全部设计内容和设计过程皆由计算机自动完成，设计人员只需提出设计要求，这就是自动化设计。这将是计算机辅助设计的发展趋向。但在短期内尚有很多困难有待解决。

上述的几项计算机辅助设计的技术内容可以归纳表示为图1。

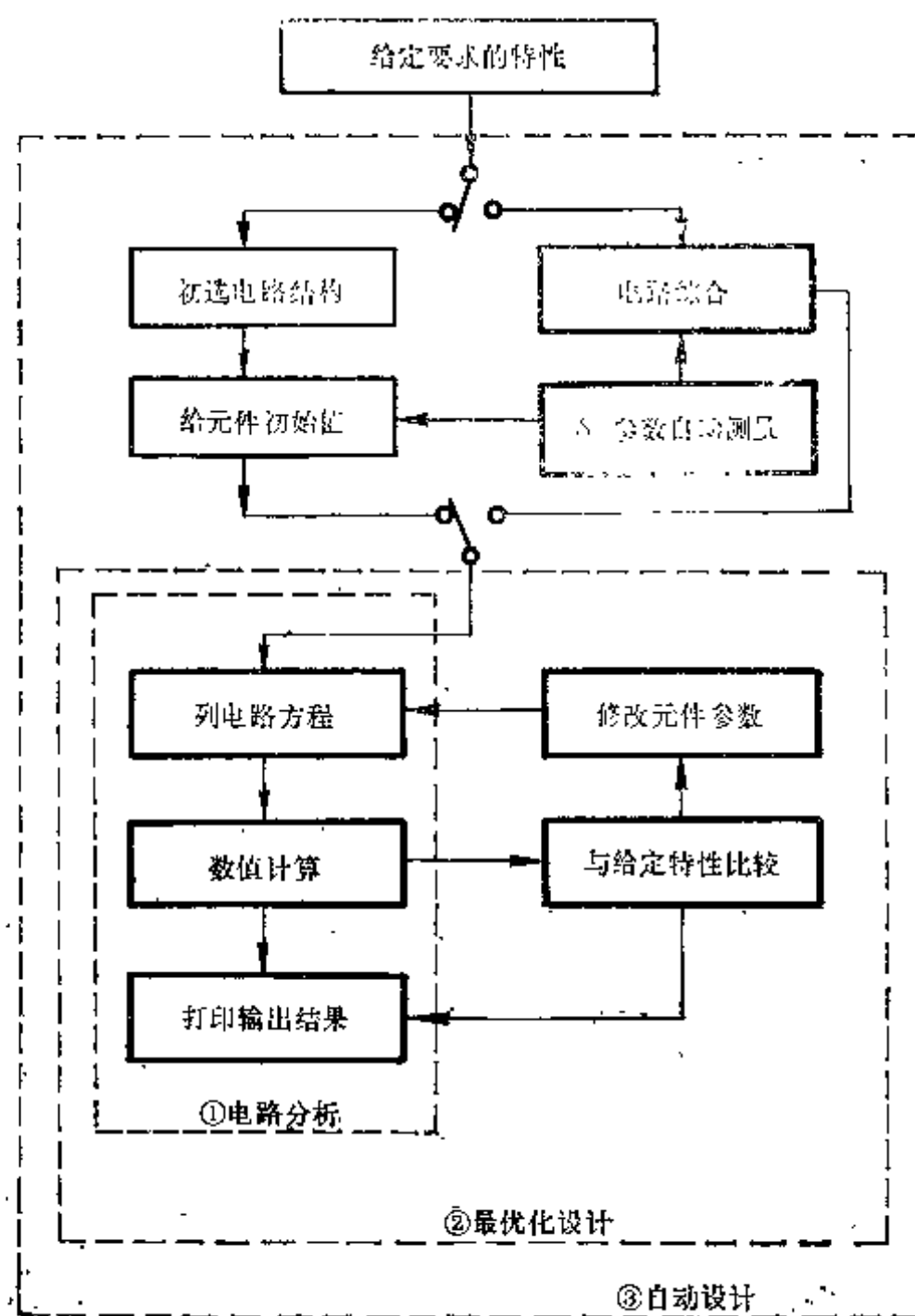


图1 计算机辅助设计框图

图中细实线方块是设计人员的工作，粗实线方块是计算机的工作。虚线框①内属于电路分析工作，虚线框②内是最优化设计内容。

最优化设计所需的电路结构和元件初值可以由电路综合得出，也可以由设计人凭经验给

出猜测值。但是对于复杂电路，最好先进行电路综合得出合理的电路和接近最佳值的元件初值，以便缩短最优化运算时间，而且可以避免由于电路结构和元件初值不合理所造成的计算失败。

如果把晶体管等元件的 S 参数自动测量、电路综合和最优化设计统统由计算机来完成，如图中虚线框③所示，则叫做自动化设计。此时设计人只需给出要求的电路特性即可。

第一章 微波电路计算机辅助分析

常用的计算机辅助分析方法大体上可分为两类，其一是节点分析法，其二是矩阵参数分析法。

节点分析法适用于集总参数电路和分布参数与集总参数的混合电路，它能够分析多节点的复杂电路。节点法又可分为节点电压方程法和待定导纳矩阵法。

矩阵参数分析法更适合于微波分布参数电路，其中双口网络矩阵法运算简单，占用计算机的存储量少，运算速度快。由于微波电路大多是可以由双口网络表示的单元电路的组合，因此双口传输矩阵应用最广。此外，也可采用散射矩阵分析法，它能够减少矩阵参数互换的麻烦，也能直接分析多端口微波网络。

微波电路分析包括频域分析和时域分析。无源微波电路和有源线性电路（例如滤波器、定向耦合器、分支电桥和低噪声放大器等）分析皆属于频域分析，而非线性时变参数电路（例如混频器、倍频器、参量放大器等）分析则同时包含频域和时域分析。但是，总的说来，频域分析是最常使用的。

§ 1.1 待定导纳矩阵分析

为了分析方便，特给出基本术语定义如下：

元件——集总参数的电阻、电容、电感和分布参数的传输线段、开路分支线、短路分支线以及晶体管和电源等。

端点——元件与外界连线的衔接点。集总参数元件具有两个端点，分布参数元件可以有两个以上的端点。

端口——电路网络的输入口和输出口。一个端口由两个端点组成。

节点——元件与元件的端点互相联接之处。

支路——两个节点之间的通路。

回路——由一个节点出发，再回到该节点的一组支路。

§ 1.1.1 待定导纳矩阵定义

设某个电路网络有 n 个节点。在分析过程中电路不接地，待电路分析完成之后，再把 n 个节点中的某一个节点接地，以得到实际工作电路。这样的分析方法可具有更大的通用性。

图1-1表示的是给定 n 个节点网络的局部电路。节点 j 与节点 k 之间的导纳用 y_{kj} 或 y_{jk} 表示， $y_{kj} = y_{jk}$ 。当 k 节点与任意节点 j ($j = 1, 2, \dots, n-1$ ，且 $j \neq k$) 有支路直接相连时，此两节点之间的导纳才能定为 y_{kj} ($= y_{jk}$)；而与 k 节点不直接相连接的各节点 x 与 k 之间的导纳应定为零，即 $y_{kx} = 0$ 。

按照图 1-1 的电路结构，对于节点 k 可根据克希霍夫电流定律写出电流方程

$$i_k + \sum_{j=1}^{n-1} (u_j - u_k) y_{kj} = 0 \quad (1-1)$$

式中 i_k —— 流入 k 节点的外电流

u_j —— j 节点的电位

u_k —— k 节点的电位

展开式 (1-1), 得

$$i_k = \sum_{i=1}^{n-1} u_i y_{ki} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i y_{ki} \quad (1-2)$$

化简 (1-2) 式等号右边第一项

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i y_{ki} = u_k \sum_{i=1}^{n-1} y_{ki} = u_k (-y_{kk}) = -u_k y_{kk} \quad (1-3)$$

式中引入了符号

$$y_{kk} = - \sum_{i=1}^{n-1} y_{ki} \quad (1-4)$$

将 (1-3) 式代入 (1-2) 式, 得

$$i_k = - \sum_{i=1}^n u_i y_{ki} \quad (1-5)$$

由于全电路共有 n 个节点, 总计应该写出 n 个电流方程

$$\begin{cases} i_1 = - \sum_{i=1}^n u_i y_{1i} \\ i_2 = - \sum_{i=1}^n u_i y_{2i} \\ \vdots \\ i_n = - \sum_{i=1}^n u_i y_{ni} \end{cases}$$

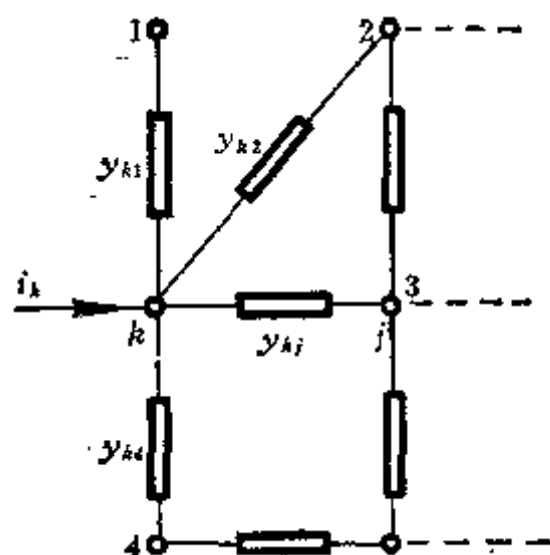


图1-1 解释待定导纳矩阵的一般电路

因而得到全电路的节点方程组

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{11} & -y_{12} & -y_{13} & \cdots & -y_{1n} \\ -y_{21} & -y_{22} & -y_{23} & \cdots & -y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & -y_{n3} & \cdots & -y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

把 (1-6) 式写成向量形式为

$$I = YU \quad (1-7)$$

式中 Y 称为待定导纳矩阵, 即公式 (1-6) 等号右边的导纳方阵, I 是外电流向量

$$I = [i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n]^T$$

U 是节点电压向量

$$U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T$$

当电路具有 n 个节点时, 待定导纳矩阵 Y 是 $n \times n$ 矩阵。

§1.1.2 待定导纳矩阵性质

待定导纳矩阵有下述 4 个基本性质:

由于全部流入电路的外电流总和为零, 故有

把式 (1-8) 展开为

式中的各节点电压 (u_1, u_2, \dots, u_n) 为任何值时, 公式 (1-9) 必定成立, 因此各项的系数必定为零, 即

公式 (1-10) 的含义就是列元素之和为零。

若各节点电位皆相等 ($u_1 = u_2 = \cdots = u_n$)，即各节点之间无电位差，则此时各电流皆应
，则由式 (1-5) 得

又由于 $u_1 = u_2 = \cdots = u_n \neq 0$, 所以只可能是

式 (1-11) 的含义就是行元素之和为零。

根据行列式基本性质可知, 如果把 Y 的各行都加到第 1 行, 则行列式值不变。但此时第 1 行各元素为零, 所以行列式值为零。

当节点 t 接地, 即 $u_t = 0$ 时, 电流方程组含有 u_t 的各项皆为零, 因此待定导纳矩阵的第 t 列消失。

又根据第 1 条性质知道, 第 i 行各元素可以由所在列其它元素之和求得, 即

所以, 可把待定导纳矩阵的第 t 行去掉, 此时的矩阵叫做确定导纳矩阵。

当电路已经给定时, 待定导纳矩阵的建立可按下述顺序进行: 首先给全部节点编号, 然

后求出每个元件的待定导纳矩阵 Y_m ，最后把各元件的待定导纳矩阵相加。相加后的矩阵就是电路的待定导纳矩阵。

例如，一给定电路如图1-2所示。图中的支路阻抗 z 可能包括 R 、 L 、 C 的任意组合。该电路有4个节点，节点编号已标注在图中。电路的待定导纳矩阵是 4×4 矩阵。

先分析第1个元件 z_1 ，其导纳是 $y_1 = 1/z_1$ ，它接在节点 n_1 和 n_3 之间。矩阵元素值是

$$y_{13} = y_{31} = -y_1$$

根据公式 (1-4)，有

$$y_{11} = -y_{13} = y_1$$

$$y_{33} = -y_{31} = y_1$$

于是得出元件 z_1 的待定导纳矩阵是

$$\begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

只要按此方法逐次把每个元件的待定导纳矩阵求出来，则全部矩阵相加就得到电路的待定导纳矩阵。实际上，并不需要把每个元件的矩阵都写出来，只要顺次把各个元件的4个元素值（即 y_{ii} ， y_{ij} ， y_{ji} ， y_{jj} ）逐个填写到一个矩阵中去，即可得到电路的待定导纳矩阵 Y_n ，见式 (1-13)。

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_1 + y_4 & -y_4 & -y_1 & 0 \\ -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_5 & -y_2 \\ -y_1 & -y_5 & y_1 + y_3 + y_5 & -y_3 \\ 0 & -y_2 & -y_3 & y_2 + y_3 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

上面介绍的例子仅表明无源阻抗电路待定导纳矩阵的编写原则，更一般的情况则是有源电路。在微波有源电路中不仅有无源阻抗，还有独立电源和非独立电源。例如，图1-3 (a)、(b) 分别表示微波双极晶体管和微波场效应管的等效电路。这里仅为说明电源特性，故给出的是简化了的电路，实际上，要较全面地描述晶体管特性，在计算机辅助设计中所用等效电路的元件数往往是17~32个，或者更多。

图1-3 (a) 中集电极电源 αi_e 是受 i_e 控制的电流源；图1-3 (b) 中的漏极电源 $g_m v_g$ 是受栅压 v_g 控制的电流源。非独立电源又叫受控电源，它有以下4种：

1. 电流控制电流源 (见图1-4 (a))

$$i_2 = \beta i_1, \quad (1-14)$$

式中 i_2 表示受控电流源， i_1 为控制电流， β 为电流放大系数。

2. 电压控制电流源 (见图1-4 (b))

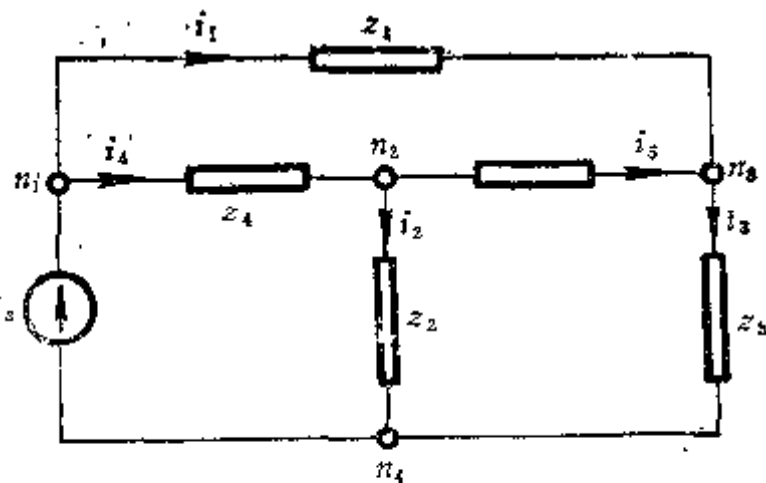


图1-2 电路举例

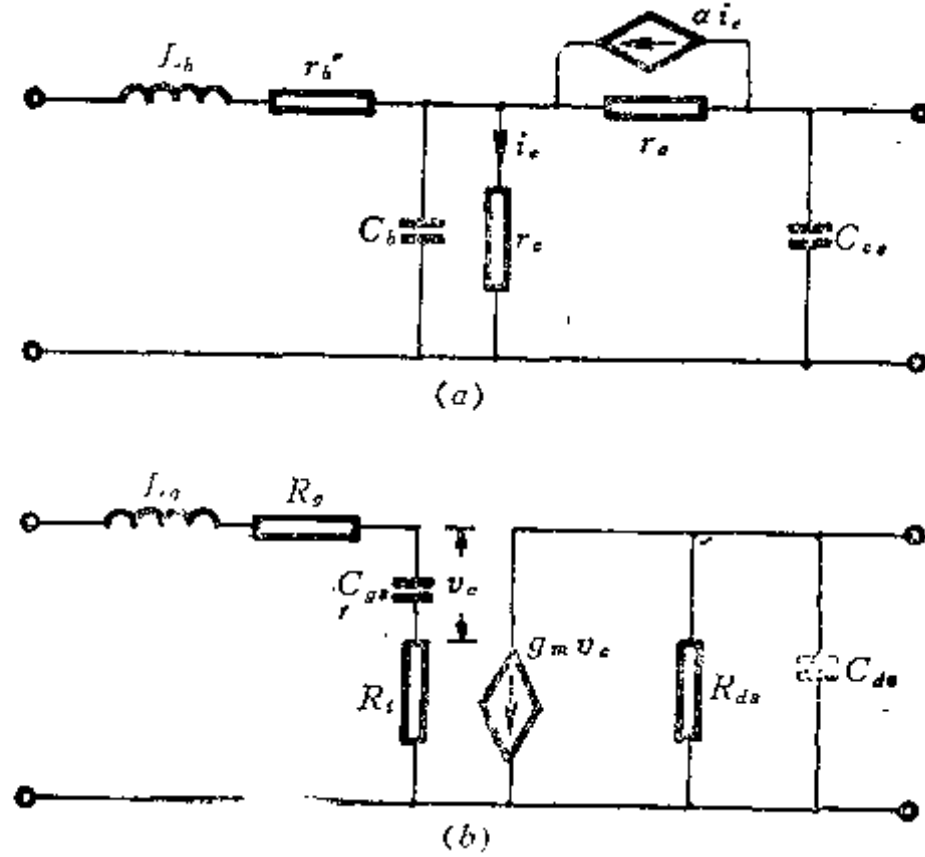


图1-3 微波晶体管简化等效电路
(a) 双极晶体管 (b) 场效应晶体管

$$i_2 = g_m v_1$$

(1-15)

式中 g_m 为互导, v_1 为控制电压。

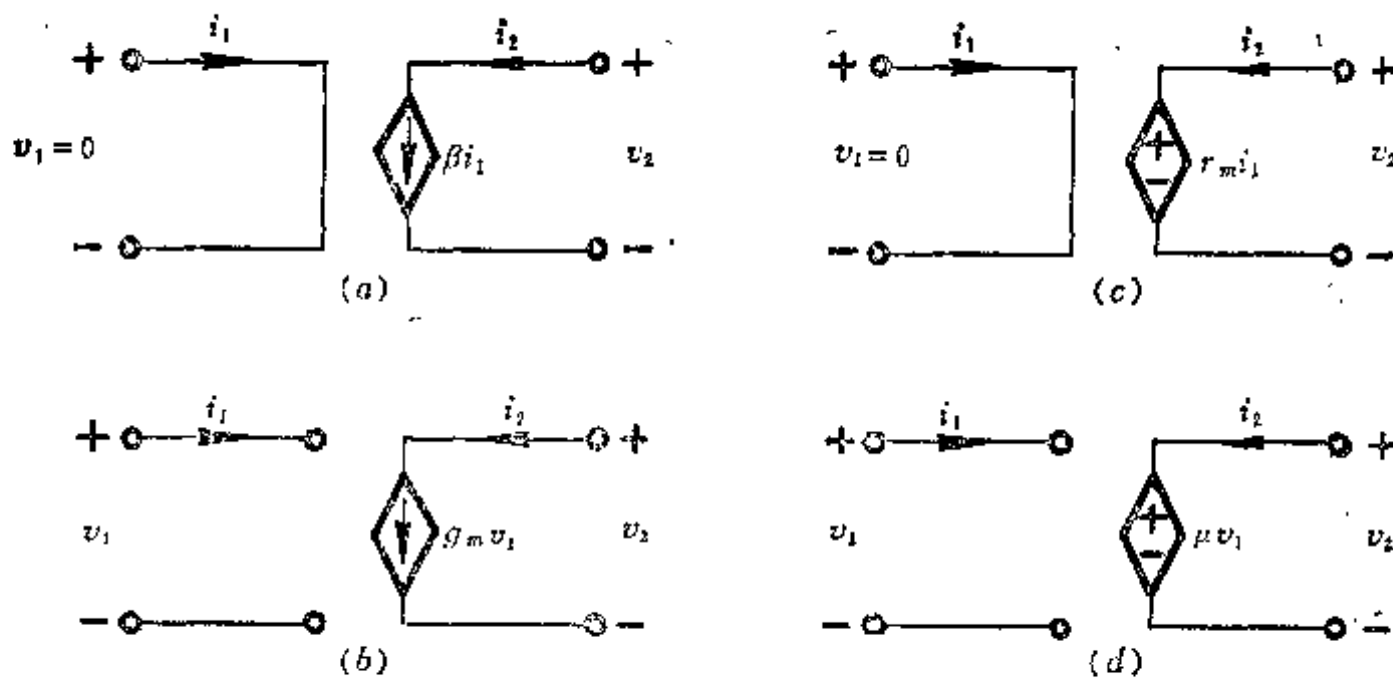


图1-4 受控电源
(a) 电流控制电流源 (b) 电压控制电流源
(c) 电流控制电压源 (d) 电压控制电压源

3. 电流控制电压源 (见图 1-4 (c))

$$v_2 = r_m i_1$$

(1-16)

式中 r_m 为互阻。

4. 电压控制电压源 (见图 1-4 (d))

$$v_2 = \mu v_1$$

(1-17)

式中 μ 为电压放大倍数。

在微波电路中常用的是电压控制电流源和电流控制电流源。

为了找出直接编写一般电路待定导纳矩阵的规律, 现以图 1-5 的电路为例进行分析。

首先确定各支路电流的方向和给节点编号。电流方向可任意规定, 节点号顺序也是任意的, 但最好把接地点定为 n_1 或者定为最大节点号 (本例为 n_5), 以便于最终化简。

根据克希霍夫电流定律列出各节点的电流方程。对于 n_1 节点有

$$i_3 - i_v + i_1 = 0$$

由于 $i_3 = (v_{n1} - v_{n4})y_3$

故得到 $(v_{n1} - v_{n4})y_3 - i_v + i_1 = 0$

(1-18)

对于 n_2 节点有

$$i_4 - i_1 - i_s = 0$$

$$(v_{n2} - v_{n3})y_4 - (v_{n4} - v_{n2})y_1 - i_s = 0$$

(1-19)

对于 n_3 节点有

$$i_2 - i_4 - i_5 - i_d = 0$$

$$(v_{n3} - v_{n5})y_2 - (v_{n2} - v_{n3})y_4 - (v_{n4} - v_{n3})y_5 - g_m(v_{n3} - v_{n5}) = 0$$

(1-20)

对于 n_4 节点有

$$i_1 + i_5 - i_3 + i_d = 0$$

$$(v_{n4} - v_{n2})y_1 + (v_{n4} - v_{n3})y_5 - (v_{n1} - v_{n4})y_3 + g_m(v_{n3} - v_{n5}) = 0$$

(1-21)

对于 n_5 节点有

$$i_v - i_2 = 0$$

$$i_v - (v_{n3} - v_{n5})y_2 = 0$$

(1-22)

对于电源支路有

$$v_{n5} - v_{n1} = v_s$$

(1-23)

然后, 按节点号码的次序对式 (1-18) ~ (1-23) 进行排列整理。在这 6 个公式中已知量是元件导纳、电流源 i_s 和电压源 v_s , 未知量是节点电压 $v_{n1} \sim v_{n5}$ 和电压源电流 i_v 。得出的电路方程组为

$$\left. \begin{array}{cccccc} y_3 v_{n1} & + 0 & + 0 & - y_3 v_{n4} & + 0 & - i_v = - i_s \\ 0 & + (y_1 + y_4) v_{n2} & - y_4 v_{n3} & - y_1 v_{n4} & + 0 & + 0 = i_s \\ 0 & - y_4 v_{n2} & + (y_2 + y_5 + y_4 - g_m) v_{n3} & - y_5 v_{n4} & (-y_2 + g_m) v_{n5} & + 0 = 0 \\ - y_3 v_{n1} & - y_1 v_{n2} & + (-y_5 + g_m) v_{n3} & + (y_1 + y_5 + y_3) v_{n4} & - g_m v_{n5} & + 0 = 0 \\ 0 & + 0 & - y_2 v_{n3} & + 0 & + y_2 v_{n5} & + i_v = 0 \\ - v_{n1} & + 0 & + 0 & + 0 & + v_{n5} & + 0 = v_s \end{array} \right\} \quad (1-24)$$

解电路方程 (1-24) 就可以得出电路各节点的电压 $v_{n1} \sim v_{n5}$ 。但是, 这里分析的目的

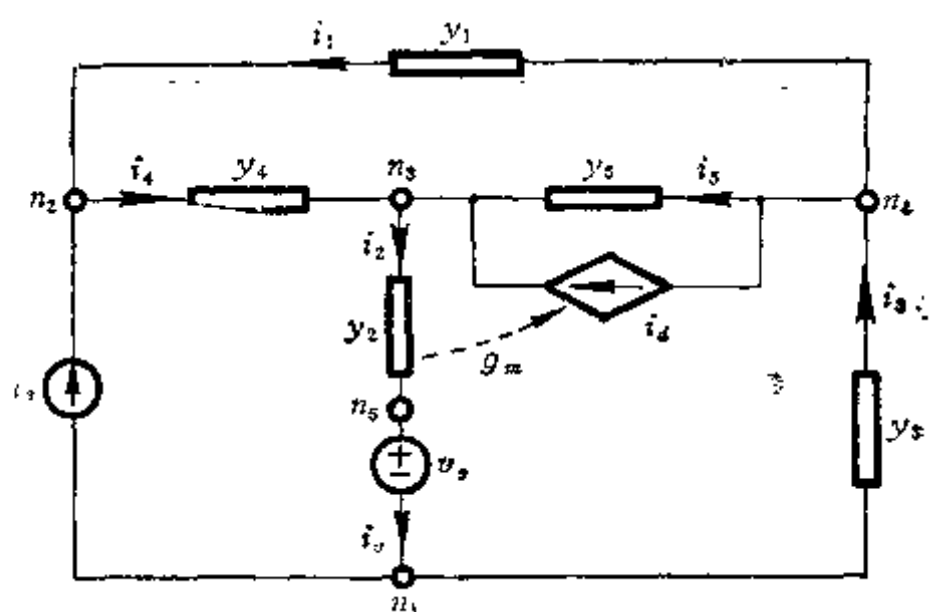


图1-5 含有各种电源的一般电路

并不是为了立即解出电路特性，而是为了找出直接建立电路方程的方法和规律，以便于用计算机自动进行电路分析。

把式 (1-24) 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_3 & 0 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & y_1 + y_4 & -y_4 & -y_1 & 0 \\ 0 & -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 - g_m & -y_5 & -y_2 + g_m \\ -y_3 & -y_1 & -y_5 + g_m & y_1 + y_3 + y_5 & -g_m \\ 0 & 0 & -y_2 & 0 & y_2 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \\ v_{n4} \\ v_{n5} \\ i_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_s \\ i_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_s \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

如果把式 (1-25) 按虚线的划分写成分块矩阵，则可得

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ V_s \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

式中的 Y_{11} 就是前述的待定导纳矩阵

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} y_3 & 0 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & y_1 + y_4 & -y_4 & -y_1 & 0 \\ 0 & -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 - g_m & -y_5 & -y_2 + g_m \\ -y_3 & -y_1 & -y_5 + g_m & y_1 + y_3 + y_5 & -g_m \\ 0 & 0 & -y_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{12} = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$Y_{21} = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

对矩阵方程 (1-25) 进行分析归纳，可以得出待定导纳矩阵直接填写的规律。

(一) 集总参数元件导纳

填写方式如图 1-6 (a) 所示。

导纳为 y 的元件联接在 n_i 和 n_j 节点之间，按电流方向规定， n_i 为始节点， n_j 为终节点。元件的矩阵元素为

$$Y_{ii} = Y_{jj} = y$$

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y$$

在待定导纳矩阵元素 Y_{ii} 和 Y_{jj} 的位置填入 y ，在 Y_{ij} 和 Y_{ji} 的位置填入 $-y$ ，如图 1-6 (a) 的方框所示。

(二) 独立电流源

填写方式表示为图 1-6 (b)。 n_i 和 n_j 是电流方向的始节点和终节点。按照式 (1-25) 的格式，电流值 i_s 填写在等号右边的电流矩阵中。由于 i_s 写在等号右边，因此 i_s 流出 n_i 所相应的电流值应该变符号，即填入 “ $-i_s$ ”，而流入节点 n_j 所相应的值填入 “ $+i_s$ ”。具体地说，就是在第 i 行填 “ $-i_s$ ”，在第 j 行填 “ $+i_s$ ”，如图 1-6 (b) 的方框所示。

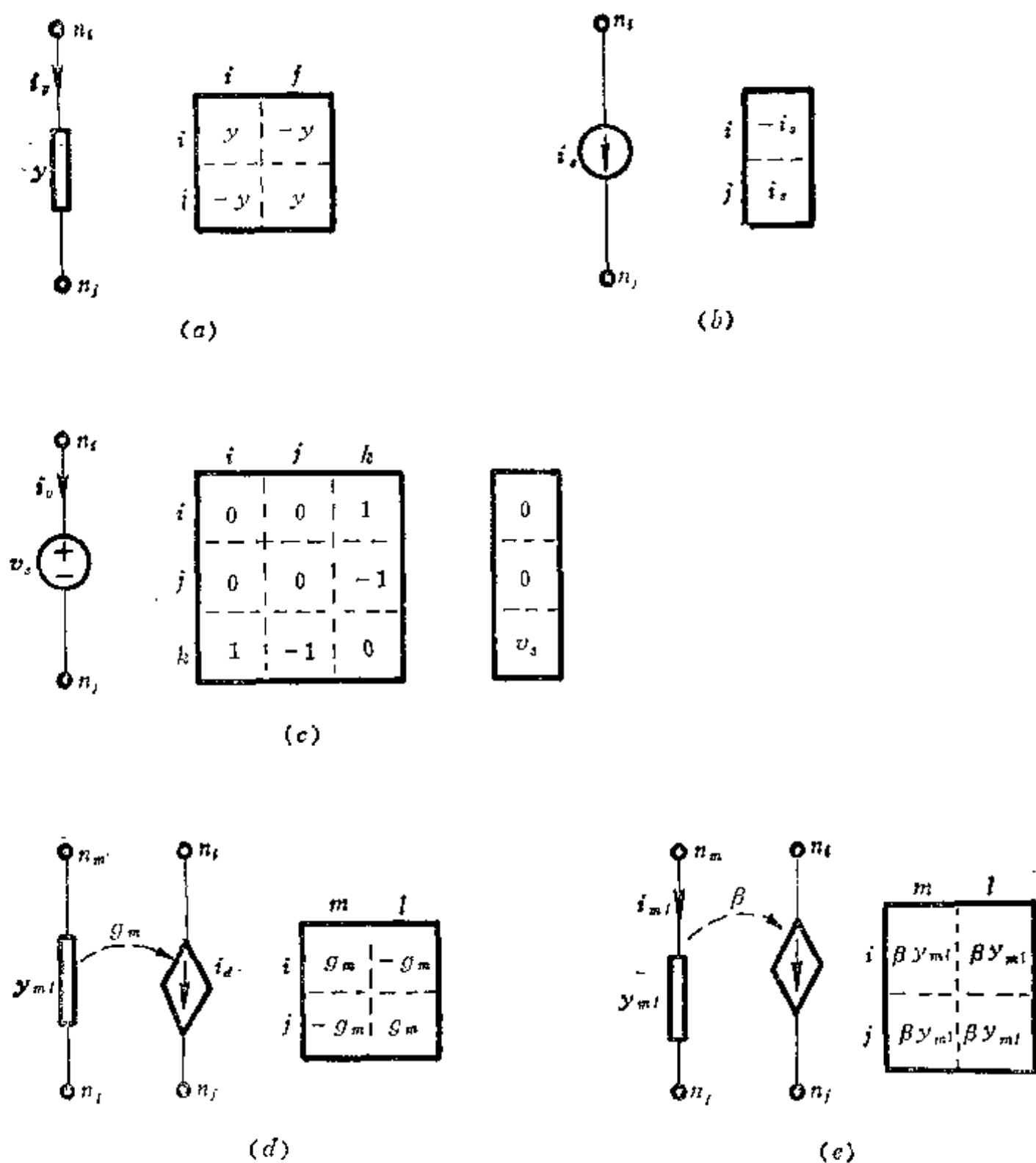


图1-6 待定导纳矩阵填写规律示意图:

- (a) 集总参数元件; (b) 独立电流源;
(c) 独立电压源; (d) 电压控制电流源;
(e) 电流控制电流源

(三) 独立电压源

填写方式表示为图 1-6 (c)。若 v_s 和 i_v 的方向按图中的规定, 则始节点 n_i 所相应的矩阵元素 Y_{ik} 和 Y_{ki} 为 1, 终节点 n_j 所相应的矩阵元素 Y_{jk} 和 Y_{kj} 值为 -1, 即

$$\begin{aligned} Y_{ik} &= Y_{ki} = 1 \\ Y_{jk} &= Y_{kj} = -1 \\ k &= n+1 \end{aligned}$$

式中, n 是节点数, k 是电压源位置的行列号。如果电路中有 m 个电压源, 则第 1 个电压源的位置号是 $k_1 = n+1$ (见式(1-25)), 第 2 个电压源的位置号是 $k_2 = n+2$, 其余类推。

电压源的电压值 v_s 填写在等式右边第 k 行的位置上。如果 v_s 的方向与图 1-6 (c) 的标注相反, 则应填入 “ $-v_s$ ”。而 Y_{ik} 、 Y_{ki} 、 Y_{jk} 、 Y_{kj} 的正负值不变。

(四) 电压控制电流源

填写方式表示为图 1-6 (d)。受控电流 i_d 由始节点 n_i 流向终节点 n_l ，它由 m 、 l 支路的电压 $v_{m,l}$ 控制。 $v_{m,l}$ 是支路元件 $y_{m,l}$ 两端的电压， n_m 是高电位端， n_l 是低电位端，互导是 g_m 。矩阵元素是

$$Y_{i,m} = Y_{l,l} = g_m$$

$$Y_{i,m} = Y_{l,l} = -g_m$$

(五) 电流控制电流源

填写方式表示为图 1-6 (e)。受控源电流 i_d 由 m 、 l 支路电流 $i_{m,l}$ 控制。矩阵元素值是

$$Y_{i,m} = Y_{l,l} = \beta y_{m,l}$$

$$Y_{i,m} = Y_{l,l} = -\beta y_{m,l}$$

式中， β 是受控源电流放大系数， $y_{m,l}$ 是控制支路中的元件导纳值。

下面用待定导纳矩阵进行电路分析的计算举例。

例 给定微波场效应管 (MESFET) 放大器简化等效电路如图 1-7 所示。求此放大器的待定导纳矩阵、节点电压方程和电压放大系数。

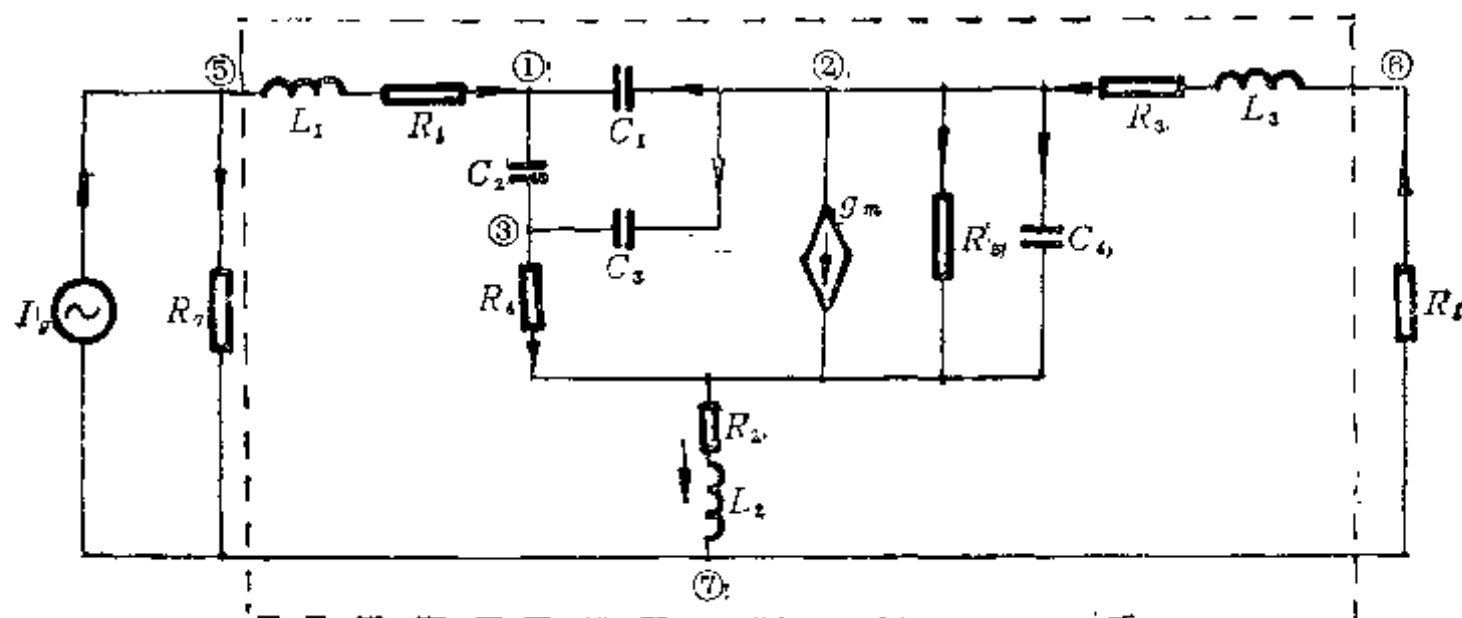


图1-7 MESFET放大器简化电路

图中虚线框内是微波场效应管的集总参数模型。 R_s 是信源阻抗， R_l 是负载阻抗， I_s 是信号电流源。为简化运算，此处暂不考虑场效应管两端的匹配电路。各元件值是，

$$L_1 = L_3 = 0.05 \text{ nH}; \quad R_1 = 2.9 \Omega;$$

$$L_2 = 0.04 \text{ nH}; \quad R_2 = 2 \Omega;$$

$$C_1 = 0.014 \text{ pF}; \quad R_3 = 3 \Omega;$$

$$C_2 = 0.62 \text{ pF}; \quad R_4 = 2.6 \Omega;$$

$$C_3 = 0.02 \text{ pF}; \quad R_5 = 400 \Omega;$$

$$C_4 = 0.12 \text{ pF}; \quad R_s = R_l = 50 \Omega;$$

$$I_s = 0.02 \text{ A}; \quad g_m = 0.053 \text{ 1}/\Omega;$$

$$f = 5 \text{ GHz}.$$

解

1. 给各节点编号，并规定电流方向。编号顺序任意，但接地点宜编为最后一号，此例为

⑦号。

2. 全电路有7个节点，待定导纳矩阵是 7×7 矩阵，外电源向量作为第8列填入矩阵，从而构成 7×8 待定导纳增广矩阵。按照图1-6所示的规则逐项把各元件阻抗填入矩阵相应元素的位置：

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{R_1 + j\omega L_1 + j\omega C_1 + j\omega C_2}$	$-j\omega C_1$	$-j\omega C_2$		$\frac{-1}{R_1 + j\omega L_1}$			
2	$g_m - j\omega C_1$	$\frac{1}{R_s} + j\omega C_1 + j\omega C_3 + j\omega C_4 + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2}$	$-g_m - j\omega C_1$	$\frac{-1}{R_s} - j\omega C_4$		$\frac{-1}{R_s + j\omega L_s}$		
3	$-j\omega C_2$	$-j\omega C_3$	$\frac{1}{R_s} + j\omega C_3 + j\omega C_2$	$\frac{-1}{R_s}$				
4	$-g_m$	$\frac{-1}{R_s} - j\omega C_4$	$g_m - \frac{1}{R_s}$	$\frac{1}{R_s} + j\omega C_4 + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2}$			$\frac{-1}{R_2 + j\omega L_2}$	
5	$\frac{-1}{R_1 + j\omega L_1}$				$\frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{R_g}$		$\frac{-1}{R_g}$	I_g
6		$\frac{-1}{R_s + j\omega L_s}$				$\frac{1}{R_s + j\omega L_s} + \frac{1}{R_1}$	$\frac{-1}{R_1}$	
7				$\frac{-1}{R_2 + j\omega L_2}$	$\frac{-1}{R_g}$	$\frac{-1}{R_1}$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2}$	$-I_g$

3. 计算各支路元件数值

$$\frac{1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{1}{2.9 + j(2\pi \times 5 \times 10^9)(0.05 \times 10^{-9})} = 0.2666 - j0.1444$$

$$\frac{1}{R_2 + j\omega L_2} = 0.3584 - j0.2253$$

$$\frac{1}{R_3 + j\omega L_3} = 0.2616 - j0.137$$

$$j\omega C_1 = j0.0004398$$

$$j\omega C_2 = j0.01948$$

$$j\omega C_3 = j0.000628$$

$$j\omega C_4 = j0.00377$$

代入上矩阵，经整理后得待定导纳矩阵的增广矩阵 $[Y \ I]$

$$\begin{bmatrix} .267-j.124 & -j.00044 & -j.095 & 0 & -.267+j.144 & 0 & 0 & 0 \\ .053-j.00044 & .264-j.132 & -.053 & -.0025 & 0 & -.262 & 0 & 0 \\ & & -j.00063 & -j.00377 & & +j.137 & & \\ -j.0195 & -j.00063 & .385 & -.385 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & +j.0201 & & & & & \\ -.053 & -.0025 & -.332 & .746-j.222 & 0 & 0 & -.358 & 0 \\ & -j.0038 & & & & & +j.225 & \\ -.267+j.144 & 0 & 0 & 0 & .287-j.144 & 0 & -.02 & .02 \\ 0 & -.262+j.137 & 0 & 0 & 0 & .282 & -.02 & 0 \\ & & & & & -j.137 & & \\ 0 & 0 & 0 & -.358+j.225 & -.02 & -.02 & .398 & -.02 \\ & & & & & & -j.225 & \end{bmatrix}$$

为检查运算过程有无错误，可视待定导纳矩阵各行、各列元素相加是否为零来判断。

4. 由上述增广矩阵可直接写出电路的节点方程 $I = Y \cdot U$ 。解此方程可得出各节点电压。再根据输入和输出节点的电压即可算出放大系数。解方程可采用下面给出的高斯消元法程序。

高斯消元法解线性方程的子程序

程序说明：本程序包括按列选主元、迭代消元和回代求解三个主要部分。各变量符号的含义如下：

N——方程数，即待解变量数；

NA——增广矩阵列数，即 $NA = N + 1$ ；

A——增广矩阵的数组，经过本程序迭代运算后，第 $N + 1$ 列的数代表解的向量；A 数组为复数，即每个元素皆代表导纳；

DET——判敛系数，当列的主元小于 10^{-30} 时，认为方程组无解，此时 $DET = 0$ ；

AMAX——列元素中最大值，即主元的值；

JM——主元所在行的号码。

```

1      SUBROUTINE GAUSS (A, NA, N, DET)
2      COMPLEX A (NA, NA), T
3      DET=1.0
4      N1=N+1
5      NN=N-1
6      DO 100 I=1, N
7      II=I+1
8      IF (I.EQ.N) GOTO 27
```

```

9      AMAX=CABS (A (I, I) )
10     JM=I
11     DO 20 J=II, N
12     IF (AMAX.GT.CABS (A (J, I) ) ) GOTO 20
13     AMAX=CABS (A (J, I) )
14     JM=J
15 20   CONTINUE
16     IF (JM.EQ.I) GOTO 27
17     DO 23 J=I, N1
18     T=A (JM, J)
19     A (JM, J) =A (I, J)
20 23   A (I, J) =T
21 27   IF (CABS (A (I, I) ) .LE.1.0E-30) GOTO 500
22     DO 30 J=II, N1
23 30   A (I, J) =A (I, J) /A (I, I)
24     IF (I.EQ.N) GOTO 100
25     DO 50 J=II, N
26     DO 50 K=II, N1
27 50   A (J, K) =A (J, K) -A (J, I) *A (I, K)
28 100  CONTINUE
29     DO 300 I=1, NN
30     II=N-I
31     III=II+1
32     DO 300 K=III, N
33 300  A (II, N1) =A (II, N1) -A (II, K) *A (K, N1)
34     RETURN
35 500  DET=0.0
36     RETURN
37     END

```

程序中第9~15句为按列选主元；第17~20句为主元所在行与第1行进行交换；第2句为收敛判断，即如果主元值小于 10^{-30} ，则此方程组无解，以 $DET=0$ 的代码返回主程序；第22~28句是消元过程；第29~33句是回代求解。

用高斯消元法程序求解时，可先把待定导纳增广矩阵的第7行和第7列删除，其物理含义是把第⑦节点接地，使 $V_7=0$ 做为基准地电位。此时得到的是确定导纳增广矩阵，其阶数为 6×7 。将此增广矩阵输入到程序中，经运算后打印出各节点的电压是：

```

V1= 0.48844E+00,      - 0.45582E+00
V2= - 0.70911E+00,    0.13296E+01
V3= 0.88215E-01,      0.13015E-01
V4= 0.66623E-01,      - 0.69512E-02
V5= 0.50413E+00,      - 0.41611E+00
V6= - 0.63124E+00,    0.12731E+01

```

上列各电压均为复数，等号右边的两个数值分别是电压的实部和虚部，经换算可得电压的模值和幅角。原给定信源额定电压为 $I_s R_s = 1$ 伏，所以负载 R_L 上的电压值就等于该放大器的电压放大系数。由于未加匹配电路，因此电压放大系数不很高，其值是

$$T = V_e = 2.189e^{j116.4^\circ}$$

实际求解电路时，待定导纳矩阵的建立也是由计算机完成的，设计人只需输入电路拓扑和元件值即可。电路分析程序具体编制方法见第四章。

§1.1.4 分布参数元件和有源元件的待定导纳矩阵

微波电路中不仅有电阻、电容和电感等集总参数元件，还有大量的分布参数元件和部件，如传输线段、耦合线段、电桥，还有微波晶体管和铁氧体元件等。

分布参数元件和有源元件的待定导纳矩阵求法大体上可分为3种。其一是利用等效电路把分布参数元件用集总参量表示，然后再按集总元件写出待定导纳矩阵；其二是利用解析法分析得出导纳 Y 矩阵或散射参数 S 矩阵，换算成确定导纳矩阵，再增加一行和一列以获得待定导纳矩阵；其三是用实验法对难于分析且不易用等效电路表示的微波晶体管或铁氧体元件测出 S 参数，然后进行参数换算。

下面举例说明。

(一) 传输线段

传输线段如图 1-8 (a) 所示，特性导纳为 Y_0 ，线段电长度 $\theta = 2\pi l/\lambda_g$ 。图 1-8 (b)、(c) 是等效 π 形和 T 形电路。

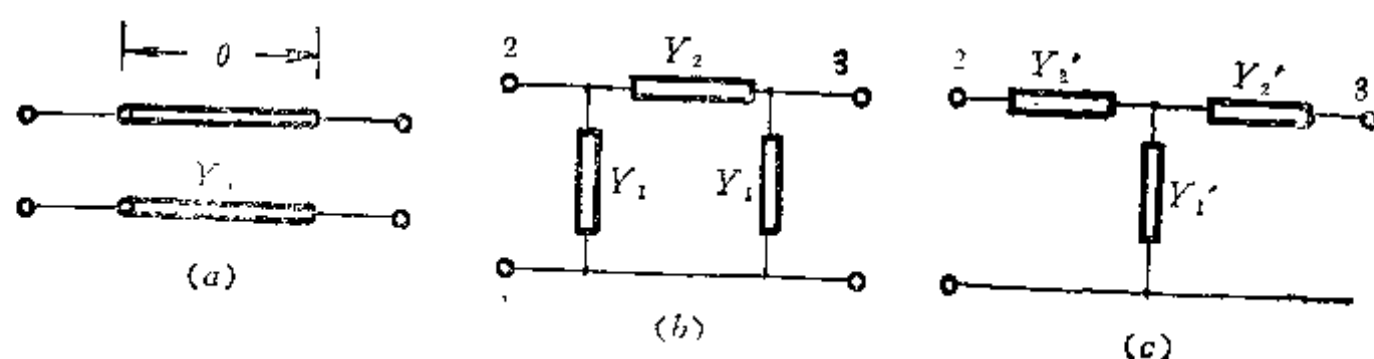


图1-8 传输线段等效电路

π 形等效电路的元件参数是

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= jY_0 \tan \frac{\theta}{2} \\ Y_2 &= -jY_0 \csc \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

T 形等效电路的元件参数是

$$\left. \begin{aligned} Y_1' &= jY_0 \sin \theta \\ Y_2' &= -jY_0 \cotg \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

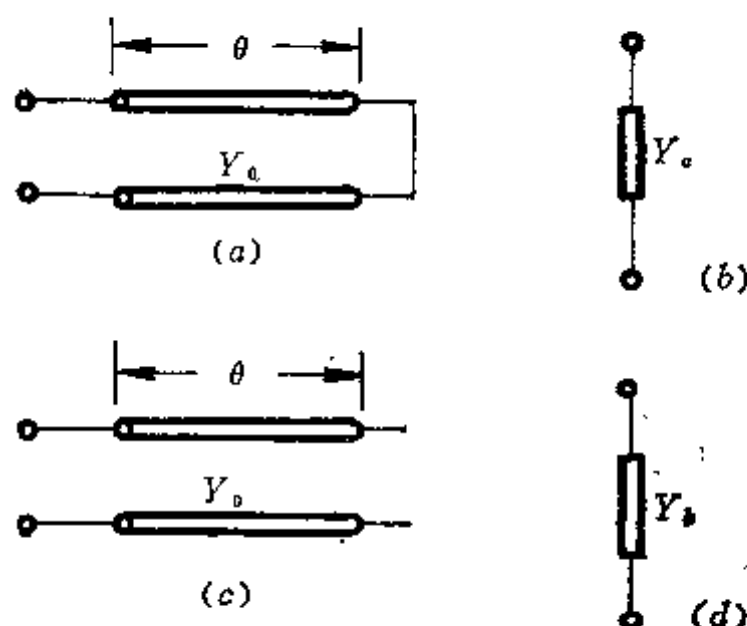
由图 1-8 (b) 中 π 形电路可知，电路节点有 3 个，其待定导纳矩阵是 3×3 方阵。按前述矩阵填写方法得到传输线段的待定导纳矩阵是

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_0 & -Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_1 & -Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j2Y_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} & -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} & -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} & -jY_0 \operatorname{ctg} \theta & jY_0 \operatorname{csc} \theta \\ -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} & jY_0 \operatorname{csc} \theta & -jY_0 \operatorname{ctg} \theta \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

如果这段传输线接在具有 n 个节点的任意电路中，则其待定导纳矩阵应写成 $n \times n$ 方阵。

(二) 短路传输线与开路传输线

终端短路传输线段的电路及其等效电路如图 1-9 (a)、(b) 所示。开路传输线段及其等效电路如图 1-9 (c)、(d) 所示。



终端短路传输线等效于一个导纳 Y_s 。

$$Y_s = -jY_0 \operatorname{ctg} \theta \quad (1-30)$$

终端开路传输线等效于导纳 Y_o 。

$$Y_o = jY_0 \operatorname{tg} \theta \quad (1-31)$$

由于等效电路仅为一个导纳，因此待定导纳矩阵按单个元件处理。

(三) 微带线转弯

微带线转弯的图形及折弯处的等效电路如图 1-10 所示。在折弯处 $T_1 \sim T_2$ 面之间的等效电路是 T 形电路，其等效集总参数元件值是：

图1-9 短路传输线与开路传输线

$$\left(\frac{C_b}{W} \right)_{\frac{PF}{m}} = \left[(1.4\epsilon_r + 12.5) \frac{W}{H} \right.$$

$$\left. - (1.83\epsilon_r - 2.25) \right] / \sqrt{\frac{W}{H}} + \frac{0.02\epsilon_r}{W/H} \quad \left(\frac{W}{H} < 1 \right) \quad (1-32)$$

$$\left(\frac{C_b}{W} \right)_{\frac{PF}{m}} = (9.5\epsilon_r + 1.25) \frac{W}{H} + 5.2\epsilon_r + 7.0 \quad \left(\frac{W}{H} \geq 1 \right) \quad (1-33)$$

$$\left(\frac{L_b}{H} \right)_{\frac{nH}{m}} = 100 \left(4 \sqrt{\frac{W}{H}} - 4.21 \right) \quad (1-34)$$

式中， W 是微带线宽度， H 是基片高度， ϵ_r 是基片相对介电常数。

折弯处的等效电路具有 4 个节点，其待定导纳矩阵是 4×4 矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} j\omega C_b & 0 & -j\omega C_b & 0 \\ 0 & -j\frac{2}{\omega L_b} & j\frac{2}{\omega L_b} & 0 \\ -j\omega C_b & j\frac{2}{\omega L_b} & j\left(\omega C_b - \frac{4}{\omega L_b}\right) & j\frac{2}{\omega L_b} \\ 0 & 0 & j\frac{2}{\omega L_b} & -j\frac{2}{\omega L_b} \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

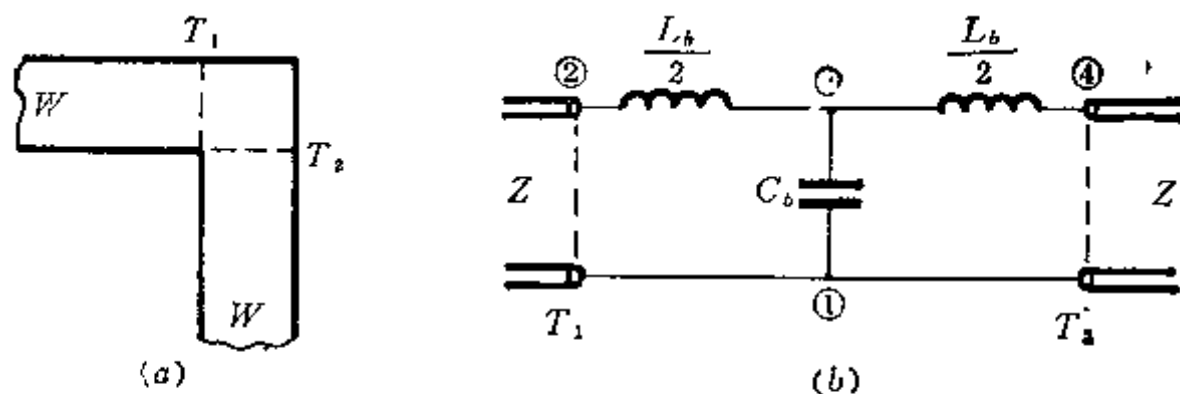


图1-10 微带转弯

(四) 微带 T 形分支

微带线 T 形分支电路见图 1-11。在 T_1 和 T_2 面之间的等效电路是一个三口网络，共有 4 个集总参数元件和 5 个节点，其待定导纳矩阵是 5×5 方阵，见式 (1-36)。

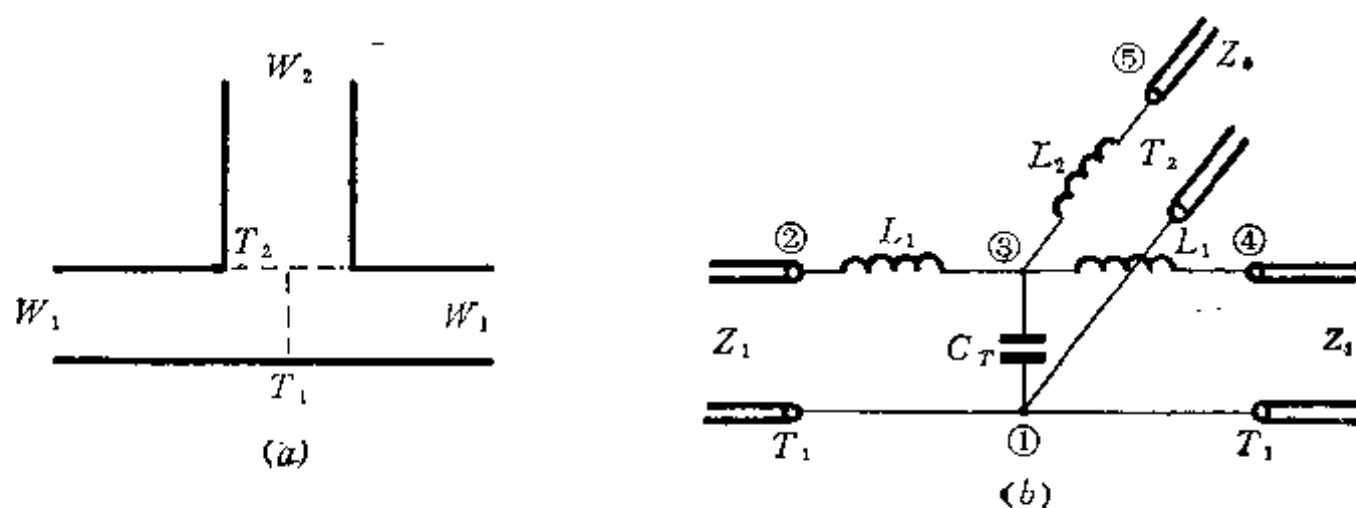


图1-11 微带 T 分支

$$Y = \begin{bmatrix} j\omega C_T & 0 & -j\omega C_T & 0 & 0 \\ 0 & -j\frac{1}{\omega L_1} & j\frac{1}{\omega L_1} & 0 & 0 \\ -j\omega C_T & j\frac{1}{\omega L_1} & j\left(\omega C_T - \frac{2}{\omega L_1} - \frac{1}{\omega L_2}\right) & j\frac{1}{\omega L_1} & j\frac{1}{\omega L_2} \\ 0 & 0 & j\frac{1}{\omega L_1} & -j\frac{1}{\omega L_1} & 0 \\ 0 & 0 & j\frac{1}{\omega L_2} & 0 & -j\frac{1}{\omega L_2} \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

当主线特性阻抗为 50Ω ，支线为 Z_0 ，而且 $\epsilon_r = 9.9$ 时，等效电路中的元件值用下述公式：

$$\left(\frac{C_T}{W_1}\right)_{\frac{PF}{m}} = \frac{100}{\tanh(0.0072Z_0)} - 0.64Z_0 - 261 \quad (25 \leq Z_0 \leq 100)$$

$$\left(\frac{L_1}{H}\right)_{\frac{aH}{m}} = -\frac{W_2}{H} \left[\frac{W_2}{H} \left(-0.016 \frac{W_1}{H} + 0.064 \right) + \frac{0.016}{W_1/H} \right] LW_1$$

$$\left(0.5 \leq \frac{W_1}{H}, 2 \geq \frac{W_2}{H} \right)$$

$$\left(-\frac{L_2}{H}\right)_{\frac{nH}{m}} = \left\{ \left(0.12 \frac{W_1}{H} - 0.47\right) \frac{W_2}{H} + 0.195 \frac{W_1}{H} - 0.357 + 0.0283 \sin\left(\pi \frac{W_1}{H} - 0.75\pi\right) \right\} LW_2$$

$$\left(1 \leq \frac{W_1}{H} \leq 2, 0.5 \leq \frac{W_2}{H} \leq 2\right)$$

式中

$$(LW_1)_{\frac{nH}{m}} = \frac{Z_1 \sqrt{\epsilon_{rs}}}{C}$$

$$(LW_2)_{\frac{nH}{m}} = \frac{Z_0 \sqrt{\epsilon_{rs}}}{C}$$

$$(C)_{\frac{m}{s}} = 3 \times 10^8$$



图1-12 平行耦合线段

(五) 平行耦合微带线

平行耦合微带线可表示为图1-12。对于这类平行耦合线已有用解析法得到的导纳矩阵参数。对于图1-12中所标注的节点编号，其导纳矩阵参数是

$$\left. \begin{aligned} y_{11} = y_{22} = y_{33} = y_{44} &= -j(Y_{00} + Y_{0s}) \frac{\text{ctg}\theta}{2} \\ y_{12} = y_{21} = y_{34} = y_{43} &= -j(Y_{00} - Y_{0s}) \frac{\text{ctg}\theta}{2} \\ y_{13} = y_{31} = y_{24} = y_{42} &= -j(Y_{00} - Y_{0s}) \frac{\text{csc}\theta}{2} \\ y_{14} = y_{41} = y_{23} = y_{32} &= -j(Y_{00} + Y_{0s}) \frac{\text{csc}\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

耦合线的待定导纳矩阵是 5×5 方阵。利用待定导纳矩阵各行、各列之和皆为零的性质，可以算出耦合线的待定导纳矩阵

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & -\sum_{i=1}^4 y_{1i} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & -\sum_{i=1}^4 y_{2i} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & -\sum_{i=1}^4 y_{3i} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & -\sum_{i=1}^4 y_{4i} \\ -\sum_{i=1}^4 y_{i1} & -\sum_{i=1}^4 y_{i2} & -\sum_{i=1}^4 y_{i3} & -\sum_{i=1}^4 y_{i4} & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 y_{ij} \end{pmatrix} \quad (1-33)$$

(六) 微波有源元件

微波有源元件种类很多，如双极晶体三极管、MES 场效应管、变容二极管、肖特基势垒管、PIN 管等，大多数具有集总参数等效电路。MESFET 的集总参数等效电路可参见图1-7。

微波管等效电路中各元件值都很小,有些参数值难于实验测量,也有些是由物理结构估算的,因此有一定误差。在微波频段中常常用测量的微波管的散射矩阵 S 参数来描述其特性。由于在不同工作电压、不同电流、不同频率时 S 参数都不一样,因此一个微波管需要测量很多不同工作点的 S 参数。利用下节将介绍的参数转换公式把 S 参数换算成 Y 参数,再增加一行和一列就可得到待定导纳矩阵。

§ 1.1.5 多端网络组合的待定导纳矩阵

一个网络的某几个节点可能与其它电路联接,这几个节点叫电路的端点。微波放大器、衰减器或一段传输线等都是四端网络,其中两个输入端点组成一个输入端口,另两个端点组成一个输出端口。因此四端网络又称为两端口网络或简称双口网络。定向耦合器、波导魔 T 等则是 8 端网络或 4 口网络。

复杂的电路网络往往由若干个多端网络组成。多端网络组合时,总电路矩阵可利用导纳叠加原理来构成。图 1-13 (a) 是两个网络连接的情况。 K 网络的 c 、 d 节点连接到 M 网络的 a 、 b 节点,则组合网络的 i 、 j 端点的矩阵元素是

$$y_{ij} = y_{ab} + y_{cd}$$

式中 y_{ab} —— M 网络 a 、 b 端点的矩阵元素;
 y_{cd} —— K 网络 c 、 d 端点的矩阵元素。

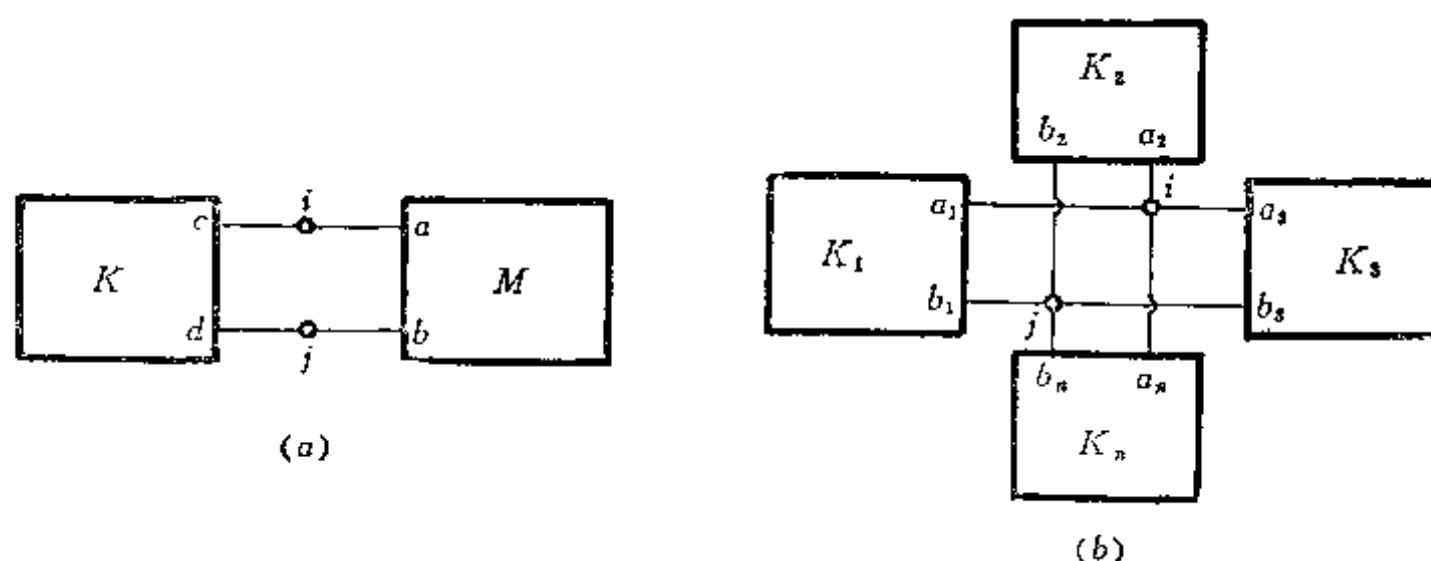


图1-13 多端网络组合

如果有 n 个网络同时连接在 i 、 j 两端点上,如图 1-13(b) 所示,则组合网络的 y_{ij} 为

$$y_{ij} = \sum_{m=1}^n y_{a_m b_m} \quad (1-39)$$

利用此叠加原理可以分析一般性的多端网络组合的导纳矩阵。图 1-14 给出两个多端网络 r 和 t 的相互连接结构。小圆圈所示编号为 r 和 t 网络的原有端点。组合后的网络有 4 个端点,其编号为 1、2、3、4。两个网络的待定导纳矩阵为已知。网络 r 是 3 端网络,其待定导纳矩阵为 3×3 矩阵;网络 t 是 5 端网络,其待定导纳矩阵为 5×5 矩阵。组合网络的待定导纳矩阵为 4×4 矩阵,第 4 端接地。

已知网络 r 和 t 的待定导纳矩阵为

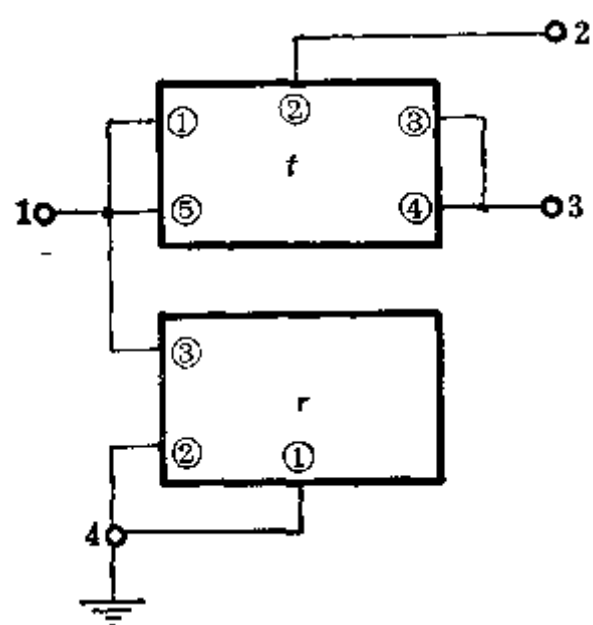


图1-14 两个任意网络互连

$$Y_f = \begin{bmatrix} y_{11f} & y_{12f} & y_{13f} \\ y_{21f} & y_{22f} & y_{23f} \\ y_{31f} & y_{32f} & y_{33f} \end{bmatrix}$$

$$Y_r = \begin{bmatrix} y_{11r} & y_{12r} & y_{13r} & y_{14r} & y_{15r} \\ y_{21r} & y_{22r} & y_{23r} & y_{24r} & y_{25r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{51r} & y_{52r} & y_{53r} & y_{54r} & y_{55r} \end{bmatrix}$$

组合电路网络共有 4 个端点，第 4 端接地之后，其确定导纳矩阵应为

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

根据叠加原理， Y_0 矩阵元素应该是

$$y_{11} = y_{11f} + y_{55r} + y_{33r}$$

$$y_{12} = y_{12f} + y_{52r}$$

余类推。最后得出组合网络的导纳矩阵是

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{11f} + y_{55r} + y_{33r} & y_{12f} + y_{52r} & y_{13f} + y_{14r} + y_{53r} + y_{34r} \\ y_{21f} + y_{25r} & y_{22r} & y_{23r} + y_{24r} \\ y_{31f} + y_{35r} + y_{41r} + y_{45r} & y_{32r} + y_{42r} & y_{33r} + y_{44r} \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

现在用微波放大器为例说明组合网络的待定导纳矩阵建立方法和规则。

给定微带电路形式的场效应晶体管放大器如图 1-15 (a) 所示。微波场效应管等效电路包含十几个以上的元件，但是在实际电路中仅有 4 个端点与外部电路连接，因此只需知道此

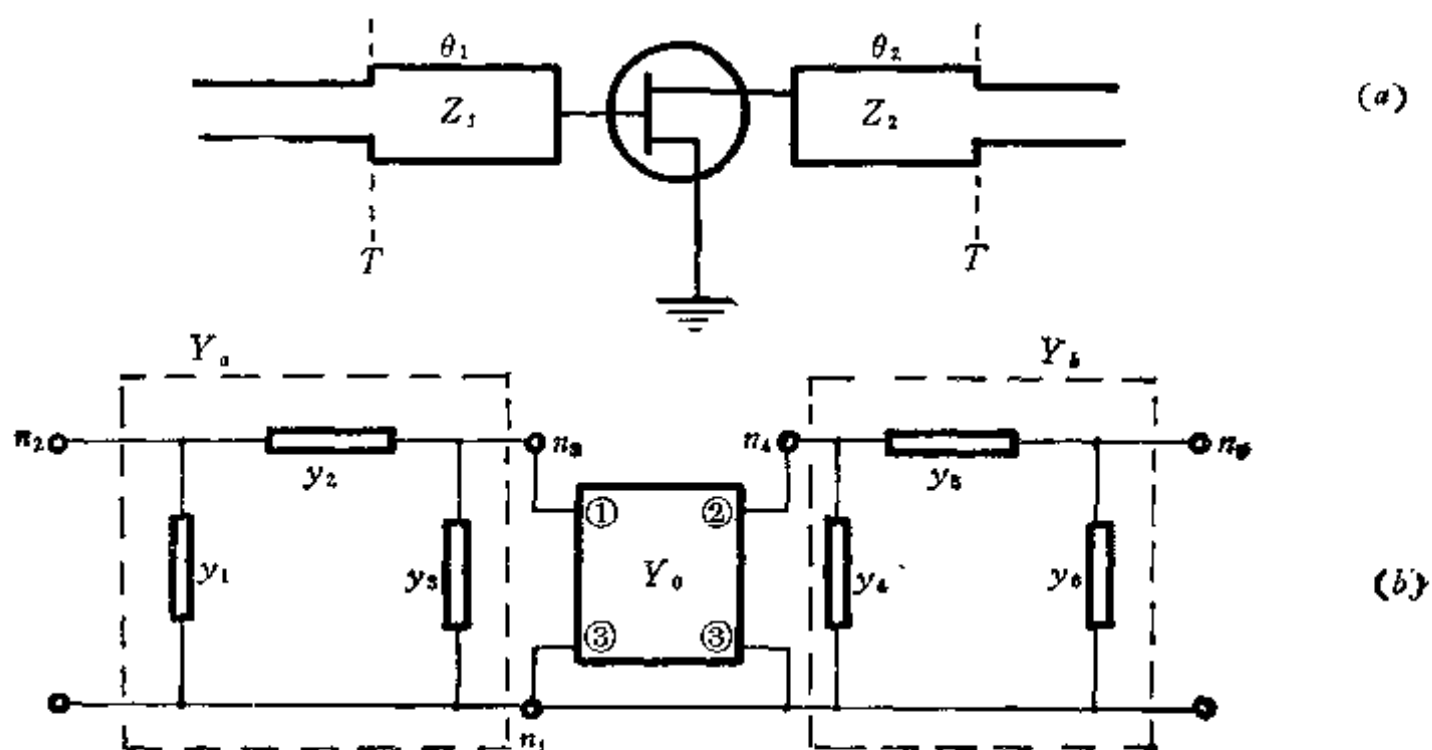


图1-15 微带电路放大器

4 端网络的导纳参数即可。如果已测得该场效应管的 S 参数, 即可换算成 Y 参数。图中放大器输入及输出匹配电路是用传输线段构成的阻抗变换器, 在 T_1 和 T_2 面之间的等效电路如图 1-15 (b) 所示。

放大器输入及输出匹配线段用 π 形等效电路, 待定导纳矩阵分别为 Y_a 和 Y_b :

$$Y_a = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} & Y_{13a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} & Y_{23a} \\ Y_{31a} & Y_{32a} & Y_{33a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_3 & -y_1 & -y_3 \\ -y_1 & y_1 + y_2 & -y_2 \\ -y_3 & -y_2 & y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$Y_b = \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} & Y_{13b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} & Y_{23b} \\ Y_{31b} & Y_{32b} & Y_{33b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 + y_6 & -y_4 & -y_6 \\ -y_4 & y_4 + y_5 & -y_5 \\ -y_6 & -y_5 & y_5 + y_6 \end{bmatrix}$$

式中

$$y_1 = y_3 = j \frac{1}{Z_1} \operatorname{tg}(\theta_1/2)$$

$$y_2 = -j \frac{1}{Z_1} \operatorname{csc} \theta_1$$

$$y_4 = y_6 = j \frac{1}{Z_2} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$y_5 = -j \frac{1}{Z_2} \operatorname{csc} \theta_2$$

场效应管的待定导纳矩阵是

$$Y_0 = \begin{bmatrix} Y_{110} & Y_{120} & Y_{130} \\ Y_{210} & Y_{220} & Y_{230} \\ Y_{310} & Y_{320} & Y_{330} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -y_{11} - y_{12} \\ y_{21} & y_{22} & -y_{21} - y_{22} \\ -y_{11} - y_{21} & -y_{12} - y_{22} & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix}$$

等效电路图 1-15 (b) 中的小圆圈编号为 3 个矩阵的节点号; 整个放大器重新编定的节点号为 $n_1 \sim n_5$ 。

按多端网络互联方法, 得出放大器的待定导纳矩阵是

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11a} + Y_{330} + Y_{11b} & Y_{12a} & Y_{13a} + Y_{310} & Y_{12b} + Y_{320} & Y_{13b} \\ Y_{21a} & Y_{22a} & Y_{23a} & 0 & 0 \\ Y_{31a} + Y_{130} & Y_{32a} & Y_{33a} + Y_{110} & Y_{120} & 0 \\ Y_{230} + Y_{21b} & 0 & Y_{210} & Y_{22b} + Y_{220} & Y_{23b} \\ Y_{31b} & 0 & 0 & Y_{32b} & Y_{33b} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 + y_3 + y_4 + y_6 + Y_{330} & -y_1 & -y_3 + Y_{310} & -y_4 + Y_{320} & -y_6 \\ -y_1 & y_1 + y_2 & -y_2 & 0 & 0 \\ -y_3 + Y_{130} & -y_2 & y_2 + y_3 + Y_{110} & Y_{120} & 0 \\ -y_4 + Y_{230} & 0 & Y_{210} & y_4 + y_5 + Y_{220} & -y_5 \\ -y_6 & 0 & 0 & -y_5 & y_5 + y_6 \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

式 (1-43) 用向量形式表示为

$$YU = I$$

只要导纳矩阵 Y 非奇异, 就可以求得逆矩阵

$$Z = Y^{-1}$$

故可得

$$U = Y^{-1}I = ZI \quad (1-44)$$

如果仅有 j 和 k 两个节点是外端点, 那么外电流也只有 i_j 和 i_k 两项, 于是节点方程 (1-44) 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \cdots Z_{2, n-1} & Z_{2n} \\ Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \cdots Z_{3, n-1} & Z_{3n} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \cdots Z_{4, n-1} & Z_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{j2} & Z_{j3} & Z_{j4} \cdots Z_{j, n-1} & Z_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{k2} & Z_{k3} & Z_{k4} \cdots Z_{k, n-1} & Z_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n-1, 2} & Z_{n-1, 3} & Z_{n-1, 4} \cdots Z_{n-1, n-1} & Z_{n-1, n} \\ Z_{n2} & Z_{n3} & Z_{n4} \cdots Z_{n, n-1} & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于电流向量只有两个元素, 其余各项电流皆为零, 因此节点方程直接简化成为双口网络方程

$$\begin{pmatrix} u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{jj} & Z_{jk} \\ Z_{kj} & Z_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_j \\ i_k \end{pmatrix} \quad (1-45)$$

解方程 (1-45), 即可得到所需两个端点的电压和电流。

由导纳矩阵求阻抗矩阵可用下面的逆矩阵子程序 MINVRT。

求逆矩阵子程序

程序说明:

(1) 基本原理

有 $(n \times n)$ 阶方阵 $[A]$ 和 $(n \times n)$ 阶单位矩阵 $[1]$ 构成增广矩阵 $[A \ 1]$ 。如果用逆矩阵 $[A^{-1}]$ 乘此矩阵, 则得

$$[A^{-1}][A \ 1] = [A^{-1}A \ A^{-1}1] = [1 \ Z]$$

增广矩阵中的右半个矩阵 $[Z]$ 就是 $[A]$ 的逆矩阵。因此只要对 $[A \ 1]$ 施以初等变换, 进行消元, 使 $[A \ 1]$ 变换成为 $[1 \ Z]$, 即可得逆矩阵 $[Z]$ 。

(2) 程序性能

1. 程序用高斯-约当法按列选主元消元;
2. 程序为复数矩阵求逆;
3. 语句 5~10 句是排列工作矩阵 $[C]$, $[C]$ 是增广矩阵; 12~18 句是按列选主元; 19 句

是判敛，当最大主元小于 $EPS = 10^{-10}$ 时，认为此矩阵无逆矩阵；20~25句是更换主元。把主元所在行换到上面；26~27句是迭代消元；38~42是取出逆矩阵[Z]。

(3) 变量符号

A (N, N) —— N × N 阶原矩阵；

Z (N, N) —— N × N 阶逆矩阵；

C (N, N) —— N × 2N 阶工作矩阵；

M = N + N；

EPS —— 判断矩阵奇异性的判断量，可选 $EPS = 1.0E-10$ ；

KEY —— 当矩阵有逆时 KEY = 1，矩阵奇异无逆矩阵时 KEY = 0。

```

1      SUBROUTINE MINVRT (A, Z, N, M, EPS, KEY)
2      DIMENSION A (N, N), Z (N, N), C (N, M)
3      COMPLEX A, Z, C, CL
4      KEY = 0
5      DO 10 J = 1, N
6      DO 10 I = 1, N
7      10 C (I, J) = A (I, J)
8      DO 20 J = 1, N
9      DO 20 I = 1, N
10     20 C (I, J + N) = (I/J) * (I/I)
11     DO 130 IP = 1, N
12     IM = IP
13     IST = IP + 1
14     IF (IP * GE * N) GOTO 50
15     DO 40 I = IST, N
16     IF (CABS (C (IM, IP)) * GE * CABS (C (I, IP))) GOTO 40
17     IM = I
18     40 CONTINUE
19     50 IF (CABS (C (IM, IP)) * LT * EPS) GOTO 150
20     IF (IM * EQ * IP) GOTO 90
21     DO 80 J = IP, M
22     CL = C (IP, J)
23     C (IP, J) = C (IM, J)
24     80 C (IM, J) = CL
25     90 CL = C (IP, IP)
26     C (IP, IP) = (1.0, 0.0)
27     DO 100 J = IST, M
28     100 C (IP, J) = C (IP, J) / CL
29     DO 120 I = 1, N
30     IF (I * EQ * IP) GOTO 120
31     IP1 = IP + 1
32     CL = C (I, IP)
33     C (I, IP) = (0.0, 0.0)
34     DO 110 J = IP1, M
```

```

35  110  C (I, J) = C (I, J) - CL * C (IP, J)
36  120  CONTINUE
37  130  CONTINUE
38      N1 = N + 1
39      DO  140  I = 1, N
40      DO  140  J = N1,  M
41      K = J - N
42  140  Z (I, K) = C (I, J)
43      KEY = 1
44  150  RETURN
45      END

```

(二) 消元法

上述矩阵法的必要条件是导纳矩阵非奇异，否则无逆矩阵。此外，大型矩阵求逆矩阵很耗费机时，且占用较多的存储单元。比如，用上面给出的求逆矩阵程序至少需要 $2N^2$ 个存储单元，对于 $N=50$ 的复数矩阵，用单精度运算时也需要 $2 \times (50)^2 \times 8 = 40K$ 字节，这就要占去微型机的相当多内存量。如果采用消元法，则可节省一半存储单元。

消元法的第1步是把导纳矩阵重新排列，把有用的外端点 j 和 k 所在行和列置换到矩阵右下角。原有节点方程具有式 (1-46) 的形式，按式中箭头方向移动虚线框的两行两列。经过行和列的次序置换，得到式 (1-47)。

$$\left. \begin{array}{l}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 & & & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 y_{22}u_2 + y_{23}u_3 \cdots & + y_{2j}u_j & \cdots & + y_{2k}u_k & \cdots + y_{2n}u_n = 0 \\
 y_{32}u_2 + y_{33}u_3 \cdots & + y_{3j}u_j & \cdots & + y_{3k}u_k & \cdots + y_{3n}u_n = 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 y_{j2}u_2 + y_{j3}u_3 \cdots & + y_{jj}u_j & \cdots & + y_{jk}u_k & \cdots + y_{jn}u_n = i_j \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 y_{k2}u_2 + y_{k3}u_3 \cdots & + y_{kj}u_j & \cdots & + y_{kk}u_k & \cdots + y_{kn}u_n = i_k \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 y_{n2}u_2 + y_{n3}u_3 \cdots & + y_{nj}u_j & \cdots & + y_{nk}u_k & \cdots + y_{nn}u_n = 0
 \end{array}
 \end{array} \right\} \quad (1-46)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 y_{22}u_2 + y_{23}u_3 \cdots + y_{2j}u_j + y_{2k}u_k = 0 \\
 y_{32}u_2 + y_{33}u_3 \cdots + y_{3j}u_j + y_{3k}u_k = 0 \\
 \cdots \\
 y_{j2}u_2 + y_{j3}u_3 \cdots + y_{jj}u_j + y_{jk}u_k = i_j \\
 y_{k2}u_2 + y_{k3}u_3 \cdots + y_{kj}u_j + y_{kk}u_k = i_k
 \end{array} \right\} \quad (1-47)$$

在一般情况下，已经给定某两个节点是输入和输出端点。在给节点编号时，把这两个节点编为最大号，就可以省去行列交换步骤。

经过行列置换, j 和 K 两端点的电压、电流及导纳都已处在方程组的右下角。

消元法的第 2 步是矩阵消元。对方程组的增广矩阵, 消元过程要进行到接近于三角矩阵, 但是必须保留右下角有用的 4 项导纳和 2 项电流。消元后的增广矩阵见式 (1-48)。消去内部节点的消元法可用后面给出的子程序 CTHE。

$$\begin{pmatrix} 1 & y'_{23} & y'_{24} & \cdots & \cdots & \cdots & y'_{2k} & 0 \\ 0 & 1 & y'_{34} & \cdots & \cdots & \cdots & y'_{3k} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & y'_{nk} & y'_{nk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y'_{jk} & y'_{jk} & i'_j \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y'_{kk} & y'_{kk} & i'_k \end{pmatrix} \quad (1-48)$$

由式 (1-48) 得到双口网络方程

$$\begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{1k} \\ y'_{k1} & y'_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_k \end{pmatrix} \quad (1-49)$$

上述运算过程就是电路网络的内部节点消除过程。把最后得到的双口网络方程写成一般形式为

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2 \\ i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2 \end{cases} \quad (1-50)$$

相应的电路如图 1-17 所示。图中 E 是外加电源, Z_g 是信源阻抗, Z_l 是外加负载。

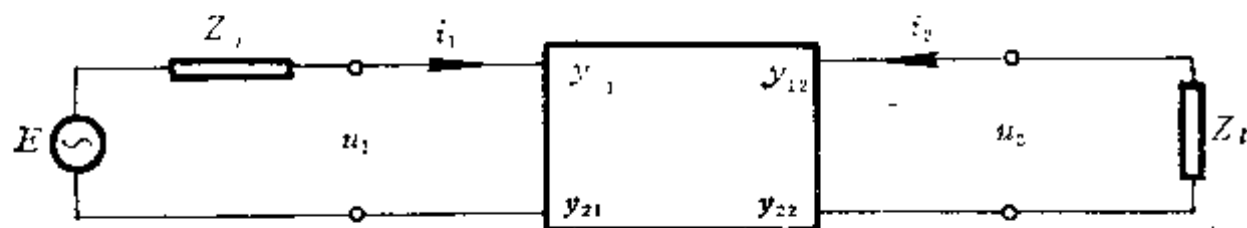


图 1-17 双口电路

根据式 (1-50) 和图 1-17 可以求出电路的二次参数:

1. 电压传输系数

$$T = \frac{u_2}{E} = \frac{-y_{21}G_g}{(y_{11} + G_g)(y_{22} + G_l) - y_{12}y_{21}} \quad (1-51)$$

式中 $G_g = 1/Z_g$, $G_l = 1/Z_l$

2. 额定功率增益

$$G_p = \frac{4G_l}{G_g} |T|^2 \quad (1-52)$$

3. 传输衰减

$$L_{(dB)} = -10 \lg \left(\frac{4G_l}{G_g} |T|^2 \right) \quad (1-53)$$

4. 输入导纳

1. 信源端口输入导纳

$$Y_{in_1} = \frac{i_1}{u_1} = \frac{y_{11}u_1 + y_{12}u_2 + \cdots + y_{1n}u_n}{u_1} \quad (1-60)$$

2. 由信源口到各口的电压传输系数

$$T_k = \frac{u_k}{I/G_s} = \frac{u_k G_s}{(G_s u_1 + y_{k1}u_1 + y_{k2}u_2 + \cdots + y_{kn}u_n)} \quad (k=2, 3, \cdots, n) \quad (1-61)$$

若在第 m 口加电流源, 其它各口加负载, 在求得各电压之后即可得 m 口的输入导纳

$$Y_{in_m} = \frac{i_m}{u_m} = \frac{y_{m1}u_1 + y_{m2}u_2 + \cdots + y_{mn}u_n}{u_m} \quad (1-62)$$

第 m 口到各口的电压传输系数

$$T_k = \frac{u_k}{I/G_m} = \frac{u_k}{(G_m u_m + y_{m1}u_1 + \cdots + y_{mn}u_n)/G_m} \quad (k=2, 3, \cdots, n; k \neq m) \quad (1-63)$$

消去网络内部节点的子程序 CTHE

程序说明:

(1) 用本程序可对节点导纳方程消元, 求出双口导纳矩阵。

(2) 符号含义

A——确定导纳矩阵;

N——矩阵 A 的阶数;

NY——消去内部节点后的双口导纳矩阵;

KET——判断代码, KET = 1 时是运算正常结束, KET = 0 时是不能消去内节点, 异常返回。

(3) 语句顺序及功能

第 9~15 句是按列选主元; 17~20 句是行交换; 第 21 句是收敛性判断; 22~28 句是消元; 29~32 句是把消元后得到的双口矩阵参数存入数组 NY。

```

1      SUBROUTINE CTHE (A, N, NY, KET)
2      COMPLEX A (N, N), NY (2, 2), T
3      KET = 1
4      N1 = N - 1
5      N2 = N - 2
6      DO 100 I = 1, N2
7      II = I + 1
8      IF (I .EQ. N2) GOTO 27
9      AMAX = CABS (A (I, I))
10     JM = I
11     DO 20 J = II, N2
12     IF (AMAX .GT. CABS (A (J, I))) GOTO 20
13     AMAX = CABS (A (J, I))

```

```

14      JM = J
15      20 CONTINUE
16      IF (JM .EQ. I) GOTO 27
17      DO 23 J = I, N
18      T = A (JM, J)
19      A (JM, J) = A (I, J)
20      23 A (I, J) = T
21      27 IF (CABS (A (I, I)) .LE. 1.0E-30) GOTO 500
22      DO 30 J = II, N
23      30 A (I, J) = A (I, J) / A (I, I)
24      DO 50 J = II, N
25      DO 50 K = II, N
26      A (J, K) = A (J, K) - A (J, I) * A (I, K)
27      50 CONTINUE
28      100 CONTINUE
29      NY (1, 1) = A (N1, N1)
30      NY (1, 2) = A (N1, N)
31      NY (2, 1) = A (N, N1)
32      NY (2, 2) = A (N, N)
33      RETURN
34      500 KEY = 0
35      RETURN
36      END

```

§ 1.2 双口网络矩阵分析

实际的微波电路大多属于双口网络的树形结构。各种微波电路元、器件，例如传输线段、放大器、衰减器、匹配器、阻抗变换器、滤波器等都可以看成双口网络。这些单元双口网络再按一定规律串联、并联或级联，最后构成完整的微波电路。因此，用双口网络参数对微波电路进行运算分析就比较方便。此外，微波电路多数是级联结构，所以各种双口网络参数中又以转移矩阵 A 或传输矩阵 T 最适合。

依据单元网络不同的连接方式，微波电路的结构可归类为以下几种。

§ 1.2.1 多级级联

若有 n 个转移矩阵级联，如图 1-19 所示，则总电路矩阵 A 为各单级矩阵的连乘。

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \cdots \cdot A_n \quad (1-64)$$

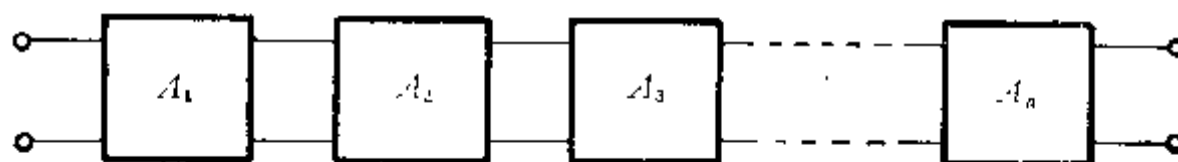


图1-19 双口矩阵多级级联

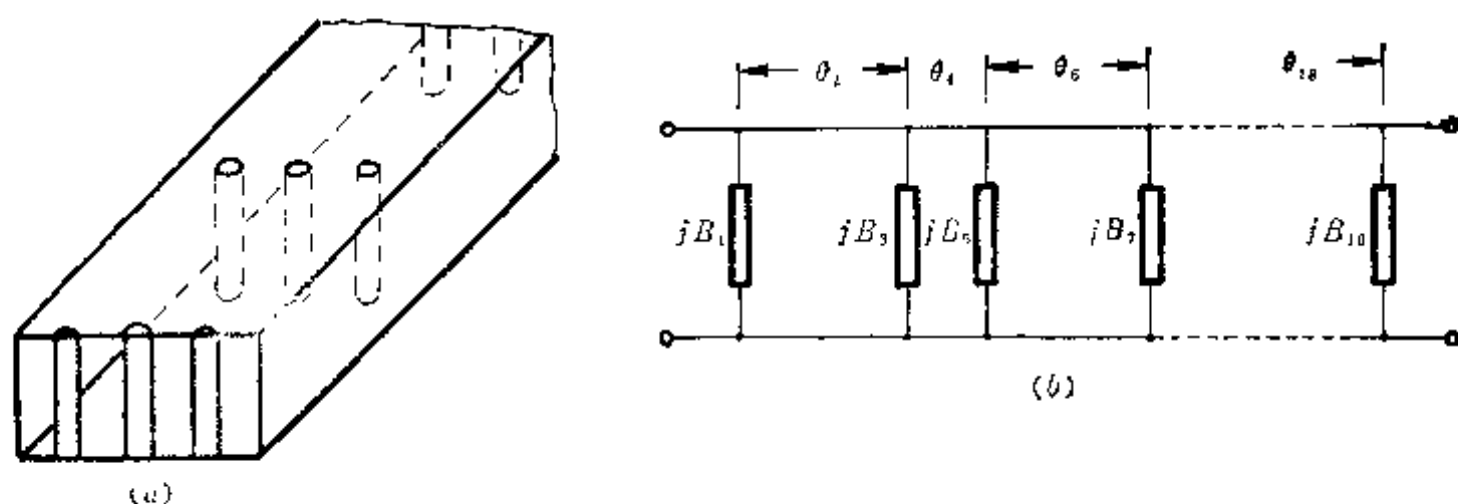


图1-20 波导带通滤波器
(a) 滤波器结构; (b) 等效电路

典型的多级级联电路是波导带通滤波器，见图 1-20。滤波器是并联电纳耦合式，谐振腔之间用 $\lambda/4$ 耦合线段，并联电纳由三根一排的电感销钉构成。每个谐振腔包括两个电纳和一段传输线，如果滤波器是 5 腔式，则总共有 10 个感性电纳和 9 段传输线，共计 19 个单元矩阵。

并联电纳单元矩阵是

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB_k & 1 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 3, 5, \dots, 19) \quad (1-65)$$

销钉电纳是

$$B = \frac{4(n+1)\lambda_g}{a \left\{ \ln \left| 8 \left(\frac{\text{sh}^{(n+1)} \pi r}{a} \right) \cdot \left(\sin \frac{(n+1)\pi r}{a} \right) \cdot \left(\text{ch} \frac{2(n+1)\pi r}{a\sqrt{2}} - \cos \frac{2(n+1)\pi r}{a\sqrt{2}} \right) \right| - 7.6(n+1) \frac{r}{a} - \frac{1 + 2(a/\lambda)^2}{(n+1)^2} \right\}} \quad (1-66)$$

式中 n 为每 1 排的销钉数， a 为波导宽边长， r 为销钉半径， λ_g 为波导波长。

传输线单元的矩阵是

$$A_m = \begin{bmatrix} \cos \theta_m & j \sin \theta_m \\ j \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{bmatrix} \quad (m = 2, 4, 6, \dots, 18) \quad (1-67)$$

整个滤波器矩阵是

$$A = \prod_{i=1}^{19} A_i \quad (1-68)$$

用计算机进行双口 A 矩阵的循环连乘，可以迅速算出滤波器总矩阵。

多级双口矩阵相乘子程序

程序说明：

- (1) 本程序为复数矩阵相乘。
- (2) 多个矩阵联乘之后存入数组 $A(1, J, K)$ 。
- (3) 变量 N 是单元双口矩阵数； $A0(N, 2, 2)$ 是存储 N 个单元矩阵的数组。

```

1      SUBROUTINE PRODM (A0, N, A)
2      COMPLEX A (2, 2, 2) , A0 (N, 2, 2)
3      DO 10 I=1, 2
4      DO 10 J=1, 2
5      10 A (1, I, J) = A0 (1, I, J)
6      DO 20 I=2, N
7      DO 30 J=1, 2
8      DO 30 K=1, 2
9      A (2, J, K) = (0.0, 0.0)
10     DO 30 L=1, 2
11     30 A (2, J, K) = A (1, J, L) * A0 (I, L, K) + A (2, J, K)
12     DO 40 J=1, 2
13     DO 40 K=1, 2
14     40 A (1, J, K) = A (2, J, K)
15     20 CONTINUE
16     RETURN
17     END

```

§1.2.2 并联分支链

N 个双口矩阵的矩阵链并联在电路中, 如图 1-21 (a) 所示。对于此种电路, 应先求出矩阵链的级联矩阵 A_0 。

$$A_0 = \prod_{i=1}^n A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1-69)$$

由 A_0 求出矩阵链的输入导纳 Y_{in}

$$Y_{in} = \frac{a_{21}Z_l + a_{22}}{a_{11}Z_l + a_{12}} \quad (1-70)$$

矩阵链等效于在电路中并联一个导纳 Y_{in} , 如图 1-21 (b) 所示。

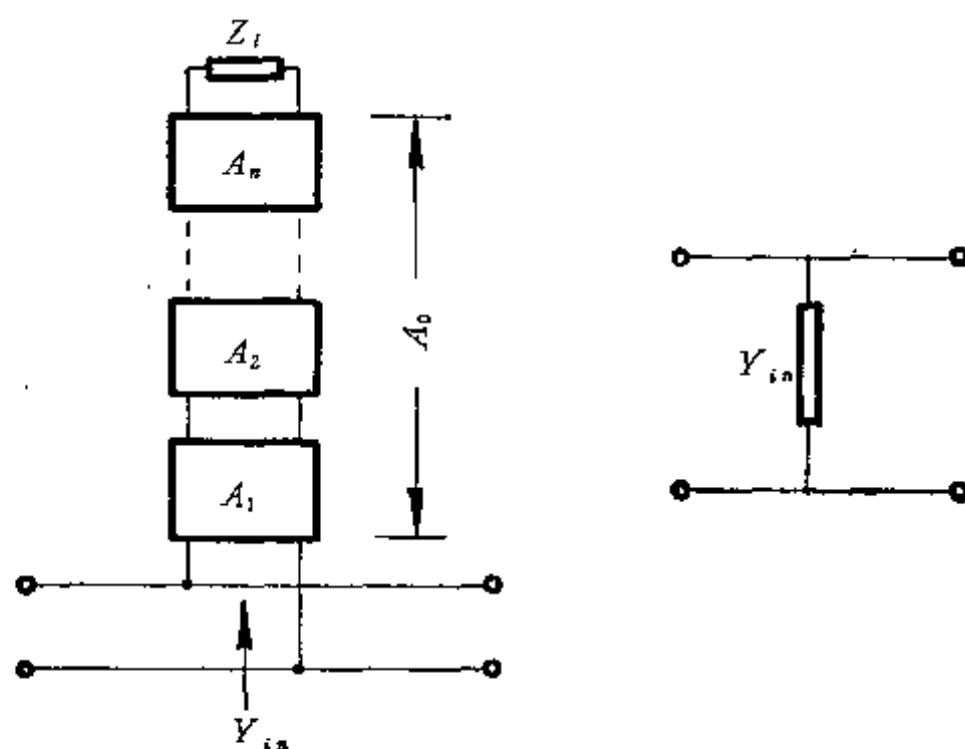


图1-21 并联分支链

并联分支链的转移矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_{in} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-71)$$

含有并联分支链的电路很多，微波晶体管放大器就是一例。放大器微带电路示意图见图 1-22 (a)。4 段微带线（特性阻抗分别是 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 、 Z_4 ）构成输入和输出匹配电路，另外的两对微带线（ Z_a 、 Z_b ）构成偏压引入电路。当放大器频带较宽时，偏置电路的影响必须考虑。放大器等效矩阵电路见图 1-22 (b)。偏压电路就是主线上的并联分支矩阵链，其矩阵方程可做如下分析。

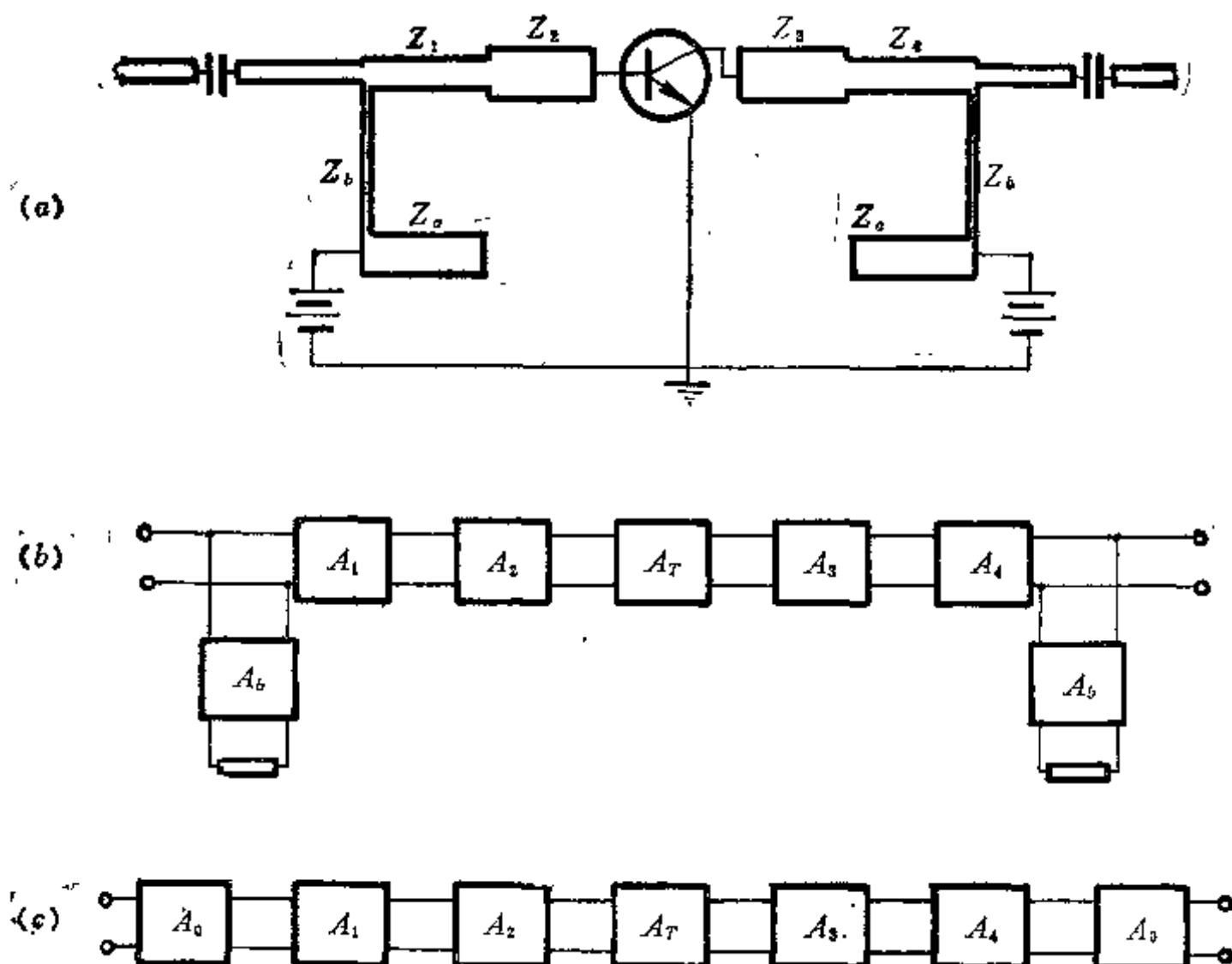


图1-22 微带晶放示意图

Z_b 线段的矩阵是

$$A_b = \begin{pmatrix} \cos\theta_b & jZ_b \sin\theta_b \\ j\frac{1}{Z_b} \sin\theta_b & \cos\theta_b \end{pmatrix}$$

Z_a 线段是终端开路线，它的输入阻抗是

$$Z_{in_a} = -jZ_a \operatorname{ctg}\theta_a$$

Z_{in_a} 就是矩阵 A_b 的负载，因此，用公式 (1-70) 算得偏压电路的输入导纳 Y_{in} 为

$$Y_{in} = j \frac{(Z_a/Z_b) \sin\theta_b \operatorname{ctg}\theta_a + \cos\theta_b}{Z_a \cos\theta_b \operatorname{ctg}\theta_a - Z_b \sin\theta_b} \quad (1-72)$$

偏压电路的规一化矩阵 A_0 是

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_{i_n}/Y_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-73)$$

式中 Y_{i_n}/Y_0 是对标准传输线 (50 欧系统) 的归一化导纳。

匹配电路的 4 段线的归一化矩阵是

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & j\frac{Z_i}{Z_0}\sin\theta_i \\ j\frac{Z_0}{Z_i}\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (1-74)$$

晶体管的矩阵 A_T 可以由测量所得的 s 参数用下述公式 (1-75) 换算得出:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2s_{21}}(1 + s_{11} - s_{22} - \Delta s) \\ a_{12} &= \frac{1}{2s_{21}}(1 + s_{11} + s_{22} + \Delta s) \\ a_{21} &= -\frac{1}{2s_{21}}(1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s) \\ a_{22} &= \frac{1}{2s_{21}}(1 - s_{11} + s_{22} - \Delta s) \\ \Delta s &= s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \end{aligned} \right\} \quad (1-75)$$

最后, 把图 1-22 (c) 的各矩阵联乘即可得整个放大器的 A 矩阵

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_T \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_0$$

§ 1.2.3 串联分支链

串联分支链见图 1-23。 Z_i 是分支链的负载阻抗。分析此类电路, 应先求出分支的矩阵 A_i , 再求分支链的输入阻抗 Z_{i_n}

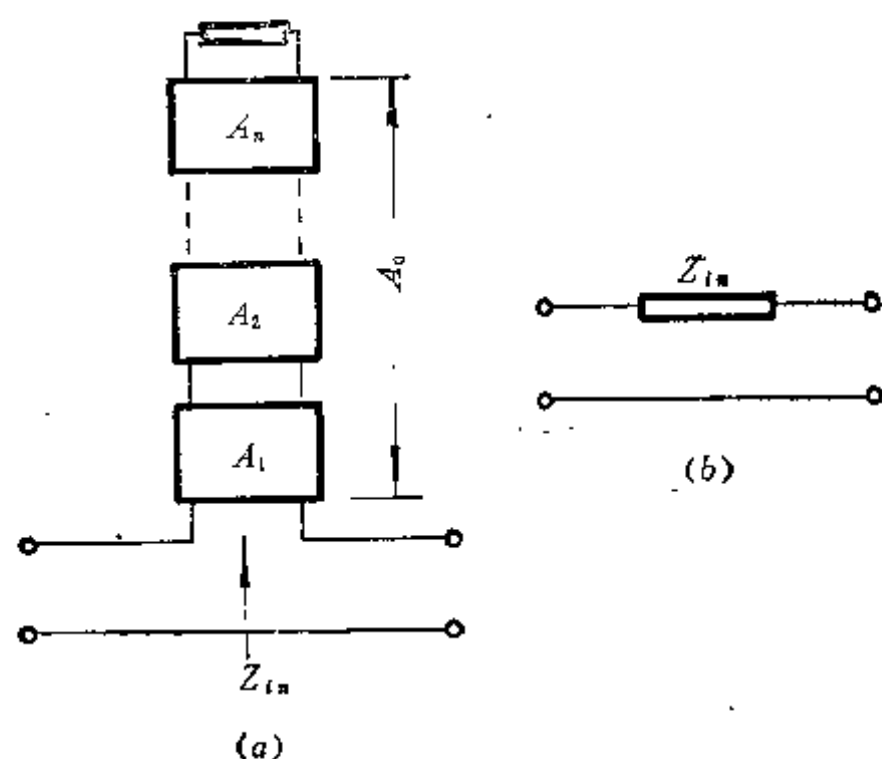


图 1-23 串联分支链

$$Z_{i_n} = \frac{a_{11}Z_i + a_{12}}{a_{21}Z_i + a_{22}} \quad (1-76)$$

式中 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{21} 、 a_{22} 是 A_0 的 4 个元素。最后可得电路 (图 1-35 (b)) 的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & Z_{i_n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-77)$$

波导 E 面 T 形接头和互补滤波器都属于串联分支。

§ 1.2.4 矩阵链并联

矩阵链并联见图 1-24。对于此类电路应先求出每个矩阵链的级联矩阵 A_0 和 A_1 , 然后再用公式 (1-78) 把 A_0 和 A_1

换算成导纳矩阵 Y_a 和 Y_b :

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{12}} \\ y_{12} &= \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{12}} \\ y_{21} &= \frac{-1}{a_{12}} \\ y_{22} &= \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (1-78)$$

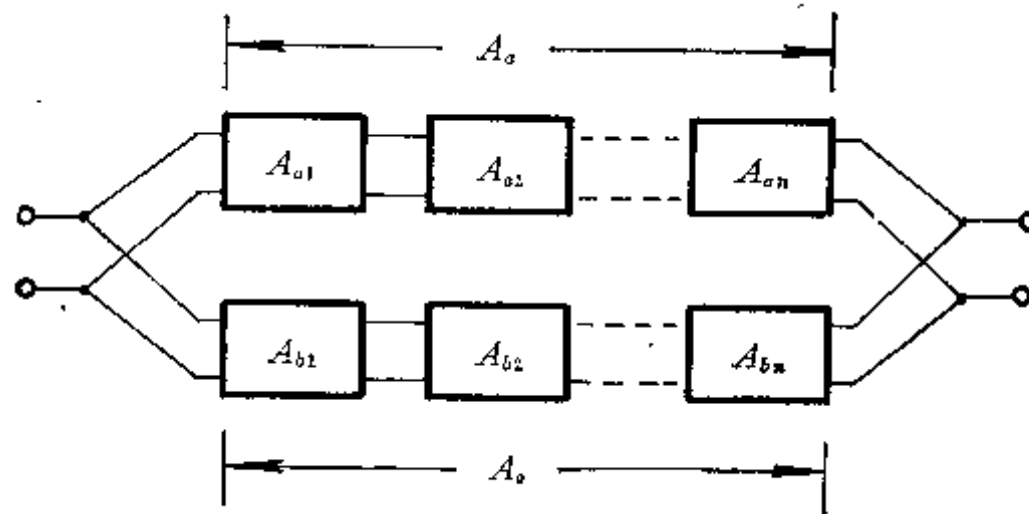


图1-24 矩阵链并联

全电路导纳矩阵是

$$Y = Y_a + Y_b$$

最后, 再用式 (1-79) 把导纳矩阵换算成转移矩阵:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{-y_{22}}{y_{21}} \\ a_{12} &= \frac{-1}{y_{21}} \\ a_{21} &= \frac{y_{12}y_{21} - y_{11}y_{22}}{y_{21}} \\ a_{22} &= \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (1-79)$$

晶体管放大器的反馈阻抗支路就是与晶体管矩阵相并联的, 见图1-25 (a)、(b)。

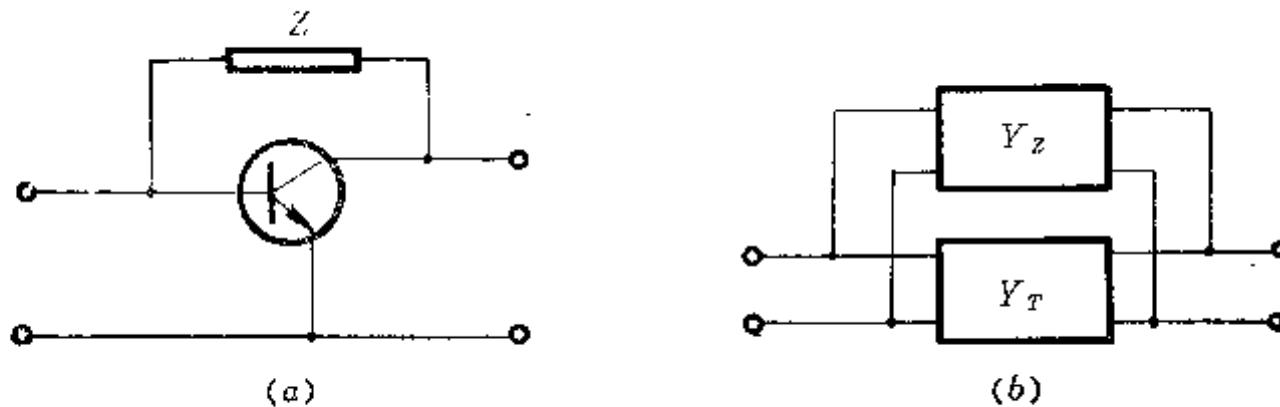


图1-25 并联反馈晶放

晶体管的导纳矩阵 Y_T 可由已测得的 S 参数换算得出:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{1 - s_{11} + s_{22} - \Delta S}{1 + s_{11} + s_{22} + \Delta S} \\ y_{12} &= \frac{-2s_{12}}{1 + s_{11} + s_{22} + \Delta S} \\ y_{21} &= \frac{-2s_{21}}{1 + s_{11} + s_{22} + \Delta S} \\ y_{22} &= \frac{1 + s_{11} - s_{22} - \Delta S}{1 + s_{11} + s_{22} + \Delta S} \end{aligned} \right\} \quad (1-80)$$

$$\Delta S = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}$$

串联阻抗的规一化导纳矩阵是

$$Y_Z = \begin{bmatrix} \frac{Z_0}{Z} & -\frac{Z_0}{Z} \\ -\frac{Z_0}{Z} & \frac{Z_0}{Z} \end{bmatrix} \quad (1-81)$$

电路的导纳矩阵是

$$Y = Y_T + Y_Z$$

最后再反换算成转移矩阵。

§ 1.2.5 矩阵链串联

矩阵链串联见图 1-26, 此时应先求出每个矩阵链的矩阵 A_a 和 A_b , 然后再把 A_a 和 A_b 转换成阻抗矩阵 Z_a 和 Z_b 。元素变换关系是

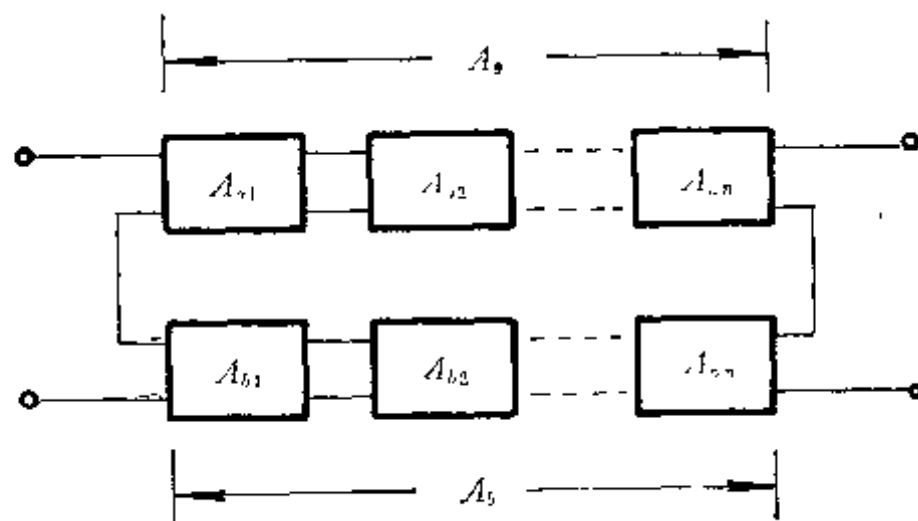


图1-26 矩阵链串联

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{a_{11}}{a_{21}} \\ z_{12} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{21}} \\ z_{21} &= \frac{1}{a_{21}} \\ z_{22} &= -\frac{a_{22}}{a_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (1-82)$$

当晶体管放大器带有串联反馈阻抗时见图 (1-27)，先用式 (1-83) 把晶体管 s 参数换算成阻抗矩阵参数。

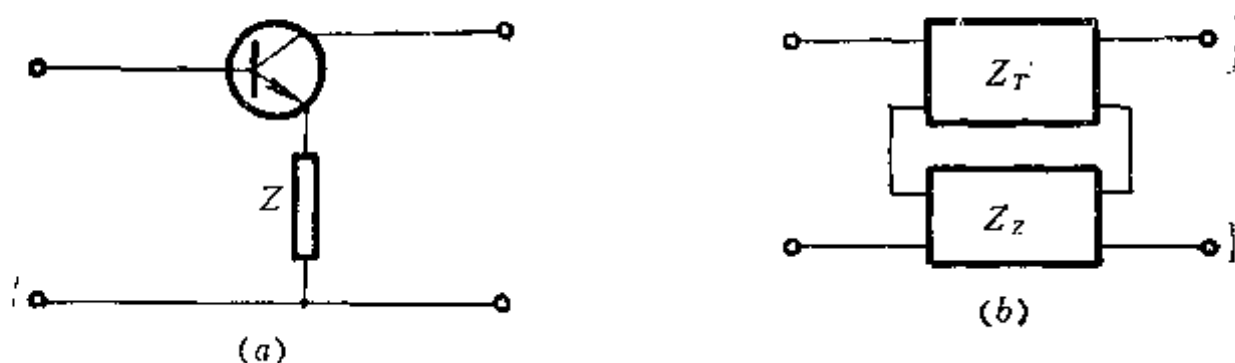


图1-27 串联反馈晶放

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{1 + s_{11} - s_{22} - \Delta s}{1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s} \\ z_{12} &= \frac{2s_{12}}{1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s} \\ z_{21} &= \frac{2s_{21}}{1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s} \\ z_{22} &= \frac{1 - s_{11} + s_{22} - \Delta s}{1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s} \\ \Delta s &= s_{11}s_{22} - s_{21}s_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1-83)$$

反馈阻抗的归一化矩阵是

$$Z_z = \begin{pmatrix} \frac{Z}{Z_0} & \frac{Z}{Z_0} \\ \frac{Z}{Z_0} & \frac{Z}{Z_0} \end{pmatrix} \quad (1-84)$$

电路总阻抗矩阵是

$$Z = Z_T + Z_z$$

§ 1.2.6 矩阵的串并联与并串联

有两个矩阵，在输入端串联，在输出端并联，此时需要先把矩阵参数换算为混合矩阵 H ，然后再相加，见图1-28 (a)。总电路的混合矩阵是

$$H = H_1 + H_2 \quad (1-85)$$

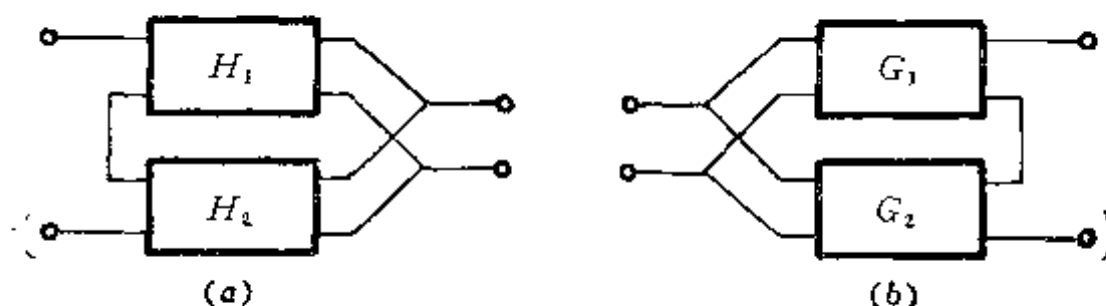


图1-28 矩阵的串并联与并串联

对于并串联电路（见图 1-28 (b)），则应先换算成逆混合矩阵 G ，相加后可得电路的 G 矩阵参数

$$G = G_1 + G_2 \quad (1-66)$$

然后再反换算成 A 参数。各种换算关系式详见下节。

§ 1.2.7 矩阵参数之间的变换关系

用双口矩阵法分析电路时采用的矩阵形式有：

阻抗矩阵—— Z ；	混合矩阵—— H ；
导纳矩阵—— Y ；	逆混合矩阵—— G ；
转移矩阵—— A ；	传输矩阵—— T ；
逆转移矩阵—— B ；	散射矩阵—— S 。

在上述几种矩阵参数中，一般以 T 或 A 矩阵做为基本运算矩阵。 S 矩阵参数是容易用实验法测量的参数，也是常用的一种。在编制通用程序时，最好是把 A 参数（或 T 参数）对其它各种参数的关系编成互换算子程序，以备运算时调用。

双口网络矩阵方程及电压电流方向的规定见表 1-1。几种最常用的基本电路单元的矩阵参数见表 1-2。表中大写英文字母代表非归一化参数，小写字母代表对标准阻抗 Z_0 （通常为 50 欧姆）的归一化参数。

各种双口矩阵参数之间的变换关系见下面各式。式中 Δ 表示行列式值，即

$$\Delta z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其余类推。

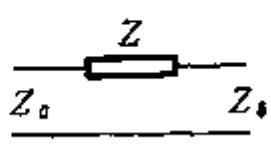
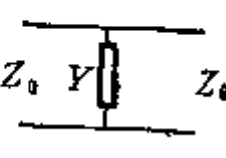
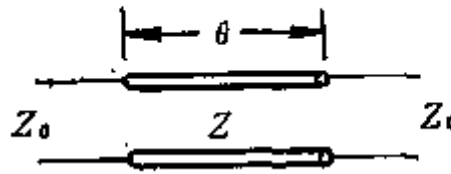
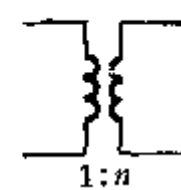
1. 阻抗矩阵

$$\begin{aligned} [Z] &= \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\Delta y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & \Delta a \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b_{21}} \begin{bmatrix} b_{22} & 1 \\ \Delta b & b_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \Delta h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \Delta g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s} \begin{bmatrix} 1 + s_{11} - s_{22} - \Delta s & 2s_{12} \\ 2s_{21} & 1 - s_{11} + s_{22} - \Delta s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

表1-1 各种矩阵方程

矩阵名称	矩阵图	矩阵方程	规范化方程
阻抗矩阵 Z		$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{U_1}{\sqrt{Z_0}} \\ \frac{U_2}{\sqrt{Z_0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_0} & \frac{Z_{12}}{Z_0} \\ \frac{Z_{21}}{Z_0} & \frac{Z_{22}}{Z_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \sqrt{Z_0} \\ I_2 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix}$
导纳矩阵 Y		$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{I_1}{\sqrt{Y_0}} \\ \frac{I_2}{\sqrt{Y_0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{11}}{Y_0} & \frac{Y_{12}}{Y_0} \\ \frac{Y_{21}}{Y_0} & \frac{Y_{22}}{Y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \sqrt{Y_0} \\ U_2 \sqrt{Y_0} \end{pmatrix}$
转移矩阵 A		$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{U_1}{\sqrt{Z_0}} \\ I_1 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{A_{12}}{Z_0} \\ A_{21} Z_0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U_2}{\sqrt{Z_0}} \\ -I_2 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix}$
逆转移矩阵 B		$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{U_2}{\sqrt{Z_0}} \\ I_2 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{B_{12}}{Z_0} \\ B_{21} Z_0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U_1}{\sqrt{Z_0}} \\ -I_1 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix}$
混合矩阵 H		$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{U_1}{\sqrt{Z_0}} \\ I_2 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{H_{11}}{Z_0} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} Z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \sqrt{Z_0} \\ \frac{U_2}{\sqrt{Z_0}} \end{pmatrix}$
逆混合矩阵 G		$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} I_1 \sqrt{Z_0} \\ \frac{U_2}{\sqrt{Z_0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} Z_0 & G_{12} \\ G_{21} & \frac{G_{22}}{Z_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U_1}{\sqrt{Z_0}} \\ I_2 \sqrt{Z_0} \end{pmatrix}$
传输矩阵 T			$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$
散射矩阵 S			$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

表1-2 基本电路单元矩阵

				
z		$\frac{1}{y_0} \quad \frac{1}{y_0}$ $\frac{1}{y_0} \quad \frac{1}{y_0}$ ($y_0 = Y/Y_0$)	$-jz_0 \operatorname{ctg} \theta$ $\frac{-jz_0}{\sin \theta}$ ($z_0 = Z/Z_0$)	$\frac{-jz_0}{\sin \theta}$ $-jz_0 \operatorname{ctg} \theta$
y	$\frac{1}{z_0} \quad \frac{-1}{z_0}$ $\frac{-1}{z_0} \quad \frac{1}{z_0}$ ($z_0 = Z/Z_0$)		$\frac{-j \operatorname{ctg} \theta}{z_0}$ $\frac{j}{z_0 \sin \theta}$	$\frac{j}{z_0 \sin \theta}$ $\frac{-j \operatorname{ctg} \theta}{z_0}$
a	$1 \quad z_0$ $0 \quad 1$	$1 \quad 0$ $y_0 \quad 1$	$\cos \theta$ $\frac{j \sin \theta}{z_0}$	$jz_0 \sin \theta$ $\cos \theta$
s	$\frac{z_0}{z_0 + 2} \quad \frac{2}{z_0 + 2}$ $\frac{2}{z_0 + 2} \quad \frac{z_0}{z_0 + 2}$	$\frac{-y_0}{y_0 + 2} \quad \frac{2}{y_0 + 2}$ $\frac{2}{y_0 + 2} \quad \frac{-y_0}{y_0 + 2}$	$\frac{j \frac{z_0^2 - 1}{z_0} \sin \theta}{2 \cos \theta + j \frac{z_0^2 + 1}{z_0} \sin \theta}$ $\frac{2}{2 \cos \theta + j \frac{z_0^2 + 1}{z_0} \sin \theta}$ $\frac{j \frac{z_0^2 - 1}{z_0} \sin \theta}{2 \cos \theta + j \frac{z_0^2 + 1}{z_0} \sin \theta}$ $\frac{2}{2 \cos \theta + j \frac{z_0^2 + 1}{z_0} \sin \theta}$	$\frac{1 - n^2}{1 + n^2} \quad \frac{2n}{1 + n^2}$ $\frac{2n}{1 + n^2} \quad \frac{1 - n^2}{1 + n^2}$
t	$\frac{2 + z_0}{2} \quad \frac{-z_0}{2}$ $\frac{z_0}{2} \quad \frac{2 - z_0}{2}$	$\frac{2 + y_0}{2} \quad \frac{-y_0}{2}$ $\frac{-y_0}{2} \quad \frac{2 - y_0}{2}$	$\cos \theta + j \frac{z_0^2 + 1}{2z_0} \sin \theta$ $j \frac{z_0^2 - 1}{2z_0} \sin \theta$	$j \frac{1 - z_0^2}{2z_0} \sin \theta$ $\cos \theta - j \frac{z_0^2 + 1}{2z_0} \sin \theta$
				$\frac{1 + n^2}{2n} \quad \frac{1 + n^2}{2n}$ $\frac{1 - n^2}{2n} \quad \frac{1 - n^2}{2n}$

$$= \frac{1}{t_{11} + t_{12} - t_{21} - t_{22}} \begin{bmatrix} t_{11} + t_{12} + t_{21} + t_{22} & 2\Delta t \\ 2 & t_{11} - t_{12} - t_{21} + t_{22} \end{bmatrix} \quad (1-87)$$

2. 导纳矩阵

$$\begin{aligned} [y] &= \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -\Delta a \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b_{12}} \begin{bmatrix} b_{11} & 1 \\ \Delta b & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta h \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \Delta g & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + s_{11} + s_{22} + \Delta s} \begin{bmatrix} 1 - s_{11} + s_{22} - \Delta s & -2s_{12} \\ -2s_{21} & 1 + s_{11} - s_{22} - \Delta s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{t_{11} - t_{12} + t_{21} - t_{22}} \begin{bmatrix} t_{11} - t_{12} - t_{21} + t_{22} & -2\Delta t \\ -2 & t_{11} + t_{12} + t_{21} + t_{22} \end{bmatrix} \quad (1-88) \end{aligned}$$

3. 转移矩阵

$$\begin{aligned} [a] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \Delta z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{y_{21}} \begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ \Delta y & y_{11} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\Delta b} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\Delta h & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} 1 & g_{22} \\ g_{11} & \Delta g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2s_{21}} \begin{bmatrix} 1+s_{11}-s_{22}-\Delta s & 1+s_{11}+s_{22}+\Delta s \\ 1-s_{11}-s_{22}+\Delta s & 1-s_{11}+s_{22}-\Delta s \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} t_{11}+t_{12}+t_{21}+t_{22} & t_{11}-t_{12}+t_{21}-t_{22} \\ t_{11}+t_{12}-t_{21}-t_{22} & t_{11}-t_{12}-t_{21}+t_{22} \end{bmatrix} \quad (1-89)
\end{aligned}$$

4. 散射矩阵

$$\begin{aligned}
[s] &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1+z_{11}+z_{12}+\Delta z} \begin{bmatrix} -1+z_{11}-z_{22}+\Delta z & 2z_{12} \\ 2z_{21} & -1-z_{11}+z_{22}+\Delta z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1+y_{11}+y_{12}+\Delta y} \begin{bmatrix} 1-y_{11}+y_{22}-\Delta y & -2y_{12} \\ -2y_{21} & 1+y_{11}-y_{22}-\Delta y \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}} \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22} & 2\Delta a \\ 2 & -a_{11}+a_{12}-a_{21}+a_{22} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{t_{11}} \begin{bmatrix} t_{21} & \Delta t \\ 1 & -t_{12} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1+h_{11}+h_{22}+\Delta h} \begin{bmatrix} -1+h_{11}-h_{22}+\Delta h & 2h_{12} \\ -2h_{21} & 1+h_{11}-h_{22}-\Delta h \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{1+g_{11}+g_{22}+\Delta g} \begin{bmatrix} 1-g_{11}+g_{22}-\Delta g & -2g_{12} \\ 2g_{21} & -1-g_{11}+g_{22}+\Delta g \end{bmatrix} \quad (1-90)
\end{aligned}$$

5. 传输矩阵

$$\begin{aligned}
[t] &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2z_{21}} \begin{bmatrix} 1+z_{11}+z_{22}+\Delta z & 1+z_{11}-z_{22}-\Delta z \\ -1+z_{11}-z_{22}+\Delta z & -1+z_{11}+z_{22}-\Delta z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2y_{21}} \begin{bmatrix} -1-y_{11}-y_{22}-\Delta y & 1+y_{11}-y_{22}-\Delta y \\ -1+y_{11}-y_{22}+\Delta y & 1-y_{11}-y_{22}+\Delta y \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22} \\ a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22} & a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{s_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -s_{22} \\ s_{11} & -\Delta s \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2h_{21}} \begin{bmatrix} -1 - h_{11} - h_{22} - \Delta h & 1 + h_{11} - h_{22} - \Delta h \\ 1 - h_{11} + h_{22} - \Delta h & -1 + h_{11} + h_{22} - \Delta h \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2g_{21}} \begin{bmatrix} 1 + g_{11} + g_{22} + \Delta g & 1 + g_{11} - g_{22} - \Delta g \\ 1 - g_{11} + g_{22} - \Delta g & 1 - g_{11} - g_{22} + \Delta g \end{bmatrix} \quad (1-91)
\end{aligned}$$

6. 混合矩阵

$$\begin{aligned}
[h] &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & \Delta y \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \Delta a \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{b_{11}} \begin{bmatrix} b_{12} & 1 \\ -\Delta b & b_{21} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta g} \begin{bmatrix} g_{22} & g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1 - s_{11} + s_{12} - \Delta s} \begin{bmatrix} 1 + s_{11} + s_{22} + \Delta s & 2s_{12} \\ -2s_{21} & 1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{t_{11} - t_{12} - t_{21} + t_{22}} \begin{bmatrix} t_{11} - t_{12} + t_{21} - t_{22} & 2\Delta t \\ -2 & t_{11} + t_{12} - t_{21} - t_{22} \end{bmatrix} \quad (1-92)
\end{aligned}$$

7. 逆混合矩阵

$$\begin{aligned}
[g] &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{21} & \Delta z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{y_{22}} \begin{bmatrix} \Delta y & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} & -\Delta a \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{b_{22}} \begin{bmatrix} b_{21} & 1 \\ \Delta b & b_{12} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta h} \begin{bmatrix} h_{22} & h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 + s_{11} - s_{22} - \Delta s} \begin{bmatrix} 1 - s_{11} - s_{22} + \Delta s & -2s_{12} \\ 2s_{21} & 1 + s_{11} + s_{22} + \Delta s \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{t_{11} + t_{12} + t_{21} + t_{22}} \begin{bmatrix} t_{11} + t_{12} - t_{21} - t_{22} & -2\Delta t \\ 2 & t_{11} - t_{12} + t_{21} - t_{22} \end{bmatrix} \quad (1-93)
\end{aligned}$$

在求得电路的 A 矩阵之后, 根据图1—29及电路方程

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1-94)$$

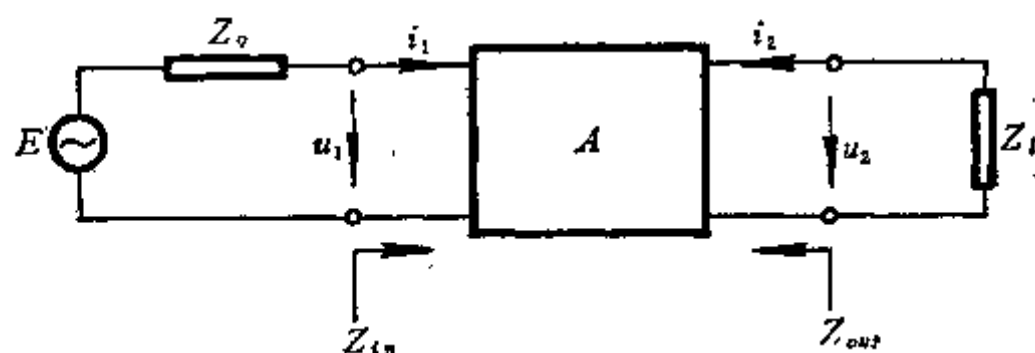


图1-29 转移矩阵电路

可以算出电路的特性参数:

1. 电路输入阻抗

$$Z_{in} = \frac{A_{11}Z_l + A_{12}}{A_{21}Z_l + A_{22}} \quad (1-95)$$

2. 电路输出阻抗

$$Z_{out} = \frac{A_{22}Z_g + A_{12}}{A_{21}Z_g + A_{11}} \quad (1-96)$$

3. 输入电压反射系数

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_g}{Z_{in} + Z_g} \quad (1-97)$$

4. 输出电压反射系数

$$\Gamma_{out} = \frac{Z_{out} - Z_l}{Z_{out} + Z_l} \quad (1-98)$$

5. 电压传输系数

$$K = \frac{U_2}{E} = \frac{Z_l}{A_{11}Z_l + A_{12} + A_{21}Z_gZ_l + A_{22}Z_g} \quad (1-99)$$

6. 传输相位移

$$\Phi = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Re} K}{\operatorname{Im} K} \quad (1-100)$$

$\operatorname{Re} K$ —— K 的实部;

$\operatorname{Im} K$ —— K 的虚部。

7. 功率增益或功率损耗

$$G_p = \frac{|U_2|^2/Z_1}{|E|^2/4Z_s} = |K|^2 \frac{4Z_s}{Z_1} \quad (1-101)$$

当 $Z_s = Z_1 = Z_0$ 时

$$G_p = \left[\frac{2}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \right]^2 \quad (1-102)$$

§ 1.3 散射矩阵分析

双口网络级联的计算用 T 矩阵或 A 矩阵最方便。但是，有许多微波元器件——例如晶体管或不均匀传输线——是用实验方法测量的 S 参数来表示的，若用 A 矩阵级联法，就必须将 S 参数变换为 A 参数，而如果直接采用 S 参数，就可以省去参数间的变换，并且 S 参数分析法还能适用于多口网络的情况。

§ 1.3.1 双口网络级联的 S 参数

有两个网络相级联，如图 1-30 所示。两个网络分别用 j 和 k 表示，其散射矩阵参数方程是

$$b_{1j} = s_{11j}a_{1j} + s_{12j}a_{2j} \quad (1-103)$$

$$b_{2j} = s_{21j}a_{1j} + s_{22j}a_{2j} \quad (1-104)$$

$$b_{1k} = s_{11k}a_{1k} + s_{12k}a_{2k} \quad (1-105)$$

$$b_{2k} = s_{21k}a_{1k} + s_{22k}a_{2k} \quad (1-106)$$

若级联网络的散射矩阵参数用 s_{11} 、 s_{12} 、 s_{21} 、 s_{22} 表示，则级联网络的方程是

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= s_{11}a_1 + s_{12}a_2 \\ b_2 &= s_{21}a_1 + s_{22}a_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-107)$$

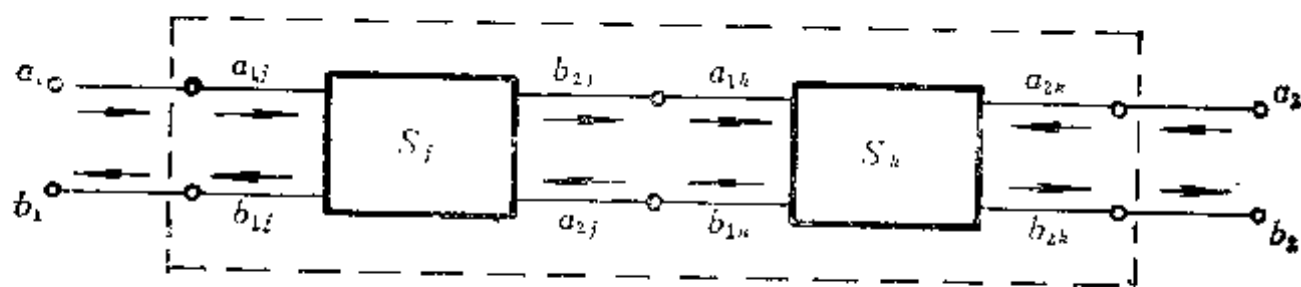


图 1-30 散射矩阵网络级联

由图 1-30 可以看出各参数之间有下列关系

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{1j} \\ a_2 &= a_{2k} \\ b_1 &= b_{1j} \\ b_2 &= b_{2k} \\ a_{1k} &= b_{2j} \\ b_{1k} &= a_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (1-108)$$

把式 (1-108) 代入式 (1-104) 和 (1-105)，得

$$\left. \begin{aligned} a_{1k} &= s_{21j}a_1 + s_{22j}a_{2j} \\ a_{2j} &= s_{11k}a_{1k} + s_{12k}a_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-109)$$

由上式解出两个系数 a_{1k} 和 a_{2j}

$$\left. \begin{aligned} a_{1k} &= \frac{s_{21j}a_1 + s_{22j}s_{12k}a_2}{1 - s_{11k}s_{22j}} \\ a_{2j} &= \frac{s_{11k}s_{21j}a_1 + s_{12k}a_2}{1 - s_{11k}s_{22j}} \end{aligned} \right\} \quad (1-110)$$

把式 (1-110) 代入式 (1-103) 和 (1-106), 得

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \left(s_{11j} + \frac{s_{11k}s_{21j}s_{12j}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \right) a_1 + \left(\frac{s_{12k}s_{12j}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \right) a_2 \\ b_2 &= \left(\frac{s_{21j}s_{21k}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \right) a_1 + \left(s_{22k} + \frac{s_{22j}s_{12k}s_{21k}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \right) a_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-111)$$

对比式 (1-111) 和 (1-107), 可得级联网络的 S 参数是

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= s_{11j} + \frac{s_{11k}s_{21j}s_{12j}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \\ s_{12} &= \frac{s_{12k}s_{12j}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \\ s_{21} &= \frac{s_{21j}s_{21k}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \\ s_{22} &= s_{22k} + \frac{s_{22j}s_{12k}s_{21k}}{1 - s_{11k}s_{22j}} \end{aligned} \right\} \quad (1-112)$$

如果有许多个双口 S 参数网络级联, 则可用式 (1-112) 按联接顺序逐次级联下去。下面给出双口网络级联 S 参数的计算程序。

双口网络级联 S 参数程序

程序说明:

SA——存储 N 组双口矩阵 S 参数的数组;

N ——需要级联运算的矩阵数;

S ——级联以后的总网络 S 参数;

IM ——判敛参数。 $IM=0$ 是正常结束; $(1 - s_{11k}s_{22j}) < 10^{-4}$ 时, 运算无结果, 用 $IM=1$ 做为返回符号, 此种情况的物理意义是两个矩阵相连处的反射系数太大。

```

1      SUBROUTINE SMAX (SA, N, S, IM)
2      COMPLEX SA (N, 2, 2), S (2, 2), D
3      S (1, 1) = SA (1, 1, 1)
4      S (1, 2) = SA (1, 1, 2)
5      S (2, 1) = SA (1, 2, 1)
6      S (2, 2) = SA (1, 2, 2)
7      IM = 1
8      DO 10 I = 2, N
```

```

9      D=1.0-S (2, 2) *SA (I, 1, 1)
10     IF (CABS (D) .LT. 1.E-4) GOTO 20
11     S (1, 1) =S (1, 1) +SA (I, 1, 1) *S (2, 1) *S (1, 2) /D
12     S (1, 2) =S (1, 2) *SA (I, 1, 2) /D
13     S (2, 1) =S (2, 1) *SA (I, 2, 1) /D
14     S (2, 2) =SA (I, 2, 2) +S (2, 2) *SA (I, 1, 2) *SA (I, 2, 1) /D
15 10  CONTINUE .
16     IM=0
17 20  RETURN
      END

```

§ 1.3.2 多口网络互联的 S 参数

若干个多口网络互联成一个网络时，不仅可以用待定导纳矩阵法，还可以用散射矩阵法，而散射矩阵法更具有容易与实验测量相配合的优点。

有 m 个多口网络，共有 n 个端口，相互连接之后构成 p 个外端口，如图1-31所示。

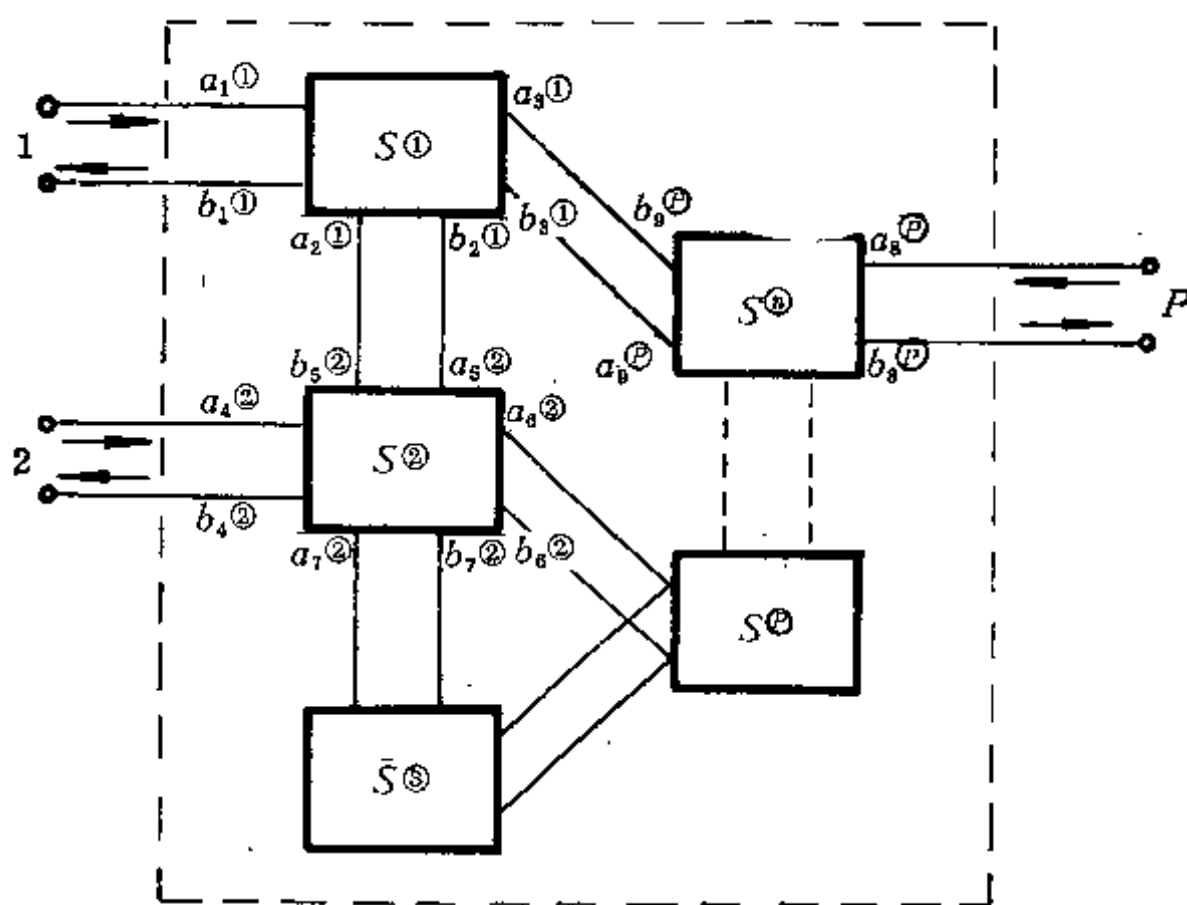


图1-31 多口网络互联

每个单元多口网络的 S 矩阵方程是

$$\bar{b}^{(i)} = \bar{s}^{(i)} \bar{a}^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

式中 $\bar{b}^{(i)}$ 为反射波向量， $\bar{a}^{(i)}$ 为入射波向量， $\bar{s}^{(i)}$ 为散射矩阵。

例如在图1-31中，第1个网络是3口网络，其参数是

$$\bar{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad \bar{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\overline{s}^{(1)} = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} \end{pmatrix}$$

全部 m 个子网络的总矩阵可写成

$$\begin{pmatrix} \overline{b}^{(1)} \\ \overline{b}^{(2)} \\ \overline{b}^{(3)} \\ \vdots \\ \overline{b}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{s}^{(1)} & \overline{0} & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{s}^{(2)} & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{s}^{(3)} & \cdots & \overline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \cdots & \overline{s}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}^{(1)} \\ \overline{a}^{(2)} \\ \overline{a}^{(3)} \\ \vdots \\ \overline{a}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (1-113)$$

式中的 $\overline{0}$ 是零矩阵。

按照图 1-31 所示之例，第①个子网络是 3 口网络，第②个是 4 口网络……，则全电路的矩阵方程应具有下述形式：

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(2)} \\ b_5^{(2)} \\ b_6^{(2)} \\ b_7^{(2)} \\ b_8^{(n)} \\ b_9^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} & s_{14}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} & s_{24}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{31}^{(2)} & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} & s_{34}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{41}^{(2)} & s_{42}^{(2)} & s_{43}^{(2)} & s_{44}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{11}^{(n)} & s_{12}^{(n)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{21}^{(n)} & s_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_4^{(2)} \\ a_5^{(2)} \\ a_6^{(2)} \\ a_7^{(2)} \\ a_8^{(n)} \\ a_9^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1-114)$$

把式 (1-114) 中的行与列进行交换，使全部外端口参数归并在矩阵左上角。例如，当总网络只有 3 个外端口时（即 $p=3$ ），行列交换后的矩阵方程具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_4^{(2)} \\ b_8^{(n)} \\ \cdots \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_5^{(2)} \\ b_6^{(2)} \\ b_7^{(2)} \\ b_9^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \vdots & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_{11}^{(2)} & 0 & \vdots & 0 & 0 & s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} & s_{14}^{(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_{11}^{(n)} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{12}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{21}^{(1)} & 0 & 0 & \vdots & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_{31}^{(1)} & 0 & 0 & \vdots & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_{21}^{(2)} & 0 & \vdots & 0 & 0 & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} & s_{24}^{(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & s_{31}^{(2)} & 0 & \vdots & 0 & 0 & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} & s_{34}^{(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & s_{41}^{(2)} & 0 & \vdots & 0 & 0 & s_{42}^{(2)} & s_{43}^{(2)} & s_{44}^{(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_{21}^{(n)} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_4^{(2)} \\ a_8^{(n)} \\ \cdots \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_5^{(2)} \\ a_6^{(2)} \\ a_7^{(2)} \\ a_9^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1-115)$$

把式 (1-115) 按虚线的划分写成分块矩阵, 得到

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_\alpha \\ \bar{b}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}_{\alpha\alpha} & \bar{s}_{\alpha\beta} \\ \bar{s}_{\beta\alpha} & \bar{s}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_\alpha \\ \bar{a}_\beta \end{pmatrix} \quad (1-116)$$

式中 \bar{a}_α —— p 个外端口的入射波向量;
 \bar{b}_α —— p 个外端口的反射波向量;
 \bar{a}_β —— $(n-p)$ 个内部互联端口的入射波向量;
 \bar{b}_β —— $(n-p)$ 个内部互联端口的反射波向量;
 $\bar{s}_{\alpha\alpha}$ —— $p \times p$ 阶和外口有关的 s 矩阵;
 $\bar{s}_{\alpha\beta}$ —— $p \times (n-p)$ 阶矩阵;
 $\bar{s}_{\beta\alpha}$ —— $(n-p) \times p$ 阶矩阵;
 $\bar{s}_{\beta\beta}$ —— $(n-p)(n-p)$ 阶和内部互联口的 s 矩阵。

在内部互联口上两边的入射波和反射波应该相等。例如对于图 1-32 的结构应有

$$b_2 = a_4$$

$$b_3 = a_5$$

$$b_4 = a_2$$

$$b_5 = a_3$$

它的内部联接口的矩阵方程为

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \quad (1-117)$$

也可写成向量形式

$$\bar{b}_\beta = \bar{h} \bar{a}_\beta \quad (1-118)$$

式中的 \bar{h} 就是式 (1-117) 中的方阵, 叫做关联矩阵。对于全电路来说, \bar{h} 是 $(n-p) \times (n-p)$ 阶方阵。

由式 (1-116) 得

$$\bar{b}_\alpha = \bar{s}_{\alpha\alpha} \bar{a}_\alpha + \bar{s}_{\alpha\beta} \bar{a}_\beta \quad (1-119)$$

$$\bar{b}_\beta = \bar{s}_{\beta\alpha} \bar{a}_\alpha + \bar{s}_{\beta\beta} \bar{a}_\beta \quad (1-120)$$

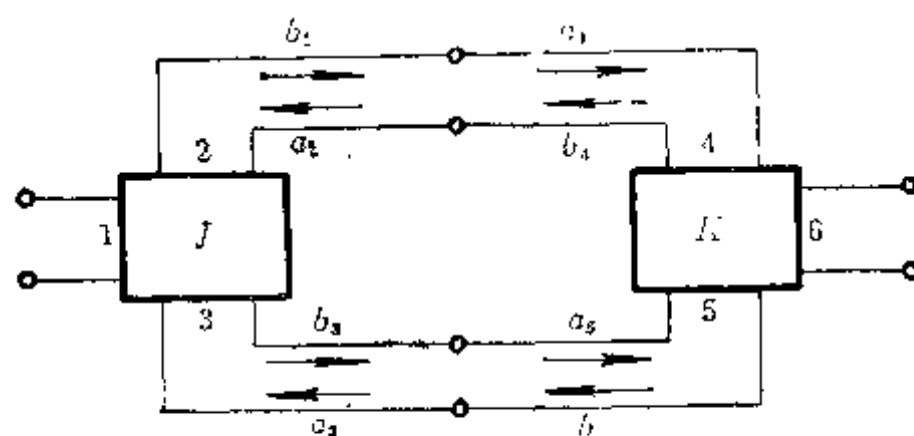


图1-32 s 矩阵网络的联接

由式 (1-118) 和 (1-120) 得

$$\bar{a}_\beta = (\bar{h} - \bar{s}_{\beta\beta})^{-1} \bar{s}_{\beta\alpha} \bar{a}_\alpha \quad (1-121)$$

代入式 (1-119), 得

$$\bar{b}_\alpha = [\bar{s}_{\alpha\alpha} + \bar{s}_{\alpha\beta}(\bar{h} - \bar{s}_{\beta\beta})^{-1} \bar{s}_{\beta\alpha}] \bar{a}_\alpha \quad (1-122)$$

即

$$\bar{b}_\alpha = \bar{s} \bar{a}_\alpha$$

式中

$$\bar{s} = \bar{s}_{\alpha\alpha} + \bar{s}_{\alpha\beta}(\bar{h} - \bar{s}_{\beta\beta})^{-1} \bar{s}_{\beta\alpha} \quad (1-123)$$

式 (1-123) 就是组合网络的 s 矩阵参数。由于组合网络内部联接端口参数已经消除, 所以组合网络 s 矩阵简化到了 $p \times p$ 阶。

如果以图1-31的组合网络为例, 按照公式 (1-118)、(1-123)、(1-121) 可得出这几个矩阵方程式如下:

关联矩阵方程

$$\begin{pmatrix} b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_5^{(2)} \\ b_6^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_5^{(2)} \\ a_6^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

组合网络外口 s 矩阵

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & s_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & s_{11}^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -s_{22}^{(1)} & -s_{23}^{(1)} & 1 & 0 & \cdots \\ -s_{32}^{(1)} & -s_{33}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -s_{22}^{(2)} & -s_{23}^{(2)} & \cdots \\ 0 & 0 & -s_{32}^{(2)} & -s_{33}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ s_{31}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & s_{21}^{(2)} & 0 \\ 0 & s_{31}^{(2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

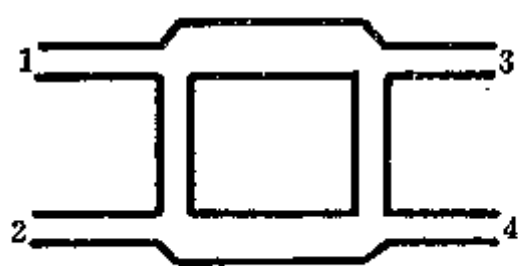
内联端口入射波向量方程

$$\begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_5^{(2)} \\ a_6^{(2)} \\ a_7^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_{22}^{(1)} & -s_{23}^{(1)} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -s_{32}^{(1)} & -s_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -s_{22}^{(2)} & -s_{23}^{(2)} & -s_{24}^{(2)} & \cdots \\ 0 & 0 & -s_{32}^{(2)} & -s_{33}^{(2)} & -s_{34}^{(2)} & \cdots \\ 0 & 0 & -s_{42}^{(2)} & -s_{43}^{(2)} & -s_{44}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ s_{31}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & s_{21}^{(2)} & 0 \\ 0 & s_{31}^{(2)} & 0 \\ 0 & s_{41}^{(2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_4^{(2)} \\ a_8^{(3)} \end{pmatrix}$$

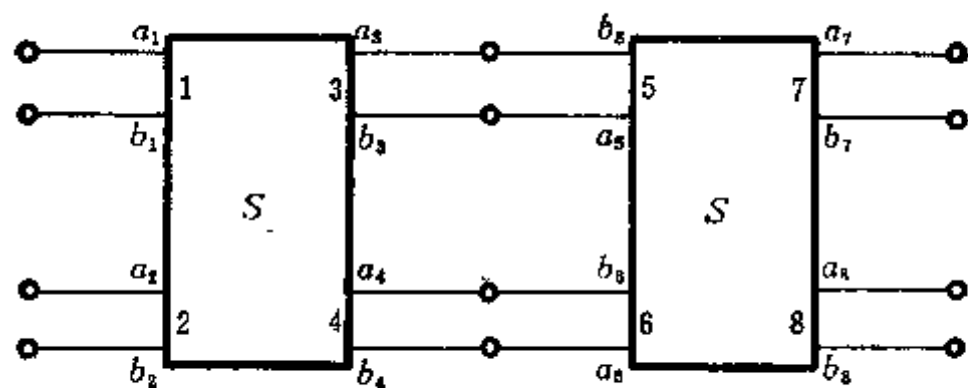
利用上述几个等式就可求出组合网络 s 矩阵。在给出各外口端接条件以后, 也可以求出各内联端口的波向量。

下面举例说明多口 s 矩阵网络组合的应用。

有微带 3 分贝分支电桥, 它是 4 口网络, 如图 1-33 (a) 所示。若把两个分支电桥级联, 即把两个 4 口网络级联, 见图 1-33 (b), 求端口 1 至端口 7 和端口 8 的传输系数。



(a)



(b)

图1-33 微带分支电桥级联

根据分支电桥特性可以得出单元电桥的 s 矩阵

$$\underline{s} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & j & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-124)$$

式中 j 表示复数的虚部。两个 s 矩阵相联之后，总电路的矩阵方程是

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & j & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & j & & & & \\ j & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & j & 0 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} \quad (1-125)$$

进行行列交换，使 4 个外端口参数集中在左上角，得

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & & & & j & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & j & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 & j & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & j \\ j & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & j & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & j & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & j & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \quad (1-126)$$

对比式 (1-115) 和 (1-126) 可知

$$\overline{s}_{\alpha\alpha} = \overline{s}_{\beta\beta} = 0 \quad (1-127)$$

$$\overline{s}_{\beta\alpha} = \overline{s}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & j & \\ & 0 & j & 1 \\ & & 1 & j \end{pmatrix} \quad (1-128)$$

按照图 1-33 写出联接矩阵

$$\overline{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-129)$$

把式 (1-127)、(1-128)、(1-129) 代入式 (1-123)，化简后可得级联电桥的 s 矩阵

$$\overline{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-130)$$

级联电桥方程是

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_7 \\ b_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} \quad (1-131)$$

由方程 (1-131) 可以看出，组合电桥由端口 1 至端口 7 的传输系数 $K_{1,7}$ 和端口 1 至 8 的传输系数 $K_{1,8}$ 是

$$K_{1,7} = \frac{b_7}{a_1} = 0$$

$$K_{1,8} = \frac{b_8}{a_1} = j$$

即 1 口至 7 口隔离，1 口至 8 口移相 90° 。

§ 1.3.3 多口 S 矩阵的端口简化

在微波电路的分析中，经常要解决某两个端口之间的传输特性，有时还要了解其它端口接不同负载时对这两个端口的影响。这种情况下的分析方法是：把其它各端口接以固定负载，并将其归并到网络之中，于是就把多端口网络简化成了两口网络，然后即可根据两口网络 s 参数计算电路特性了。

给定 n 口网络如图 1-34 所示，要求把它简化为 m 口网络。一般情况下， m 不一定等于 2。首先把第 $(m+1)$ 口到第 n 口都接以固定负载，各负载的反射系数分别是 $\Gamma_{m+1} \sim \Gamma_n$ 。然后

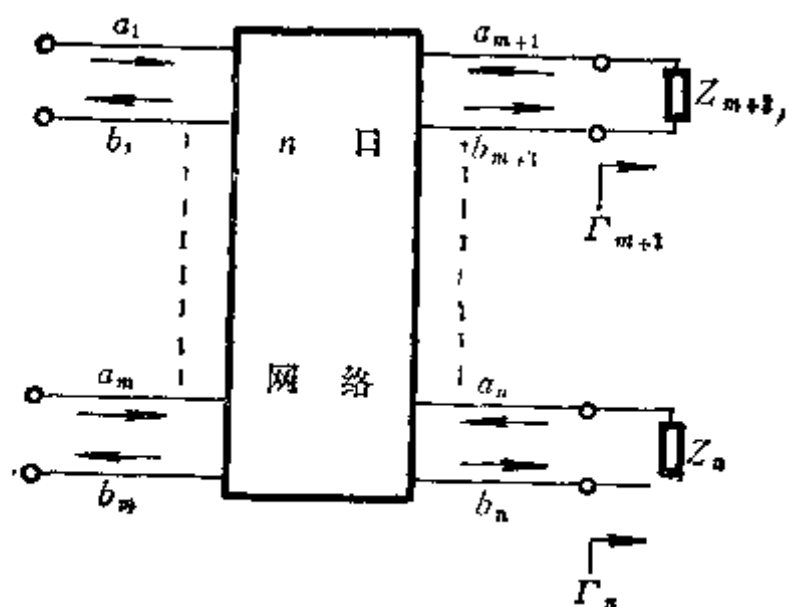


图1-34 n 口网络简化为 m 口网络

把原 n 口矩阵方程进行行列交换，把 m 个端口参数集中在左上角。交换行列之后的方程是

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ \dots \\ b_{m+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} & s_{1,m+1} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} & s_{2,m+1} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} & s_{m,m+1} & \dots & s_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+1,1} & \dots & s_{m+1,m} & s_{m+1,m+1} & \dots & s_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & \dots & s_{nm} & s_{n,m+1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ \dots \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (1-132)$$

把式 (1-132) 写成方块矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_\alpha \\ \bar{b}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}_{\alpha\alpha} & \bar{s}_{\alpha\beta} \\ \bar{s}_{\beta\alpha} & \bar{s}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_\alpha \\ \bar{a}_\beta \end{pmatrix} \quad (1-133)$$

由于从端口 $(m+1)$ 到端口 n 分别接有负载，因此网络的端接条件可写为

$$\bar{a}_\beta = \bar{\Gamma} \bar{b}_\beta \quad (1-134)$$

式中 $\bar{\Gamma}$ 是反射系数矩阵，其对角元素是各口负载的反射系数，即

$$\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{m+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_{m+2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{m+3} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \Gamma_n \end{pmatrix} \quad (1-135)$$

由式 (1-133) 和 (1-134) 得

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_\alpha &= \bar{s}_{\alpha\alpha} \bar{a}_\alpha + \bar{s}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma} \bar{b}_\beta \\ \bar{b}_\beta &= \bar{s}_{\beta\alpha} \bar{a}_\alpha + \bar{s}_{\beta\beta} \bar{\Gamma} \bar{b}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (1-136)$$

解方程 (1-136), 得

$$\bar{b}_a = [\bar{s}_{aa} + \bar{s}_{ab}\bar{\Gamma}(\bar{1} - \bar{s}_{bb}\bar{\Gamma})^{-1}\bar{s}_{ba}] \bar{a}_a \quad (1-137)$$

即

$$\bar{b}_a = \bar{s} \bar{a}_a$$

式中

$$\bar{s} = \bar{s}_{aa} + \bar{s}_{ab}\bar{\Gamma}(\bar{1} - \bar{s}_{bb}\bar{\Gamma})^{-1}\bar{s}_{ba} \quad (1-138)$$

\bar{s} 就是把无用外端口简化后的网络 s 参数。

如果把多口网络简化成双口网络, 则端口矩阵为

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

最后, 根据双口电路图 1-35 可以得出电路特性公式如下:

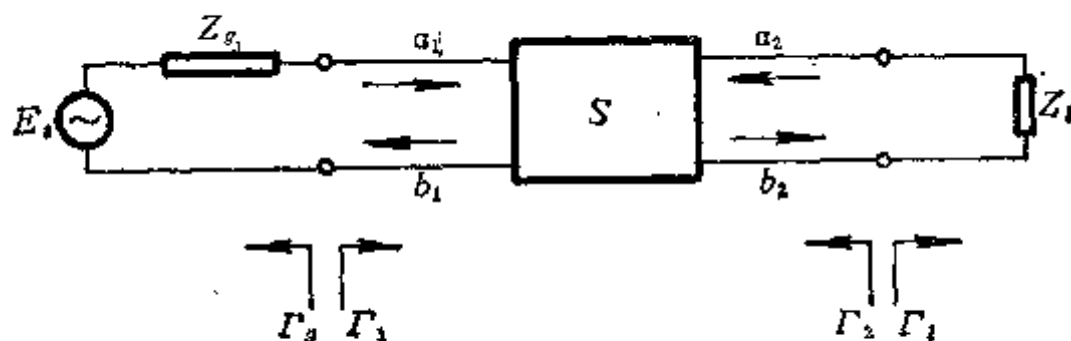


图1-35 简化双口 s 矩阵

1. 信源反射系数

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (1-139)$$

式中 Z_0 是标准传输线特性阻抗。

2. 负载反射系数

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \quad (1-140)$$

3. 网络输入端反射系数

$$\Gamma_1 = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21}\Gamma_l}{1 - s_{22}\Gamma_l} \quad (1-141)$$

4. 网络输出端反射系数

$$\Gamma_2 = s_{22} + \frac{s_{12}s_{21}\Gamma_g}{1 - s_{11}\Gamma_g} \quad (1-142)$$

5. 传输功率增益

$$G = \frac{P_l}{P_g} = \frac{|s_{21}|^2 (1 - |\Gamma_g|^2) (1 - |\Gamma_l|^2)}{|(1 - \Gamma_g s_{11})(1 - \Gamma_l s_{22}) - s_{12}s_{21}\Gamma_g\Gamma_l|^2} \quad (1-143)$$

6. 当网络对负载匹配时

$$\text{输入端反射系数 } \Gamma_{10} = \frac{b_1}{a_1} = s_{11} \quad (1-144)$$

$$\text{正向传输系数} \quad T_{1,2} = \frac{b_2}{a_1} = s_{21} \quad (1-145)$$

当网络对信源匹配时

$$\text{输出端反射系数} \quad \Gamma_{20} = \frac{b_2}{a_2} = s_{22} \quad (1-146)$$

$$\text{反向传输系数} \quad T_{2,1} = \frac{b_1}{a_2} = s_{12} \quad (1-147)$$

用 s 矩阵编制电路分析程序的具体方法详见第四章。

参 考 文 献

1. B.M.科兹洛夫、Г.А.尤菲特著，杨振起、杨逢春译，微波部件的计算机辅助设计，科学出版社，1980。
2. 托马斯W·戴维斯等著，齐立特等译，电网络的计算机辅助分析，人民邮电出版社，1981。
3. 张惠廉、庄镇泉，电子线路的计算机辅助设计（上），人民教育出版社，1979。
4. 清华大学《微带电路》编写组，微带电路，人民邮电出版社，1976。
5. John Staudhammer, Circuit analysis by digital computer, Prentice-Hall Inc., 1975。
6. D.A. Calahan, Computer aided network design, 1972。
7. J.K. Fidler, C. Nightingale, Computer aided circuit design, 1978。
8. K.C. Gupta, Ramesh Garg, Rakesh Chadha, Computer aided design of microwave circuits, Artech House Inc., 1981。
9. 高葆新，微波电路计算机辅助设计发展概况，电子测量技术，1985年2月。

第二章 微波电路最优化设计

§ 2.1 概 述

§ 2.1.1 最优化设计的基本原理

微波电路设计的常规方法是根据指标要求,借助于解析公式或综合法的图表曲线和数据表格进行电路设计,然后求出元件数值和结构尺寸。但是,这种解析综合法有一定的局限性,首先因为设计精度愈来愈不能满足科学技术不断发展的要求,其次有相当多的微波电路——尤其是微波有源电路——还没有完善的综合解析公式。这就需要用计算机进行最优化设计,即按照要求的特性指标找出最佳的元件值和结构尺寸。

最优化设计的步骤是先对一个初步选定的电路进行计算机分析,求出电路特性;如果特性不满足指标要求,则由计算机判断元件值的修改方向,即哪个元件值应该增大、哪个元件值必须减小;然后适当修改元件值,再次对电路进行分析;如此反复修正,直到满足给定的要求为止。

计算机最优化设计过程可以用图 2-1 来说明,它包括以下几个基本内容和步骤:

1. 选择微波电路的拓扑结构和给出电路元件的初始值。元件初始值可以凭经验判断来选定,但应尽量选在接近最佳值的附近。对于复杂电路和敏感度大的电路,最好先进行电路综合,得出合理的电路拓扑结构以及较好的元件近似值。如果遇到既没有经验又无综合解析法的情况,也可以给一组任意猜测值,但是,这时优化计算的过程长,且容易陷入局部极小,以至于得不到全局最优解。

2. 进行电路分析。电路分析可以采用第一章所述的任何方法进行。对于单纯微波级联树型电路,用转移矩阵法最简单,而对于分布参数和集总参数混合电路和多分支电路,则宜采用待定导纳矩阵法。根据初始元件值计算出有关的增益、驻波比、输入和输出阻抗以及衰减系数等电路特性。

3. 把分析得到的特性数据与要求的特性指标进行比较,得出误差函数。误差函数就是分析所得的电路特性与要求的理想特性的差值函数。图 2-1 中要求的电路增益特性是矩形

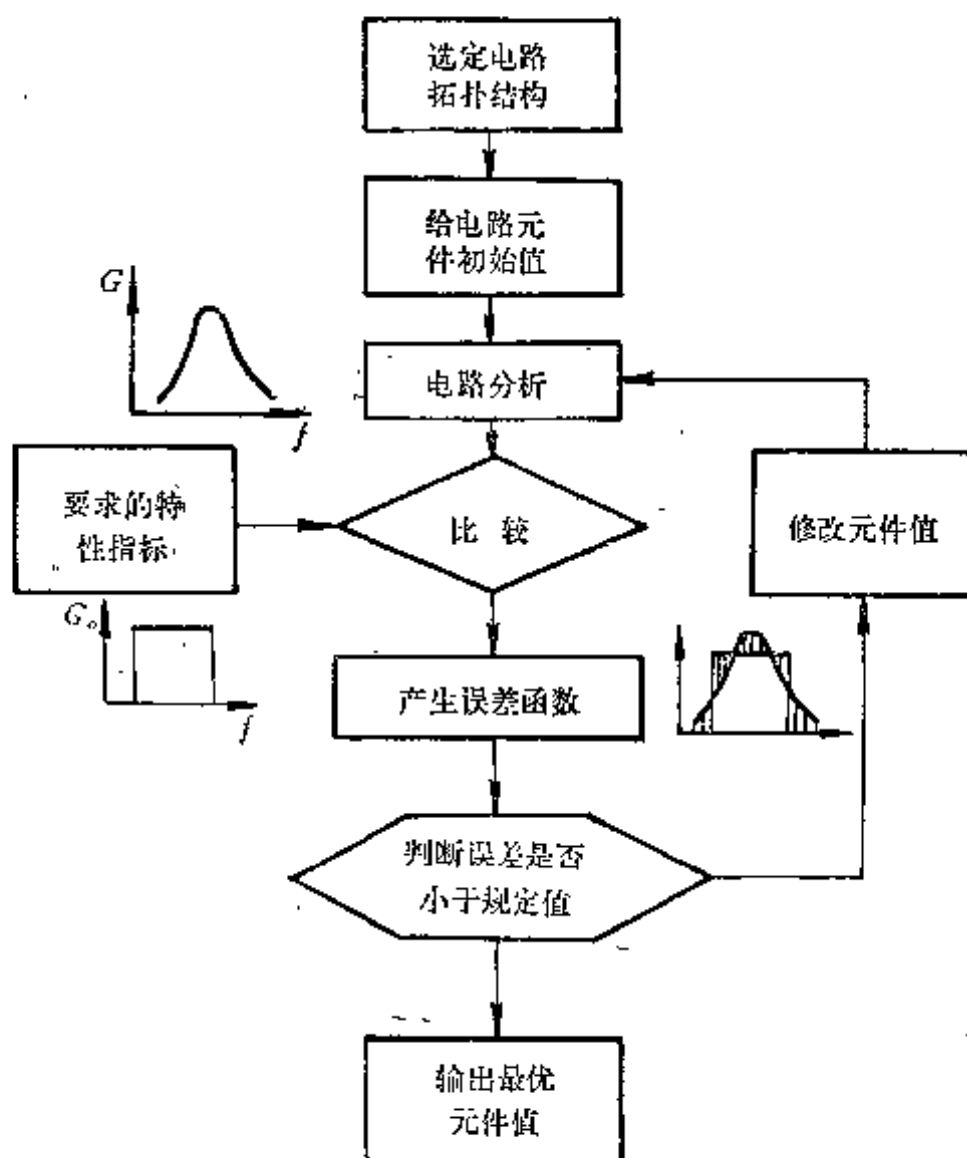


图2-1 最优化设计框图

频带,小图的阴影区就是实际特性与要求特性之间的误差。

4. 判断误差函数是否足够小。如果误差函数很大不能满足规定要求值,则计算机自动修改元件数值,再进行分析比较。元件值修改的依据有两种,一种是直接比较法,即顺次把各元件值都进行一次少量的增或减,比较各次的误差函数值,找出使误差函数下降的最有效方向,然后修正元件值;另一种方法是梯度法,即求出电路特性对元件值变化的梯度,以误差函数下降梯度最大的方向作为元件值的修改方向。

5. 整理计算结果,打印输出。

计算机最优化设计可以缩短计算时间,提高设计精度,减少实验修正,而且能运用计算机的逻辑判断能力获得人力难于得到的最佳结果。

目前的电路优化设计较多是初级的。它需要给定电路拓扑结构,对固定的拓扑进行元件值选优。当性能达不到要求时,需要人为更改电路。也有一些优化程序可以对少数电路自动寻找最佳电路拓扑,以获得更为理想的电路性能。

§ 2.1.2 最优化方法概况

最优化方法本身属于数学中的计算方法。计算机的发展促进了最优化理论和方法的不断丰富与完善,至今已成为数学的一个重要分支。在很多工业部门和科学技术领域——诸如无线电、自动控制、经济管理、工业生产以至国家规划等——它都得到广泛的应用。最优化方法有很多种,粗略地可分为解析法和搜索法两大类。

1. 解析法——采用求导数的方法计算函数的极值,它适于简单函数和具有明确数学表达式的函数。

2. 搜索法——利用目标函数在某个变量点附近的变化规律,比如函数值的大小或函数的变化梯度,找出下一个向最优值靠近的计算点,一步一步搜索前进,逐渐达到最优点。这类方法的特点主要是利用数值计算,因此必须依靠计算机。这类方法又可分为:

① 消去法——把变量域分割成小区间,把不存在最优点的区间消去,逐步缩小最优点存在的范围,最后得到最优点。

② 逼近法——对任选的几个点的函数值进行比较,主要是比较它们的函数值大小和函数变化率,找出趋向于最优点的方向,即函数值下降的方向,在函数值下降的方向上再找新的点进行比较,逐步逼近函数的最优点。

逼近法中又包括梯度法和直接法。梯度法是利用目标函数的梯度来判断逼近的方向,而直接法是对函数值进行直接比较来判断逼近方向。一般说来,梯度法的运算速度快,而直接法比较简单。

最优化计算方法种类很多,实际应用时往往是几种方法配合使用。本章仅介绍在微波电路CAD中常用的几种方法。

§ 2.2 目标函数

微波电路最优化的实质是使误差函数逐步降为极小的过程。当实际电路特性与理想特性的误差已经达到可能的最小值的时候,就意味着电路已经达到了最优。有些情况下,设计目标并非要寻找误差函数最小值,而是寻求某个特性的最大值,例如,对于带阻滤波器希望它的阻带衰减值 $\phi(\bar{x})$ 尽量大或是工作频带尽量宽,此时可取其倒数 $1/\phi(\bar{x})$ 做为优化的函

数。直接用于进行最优化计算的函数叫目标函数，而目标函数是由误差函数和电路特性函数组成的。如何由给定的理想特性和实际电路特性构成目标函数，这是微波电路最优化的一个重要环节。

§ 2.2.1 目标函数表达式

微波电路的误差函数一般表示式是

$$E(\bar{x}, \omega) = W(\omega) [T(\bar{x}, \omega) - T_i(\omega)] \quad (2-1)$$

式中 $E(\bar{x}, \omega)$ ——频率为 ω 时的误差函数；

$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是待优化参数向量，它表明电路包含 n 个元件参量，每个参量的值分别是 x_1, x_2, \dots, x_n ；

ω ——频率（或时间）。在微波电路的研究中多用频域特性。通常，频域特性是连续变化的曲线，而用计算机分析时，只能计算出连续曲线上若干频率采样点的特性，来近似代替连续曲线；

$T(\bar{x}, \omega)$ ——电路特性函数。包括功率增益、电压传输系数或衰减系数等；

$T_i(\omega)$ ——理想特性函数；

$W(\omega)$ ——频率（或时间）的加权函数。

例如，某个微波电路的元件参数向量是 \bar{x} ，希望这个电路具有理想矩形的传输特性，如图 2-2 中 $T_i(\omega)$ 所示。在其中一组参量 \bar{x} 情况下电路特性为 $T(\bar{x}, \omega)$ 。图中每根细实线代表 1 个频率采样点上的误差值 $E(\bar{x}, \omega)$ 。

目标函数通常用各频率点的误差函数按下式的形式组成：

$$\phi(\bar{x}, \omega) = \left[\sum_{k=1}^m W(\omega_k) |T(\bar{x}, \omega_k) - T_i(\omega_k)|^p \right]^{1/p} \quad (2-2)$$

式中 $\phi(\bar{x}, \omega)$ ——待优化电路的目标函数；

m ——频率采样点数；

p ——函数方次， $1 \leq p \leq \infty$ 。

目标函数中的几个参数应按下述原则选取：

1. 频率采样点数 m

频率采样点数量的选择因优化对象而异。对于平坦增益的微波放大器，在全频带选取 5~10 个频率点已够；对于滤波器传输特性，在工作频带内采样点选 $(3 \sim 4)n$ 个即可，此处 n 为滤波器腔数。例如，图 2-3 是一个 3 腔切比雪夫等波纹带通滤波器特性，采样频率点见图中细线位置。很显然，取 $m = 3n = 9$ 时，离散值的特性基本上反应了滤波特性的概貌。

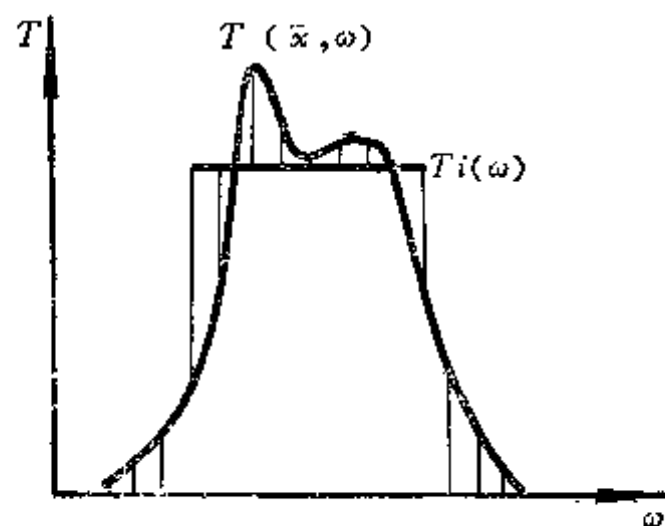


图 2-2 误差函数示意

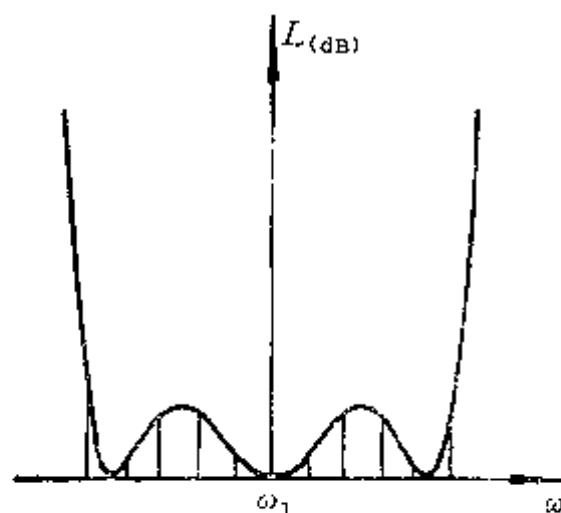


图 2-3 频率采样点数的选取

如果待优化的指标有好几个, 比如, 要同时对增益、相位、噪声和驻波比优化, 则目标函数应写成

$$\phi = \left[\sum_{k=1}^m W_1(\omega_k) |G(\bar{x}, \omega_k) - G_K|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^m W_2(\omega_k) |\theta(\bar{x}, \omega_k) - \theta_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ + \left[\sum_{k=1}^m W_3(\omega_k) |\rho(\bar{x}, \omega_k) - \rho_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^m W_4(\omega_k) |F(\bar{x}, \omega_k)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2-3)$$

式中 G ——功率增益;

θ ——传输相位;

ρ ——电压驻波比;

F ——噪声系数。

2. 误差函数的指数 p

误差函数的指数 p 值选取范围可以很宽。当选用 $p=1$ 时, 目标函数是代数和形式的, 此时目标函数表示式是

$$\phi(\bar{x}, \omega) = \sum_{k=1}^m W(\omega_k) |T(\bar{x}, \omega_k) - T_i(\omega_k)| \quad (2-4)$$

此类目标函数的优化过程平缓, 速度也快。但是, 有时会遇到一些不利情况, 例如, 传输系数中出现尖峰而难以消除, 或是平坦增益特性的频带边缘处达不到要求, 如图 2-4 所示。因为, 虽然个别频率点超差, 而整个目标函数仍收敛于要求误差之内, 所以优化运算不再继续进行。为克服局部超差, 可在超差频率点加大权函数 $W(\omega_k)$ 。

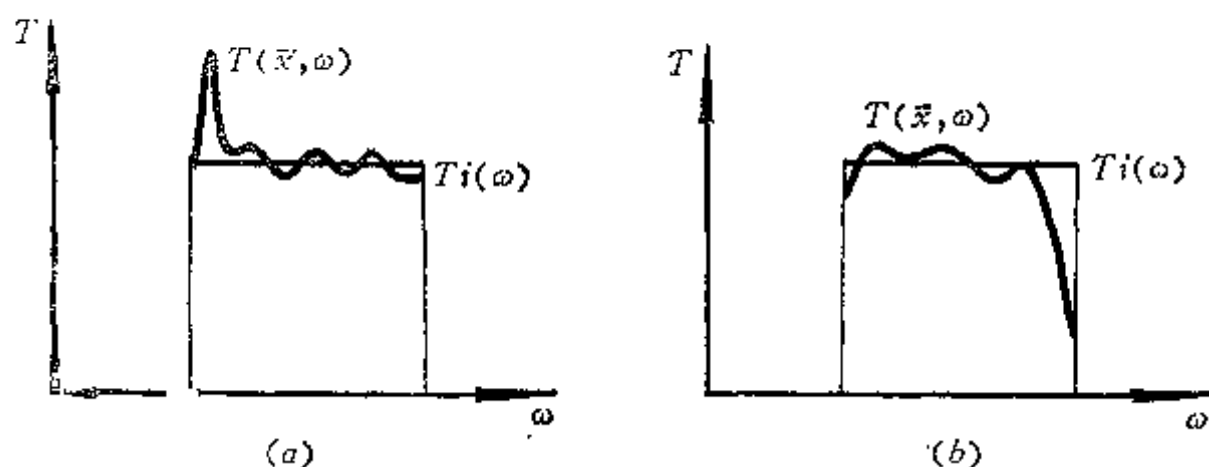


图2-4 目标函数超差示意

误差函数指数的第二种选择是 $p \rightarrow \infty$ 。在这种情况下, 误差函数中数值愈大的分量影响愈大, 因此, 目标函数逼近于误差函数中的最大分量。这就是最大误差形式的目标函数。此时目标函数等效于下式

$$\phi(\bar{x}, \omega) = \max_{k=1, m} \{|T(\bar{x}, \omega_k) - T_i(\omega_k)|\} \quad (2-5)$$

式中 $\max_{k=1, m}$ 表示在 m 项中选出最大值的项。

只要目标函数收敛于允许误差之内就不会出现超差点, 从优化收敛性质来看, p 指数加大是对误差函数中数值大的分量自动加权。但是, 当 p 指数选用数值很大的时候, $\phi(\bar{x}, \omega)$ 的值可能过大, 以致引起计算机上溢, 此时可把目标函数改写为

$$\phi(\bar{x}, \omega) = M \left\{ \sum_{k=1}^m \left| \frac{E(\bar{x}, \omega_k)}{M} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2-6)$$

式中 M 是根据电路情况选定的系数。

误差函数指数最常选用的是 $p=2$ ，此时目标函数通常采用平方和的形式，即

$$\phi(\bar{x}, \omega) = \sum_{k=1}^n [W(\omega_k) [T(\bar{x}, \omega_k) - T_i(\omega_k)]^2] \quad (2-7)$$

当最优化运算进行若干次之后，如果仍有部分频域不能满足要求，可适当加大 p 值。一般情况下，取 $p=5 \sim 10$ 就有足够的精度逼近误差函数的最大分量。但是开始优化时不宜把 p 值取得过大，以免在优化过程中目标函数起伏跳动，难于寻找极小值。

3. 加权函数 $W(\omega_k)$

加权函数 $W(\omega_k)$ 是根据设计指标选定的。选择加权函数的目的是改善设计效果。在实际的微波电路设计中，一般很难保证全频域和全部指标都达到最优，因为目标函数所包含的各指标之间有些是互相矛盾或互有牵制的。例如，频带加宽驻波系数就要变坏；若要动态范围大，输出功率就要受限制。因此，对各项指标要权衡取舍。借助于选用适当的加权函数，可以保证重要指标或重要频域内的特性要求。

§ 2.2.2 目标函数的极值

最优化运算的目标是寻找目标函数的极小值，这就需要先来分析函数的极值特性，掌握函数极值的规律，以便有效地进行最优化设计。以下所述函数皆指目标函数。

(一) 函数极值的判别

(1) 一元函数极值

如果一元函数 $\phi(x)$ 存在一阶导数，则函数极小值出现于 x_0 的必要充分条件是

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} &= 0 \\ \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

实际上函数可能有几个极小值，如图 2-5 中的 x_1 和 x_4 两点都存在极小值，其中 x_1 是函数最小值的点。在 x_2 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} &= 0 \\ \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_2} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

因此 x_2 是函数极大值的点。在 x_3 点也有 $d\phi(x)/dx|_{x=x_3}=0$ ，但是在 x_3 左侧 $(d^2(x)/dx^2)>0$ ，而右侧 $(d^2(x)/dx^2)<0$ ，所以 x_3 是驻点。

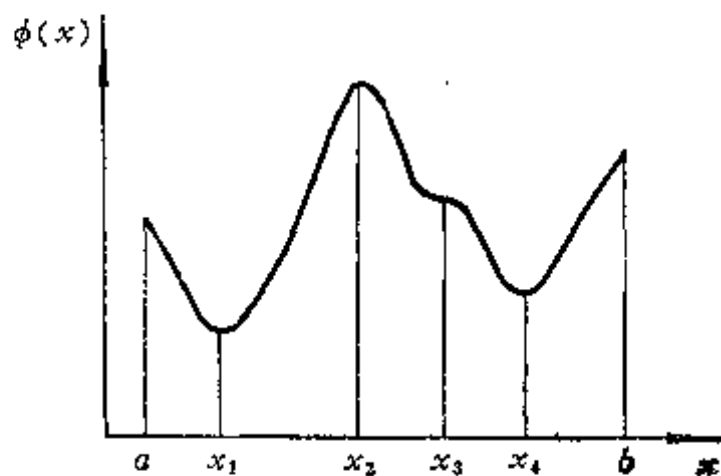


图2-5 一元函数极值点

(2) 多元函数极值

在多元函数情况下， $\phi(\bar{x})$ 代表 n 维欧氏空间域 R^n 中的函数，向量 $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 是 n 维变量。设 \bar{x}_0 为 R^n 域内一个点，在 \bar{x}_0 点附近把 $\phi(\bar{x})$ 展开成台劳级数

$$\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \theta(x) \quad (2-10)$$

式中 $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$ ($i=1, 2, \cdots, n$)

$\theta(\bar{x})$ ——高次项，此项可忽略。

把台劳级数式 (2-10) 用向量和矩阵形式表示，写为

$$\phi(\bar{x}) \approx \phi(\bar{x}_0) + \nabla \phi(\bar{x}_0)^T \Delta \bar{x} + \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T A \Delta \bar{x} \quad (2-11)$$

式中 $\nabla \phi(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \bar{g}_0 \quad (2-12)$

$$\Delta \bar{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$\nabla \phi(\bar{x}_0)$ 是函数 $\phi(\bar{x})$ 在 \bar{x}_0 点的梯度，用 \bar{g}_0 表示。 A 是 $(n \times n)$ 二阶偏导数矩阵，又称为汉森矩阵。

n 元函数在 R^n 域内的极值点的必要条件是梯度为零，即

$$\bar{g}_0 = \nabla \phi(\bar{x}_0) = 0 \quad (2-15)$$

函数的极小值存在的充分条件可用下述方法求得：

把公式 (2-15) 代入 (2-11)，得到

$$\phi(\bar{x}) - \phi(\bar{x}_0) = \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T A \Delta \bar{x} \quad (2-16)$$

如果 $\phi(\bar{x}_0)$ 为极小点，必有

$$\phi(\bar{x}) - \phi(\bar{x}_0) > 0 \quad (2-17)$$

因此得到多元函数极小点的充分条件是

$$\Delta \bar{x}^T A \Delta \bar{x} > 0 \quad (2-18)$$

根据线性代数基本知识可以得知 $\Delta \bar{x}^T A \Delta \bar{x}$ 是包含矩阵 A 的二次型函数。当 $\Delta \bar{x} \neq 0$ 时，如果 $\Delta \bar{x}^T A \Delta \bar{x} > 0$ ，则 A 为正定矩阵；如果 $\Delta \bar{x}^T A \Delta \bar{x} = 0$ ，则 A 为正半定矩阵。据此可知公式 (2-18) 中的矩阵 A 是正定矩阵。

归纳上述分析，多元函数极小点的充分必要条件是

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \phi(\bar{x}_0) = 0 \\ A > 0 \end{array} \right\} \quad (2-19)$$

即目标函数的梯度为零和二阶偏导数矩阵正定。

此外, 矩阵 A 的性质可做为多元函数极值性质的判断因素。在 $\nabla \phi(\bar{x}_0) = 0$ 的情况下, 如果 $A > 0$ (即 A 是正定矩阵), 则 \bar{x}_0 是函数极小点; 如果 $A = 0$ (即 A 是正半定矩阵), 则 \bar{x}_0 是目标函数极小点之一, 还存在另外的极小点 \bar{x}_i , 而且 $\phi(\bar{x}_0) = \phi(\bar{x}_i)$; 如果 $A < 0$ (即 A 是负定矩阵), 则 \bar{x}_0 点是目标函数极大点。矩阵 A 是否正定, 可用 A 的各阶主子式行列式值是否大于零的条件来判断。

(二) 函数的凸性

上述目标函数极小值的充分必要条件可以用来判断函数是否为极小值, 但是 $\phi(\bar{x}_0)$ 不一定是全域最小值。图 2-5 中的一元函数就有两个极小点, 图 2-6 的二元函数也有两个以上的极小点。为了判断极小点是否为全域最小点, 需要借助于函数凸性的分析。

(1) 一元函数的凸性

在微波电路的最优化设计中, 元件值一般有一定的取值范围, 因此, 研究函数的凸性也应该限于变量值的一定范围之内。

凸函数具有如下定义: 函数 $\phi(\bar{x})$ 在取值范围 (a, b) 域内, 任意两个变量点间曲线段上的点的函数值小于或等于两点联线上的数值, 则 $\phi(\bar{x})$ 称为 (a, b) 区间的凸函数。

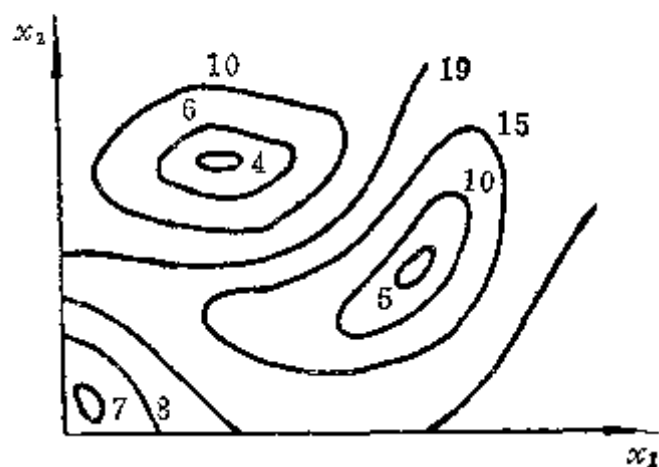


图2-6 二元函数极值点

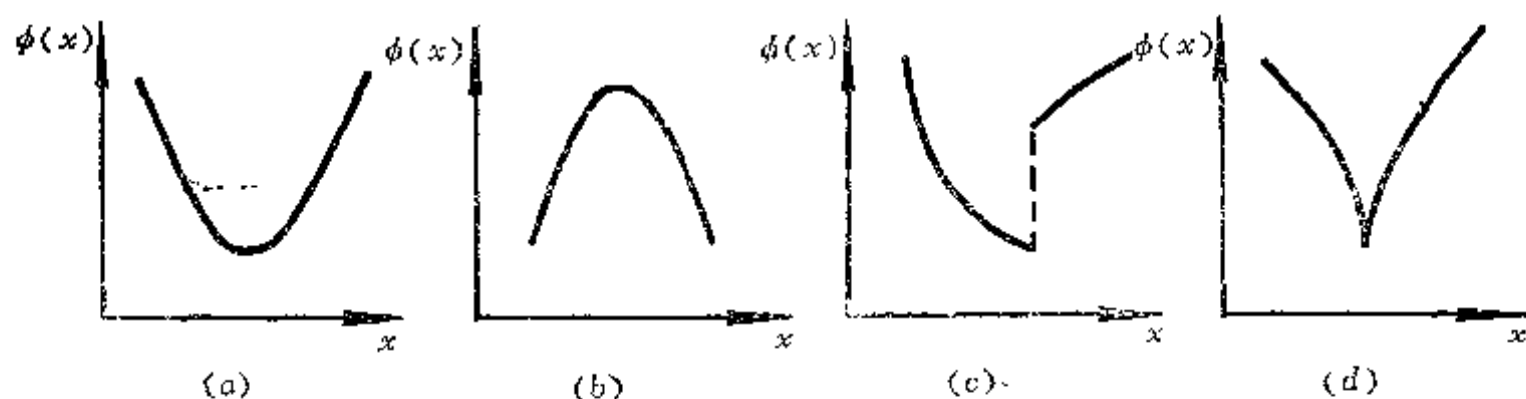


图2-7 凸函数与凹函数

图 2-7 给出取值范围内函数变化的几种情况。现在根据凸函数的定义来分析它的数学表示式。图 2-8 是严格凸函数, 在给定取值范围 (a, b) 内有任意二点 x_1 和 x_2 , 这两个点的函数值分别是 $\phi(x_1)$ 和 $\phi(x_2)$ 。在 x_1 和 x_2 之间任意点的数值可写成如下表示式

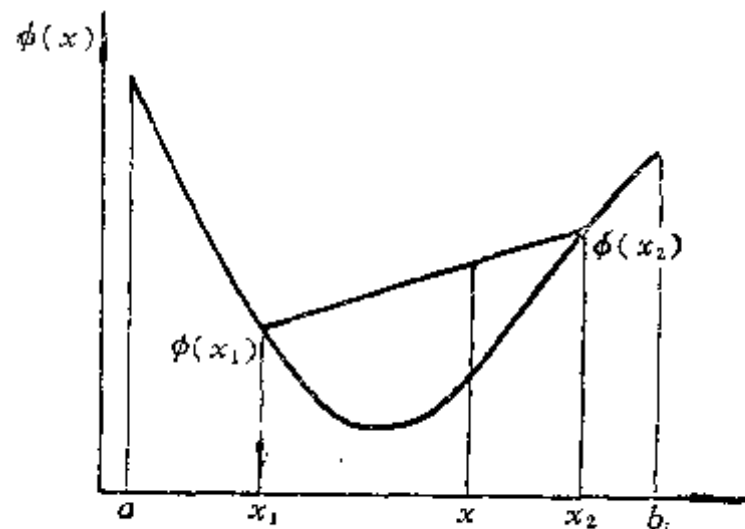


图2-8 严格凸函数

$$\begin{aligned} x &= x_2 - \alpha(x_2 - x_1) \\ &= \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \end{aligned} \quad (2-20)$$

$\phi(x_1)$ 和 $\phi(x_2)$ 连线 (直线) 上各点的数值是

$$\begin{aligned} &\phi(x_2) - \alpha[\phi(x_2) - \phi(x_1)] \\ &= \alpha\phi(x_1) + (1 - \alpha)\phi(x_2) \end{aligned} \quad (2-21)$$

按照凸函数定义必然有如下关系

$$\begin{aligned}\phi[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] &\leq \alpha\phi(x_1) + (1-\alpha)\phi(x_2) \\ (a \leq x_1 < x_2 \leq b, 0 \leq \alpha \leq 1)\end{aligned}\quad (2-22)$$

这就是一元凸函数判别条件的数学表示式。

基于上述分析可归纳出一元凸函数的主要特性：

1. 函数 $\phi(x)$ 如果在 (a, b) 区间为凸函数，则它的极小值就是 (a, b) 区间最小值；
2. 凸函数判别的充分必要条件是：在 (a, b) 区间内处处皆存在 $d^2\phi(x)/dx^2 \geq 0$ ，则 $\phi(x)$ 为凸函数。

(2) 多元函数的凸性

利用一元函数凸性的分析，不难推论出多元凸函数的性质。在多维空间中，变量的取值范围也是个空间，称为可行域。函数凸性的分析限于可行域之内。

首先给出凸集的定义：设 D 为 n 维欧氏空间的变量可行域，如果 D 内任意两点 x_a 和 x_b 的连线都在可行域之内，则此域称为凸集。

以二元函数为例。图 2-9 中非阴影范围是可行域。图 2-9 (a) 内任意两点的连线都在可行域内，所以是凸集；图 2-9 (b) 内 x_a 与 x_b 连线有一部分超出可行域，所以是非凸集。在三元函数情况下，凸集是个球体，球表面没有瘪下去的地方。

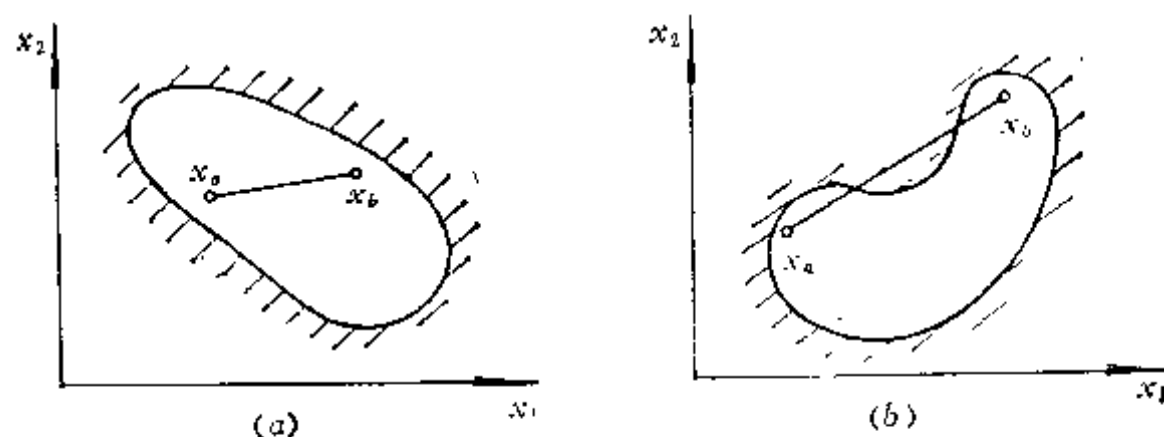


图2-9 二元函数域
(a) 凸集, (b) 非凸集

类比一元凸函数性质，可以推论出多元凸函数的性质和判别方法。如果 $\phi(\bar{x})$ 是 n 维空间凸集 D 上的函数，则有：

1. 对于 D 上任何 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 ，恒有

$$\phi[\alpha\bar{x}_1 + (1-\alpha)\bar{x}_2] \leq \alpha\phi(\bar{x}_1) + (1-\alpha)\phi(\bar{x}_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

则 $\phi(\bar{x})$ 是 D 上的凸函数；

2. 凸函数的极小值就是全域最小值；

3. 多元凸函数判别方法是：若 $\phi(\bar{x})$ 在 D 上有连续二阶偏导数，而且在 D 上处处满足

$$\bar{x}^T A \bar{x} \geq 0$$

即汉森矩阵 A 处处正半定，则 $\phi(\bar{x})$ 是凸函数；若 A 处处正定，则 $\phi(\bar{x})$ 是绝对凸函数。

在进行电路优化设计时，如果不确知存在若干极小点，必要时可先判断 A 的正定性。

§ 2.3 最小二乘法与曲线拟合

在工程技术的实际测量和科学实验工作中，常用最小二乘法进行数据处理。例如，微波

肖特基混频二极管的伏安特性为

$$I_d = I_s(e^{ay} - 1) \quad (2-23)$$

式中 I_d ——二极管电流;

I_s ——反向饱和电流;

α ——非线性指数；

V ——外加电压。

为了测量出混频二极管的伏安特性表示式，理论上只需测出两组($I_d \sim V$)值，根据两个($I_d \sim V$)方程就可解出 I_s 和 α 了。然而，由于存在测量误差，必须测出多组($I_d \sim V$)数值，再取平均和进行曲线平滑。所测出的多组数值必定是离散的，如图2-10中的小圆点所示。根据这些测量点找出一条近似曲线来代表混频管特性（如图中的实线），这就是曲线拟合问题。最小二乘法就是用数学方法找出这条曲线的数学表达式及其参数 I_s 和 α 。最小二乘法与曲线拟合在数学上是一种近似，



图2-10 测量的混频管伏安特性

但在工程实际中它能消除测量误差，更确切地反映电路和器件的真实特性。

§ 2.3.1 最小二乘问题

首先研究线性最小二乘及其应用。线性方程组的一般形式如下:

[illegible]

若用向量形式，可写成

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

或

$$A\bar{x} - \bar{b} = 0$$

式中 A —— $m \times n$ 阶系数矩阵;

\bar{x} —— n 维变量向量;

\bar{b} —— m 维常数向量;

根据 m 和 n 的数值大小，线性方程组可以分为下述三种情况（这里， m 是独立方程的个数， n 代表变量的个数）：

1. $m = n$ 。此种情况是独立方程数等于变量数，在数学上最为常见。该方程组有唯一解，称为适定方程；
2. $m > n$ 。此时独立方程数大于变量数，方程组没有解。该方程组称为矛盾方程或超定方程；
3. $m < n$ 。此时方程数小于变量数。该方程组有无穷多解，称为亚定方程。

在矛盾方程组的情况下

$$\bar{A}x - \bar{b} \neq 0$$

或者说,不存在一组能使 $A\bar{x} - \bar{b} = 0$ 的 \bar{x} 值。在具体工程技术中,矛盾方程组的情况很多,上述混频二极管伏安特性测量就是一例。混频管伏安特性公式 (2-23) 取对数以后,就可以近

式中的未知数是 a_0 、 a_1 和 a_2 。系数矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & x_8 & x_8^2 \end{pmatrix}$$

故

$$A^T A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^8 x_i & \sum_{i=1}^8 x_i^2 \\ \sum_{i=1}^8 x_i & \sum_{i=1}^8 x_i^2 & \sum_{i=1}^8 x_i^3 \\ \sum_{i=1}^8 x_i^2 & \sum_{i=1}^8 x_i^3 & \sum_{i=1}^8 x_i^4 \end{pmatrix}$$

$$A^T \bar{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^8 y_i \\ \sum_{i=1}^8 y_i x_i \\ \sum_{i=1}^8 y_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

代入方程 (2-30)，得

$$8a_0 + 25a_1 + 102a_2 = 35$$

$$25a_0 + 102a_1 + 475a_2 = 99$$

$$102a_0 + 475a_1 + 2387.25a_2 = 438.5$$

由此可解得 a_0 、 a_1 、 a_2 ，则拟合多项式是

$$y = 12.9518 - 6.5688x + 0.93732x^2$$

用最小二乘的法方程进行曲线拟合，其计算步骤简单，尤其在矩阵维数（即拟合多项式的方次）不大时，是一种方便实用的工程计算方法。但需注意，编制程序应该采用双精度型，以减小计算误差。

§ 2.3.3 正交多项式拟合

当拟合多项式方次高时，法方程系数矩阵属于病态，从而导致很大误差。为了提高计算精度，把拟合多项式改为正交多项式。正交多项式拟合公式的形式为

$$\phi(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \dots + a_n p_n(x) \quad (2-37)$$

式中 $p_i(x)$ ($i=0, 1, \dots, n$) 是 x 的 i 次多项式，此多项式的每个分量是由 $p_i(x)$ 组成而不再是简单的 x^i 。这里的 $p_i(x)$ 是一组正交多项式。在建立正交多项式时必须保持 $n < m-1$ (m 是测量数据的个数)，即测量数据的数量必须足够多。

正交多项式就是各多项式 $p_i(x)$ 中任意两个多项式 $p_r(x)$ 和 $p_s(x)$ 皆正交。用公式表示为

$$\sum_{k=1}^m p_r(x_k) \cdot p_s(x_k) = 0 \quad (r \neq s) \quad (2-38)$$

式中 x_k 是取值范围 (a, b) 中的自变量点（共有 m 个）。

曲线拟合的最终目标仍然是使拟合多项式 $\phi(x)$ 与测量数据组 y_i 的均方误差为最小，即

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^m W_i [\phi(x_i) - y_i]^2 \quad (2-39)$$

式中 y_i ($i=1, 2, \dots, m$) 是测量所得的数据组, W_i 是各测量点所需的加权函数, σ_m^2 是拟合曲线的均方误差。

可以证明, 用正交多项式拟合能够获得更高的精度^[2]。利用正交条件可以推导出拟合多项式的系数是

$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^m W_i y_i p_j(x_i)}{\sum_{i=1}^m W_i p_j^2(x_i)} \quad (j=0, 1, \dots, n) \quad (2-40)$$

正交多项式 $p_i(x)$ 有很多种, 其中之一是如下的递推多项式

$$\left. \begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= (x - \alpha_1) p_0(x) \\ p_{j+1}(x) &= (x - \alpha_{j+1}) p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

式中的 α 和 β 是

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{j+1} &= \frac{\sum_{i=1}^m W_i x_i p_j^2(x_i)}{\sum_{i=1}^m W_i p_j^2(x_i)} \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=1}^m W_i p_j^2(x_i)}{\sum_{i=1}^m W_i p_{j-1}^2(x_i)} \end{aligned} \right\} \quad (2-42)$$

按照式 (2-41) 和 (2-42), 可以从 $p_0(x)=1$ 开始顺序推算出各次正交多项式。

除上述递推公式外, 另一种递推公式更为简单, 其表示式如下:

$$p_j(x) = x^j + t_{j-1}^j x^{j-1} + t_{j-2}^j x^{j-2} + \dots + t_1^j x + t_0^j \quad (j=0, 1, \dots, n) \quad (2-43)$$

式中的系数是

$$t_i^{j+1} = t_{i-1}^j - \alpha_{j+1} t_i^j - \beta_j t_i^{j-1} \quad (i=0, 1, \dots, j) \quad (2-44)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} t_i^j &= 0 \quad (i > j) \\ t_{-1}^j &= 0 \\ t_j^j &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-45)$$

式 (2-44) 中的 α_i 和 β_i 仍用式 (2-42), 多项式系数的计算仍是公式 (2-40)。

实际上, 当把算得的正交多项式 $p_j(x)$ 和系数 a_j 代入式 (2-37), 经整理后得到的仍是一个 x 的 n 次多项式, 其形式必是

$$\phi(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n \quad (2-46)$$

由于在运算过程中使用正交多项式递推公式, 避开了最小二乘法系数矩阵的求解, 因而病态系数矩阵的计算误差得以避免。

在用计算机求解 (2-37) 时, 是把递推出的 $a_j p_j(x)$ 顺次累加到 $\phi(x)$ 。随着 $\phi(x)$ 方次增大, 拟合平方误差 σ_m^2 逐步下降, 达到要求时即可令停机; 或者, 若把 σ_m^2 下降的速度减缓时的方次定为多项式的最佳方次, 则当达到最佳方次时就停机。最佳方次的确定可用算术平均平方误差

$$\delta_h = \frac{\sigma_h^2}{n-h} \quad (2-47)$$

来判断, δ_h 是方次为 h 时的平均平方误差, $n=m-1$ 是最大允许方次, 当多项式方次逐渐增加, 使平均平方误差开始出现回升 (即 $\delta_{h+1} > \delta_h$) 时, 此时的方次 h 定为最佳方次。

下面给出用第二种递推公式即公式 (2-43)~(2-45) 编制的正交多项式曲线拟合程序〔5〕。

程序说明:

本程序运算结果给出正交多项式 (2-46) 的系数。运算过程采用双精度型。

M——正交多项式拟合曲线次数加 1, 若选用 K 次多项式则 $M=K+1$, M 是输入参数;

N——测量数据的个数, 是输入参数;

DX——N 个元素的一维实数组, 存放测量数据自变量 x_i 的值, 共 N 个, 是输入参数;

DY——N 个元素的一维实数组, 存放测量数据因变量 y_i 的值, 共 N 个, 是输入参数;

DW——N 个元素的一维实数组, 存放权系数 W_i , 共 N 个, 是输入参数;

DB——M 个元素的一维实数组, 存放计算所得的正交多项式拟合曲线的系数, 是输出参数;

A——存放中间运算值的二维实数组。

```

SUBROUTINE RTHP (M,N,DX,DY,DW,DB)
  DOUBLE PRECISION DX(N), DY(N), DW(N), DB(M), A(2, M),
  D2, D1, S, AA, BB, XPP, FP, P, Q, C
  DO 1 K=1, M
    A(1, K)=0.0D0
    A(2, K)=0.0D0
1    DB(K)=0.0D0
    D2=1.0D0
    DO 15 J=1, M
      A(2, J)=1.0D0
      IF(J.EQ.1) GOTO 12
      DO 11 K=2, J
        S=A(1, K-1)-AA*A(2, K-1)-BB*A(1, K)
        A(1, K)=A(2, K-1)
11      A(2, K-1)=S
12    D1=0.0D0
        XPP=0.0D0
        FP=0.0D0
        DO 14 I=1, N
          P=0.0D0
          DO 13 K=1, J
            JK=J-K
13          P=P*DX(I)+A(2, JK+1)
            Q=DW(I)*P
            D1=D1+Q*P

```

```

XPP = XPP + Q * DX(I) * P
14  FP = FP + Q * DY(I)
    AA = XPP/D1
    BB = D1/D2
    C = FP/D1
    D2 = D1
    DO 15 K = 1, J
15  DB(K) = DB(K) + C * A(2, K)
    RETURN
    END

```

§ 2.3.4 非线性最小二乘

在电路设计问题中,有相当多属于优化逼近问题,例如某些带通滤波器的设计。图

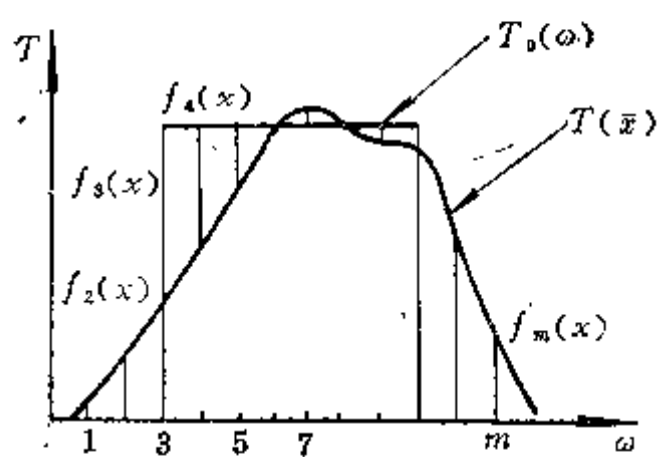


图2-13 非线性函数的曲线拟合

2-13 中的方形特性是理想带通特性,其传输系数用 $T_0(\omega)$ 表示。要求找一个函数 $T(\bar{x})$ 逼近 $T_0(\bar{x})$ 。符号中的 \bar{x} 是变量向量。在滤波器中,变量 \bar{x} 是指滤波器元件参数,如电感 L , 电容 C , 或传输线长度 θ , 特性阻抗 Z_0 等。为了使滤波特性 $T(\bar{x})$ 曲线逼近 $T_0(\bar{x})$ 曲线,只需在若干频率采样点上进行拟合,频率采样点数 m 要远大于变量数 n 。上述的设计要求可以用数学公式表示为

$$|T(\bar{x}, \omega_i) - T_0(\omega_i)| = \text{极小} \quad (i = 1 \sim m) \quad (2-48)$$

或者用一般函数形式表示为

$$|f_i(\bar{x})| < \varepsilon_i \quad (i = 1 \sim m) \quad (2-49)$$

式中 $f_i(\bar{x})$ 是实际滤波函数与理想函数在各频率采样点上特性的差值, ε_i 是各频率采样点允许的函数误差,见图2-13中的标注。

如果函数 $f(\bar{x})$ 是非线性的,公式(2-49)就是一个非线性方程组,各频率采样点的允许误差 ε_i 可以相同也可以不同。由于方程数 m 大于变量数 n ,所以式(2-49)是矛盾方程。

如果目标函数采用平方和的形式,则目标函数 $\phi(\bar{x})$ 写为

$$\phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m f_i^2(\bar{x}) = \|\bar{f}(\bar{x})\|^2 \quad (2-50)$$

式中 $\bar{f}(\bar{x})$ 代表以 $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})$ 为分量的 m 维向量, $\|\bar{f}(\bar{x})\|$ 是 $\bar{f}(\bar{x})$ 的欧氏范数。这时设计的要求归结为求解 \bar{x} , 使下式得到满足

$$\phi(\bar{x}) = \|\bar{f}(\bar{x})\|^2 = \text{极小} \quad (2-51)$$

由于 $f(\bar{x})$ 是非线性方程,因而是非线性最小二乘问题。

非线性最小二乘问题的求解方法如下:先选一个向量 \bar{x}_0 , \bar{x}_0 值应该尽可能接近目标函数的最小点。在 \bar{x}_0 点把 $f_i(\bar{x})$ 展开成台劳级数,由于 \bar{x}_0 选在极小点附近,因而可取线性近似

$$f_i(\bar{x}) \cong f_i(\bar{x}_0) + \nabla f_i(\bar{x}_0)^T \Delta \bar{x} \quad (i = 1 \sim m) \quad (2-52)$$

式中 $\nabla f_i(\bar{x}_0)^T = \left[\frac{\partial f_i(\bar{x}_0)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_i(\bar{x}_0)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_i(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \right]$

$$\Delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$$

把方程组 (2-52) 用向量形式表示成

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}_0) + A_0 \Delta \bar{x} \quad (2-53)$$

式中 $A_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\bar{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\bar{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2-54)$

A_0 是导数的 $m \times n$ 阶矩阵。把公式 (2-53) 代入 (2-51)，得到

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}) &= \|\bar{f}(\bar{x}_0) + A_0 \Delta \bar{x}\|^2 \\ &= \|\bar{f}(\bar{x}_0)\|^2 + 2(A_0 \Delta \bar{x})^T \bar{f}(\bar{x}_0) + (A_0 \Delta \bar{x})^T A_0 \Delta \bar{x} \\ &= \|\bar{f}(\bar{x}_0)\|^2 + 2\Delta \bar{x}^T A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0) + \Delta \bar{x}^T A_0^T A_0 \Delta \bar{x} \end{aligned} \quad (2-55)$$

用解析法求目标函数 $\phi(\bar{x})$ 的极小值，令

$$\nabla \phi(\bar{x}) = 0$$

即 $\nabla \phi(\bar{x}) = \nabla \|\bar{f}(\bar{x}_0)\|^2 + \nabla [2\Delta \bar{x}^T A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0)] + \nabla [\Delta \bar{x}^T A_0^T A_0 \Delta \bar{x}] = 0 \quad (2-56)$

式 (2-56) 中的几项梯度式是

$$\begin{aligned} \nabla \|\bar{f}(\bar{x}_0)\|^2 &= 0 \\ \nabla [2\Delta \bar{x}^T A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0)] &= 2A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0) \\ \nabla [\Delta \bar{x}^T A_0^T A_0 \Delta \bar{x}] &= 2A_0^T A_0 \Delta \bar{x} \end{aligned}$$

于是，式 (2-56) 简化成

$$A_0^T A_0 \Delta \bar{x} + A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0) = 0 \quad (2-57)$$

这个公式就是 (2-50) 的法方程，它是 n 阶方程组。由式 (2-57) 可得出

$$\Delta \bar{x} = -(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0) \quad (2-58)$$

由于 $\Delta \bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \quad (2-59)$

式中 \bar{x}_1 是目标函数极小点，从而得到

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - (A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \bar{f}(\bar{x}_0) \quad (2-60)$$

用式 (2-60) 可以直接算出极小点的值。但是这样算得的 \bar{x}_1 并非严格极小点。因为公式 (2-52) 是近似展开式，其高次项已被忽略，所以 \bar{x}_1 只是进一步的近似解。最初选定的初始值 \bar{x}_0 至严格极小点的距离愈远，则 \bar{x}_1 的近似性愈差。为了求得更准确的解，可以用 \bar{x}_1 做初始值再重复计算。

在实际应用时, 初始值 \bar{x}_0 的选取很重要。初始值如果偏离最佳值太远, 则将产生很大误差。为了改善设计效果, 求出 $\Delta \bar{x}$ 之后, 并不直接把 $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}$ 做为下次计算的初值, 而是用 $\Delta \bar{x}$ 作为寻查方向, 用下节所述的一元函数优化法, 从 \bar{x}_0 点出发, 沿 $(\bar{x}_0 + t \Delta \bar{x})$ 方向进行一维寻查, t 是待求的比例系数。用一维优化方法求得满足 $[\phi(\bar{x}_0 + t \Delta \bar{x}) = \text{极小}]$ 的 t_0 , 于是得到第一次近似解为 $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + t_0 \Delta \bar{x}$ 。如果 \bar{x}_1 不满足要求, 则可以用 \bar{x}_1 为初始值再次计算, 直到满足给定的误差为止。

最小二乘法计算框图见图 2-14。

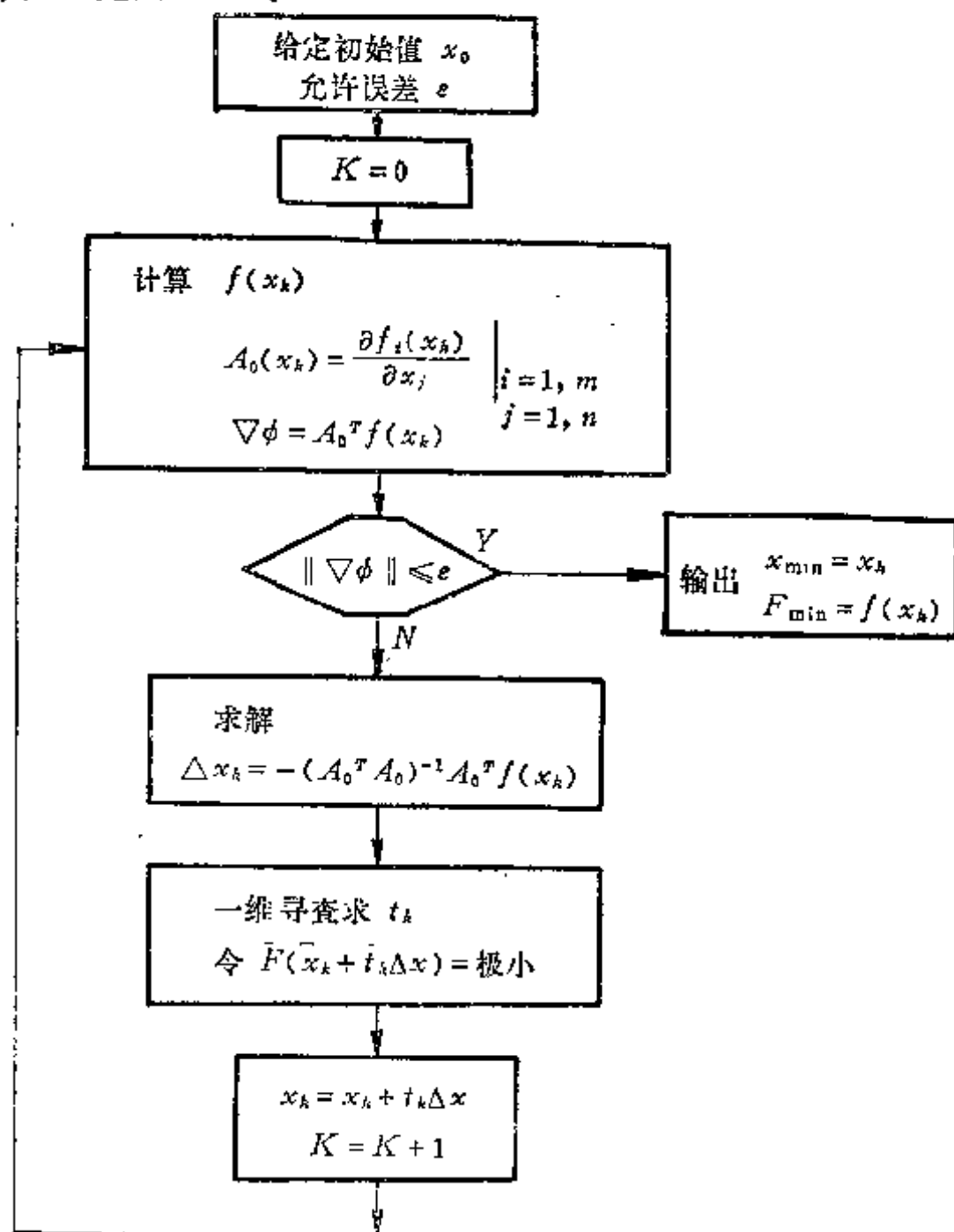


图2-14 最小二乘法框图

§ 2.4 单变量函数优化

§ 2.4.1 菲波那西和黄金分割法

菲波那西法和黄金分割法都属于消去法, 用于单变量函数的最优化, 其基本概念可用图 2-15来说明。图2-15 (a) 是目标函数 $\phi(x)$ 的变化曲线, 要求在 x 的取值范围 (a_1, a_2) 内找出目标函数的极小值和相应的变量 x 。

最优化运算的具体步骤如下:

1. 在给定的变量区间 (a_1, a_2) 内选两个点 a_3 和 a_4 , 计算出这两点的函数值 $\phi(a_3)$ 和

$\phi(a_4)$ 。

2. 在 $\phi(a_3)$ 和 $\phi(a_4)$ 中选出数值较小的一个。如果 $\phi(a_3) < \phi(a_4)$ ，则函数极小值必定存在于 (a_1, a_4) 区间。应该舍去 (a_4, a_2) 区间，保留较小值所在区间。反之，如果 $\phi(a_3) > \phi(a_4)$ ，则舍去 (a_1, a_3) 区间。至此，已把变量区间缩小了一部分，从而完成了一次寻查。

3. 对已经缩小的变量区间再进行一次寻查。令 $a'_1 = a_1$ ， $a'_2 = a_4$ ， $a'_3 = a_3$ 。再找一个中间计算点 a'_4 ，并求出 $\phi(a'_4)$ ，见图2-15 (b)。

4. 在 $\phi(a'_3)$ 和 $\phi(a'_4)$ 中找出较小的一个，保留其中较小值所在区间，舍去较大函数值以外的区间。于是变量区间又缩小了一次，即完成了第二次寻查。

如此继续下去，每次寻查使变量区间缩小一次，直到逼近目标函数极小值为止。

由上述寻查过程可知，第一次寻查计算了两个函数点，变量区间缩短了 η_1 倍， η_1 值为

$$\eta_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3} \quad (2-61)$$

以后每进行一次寻查只需要计算一次函数值。在计算了 n 次目标函数以后，变量区间缩短了 $(n-1)$ 次，缩短到 $(a_1^{(n-1)}, a_2^{(n-1)})$ 。变量区间总缩短率为

$$\eta_0 = \frac{a_2^{(n-1)} - a_1^{(n-1)}}{a_2 - a_1} = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{n-1} \quad (2-62)$$

如果最后的变量区间 $(a_1^{(n-1)}, a_2^{(n-1)})$ 足够小，能满足允许的误差，则 η_0 就是要求的缩短率。如何用尽可能少的寻查次数获得要求的缩短率，关键在于中间计算点 a_3 和 a_4 的恰当选取。

确定函数最佳计算点的方法有菲波那西法和黄金分割法。

(一) 菲波那西法

菲波那西法是利用菲波那西数列的规律来确定中间计算点。菲波那西序数列于表2-1。

表2-1 菲波那西序数

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	...

表中 n 为序号， F_n 是菲波那西数。其规律是每个数为前两个数之和。采用菲波那西序数进行一维函数寻查时，目标函数第一次的两个计算点的选取规定是

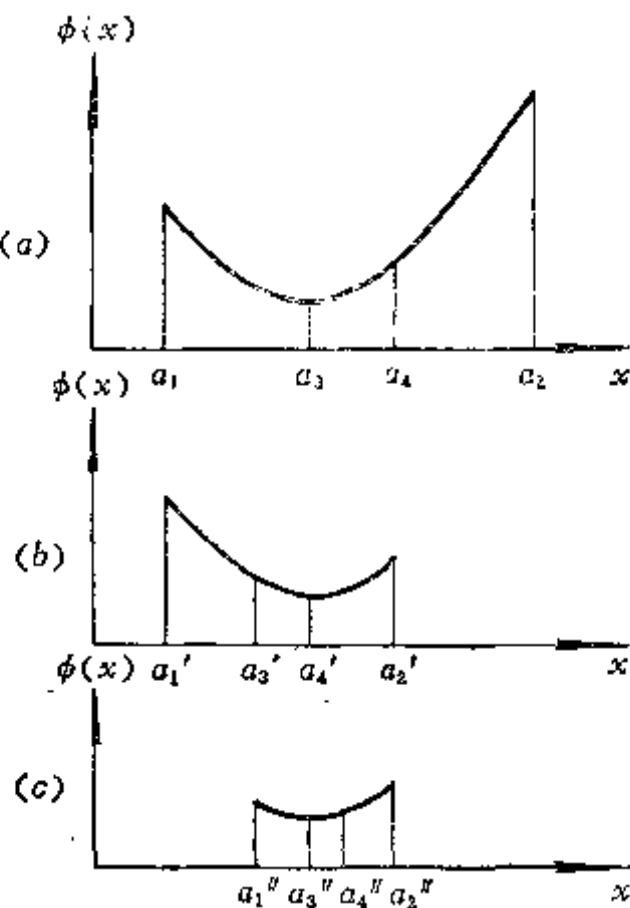


图2-15 单变量函数优化过程

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} (a_2 - a_1) \\ a_3 &= a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_n} (a_1 - a_2) \end{aligned} \right\} \quad (2-63)$$

式中的 $n-1$ 是预计进行的寻查次数。例如, 预计需要进行10次寻查, 即 $n-1=10$, 相应的菲波那西数是 $F_{n-1}=F_{10}=89$ 。显然, 寻查次数愈多, 变量区间缩小愈多, 计算结果愈精确。

菲波那西法的运算步骤如下:

1. 按公式 (2-63) 确定 a_3 和 a_4 , 计算函数值 $\phi(a_3)$ 和 $\phi(a_4)$ 。

2. 比较函数值: 若 $\phi(a_3) < \phi(a_4)$, 则保留 (a_1, a_4) 区间。令 $a'_1 = a_1$, $a'_2 = a_4$, $a'_3 = a_3$, 再增加计算点 $a'_4 = a_2 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} (a_1 - a_2)$ 。

若 $\phi(a_3) > \phi(a_4)$, 则保留 (a_3, a_2) 区间。令 $a'_1 = a_3$, $a'_2 = a_2$, $a'_3 = a_4$, 再增加计算点 $a'_4 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} (a_2 - a_1)$ 。

3. 计算出新增计算点的函数值, 再对函数值 $\phi(a'_3)$ 和 $\phi(a'_4)$ 进行比较。下次寻查时新增计算点是

$$a''_3 = a'_2 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}} (a'_1 - a'_2) \quad (\phi(a'_3) < \phi(a'_4))$$

$$a''_4 = a'_1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}} (a'_2 - a'_1) \quad (\phi(a'_3) > \phi(a'_4))$$

4. 如此继续下去, 直到第 $n-1$ 次寻查为止。

分析上述优化过程可知, 第一次寻查后变量区间缩短率为 $\eta_1 = F_{n-1}/F_n$, 第二次寻查后, 变量区间缩短率为 $\eta_2 = F_{n-2}/F_{n-1}$, 经过 $n-1$ 次寻查, 总缩短率为

$$\eta_0 = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{n-1} = \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \cdots \frac{1}{F_{n-(n-2)}} = \frac{1}{F_n} \quad (2-64)$$

公式 (2-64) 就是确定寻查次数的依据。例如, 要求目标函数的精度是 0.001, 即 $1/F_n = \eta_0 = 0.001$, 查表2-1得 $F_{15} = 987$, $n = 15$ 。

当寻查进行到 $n-1$ 次时, 两个中间计算点是

$$a_4^{(n-1)} = a_1^{(n-2)} + \frac{F_1}{F_2} (a_2^{(n-2)} - a_1^{(n-2)}) = \frac{1}{2} (a_1^{(n-2)} + a_2^{(n-2)})$$

$$a_3^{(n-1)} = a_2^{(n-2)} + \frac{F_1}{F_2} (a_1^{(n-2)} - a_2^{(n-2)}) = \frac{1}{2} (a_1^{(n-2)} + a_2^{(n-2)})$$

由于这两个中间计算点相互重叠, 无从比较, 因此, 最后一次应该取

$$\begin{aligned} a_4^{(n-1)} &= a_1^{(n-2)} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) (a_2^{(n-2)} - a_1^{(n-2)}) \\ a_3^{(n-1)} &= a_2^{(n-2)} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) (a_1^{(n-2)} - a_2^{(n-2)}) \end{aligned} \quad (2-65)$$

式中 ε 是小增量, 见图 2-16 (a)。然后计算函数 $\phi(a_1^{(n-1)})$ 和 $\phi(a_2^{(n-1)})$, 保留其中较小者所在区间。假如 $\phi(a_1^{(n-1)})$ 较小, 则剩下的区间如图 2-16 (b) 所示。最后比较 $\phi(a_1^{(n-1)})$ 和 $\phi(a_2^{(n-1)})$, 以最小的一个做为优化的结果。

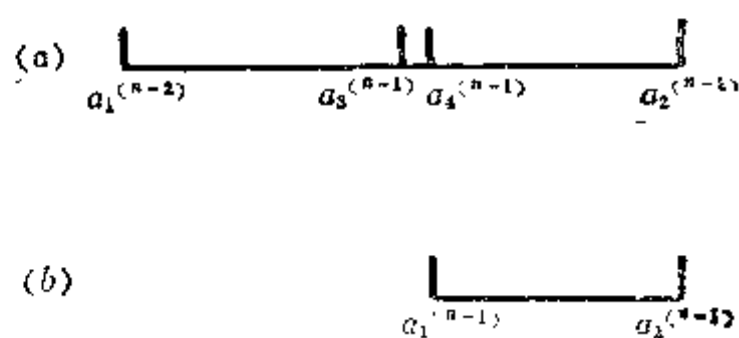


图2-16 菲波那西法优化最后结果

(二) 黄金分割法

黄金分割法是用黄金分割率来确定中间计算点:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_2 - \eta(a_2 - a_1) \\ a_4 &= a_1 + \eta(a_2 - a_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-66)$$

式中 η 是黄金分割率, $\eta \approx 0.618$ 。每次寻查的缩短率都是 η 。如果寻查 $n-1$ 次, 则函数计算点数为 n , 总缩短率是

$$\eta_0 = \eta^{n-1} \quad (2-67)$$

黄金分割法优化框图见图 2-17。如果给定变量区间是 (a_2, a_1) , 允许变量误差是 ε , 则运算步骤如下:

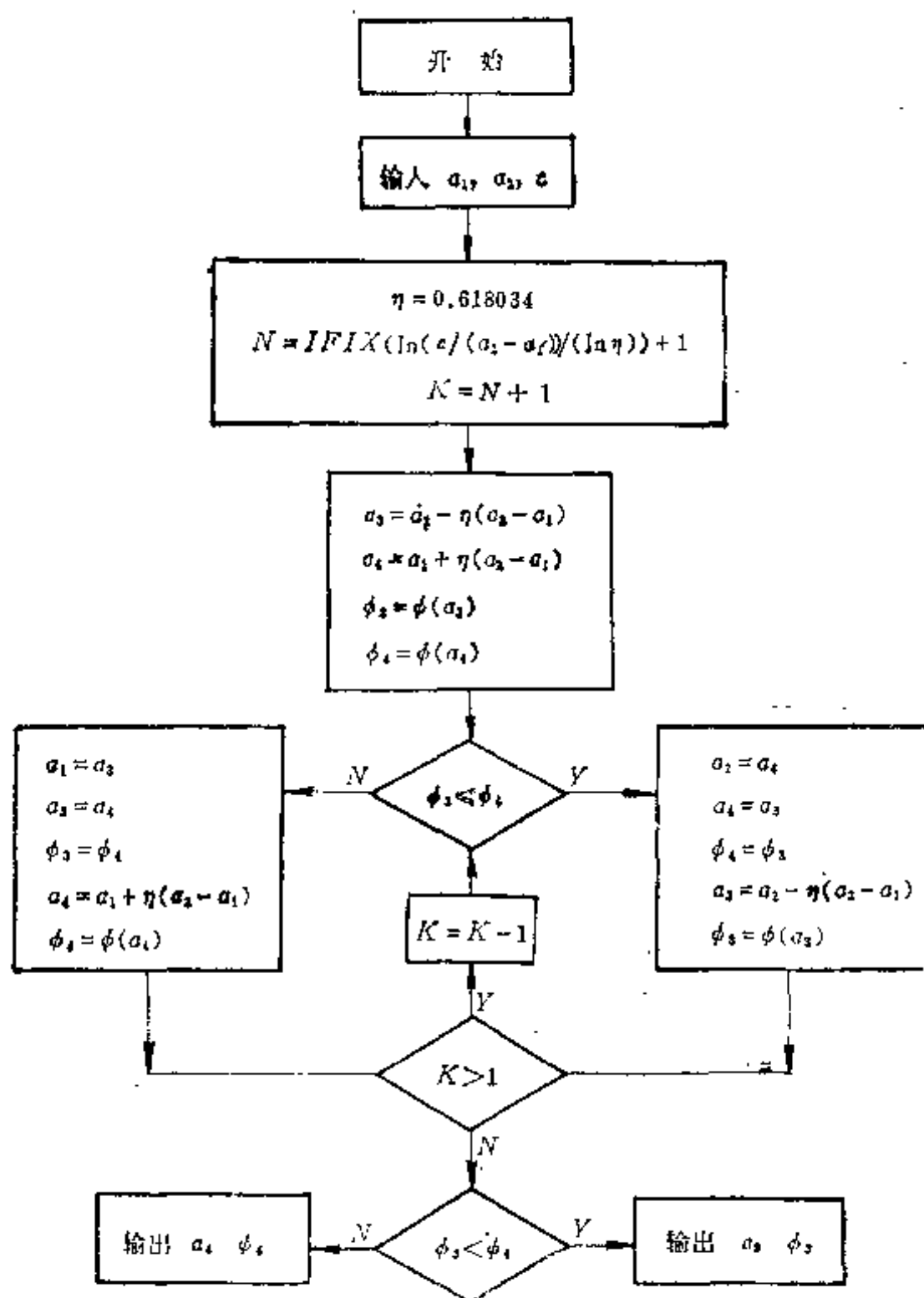


图2-17 黄金分割法框图

1. 确定寻查次数：变量范围 (a_2, a_1) 和允许误差 ε 是根据实际问题确定的。例如，微带线特性阻抗 Z_0 通常是受结构及工艺限制的，因为 Z_0 过高时微带线太细，容易断线， Z_0 过低时微带线太宽，可能产生横向高次模。因此 Z_0 的可取范围是 $(10 \sim 150)\Omega$ 。 Z_0 的误差基本上由加工精度及对电路的影响程度来确定，例如，取误差为 $\Delta Z = 0.1\Omega$ 。于是， Z_0 的允许相对误差是

$$\delta = \frac{\varepsilon}{a_2 - a_1} = \frac{0.1}{150 - 10} = 7.14 \times 10^{-4}$$

根据 $\delta = (0.618)^{n-1}$ ，得

$$n = \frac{\ln \delta}{\ln(0.618)} + 1 = 16.05$$

函数的计算次数应该取为整数，故得 $n = 17$ 。

2. 选取变量的中间计算点：用下面的公式计算两个中间点：

$$a_3 = a_2 - \eta(a_2 - a_1)$$

$$a_4 = a_1 + \eta(a_2 - a_1)$$

如果要求的优化精度很高，则寻查次数必然很多，黄金分割率 η 的位数就应该多取几位，以免寻查若干次以后由于偏离误差的积累导致优化速度减慢；或者，经过10次寻查以后重新开始寻查。黄金分割率的数学表示式是

$$\eta = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.6180339887418948 \quad (2-68)$$

3. 求中间计算点的目标函数值

$$\phi_3 = \phi(a_3)$$

$$\phi_4 = \phi(a_4)$$

4. 将 ϕ_3 和 ϕ_4 进行比较，有两种可能：

1) 若 $\phi_3 < \phi_4$ ，则取 $a_2 = a_4$ ， $a_4 = a_3$ 。增加新计算点 $a_3 = a_2 - \eta(a_2 - a_1)$ 。计算出 $\phi_3 = \phi(a_3)$ 。

2) 若 $\phi_3 > \phi_4$ ，则取 $a_1 = a_3$ ， $a_3 = a_4$ 。增加新计算点 $a_4 = a_1 + \eta(a_2 - a_1)$ 。计算出 $\phi_4 = \phi(a_4)$ 。

5. 寻查进行到 N 次以后，选择 ϕ_3 和 ϕ_4 中较小者做为优化结果，并打印输出。

黄金分割法程序

A1——变量下限；

A2——变量上限；

E——允许误差；A1, A2, E 由 COMMON 语句传入；

F(X)——函数子程序，根据目标函数编制。

```
COMMON/ARF/A1, A2, E
```

```
S = A2 - A1
```

```
C = 0.618034
```

```
N = IFIX(ALOG(E/S)/(-0.4812)) + 1
```

```
I = N
```

```

      A3 = A2 - C * S
      F3 = F(A3)
      A4 = A1 + C * S
      F4 = F(A4)
20    IF(F3 * LE * F4) GOTO 30
      A1 = A3
      A3 = A4
      F3 = F4
      A4 = A1 + C * (A2 - A1)
      F4 = F(A4)
      GOTO 40
30    A2 = A4
      A4 = A3
      F4 = F3
      A3 = A2 - C * (A2 - A1)
      F3 = F(A3)
40    IF(I - 1) 60, 60, 50
50    I = I - 1
      GOTO 20
60    IF(F3 * LT * F4) GOTO 65
      WRITE (6, 70) F4, A4
      GOTO 80
65    WRITE (6, 70) F3, A3
70    FORMAT (IX, 'OPT.FUNCTION = ', F7.3, 4X, 'VARIABLE = ', * E14.7)
80    STOP
      END

```

例 微带线折弯如图2-18所示。求最佳长度 θ ，使输入反射系数 Γ 最小。给定电长度允许误差 $\angle\theta = 0.5^\circ = 0.008727$ 弧度， θ 取值范围为 $0 \sim 2\pi$ 。微带线参数为 $\varepsilon_r = 3.94$ ， $W/H = 2.08$ ， $H = 0.8\text{mm}$ ， $f = 8\text{GHz}$ 。

解 根据§1.2.4节的微带线转弯公式(1-32)~(1-34)及图1-10，算得折弯区的转移矩阵是

$$[a_1] = \begin{bmatrix} 0.972 & j0.124 \\ j0.451 & 0.972 \end{bmatrix}$$

$$\text{传输线段}[a_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & j\sin\theta \\ j\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

在图2-18的 M 和 N 面之间的转移矩阵是

$$[a] = [a_1][a_2][a_1] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

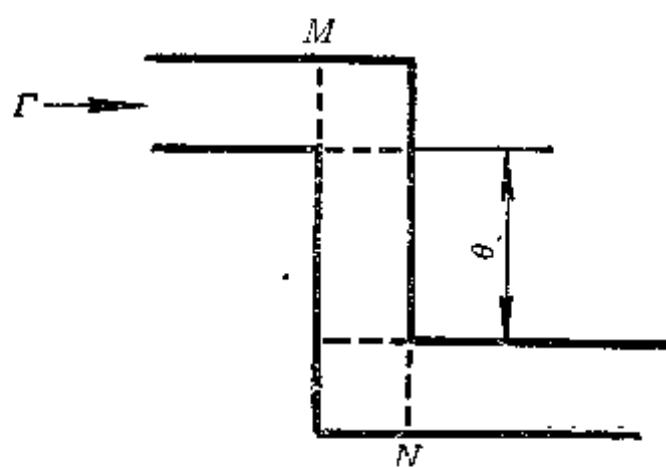


图2-18 微带线最佳折弯长度

利用 § 1.2.1 给出的矩阵联乘子程序 PRODM 可算出矩阵 $[a]$ ，从而得到输入反射系数

$$\Gamma = \frac{a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$$

把上述分析编成目标函数子程序。以反射系数的模 $|\Gamma|$ 为目标函数，对线段长度 θ 优化。利用黄金分割法程序的运算结果是：

最佳电长度 θ (弧度) = 1.284

反射系数 $|\Gamma| = 0.280956 \times 10^{-3}$

§ 2.4.2 外推内插法

菲波那西与黄金分割法需要事先给定寻查范围，但是往往无法知道最优点所在的区间，这就要用外推法找出适合的寻查范围，然后才可以使用黄金分割法确定最优点。

此外，还有另一类相当有效的单变量寻优方法，就是内插法。内插法的实质是在寻查范围内用多项式拟合目标函数，用多项式的极小点近似为目标函数的最优点。对于单峰平滑函数，内插法比黄金分割法更为有效，因为其收敛速度较快。

(一) 外推法

给定一维函数 $F = \phi(x)$ ，其变化曲线如图 2-19 所示。任选一个初始值 x_1 ，在寻查方向

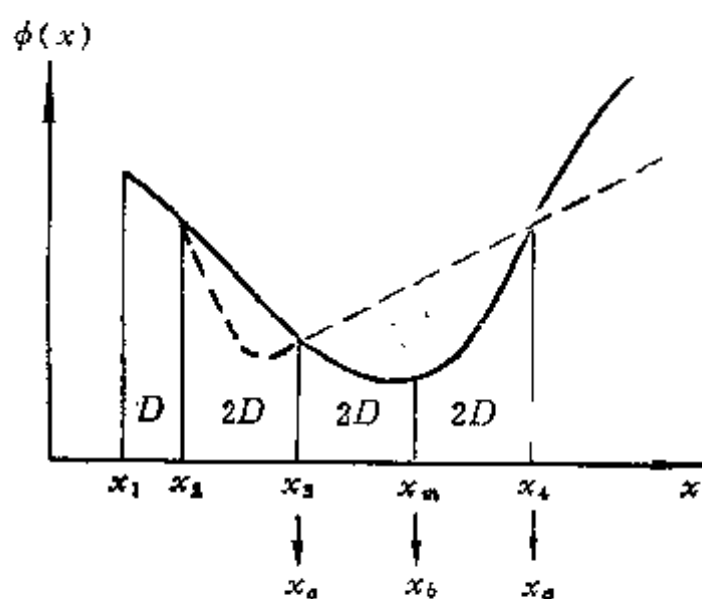


图2-1 外推法的函数曲线

上取步长 D 处的点为 x_2 ， $x_2 = x_1 + D$ ，计算 x_1 和 x_2 点的函数值 $\phi(x_1)$ 和 $\phi(x_2)$ 。比较 $\phi(x_1)$ 和 $\phi(x_2)$ ，可有两种情况：

1. $\phi(x_2) < \phi(x_1)$ ：此情况说明在寻查方向上函数曲线逐渐降低，因此这个寻查方向是正确的。为加速寻查，可以使寻查步长成倍加大，按下述步骤外推：

①步长加大一倍，取下个计算点为

$$x_3 = x_2 + 2D$$

②计算并比较这两点的函数值 $\phi(x_3)$ 和 $\phi(x_2)$ 。若 $\phi(x_3) < \phi(x_2)$ ，则步长再加大一倍，取

$$x_4 = x_3 + 4D$$

如此继续下去。

③若 $\phi(x_4) > \phi(x_3)$ ，说明曲线开始上升。可以认为目标函数极小点处在 $x_2 \sim x_4$ 之间。应该注意，不能认为优化点仅在 $x_3 \sim x_4$ 之间，比如遇到图 2-19 中虚线所示的曲线，其极小点就不在 $x_3 \sim x_4$ 之间。由于寻查步长逐次加倍，所以相邻两个计算点的距离是前两点距离的 2 倍，数学式表为

$$x_k - x_{k-1} = 2(x_{k-1} - x_{k-2})$$

用 x_{min} 表示目标函数极小点，必有

$$x_{k-2} < x_{min} < x_k$$

④取 x_{k-1} 和 x_k 之间的中点 x_m 做补充计算点

$$x_m = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$$

⑤比较 $\phi(x_{k-1})$ 和 $\phi(x_m)$ ，舍去函数值较大一边的边沿点，其余三个点记为 x_1, x_2, x_3 。

对于图2-19的情况, 即 $\phi(x_3) > \phi(x_m)$, 应该舍去 x_2 点。

2. $\phi(x_2) > \phi(x_1)$: 此情况说明曲线随 x 增加而上升, 所以应该向反方向寻查, 即取寻查步长为 $(-D)$, 第2个点为 $x_2 = x_1 - D$ 。余类推, 寻查步骤与前种情况相同。

经过多次外推, 得到极小值存在范围是 $x_a \sim x_c$ 。下一步可以转接黄金分割程序或多项式内插程序。

(二) 二次插值法

由外推法获得了极小值存在区间中的三个计算点和这三个点的目标函数值, 根据这几个参数就可以用内插法求函数极小值。二次插值法是用一条包含这三个点的抛物线拟合目标函数, 用抛物线极小点代替目标函数极小点。在图2-20中, 实线是目标函数曲线, F_a 、 F_b 和 F_c 是外推法得到的3个函数点。过此三点做抛物线, 如图中虚线所示。抛物线方程是

$$p(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 \quad (2-69)$$

由于抛物线是二次方程, 所以这种内插法叫二次插值法。也叫抛物线三点拟合。

用 F_a 、 F_b 、 F_c 代表三个函数点, 即 $F_a = \phi(x_a)$, $F_b = \phi(x_b)$, $F_c = \phi(x_c)$, 抛物线方程应该满足

$$p(x_a) = F_a = k_0 + k_1x_a + k_2x_a^2 \quad (2-70a)$$

$$p(x_b) = F_b = k_0 + k_1x_b + k_2x_b^2 \quad (2-70b)$$

$$p(x_c) = F_c = k_0 + k_1x_c + k_2x_c^2 \quad (2-70c)$$

解方程组 (2-70), 可以求得 $p(x)$ 的系数 k_0 、 k_1 和 k_2 。

对式 (2-69) 求导数, 并令其等于零, 得

$$p'(x) = k_1 + 2k_2x = 0 \quad (2-71)$$

于是得到抛物线的极小点位置

$$x = -\frac{k_1}{2k_2} \quad (2-72)$$

$$k_1 = \frac{F_a(x_b^2 - x_c^2) + F_b(x_c^2 - x_a^2) + F_c(x_a^2 - x_b^2)}{(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)} \quad (2-73)$$

$$k_2 = -\frac{F_a(x_b - x_c) + F_b(x_c - x_a) + F_c(x_a - x_b)}{(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)} \quad (2-74)$$

把 k_1 和 k_2 代入式 (2-72) 并化简, 得

$$x = \frac{1}{2} \frac{B}{A} \quad (2-75)$$

$$A = F_a(x_b - x_c) + F_b(x_c - x_a) + F_c(x_a - x_b) \quad (2-76)$$

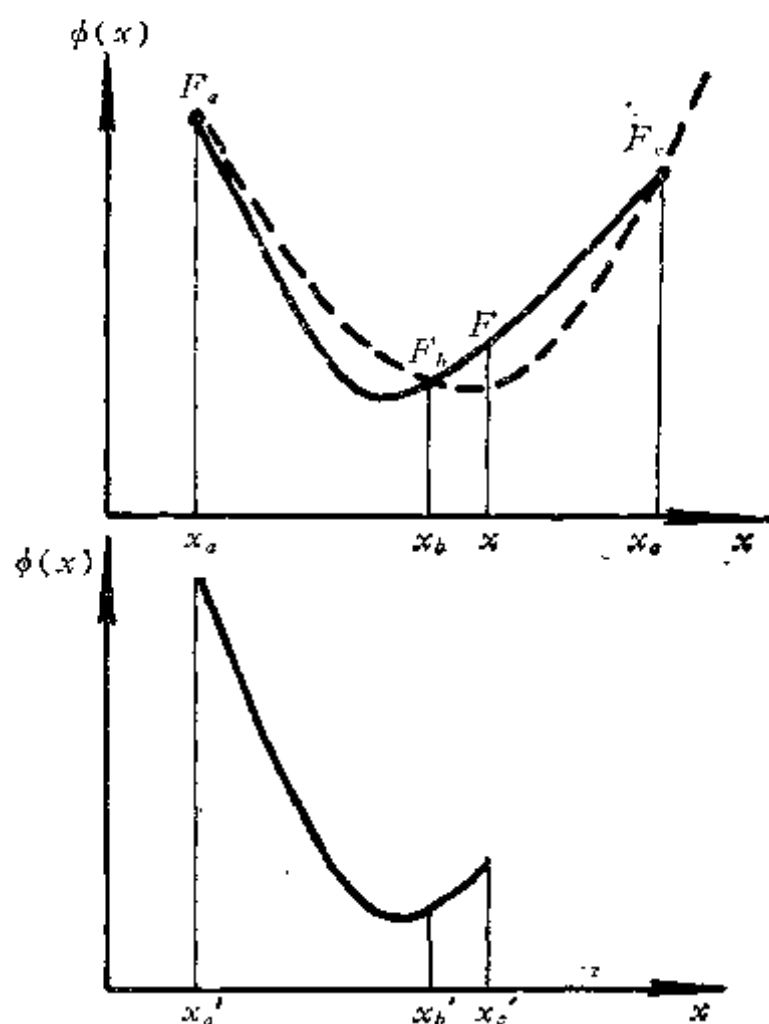


图2-20 二次插值法函数曲线

$$B = F_a(x_b^2 - x_c^2) + F_b(x_c^2 - x_a^2) + F_c(x_a^2 - x_b^2) \quad (2-77)$$

x 点的目标函数值是 $F = \phi(x)$ 。由 F_a 、 F_b 、 F_c 和 F 这 4 个点中舍去数值较大的边缘点，余下三个点用 x'_a 、 x'_b 和 x'_c 表示，对此三点再次进行插值，直到 F_b 和 F 两个函数值之差小于允许误差为止。

下面给出二次插值程序。此程序可用于一元函数的一维寻查，也可用于多元函数的一维

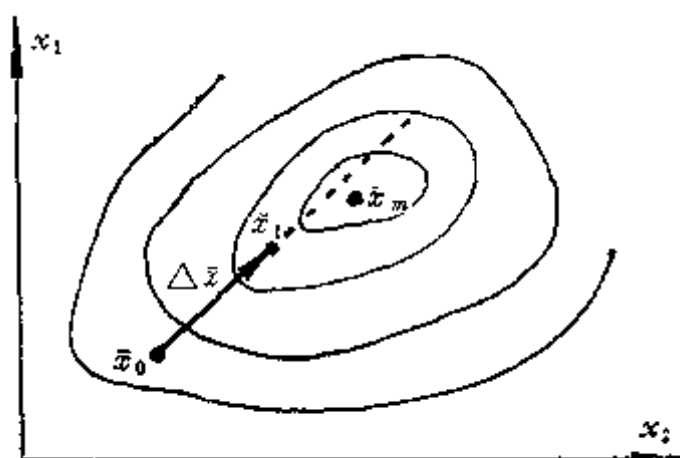


图 2-21 二元函数一维寻查

寻查。在对多元函数进行优化时，常把优化过程分解为许多次一维寻查，逐步逼近最优值，因此一维寻查是最优化的基本运算。例如，在非线形最小二乘中，用法方程求得近似极小点 $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}$ ，由于运算误差， \bar{x}_1 是近似值。此关系示于图 2-21。 \bar{x}_m 是二元函数 $\phi(\bar{x})$ 的极小点。为提高计算精度，以 \bar{x}_0 为初始点沿 $\Delta \bar{x}$ 方向进行寻查，即对 $\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x}_0 + t_0 \Delta \bar{x})$ 寻优，改变步长因子 t_0 ，使 $\phi(\bar{x})$ 为极小。此时 t_0 是一维变量。这就是二元函数的一维寻

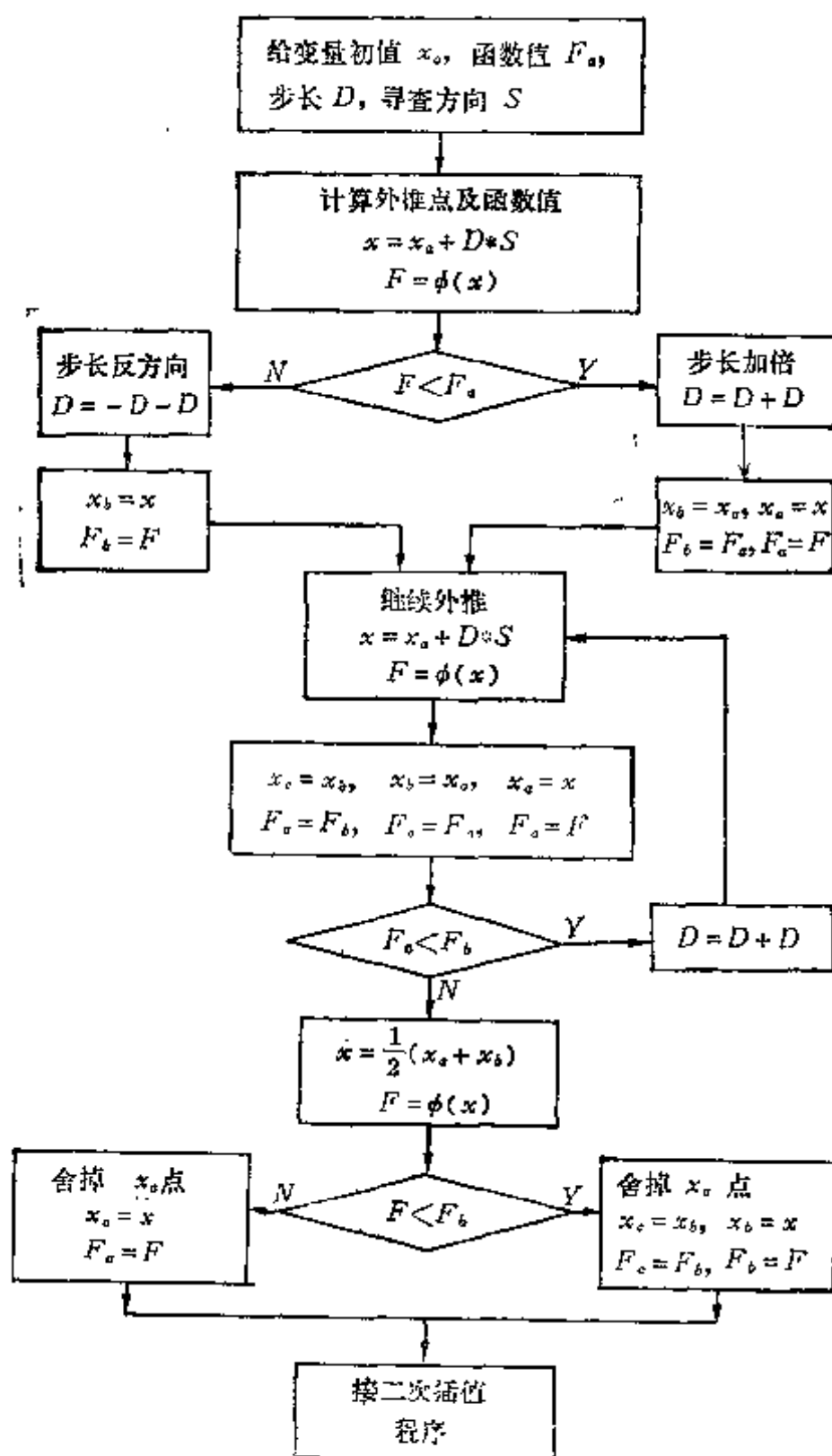


图 2-22 外推法框图

查。下面的程序包括外推及抛物线插值。外推框图见图 2-22，抛物线插值框图见图 2-23。

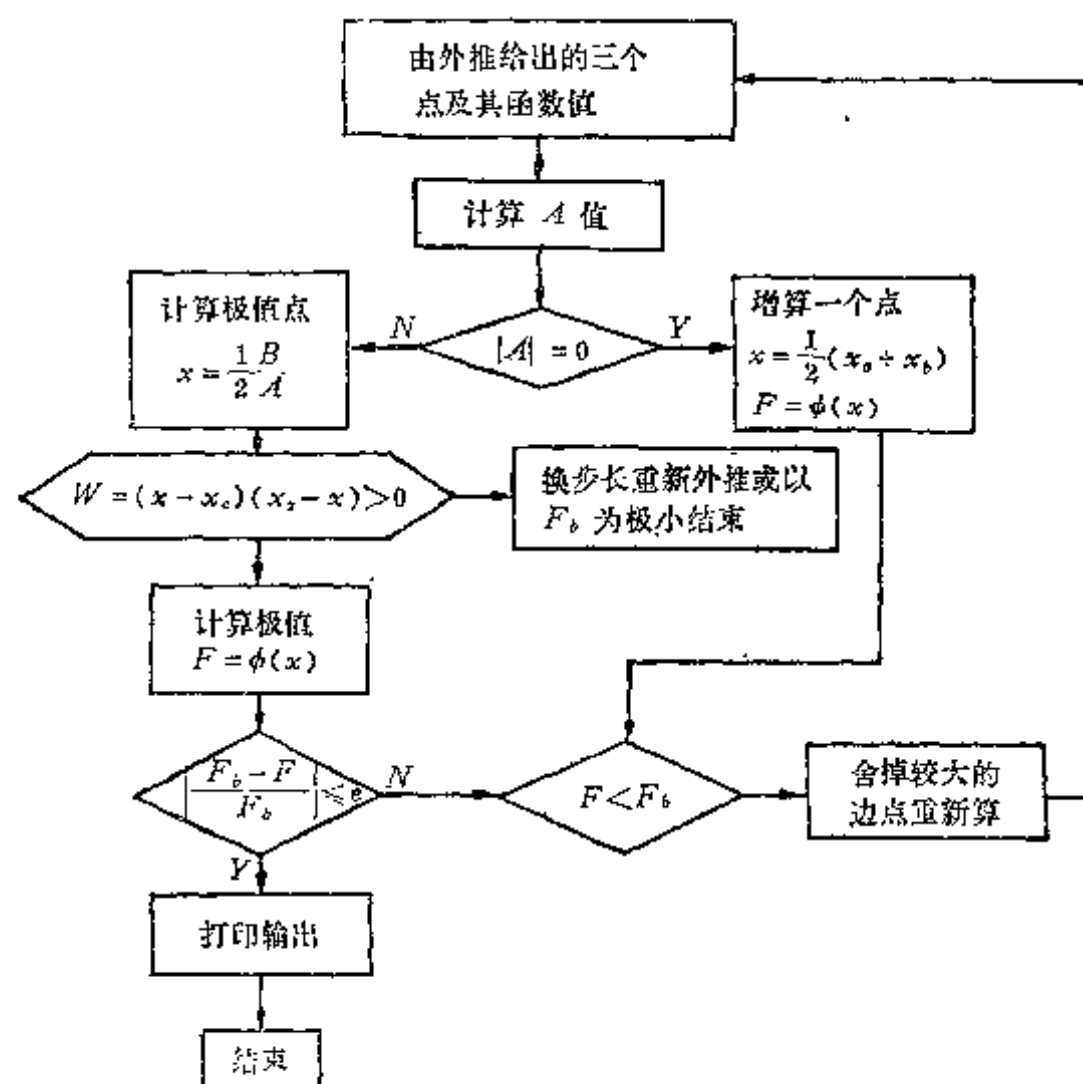


图2-23 抛物线二次插值框图

二次插值程序

程序说明：

1. 本程序是多元函数的一维寻查程序。输入初始变量点 \bar{x}_0 和该点的目标函数值。运算后给出目标函数极小点值。

2. OBF 是目标函数子程序，由使用人自编。此处给出试通程序用的函数

$$\phi(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

初始点 $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$, 函数值 $\phi(\bar{x}^{(0)}) = 5.2$

寻查方向 $S = \begin{bmatrix} 24.4 \\ 12.0 \end{bmatrix}$, 精度 0.001

计算结果极小点 $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.71147 \\ 2.93187 \end{bmatrix}$

极小函数值 $\phi(\bar{x}^{(1)}) = 0.506942$

3. 符号

X(N)——输入参数，N 个元素的一维数组，存放变量向量的初始值 \bar{x} ，

FX——输入参数，目标函数 $\phi(\bar{x})$ 在 \bar{x} 点的值，

Y(N)——输出参数，存放寻查所得极小点值，

S(N)——输入参数，寻查方向的向量，

DELX(N)——输入参数,存放上次寻查时变量 x 的改变量,也可不给 DELX 值,此时取 $ITER = 0$;

N——数组 X, Y, S, DELX 的变量个数;

INDIC——输入参数,当 $INDIC \neq 1$ 或 2 时表示对寻查方向 S 值进行规格化, $INDIC = 2$ 为不要规格化, $INDIC = 1$ 表示只当 $\|S\| > \|DELX\|$ 时要规格化,所谓规格化,就是取 $\|S\| = \|DELX\|$,即本次寻查方向向量的长度取为上次寻查的变化量;

TOL——输入参数,一维寻查精度;

ITOL——输入参数, $ITOL = 1$ 表示使用人已给精度, $ITOL \neq 1$ 表示使用人未给精度,由程序自动取为 $TOL = 0.001$;

ITER——输入参数, $ITER = 0$ 表示寻查方向不要规格化, $ITER \neq 0$ 表示已给出 DELX,需进行规格化;

IEX——输出参数, $IEX = 0$ 表示 Y 已满足精度, $IEX = 2$ 表示 Y 点的目标函数值比 X 点的好, $IEX = 1$ 表示程序给不出比 X 更好的点。

```
001      SUBROUTINE DSCPOW(X, FX, Y, FY, S, DELX, N,  
      *INDIC, TOL, ITOL, ITER, IEX)  
002      DIMENSION X(N), Y(N), S(N), DELX(N)  
003      FB = 0.0  
004      DB = 0.0  
005      NTOL = 1  
006      IF(ITOL.EQ.1) GOTO 110  
007 110 FTOL2 = TOL/100.  
008      IEX = 1  
009      K = -2  
010      M = 0  
011      FA = FX  
012      DA = 0.  
013      STEP = 1.0  
014      D = STEP  
015      IF(INDIC.EQ.2) GOTO 1  
016      IF(ITER.EQ.0) GOTO 1  
017      DXNORM = 0.  
018      SNORM = 0.  
019      DO 102 I = 1, N  
020          DXNORM = DXNORM + DELX(I) * DELX(I)  
021 102      SNORM = SNORM + S(I) * S(I)  
022          IF(INDIC.NE.1) GOTO 103  
023          IF(DXNORM.GE.SNORM) GOTO 1  
024 103      RATIO = DXNORM/SNORM  
025          STEP = SQRT(RATIO)  
026          D = STEP
```



```

027      1 DO 2 I=1,N
028      2 Y(I)=X(I)+D*S(I)
029      CALL OBF(Y, F)
030      K=K+1
031      IF(F-FA) 5, 3, 6
032      3 D=0,5*(DA+D)
033      DO 4 I=1, N
034      4 Y(I)=X(I)+D*S(I)
035      CALL OBF(Y, F)
036      IF(F-FA) 204, 202, 205
037  202 DO 203 I=1, N
038  203 Y(I)=X(I)+DA*S(I)
039      FY=FA
040      GOTO 326
041  204 FC=FA
042      DC=DA+2.*(D-DA)
043      FB=F
044      DB=D
045      GOTO 21
046  205 STEP=0,5*STEP
047      IF(K) 7, 8, 206
048  206 DC=D
049      D=DA
050      DA=DB
051      DB=D
052      FC=F
053      F=FA
054      FA=FB
055      FB=F
056      GOTO 10
057      5 FC=FB
058      FB=FA
059      FA=F
060      DC=DB
061      DB=DA
062      DA=D
063      D=2,0*D+STEP
064      GOTO 1
065      6 IF(K) 7, 8, 9
066      7 FB=F
067      DB=D
068      D=-D
069      STEP=-STEP
070      GOTO 1

```

```

071      8  FC = FB
072      FB = FA
073      FA = F
074      DC = DB
075      DB = DA
076      DA = D
077      GOTO 21
078      9  DC = DB
079      DB = DA
080      DA = D
081      FC = FB
082      FB = FA
083      FA = F
084     10  D = 0.5 * (DA + DB)
085      DO 11 I = 1, N
086     11  Y(I) = X(I) + D * S(I)
087      CALL OBF(Y,F)
088     12  IF((DC - D) * (D - DB)) 15, 13, 18
089     13  DO 14 I = 1, N
090     14  Y(I) = X(I) + DB * S(I)
091      FY = FB
092      IF(LEX.EQ.0) GOTO 32
093      GOTO 326
094     15  IF(F - FB) 16, 13, 17
095     16  FC = FB
096      FB = F
097      DC = DB
098      DB = D
099      GOTO 21
100     17  FA = F
101      DA = D
102      GOTO 21
103     18  IF(F - FB) 19, 13, 20
104     19  FA = FB
105      FB = F
106      DA = DB
107      DB = D
108      GOTO 21
109     20  FC = F
110      DC = D
111     21  IF(ABS(DA - DB).GE.ABS(DC - DB)) GOTO 50
112      D = DA
113      DA = DC
114      DC = D

```

```

115      F = FA
116      FA = FC
117      FC = F
118  50  IF (ABS((DC - DB)/(DA - DB)).GT.0.25) GOTO 26
119      D = 0.5 * (DA + DB)
120      DO 51 I = 1, N
121  51  Y(I) = X(I) + D * S(I)
122      CALL OBF(Y, F)
123      IF (F - FB) 52, 13, 53
124  52  FC = FB
125      FB = F
126      DC = DB
127      DB = D
128      GOTO 26
129  53  FA = F
130      DA = D
131  26  A = FA * (DB - DC) + FB * (DC - DA) + FC * (DA - DB)
132      IF (A) 22, 30, 22
133  22  D = 0.5 * ((DB * DB - DC * DC) * FA + (DC * DC - DA * DA) * FB + (DA * DA
      - DB * DB) * FC) / A
134      IF ((DA - D) * (D - DC)) 13, 13, 23
135  23  DO 24 I = 1, N
136  24  Y(I) = X(I) + D * S(I)
137      CALL OBF(Y, F)
138      IF (ABS(FB - F) - (ABS(FB) + FTOL2) * TOL) 28, 28, 12
139  28  IEX = 0
140      IF (F - FB) 29, 13, 13
141  29  FY = F
142      GOTO 32
143  30  IF (M) 31, 31, 13
144  31  M = M + 1
145      GOTO 10
146  32  DO 99 I = 1, N
147      IF (Y(I).NE.X(I)) GOTO 326
148  99  CONTINUE
149  33  IF (NTOL.EQ.5) GOTO 34
150      IEX = 1
151      NTOL = NTOL + 1
152      TOL = TOL / 10
153      GOTO 12
154  34  IEX = 1
155      GOTO 35
156  326 IF (FY.LT.FX) GOTO 36
157      IEX = 1

```

```

158      GOTO 35
159  36  IF(IEX,EQ,0) GOTO 35
160      IEX = 2
161  35  RETURN
162      END

```

试 通 程 序

```

      C MAIN PROGRAM
001      DIMENSION X(2), Y(2), S(2)
002      X(1) = -1.2
003      X(2) = 1.5
004      S(1) = 24.4
005      S(2) = 12.
006      FX = 5.2
007      N = 2
008      ITER = 0
009      INDIC = 2
010      TOL = 0.001
011      ITOL = 1
012      CALL DSCPOW(X, FX, Y, FY, S, DELX, N, INDIC, TOL, ITOC, ITER, IEX)
013      WRITE(6,2) Y, FY, IEX
014  2   FORMAT(5X, 3E21.10, 2X, 15//)
015      STOP
016      END

001      SUBROUTINE OBF (X, FX)
002      DIMENSION X(2)
003      FX = 100 * (X(2) - X(1) * X(1)) * (X(2) - X(1) * X(1)) + (1 - X(1)) * (1 - X(1))
004      RETURN
005      END

```

(三) 三次插值法

三次插值法是用三次多项式拟合目标函数，它比抛物线插值法具有更快的收敛速度。但是，由于需要利用目标函数的导数，所以计算略为复杂。

给定目标函数 $\phi(x)$ ，如果 $\phi(x)$ 在给定区间 $[x_1, x_2]$ 内存在极小点，则此函数必然满足

$$\left. \begin{array}{l} \phi'(x_1) < 0 \\ \phi'(x_2) > 0 \end{array} \right\} \quad (2-78)$$

式中 $\phi'(x_1)$ 和 $\phi'(x_2)$ 分别代表 $\phi(x)$ 在 x_1 和 x_2 的一阶导数。式 (2-78) 表明在 x_1 点函数曲线向右下降，在 x_2 点函数曲线向右上升。函数由下降到上升的中间必然存在极小点。

目标函数的曲线见图 2-24 中的实线。

假定三次插值多项式 $p(x)$ 为

$$p(x) = a_3(x-x_1)^3 + a_2(x-x_1)^2 + a_1(x-x_1) + a_0 \quad (2-79)$$

为了使 $p(x)$ 能较好地拟合目标函数 $\phi(x)$ ，应该满足下述 4 个条件：

$p(x_1) = \phi(x_1)$ ——在 x_1 点两函数值相等；

$p(x_2) = \phi(x_2)$ ——在 x_2 点两函数值相等；

$p'(x_1) = \phi'(x_1)$ ——在 x_1 点两函数导数相等；

$p'(x_2) = \phi'(x_2)$ ——在 x_2 点两函数导数相等。

把上述 4 个条件代入公式 (2-79)，得

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \phi(x_1) \\ a_3(x_2-x_1)^3 + a_2(x_2-x_1)^2 + a_1(x_2-x_1) + a_0 &= \phi(x_2) \\ a_1 &= \phi'(x_1) \\ 3a_3(x_2-x_1)^2 + 2a_2(x_2-x_1) + a_1 &= \phi'(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (2-80)$$

解方程组 (2-80)，就可以得到插值多项式 $p(x)$ 的 4 个系数 a_0, a_1, a_2, a_3 。

$p(x)$ 为极小值的必要条件是 $p'(x) = 0$ ，即

$$3a_3(x-x_1)^2 + 2a_2(x-x_1) + a_1 = 0 \quad (2-81)$$

解 (2-81) 式可得 $p(x)$ 的极值点 x_m 为

$$x_m - x_1 = \frac{1}{3a_3}(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}) \quad (2-82)$$

如果要求 x_m 是极小点，则 $p(x)$ 的二次导数必须大于零，即

$$p''(x) = 6a_3(x-x_1) + 2a_2 > 0 \quad (2-83)$$

把式 (2-82) 代入 (2-83)，可得

$$p''(x) = \pm 2\sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}$$

根号前只有取正号才能保持 $p''(x)$ 大于零，因此，式 (2-82) 中的根号前也必须为正号。于是得到 $p(x)$ 的极小点 x_m

$$x_m - x_1 = \frac{1}{3a_3}(-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}) \quad (2-84)$$

为了避免因 $a_3 = 0$ 时计算机溢出，可把上式化简成

$$\begin{aligned} x_m - x_1 &= \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}}{3a_3} \cdot \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}}{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}} \\ &= \frac{-a_1}{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_3a_1}} \end{aligned} \quad (2-85)$$

把 a_1, a_2, a_3 的值代入此式，经过变化形式之后得到拟合多项式 $p(x)$ 的极小点为

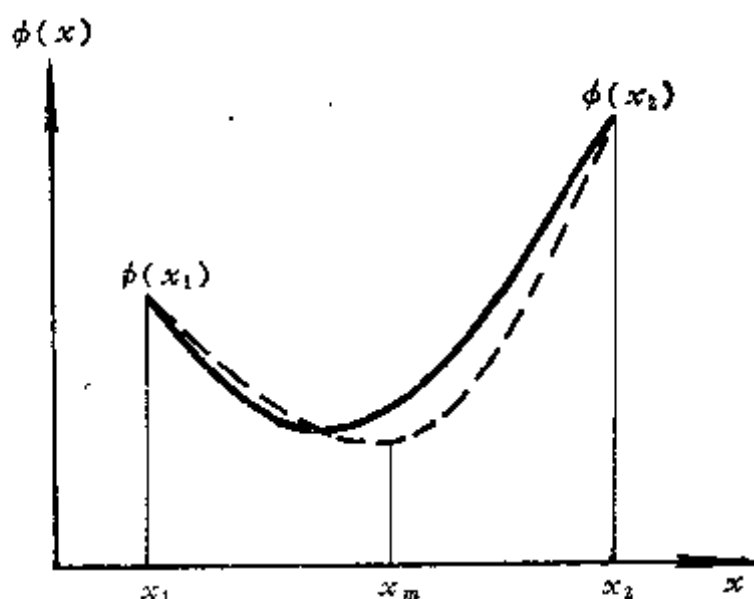


图 2-24 三次插值函数曲线

$$x_m = (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{U + W + Z}{U - V + 2W} \right) + x_1 \quad (2-86)$$

或者

$$x_m = (x_2 - x_1) \left(\frac{-V - W + Z}{2Z - U - V} \right) + x_1 \quad (2-87)$$

$$U = \phi'(x_2) \quad (2-88)$$

$$V = \phi'(x_1) \quad (2-89)$$

$$Z = s - U - V \quad (2-90)$$

$$s = 3(\phi(x_2) - \phi(x_1)) / (x_2 - x_1) \quad (2-91)$$

$$W = \sqrt{Z^2 - UV} \quad (2-92)$$

公式(2-86)和(2-87)完全相等,当其中之一出现溢出时可改用另一式。

三次插值法计算框图见图2-25。其计算步骤如下:

1. 按照公式(2-86)~(2-92)计算拟合多项式的极小点 x_m 。

2. 判断收敛。若目标函数在 x_m 点的斜率接近于零,则此点是极小点,公式表示为

$$|\phi'(x_m)| \leq \varepsilon$$

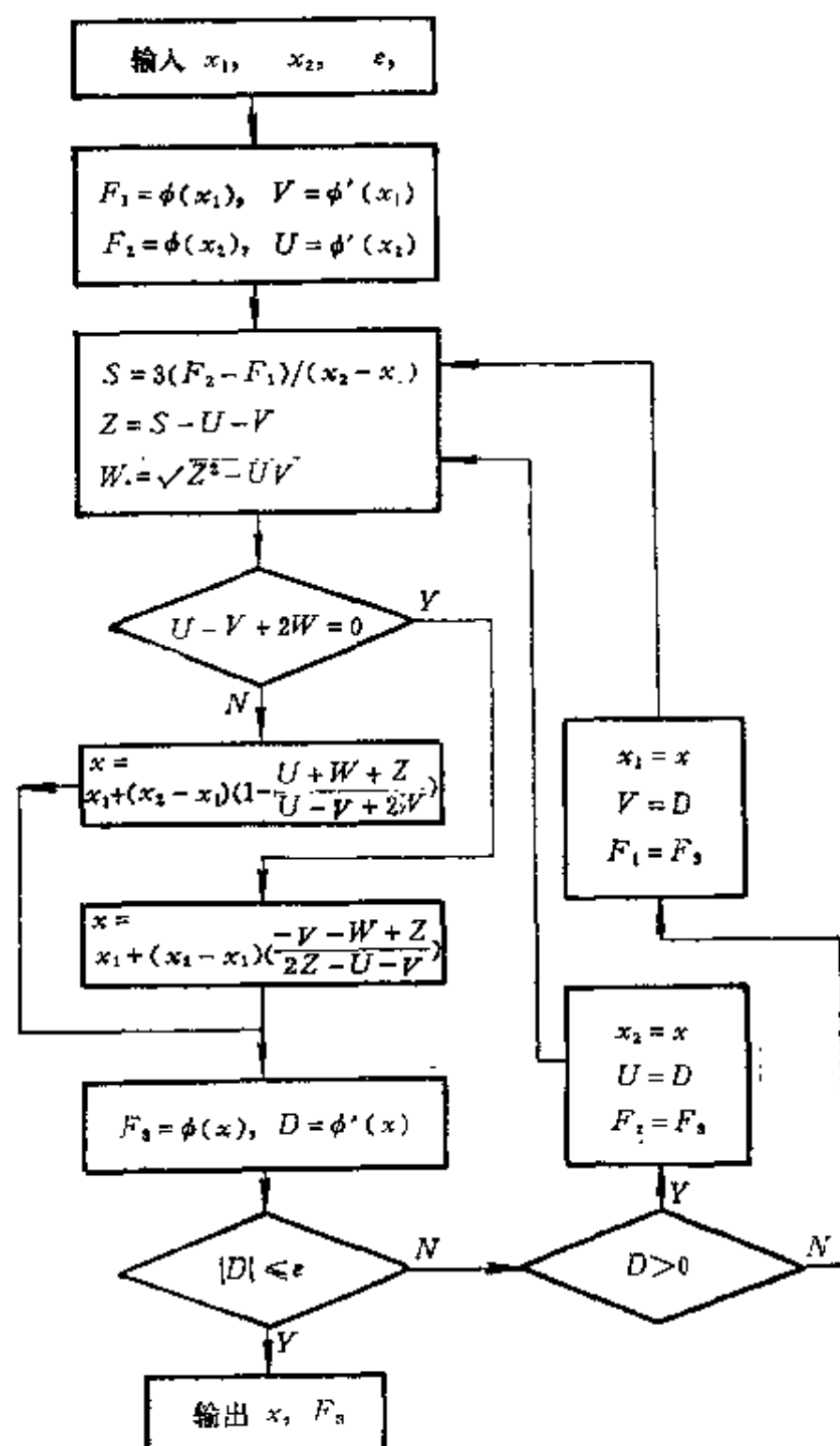


图2-25 三次插值框图

3. 缩小寻查区间。若 $\phi'(x) > 0$, 即 x_m 点斜率为正, 则舍掉 x_2 ; 若 $\phi'(x_m) < 0$, 即 x_m 点斜率为负, 则舍掉 x_1 。

4. 用余下的两点 (x_2 、 x_m 或 x_1 、 x_m) 重新进行插值, 直到优化过程收敛。

三次插值法仅需寻查区间两个边沿点的参数, 所以又叫两点三次插值法。

三 次 插 值 程 序

程序说明:

1. 本程序是一维优化子程序, 用于梯度法最优化中求一维极小点, 待计算的一维函数形式为

$$\phi(t) = \phi(\bar{x}_1 + t\bar{p})$$

式中 \bar{x}_1 是多元函数向量, \bar{p} 是寻查方向向量, t 是待优化变量 (步长因子)。寻查目标是求 t_k , 使 $\phi(t_k) = \phi(\bar{x}_1 + t_k\bar{p}) \rightarrow \min$ 。

2. 子程序 OBJ 根据目标函数编写。此子程序应该给出目标函数值及其对各变量的偏导数。

3. 变量符号

N——目标函数变量数;

X1——N维向量, X1由主程序传给本程序是变量初值, 返回主程序时X1是一维寻查后得到的极小点;

P——N维向量, 由主程序给定的寻查方向;

FM——一维寻查得到的目标函数极小值;

G——极小点的梯度。

4. 语句3~42是外推法找极小点区间, 43~70句是两点三次插值法求极小点。

```

1      SUBROUTINE THRF(X1, P, N, FM, G)
2      DIMENSION X1(N), X2(20), X3(20), G(N), P(N)
3      T = 0.2
4      CALL OBJ(X1, N, F, G)
5      F1 = F
6      G1 = 0.0
7      DO 3 I = 1, N
8      3  G1 = G1 + G(I) * P(I)
9      4  DO 5 I = 1, N
10     5  X2(I) = X1(I) + T * P(I)
11      CALL OBJ(X2, N, F, G)
12      F2 = F
13      G2 = 0.0
14      DO 6 I = 1, N
15     6  G2 = G2 + G(I) * P(I)
16      IF (F1 * GE * F2) GOTO 8
17      T = 0.1 * T
18      GOTO 4
19     8  T = T + T

```

```

20      9  DO 10 I=1, N
21      10  X3(I) = X2(I) + T * P(I)
22          CALL OBJ(X3, N, F, G)
23          F3 = F
24          G3 = 0.0
25          DO 12 I=1, N
26      12  G3 = G3 + G(I) * P(I)
27          IF(F2.LT.F3) GOTO 20
28          T = T + T
29          DO 14 I=1, N
30          X1(I) = X2(I)
31      14  X2(I) = X3(I)
32          G1 = G2
33          G2 = G3
34          F1 = F2
35          F2 = F3
36          GOTO 9
37      20  DO 22 I=1, N
38      22  X2(I) = X3(I)
39          F2 = F3
40          G2 = G3
41          T2 = 1.5 * T
42          T1 = 0.0
43      25  S = 3.0 * (F2 - F1) / (T2 - T1)
44          Z = S - G1 - G2
45          W = SQRT(Z * Z - G1 * G2)
46          IF(ABS(G2 - G1 + 2.0 * W).LT.1.0E-60) GOTO 30
47          T3 = T1 + (T2 - T1) * (W - Z - G1) / (G2 - G1 + 2.0 * W)
48          GOTO 40
49      30  T3 = T1 + (T2 - T1) * (Z - G1 - W) / (2.0 * Z - G1 - G2)
50      40  DO 42 I=1, N
51      42  X3(I) = X1(I) + T3 * P(I)
52          CALL OBJ(X3, N, F, G)
53          F3 = F
54          G3 = 0.0
55          DO 44 I=1, N
56      44  G3 = G3 + G(I) * P(I)
57          IF(ABS(G3).LE.0.01) GOTO 100
58          IF(G3.GT.0.0) GOTO 50
59          T1 = T3
60          G1 = G3
61          F1 = F3
62          GOTO 60
63      50  T2 = T3

```



```

64      G2 = G3
65      F2 = F3
66      60 IF (ABS((F2 - F1)/F1) * LE * 0.0001) GOTO 100
67      GOTO 25
68      100 DO 110 I = 1, N
69      110 X1(I) = X3(I)
70      FM = F3
71      RETURN
72      END

```

试 通 程 序 举 例

函数 $\phi(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

初值 $\bar{x}_0 = [x_1, x_2]^T = [-2.0, 2.0]^T$

寻查方向 $\bar{p} = [p_1, p_2]^T = [4.0, 1.0]^T$

程序

```

1      DIMENSION X(20), P(20)
2      N = 2
3      X(1) = -2.0
4      X(2) = 2.0
5      P(1) = 4.0
6      P(2) = 1.0
7      CALL THRF(X, P, N, FM, G)
8      WRITE(6, 20) X(1), X(2), FM
9      20 FORMAT(1X, 'X(1) = ', E16.8, 2X, ' X(2) = ', E16.8, 2X, ' FM = ', E16.8)
10     STOP
11     END

```

```

1      SUBROUTINE OBJ (X, N, F, G)
2      DIMENSION X(N), G(N)
3      XA = X(2) - X(1) * X(1)
4      XB = 1.0 - X(1)
5      F = 100.0 * XA * XA + XB * XB
6      G(1) = -400.0 * X(1) * XA - 2.0 * XB
7      G(2) = 200.0 * XA
8      RETURN
9      END

```

计算结果

$$X(1) = -0.14586229E + 01$$

$$X(2) = 0.21353436E + 01$$

$$F = 0.60508528E + 01$$

§ 2.5 多变量函数优化的梯度法

对于多元函数优化,插值函数将是多维高次函数,插值法很难处理;消去法则要消去变量的一个域,比一元函数时消去一段线要复杂得多;因此,不能再用插值法和消去法。

多元函数的最优化方法很多,发展也很快,每种方法都有它的优点和缺点,至今仍在不断改进。它们大体上可分为两类:梯度法和直接比较法。

1. 梯度法

一个函数的梯度方向——即函数曲线的法线方向——是函数增长最快的方向。梯度的负方向是函数下降最快的方向,沿此方向有可能最迅速地搜索到函数极小点。这类方法相当有效,应用较多,其中包括最速下降法、牛顿法、共轭梯度法、变尺度法等。它们的共同点是先要用解析式算出函数的梯度。但当有些目标函数过于复杂,很难甚至无法求出梯度时,梯度法就不适用了。

2. 直接比较法

直接比较法的思路是:首先试探性地选几个变量点,比较这几个点的函数值,判断出函数下降的方向;然后在下降方向再选新点,逐步迭代前进,最后达到目标函数极小值。此类方法包括变量交替法、单纯形法、鲍威尔法等。直接比较法的优点是无需计算梯度,因此适用面较广,对于复杂的或无解析式的目标函数尤其有利。但是其收敛速度比梯度法慢。

§ 2.5.1 最速下降法

最速下降法是梯度法中最基本的一种。由于目标函数的梯度负方向是函数下降最快方向,故称为最速下降法。沿最速下降方向找到的极小点并非目标函数的全域极小点,还必须以这个极小点为出发点沿它的最速下降方向再寻查,如此继续下去,直至收敛到全域极小点。最速下降法的寻优过程简述如下:

给定目标函数 $\phi(\bar{x})$, \bar{x} 是 n 维向量。 $\phi(\bar{x})$ 在 \bar{x}_k 点的梯度用 \bar{g}_k 表示

$$\begin{aligned}\bar{g}_k &= \nabla \phi(\bar{x}_k) \\ &= \left[\frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_n} \right]^T\end{aligned}\quad (2-93)$$

这是一个 n 维向量。寻查方向 \bar{p}_k 应该取为负梯度方向

$$\bar{p}_k = -\nabla \phi(\bar{x}_k) \quad (2-94)$$

如果 $\phi(\bar{x})$ 是二元函数,则 $\phi(\bar{x})$ 的等值线图可画成图 2-26, 图中 \bar{g}_k 是 \bar{x}_k 点的法线方向向量, \bar{p}_k 是负梯度方向向量。在 \bar{x} 点沿 \bar{p}_k 方向找一个长度为 $t\bar{p}_k$ (t 是待求系数,叫优化步长因子) 的向量,使

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + t\bar{p}_k \quad (2-95)$$

对 t 值进行一维优化,使目标函数

$$\phi(\bar{x}_k + t\bar{p}_k) = \min$$

求得 $t = t_k$ (t 称为最优步长因子), 于是可得在 \bar{p}_k 方向上 $\phi(\bar{x})$ 为极小值的变量点

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + t_k \bar{p}_k \quad (2-96)$$

\bar{x}_{k+1} 是否为目标函数的全域极小点, 可用其梯度是否为零来判断, 从而得判敛条件

$$|\nabla \phi(\bar{x}_{k+1})| \leq \varepsilon \quad (2-97)$$

式中 ε 为接近零的判敛参数。当 $\nabla \phi(\bar{x}_{k+1})$ 等于零时, 此点是严格的极小点。当不满足判敛条件时, 则以 $\bar{p}_{k+1} = -\nabla \phi(\bar{x}_{k+1})$ 为方向进行第二次寻查, 找到 \bar{p}_{k+1} 方向上的最小点 \bar{x}_{k+2} , 如此继续下去 (参见图2-26), 直到逼近 $\phi(\bar{x})$ 的极小值为止。

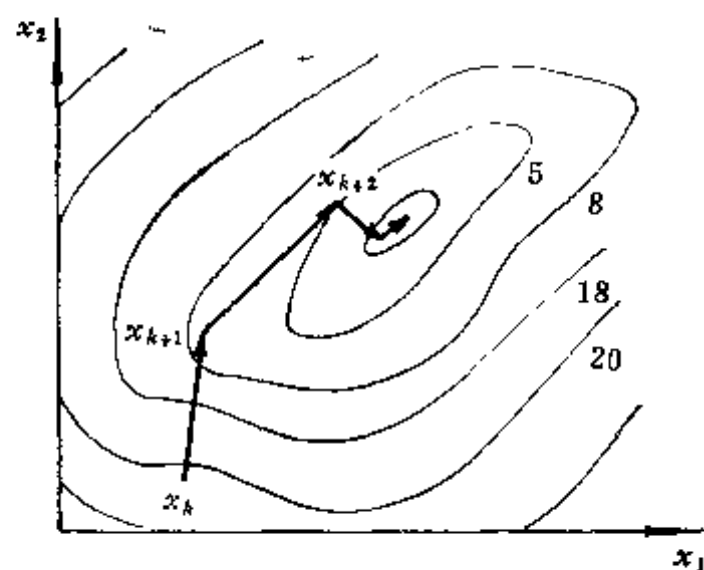


图2-26 最速下降法示意

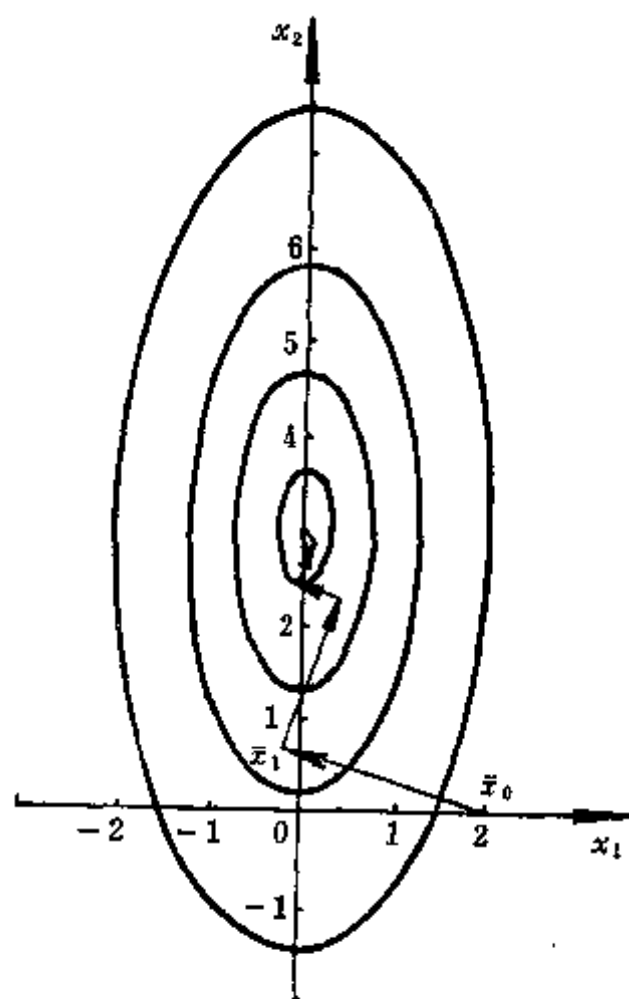


图2-27 最速下降法举例

例 给定目标函数

$$\phi(\bar{x}) = \phi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + x_2^2 - 6x_2 + 9$$

求 $\phi(\bar{x})$ 的极小值及极小点变量 \bar{x}_{min} 。图2-27是 $\phi(\bar{x})$ 的等值线图。

解 1. 任选初始值

$$\bar{x}_0 = [x_{10} \ x_{20}] = [2 \ 0]^T$$

给定判敛误差 $\varepsilon = 0.001$ 。

2. 计算目标函数在 \bar{x}_0 点的梯度

$$\nabla \phi(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_1 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix}$$

3. 确定寻查方向

$$\bar{p}_0 = -\nabla \phi(x_{10}, x_{20}) = \begin{bmatrix} -20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4. 沿 \bar{p}_0 方向进行寻查。变量是

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + t\bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -20 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 20t \\ 6t \end{bmatrix}$$

目标函数是

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(\bar{x}_0 + t\bar{p}_0) = 5(2 - 20t)^2 + (6t)^2 - 6(6t) + 9 \\ &= 2036t^2 - 436t + 29\end{aligned}$$

由上式看出，目标函数已降为 t 的一元函数，因此可用单变量寻查法求 $\phi(t) = \min$ 。为便于解释优化过程，对此简单函数可用解析法求极值。令

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = 0$$

用 t_0 表示最优步长因子，得

$$4072t_0 - 436 = 0$$

故 $t_0 = 0.1071$

把 t_0 代入 $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + t_0\bar{p}_0$ ，即得 \bar{p}_0 方向的极小点是

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 20 \times 0.1071 \\ 6 \times 0.1071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.142 \\ 0.6426 \end{pmatrix}$$

5. 收敛判断。在 \bar{x}_1 点的梯度是

$$\nabla \phi(\bar{x}_1) = \begin{pmatrix} 10(-0.142) \\ 2(0.6426) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.42 \\ -4.71 \end{pmatrix}$$

梯度的模为

$$|\nabla \phi(\bar{x}_1)| = 4.92 > \epsilon$$

目标函数尚未收敛。

6. 以 \bar{x}_1 为起点，以 $\bar{p}_1 = -\nabla \phi(\bar{x}_1)$ 为方向继续寻查。

各次的寻查过程可见图 2-27 中的箭头指向。从图 2-27 可以明显看出，最初一两次寻查的下降速度较快，而以后各次的下降速度减缓，当目标函数接近极小值时，下降速度则变得很慢。为提高收敛速度，在最速下降法基础上发展出共轭梯度法、变尺度法等许多方法。但

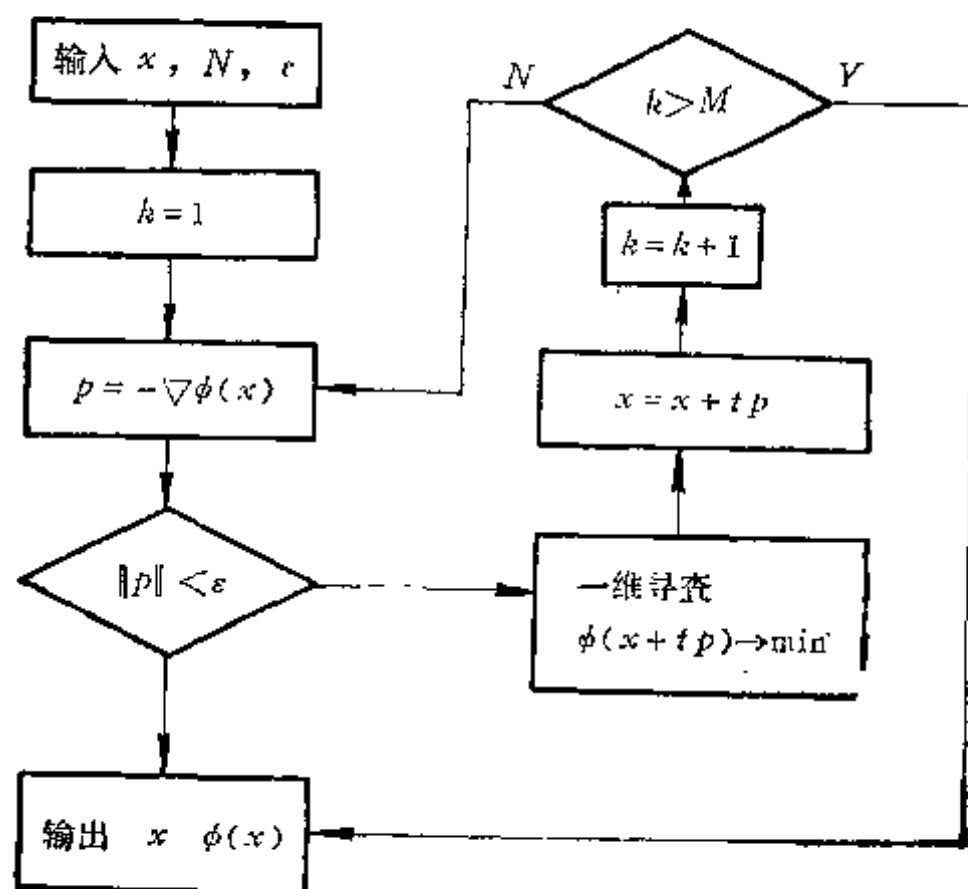


图2-28 最速下降法框图

是，由于最速下降法在寻查的第一次是简单且有效的，所以各种梯度法大多采用最速下降法做为开头。

最速下降法计算框图见图2-28。

最速下降法程序

程序说明：

1. 一维寻查子程序 THRF 可用前节所给的三次插值程序。目标函数子程序 OBJ 需自编，应给出目标函数值和目标函数梯度。

2. 变量符号

X——变量初值，优化运算以后是最佳变量点；是输入参数，也是输出参数；

N——变量维数，是输入参数；

F——目标函数极小值，是输出参数；

M——允许最大寻查次数，该程序中给的值为1000。

```

SUBROUTINE SPEM (X,N,F)
  DIMENSION X(20) , G(20), P(20)
  M = 1000.
  K = 1
  CALL OBJ (X,N,F,G)
5  GG = 0.0
  DO 10 J = 1,N
    P(J) = -G(J)
10  GG = GG + G(J) * G(J)
    IF(GG*LE*0.0001) GOTO 100
    CALL THRF(X,P,N,F,G)
    K = K + 1
    IF(K*GE*M) GOTO 100
    GOTO 5
100 WRITE (6,30) F,(I,X(N), I = 1,N)
    30  FORMAT (1X,'OBJ FUNCTION = ',E15.6,2X,20('X(',
      * I2,') = ',E14.6,/,10X)
      RETURN
      END
  
```

§ 2.5.2 共轭梯度法

共轭梯度法是最速下降法的一个重要改进方法。这里仍用二元函数为例说明共轭梯度法的原理。

给定二元目标函数 $\phi(\bar{x})$ ，其等值曲线见图 2-29。由初始点 \bar{x}_0 沿 $\bar{p}_0 = -\bar{g}_0$ 方向进行第一次寻查，找到的极小点是 \bar{x}_1 。如果用最速下降法，下一个寻查方向是

$$-\bar{g}_1 = -\nabla\phi(\bar{x}_1)$$

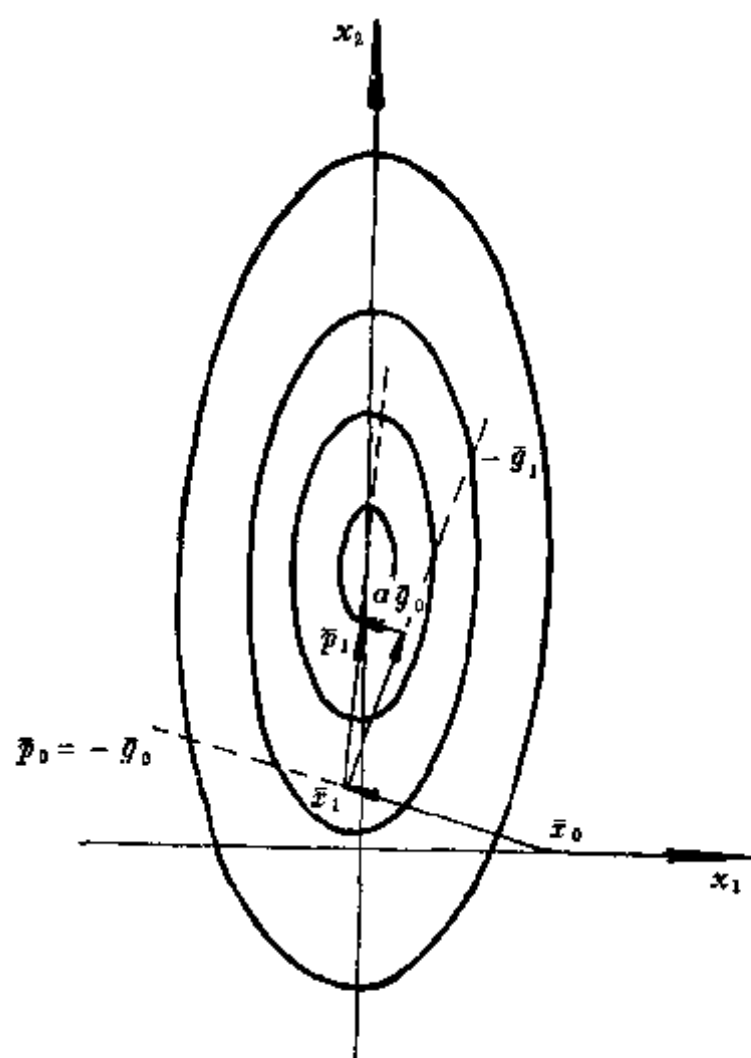


图2-29 共轭梯度法示意

此时 $-\bar{g}_1$ 与 \bar{p}_0 正交。由图 2-29 不难看出, $-\bar{g}_1$ 并不指向极小点, 而是偏离了一个角度。数学上可以证明, 如果第二次寻查采用 \bar{p}_0 的共轭方向, 则可改进这种状况, 提高收敛速度。

下面说明什么是共轭方向以及怎样用共轭梯度法进行寻查。

1. 第一次优化寻查采用最速下降方向, 即

$$\bar{p}_0 = -\bar{g}_0 = -\nabla\phi(\bar{x}_0) \quad (2-98)$$

沿 \bar{p}_0 方向找出极小点 \bar{x}_1 后, 计算 \bar{x}_1 点的梯度

$$\bar{g}_1 = \nabla\phi(\bar{x}_1) \quad (2-99)$$

2. 确定共轭方向

目标函数在 \bar{x}_k 点的台劳级数展开式是

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}) &= \phi(\bar{x}_k) + \bar{g}_k^T \Delta\bar{x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta\bar{x}^T A_k \Delta\bar{x} \end{aligned} \quad (2-100)$$

式中, \bar{g}_k 是一阶梯度向量, A_k 是二阶偏导数矩阵 (汉森矩阵)。

如果第 i 次寻查方向 \bar{p}_i 和第 $(i-1)$ 次寻查方向 \bar{p}_{i+1} 满足关系

$$\bar{p}_{i+1}^T A_k \bar{p}_i = 0 \quad (2-101)$$

则 \bar{p}_{i+1} 和 \bar{p}_i 叫做 A_k 的共轭向量。根据这个定义, 第二次寻查方向 \bar{p}_1 应该满足

$$\bar{p}_1^T A_k \bar{p}_0 = 0 \quad (2-102)$$

公式 (2-102) 中包含有汉森矩阵。一般说来, 计算目标函数的汉森矩阵相当困难, 因此需要把这个公式加以简化。

对目标函数 $\phi(\bar{x})$ 的台劳展开式取梯度

$$\nabla\phi(\bar{x}) = \nabla\phi(\bar{x}_k) + \nabla(\bar{g}_k^T \Delta\bar{x}) + \frac{1}{2} \nabla(\Delta\bar{x}^T A_k \Delta\bar{x})$$

化简后得到目标函数的梯度表示式是

$$\bar{g} = \nabla\phi(\bar{x}) = \bar{g}_k + A_k \Delta\bar{x} \quad (2-103)$$

在 \bar{x}_i 点的目标函数梯度值是

$$\bar{g}_i = \bar{g}_k + A_k \Delta\bar{x}_i$$

在 \bar{x}_{i+1} 点的目标函数梯度值是

$$\bar{g}_{i+1} = \bar{g}_k + A_k \Delta\bar{x}_{i+1}$$

两式相减得

$$\bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i = A_k (\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i) \quad (2-104)$$

如果由 \bar{x}_i 点沿 \bar{p}_i 方向寻查到的极小点是 \bar{x}_{i+1} , 则它应该满足下式

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + t_i \bar{p}_i \quad (2-105)$$

把式 (2-105) 代入式 (2-104) 得

$$\bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i = t_i A_i \bar{p}_i \quad (2-106)$$

式 (2-106) 两边乘以 \bar{p}_{i+1}^T (\bar{p}_{i+1} 是共轭向量), 再引用式 (2-101), 可得

$$\bar{p}_{i+1}^T (\bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i) = 0 \quad (2-107)$$

式 (2-107) 是共轭向量必须满足的条件, 由此式可以计算出 \bar{p}_{i+1} 。显而易见, 式中已经不包含汉森矩阵 A_i , 从而使计算 \bar{p}_{i+1} 的过程大为简化。

3. 计算共轭向量

若第一次寻查方向为 $-\bar{g}_0$, 则可假定第二次寻查方向 \bar{p}_1 具有下述形式

$$\bar{p}_1 = -\bar{g}_1 + \alpha_0 \bar{p}_0 = -\bar{g}_1 - \alpha_0 \bar{g}_0 \quad (2-108)$$

式中 α_0 是待求常数, \bar{g}_1 和 \bar{g}_0 分别为 \bar{x}_1 和 \bar{x}_0 点的函数梯度, 见图2-29中的标注。

为了解出常数 α_0 , 把式 (2-108) 代入式 (2-107), 得

$$(-\bar{g}_1 - \alpha_0 \bar{g}_0)^T (\bar{g}_1 - \bar{g}_0) = 0 \quad (2-109)$$

展开 (2-109) 式

$$-\bar{g}_1^T \bar{g}_1 - \alpha_0 \bar{g}_0^T \bar{g}_1 + \bar{g}_1^T \bar{g}_0 + \alpha_0 \bar{g}_0^T \bar{g}_0 = 0$$

由于 \bar{g}_1 是 \bar{x}_1 点梯度, 所以 \bar{g}_1 与 \bar{g}_0 直交; 又知两直交向量的内积为零, 即 $\bar{g}_1^T \bar{g}_0 = \bar{g}_0^T \bar{g}_1 = 0$, 因此得到

$$\alpha_0 = \frac{\bar{g}_1^T \bar{g}_1}{\bar{g}_0^T \bar{g}_0} = \frac{\|\bar{g}_1\|^2}{\|\bar{g}_0\|^2} \quad (2-110)$$

式中 $\|\bar{g}_1\|$ 是梯度 \bar{g}_1 的向量长度, 即

$$\|\bar{g}_1\| = \left[\sum_{i=1}^n g_{1i}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{g}_1 = [g_{11} \ g_{12} \ \cdots \ g_{1n}]^T$$

把式 (2-110) 代入式 (2-108), 得第二次寻查方向

$$\bar{p}_1 = -\bar{g}_1 + \frac{\|\bar{g}_1\|^2}{\|\bar{g}_0\|^2} \bar{p}_0 \quad (2-111)$$

\bar{p}_1 是共轭向量, 也就是共轭梯度。

4. 以 \bar{p}_1 为寻查方向, 用一维寻查得到 \bar{p}_1 方向上的函数极小点, 定名为 \bar{x}_2 。计算 \bar{x}_2 点的梯度

$$\bar{g}_2 = \nabla \phi(\bar{x}_2)$$

该梯度向量 \bar{g}_2 与 \bar{g}_1 和 \bar{g}_0 相互直交。

5. 确定第三次寻查方向

下一个共轭向量可写成

$$\bar{p}_2 = -\bar{g}_2 + \alpha_1 \bar{p}_1 = -\bar{g}_2 - \alpha_1 \bar{g}_1 - \alpha_1 \alpha_0 \bar{g}_0 \quad (2-112)$$

根据共轭条件 (2-107), 应有

$$\bar{p}_1^T (\bar{g}_2 - \bar{g}_1) = 0$$

把 (2-112) 式代入上式得

$$\alpha_1 = \frac{\bar{g}_2^T \bar{g}_2}{\bar{g}_1^T \bar{g}_1} = -\frac{\|\bar{g}_2\|^2}{\|\bar{g}_1\|^2} \quad (2-113)$$

从而得到共轭向量

$$\bar{p}_2 = -\bar{g}_2 + \frac{\|\bar{g}_2\|^2}{\|\bar{g}_1\|^2} \bar{p}_1 \quad (2-114)$$

推论可知, 第 $i+1$ 次寻查的方向是

$$\bar{p}_{i+1} = -\bar{g}_{i+1} + \frac{\|\bar{g}_{i+1}\|^2}{\|\bar{g}_i\|^2} \bar{p}_i \quad (2-115)$$

由于各梯度向量 $\bar{g}_0, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i$ 相互直交, 而在 n 维向量情况下最多只能有 n 个正交分量, 所以 n 个变量的目标函数其共轭向量最多也是 n 个。因此, 经过 n 次寻查, 二次函数

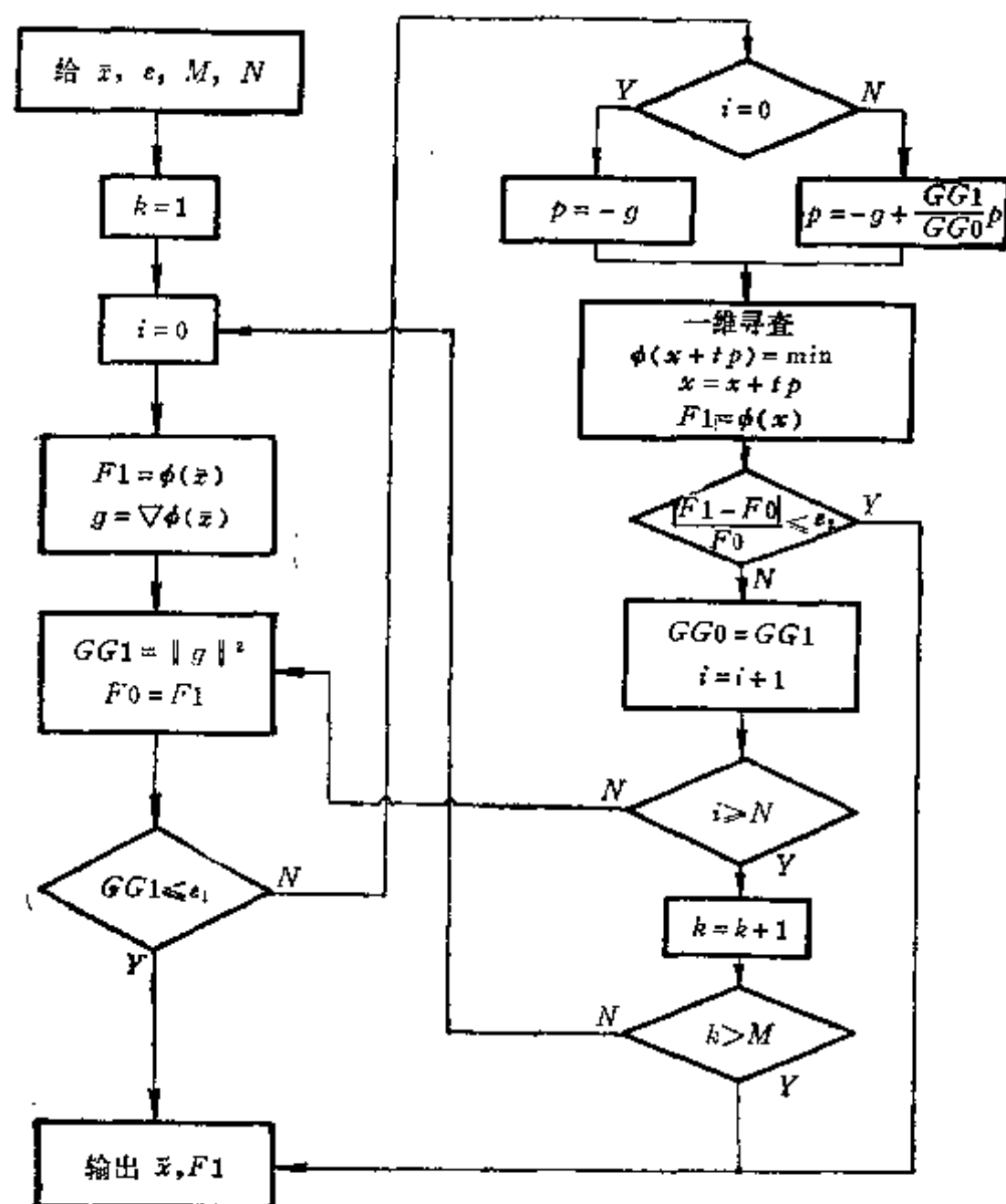


图2-30 共轭梯度法框图

在理论上应该达到极小点。但是在实际运算过程中，目标函数高于二次函数，而台劳级数又忽略了高次项，再加上计算机舍入误差的影响，以致 n 次寻查并不收敛。通常应该把第 n 次寻查得到的最小点 \bar{x}_n 作初始点，重新开始优化寻查。

共轭梯度法又叫 FR 法 (Fletcher-Reeves)，它只需用到目标函数的一阶导数，运算简单，收敛速度也较快，是常用的最优化方法之一。其计算框图见图 2-30。

共轭梯度法程序

程序说明：

1. 本程序具有重新开始的功能，即每寻查 N 次，以最后所得变量点做为初始值重新开始寻查。

2. 若经 M 次重新开始仍未收敛，则停止运算。

3. 一维寻查子程序 THRF 用前节所给外推三次插值子程序。

4. 变量符号

X ——变量初始值，经寻查后是最优点向量；

N ——变量维数；

$F1$ ——经寻查后的最优目标函数值。

```

SUBROUTINE CONG (X,N,M,F1)
  DIMENSION X(20), G(20), P(20)
  K=1
3  I=0
  CALL OBJ(X, N,F,G)
  F1=F
  5  F0=F1
  GG1=0.0
  DO 10 J=1,N
10  GG1=GG1+G(J)*G(J)
  IF(GG1*LE*0.00001) GOTO 100
  IF(I*NE*0) GOTO 20
  DO 15 J=1,N
15  P(J)=-G(J)
  GOTO 26
20  DO 25 J=1,N
25  P(J)=-G(J)+P(J)*GG1/GG0
26  CALL THRF (X,P,N,FM,
  F1=FM
  IF(ABS((F1-F0)*LE*0.001)) GOTO 100
  GG0=GG1
  I=I+1
  IF(I*GE*N) GOTO 30
  GOTO 5
30  K=K+1

```

```

      IF(K.GT.M) GOTO 100
      GOTO 3
100  WRITE (6,110) F1
110  FORMAT (1X,'OBJECT FUNCTION = ', E15.7)
      WRITE (6,120) (I,X(I), I=1,N)
120  FORMAT (1X,'X(',12,') = ',E15.7)
      STOP
      END

```

§ 2.5.3 牛顿-瑞夫森法

共轭梯度法比最速下降法改进了寻查方向，使优化更快收敛，但是还需要若干次寻查才能逼近最优点。从尽速收敛的要求来看，希望开始就找出指向最优点的方向，以便能够一次寻查就达到极小值。这就是牛顿法的设想。

目标函数 $\phi(\bar{x})$ 在 \bar{x}_k 点展开的台劳级数是

$$\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x}_k) + \bar{g}_k^T \Delta \bar{x} + \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T A_k \Delta \bar{x} \quad (2-116)$$

如果 \bar{x}_m 是极小点，则在 \bar{x}_m 点的梯度应该为零，即

$$\nabla \phi(\bar{x}_m) = \bar{g}_k + A_k \Delta \bar{x} = 0$$

从而得到

$$A_k \Delta \bar{x} = -\bar{g}_k$$

即

$$A_k (\bar{x}_m - \bar{x}_k) = -\bar{g}_k$$

或者

$$\bar{x}_m = \bar{x}_k - A_k^{-1} \bar{g}_k \quad (2-117)$$

这就是目标函数极小点的表示式。如果 $\phi(\bar{x})$ 是二次函数，上面的台劳级数是严格的展开式，汉森矩阵的各元素皆为常数，用公式(2-117)一次即可计算出极小点 \bar{x}_m 。直接用式(2-117)计算极小点的方法就是牛顿法。

一般情况下， $\phi(\bar{x})$ 是任意高次函数，其台劳级数中还有三次、四次等高次项，因此公式(2-116)仅仅是近似公式，用公式(2-117)算出的 \bar{x}_m 并非 $\phi(\bar{x})$ 的最小点，还需要进一步迭代逼近。较好的办法是沿 $-A_k^{-1} \bar{g}_k$ 的方向进行一维寻查，这样找到的极小点比用公式(2-117)直接计算的点更好。因此，可以确定寻查方向为

$$\bar{p}_k = -A_k^{-1} \bar{g}_k \quad (2-118)$$

公式(2-118)代表的寻查方向叫牛顿方向。沿牛顿方向进行寻查，就是对 $\phi(\bar{x}_k + t \bar{p}_k)$ 求极小值，在找到最优步长 t_k 之后，即可得 \bar{p}_k 方向上的极小点为

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + t_k \bar{p}_k$$

如果 \bar{x}_{k+1} 不满足对 $\phi(\bar{x})$ 极小值的误差要求，则以 \bar{x}_{k+1} 为新的起点继续进行寻查，直至找到极小点。此种方法叫做牛顿-瑞夫森法，或阻尼牛顿法。

例 求以下目标函数的极小值：

$$\phi(\bar{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 - 6x_2 + 9$$

变量是 $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$, 初始点是 $\bar{x}_0 = [2 \ 0]^T$ 。

解 计算步骤如下:

1. 计算目标函数的梯度

$$\bar{g} = \nabla \phi(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_1 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix}$$

2. 计算汉森矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. 牛顿方向

$$-A^{-1}\bar{g} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10x_1 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

在 $\bar{x}_0 = [2 \ 0]^T$ 点的牛顿方向

$$-A_0^{-1}\bar{g}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. 寻查方向上的变量 \bar{x}_1 等于

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} + t(-A_0^{-1}\bar{g}_0)_{x_1} \\ x_{20} + t(-A_0^{-1}\bar{g}_0)_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2t \\ 3t \end{bmatrix}$$

5. 把 \bar{x}_1 代入目标函数 $\phi(\bar{x})$, 得

$$\phi(t) = 5(2 - 2t)^2 + (3t)^2 - 6(3t) + 9 = 29t^2 - 58t + 29$$

目标函数已简化为步长为 t 的一元函数。下一步需用一维寻查法求 t 。此处 $\phi(\bar{x})$ 是简单函数, 故用解析法求解, 以说明牛顿-瑞夫森法过程。令

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = 0$$

即 $58t - 58 = 0$

故 $t = 1$

得到 $\bar{x}_1 = [0 \ 3]^T$

6. 收敛判断。如果 \bar{x}_1 是 $\phi(\bar{x})$ 的极小点, 则 $\phi(\bar{x})$ 在此点的梯度应该为零。梯度的向量长度

$$\|\nabla\phi(\bar{x}_1)\| = [(10x_{11})^2 + (2x_{12} - 6)^2]^{\frac{1}{2}}$$

把 \bar{x}_1 代入上式得

$$\|\nabla\phi(\bar{x}_1)\| = 0$$

因而断定 \bar{x}_1 是极小点。在极小点的目标函数值

$$\phi(\bar{x}_1) = 0$$

§ 2.5.4 变尺度法

在牛顿法和阻尼牛顿法中都要用汉森矩阵，而汉森矩阵中的二次偏导数很难计算，矩阵求逆也颇费机时，故提出变尺度法。变尺度法的原理是：用一阶偏导数组合成一个与 A_i 同阶的方向矩阵 H_i ，以 H_i 近似表示汉森逆矩阵 A_i^{-1} ，从而避开求二阶偏导数和矩阵求逆的困难。此法又叫拟牛顿法。

方向矩阵 H_i 的组成形式有很多种。不同形式的方向矩阵就构成不同的变尺度法。其中较常用的有 DFP 法（六十年代由 Davidon, Fletcher 和 Powell 提出），BFGS 法（七十年代由 Broyden, Fletcher, Goldstein 和 Shanno 导出）等。

（一）DFP 变尺度法

为了找一个一阶导数矩阵 H_i 来近似代替汉森逆矩阵 A^{-1} ，首先要找出 A 和梯度 \bar{g} 之间的关系。

目标函数在 \bar{x}_i 点的台劳级数展开式的梯度是

$$\nabla\phi(\bar{x}) = A_i(\bar{x} - \bar{x}_i) + \bar{g}_i$$

目标函数在 \bar{x}_{i+1} 点的台劳级数展开式的梯度是

$$\nabla\phi(\bar{x}) = A_{i+1}(\bar{x} - \bar{x}_{i+1}) + \bar{g}_{i+1}$$

根据台劳级数展开式唯一性，上述二式应相等，即

$$A_{i+1}(\bar{x} - \bar{x}_{i+1}) + \bar{g}_{i+1} = A_i(\bar{x} - \bar{x}_i) + \bar{g}_i$$

由于牛顿法是用二次函数近似代替目标函数，所以可假定 $\phi(\bar{x})$ 近似为二次函数，因此 A 就是常数矩阵，即 $A_i = A_{i+1}$ ，因而得到

$$A^{-1}(\bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i) = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i \quad (2-119)$$

上式简写成

$$A^{-1}\bar{y}_i = \bar{s}_i \quad (2-120)$$

式中

$$\bar{s}_i = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i \quad (2-121)$$

$$\bar{y}_i = \bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i \quad (2-122)$$

\bar{s}_i 是变量位移， \bar{y}_i 是梯度差。如果能找到一个近似的方向矩阵 H_{i+1} 代替 A^{-1} ，则式(2-120)可写成

$$H_{i+1}\bar{y}_i = \bar{s}_i \quad (2-123)$$

公式(2-123)叫拟牛顿条件。下面推导符合拟牛顿条件的方向矩阵。

假设第 i 次方向矩阵 H_i 已知, 要求找出下次寻查的方向矩阵 H_{i+1} , 可令

$$H_{i+1} = H_i + E_i \quad (2-124)$$

式中 E_i 是待求的校正矩阵。为了满足拟牛顿条件, 把式 (2-124) 代入式 (2-123), 得

$$(H_i + E_i)\bar{y}_i = \bar{s}_i$$

$$\text{即} \quad E_i \bar{y}_i = \bar{s}_i - H_i \bar{y}_i \quad (2-125)$$

根据此式的结构特点, 可以设想 E_i 应该具有的较为简单的形式是

$$E_i = \bar{s}_i \bar{q}_i^T - H_i \bar{y}_i \bar{w}_i^T \quad (2-126)$$

式中 \bar{q}_i 和 \bar{w}_i 是待求向量, 这时 E_i 是由简单向量构成, 不包含二阶偏导数。把上式两边乘以 \bar{y}_i , 得

$$E_i \bar{y}_i = \bar{s}_i \bar{q}_i^T \bar{y}_i - H_i \bar{y}_i \bar{w}_i^T \bar{y}_i \quad (2-127)$$

式中 $\bar{q}_i^T \bar{y}_i$ 和 $\bar{w}_i^T \bar{y}_i$ 都是向量内积, 而向量内积是个数, 因此, 只要选择待求向量 \bar{q}_i 和 \bar{w}_i 使两个内积皆为 1, 即

$$\bar{q}_i^T \bar{y}_i = \bar{w}_i^T \bar{y}_i = 1 \quad (2-128)$$

这时式 (2-127) 就和式 (2-125) 完全相同, 从而满足了拟牛顿条件。为达到此目的, 最简单的办法是选择 \bar{q}_i 和 \bar{w}_i 具有下述形式:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_i &= \lambda_i \bar{s}_i \\ \bar{w}_i &= \mu_i H_i \bar{y}_i \end{aligned} \right\} \quad (2-129)$$

式中 λ_i 和 μ_i 是待定常数。把式 (2-129) 代入式 (2-128), 得

$$\lambda_i \bar{s}_i^T \bar{y}_i = \mu_i \bar{y}_i^T H_i^T \bar{y}_i = 1$$

$$\text{即} \quad \lambda_i = \frac{1}{\bar{s}_i^T \bar{y}_i} \quad (2-130)$$

$$\mu_i = \frac{1}{\bar{y}_i^T H_i^T \bar{y}_i} \quad (2-131)$$

把式 (2-130)、(2-131) 代入式 (2-126), 可得校正矩阵的一种具体形式

$$E_i = \frac{\bar{s}_i \bar{s}_i^T}{\bar{s}_i^T \bar{y}_i} - \frac{H_i \bar{y}_i \bar{y}_i^T H_i^T}{\bar{y}_i^T H_i^T \bar{y}_i} \quad (2-132)$$

从而得到方向矩阵

$$H_{i+1} = H_i + \frac{\bar{s}_i \bar{s}_i^T}{\bar{s}_i^T \bar{y}_i} - \frac{H_i \bar{y}_i \bar{y}_i^T H_i^T}{\bar{y}_i^T H_i^T \bar{y}_i} \quad (2-133)$$

公式 (2-133) 由一阶导数组成, 其中没有二阶导数, 它表示相邻两次寻查方向之间的关系。由于各次寻查的方向矩阵 H_i 是不断调整的, 因此称为变尺度法。至于第一次寻查, 则仍采用最速下降方向。

变尺度法的寻查步骤及框图如下:

1. 给初始点 \bar{x}_0 , 令 $H_0 = 1$, 寻查方向是

$$\bar{p}_0 = -H_0 \bar{g}_0$$

$$\bar{g}_0 = \nabla \phi(\bar{x}_0)$$

2. 用一维寻查沿 \bar{p}_0 方向求目标函数极小值, 即使 $\phi(\bar{x}_0 + t_0 \bar{p}_0) = \min$, 得最优步长 t_0 , 求得第一次寻查的极小点

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + t_0 \bar{p}_0$$

在 \bar{x}_1 点目标函数的梯度是 $\bar{g}_1 = \nabla \phi(\bar{x}_1)$

3. 第二次寻查方向可根据 DFP 公式得

$$\bar{p}_1 = -H_1 \bar{g}_1$$

$$H_1 = H_0 + \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^T}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^T(\bar{g}_1 - \bar{g}_0)} - \frac{H_0(\bar{g}_1 - \bar{g}_0)(\bar{g}_1 - \bar{g}_0)^T H_0}{(\bar{g}_1 - \bar{g}_0)^T H_0(\bar{g}_1 - \bar{g}_0)}$$

沿 \bar{p}_1 方向寻查, 使 $\phi(\bar{x}_1 + t_1 \bar{p}_1) = \min$, 得

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + t_1 \bar{p}_1$$

4. 继续寻查, 直到目标函数的梯度接近零, 或达到预定的寻查次数而终止。

(二) BFGS 变尺度法

当目标函数的维数较低时, DFP 法是一种有效的方法, 但是当维数很高时, 偶尔会出现不稳定情况。Broyden 等人把 DFP 法加以改进, 成为 BFGS 法。此法有更好的稳定性, 适用于更高维数的目标函数。

BFGS 法在第一次寻查时仍用最速下降方向, 即

$$H_0 = 1$$

$$\bar{p}_0 = -H_0 \bar{g}_0$$

以后各次寻查用 BFGS 变尺度公式

$$H_{i+1} = H_i + \frac{\mu_i \bar{s}_i \bar{s}_i^T - H_i \bar{y}_i \bar{s}_i^T - \bar{s}_i \bar{y}_i^T H_i}{\bar{s}_i^T \bar{y}_i} \quad (2-134)$$

式中

$$\mu_i = 1 + \frac{\bar{y}_i^T H_i \bar{y}_i}{\bar{s}_i^T \bar{y}_i} \quad (2-135)$$

$$\bar{s}_i = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i \quad (2-136)$$

$$\bar{y}_i = \bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i \quad (2-137)$$

第 i 次寻查方向是

$$\bar{p}_{i+1} = -H_{i+1} \bar{g}_{i+1} \quad (2-138)$$

计算框图见图 2-31。图中的方向矩阵是 BFGS 公式。如果采用 DFP 法, 只需把方向矩阵换为 DFP 公式, 其余优化过程二者相同。

收敛判断可用以下准则中的任一种：

(1) 梯度判断 $\|\bar{g}_i\| \leq e_1$

(2) 位移判断 $\|\bar{s}_i\| \leq e_2$

(3) 目标函数下降率判断 $\frac{|\phi(\bar{x}_{i+1}) - \phi(\bar{x}_i)|}{\phi(\bar{x}_i)} \leq e_3$

(4) 目标函数值判断 $|\phi(\bar{x}_i)| \leq e_4$

一维寻查的精度应该不低于终止计算的收敛判断精度，以免算法失败。框图中用“ $F1 < F0$?”来检查函数偶然出现的发散。

在变量非常多的情况下，可以先求各变量的梯度分量，选其中数值大的几个（比如 5 ~ 10 个），逐次对最大梯度的分量优化，这样可以相当有效地加速收敛。

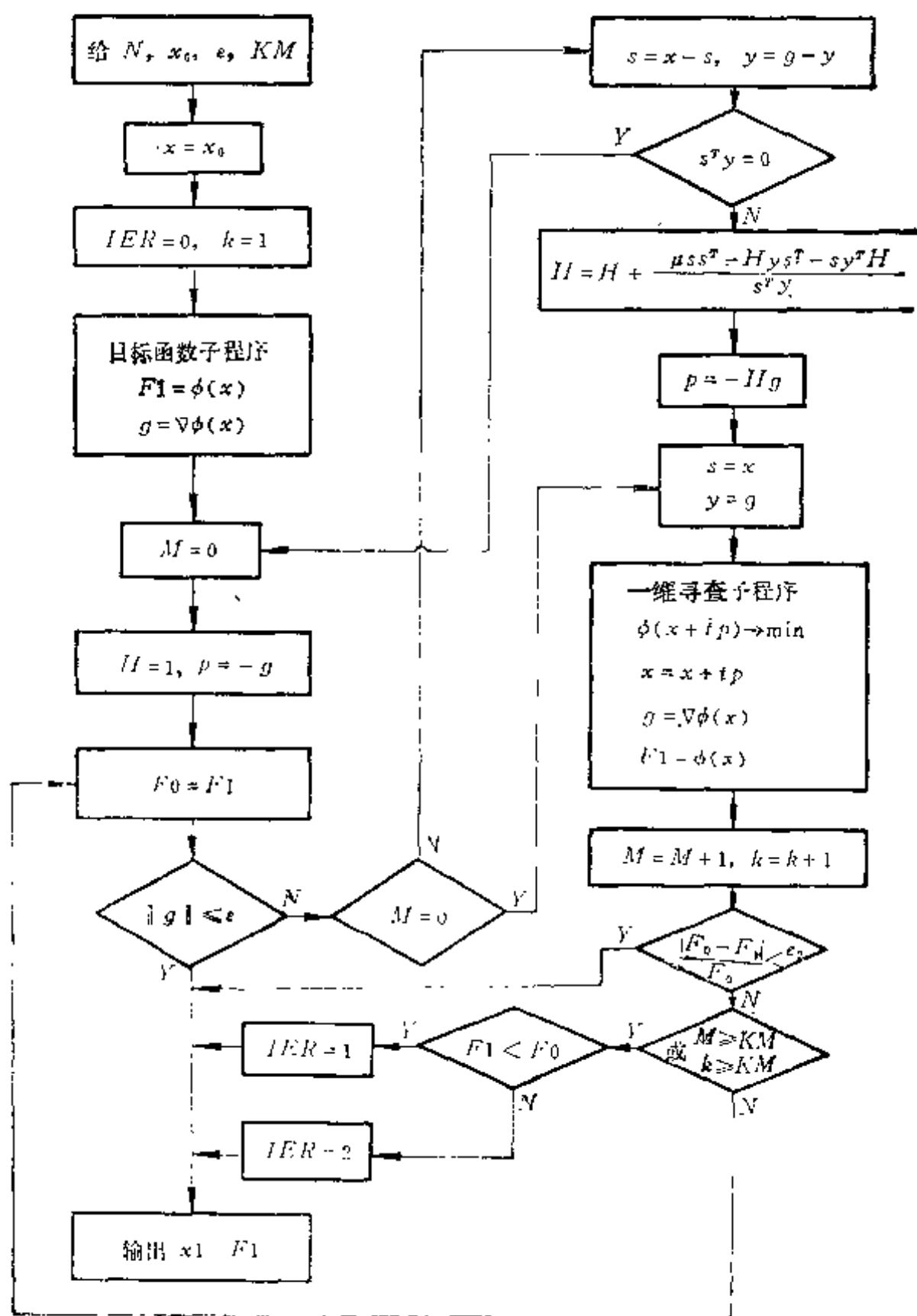


图2-31 变尺度法框图

梯度的计算——也就是目标函数一阶偏导数的计算——可参见第三章。微波电路常用双口矩阵分析，其目标函数的偏导数可用第三章 § 3.1 节的直接法计算。

变尺度法子程序

程序说明：

1. 本程序采用 BFGS 变尺度法，如果需用 DFP 法，只要把 BFGS 公式子程序更换为 DFP 公式子程序即可（更改第22句）。

2. 变量符号

X——由主程序传来时代表初值向量，传回主程序时则代表优化后的最佳变量点；

N——输入参数，代表目标函数的维数；

F——输出参数，代表目标函数极小值；

KM——输入参数，代表最大允许寻查次数；

IER——输出参数，优化效果标识符；IER = 0 表示满足优化精度要求，正常返回；

IER = 1 表示已达 KM 次寻查时优化尚未收敛而中途返回；IER = 2 是找不到更好值而返回；

EPS——给定的收敛精度。

3. 一维优化子程序 THRF 是三次插值法（见前节已给的子程序），OBJ 是目标函数子程序。

```

1      SUBROUTINE DFBG (X,N,F,KM,IER,EPS)
2      DIMENSION X(N),G(20),P(20),Y(20),S(20),H(20,20)
3      IER = 0
4      K = 1
5      CALL OBJ (X,N,F,G)
6      F1 = F
7      5 M = 0
8      DO 10 I = 1,N
9      DO 8 J = 1,N
10     8 H(I,J) = 0.0
11     H(I,I) = 1.0
12     10 P(I) = -G(I)
13     12 F0 = F1
14     D = 0.0
15     DO 14 I = 1,N
16     14 D = D + G(I) * G(I)
17     IF(D.LE.EPS) GOTO 100
18     IF(M.EQ.0) GOTO 30
19     DO 15 I = 1,N
20     S(I) = X(I) - S(I)
21     15 Y(I) = G(I) - Y(I)
22     CALL BFGS (H,N,S,Y,IE)
23     IF(IE.EQ.-1) GOTO 5

```



```

24      DO 28 I=1,N
25      P(I)=0.0
26      DO 28 J=1,N
27  28  P(I)=P(I)-H(I,J)*G(J)
28  30  DO 35 I=1,N
29      S(I)=X(I)
30  35  Y(I)=G(I)
31      CALL THRF (X,P,N,FMIN,G)
32      F1=FMIN
33      IF(ABS((F1-F0)/F1)*LE.0.00001) GOTO 100
34      M=M+1
35      K=K+1
36      IF(M*GE*KM.OR.K*GE*KM) GOTO 40
37      GOTO 12
38  40  IF (F1*GT*FO) GOTO 90
39      IER=1
40      GOTO 100
41  90  IER=2
42      F=F0
43      GOTO 120
44  100  F=F1
45  120  RETURN
46      END

```

〔以下是BFGS公式子程序〕

```

1      SUBROUTINE BFGS (H,N,S,Y,IE)
2      DIMENSION H(20,20),S(20),Y(20),HY(20),YTH(20)
3      STY=0.0
4      YTHY=0.0
5      DO 20 I=1,N
6      HY(I)=0.0
7      YTH(I)=0.0
8      DO 10 J=1,N
9      HY(I)=HY(I)+H(I,J)*Y(J)
10  10  YTH(I)=YTH(I)+Y(J)*H(J,I)
11      STY=STY+S(I)*Y(I)
12  20  YTHY=YTHY+YTH(I)*Y(I)
13      IE=-1
14      IF(ABS(STY)*LT.0.1E-60) GOTO 30
15      IE=0
16      U=1.0+YTHY/STY
17      DO 25 I=1,N
18      DO 25 J=1,N
19  25  H(I,J)=H(I,J)+(U*S(I)*S(J)-HY(I)*S(J)-S(I)*YTH(J))/STY
20  30  RETURN

```

```

21      END
    [以下是DFP公式子程序]
1      SUBROUTINE DFP(H,N,S,Y,IE)
2      DIMENSION H(20,20),S(20),Y(20),HY(20),YTH(20)
3      STY = 0.0
4      YTHY = 0.0
5      DO 20 I = 1,N
6      HY(I) = 0.0
7      YTH(I) = 0.0
8      DO 10 J = 1,N
9      HY(I) = HY(I) - H(I,J) * Y(J)
10     10 YTH(I) = YTH(I) + Y(J) * H(J,I)
11     STY = STY + S(I) * Y(I)
12     20 YTHY = YTHY + YTH(I) * Y(I)
13     IE = -1
14     IF (ABS(STY) * LT * 0.1E-60 .OR. YTHY * LT * 0.1E-60) GOTO 30
15     IE = 0
16     DO 25 I = 1,N
17     DO 25 J = 1,N
18     25 H(I,J) = H(I,J) + S(I) * S(J) / STY + HY(I) * YTH(J) / YTHY
19     30 RETURN
20     END

```

§ 2.5.5 几种优化方法的比较

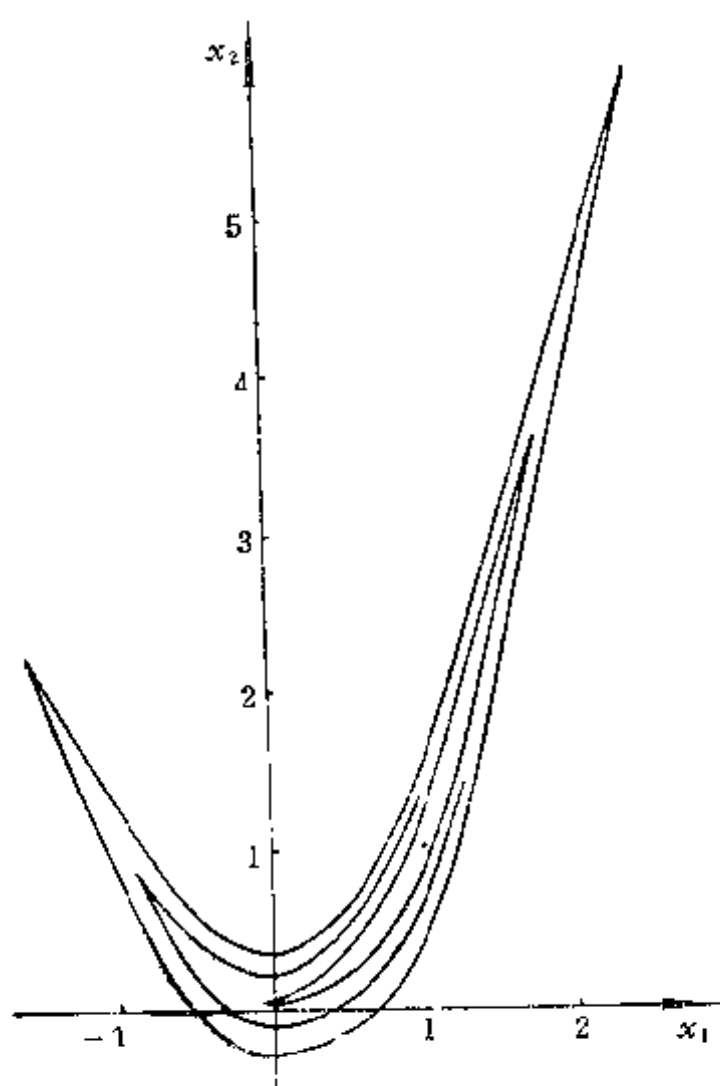


图2-32 罗森布鲁克函数等值线图

各种最优化方法皆有自身的优缺点，其有效性、收敛性、收敛速度各不相同。为了对各种优化方法进行比较，最好用同一个目标函数作为检验标准。检验函数也有很多种，其中较常用的检验函数之一是罗森布鲁克香蕉函数。此函数是一个窄搜索区目标函数，等值曲线狭长而弯曲，形状象香蕉，故取名为香蕉函数。其函数公式是

$$\phi(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (2-139)$$

表面上看这个函数式并不复杂，但是由于它是个狭长的弯谷形曲线，且具有谷脊线，很难进行寻优。此函数图形见图 2-32。函数极小点是 $x_1 = 1, x_2 = 1$ ；函数极小值为 $\phi(\bar{x}) = 0$ 。

用罗森布鲁克函数对前述几种梯度优化方法的运算过程进行比较，列表 2-2。对于此种狭谷形函数，用最速下降法时有效性很差，迭代约 145 次寻查到函数曲线的谷底，寻查 3001

次才收敛。共轭梯度法比最速下降法有很大改善, 大约16次寻查到达谷底, 54次收敛。改用每寻查 N 次重新开始的共轭梯度法, 寻查次数可改善到31次。DFP 变尺度法 仅需6~7次到谷底, 20次可收敛。BFGS 法与 DFP 法基本一致, 仅略有改善。最有效的是牛顿法, 2次迭代基本收敛; 由于罗森布鲁克函数是4次函数, 因此一次迭代是不可能收敛的, 直到第3次迭代才完全收敛。表中同时给出直接优化的单纯形法的寻查过程数据, 大约30次到谷底, 继续寻查约300次才收敛。由于单纯形法的运算速度与步长选择关系较大, 表中数据仅为参考。

表2-2 几种最优化方法的比较

寻 查 次 数	最 速 下 降 法			单 纯 形 法			共 轭 梯 度 法		
	x_1	x_2	$\phi(x)$	x_1	x_2	$\phi(x)$	x_1	x_2	$\phi(x)$
0	-1.0000	1.0000	4.0000	-1.0000	1.0000	4.0000	-1.0000	1.0000	4.0000
1	-0.9950	1.0000	3.9899				-0.9950	1.0000	3.9899
2	-0.9950	0.9900	3.9800				-0.7746	0.5602	3.3673
4	-0.9899	0.9799	3.9598	-0.9852	0.9934	3.9929	-0.5538	0.2358	2.9164
6	-0.9848	0.9699	3.9395	-0.9422	0.9320	3.9685	-0.4085	0.0811	2.7202
8	-0.9797	0.9598	3.9191	-0.9734	0.9258	3.9419	-0.2957	-0.0080	2.5904
10	-0.9745	0.9497	3.8987	-0.9172	0.8570	3.7000	-0.2013	-0.0619	2.4935
12	-0.9693	0.9395	3.8781	-0.8359	0.7133	3.3917	-0.1183	-0.9392	2.4149
14	-0.9640	0.9294	3.8575	-0.7797	0.6445	3.3014	-0.0424	-0.1105	2.3470
16	-0.9587	0.9192	3.8367	-0.7969	0.6211	3.2481	0.0293	-0.1150	2.2846
18	-0.9534	0.9090	3.8158	-0.7469	0.5711	3.0692	0.0990	-0.1090	2.2243
20	-0.9480	0.8988	3.7948	-0.6219	0.3961	2.6393	0.1686	-0.0929	2.1631
25	-0.9316	0.8782	3.7418	-0.0468	0.0211	1.1316	0.3524	-0.0011	1.9883
30	-0.9204	0.8472	3.6879	0.3031	0.1211	0.5709	0.5709	0.2013	1.7381
35	-0.9032	0.8263	3.6333	0.4703	0.1805	0.4465	0.8637	0.6324	1.1307
40	-0.8915	0.7948	3.5777	0.4879	0.2656	0.3383	1.3701	1.8362	0.3203
45	-0.8734	0.7736	3.5212	0.5449	0.2973	0.2071	1.4029	1.9774	0.1710
50	-0.8611	0.7415	3.4637	0.6023	0.3682	0.1609	1.0111	1.0224	0.0001
54	-0.8485	0.7199	3.4168	0.6201	0.3794	0.1469	1.0006	1.0011	0.0000
60	-0.8289	0.6872	3.3451	0.6463	0.4010	0.1315			
100	-0.6748	0.4554	2.8048	0.7377	0.5382	0.0725			
145	0.3732	0.1309	0.3998	0.9113	0.8077	0.0599			
200	0.5402	0.2919	0.2114	0.9648	0.9313	0.0013			
280	0.6518	0.4248	0.1213	0.9871	0.9745	0.0002			
400	0.7438	0.5532	0.0656						
500	0.7929	0.6286	0.0429						
3001	0.9913	0.9827	0.0000						

续表

寻查次数	共轭梯度法 (每 N 次重新开始)			DFP或BFGS法			牛 顿 法		
	x_1	x_2	$\phi(x)$	x_1	x_2	$\phi(x)$	x_1	x_2	$\phi(x)$
0	-1.0000	1.0000	4.0000	-1.0000	1.0000	4.0000	-1.0000	1.0000	4.0000
1	-0.9950	1.0000	3.9899	-0.9950	1.0000	3.9899	1.0000	-3.0000	1600.000
2	-0.7746	0.5602	3.3073	-0.7743	0.5598	3.3064	1.0000	1.0080	0.0006
3	-0.7506	0.5722	3.0724	-0.6562	0.3717	3.0909	1.0000	1.0000	0.0000
4	-0.5589	0.2759	2.5634	-0.1689	0.0002	1.4467			
5	-0.5328	0.2928	2.3575	-0.1802	0.0265	1.3966			
6	-0.3510	0.0903	1.9327	-0.0033	-0.0313	1.1049			
7	-0.3246	0.1139	1.7619	0.1832	-0.0039	0.8066			
8	-0.1522	-0.0062	1.4139	0.2015	0.0442	0.6389			
9	-0.1312	0.0239	1.2841	0.3403	0.0949	0.4789			
10	0.0316	-0.0254	1.0076	0.4422	0.1658	0.3992			
12	0.1964	0.0143	0.7047	0.6167	0.3686	0.1606			
14	0.3443	0.0963	0.4795	0.9194	0.8408	0.0085			
16	0.4795	0.2102	0.3096	0.9721	0.9421	0.0017			
18	0.6026	0.3466	0.1853	0.9973	0.9942	0.0000			
20	0.7135	0.4957	0.0999	0.9999	0.9999	0.0000			
25	0.8872	0.7867	0.0127						
31	1.0001	1.0001	0.0000						

§ 2.6 多变量函数优化的直接法

梯度优化方法需要对目标函数求导数,甚至要用到二阶偏导数才能判断寻查方向。在实际的微波电路设计中,目标函数有时过于复杂,求解偏导数很困难,这时最好采用直接优化法。这种方法可以不求导数,只要计算目标函数在若干点的函数值,再进行比较就能判断寻查方向了。

§ 2.6.1 单纯形法

单纯形法是多变量直接优化法中常用的一种,有效性较好。所谓单纯形是指在一定的空间中,由直线构成的最简单的图形。在二维空间中单纯形是三角形。三维空间的单纯形是有4个顶点的四面体。 N 维空间的单纯形是有 $N+1$ 个顶点的几何形体。显然,以单纯形顶点做为目标函数值判断的依据时,计算点数最少。

下面以二元函数为例说明单纯形法的基本原理。有二元目标函数 $\phi(x)$ 。在 x_1 、 x_2 平面上选择任意三个点构成一个三角形,并计算出这三个点的目标函数值。函数值最大的点命为 x_H ,函数值次大的点命为 x_G ,函数值最小的点命为 x_L ,见图2-33。

依据 $\phi(x_H)$ 、 $\phi(x_L)$ 、 $\phi(x_G)$ 三个函数值可以大略估计出目标函数的下降方向，用该下降方向做寻查方向，取 x_G 和 x_L 的连线中点为 x_C ，从 x_H 指向 x_C 的方向就是寻查方向，在此方向上选反射点 x_R ，使

$$\overline{x_H x_R} = 2\overline{x_H x_C} \quad (2-140)$$

$\overline{x_H x_R}$ 表示 x_H 和 x_R 的连线长度， $\overline{x_H x_C}$ 表示 x_H 和 x_C 的连线长度。比较函数值 $\phi(x_R)$ 和 $\phi(x_H)$ ，有两种可能：

1. $\phi(x_R) < \phi(x_G)$ ，说明寻查方向正确，可以试寻更远些，取扩展点 x_E 。
 2. $\phi(x_R) > \phi(x_G)$ ，说明寻查走得太远，应该退回一些，取压缩点 x_S 。
- 总之， x_E 或 x_S 是新得到的点，命其为 x_N ，只要满足

$$\phi(x_N) < \phi(x_G)$$

就完成了第一次寻查。

第二次寻查用 x_N 和原来的两个较小点 x_G 、 x_L 构成新的三角形。对新三角形的三个顶点 x_N 、 x_G 、 x_L 进行函数值计算和比较。其余步骤同第一次寻查。

单纯形优化法的步骤及框图如下：

1. 给定参数：

\bar{x}_0 ——初始点；

N ——变量数；

h ——步长；

μ ——扩展因子，可以取 $\mu = 1.2 \sim 2$ ；

λ ——压缩因子，可以取 $\lambda = 0.25 \sim 0.75$ ；

k ——最大允许寻查次数，可取 $k = 50 \sim 500$ 。

2. 根据步长算出 $N+1$ 个顶点：

$$\bar{x}_i = \bar{x}_0 + h\delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{x}_{N+1} = \bar{x}_0$$

δ_i 是第 i 个座标单位向量。

3. 计算各顶点的目标函数：

$$y_i = \phi(\bar{x}_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

4. 在 $N+1$ 个点中选出函数值最大、次大和最小的三个点：

$y_H = \phi(\bar{x}_H)$ ——函数最大值；

$y_L = \phi(\bar{x}_L)$ ——函数最小值；

$y_G = \phi(\bar{x}_G)$ ——函数次大值。

5. 收敛判断：满足

$$|y_H - y_L| < \varepsilon |y_L|$$

时为收敛，否则继续寻查。

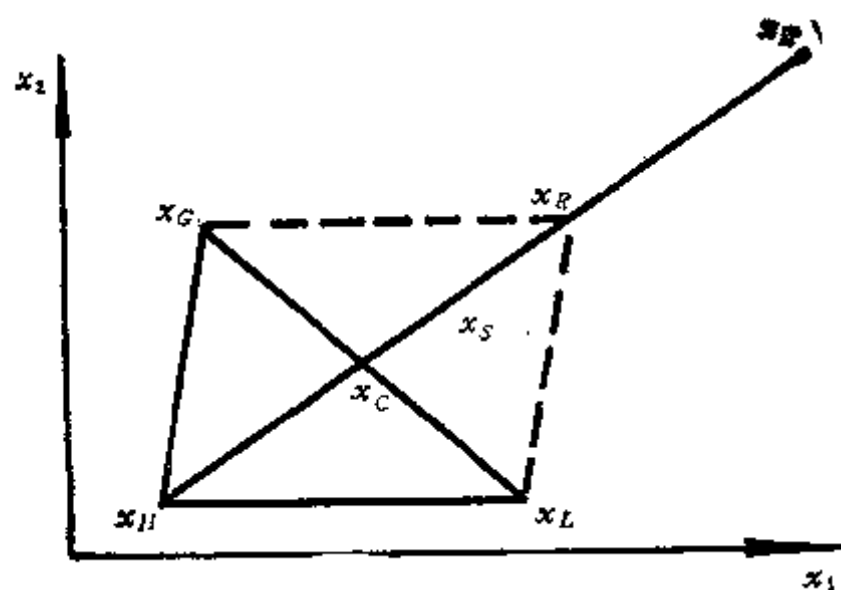


图2-33 单纯形法

6. 计算中心点 \bar{x}_c 和反射点 \bar{x}_R :

$$\bar{x}_c = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N+1} \bar{x}_i - \bar{x}_H \right) \quad (2-141)$$

在多维坐标中, \bar{x}_c 是除 \bar{x}_H 以外的 N 个点的质量中心。

$$\bar{x}_R = \bar{x}_H + 2(\bar{x}_c - \bar{x}_H) = \frac{2}{N} \left(\sum_{i=1}^{N+1} \bar{x}_i - \bar{x}_H \right) - \bar{x}_H \quad (2-142)$$

$$y_R = \phi(\bar{x}_R)$$

7. 扩展或压缩判断: 若满足

$$y_R < y_G$$

则进行扩展, 否则压缩 (转11步)。

8. 计算扩展点及其函数值:

$$\bar{x}_E = \bar{x}_H + \mu(\bar{x}_R - \bar{x}_H) \quad (2-143)$$

$$y_E = \phi(\bar{x}_E)$$

9. 扩展点选择: 若 $y_E < y_L$ 而且 $y_E < y_R$, 则可以扩展, 把 \bar{x}_E 做为新点, 命为 \bar{x}_S ; 若 $y_R < y_E < y_L$, 则不宜扩展, 把 \bar{x}_R 做为新点, 命为 \bar{x}_S ; 若 $y_E > y_L$, 不宜扩展, 把 \bar{x}_R 做为新点, 命为 \bar{x}_S 。

10. 用 \bar{x}_S 置换 \bar{x}_H , 对 \bar{x}_G 、 \bar{x}_L 、 \bar{x}_S 重新排列大小次序, 进行第二次寻查。

11. 压缩: 压缩点为 $\bar{x}_S = \bar{x}_H + \lambda(\bar{x}_R - \bar{x}_H)$ (2-144)

式中 $\lambda \neq 0.5$, 否则 \bar{x}_S 与 \bar{x}_c 重叠, 造成寻查空间降维, 寻查将不能进行。

12. 压缩点选择: 当 $y_S < y_G$ 时, 可以压缩, 用 \bar{x}_S 点代替 \bar{x}_H ; 当 $y_S > y_G$ 时, 不宜压缩, 应缩小寻查范围。

13. 缩小寻查范围: 保留 \bar{x}_L 点, 压缩三角形, 构成新的三角形 (见图 2-34), 其各顶点是

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2} (\bar{x}_L + \bar{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2-145)$$

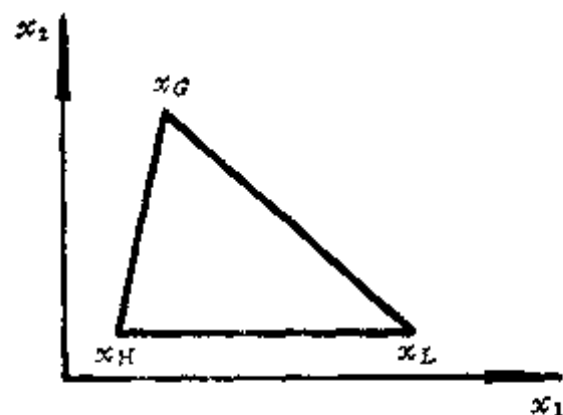


图2-34 单纯形压缩

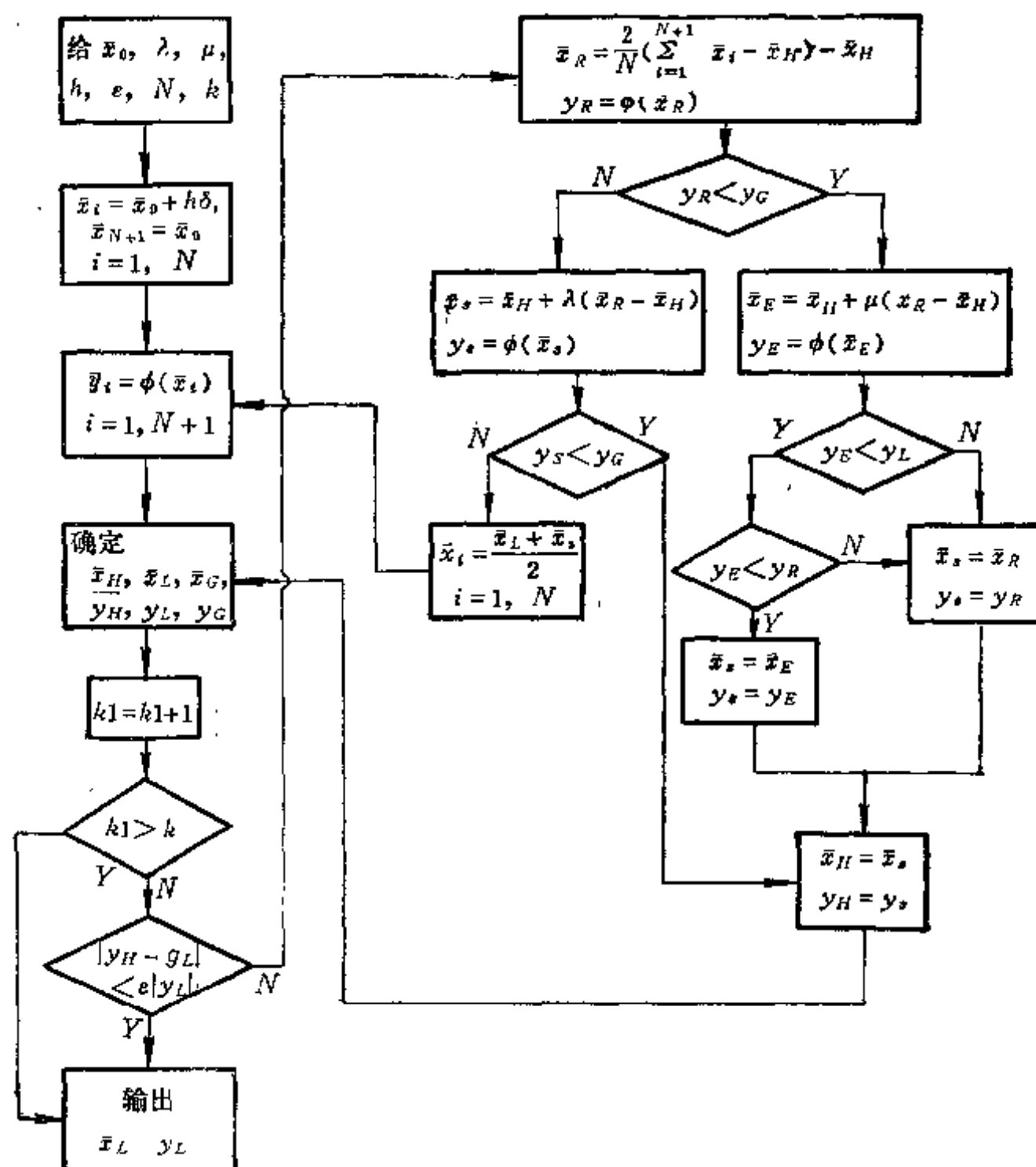


图2-35 单纯形法框图

单纯形法程序

程序说明:

1. 变量符号

T——压缩因子;

U——扩展因子;

H——步长;

N——维数;

N1——单纯形顶点数;

N2——反射点号;

N4——扩展点号;

K0——最大允许优化次数;

IE——判敛符。IE = 1 是优化正常结束; IE = 0 是已优化 K0 次尚未收敛, 程序中断。

2. 目标函数子程序 OBJ 的虚拟变量

Y——二维数组，单纯形顶点向量；

J——单纯形顶点号；

FNC——目标函数值。

3. 供试通程序用的目标函数为

$$\phi(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_2 - 3x_1 - 2x_1x_2 + 45$$

4. 给初始值

$$T = 0.75, U = 2.0, H = 2.0, E = 0.0005, N = 2, x(1,1) = 0.0, x(2,1) = 0.0.$$

5. 程序运算结果

$$\text{目标函数极小值} \quad \phi(\bar{x})_{\pi} = 26.750$$

$$\text{最小值变量点} \quad x_1 = 5.50$$

$$x_2 = 4.00$$

C THE PROGRAM OF SIMPLEX METHOD OPTIMIZATION

```
DIMENSION X(20,20), Q(20)
READ (5,*) T,U,H,N,E
READ (5,*) (X(I,1), I=1,N)
N1=N+1
N2=N+2
N3=N+3
N4=N+4
K1=0
K0=200
IE=1
50 DO 85 J=2,N1
  DO 80 I=1,N
    IF(I.EQ.(J-1)) GOTO 75
    X(I,J)=X(I,1)
  GOTO 80
75 X(I,J)=X(I,1)+H
80 CONTINUE
85 CONTINUE
90 DO 100 J=1,N1
  K=J
  CALL OBJ (X,K,N,FNC)
100 Q(K)=FNC
110 J0=1
  J2=1
  DO 140 J=2,N1
    IF(Q(J).LE.Q(J0)) GOTO 130
    J0=J
130 IF(Q(J).GE.Q(J2)) GOTO 140
    J2=J
140 CONTINUE
```



```

      J1 = J2
      DO 180 J = 1, N1
      IF((J.EQ.J0).OR.(Q(J).LE.Q(J1))) GOTO 180
      J1 = J
180  CONTINUE
      Q0 = Q(J0)
      Q1 = Q(J1)
      Q2 = Q(J2)
      K1 = K1 + 1
      IF(K1.GT.K0) GOTO 500
      DO 200 I = 1, N
      DO 200 J = 2, N1
      IF(ABS(X(I,J) - X(I,1)).GT.E) GOTO 225
200  CONTINUE
      IF((Q0 - Q2).LT.E) GOTO 510
220  IF((Q2.GT.1.0).AND.((Q0 - Q2).LT.(E * Q2))) GOTO 510
225  DO 250 I = 1, N
      X(I,N2) = 0.0
      DO 240 J = 1, N1
240  X(I,N2) = X(I,N2) + X(I,J)
250  X(I,N2) = 2.0 * (X(I,N2) - X(I,J0))/FLOAT(N) - X(I,J0)
      CALL OBJ (X,N2,N,FNC)
      Q(N2) = FNC
      IF(Q(N2).LT.Q(J1)) GOTO 410
      IF(Q(N2).LT.Q(J0)) GOTO 310
      DO 300 I = 1, N
      X(I,N3) = X(I,N2)
      X(I,N2) = X(I,J0)
300  X(I,J0) = X(I,N3)
310  DO 315 I = 1, N
315  X(I,N3) = (1.0 - T) * X(I,J0) + T * X(I,N2)
      CALL OBJ (X,N3,N,FNC)
      Q(N3) = FNC
      IF(Q(N3).LT.Q(J1)) GOTO 380
      DO 355 J = 1, N1
      DO 355 I = 1, N
355  X(I,J) = (X(I,J) + X(I,J2))/2.0
      GOTO 90
380  DO 385 I = 1, N
385  X(I,J0) = X(I,N3)
      Q(J0) = Q(N3)
      GOTO 110
410  IF(((1.0 - U) * Q0 + U * Q(N2)).LT.Q2) GOTO 440
415  DO 420 I = 1, N

```

```

420  X(I,N3) = X(I,N2)
      Q(N3) = Q(N2)
      GOTO 380
440  DO 445 I=1,N
      X(I,N4) = (1.0 - U) * X(I,I0) + U * X(I,N2)
      CALL OBJ (X,N4,N,FNC)
      Q(N4) = FNC
      IF(Q(N4) * LT * Q(N2)) GOTO 480
      GOTO 415
480  DO 485 I=1,N
485  X(I,1) = X(I,N4)
      GOTO 50
500  IE = 0
510  WRITE (6,515) Q(I2),IE
515  FORMAT (1H0, 20HOBJECTIVE FUNCTION = ,E15.6,5X,3HIE = ,I2)
      DO 530 I=1,N
530  WRITE (6,531) I, X(I,I2)
531  FORMAT (13X,2HX(,I3,3H) = ,E15.6)
      STOP
      END
      SUBROUTINE OBJ(Y,J,N,FNC)
      DIMENSION X(20), Y(20,20)
      DO 600 I=1,N
      X(I) = Y(I,J)
      FNC = X(1) * X(1) + 2.0 * X(2) * X(2) - 5.0 * X(2) - 3.0 * X(1) * - 2.0 * X(1) *
      *X(2) + 45.0
      RETURN
      END

```

单纯形法是依靠比较函数值来判断函数下降方向的，初始点和步长的选择很重要。初始点应该尽可能选在目标函数极小值附近以加速收敛；不同的目标函数应选取不同的步长，步长过大或过小都对收敛不利。

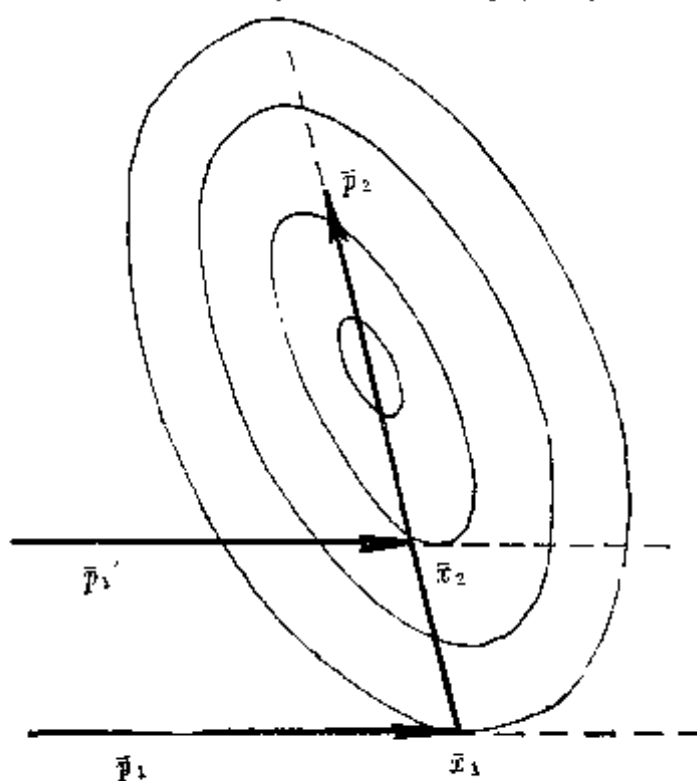


图2-36 共轭方向

§ 2.6.2 鲍威尔法

鲍威尔法也是一种直接法，它利用近似共轭方向进行寻查，因而可以较快收敛。下面先用二元函数来说明共轭方向的几何含义。二元函数在极值点附近的等值线可以近似看成椭圆，如图 2-36。在任意个两平行寻查方向 \bar{p}_1 和 \bar{p}_1' 上得到两个一维极小点 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 ，连接 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 的直线将通过函数极小值的点。数学上可以证明，寻查方向 \bar{p}_1 (或 \bar{p}_1') 与 \bar{p}_2 相对于汉森矩阵共轭^[4]，即

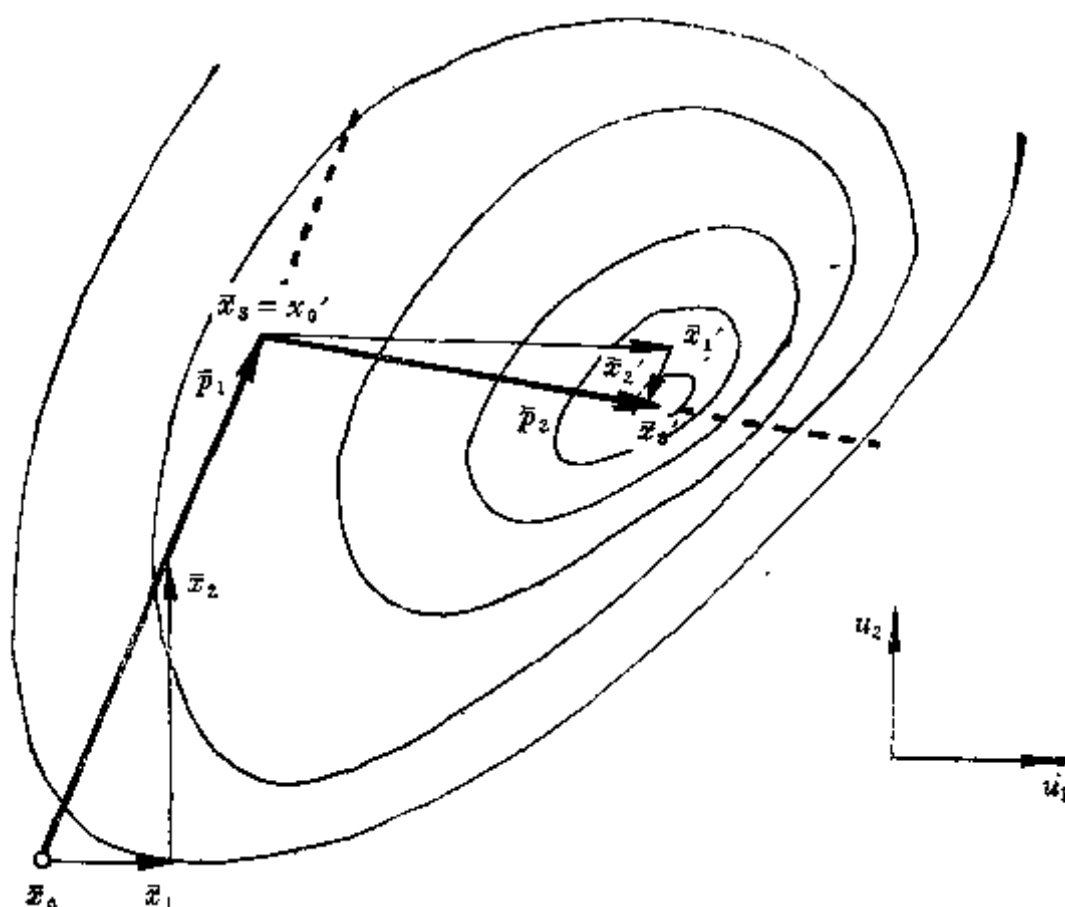


图2-37 鲍威尔法寻查过程

$$\bar{p}_1^T A \bar{p}_2 = 0$$

因此，对目标函数进行优化时，可先找两个不同点，沿同样的寻查方向进行一维寻查，再把两次寻查的极小点连接起来做为第二次寻查方向。由于函数不是严格的椭圆方程，所以这仅是近似共轭方向。按此规律继续寻查下去直至收敛，这就是鲍威尔法的基本原理。

鲍威尔法寻查过程的几何关系可用图 2-37 的二元函数图说明。

优化的第一步是进行坐标轮换寻查。初始点为 \bar{x}_0 ，坐标为 u_1 和 u_2 。先沿 u_1 进行一维寻查，找到 \bar{x}_1 ，再沿 u_2 一维寻查找找到 \bar{x}_2 ，连接 \bar{x}_0 和 \bar{x}_2 ，以 $\bar{p}_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_0$ 方向寻查得 \bar{x}_3 。至此，第一个大循环结束。

第二步是更换寻查方向。先选出 $[\phi(\bar{x}_0) - \phi(\bar{x}_1)]$ 和 $[\phi(\bar{x}_0) - \phi(\bar{x}_2)]$ 中的较大者，即找出目标函数下降较快的方向，舍弃不用（在图 2-37 中是舍弃 u_2 方向）。从 $\bar{x}'_0 = \bar{x}_3$ 点出发，沿 u_1 寻查至 \bar{x}'_1 ，再沿 \bar{p}_1 的平行方向寻查到 \bar{x}'_2 ， $\bar{p}_2 = \bar{x}'_2 - \bar{x}'_0$ 就是 \bar{p}_1 的共轭方向，沿此方向寻查到 \bar{x}'_3 。至此完成第二次大循环。如此继续寻查下去，直至达到目标函数极小值为止。

由图可以看出，对于二元函数，两次大循环寻查基本上就可以收敛到极小点。

推广到 n 元函数，鲍威尔法的具体步骤归纳如下：

1. 从初始点 \bar{x}_0 沿 n 个坐标方向 (u_1, u_2, \dots, u_n) 进行坐标轮换一维寻查。依次求出各方向上的最优步长 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，即可得各方向上的最优值：

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}_0 + \lambda_1 u_1 \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 + \lambda_2 u_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{x}_n &= \bar{x}_{n-1} + \lambda_n u_n \end{aligned} \right\} \quad (2-146)$$

2. 根据各点的目标函数值 $\phi(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$)。找出各次寻查中目标函数下降差值最大者，即求

$$\begin{aligned}\Delta\phi_m &= \max[\phi(\bar{x}_{i-1}) - \phi(\bar{x}_i)] \quad (i=1, 2, \dots, N) \\ &= \phi(\bar{x}_{m-1}) - \phi(\bar{x}_m)\end{aligned}\quad (2-147)$$

对应于 $\Delta\phi_m$ 寻查方向的坐标是 u_m 。

3. 坐标轮换寻查的最后一点是 \bar{x}_n 。沿 $\bar{p}_1 = \bar{x}_n - \bar{x}_0$ 方向进行寻查, 求最优步长 λ , 使

$$\phi(\bar{x}_0 + \lambda \bar{p}_1) = \min \phi(\bar{x}_0 + \lambda \bar{p}_1) \quad (2-148)$$

得到 \bar{p}_1 方向的最小点 $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_0 + \lambda \bar{p}_1$ 。至此完成第一个大循环寻查。

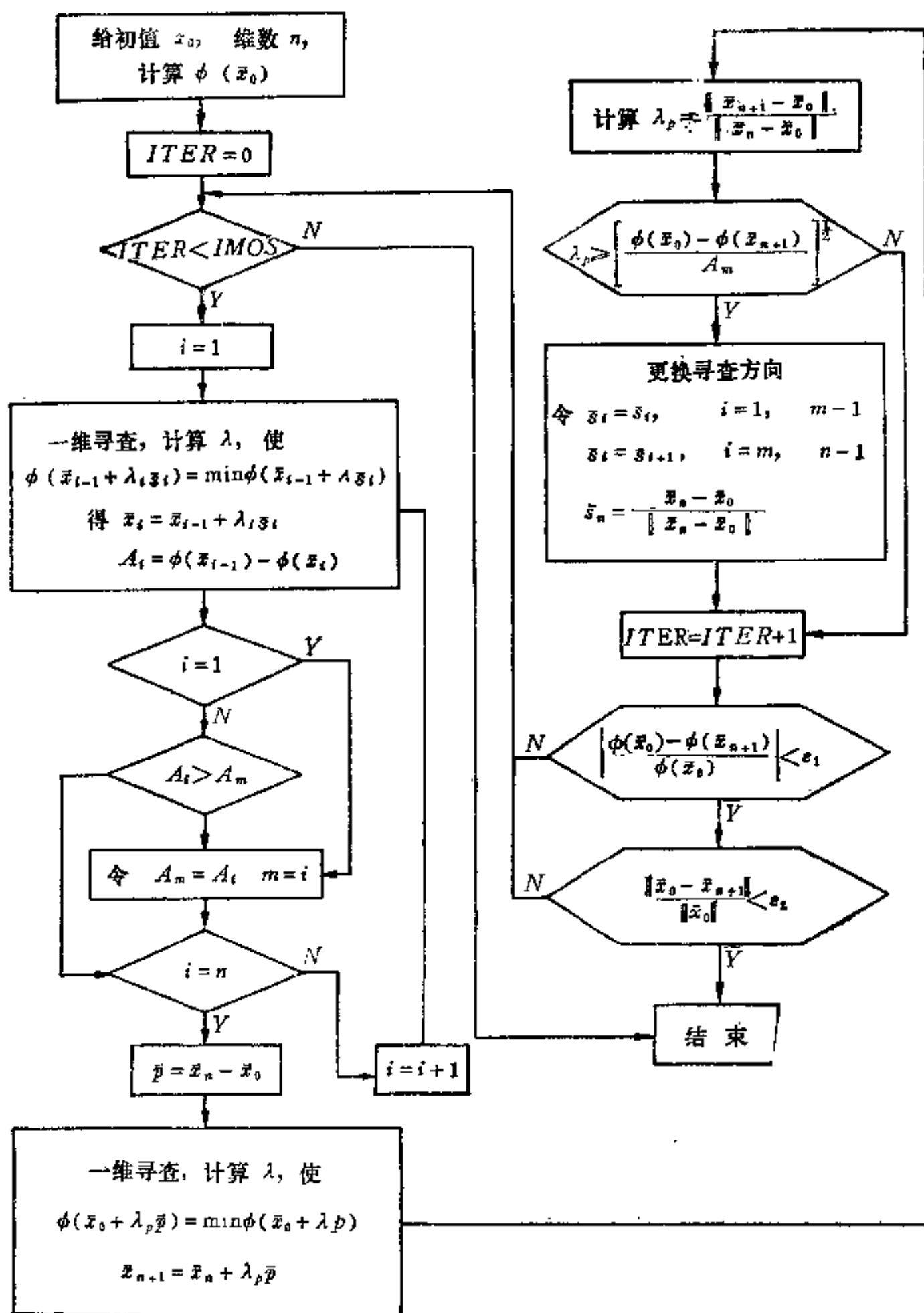


图2-38 鲍威尔法框图

4. 判断 \bar{p}_1 是否为下一个大循环中的有利方向。如果满足

$$\lambda_p > \left[\frac{\phi(\bar{x}_0) - \phi(\bar{x}_{n+1})}{\Delta\phi_u} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-149)$$

式中
$$\lambda_p = \frac{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_0}{\bar{x}_n - \bar{x}_0} \quad (2-150)$$

则舍掉 u_m 方向, 在第二个大循环的末尾补一个 \bar{p}_1 方向, 即依次沿 $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_{m+1}, \dots, u_n, \bar{p}_1$ 方向进行第二个大循环寻查。此次循环的最后一个点是 \bar{x}'_{n+1} 。

舍掉 u_m 补入 \bar{p}_1 是为了获得更好的近似共轭方向。第一个大循环的最后寻查方向是 \bar{p}_1 , 按上述更换方向的结果, 第二个大循环的最后寻查方向也是 \bar{p}_1 , 因此 \bar{x}'_{n+1} 与 \bar{x}_{n+1} 的连线方向 \bar{p}_2 就是 \bar{p}_1 的共轭方向。

如果式(2-149) 不满足, 说明在 \bar{p}_1 方向上可能得不到理想的共轭方向, 则第二个循环就不更换寻查方向, 仍用原来的 n 个坐标方向进行轮换寻查(以 \bar{x}_{n+1} 为初始点)。

5. 收敛判断。收敛判断条件可用

$$\frac{\|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_0\|}{\|\bar{x}_0\|} \leq \varepsilon_1 \quad (2-151)$$

或用
$$\left| \frac{\phi(\bar{x}_{n+1}) - \phi(\bar{x}_0)}{\phi(\bar{x}_0)} \right| \leq \varepsilon_2 \quad (2-152)$$

如果不满足收敛条件, 则继续寻查下去。

这种方法又叫鲍维尔——萨金法(Powell-Sargent), 其程序框图见图2-38。

鲍维尔法程序

程序说明:

1. 本程序用于多元函数直接优化。其调用的一维寻查子程序 DSCPOW 见 § 2.4.2 中的二次插值程序。

2. OBF 是目标函数子程序, 由使用人自编。此处用试通程序的函数

$$\phi(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

初始点 $\bar{x}_0 = [-1 \quad 1]^{-1}$

极小点 $\bar{x}_m = [1 \quad 1]^{-1}$

极小函数值 $\phi(\bar{x}_m) = 0$

3. 参数符号

X(N)——输入参数, 存放变量初值;

Y(N)——输出参数, 存放寻查所得极小点值;

FY——输出参数, 存放寻查所得极小点函数值;

N——输入参数, 变量维数, 程序内允许N最大为20;

IMOS——输入参数, 最大允许的大循环寻查次数, 可给50~100;

ICOVG——输出参数, ICOVG = 1 表示一维寻查已达精度要求; ICOVG = 0 表示已寻

查 IMOS 次尚未达到要求; ICOVG = -1 表示找不出更好的点;

XT——输入参数, 变量的精度要求 (即 ε_1);

FT——输入参数, 目标函数的精度要求 (即 ε_2);

IT——输入参数, IT > 0 表示使用人已给 XT 和 FT; IT ≤ 0 表示使用人未给精度, 由程序定为 XT = 0.001, FT = 0.001。

```

01      SUBROUTINE POWELL(X, Y, FY, N, IMOS, ICOVG, XT, FT, IT, ITER)
02      DIMENSION X(N), Y(N), DIR(20,20), S(20), W(20), BEF(20)
03      ITER = 0
04      IF(IT, GT, 0) GOTO 101
05      XT = 0.001
06      FT = 0.001
07  101  ICOVG = 0
08      N1 = N - 1
09      TD = FT * 0.1
10      DO 2 I = 1, N
11      DO 1 J = 1, N
12  1    DIR(I, J) = 0.0
13  2    DIR(I, I) = 1.0
14      CALL OBF(X, FX)
15      STEP = 1.0
16  102  IF(ITER, LEQ, IMOS) GOTO 22
17      DO 4 I = 1, N
18  4    BEF(I) = X(I)
19      F1 = FX
20      SUM = 0.0
21      DO 9 I = 1, N
22      DO 5 J = 1, N
23  5    S(J) = DIR(J, I)
24      CALL DSCPOW(X, FX, Y, FY, S, S, N, 2, TD, 1, ITER, IEX)
25      IF(IEX, EQ, 1) GOTO 21
26      A = FX - FY
27      IF(A - SUM) 7, 7, 6
28  6    ISUM = I
29      SUM = A
30  7    DO 8 J = 1, N
31  8    X(J) = Y(J)
32  9    FX = FY
33      F2 = FX
34      DO 10 I = 1, N
35  10   W(I) = X(I) - BEF(I)
36      CALL DSCPOW(X, FX, Y, FY, W, W, N, 2, TD, 1, ITER, IEX)
37      IF(IEX, EQ, 1) GOTO 21
38      DO 41 I = 1, N

```

```

39      IF(W(I).EQ.0.) GOTO 41
40      ALPH=ABS((Y(I)-X(J))/W(I))
41      GOTO 42
42  41  CONTINUE
43  42  IF(ALPH+1.-SQRT((F1-FY)/SUM)) 49, 12, 12
44  12  IF(ISUM-N) 13, 15, 15
45  13  DO 14 I=ISUM,N1
46      I1=I+1
47      DO 14 J=1,N
48  14  DIR(J,I)=DIR(J,I1)
49  15  A=0.0
50      DO 16 J=1,N
51      DIR(J,N)=X(J)-BEF(J)
52  16  A=DIR(J,N)*DIR(J,N)+A
53      A=1.0/SQRT(A)
54      DO 17 J=1,N
55      DIR(J,N)=DIR(J,N)*A
56  17  S(J)=DIR(J,N)
57  49  FX=FY
58      DO 18 I=1,N
59  18  X(I)=Y(I)
60      ITER=ITER+1
61  19  IF(ABS(F1-FX).GT.(ABS(F1)+1.) * FT) GOTO 102
62      DO 20 I=1,N
63      IF(ABS(BEF(I)-X(I)).GT.(ABS(BEF(I))+1.)*XT) GOTO 102
64  20  CONTINUE
65      ICOVG=1
66      GOTO 23
67  21  ICOVG=-1
68      GOTO 23
69  22  ICOVG=0
70  23  RETURN
71      END

```

试 通 程 序

```

01      DIMENSION X(2),Y(2)
02      X(1)=-1.
03      X(2)=1.
04      CALL POWELL(X,Y,FY,2,5000,ICOVG,0.0001,0.0001,1,L)
05      WRITE(6,10) L,ICOVG
06  10  FORMAT(1X,'L IS THE TIMES OF FINDING SOLUTION',I5,
      *5X,'ICOVG = ',I2)

```

```

07      WRITE(6,20)
08  20  FORMAT(1X,'Y ARE THE POINTS OF OPTIMITION VALUE')
09      WRITE(6,30) Y,FY
10  30  FORMAT(1X,'Y1= ',E15.6,4X,'Y2= ',E15.6,4X,'FY= ',E15.6)
11      STOP
12      END
01      SUBROUTINE OBF(X,FX)
02      DIMENSION X(2)
03      FX = 100. * ((X(2) - X(1) * X(1)) * (X(2) - X(1) * X(1))) + (1. - X(1) * )
          * (1. - X(1))
01      RETURN
05      END

```

在直接优化法中，鲍维尔法用的是近似共轭方向，而单纯形法用的是近似最速下降方向，因此鲍维尔法的运算速度快一些，但单纯形法的程序却较为简单。

§ 2.7 有约束条件的优化法

前述各种最优化方法对于变量值没有任何限制，故叫无约束最优化。在实际的电路设计中，待优化的变量往往都受一定条件的限制。比如，电子线路中的电阻、电容和电感必须为正值；微带线的特性阻抗不仅不能为负，还不能过高或过低，大约限于 $10\Omega < Z_0 < 150\Omega$ (Z_0 太大时线条过细，难于光刻， Z_0 太小时线条太宽，将产生高次模)；谐振腔的Q值不能高于几万；微波电感难于超过毫亨，等等。这些限制条件也就是约束条件。

约束条件可用函数不等式表示

$$y_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2-153)$$

上式表明共有 m 个约束条件，每个约束条件都是变量 x 的函数。这时的最优化问题是在满足式 (2-153) 条件下求目标函数极小值。

对于同一个目标函数，有约束和无约束的优化计算结果往往相差很多。比如，给定目标函数

$$\phi(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

约束条件为 $x_1 \geq 1$ 时，优化结果为 $x_1 = 1, x_2 = 0$ ；而无约束条件时，优化结果为 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 。

在最优化技术中，大多数颇为有效的优化方法是无约束的。解决有约束问题的简单而现实的途径是把有约束目标函数转换成无约束目标函数。经转换之后，前述的各种无约束优化方法都可以继续使用。

§ 2.7.1 变量更换法

变量更换方法有很多种，其基本原则都是把约束条件转化成三角函数。主要形式有：

1. 约束条件是有界不等式

$$x_{i1} \leq x_i \leq x_{i2} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2-154)$$

可以更换成下面二式之一：

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_{i1} + (x_{iu} - x_{i1}) \sin^2 x_{iN} \\ x_i &= \frac{1}{2} (x_{iu} + x_{i1}) + \frac{1}{2} (x_{iu} - x_{i1}) \sin x_{iN} \end{aligned} \right\} \quad (2-155)$$

若约束条件的上下界对称, 即

$$-x_{iu} \leq x_i \leq x_{iu} \quad (2-156)$$

则可换成 $x_i = x_{iu} \sin x_{iN}$ (2-157)

若约束条件为

$$0 \leq x_i \leq x_{iu} \quad (2-158)$$

则可换成 $x_i = x_{iu} \sin^2 x_{iN}$ (2-159)
或者 $x_i = x_{i1} \cos^2 x_{iN}$

在上述变换公式中, 变量是 x_{iN} , 其允许变化范围是 $-\infty < x_{iN} < \infty$, x_{iN} 是无约束变量。 $\sin x_{iN}$ 的变化范围是 $-1 \leq \sin x_{iN} \leq 1$, 所以 x_i 满足给定的约束条件。

2. 约束条件是无界不等式

$$x_{i1} < x_i < x_{iu} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2-160)$$

可更换成 $x_i = x_{i1} + \frac{1}{\pi} (x_{iu} - x_{i1}) \cot^{-1} x_{iN}$ (2-161)

式中 x_{iN} 的允许范围是 $-\infty < x_{iN} < +\infty$, 而 $\cot^{-1} x_{iN}$ 的范围是 $0 < \cot^{-1} x_{iN} < \pi$ 。

3. 约束条件为比值不等式

此种约束情况出现在对微带线特性阻抗进行优化, 而且对特性阻抗跳变有限制时, 以免传输线不均匀区难以实现。公式表示为

$$\left. \begin{aligned} x_{i1} &\leq \frac{x_2}{x_1} \leq x_{iu} \\ x_2 &> 0 \\ x_1 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-162)$$

可更换成

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{x_{1N}} \cos[\theta_1 + (\theta_u - \theta_l) \sin^2 x_{2N}] \\ x_2 &= e^{x_{2N}} \sin[\theta_1 + (\theta_u - \theta_l) \sin^2 x_{2N}] \end{aligned} \right\} \quad (2-163)$$

式中

$$\theta_l = \tan^{-1} x_{l1}$$

$$\theta_u = \tan^{-1} x_{u1}$$

$$0 < \theta_l < \theta_u < \frac{\pi}{2}$$

式中的 x_{1N} 、 x_{2N} 是无约束的新变量。

把上述变量更换公式代入目标函数, 就可以把有约束问题转变成无约束问题了。显然, 目标函数因此变得比较复杂, 尤其是采用梯度优化法时, 给目标函数梯度的计算增加了不少困难。

对于前面讲过的微带线特性阻抗约束问题, 可以用公式 (2-155) 进行变换。给定的约束条件是

$$Z_l \leq Z_0 \leq Z_u$$

$$Z_u = 150 \Omega$$

$$Z_l = 10 \Omega$$

目标函数中的变量 Z_0 用下式代换

$$Z_0 = \frac{1}{2}(Z_* + Z_1) + \frac{1}{2}(Z_* - Z_1)\sin Z$$

$$= 80 + 70 \sin Z$$

新变量 Z 没有约束。经无约束优化得出 Z ，再计算出 Z_0 。

§ 2.7.2 罚函数法

罚函数法也是一种简单而有效的约束优化法，其基本概念是把约束条件做为一个“惩罚”项加进原来的目标函数中，从而构成一个新的目标函数，再对新的目标函数进行无约束优化。

(一) 等式约束罚函数

等式约束条件是

$$y_i(\bar{x}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2-164)$$

例如，在设计级联微波放大器时，由于微带电路结构所限，两个微波晶体管之间的距离 l 必须为固定值 l_0 ，则约束条件是 $y_i = l - l_0 = 0$ 。

等式约束的目标函数可写成

$$p(\bar{x}, W) = \phi(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m W_i [y_i(\bar{x})]^2 \quad (2-165)$$

式中， $\phi(\bar{x})$ 是原目标函数，等式右面第二项叫罚项。当约束条件不满足时，罚项是大于零的值，它使 $p(\bar{x}, W)$ 加大，因而优化不能收敛。当满足约束条件时，罚项为零， $p(\bar{x}, W)$ 与 $\phi(\bar{x})$ 完全相等。换句话说，只有满足约束条件时，目标函数才不受“惩罚”，仍按原目标函数进行优化。 W_i 是加权系数， W_i 愈大则罚项的影响愈大，优化精度愈高。包括罚项的新函数简称为罚函数。

采用了罚函数之后，有约束优化就转换为无约束优化，原则上就可以用前述的任一种最优化方法来进行设计了。

(二) 不等式约束罚函数

微波电路的设计中，最常遇到的约束是不等式约束。不等式约束罚函数的公式形式是

$$p(\bar{x}, M_k) = \phi(\bar{x}) + M_k \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \left[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})| \right] \right\}^2 \quad (2-166)$$

式中罚项括弧中的值是

$$\frac{1}{2} \left[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})| \right] = \begin{cases} y_i(\bar{x}) & (y_i(\bar{x}) < 0) \\ 0 & (y_i(\bar{x}) \geq 0) \end{cases}$$

当 \bar{x} 满足约束条件 $y_i(\bar{x}) \geq 0$ 时，罚项为零，罚函数等于原目标函数；否则罚项为正值，它使罚函数不能收敛。

M_k 是罚项系数，第一次寻查 M_1 取较小的值，第二次寻查 M_2 略为加大，以后每次寻查 M 顺次增大，即

$$0 < M_1 < M_2 < \dots < M_k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k \rightarrow \infty$$

直至优化收敛为止。

下面以二元函数为例，说明罚函数的优化过程。二元函数

$$\phi(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

指定约束条件是 $x_1 \geq 1$, 即 $y(\bar{x}) = x_1 - 1$ 。按照公式 (2-166) 写出罚函数

$$p(\bar{x}, M_k) = x_1^2 + x_2^2 + M_k \left[\frac{(x_1 - 1) - |x_1 - 1|}{2} \right]^2$$

即

$$p(\bar{x}, M_k) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + M_k (x_1 - 1)^2 & (x_1 < 1) \\ x_1^2 + x_2^2 & (x_1 \geq 1) \end{cases}$$

用解析法对上式求极值:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \begin{cases} 2x_1 + 2M_k(x_1 - 1) & (x_1 < 1) \\ 2x_1 & (x_1 \geq 1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 2x_2$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{M_k}{1 + M_k} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

当 $M_k \rightarrow \infty$ 时, x_1 的极值趋于1, 得

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

此时目标函数极小值是 $\phi(\bar{x}) = 1$ 。这是有约束时的极小值。由图 2-39 可看出 $\phi(\bar{x})$ 是一组同心圆, 约束条件是平行于纵轴的直线, 直线右边是可行域。有约束的优化点在 (1, 0)。

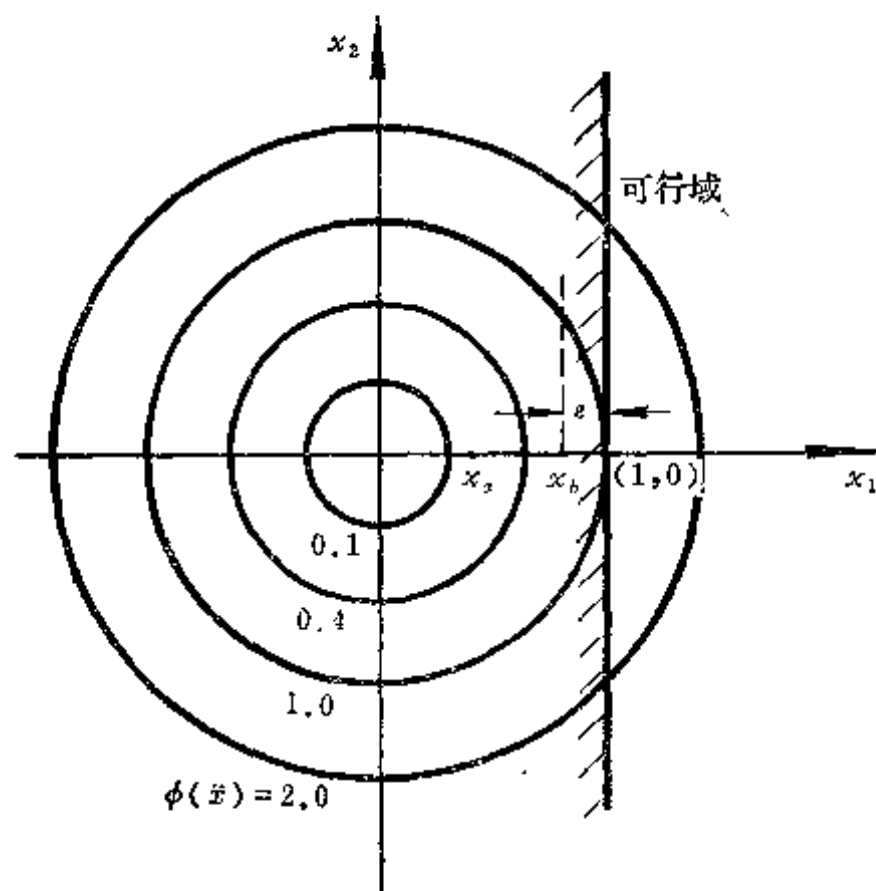


图2-39 外点罚函数的优化

在用计算机进行优化计算时, 初始 M_k 值取0~1间的较小值。第一次寻查找到的点是 x_a ; 第二次寻查时 M_k 增大, 找到的点为 x_b ; 以后每寻查一次都把 M_k 增大一次, 计算点距极小点的误差 ϵ 也缩小一次, 如此循环下去直至收敛于 (1, 0)。如果开始时把 M_k 取得过大, 则在罚函数公式中, $\phi(\bar{x})$ 相对很小, 此时近似于只对 x_1 进行优化, 很可能引起 x_2 的不确定性。从优化过程来看, 初始点处在可行域之外, 随着寻查次数增加, 计算点逐次逼近有约束极小点, 这种罚函数叫外点罚函数。程序框

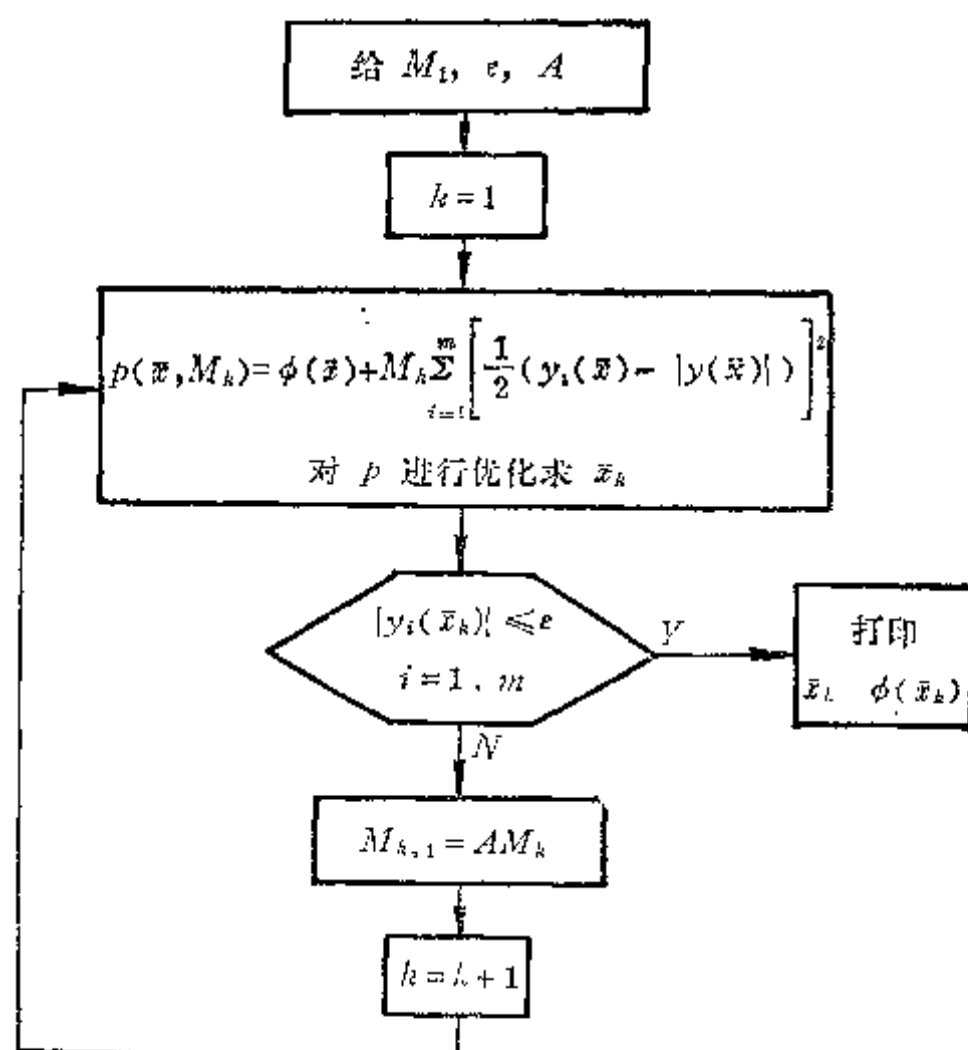


图2-40 罚函数法框图

图见图2-40。

外点罚函数法的计算步骤如下：

1. 给初值

M_1 ——初始罚系数，取 $M_1 = 0 \sim 1$ 间的任意数；

ε ——约束条件允许误差；

A ——罚系数步长因子。

2. 用无约束优化法对罚函数求极小

$$p(\bar{x}, M) = \phi(\bar{x}) + M_k \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2} (y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|) \right]^2 \rightarrow \min \text{得极小点 } \bar{x}_k。$$

3. 判断 \bar{x}_k 是否满足约束条件

$$|y_i(\bar{x}_k)| \leq \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

满足则收敛。

4. 如果不满足约束条件，则加大罚系数

$$M_{k+1} = AM_k$$

转回第2步，以 \bar{x}_k 为初始值，再次寻查。步长 A 可根据目标函数性质的不同取 $A=2 \sim 10$ 。

(三) 梯度优化法的罚函数

在上述两种罚函数中，罚项的作用是使函数值增大，它适用于直接优化法。在采用梯度法时，优化方向是依靠目标函数梯度来确定的，因此必须求出罚函数的梯度。

对罚函数式(2-166)求梯度

$$\nabla p(\bar{x}, M) = \nabla \phi(\bar{x}) + M_k \nabla \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2} (y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|) \right]^2$$

其中罚项的梯度可做如下推导:

$$\begin{aligned} & \nabla \left[\frac{1}{2} (y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{d[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|]^2}{dx_1} \quad \frac{d[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|]^2}{dx_2} \dots \dots \right]^T \end{aligned} \quad (2-167)$$

由于

$$\begin{aligned} & \frac{d[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|]^2}{dx_n} \\ &= 2[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|] \left[\frac{dy_i(\bar{x})}{dx_n} - \frac{d[(y_i(\bar{x}))^2]^{\frac{1}{2}}}{dx_n} \right] \\ &= 2[y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|] \left[1 - \frac{y_i(\bar{x})}{|y_i(\bar{x})|} \right] \frac{dy_i(\bar{x})}{dx_n} \end{aligned} \quad (2-168)$$

因此罚函数梯度

$$\nabla p(\bar{x}, M) = \nabla \phi(\bar{x}) + M_k \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} [y_i(\bar{x}) - |y_i(\bar{x})|] \left[1 - \frac{y_i(\bar{x})}{|y_i(\bar{x})|} \right] \nabla y_i(\bar{x}) \right\} \quad (2-169)$$

式中 $\nabla \phi(\bar{x})$ 是原目标函数的梯度, $\nabla y_i(\bar{x})$ 是第 i 个约束条件的梯度

$$\nabla y_i(\bar{x}) = \left[\frac{dy_i(\bar{x})}{dx_1} \quad \frac{dy_i(\bar{x})}{dx_2} \quad \dots \dots \frac{dy_i(\bar{x})}{dx_n} \right]$$

罚函数和罚函数梯度的几何意义很容易用一元函数说明。给一元罚函数

$$\begin{aligned} p(x, M_k) &= \phi(x) + M_k \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (y_i(x) - |y_i(x)|)^2 \right] \\ &= \phi(x) + \sum_{i=1}^n U_i(x) \end{aligned}$$

约束条件是

$$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1(x) = x - a \\ y_2(x) = b - x \end{cases}$$

罚函数写成

$$p(x, M_k) = \phi(x) + M_k \left[\frac{(x-a) - |x-a|}{2} \right]^2 + M_k \left[\frac{(b-x) - |b-x|}{2} \right]^2$$

在图 2-41(a) 中画出罚函数曲线。 $\phi(x)$ 是原目标函数, 其极小值在约束界外, $U_1(x)$ 和 $U_2(x)$ 是两个约束条件构成的罚项曲线, 罚函数 $p(x, M_k)$ 如图中粗线所示, 它由 $\phi(x)$ 、 $U_1(x)$ 、 $U_2(x)$ 叠加而成。

罚函数梯度

$$\begin{aligned}\frac{dp(x, M_i)}{dx} &= \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{dU_1(x)}{dx} + \frac{dU_2(x)}{dx} \\ &= \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{M_i}{2} \left[(x-a) - |x-a| \right] \left[1 - \frac{x-a}{|x-a|} \right] \\ &\quad - \frac{M_i}{2} \left[(b-x) - |b-x| \right] \left[1 - \frac{b-x}{|b-x|} \right]\end{aligned}$$

梯度变化曲线如图 2-41(b) 所示。在约束界外，由于罚项的存在使罚函数的梯度发生变化，梯度的零点移到 x_i 。 $p(x_i, M_i)$ 是函数的极小点，但此时 x_i 尚未满足约束条件，还必须加大 M_i 继续优化。当 M_i 逐渐趋于无限大时， $p(x, M_i)$ 及 $dp(x, M_i)/dx$ 曲线将逐渐逼近图 2-42 的有约束曲线，函数极小点将逼近约束边界点 b 。

有约束的最优化方法还有很多种，本书不一一列举。

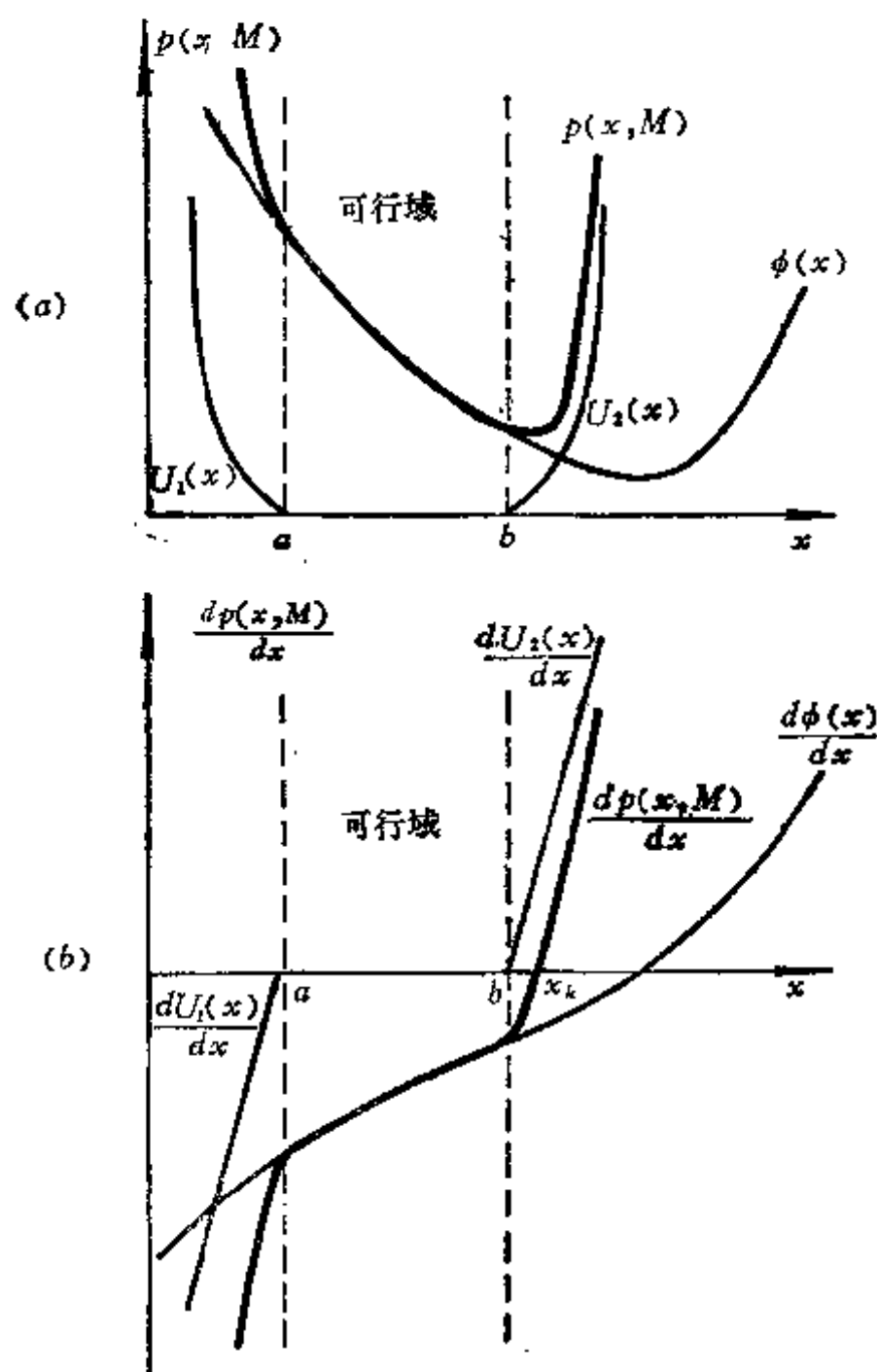


图2-41 罚函数及其梯度曲线

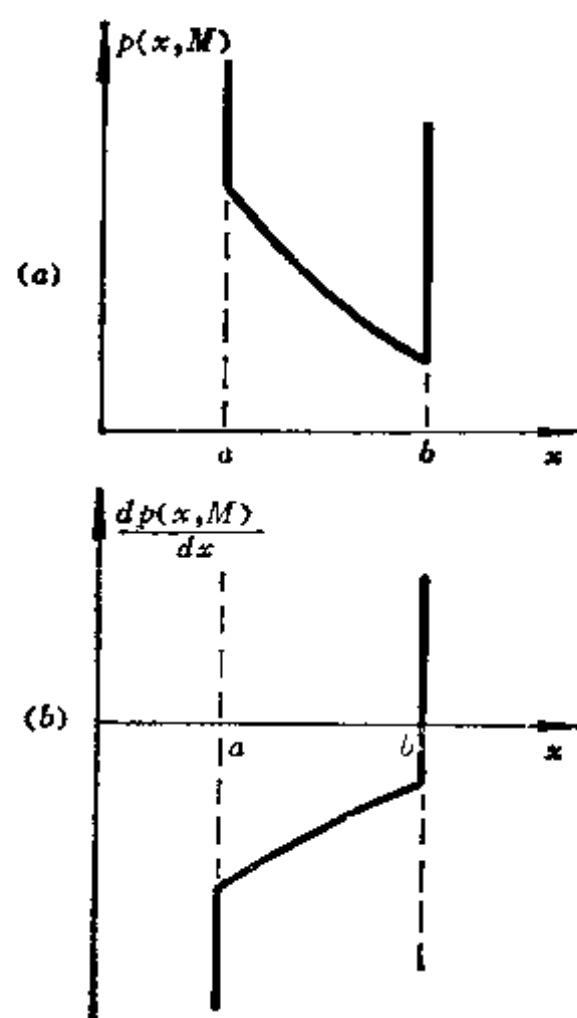


图2-42 罚函数极限曲线

参 考 文 献

1. 南京大学数学系, 最优化方法, 科学出版社, 1978。
2. 李庆扬、王能超、易大义 (华中工学院), 数值分析。
3. 王蕴仪、苗敬峰、沈楚玉、陈顺生 (南京工学院), 微波器件与电路, 江苏科学技术出版社, 1981。
4. 邓乃扬等, 无约束最优化计算方法, 科学出版社, 1982。
5. 刘德贵、费景高、于泳江、李广元, FORTRAN算法汇编(第二分册), 国防出版社, 1983。
6. K.C.Kupta、Ramesh Garg、Rakesh Chadha, Computer aided design of microwave circuits, Artech House Inc.1981。
7. Leo Young, Advances in microwaves, Volume 8 chapter 7, Academic press Inc. NY, 1974。
8. Special Issue on computer oriented microwave practices, IEEE TRANS MTT-17 No8 1969。

第三章 微波电路敏感度与公差分析

微波电路计算机辅助设计所给出的元件参数值通常是比较精确的，然而由于生产设备、工艺技术、商品元器件质量等条件所限，一般不能严格满足设计数据的要求。例如，微带线制版时光刻的误差、基片厚度的不均匀、介电常数的偏差、偏置电路阻容元件的标称值公差以及晶体管 S 参数的离散等因素的影响，使得实际的微带晶体管放大器的电路特性与设计所给出的指标有较大差距。

另外，由于环境温度和电源电压波动以及元件的老化效应，更使得电路特性明显地偏离要求的指标。因此，必须分析元器件参数变化对电路特性的影响，以估计产品的合格率和可靠性。这就是公差分析。

在不同的电路中，各元件参数的变化对电路特性的影响程度是很不一样的，有的影响很大，有的仅影响某几个指标。通常采用敏感度系数来衡量元件参数对电路特性的影响。

微波电路经典设计常常采用综合法，但是对于用综合法设计出的尺寸往往无法判断其精确度，也无法确定公差。究竟需要怎样精密的尺寸才能保证微波电路特性的要求，过去只能凭经验和实验测量估计，而采用计算机辅助设计就不难依据电路特性对各尺寸的敏感度来确定合理的尺寸公差。敏感度大的尺寸应该给以严格的公差，而敏感度小的尺寸则可以放宽公差。

在进行微波电路调试的过程中也需要用到敏感度系数。对于敏感度大的元件应该细心调整，对于敏感度小的元件则可以略加调整或者不调整，这样就可以提高调试工作的效率。

如果根据敏感度系数计算出的公差（保证电路性能所必须的）过于苛刻，以至于加工制造无法实现，则说明电路方案设计不合理，应重新选择方案。这就避免了盲目的加工和试验。

总之，在科学研究和大批量生产中，敏感度与公差分析在确保质量、提高效率和降低成本方面起着重要作用。

§ 3.1 微波电路敏感度及其计算

§ 3.1.1 敏感度定义

电路参数的相对变化与电路特性相对变化的比值叫灵敏度。电路参数是指构成电路的元件数值和结构尺寸等。例如，微带耦合线滤波器的电路参数包括微带特性阻抗、耦合段的电长度、耦合段的奇模阻抗、偶模阻抗或者微带线宽度、耦合缝隙、基片厚度等。电路特性包括电压传输系数、衰减系数、反射系数、传输相移、输入阻抗、输出阻抗等。

用 T 表示电路的电压传输系数， x 表示某个电路参数，则 T 对 x 的敏感度定义为

$$S_x^T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{T} \cdot \frac{dT}{dx} \quad (3-1)$$

或者用对数表示式

$$S_x^T = \frac{x}{T} \frac{dT}{dx} = \frac{d \ln T}{d \ln x} \quad (3-2)$$

同样可写出电路传输衰减 L 对 x 的敏感度

$$S_x^L = \frac{x}{L} \frac{dL}{dx}$$

由于 $L = \frac{1}{T}$, 所以

$$S_x^L = -\frac{x}{1/T} \frac{d(1/T)}{dx} = -S_x^T \quad (3-3)$$

功率增益 G 对 x 的敏感度为

$$S_x^G = \frac{x}{G} \frac{dG}{dx} = \frac{x}{T^2} \frac{dT^2}{dx} = 2S_x^T \quad (3-4)$$

可见, 增益、衰减和传输系数等的敏感度之间具有一定的内在联系。

当传输系数 T 是复数时

$$T = |T| e^{j\theta} \quad (3-5)$$

$|T|$ 是传输幅度特性, θ 是传输相位特性, 敏感度写成

$$S_x^T = \frac{d \ln T}{d \ln x} = \frac{d \ln |T|}{d \ln x} + j \frac{d \theta}{d \ln x} = S_x^{|T|} + j S_x^\theta \quad (3-6)$$

式中

$$S_x^{|T|} = \frac{d \ln |T|}{d \ln x} = \operatorname{Re}(S_x^T) \quad (3-7)$$

$$S_x^\theta = \frac{d \theta}{d \ln x} = \operatorname{Im}(S_x^T) \quad (3-8)$$

$S_x^{|T|}$ 是幅度敏感度, S_x^θ 是相位敏感度。

用分贝为单位时, 功率增益敏感度写为

$$S_x^G = \frac{d \ln G}{d \ln x} \approx \frac{x}{4.343} \frac{d G_{dB}}{dx} \approx \frac{x}{4.343} \frac{d G_{dB}}{dx} \quad (3-9)$$

式中 G_{dB} 是用 dB 为单位的功率增益, 此式用于直接计算敏感度较为方便。

微波电路特性的函数表示式一般比较复杂, 变量也很多, 可利用下述基本关系式来简化敏感度的计算:

1. 两个函数乘积的敏感度等于两个函数自身敏感度之和

$$S_x^{T_1 T_2} = S_x^{T_1} + S_x^{T_2} \quad (3-10)$$

证明 $S_x^{T_1 T_2} = \frac{d \ln(T_1 \cdot T_2)}{d \ln x} = \frac{d \ln T_1}{d \ln x} + \frac{d \ln T_2}{d \ln x} = S_x^{T_1} + S_x^{T_2}$

2. 两个函数相除的敏感度等于两个函数敏感度相减

$$S_{\frac{T_1}{T_2}}^T = S_{T_1}^T - S_{T_2}^T \quad (3-11)$$

证明 $S_{\frac{T_1}{T_2}}^T = \frac{d \ln(T_1/T_2)}{d \ln x} = \frac{d \ln T_1}{d \ln x} - \frac{d \ln T_2}{d \ln x} = S_{T_1}^T - S_{T_2}^T$

3. 函数乘以K倍时, 敏感度不变

$$S_x^{KT} = S_x^T \quad (3-12)$$

证明 $S_x^{KT} = \frac{d \ln K}{d \ln x} + \frac{d \ln T}{d \ln x} = S_x^T$

4. 函数K次方的敏感度等于函数敏感度的K倍

$$S_x^{T^K} = K S_x^T \quad (3-13)$$

证明 $S_x^{T^K} = \frac{d \ln T^K}{d \ln x} = \frac{K d \ln T}{d \ln x} = K S_x^T$

5. 函数加常数的敏感度

$$S_x^{T+K} = \frac{T}{T+K} S_x^T \quad (3-14)$$

证明 $S_x^{T+K} = \frac{x}{T+K} \frac{d(T+K)}{dx} = \frac{x}{T+K} \left(\frac{dT}{dx} + \frac{dK}{dx} \right) = \frac{T}{T+K} S_x^T$

6. 函数倒数的敏感度等于函数敏感度的负值

$$S_x^{\frac{1}{T}} = -S_x^T \quad (3-15)$$

证明 $S_x^{\frac{1}{T}} = \frac{d \ln \frac{1}{T}}{d \ln x} = -\frac{d \ln T}{d \ln x} = -S_x^T$

7. 函数对变量倒数的敏感度

$$S_{\frac{1}{x}}^T = -S_x^T \quad (3-16)$$

证明 $S_{\frac{1}{x}}^T = \frac{1}{\frac{x}{T}} \frac{dT}{d \frac{1}{x}} = \frac{-x}{T} \frac{dT}{dx} = -S_x^T$

8. 以e为底的指数函数的敏感度

$$S_x^{e^T} = T S_x^T \quad (3-17)$$

证明 $S_x^{e^T} = \frac{x}{e^T} \frac{d e^T}{dx} = \frac{x}{e^T} \frac{d e^T}{dT} \frac{dT}{dx} = T S_x^T$

9. 复函数的敏感度

$$S_x^{T(y_1, y_2, \dots, y_n)} = S_{y_1}^T S_{x^{y_1}}^T + S_{y_2}^T S_{x^{y_2}}^T + \dots + S_{y_n}^T S_{x^{y_n}}^T \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned}
 \text{证明 } S_x^{T(y_1, y_2, \dots, y_n)} &= \frac{x}{T} \left[\frac{dT}{dy_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dT}{dy_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{dT}{dy_n} \frac{dy_n}{dx} \right] \\
 &= S_{y_1}^T S_{x_1}^{y_1} + S_{y_2}^T S_{x_2}^{y_2} + \dots + S_{y_n}^T S_{x_n}^{y_n} \\
 &= \sum_{i=1}^n S_{y_i}^T S_{x_i}^{y_i}
 \end{aligned}$$

例1 某无源网络如图 3-1 所示, 求谐振频率 ω_0 及电压传输系数 $T(=U_2/U_1)$ 对各元件的敏感度

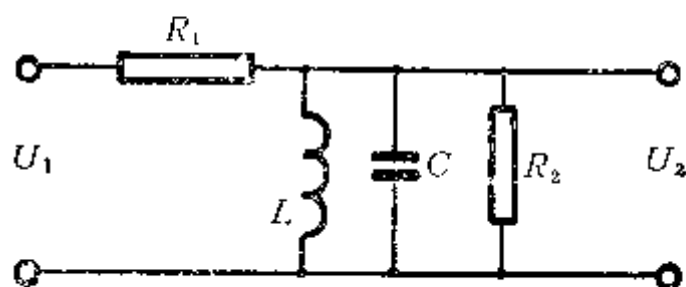


图3-1 例1的电路图

解

1. 谐振频率是

$$\omega_0 = L^{-\frac{1}{2}} C^{-\frac{1}{2}}$$

谐振频率对电感的敏感度

$$S_L^{\omega_0} = S_L^{L^{-\frac{1}{2}} C^{-\frac{1}{2}}}$$

此时 $C^{-\frac{1}{2}}$ 可做常数处理, 利用式 (3-12) 和 (3-

13), 得

$$S_L^{\omega_0} = S_L^{L^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}$$

同样可得对电容的敏感度

$$S_C^{\omega_0} = -\frac{1}{2}$$

对电阻的敏感度

$$S_{R_1}^{\omega_0} = S_{R_2}^{\omega_0} = 0$$

2. 电压传输系数为

$$T = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + j\omega R_1 C - j\frac{R_1}{\omega L}}$$

根据敏感度定义得传输系数对各元件的敏感度

$$S_{R_1}^T = \frac{R_1}{T} \frac{dT}{dR_1} = -TR_1 \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} \right)$$

$$S_{R_2}^T = \frac{R_1}{R_2} T, \quad S_L^T = -j\frac{R_1}{\omega L} T$$

$$S_C^T = -j\omega C R_1 T$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, 得中心频率时的传输系数

$$T_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

中心频率时各元件敏感度是

$$S_{R_1}^{T_0} = \frac{-R_1}{R_1 + R_2},$$

$$S_{R_2}^{T_0} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$S_L^{T_0} = -j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

$$S_C^{T_0} = -j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{C}{L}} = S_L^{T_0}.$$

根据式 (3-6) 可知 T 的幅度敏感度和相位敏感度是

$$S^{[T]} = S^{[T]} = 0,$$

$$S_L^{\theta} = S_C^{\theta} = \frac{-R_1 R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

例2 同上例的电路, 其元件值和元件的温度系数是: $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 100\text{k}\Omega$, $L = 10\text{mH}$, $C = 10\text{pF}$, $\frac{dR/R}{dt} = 10^{-3}/^\circ\text{C}$, $\frac{dC/C}{dt} = -5 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$, $\frac{dL/L}{dt} = 2 \times 10^{-3}/^\circ\text{C}$ 。求温度升高 10°C 时, ω_0 和 T 各变化多少。

解

1. 利用公式 (3-18) 得谐振频率对温度的敏感度

$$S_{\omega_0}^{T_0} = S_L^{T_0} S_t^L + S_C^{T_0} S_t^C$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)(2 \times 10^{-3}t) + \left(\frac{-1}{2}\right)(-5 \times 10^{-4}t) = -0.00075t$$

根据 $S_{\omega_0}^{T_0} = \frac{t}{\omega_0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ 得温度变化 10°C 时谐振频率变化的相对值为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = S_{\omega_0}^{T_0} \frac{\Delta t}{t} = -0.0075$$

2. 电压传输系数对温度的敏感度

$$S_t^T = S_{R_1}^T S_t^{R_1} + S_{R_2}^T S_t^{R_2} + S_L^T S_t^L + S_C^T S_t^C$$

$$= \left(\frac{-R_1}{R_1 + R_2}\right)(10^{-3}t) + \left(\frac{-R_1}{R_1 + R_2}\right)(10^{-3}t) + \left(-j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{C}{L}}\right)$$

$$\times (2 \times 10^{-3}t) + \left(-j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{C}{L}}\right)(-5 \times 10^{-4}t)$$

$$= -j0.0136t$$

由式 (3-7)、(3-8) 可知传输系数模的敏感度和相位敏感度是

$$S^{[T]} = 0,$$

$$S_t^{\theta} = -0.0136t$$

温度变化 10°C 时, 相位变化

$$\Delta\theta = S_t^{\theta} \frac{\Delta t}{t} = -0.136$$

§ 3.1.2 敏感度的直接算法

电路特性的敏感度可以按照定义式 (3-1) 进行计算, 其关键在于求出函数 T 的导数

dT/dx 。电路特性的导数不仅用于计算敏感度，而且也是梯度最优化法中必不可少的参数。直接计算导数的方法有下述两种。

(一) 增量法

微波电路特性的函数表示式 $T(\bar{x})$ 往往比较复杂，用解析法求导数有时存在一定困难。可以用增量比值近似代替导数，即

$$\frac{dT(\bar{x})}{dx_i} \approx \frac{\Delta T(\bar{x})}{\Delta x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-19)$$

$$\text{式中 } \Delta T(\bar{x}) = T(\bar{x} + \Delta x_i) - T(\bar{x}) \quad (3-20)$$

\bar{x} 表示 x 的向量。

计算过程是先用各元件标称值进行电路分析，求出电路特性 $T(\bar{x})$ ；然后把某一个元件参数 x_1 做微小变化 Δx_1 ，再进行电路分析，算出 $T(\bar{x} + \Delta x_1)$ ；再用式 (3-19) 求得 T 对 x_1 的敏感度；然后顺次对其余元件参数 x_2, x_3, \dots, x_n 做同样运算，得出 T 对各元件的敏感度。

采用增量法时，增量 Δx 值大小的选择很重要。如果 Δx 取得较大，显然误差也大；若 Δx 过小，则由于 ΔT 是两个大数相减，计算机舍入误差的影响也会增大误差。对于一般的微波电路，如果只为了进行公差分配，在多数情况下增量近似法的精度是可以满足要求的。

为了进一步提高精度，可以用数值微分法。在 x 值附近再选两个点，求插值平均即可减小舍入误差的影响。但是计算量无疑要大大增加。

(二) 双口矩阵导数法

在微波电路中，多数电路属于两口网络构成的链形电路，其目标函数往往由转移矩阵或传输矩阵连乘构成。此时总电路转移矩阵是

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n [A_i] \quad (3-21)$$

电路的各种特性参数皆可由矩阵 $[A]$ 得出。现以传输系数为例说明敏感度的计算方法。根据式 (1-99) 可知电路的电压传输系数 $T(\bar{x})$ 是

$$T(\bar{x}) = \frac{Z_l}{A_{11}Z_l + A_{12} + A_{21}Z_g Z_l + A_{22}Z_g} \quad (3-22)$$

传输系数对某个元件参数 x_k 的偏导数可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial x_k} = & \frac{-Z_l}{(A_{11}Z_l + A_{12} + A_{21}Z_g Z_l + A_{22}Z_g)^2} \times \\ & \left(Z_l \frac{\partial A_{11}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_k} + Z_g Z_l \frac{\partial A_{21}}{\partial x_k} + Z_g \frac{\partial A_{22}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3-23)$$

式中， Z_g 和 Z_l 是已知的信源阻抗和负载阻抗， A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 是用电路分析得出的电路矩阵参数，未知量仅是 $\partial A_{11}/\partial x_k$ 、 $\partial A_{12}/\partial x_k$ 、 $\partial A_{21}/\partial x_k$ 、 $\partial A_{22}/\partial x_k$ 四个偏导数。

对式 (3-21) 求偏导数时，由于 x_k 是第 k 个单元电路的元件参数，它只存在于第 k 个单元矩阵 $[A_k]$ 之中，因而有

$$\frac{\partial[A]}{\partial x_k} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} [A_i] \right) \left(\frac{\partial[A_k]}{\partial x_k} \right) \left(\prod_{i=k+1}^n [A_i] \right) \quad (3-24)$$

或写成

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_k} & \frac{\partial A_{12}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_k} & \frac{\partial A_{22}}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} [A_i] \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11k}}{\partial x_k} & \frac{\partial A_{12k}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial A_{21k}}{\partial x_k} & \frac{\partial A_{22k}}{\partial x_k} \end{pmatrix} \left(\prod_{i=k+1}^n [A_i] \right) \quad (3-25)$$

由上式可知在求 A 对 x_k 的偏导数时, 只须单独计算含有 x_k 的单元矩阵的偏导数, 其余单元矩阵皆可看成常数。现举例说明:

给定变阻式低通滤波器的结构如图 3-2 所示。滤波器由 5 段传输线组成, 各传输线段的

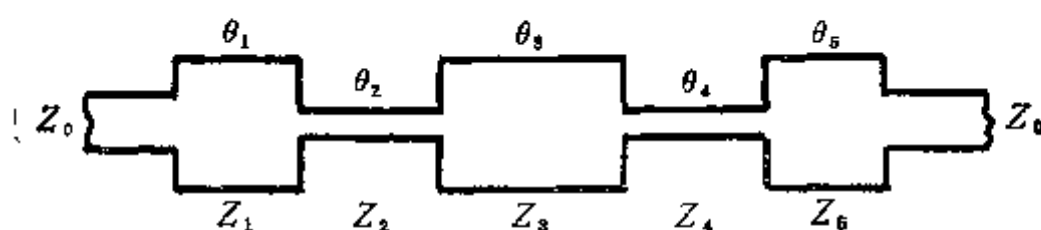


图3-2 低通滤波器结构示意图

电角度为 $\theta_1 \sim \theta_5$, 特性阻抗为 $Z_1 \sim Z_5$ 。计算滤波器传输损耗 L 对各元件参数的敏感度。

以第 3 段线为例。 L 对 Z_3 和 θ_3 的敏感度

$$\left. \begin{aligned} S_{Z_3}^L &= \frac{Z_3}{L} \frac{\partial L}{\partial Z_3} \\ S_{\theta_3}^L &= \frac{\theta_3}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

输入和输出端的阻抗皆为 Z_0 时, 由式 (1-102) 可知滤波器传输损耗是

$$\begin{aligned} L &= \left| \frac{2}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \right|^2 \\ &= \frac{4}{(\operatorname{Re}(Ka))^2 + (\operatorname{Im}(Ka))^2} \end{aligned} \quad (3-27)$$

式中 $Ka = A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}$

分别对 Z_3 和 θ_3 求 L 的偏导数, 得

$$\frac{\partial L}{\partial Z_3} = -\frac{L^2}{2} \left[\operatorname{Re}(Ka) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial Ka}{\partial Z_3} \right) + \operatorname{Im}(Ka) \operatorname{Im} \left(\frac{\partial Ka}{\partial Z_3} \right) \right] \quad (3-28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -\frac{L^2}{2} \left[\operatorname{Re}(Ka) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial Ka}{\partial \theta_3} \right) + \operatorname{Im}(Ka) \operatorname{Im} \left(\frac{\partial Ka}{\partial \theta_3} \right) \right] \quad (3-29)$$

式中 $\frac{\partial Ka}{\partial Z_3} = \frac{\partial A_{11}}{\partial Z_3} + \frac{1}{Z_0} \frac{\partial A_{12}}{\partial Z_3} + Z_0 \frac{\partial A_{21}}{\partial Z_3} + \frac{\partial A_{22}}{\partial Z_3}$

$$\frac{\partial K_a}{\partial \theta_3} = \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_3} + \frac{1}{Z_0} \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_3} + Z_0 \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_3}$$

A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 是滤波器的 A 参数。按照图 3-2 的结构可得滤波器 A 矩阵

$$[A] = \prod_{i=1}^5 [A_i] \quad (3-30)$$

式中 $[A_i] = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & jZ_i \sin \theta_i \\ j \frac{\sin \theta_i}{Z_i} & \cos \theta_i \end{bmatrix}$

对式 (3-30) 求偏导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial [A]}{\partial Z_3} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial Z_3} & \frac{\partial A_{12}}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial Z_3} & \frac{\partial A_{22}}{\partial Z_3} \end{bmatrix} = [A_1][A_2] \frac{\partial [A_3]}{\partial Z_3} [A_4][A_5] \\ &= [A_1][A_2] \begin{bmatrix} 0 & j \sin \theta_3 \\ j \frac{-\sin \theta_3}{Z_3^2} & 0 \end{bmatrix} [A_4][A_5] \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [A]}{\partial \theta_3} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = [A_1][A_2] \frac{\partial [A_3]}{\partial \theta_3} [A_4][A_5] \\ &= [A_1][A_2] \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & jZ_3 \cos \theta_3 \\ j \frac{\cos \theta_3}{Z_3} & -\sin \theta_3 \end{bmatrix} [A_4][A_5] \end{aligned} \quad (3-32)$$

把式 (3-31)、(3-32) 代入式 (3-28)、(3-29), 得出传输衰减的偏导数, 再代入式 (3-26) 即可得低通滤波器的 L 对 Z_3 和 θ_3 的敏感度。对其余各元件的偏导数也可照此逐个算出。

用双口网络级联矩阵法求得的偏导数是严格值, 不仅可用于计算敏感度, 也可用于最优化设计中计算目标函数的梯度。

通常把各种单元电路的矩阵偏导数编成子程序存入计算机, 以备求敏感度和求梯度时调用。常用的几种单元电路的转移矩阵和传输矩阵偏导数见表 3-1。

(三) 敏感度应用举例

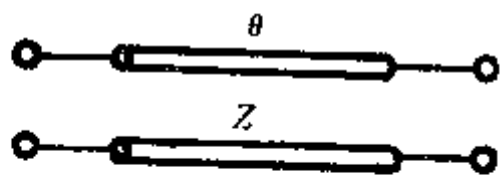
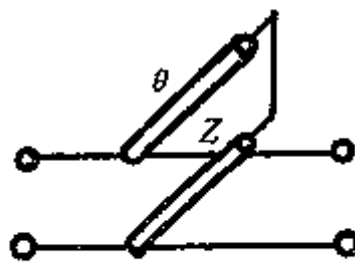
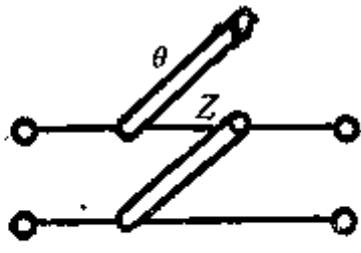
微波电路中最基本的元件是分布参数传输线, 因此, 分析传输线特性对其结构参数的敏感度是更好地掌握微波电路设计的重要环节。下面以同轴线和带状线作为计算举例。

同轴线特性阻抗是

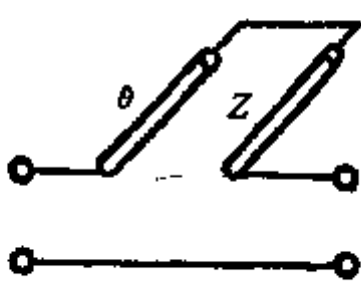
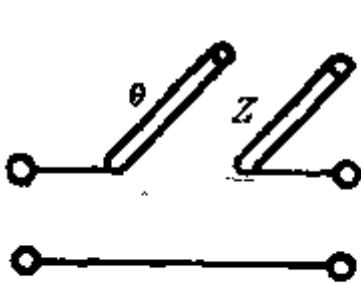
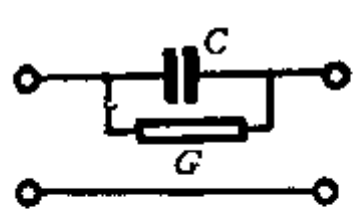
$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a}$$

式中 a 、 b 分别是同轴线内、外导体的直径。特性阻抗对 b 和 a 的敏感度是

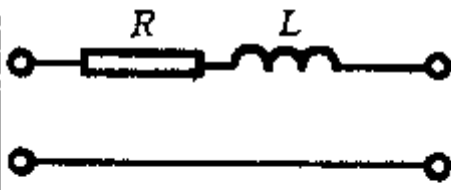
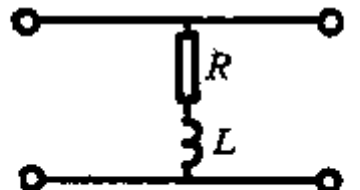
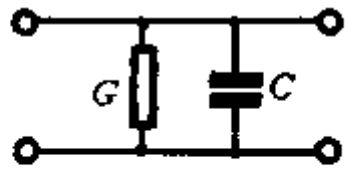
表 3-1 单元电路导数矩阵

	传 输 线 段	并 联 短 路 线	并 联 开 路 线
电 路			
A	$\cos\theta$ $jZ\sin\theta$ $j\frac{\sin\theta}{Z}$ $\cos\theta$	1 0 $\frac{j}{Z\operatorname{tg}\theta}$ 1	1 0 $\frac{j\operatorname{tg}\theta}{Z}$ 1
$\frac{\partial A}{\partial Z}$	0 $j\sin\theta$ $j\frac{-\sin\theta}{Z^2}$ 0	0 0 $\frac{j}{Z^2\operatorname{tg}\theta}$ 0	0 0 $\frac{-j\operatorname{tg}\theta}{Z^2}$ 0
$\frac{\partial A}{\partial \theta}$	$-\sin\theta$ $jZ\cos\theta$ $j\frac{\cos\theta}{Z}$ $-\sin\theta$	0 0 $\frac{j}{Z\sin^2\theta}$ 0	0 0 $\frac{j}{Z\cos^2\theta}$ 0
T	$\cos\theta + j\frac{Z^2+1}{2Z}\sin\theta$ $j\frac{1-Z^2}{2Z}\sin\theta$ $j\frac{Z^2-1}{2Z}\sin\theta$ $\cos\theta - j\frac{Z^2+1}{2Z}\sin\theta$	$1 - \frac{j}{2Z\operatorname{tg}\theta}$ $\frac{-j}{2Z\operatorname{tg}\theta}$ $\frac{-j}{2Z\operatorname{tg}\theta}$ $1 + \frac{j}{2Z\operatorname{tg}\theta}$	$1 + \frac{j\operatorname{tg}\theta}{2Z}$ $\frac{j\operatorname{tg}\theta}{2Z}$ $\frac{-j\operatorname{tg}\theta}{2Z}$ $1 - \frac{j\operatorname{tg}\theta}{2Z}$
$\frac{\partial T}{\partial Z}$	$j\frac{Z^2-1}{2Z^2}\sin\theta$ $j\frac{-Z^2-1}{2Z^2}\sin\theta$ $j\frac{Z^2+1}{2Z^2}\sin\theta$ $j\frac{-Z^2+1}{2Z^2}\sin\theta$	$\frac{j}{2Z^2\operatorname{tg}\theta}$ $\frac{j}{2Z^2\operatorname{tg}\theta}$ $\frac{-j}{2Z^2\operatorname{tg}\theta}$ $\frac{-j}{2Z^2\operatorname{tg}\theta}$	$\frac{-j\operatorname{tg}\theta}{2Z^2}$ $\frac{-j\operatorname{tg}\theta}{2Z^2}$ $\frac{j\operatorname{tg}\theta}{2Z^2}$ $\frac{j\operatorname{tg}\theta}{2Z^2}$
$\frac{\partial T}{\partial \theta}$	$-\sin\theta + j\frac{Z^2+1}{2Z}\cos\theta$ $j\frac{1-Z^2}{2Z}\cos\theta$ $j\frac{Z^2-1}{2Z}\cos\theta$ $-\sin\theta - j\frac{Z^2+1}{2Z}\cos\theta$	$\frac{j}{2Z\sin^2\theta}$ $\frac{j}{2Z\sin^2\theta}$ $\frac{-j}{2Z\sin^2\theta}$ $\frac{-j}{2Z\sin^2\theta}$	$\frac{j}{2Z\cos^2\theta}$ $\frac{j}{2Z\cos^2\theta}$ $\frac{-j}{2Z\cos^2\theta}$ $\frac{-j}{2Z\cos^2\theta}$

续表 3-1

	串 联 短 路 线	串 联 开 路 线	串 联 有 损 电 容
电 路			
A	$1 \quad jZ \tan \theta$ $0 \quad 1$	$1 \quad -\frac{jZ}{\tan \theta}$ $0 \quad 1$	$1 \quad \frac{1}{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C}$ $0 \quad 1$
$\frac{\partial A}{\partial Z}$	$0 \quad j \tan \theta$ $0 \quad 0$	$0 \quad -\frac{j}{\tan \theta}$ $0 \quad 0$	$\frac{\partial A}{\partial C}$ $0 \quad \frac{-1}{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C^2}$ $0 \quad 0$
$\frac{\partial A}{\partial \theta}$	$0 \quad \frac{jZ}{\cos^2 \theta}$ $0 \quad 0$	$0 \quad \frac{jZ}{\sin^2 \theta}$ $0 \quad 0$	$\frac{\partial A}{\partial Q}$ $0 \quad \frac{\omega_0}{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 C}$ $0 \quad 0$
T	$1 + \frac{jZ \tan \theta}{2} \quad \frac{-jZ \tan \theta}{2}$ $\frac{jZ \tan \theta}{2} \quad 1 - \frac{jZ \tan \theta}{2}$	$1 - \frac{jZ}{2 \tan \theta} \quad \frac{jZ}{2 \tan \theta}$ $\frac{-jZ}{2 \tan \theta} \quad 1 + \frac{jZ}{2 \tan \theta}$	$1 + \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C} \quad \frac{-1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C}$ $\frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C} \quad 1 - \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C}$
$\frac{\partial T}{\partial Z}$	$\frac{j \tan \theta}{2} \quad \frac{-j \tan \theta}{2}$ $\frac{j \tan \theta}{2} \quad \frac{-j \tan \theta}{2}$	$\frac{-j}{2 \tan \theta} \quad \frac{j}{2 \tan \theta}$ $\frac{-j}{2 \tan \theta} \quad \frac{j}{2 \tan \theta}$	$\frac{\partial T}{\partial C}$ $\frac{-1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C^2} \quad \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C^2}$ $\frac{-1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C^2} \quad \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C^2}$
$\frac{\partial T}{\partial \theta}$	$\frac{jZ}{2 \cos^2 \theta} \quad \frac{-jZ}{2 \cos^2 \theta}$ $\frac{jZ}{2 \cos^2 \theta} \quad \frac{-jZ}{2 \cos^2 \theta}$	$\frac{jZ}{2 \sin^2 \theta} \quad \frac{-jZ}{2 \sin^2 \theta}$ $\frac{jZ}{2 \sin^2 \theta} \quad \frac{-jZ}{2 \sin^2 \theta}$	$\frac{\partial T}{\partial Q}$ $\frac{\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 C} \quad \frac{-\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 C}$ $\frac{\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 C} \quad \frac{-\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 C}$

续表 3-1

	串联有损耗电感	并联有损耗电感	并联有损耗电容
电 路			
A	$\begin{matrix} 1 & (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)C & 1 \end{matrix}$
$\frac{\partial A}{\partial L}$	$\begin{matrix} 0 & \frac{\omega_0}{Q} + j\omega \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L^2} & 0 \end{matrix}$	$\frac{\partial A}{\partial C} \begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega_0}{Q} + j\omega & 0 \end{matrix}$
$\frac{\partial A}{\partial Q}$	$\begin{matrix} 0 & \frac{-\omega_0 L}{Q^2} \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega_0}{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 L} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{-\omega_0 C}{Q^2} & 0 \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} 1 + \frac{(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L}{2} \\ \frac{-L}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{L}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ 1 - \frac{L}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L} & \frac{-1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L} \\ \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L} & 1 - \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 + \frac{C}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{C}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{-C}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ 1 - \frac{C}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \end{matrix}$
$\frac{\partial T}{\partial L}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{-1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{-1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L^2} & \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L^2} \\ \frac{-1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L^2} & \frac{1}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)L^2} \end{matrix}$	$\frac{\partial T}{\partial C} \begin{matrix} \frac{1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{-1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \\ \frac{-1}{2} (\frac{\omega_0}{Q} + j\omega) \end{matrix}$
$\frac{\partial T}{\partial Q}$	$\begin{matrix} \frac{-\omega_0 L}{2Q^2} & \frac{\omega_0 L}{2Q^2} \\ \frac{-\omega_0 L}{2Q^2} & \frac{\omega_0 L}{2Q^2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 L} & \frac{-\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 L} \\ \frac{\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 L} & \frac{-\omega_0}{2(\frac{\omega_0}{Q} + j\omega)^2 Q^2 L} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\omega_0 C}{2Q^2} & \frac{-\omega_0 C}{2Q^2} \\ \frac{\omega_0 C}{2Q^2} & \frac{\omega_0 C}{2Q^2} \end{matrix}$

$$S_1^2 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r} Z}, \quad S_2^2 = \frac{-60}{\sqrt{\epsilon_r} Z}$$

敏感度 S_1^2 和 S_2^2 随特性阻抗变化的曲线见图 3-3。

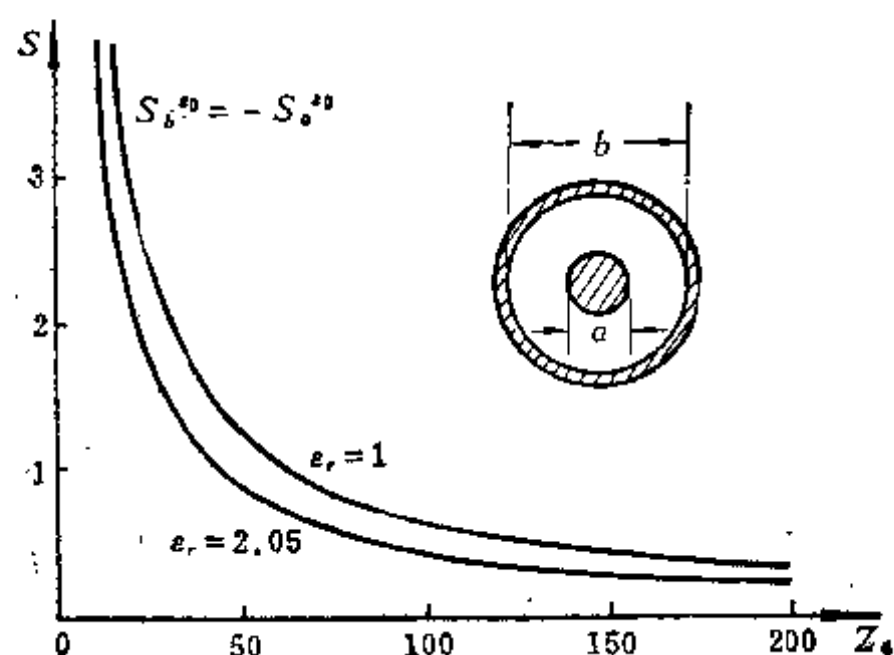


图 3-3 同轴线特性阻抗敏感度

结构尺寸有误差的同轴线与标准同轴线联接时，如果需要保持驻波比 ρ 小于给定值，则可以利用敏感度求出内导体应有的公差。根据

$$S_1^2 \approx \frac{b}{Z} \frac{\Delta Z}{\Delta b}, \quad S_2^2 \approx \frac{a}{Z} \frac{\Delta Z}{\Delta a}$$

$$\rho = \frac{Z + \Delta Z}{Z}$$

可得

$$\left| -\frac{\Delta a}{a} S_2^2 \right| + \left| -\frac{\Delta b}{b} S_1^2 \right| = \rho - 1 \quad (3-33)$$

式 (3-33) 给出在满足要求驻波比 ρ 的情况下内外导体直径的最大允许偏差。当要求的驻波比 ρ 和 $\Delta b/b$ 具有不同值时，内导体直径允许公差 $\Delta a/a$ 的曲线示于图 3-4。

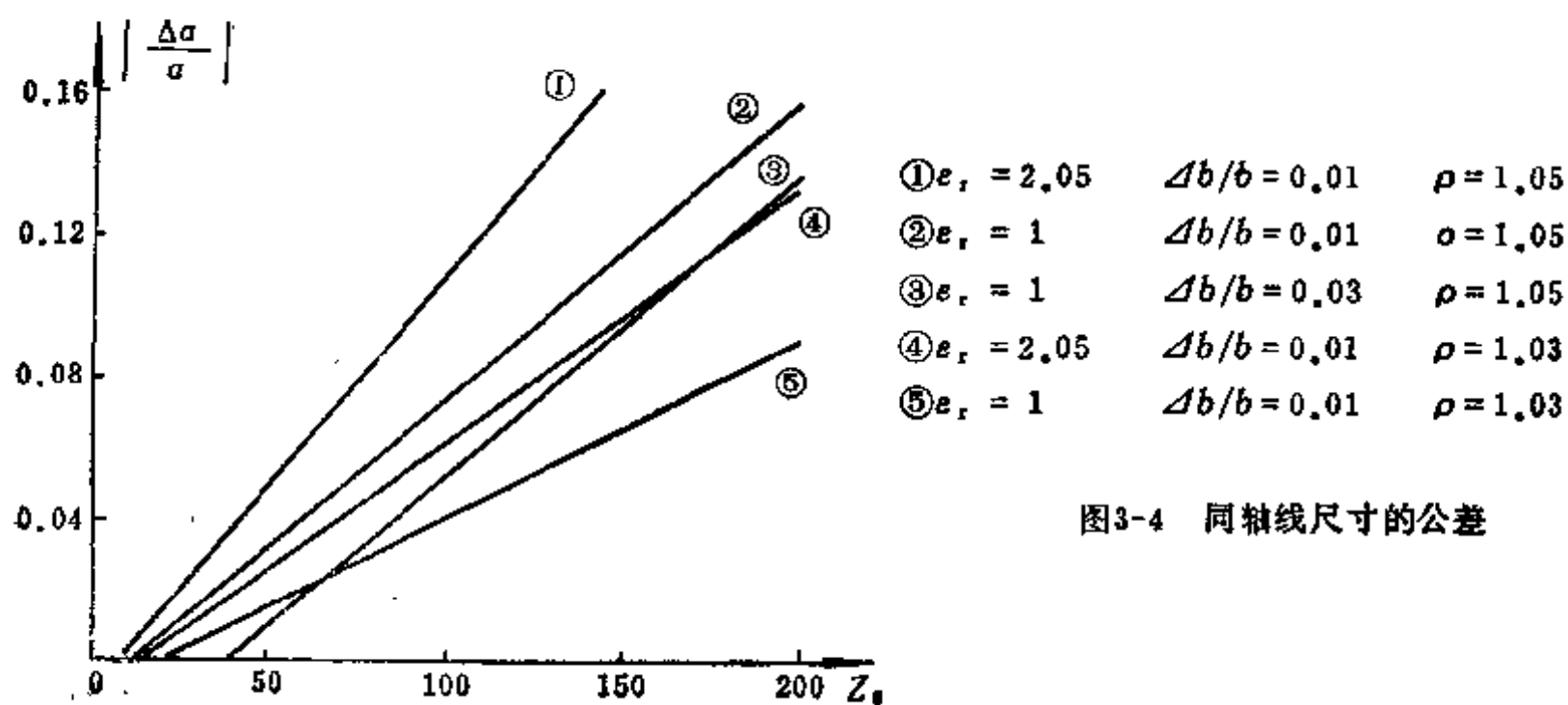


图3-4 同轴线尺寸的公差

带状线也是微波频段常用的传输线。用计算机算出的特性阻抗敏感度曲线见图 3-5。由图可见，传输线特性阻抗愈低（即 W/b 愈大）则敏感度愈高。

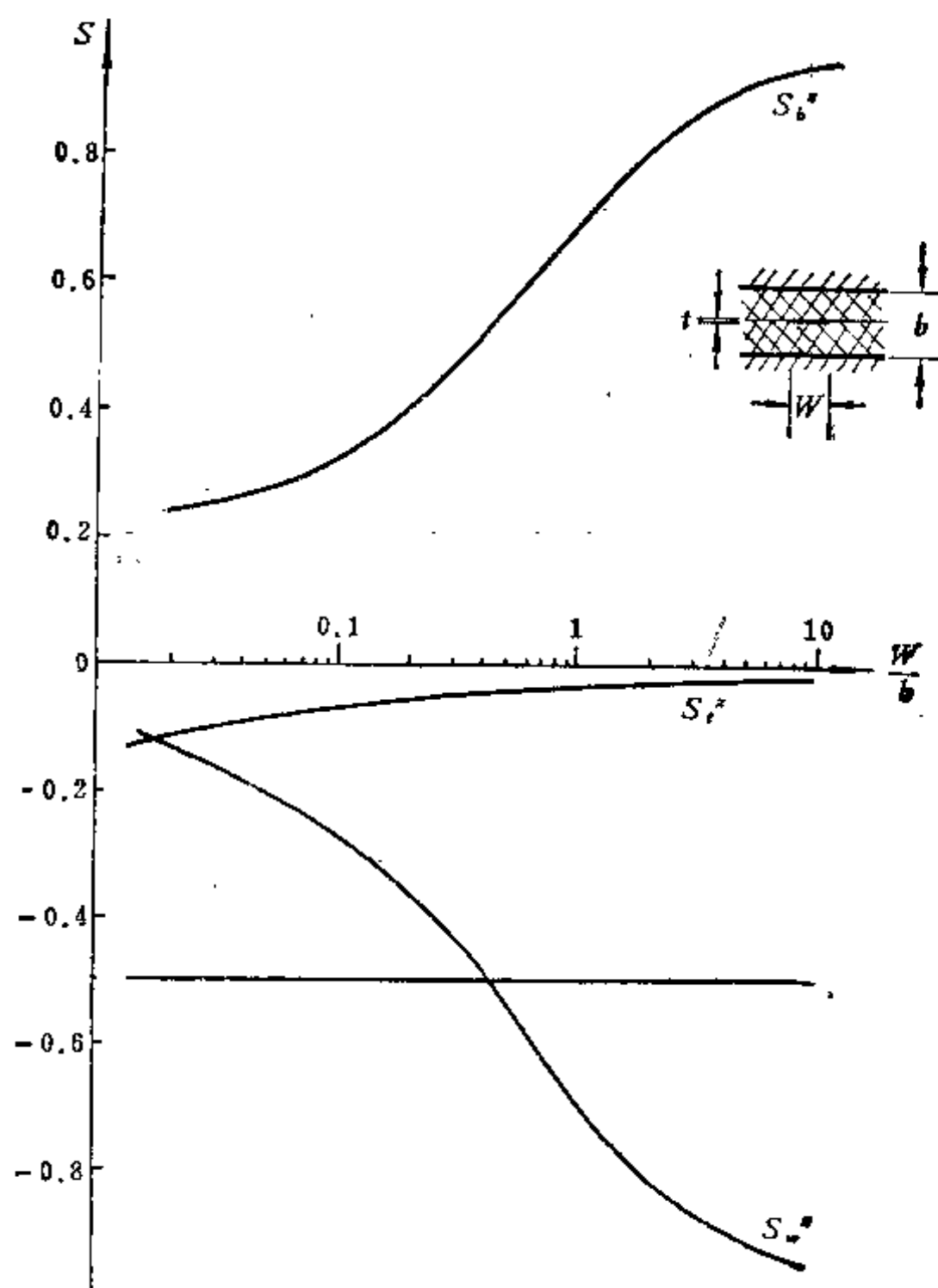


图3-5 带状线特性阻抗的敏感度

其它各种微波传输线的敏感度见第 5 章。

§ 3.2 台劳根定理及伴随网络

在用直接法求目标函数的导数时，每改变一个元件参量都要重复进行一次电路分析，求 n 个变量的电路敏感度需要进行 $n+1$ 次电路分析。用双口转移矩阵求导数法也需要 n 次电路分析。因此在多变量电路情况下，就需要大量的计算时间，尤其当目标函数较为复杂，以致于直接求导数都存在困难时，直接法就更不适用了。

台劳根伴随网络法是把目标函数求导数的问题转化为网络特性分析。对原网络和伴随网络各进行一次电路分析就可以求出对各元件参数的敏感度，从而解决了复杂电路函数求导数的困难。

§ 3.2.1 台劳根定理

有任意两个电路网络 N 和 \hat{N} ，它们的拓扑结构相同，而元件参数和元件性质可以不同（见图 3-6），但只要两个网络的支路电压和电流方向一致，就有如下关系：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m I_k \hat{V}_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^m V_k \hat{I}_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

式中 I_k 和 V_k 为 N 网络的支路电流和电压， \hat{I}_k 和 \hat{V}_k 为网络 \hat{N} 的支路电流和电压， m 是支路数。公式 (3-34) 称为台劳根定理。

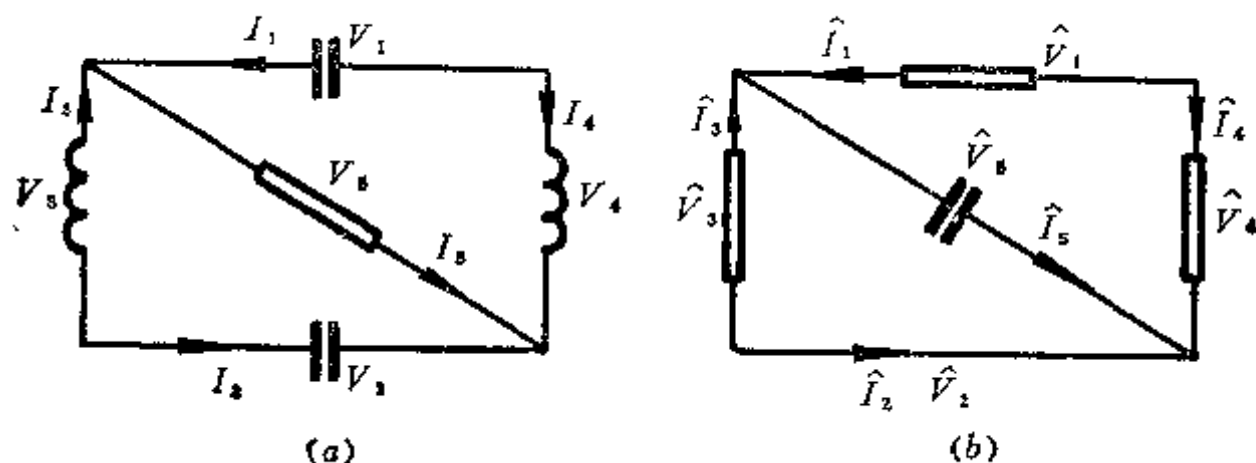


图3-6 台劳根定理说明示意图

当两个网络完全相同时，则有 $\sum_{k=1}^m V_k I_k = 0$ ，说明在网络内部电源给出的功率和元件吸收的功率相等，这是符合能量守恒原理的。

当网络 N 的电压和电流出现微量变化时，台劳根定理仍成立，即

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m (I_k + dI_k) \hat{V}_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^m (V_k + dV_k) \hat{I}_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

公式 (3-34) 和 (3-35) 相减，得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m dI_k \hat{V}_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^m dV_k \hat{I}_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

或者

$$\sum_{k=1}^m (dV_k \hat{I}_k - dI_k \hat{V}_k) = 0 \quad (3-37)$$

公式 (3-36) 和 (3-37) 是台劳根定理的增量形式。

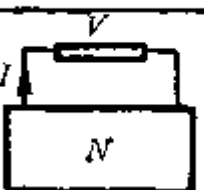



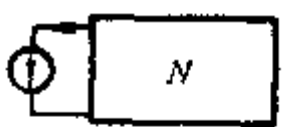
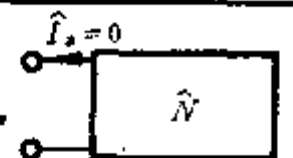
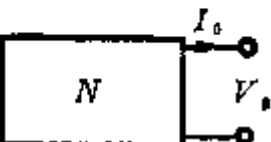
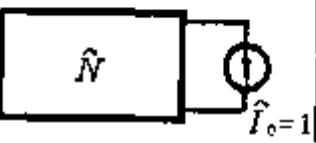
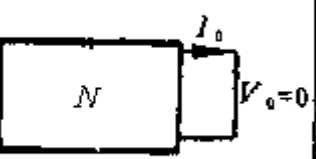
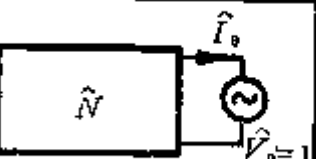
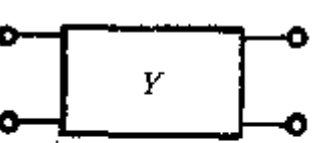
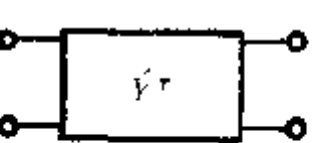
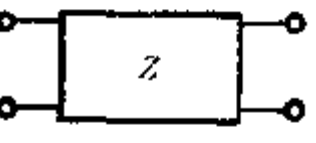
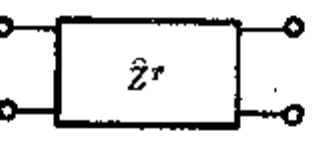
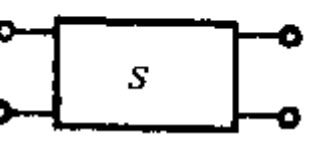
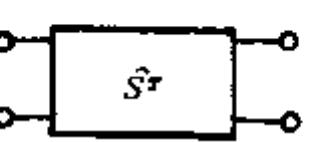
可以看出，台劳根定理是表示相同拓扑结构的网络之间的关系的。为了利用台劳根定理计算网络敏感度，需要用到伴随网络。伴随网络的定义如下：

满足下列条件的两个网络 N 和 \hat{N} 叫伴随网络：

- 1) 两个网络具有相同的拓扑结构;
- 2) 两个网络对应支路的阻抗相同, 即 $R = \hat{R}$, $L = \hat{L}$, $C = \hat{C}$;
- 3) 两个网络中的子矩阵互为转置, 即 $[Y]^T = [\hat{Y}]$, $[Z]^T = [\hat{Z}]$, $[S]^T = [\hat{S}]$;
- 4) 一个网络中的独立电压源和独立电流源在另一个网络中相应为短路端和开路端;
- 5) 一个网络中的电压输出端和电流输出端在另一个网络中相应为 $V = 1$ 和 $I = 1$ 的独立电源。

上述几项规定列于表 3-2。

表 3-2 伴随网络与原网络对照关系

支路名	原网络	伴随网络
电阻电容电感		
独立电压源		
独立电流源		
电压输出端		
电流输出端		
导纳矩阵		
阻抗矩阵		
散射矩阵		

§ 3.2.2 用节点法分析电路敏感度

电压传输系数是常用的电路特性指标。现以电压传输系数为例介绍敏感度的计算方法。

给定任意电路网络 Y (见图 3-7)。电路中的 Z_1 支路对 Z_2 支路的电压传输系数用 T 表示。如果要计算电压传输系数的敏感度, 首先应该算出 T 对各元件参数的导数 dT/dx , 其中 x 是电路中的电阻、电容或传输线段的长度、特性阻抗等。

在 Z_2 支路的输入端加 $V_1 = 1$ 的电压源。 Z_1 支路的电压用 V_2 表示, 它是电路的输出端, 见图 3-7 (a)。 Z_2 和 Z_1 皆包含在网络 Y 中。此时电压传输系数 $T = \frac{V_2}{V_1} = V_2$, T 对

元件 x 的导数 $\frac{dT}{dx} = \frac{dV_2}{dx}$ 。在这种端接情况下只需计算出 V_2 的导数即可。

按伴随网络的规定做伴随网络如图 3-7 (b)。根据台劳根定理有

$$\sum_{k=1}^m (dV_k \hat{I}_k - dI_k \hat{V}_k) = 0$$

式中 m 是电路的总支路数。把上式中各支路电压和电流分成两部分, 一部分是输入和输出端口支路的电压和电流, 用 V_s 、 I_s 表示; 另一部分是电路内部支路的电压和电流, 用 V_b 、 I_b 表示, 即

$$\sum_{s=1}^2 (dV_s \hat{I}_s - dI_s \hat{V}_s) + \sum_{b=1}^n (dV_b \hat{I}_b - dI_b \hat{V}_b) = 0 \quad (3-38)$$

式中, n 是电路内部的支路数, $n = m - 2$ 。把图 3-7 中给定的输入、输出端口条件

$$\left. \begin{aligned} dV_1 &= 0 \\ dI_2 &= 0 \\ \hat{V}_1 &= 0 \\ \hat{I}_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

代入式 (3-38) 的第 1 项, 得

$$dV_2 = - \sum_{b=1}^n (dV_b \hat{I}_b - dI_b \hat{V}_b) \quad (3-40)$$

式 (3-40) 说明输出电压的变化 dV_2 是各支路电压、电流变化 (dV_b 或 dI_b) 的组合。把 (3-40) 式写成向量形式

$$dV_2 = - [\hat{I}]^T [dV] + [\hat{V}]^T [dI] \quad (3-41)$$

设电路的支路导纳矩阵是 $[Y]$, 则支路电压、电流的关系是

$$[I] = [Y][V] \quad (3-42)$$

对上式取微分, 得

$$[dI] = [dY][V] + [Y][dV] \quad (3-43)$$

把式 (3-43) 代入式 (3-41), 得

$$dV_2 = - [\hat{I}]^T [dV] + [\hat{V}]^T [dY][V] + [\hat{V}]^T [Y][dV] \quad (3-44)$$

根据伴随网络的规定 $[Y] = [\hat{Y}]^T$, 有

$$[\hat{I}]^T = [\hat{V}]^T [\hat{Y}]^T = [\hat{V}]^T [Y] \quad (3-45)$$

代入式 (3-44), 得

$$dV_2 = [\hat{V}]^T [dY] [V] \quad (3-46)$$

或者写成导数形式

$$\frac{dV_2}{dx} = [\hat{V}]^T \frac{d[Y]}{dx} [V] \quad (3-47)$$

式(3-46)和(3-47)是计算电路敏感度的基本关系式。例如,计算电压传输系数对某个电导 G_i 的敏感度,此时 G_i 有小增量 dG_i ,而其它各元件值皆不变(即增量为零),由式(3-46)得

$$dV_2 = \hat{V}_{G_i} dG_i V_{G_i} \text{ 或 } \frac{dT}{dG_i} = \frac{dV_2}{dG_i} = \hat{V}_{G_i} V_{G_i} \quad (3-48)$$

式中 \hat{V}_{G_i} 和 V_{G_i} 是伴随网络 and 原网络中元件 G_i 支路上的电压。用同样方法可得对电容和电感的导数

$$\frac{dV_2}{dC_i} = j\omega \hat{V}_{C_i} V_{C_i} \quad (3-49)$$

$$\frac{dV_2}{dL_i} = j \frac{-1}{\omega L_i^2} \hat{V}_{L_i} V_{L_i} \quad (3-50)$$

如果是分布参数元件,其参数用 x_i 表示, x_i 可以是一段传输线的特性阻抗或是电长度等。包含 x_i 的导纳矩阵为 $[Y_i]$,因此传输系数对 x_i 的敏感度是

$$\frac{dV_2}{dx_i} = [\hat{V}]^T \frac{d[Y_i]}{dx_i} [V] \quad (3-51)$$

式中 $[\hat{V}]^T$ 和 $[V]$ 是导纳矩阵 $[Y_i]$ 各端口的电压。 $d[Y_i]/dx_i$ 可以按单元矩阵直接求导数法计算。

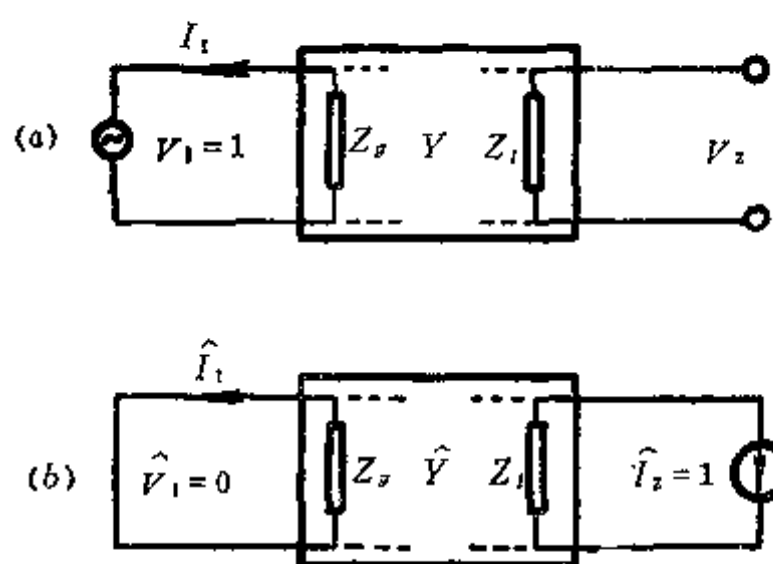


图3-7 计算电压传输系数敏感度

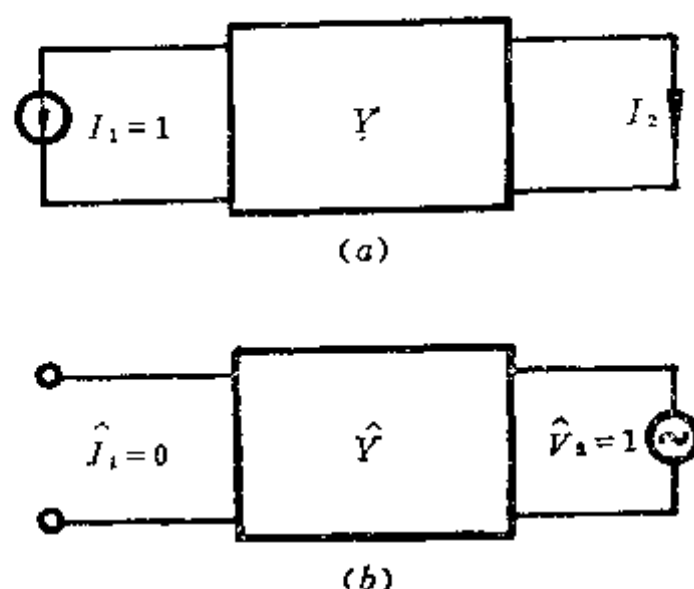


图3-8 计算电流敏感度

从上述分析可以看出,在原网络和伴随网络按图3-7的规定端接电源之后,对此二网络各进行一次电路分析,得出各元件上的电压 \hat{V}_i 和 V_i ,再逐次代入公式(3-48)~(3-51),就可以得到传输系数对各元件参数的敏感度。

如果要求计算输出电流的导数,则可按图3-8的方式对原网络和伴随网络进行端接。

采用类似方法可得输出电流对各元件参数的敏感度:

$$\frac{dI_2}{dG_i} = -\hat{V}_{ci} V_{ci} \quad (3-52)$$

$$\frac{dI_2}{dC_i} = -j\omega \hat{V}_{ci} V_{ci} \quad (3-53)$$

$$\frac{dI_2}{dL_i} = j\frac{1}{\omega L_i^2} \hat{V}_{Li} V_{Li} \quad (3-54)$$

$$\frac{dI_2}{dx_i} = -[\hat{V}]^T \frac{d[Y_i]}{dx_i} [V] \quad (3-55)$$

现以微波三极管放大器为例，说明用台劳根伴随网络求电路敏感度的计算过程。电路图见图 3-9。微波放大器的输入和输出调配电路由 4 段微带线组成，其特性导纳分别为

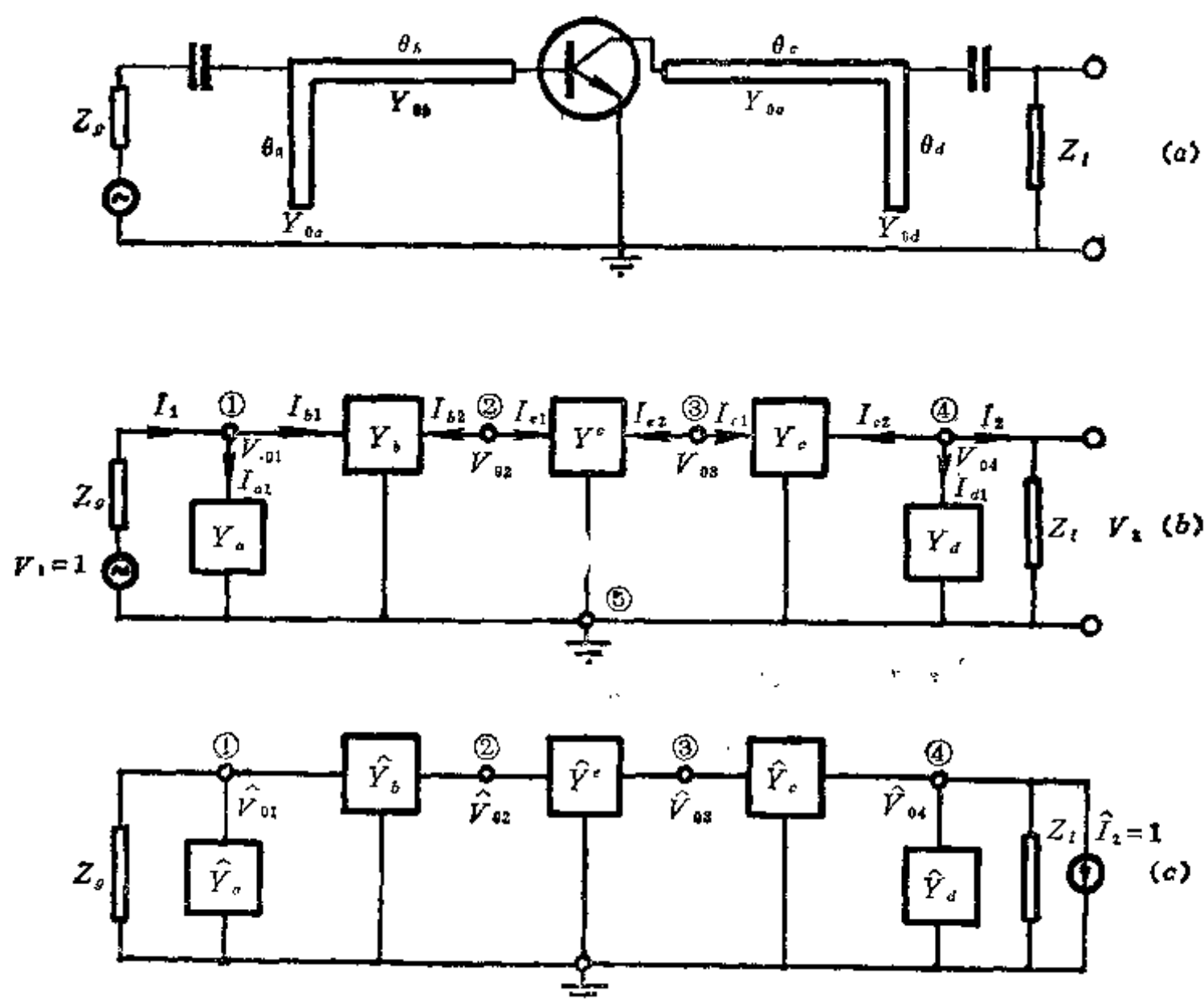


图 3-9 求微波放大器敏感度

Y_{oa} 、 Y_{ob} 、 Y_{oc} 、 Y_{od} ，每段线的电角度为 θ_a 、 θ_b 、 θ_c 、 θ_d 。晶体管的导纳矩阵是 $[Y']$ ，可由 S 矩阵参数经换算得到。晶体管放大器等效电路见图 3-9 (b)，图中方框 Y_a 、 Y_b 、 Y_c 、 Y_d 代表传输线段的两口网络。给定输入电压 $V_i = 1$ ，计算电压传输系数对各段微带线参数（即 Y_{oi} 和 θ_i ）的敏感度。

按给定规则画出伴随网络如图 3-9 (c)。传输线导纳矩阵是对称矩阵，故有 $[\hat{Y}_i] = [Y]$ ；而晶体管是非对称矩阵，因此 $[\hat{Y}'] = [Y']^T$ 。

1. 计算节点电压

敏感度基本公式 (3-46)、(3-47) 中的矩阵 $[Y]$ 如若代表节点导纳矩阵, 则式中的 $[V]$ 和 $[\hat{V}]$ 代表节点电压向量。求解节点电压的方法在第一章中已有叙述。图 3-9 中传输线段 Y_b 和 Y_c 的导纳矩阵具有下式形式

$$[Y_i] = \begin{bmatrix} -jY_{0i} \operatorname{ctg}\theta_i & jY_{0i} \operatorname{csc}\theta_i \\ jY_{0i} \operatorname{csc}\theta_i & -jY_{0i} \operatorname{ctg}\theta_i \end{bmatrix} \quad (i = b, c) \quad (3-56)$$

线段 Y_a 和 Y_d 是终端开路传输线, 等效为一个导纳并联在电路上, 其值是

$$y_i = jY_{0i} \operatorname{tg}\theta_i, \quad (i = a, d) \quad (3-57)$$

放大器的节点有 5 个, 电流方向标注在图 3-9 (b) 中, 第 5 节点接地。下面根据克希荷夫定律列出节点方程:

对于节点①, 有

$$I_1 = I_{b1} + I_{a1}$$

考虑到 $I_1 = \frac{V_1 - V_{01}}{Z_g}$, $I_{a1} = y_a V_{01}$

$$I_{b1} = y_{11}^b V_{01} + y_{12}^b V_{02}$$

得

$$\frac{V_1}{Z_g} = \left(-\frac{1}{Z_g} + y_a + y_{11}^b \right) V_{01} + y_{12}^b V_{02}$$

式中 y_{11}^b 和 y_{12}^b 是线段 Y_b 导纳矩阵的元素值, 矩阵 $[Y_b] = \begin{bmatrix} y_{11}^b & y_{12}^b \\ y_{21}^b & y_{22}^b \end{bmatrix}$, $y_a = jY_{0a} \operatorname{tg}\theta_a$ 。

对于节点②, 有

$$0 = I_{b2} + I_{e1}$$

考虑到 $I_{b2} = y_{21}^b V_{01} + y_{22}^b V_{02}$, $I_{e1} = y_{11}^e V_{02} + y_{12}^e V_{03}$

得 $0 = y_{21}^b V_{01} + (y_{22}^b + y_{11}^e) V_{02} + y_{12}^e V_{03}$

式中 y_{11}^e 和 y_{12}^e 是晶体管导纳矩阵元素, 晶体管导纳矩阵 $[Y^e] = \begin{bmatrix} y_{11}^e & y_{12}^e \\ y_{21}^e & y_{22}^e \end{bmatrix}$ 。

用同样方法可得节点③和④的电流电压关系式

$$0 = y_{21}^e V_{02} + (y_{22}^e + y_{11}^e) V_{03} + y_{12}^e V_2$$

$$0 = y_{21}^e V_{03} + \left(y_{22}^e + y_d + -\frac{1}{Z_l} \right) V_2$$

其中

$$V_2 = V_{04}$$

把上列各式整理成节点电压方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1}{Z_g} &= \left(-\frac{1}{Z_g} + y_a + y_{11}^b \right) V_{01} + y_{12}^b V_{02} \\ 0 &= y_{21}^b V_{01} + (y_{22}^b + y_{11}^e) V_{02} + y_{12}^e V_{03} \\ 0 &= y_{21}^e V_{02} + (y_{22}^e + y_{11}^e) V_{03} + y_{12}^e V_2 \\ 0 &= y_{21}^e V_{03} + \left(y_{22}^e + y_d + -\frac{1}{Z_l} \right) V_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-58)$$

把 (3-58) 式写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \frac{V_1}{Z_g} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_g} + y_a + y_{11}^b & y_{12}^b & 0 & 0 \\ y_{21}^b & y_{22}^b + y_{11}^c & y_{12}^c & 0 \\ 0 & y_{21}^c & y_{22}^c + y_{11}^c & y_{12}^c \\ 0 & 0 & y_{21}^c & y_{22}^c + y_a + \frac{1}{Z_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{03} \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

用同样方法写出伴随网络的节点方程。写方程时应注意晶体管的导纳矩阵非对称。伴随网络的晶体管导纳矩阵是

$$[\hat{Y}^c] = [Y^c]^T = \begin{bmatrix} y_{11}^c & y_{21}^c \\ y_{12}^c & y_{22}^c \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

可得伴随网络节点方程

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_g} + y_a + y_{11}^b & y_{12}^b & 0 & 0 \\ y_{21}^b & y_{22}^b + y_{11}^c & y_{12}^c & 0 \\ 0 & y_{21}^c & y_{22}^c + y_{11}^c & y_{12}^c \\ 0 & 0 & y_{21}^c & y_{22}^c + y_a + \frac{1}{Z_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_{01} \\ \hat{V}_{02} \\ \hat{V}_{03} \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

用第一章介绍的消元法解方程 (3-59) 和 (3-61)，即可求得各节点电压。如果已编有电路分析程序，就可以直接进行原网络和伴随网络的电路分析，以求出各节点电压：

$$\begin{aligned} [V]^T &= [V_{01} \quad V_{02} \quad V_{03} \quad V_2] \\ [\hat{V}]^T &= [\hat{V}_{01} \quad \hat{V}_{02} \quad \hat{V}_{03} \quad \hat{V}_2] \end{aligned} \quad (3-62)$$

2. 计算电压传输系数敏感度

由式 (3-47)

$$\frac{dV_2}{dx} = [\hat{V}]^T \frac{d[Y]}{dx} [V]$$

式中 $[\hat{V}]$ 和 $[V]$ 被算出之后，剩下的只是计算 $d[Y]/dx$ 了。在 $d[Y]/dx$ 中仅仅与 x 有关的元素才存在，其它无关元素的导数皆为零。例如求 $d[Y]/dY_{0b}$ ， Y_{0b} 是第 2 段微带线段的特性导纳，它只包含在 $[Y_b]$ 子矩阵的 4 项元素中。对式 (3-59) 中的 $[Y]$ 求导数，得

$$\frac{d[Y]}{dY_{0b}} = \begin{bmatrix} \frac{dy_{11}^b}{dY_{0b}} & \frac{dy_{12}^b}{dY_{0b}} & 0 & 0 \\ \frac{dy_{21}^b}{dY_{0b}} & \frac{dy_{22}^b}{dY_{0b}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{d[Y_b]}{dY_{0b}}$$

因此，求导数公式可写成

$$\frac{dV_2}{dx} = [\hat{V}_x]^T \frac{d[Y_x]}{dx} [V_x] \quad (3-63)$$

式中 $[Y_x]$ 是包含 x 变量的子矩阵, $[\hat{V}_x]$ 和 $[V_x]$ 是该子矩阵的节点电压。由该式可看出, 只要单独求出子矩阵的导数即可求得 $\frac{dV_2}{dx}$ 。

对于微带线段 Y_b , 矩阵 $[Y_b]$ 及其导数矩阵是:

$$[Y_b] = \begin{bmatrix} -jY_{0b} \operatorname{ctg} \theta_b & jY_{0b} \operatorname{csc} \theta_b \\ jY_{0b} \operatorname{csc} \theta_b & -jY_{0b} \operatorname{ctg} \theta_b \end{bmatrix}$$

$$\frac{d[Y_b]}{dY_{0b}} = \begin{bmatrix} -j \operatorname{ctg} \theta_b & j \operatorname{csc} \theta_b \\ j \operatorname{csc} \theta_b & -j \operatorname{ctg} \theta_b \end{bmatrix} = -\frac{1}{Y_{0b}} [Y_b]$$

$$\frac{d[Y_b]}{d\theta_b} = \begin{bmatrix} jY_{0b} \operatorname{csc}^2 \theta_b & -jY_{0b} \operatorname{ctg} \theta_b \operatorname{csc} \theta_b \\ -jY_{0b} \operatorname{ctg} \theta_b \operatorname{csc} \theta_b & jY_{0b} \operatorname{csc}^2 \theta_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta_b} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [Y_b]$$

$$\begin{aligned} \frac{d[Y_b]}{dl_b} &= -\frac{\omega_0 \sqrt{\epsilon_e}}{c} \begin{bmatrix} jY_{0b} \operatorname{csc}^2 \theta_b & -jY_{0b} \operatorname{ctg} \theta_b \operatorname{csc} \theta_b \\ -jY_{0b} \operatorname{ctg} \theta_b \operatorname{csc} \theta_b & jY_{0b} \operatorname{csc}^2 \theta_b \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\omega_0 \sqrt{\epsilon_e}}{c \sin \theta_b} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [Y_b] \end{aligned}$$

式中 c 为光速, ϵ_e 是微带基片的有效介电常数, ω_0 是工作角频率。

利用式 (3-63), 得传输系数对微带线段 Y_{0b} (特性导纳)、 θ_b (电角度) 和 l_b (线长度) 的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dY_{0b}} &= \frac{dV_2}{dY_{0b}} = [\hat{V}_b]^T \frac{d[Y_b]}{dY_{0b}} [V_b] = \frac{1}{Y_{0b}} [\hat{V}_{01} \quad \hat{V}_{02}] [Y_b] \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix} \\ \frac{dT}{d\theta_b} &= \frac{dV_2}{d\theta_b} = [\hat{V}_b]^T \frac{d[Y_b]}{d\theta_b} [V_b] = \frac{1}{\sin \theta_b} [\hat{V}_{01} \quad \hat{V}_{02}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [Y_b] \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix} \\ \frac{dT}{dl_b} &= \frac{dV_2}{dl_b} = [\hat{V}_b]^T \frac{d[Y_b]}{dl_b} [V_b] = -\frac{\omega_0 \sqrt{\epsilon_e}}{c \sin \theta_b} [\hat{V}_{01} \quad \hat{V}_{02}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [Y_b] \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上述几个变量的敏感度是:

$$\begin{aligned} S_{Y_{0b}}^T &= \frac{1}{T} [\hat{V}_{01} \quad \hat{V}_{02}] [Y_b] \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix} \\ S_{\theta_b}^T &= \frac{\theta_b}{T \sin \theta_b} [\hat{V}_{01} \quad \hat{V}_{02}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [Y_b] \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix} \\ S_{l_b}^T &= S_{\theta_b}^T \end{aligned}$$

下面再求传输系数 T 对线段 Y_e 的敏感度。 Y_e 是终端开路传输线, 输入导纳是 $jY_{0e} \operatorname{tg} \theta_e$, 在电路中等效为一个导纳, 其导数是:

$$\frac{d[Y_{02}]}{dY_{02}} = \frac{d}{dY_{02}} (jY_{02} \operatorname{tg} \theta_2) = j \operatorname{tg} \theta_2$$

$$\frac{d[Y_{02}]}{d\theta_2} = jY_{02} \sec^2 \theta_2$$

$$\frac{d[Y_{02}]}{dl_2} = -j \frac{\omega \sqrt{\epsilon_2}}{c} Y_{02} \sec^2 \theta_2$$

电压传输系数对微带线几个参数的导数是：

$$\frac{dT}{dY_{01}} = \frac{dV_2}{dY_{01}} = j\hat{V}_{01} V_{01} \operatorname{tg} \theta_1$$

$$\frac{dT}{d\theta_1} = \frac{dV_2}{d\theta_1} = jY_{01} \hat{V}_{01} V_{01} \sec^2 \theta_1$$

$$\frac{dT}{dl_1} = \frac{dV_2}{dl_1} = j \frac{\omega \sqrt{\epsilon_1}}{c} Y_{01} \hat{V}_{01} V_{01} \sec^2 \theta_1$$

相应的几项敏感度是：

$$S_{Y_{01}}^T = j \frac{Y_{01}}{T} \hat{V}_{01} V_{01} \operatorname{tg} \theta_1$$

$$S_{\theta_1}^T = j \frac{\theta_1 Y_{01}}{T} \hat{V}_{01} V_{01} \sec^2 \theta_1$$

$$S_{l_1}^T = S_{\theta_1}^T$$

用同样方法可以算出 T 对另外两微带线的敏感度：

$$S_{Y_{03}}^T = \frac{1}{T} [\hat{V}_{03} \quad \hat{V}_{04}] [Y_c] \begin{bmatrix} V_{03} \\ V_{04} \end{bmatrix}$$

$$S_{l_c}^T = \frac{\theta_c}{T \sin \theta_c} [\hat{V}_{03} \quad \hat{V}_{04}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [Y_c] \begin{bmatrix} V_{03} \\ V_{04} \end{bmatrix}$$

$$S_{Y_{04}}^T = \frac{jY_{04}}{T} \hat{V}_2 V_2 \operatorname{tg} \theta_4$$

$$S_{l_4}^T = \frac{j\theta_4}{T} Y_{04} \hat{V}_2 V_2 \sec^2 \theta_4$$

至此， T 对各元件参数的敏感度表示式皆已求出，只要把电路分析所得的 $[V]$ 和 $[\hat{V}]$ 代入即可。通常可以把单元导纳的导数矩阵编成子程序储存于计算机中，以备计算敏感度时调用。

§ 3.2.3 用散射矩阵法分析电路敏感度

在微波电路分析中，常用散射矩阵分析法。这时的变量将是归一化入射波和归一化反射

波，而不是电压和电流。原网络和伴随网络之间的关系除了应该满足前述规定（见表 3-2）外，还应该具有统一的规范化。用 $[b]$ 和 $[a]$ 表示原网络规范化反射波和入射波向量，用 $[\hat{b}]$ 和 $[\hat{a}]$ 表示伴随网络的反射波和入射波向量，则有

$$\left. \begin{aligned} [b] &= [s][a] \\ [\hat{b}] &= [\hat{s}][\hat{a}] \end{aligned} \right\} \quad (3-64)$$

式中 $[b] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T$, $[a] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$

$[\hat{b}] = [\hat{b}_1 \ \hat{b}_2 \ \dots \ \hat{b}_n]^T$, $[\hat{a}] = [\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \dots \ \hat{a}_n]^T$

n 为网络的端口数。例如，图 3-10 的原网络由 m 个子网络构成，它的散射矩阵方程是

$$\begin{bmatrix} \bar{b}^{(1)} \\ \bar{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{b}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{s}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{s}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{s}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}^{(1)} \\ \bar{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{a}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

式中 $\bar{b}^{(1)} = \bar{s}^{(1)} \bar{a}^{(1)}$ 是第 1 个子网络的散射矩阵方程，这里的 \bar{b} 、 \bar{a} 和 \bar{s} 表示向量或矩阵。在图 3-10 中 $\bar{b}^{(1)}$ 是 3 口网络，其矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

其余类推。全网络方程具有如下形式

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & s_{46} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{54} & s_{55} & s_{56} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{64} & s_{65} & s_{66} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (3-66)$$

现在需要把台劳根定理的公式 (3-34) 推广到反射波与入射波。先分析关系式

$$\sum_{k=1}^n b_k \hat{a}_k - \sum_{k=1}^n a_k \hat{b}_k$$

利用式 (3-64)，得

$$\sum_{k=1}^n b_k \hat{a}_k - \sum_{k=1}^n a_k \hat{b}_k = [b]^T [\hat{a}] - [a]^T [\hat{b}] = [a]^T [s]^T [\hat{a}] - [a]^T [\hat{s}] [\hat{a}]$$

根据表 3-2 的规定，有 $[s]^T = [\hat{s}]$ ，因此

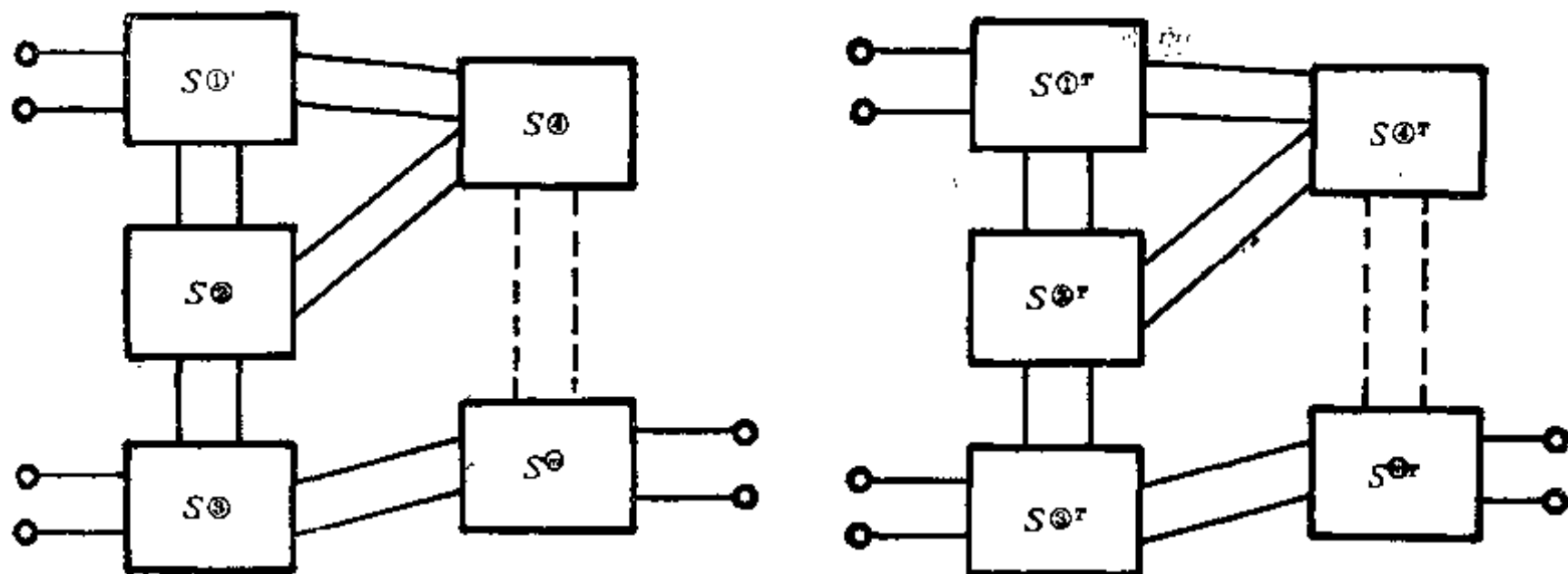


图3-10 散射矩阵伴随网络

$$\sum_{k=1}^n (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) = 0 \quad (3-67)$$

这就是台劳根定理的散射参量形式。

把全部 n 个端口分成两部分。一部分是外部输入、输出端口，共有 p 个；另一部分是内部联接端口，共有 C 个。式 (3-67) 写成

$$\sum_{k=1}^n (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) = \sum_{k=1}^p (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) + \sum_{k=1}^C (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) = 0 \quad (3-68)$$

对于所有的内部联接端口，也符合台劳根定理，

即

$$\sum_{k=1}^C (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) = 0 \quad (3-69)$$

由式 (3-68) 得

$$\sum_{k=1}^p (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) = \sum_{k=1}^n (b_k \hat{a}_k - a_k \hat{b}_k) \quad (3-70)$$

考虑原网络的某个变量 x ——比如某一个线段的特性阻抗、电长度或电阻、电容等——产生微小增量的情况。若此变量 x 存在于某一个子网络中，而该子网络的散射矩阵方程是

$$[b] = [s][a] \quad (3-71)$$

则有

$$\frac{\partial [b]}{\partial x} = \frac{\partial [s]}{\partial x} [a] + [s] \frac{\partial [a]}{\partial x} \quad (3-72)$$

参照前节所述台劳根定理增量形式的推导，由 (3-70) 式得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial b_k}{\partial x} \hat{a}_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} \hat{b}_k \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_k}{\partial x} \hat{a}_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} \hat{b}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial [b]^{\textcircled{1}T}}{\partial x} [\hat{a}]^{\textcircled{1}} - \frac{\partial [a]^{\textcircled{1}T}}{\partial x} [\hat{b}]^{\textcircled{1}} \right) \end{aligned} \quad (3-73)$$

式中①表示子网络号码, m 是子网络数。

现在把式 (3-73) 等号右边部分展开化简。利用式 (3-71) 和 (3-72), 并考虑到 $[b]$ 的转置, 得

$$\frac{\partial [b]^T}{\partial x} [\hat{a}] - \frac{\partial [a]^T}{\partial x} [\hat{b}] = \left([a]^T \frac{\partial [s]^T}{\partial x} + \frac{\partial [a]^T}{\partial x} [s]^T \right) [\hat{a}] - \frac{\partial [a]^T}{\partial x} [\hat{b}] \quad (3-74)$$

将伴随网络规定 $[\hat{b}] = [S]^T [\hat{a}]$ 代入式 (3-74), 得

$$\frac{\partial [b]^T}{\partial x} [\hat{a}] - \frac{\partial [a]^T}{\partial x} [\hat{b}] = [a]^T \frac{\partial [s]^T}{\partial x} [\hat{a}] \quad (3-75)$$

把式 (3-75) 代入式 (3-73), 得

$$\sum_{k=1}^p \left(-\frac{\partial b_k}{\partial x} \hat{a}_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} \hat{b}_k \right) = \sum_{i=1}^m [a]^{\textcircled{i}T} \frac{\partial [s]^{\textcircled{i}T}}{\partial x} [\hat{a}]^{\textcircled{i}} \quad (3-76)$$

一般情况下, 某一个变量 x 只存在于一个子网络中, 因此其它子网络对 x 的偏导数皆为零, 从而得到

$$\sum_{k=1}^p \left(-\frac{\partial b_k}{\partial x} \hat{a}_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} \hat{b}_k \right) = [a]^T \frac{\partial [s]^T}{\partial x} [\hat{a}] \quad (3-77)$$

公式 (3-77) 是计算敏感度的基本关系式。等号左边是网络外端口 (输入、输出端口) 参数的偏导数, 等号右边是包含变量 x 的子网络参数。

如果网络各端口都匹配, 则

$$\frac{\partial a_k}{\partial x} = 0 \quad (k = 1 \sim p)$$

代入式 (3-77) 可得

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial b_k}{\partial x} \hat{a}_k = [a]^T \frac{\partial [s]^T}{\partial x} [\hat{a}] \quad (3-78)$$

式中 b_k 是网络外端口的输出波。式 (3-78) 表明, 外口匹配情况下输出波对 x 的偏导数

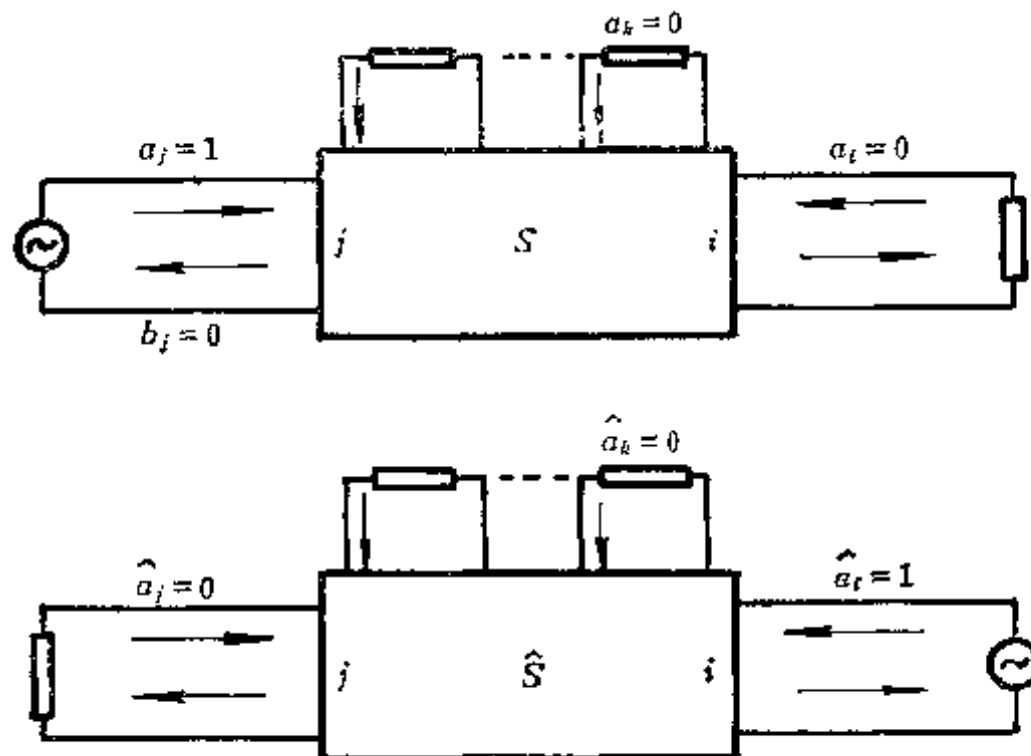


图3-11 求传输系数敏感度的电路端接方式

只与包含 x 的子网络有关。利用式 (3-78) 可以求得网络特性对各元件参数的偏导数。

1. 求网络的 j 端口到 i 端口的传输系数的偏导数, 即求解 $\partial s_{ij}/\partial x$ 。

计算的步骤是: 先把原网络信源端口 j 接匹配信源, 此时网络的归一化入射波 $a_j = 1$; 输出端口 i 接匹配负载, 其余各外端口也都接匹配负载; 然后做伴随网络, 它应该与原网络拓扑相同而且内联端口相同, 其端接条件取为: j 端口接匹配负载, 原输出端口 i 接匹配信源, 见图 3-11。

按照图 3-11 的端接方式可知, $a_j = 1$, $a_k = 0$ ($k \neq j$), $\hat{a}_j = 1$, $\hat{a}_k = 0$ ($k \neq i$),

$s_{ij} = \frac{b_i}{a_j} = b_i$, $\frac{\partial s_{ij}}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial x}$, 将它们代入式 (3-78), 得

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x} = [a]^T \frac{\partial [s]}{\partial x} [\hat{a}] \quad (3-79)$$

在上述端接条件下对原网络和伴随网络各进行一次电路分析, 得出两个网络的 $[a]$ 和 $[\hat{a}]$, 从中取出包含 x 子网络的 $[a]$ 和 $[\hat{a}]$, 再算出该子网络的 $\partial [s]/\partial x$, 代入式 (3-79) 即得出 $\partial s_{ij}/\partial x$ 。如果要求传输系数 s_{ij} 对另一个元件变量 x_k 的偏导数, 只需算出包含 x_k 的子网络对 x_k 的偏导数, 再把此子网络端口的 $[a]$ 和 $[\hat{a}]$ 代入 (3-79) 式即可。若要求 s_{ij} 对全部元件变量的偏导数, 实际上只需对原网络和伴随网络各进行一次电路分析。如果各子网络皆为互易网络, 则各子网络应满足 $[s] = [\hat{s}]^T = [\hat{s}]$, 即原网络与伴随网络全同, 仅端接条件不同, 此时只需对原网络进行一次分析。用 S 参数分析电路的方法参见第一章 §1.4 节。 S 参数电路分析程序编制方法见第四章。

2. 求网络的端口反射系数的偏导数, 即求解 $\partial b_i/\partial x$ 。

此时应该把原网络 j 口接匹配信源, 其余各口接匹配负载。伴随网络也是如此, 见图 3-12。

此时有: $a_j = 1$, $a_k = 0$ ($k \neq j$), $\hat{a}_j = 1$, $\hat{a}_k = 0$ ($k \neq j$)。用式 (3-78) 得反射系数的偏导数

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial x} = [a]^T \frac{\partial [s]}{\partial x} [\hat{a}] \quad (3-80)$$

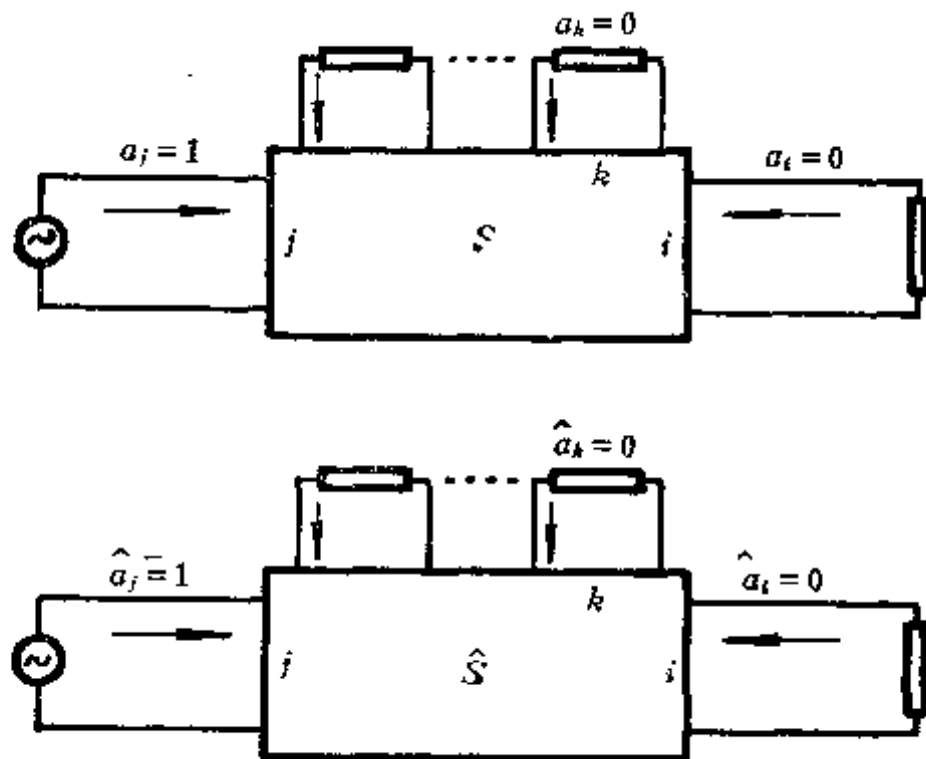


图3-12 求反射系数敏感度的电路端接方式

对原网络和伴随网络各进行一次电路分析，即可得出反射系数 Γ ，对各元件参数的偏导数。

在经过电路分析获得 $[a]$ 和 $[\hat{a}]$ 之后，唯一待解决的问题是子网络的 $\partial[s]^T/\partial x$ 求解。对于单元散射矩阵，通常用直接求导数法，把求得的偏导数矩阵解析式编成子程序存于计算机中，以备调用。几种常用的单元矩阵偏导数如下：

(1) 匹配传输线段（见图 3-13）归一化 S 参数为

$$[s] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta = \beta l) \quad (3-81)$$

对线长度的偏导数

$$\frac{\partial[s]}{\partial l} = -j\beta \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

(2) 任意阻抗传输线段（见图 3-14）传输线段的特性阻抗为 Z ，时，对 Z_0 的归一化 S 参数是

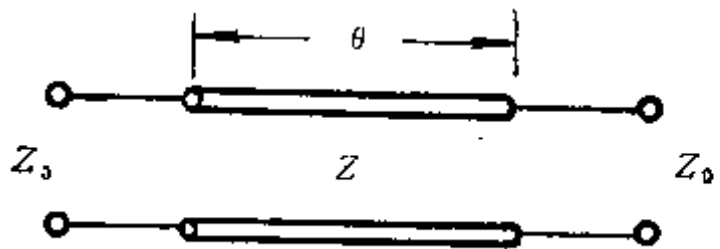


图 3-13 匹配传输线段

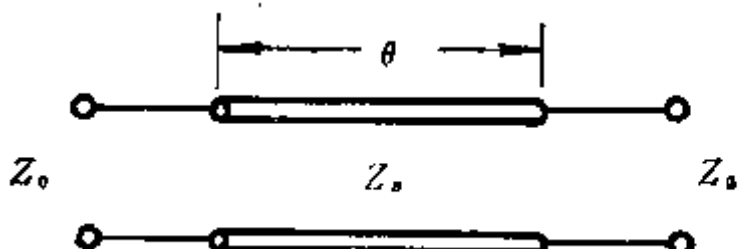


图 3-14 任意阻抗传输线段

$$[s] = \frac{1}{2\cos\theta + j\frac{(Z/Z_0)^2 + 1}{(Z/Z_0)}\sin\theta} \begin{bmatrix} j\frac{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)}\sin\theta & 2 \\ 2 & j\frac{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)}\sin\theta \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

偏导数矩阵是

$$\frac{\partial[s]}{\partial \theta} = \frac{2}{D^2} \begin{bmatrix} jB & 2E - jC \\ 2E - jC & jB \end{bmatrix} \quad (3-84)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Z_1^2 + Z_0^2}{Z_1 Z_0}, \quad B = \frac{Z_1^2 - Z_0^2}{Z_1 Z_0} \\ C &= A\cos\theta, \quad D = 2\cos\theta + jA\sin\theta \\ E &= \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-85)$$

$$\frac{\partial[s]}{\partial Z_1} = \frac{-2E}{Z_1 D^2} \begin{bmatrix} 2E - jC & jB \\ jB & 2E - jC \end{bmatrix} \quad (3-86)$$

(3) 串联阻抗 (见图 3-15) 串联阻抗对 Z_0 的归一化 S 参数是

$$[s] = \frac{1}{2 + \frac{Z}{Z_0}} \begin{bmatrix} \frac{Z}{Z_0} & 2 \\ 2 & \frac{Z}{Z_0} \end{bmatrix} \quad (3-87)$$

偏导数矩阵

$$\frac{\partial [s]}{\partial Z} = \frac{2Z_0}{(2Z_0 + Z)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

(4) 并联导纳 (见图 3-16) 并联导纳对 Y_0 的归一化 S 参数是

$$[s] = \frac{1}{2 + \frac{Y}{Y_0}} \begin{bmatrix} -\frac{Y}{Y_0} & 2 \\ 2 & -\frac{Y}{Y_0} \end{bmatrix} \quad (3-89)$$

偏导数矩阵

$$\frac{\partial [s]}{\partial Y} = \frac{-2Y_0}{(2Y_0 + Y)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-90)$$

(5) 理想变压器 (见图 3-17) 归一化 S 参数是

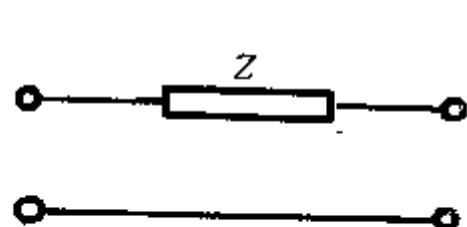


图3-15 串联阻抗

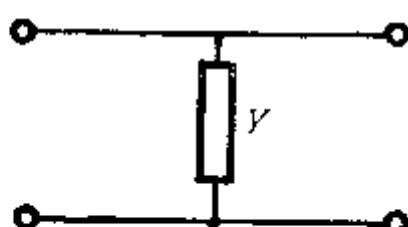


图3-16 并联导纳

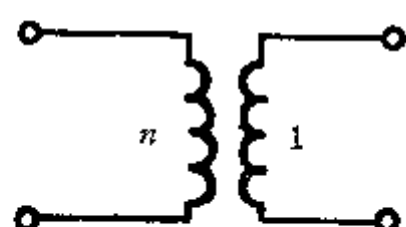


图3-17 理想变压器

$$[s] = \frac{1}{1 + n^2} \begin{bmatrix} n^2 & 1 & 2n \\ 2n & 1 & n^2 \end{bmatrix} \quad (3-91)$$

偏导数矩阵

$$\frac{\partial [s]}{\partial n} = \frac{2}{(1 + n^2)^2} \begin{bmatrix} 2n & 1 - n^2 \\ 1 - n^2 & -2n \end{bmatrix} \quad (3-92)$$

§ 3.3 多变量敏感度及公差分配

前述敏感度是电路特性与某一个参数变化的关系。在一般的微波电路中, 参数总有许多个, 比如滤波器的参数就有特性阻抗、微带线长度、耦合缝宽、基片厚度以及基片介电常数等。这些参数由于受到加工误差、环境温度改变、随时间老化等因素的影响, 都可能产生或多或少的变化。只要事先算出各参数的敏感度, 整个电路特性的变化就可以由各敏感度计算出来。

设电路包含 n 个元件参数, 并用 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示, 则

$$\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$$

当这些参数都发生变化时, 计算电路的电压传输系数 T 的相对变化。

传输系数 T 的微分是

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial x_n} dx_n$$

把上式两边除以 T ，得到 T 的相对变化是

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \left(\frac{x_1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) \frac{dx_1}{x_1} + \left(\frac{x_2}{T} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \frac{dx_2}{x_2} + \cdots + \left(\frac{x_n}{T} \frac{\partial T}{\partial x_n} \right) \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \sum_{i=1}^n S_{x_i}^T \frac{dx_i}{x_i} \end{aligned} \quad (3-93)$$

有些情况下，为计算方便可用增量形式，即

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^T \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (3-94)$$

式(3-94)说明，如果各参数的 $\Delta x_i/x_i$ 为独立变量，则传输系数的相对变化可由各参数变化的叠加构成。

在实际的微波电路中，电路参数的变化有很多是统计相关的。例如，基片的介电常数和厚度变化引起各线段特性阻抗和电长度等参数的变化就不是相互独立的。当各变量 x_i 统计相关时， $\Delta T/T$ 的方差（用 σ_T^2 表示）和 $\Delta x_i/x_i$ 的方差（用 σ_i^2 表示）有如下关系

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^n (S_{x_i}^T)^2 \sigma_i^2 \quad (3-95)$$

σ_T 和 σ_i 是均方差，分别代表 T 和 x_i 的相对公差。

公式(3-95)是电路参数公差的基本关系式。因为各参数同时出现同方向最大偏差的概率很小，各参数的偏差不仅是随机的而且对电路特性的影响有一部分是相互抵消的，因此用方差关系式更为合理。

在进行电路参数的公差分配时，各参数的 σ_i 应该取不同的值。对于敏感度大的参数，其公差必须取小些，而对于敏感度小的参数，其公差可以取大些。为了使公差分配合理，可以采用加权系数 W 。定义

$$\alpha_i^2 = W_i^2 \sigma_i^2 \quad (3-96)$$

α_i^2 叫加权方差。把式(3-96)代入式(3-95)，得

$$\sigma_T^2 \geq \sum_{i=1}^n \frac{(S_{x_i}^T)^2}{W_i^2} \alpha_i^2 \quad (3-97)$$

该式的含义是各参数的方差叠加应小于总的允许方差。公差的最优分配是取各加权方差都相等，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ ，因此得到

$$\alpha_i^2 \leq \frac{\sigma_T^2}{\sum_{i=1}^n \frac{(S_{x_i}^T)^2}{W_i^2}} \quad (3-98)$$

由式(3-96)和(3-98)可得

$$\sigma_i^2 = \frac{\alpha_i^2}{W_i^2} \leq \frac{\sigma_T^2}{W_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{(S_{x_i}^T)^2}{W_i^2}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (3-99)$$

当传输系数的允许公差 σ_T 给定之后,用式(3-99)可算出每个元件参数的公差 σ_i 。

各元件参数的加权系数 W_i 值可根据敏感度的大小选定。对于敏感度大的参数,加权系数应该选大些。具体数值通常凭经验或试选决定。由式(3-99)可以看出,某元件参数减权(即 W_i 减小, σ_i 放宽)必然要求其它一些元件参数加权才能满足总公差的要求,这就形成了公差再分配。

在微波电路工作频带内,不同频率上元件参数的敏感度是不同的。例如,带通滤波器通常是在频带边沿频率上的敏感度最大〔可参见图3-18(b)〕。公差的分配应该在敏感度大的频率上进行。

现举例说明公差分配。图3-18(a)给出一微带低通滤波器,这是一个变阻抗传输线型滤波器,由11节微带线段构成。基片厚度0.9mm,基片介电常数2.5, w_1 、 w_2 、 w_0 是各线段宽度, l_1 — l_{11} 为各线段长度。用计算机最优化设计的理论特性曲线如图3-18(b)中的实线所示,图中虚线是测量曲线。

滤波器传输特性 s_{21} 对各参数的敏感度和结构尺寸均已算出,列于表3-3的前两列。敏感度值是通带边频4GHz处的数据。

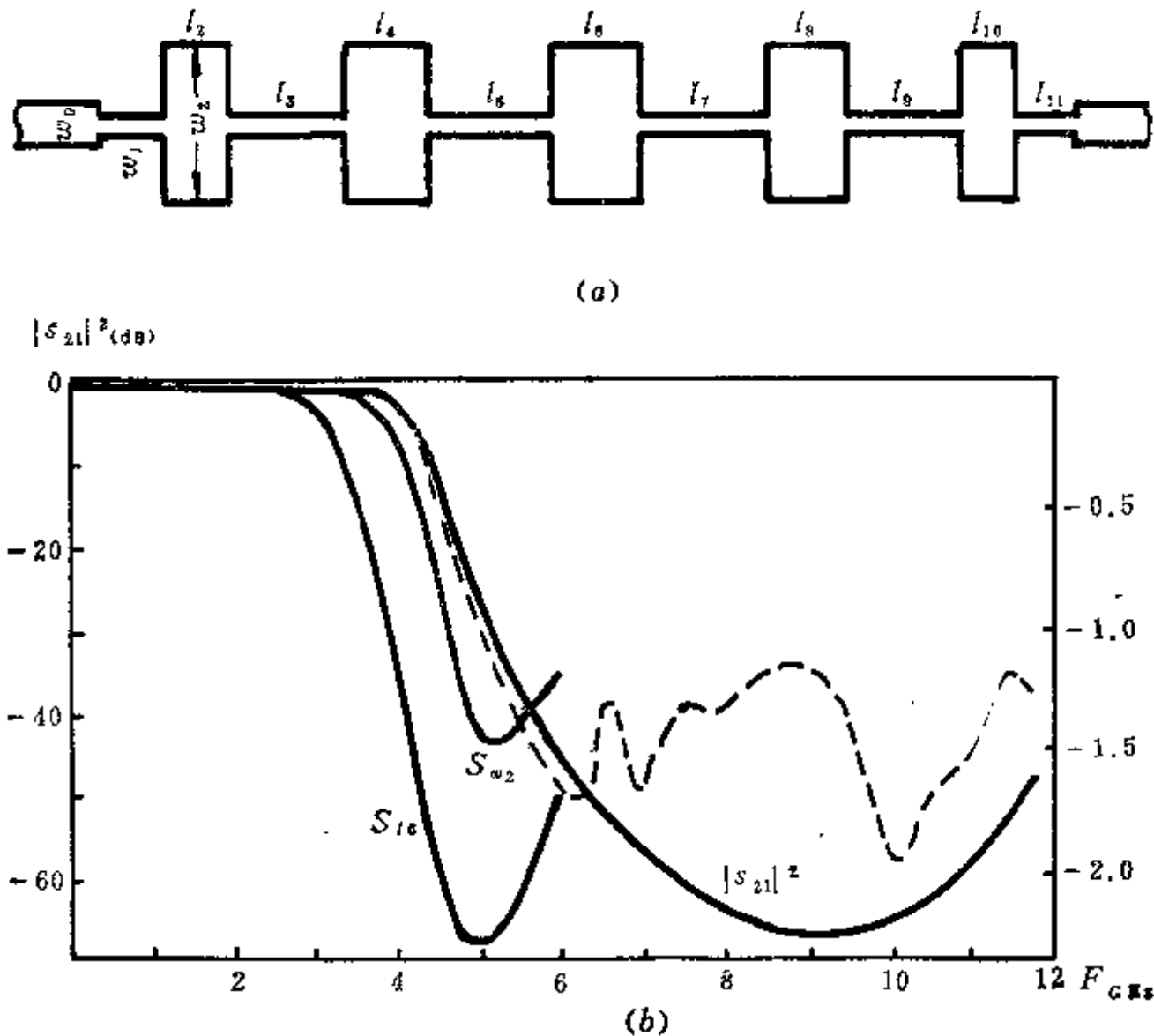


图 3-18 微带低通滤波器

给定滤波器通带内4GHz处的传输特性允许误差为0.1 dB,即

$$\Delta L_{(\text{dB})} = 20 \lg \frac{S'_{21}}{S_{21}} = 0.1(\text{dB})$$

$$\text{或 } \frac{S'_{21}}{S_{21}} = \lg^{-1} \frac{\Delta L_{(\text{dB})}}{20} = 1.01158$$

由于在频带边缘处敏感度最大, 因此只要按 4GHz 处的敏感度值进行公差分配, 必能保证通带内的公差。因此可得传输系数 S_{21} 的相对公差允许值

$$\sigma_T = \frac{S_{21}' - S_{21}}{S_{21}} = 0.01158$$

对表中敏感度高的 l_5 、 l_6 、 l_7 取加权系数 $W_i^2 = 1.5$, 对敏感度低的参数 w_0 、 l_1 、 l_2 、 l_{10} 、 l_{11} 取加权系数 $W_i^2 = 0.5$, 其余取加权系数 $W_i^2 = 1.0$ 。如果为了使各项公差均匀, 则应该把大尺寸参数的 W_i^2 取大些, 而对小尺寸的 W_i^2 取小些。

变量公差 σ_i 的计算可利用式 (3-99)。例如, 第一段高阻微带线长 l_1 的相对公差为

$$\sigma_{l_1} = \left[\frac{\sigma_T^2}{W_{l_1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2}{W_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{0.0001341}{0.5(1.377)} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.01396$$

线段 l_1 的绝对公差值是 $\Delta l_1 = l_1 \sigma_{l_1} = 0.042(\text{mm})$ 。其它各变量的公差均按该法计算。见表 3-3。

表 3-3 微带低通滤波器公差分配

序号 i	参数值 $x_i(\text{mm})$	敏感度 $ S_i $	敏感度平方 S_i^2	权系数 W_i^2	相对公差 σ_i	绝对公差 $\Delta x(\text{mm})$	公差选用值 $\Delta x_0(\text{mm})$
1	$w_1 = 0.72$	0.5	0.25	0.5	0.014	0.01	0.01
2	$w_2 = 10.09$	0.127	0.016	1.5	0.008	0.082	0.08
3	$w_0 = 2.55$	0.036	0.0013	0.5	0.014	0.036	0.04
4	$l_1 = 3$	0.032	0.001	0.5	0.014	0.042	0.04
5	$l_2 = 3.57$	0.043	0.00185	0.5	0.014	0.05	0.04
6	$l_3 = 6.11$	0.14	0.196	1.0	0.01	0.06	0.04
7	$l_4 = 4.57$	0.36	0.13	1.0	0.01	0.045	0.04
8	$l_5 = 6$	0.5	0.25	1.5	0.008	0.049	0.04
9	$l_6 = 4.92$	0.575	0.33	1.5	0.008	0.04	0.04
10	$l_7 = 6$	0.5	0.25	1.5	0.008	0.049	0.04
11	$l_8 = 4.57$	0.36	0.13	1.0	0.01	0.045	0.04
12	$l_9 = 6.11$	0.14	0.196	1.0	0.01	0.06	0.04
13	$l_{10} = 3.57$	0.043	0.00185	0.5	0.014	0.05	0.04
14	$l_{11} = 3$	0.032	0.001	0.5	0.014	0.042	0.04

§ 3.4 蒙特-卡洛法确定公差

用元件参数敏感度计算公差是网络设计的基本方法, 方法简单, 应用普遍。但是当元件参数离散很大时, 就不宜用敏感度来计算公差了。理由很简单: 从计算公差的公式

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{i=1}^n S_{x_i,0}^T \frac{\Delta x_i}{x_{i,0}}$$

来看,当元件值偏差 Δx 很大时,元件值已远离 $x_{i,0}$, 敏感度 $S_{x_i,0}^T$ 已不是 $x_{i,0}$ 时的数值,而有很大变化。如果仍然把敏感度看做固定值,显然有很大误差。因此在元件值离散很大的情况下,用敏感度计算公差的方法就不太适用了。元件值大离散的情况是不少的,比如电容、电阻元件值标称误差就是 5—10%,微波电路元件——如半导体二极管、三极管、铁氧体隔离器、转换接头等元件——的 S 参数、驻波比、插入损耗、隔离度也都有很大离散。

此外,电路元件和结构尺寸的实际值都是随机数。但是,电路的全部元件参数同时具有公差极限值的情况非常少,因而电路特性也很难出现最坏的极端情况,从这个观点来看,对各元件的公差要求是可以放宽的。为确定最佳的公差分配,需要用概率统计方法,这也是蒙特-卡洛法要解决的主要问题。

§ 3.4.1 蒙特-卡洛法基本原理

蒙特-卡洛法是一种概率统计的方法,它利用计算机生成随机数列来模拟各元件值的随机分布,以求得公差的合理分配。下面结合电阻分压器具体说明其原理。

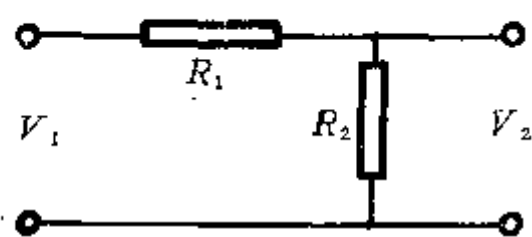


图3-19 电阻分压器

两个电阻的分压器如图 3-19 所示,其电压传输系数为 $T_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ 。由于电阻 R_1 和 R_2 都有误差,故电阻实际值是 $R_1(1 \pm \delta)$ 和 $R_2(1 \pm \delta)$ 。对于常用的二级电阻, $\delta \leq 0.1$ 。电压传输系数最大值和最小值是

$$T_{\min} = \frac{R_2(1-\delta)}{R_2(1-\delta) + R_1(1+\delta)}, \quad T_{\max} = \frac{R_2(1+\delta)}{R_2(1+\delta) + R_1(1-\delta)}$$

如果根据电阻公差为 $\pm 10\%$ 计算,得到的是传输系数的最大误差。取 $R_1 = 990$, $R_2 = 10$, 则 $T_0 = 0.01$ 。算得传输系数的极限值为: $T_{\min} = 0.0082$, 误差是 -18% ; $T_{\max} = 0.0122$, 误差是 $+22\%$ 。按照这种最大误差法计算,电路特性误差比元件公差大得多,如果元件数增多,电路特性误差还要增大。若要电路特性误差维持在允许范围内,必然要对元件公差或结构尺寸提出过于苛刻的要求。但是,实际上这种极端情况几乎不存在,而且元件数愈多,全部元件公差同时处于极大值的概率愈小,因此,若按最大公差设计,必然造成很大浪费。在上节用敏感度进行公差分配时,采用方差计算而非最大公差叠加计算,就是已经考虑了概率统计的结果。

蒙特-卡洛法用于电阻分压器公差分析的过程如下:

电阻 R_1 和 R_2 的标称值为 $R_{1,0} = 10\Omega$, $R_{2,0} = 990\Omega$, 由于存在 $\pm 10\%$ 的公差,因此其取值范围是 $R_1 = 9 \sim 11\Omega$, $R_2 = 891 \sim 1089\Omega$ 。电阻值的分布如图 3-20(a)、(b) 所示。如果 R_1 和 R_2 在取值范围内是均匀概率分布,则传输系数 T 取值的概率密度分布如图 3-20(c) 所示。图中 $p(T)$ 表示 T 的概率密度。

蒙特-卡洛法是用有限数量的模拟试算来近似求得概率分布图的。求元件公差的具体步骤是:

1. 用计算机按均匀概率分布的电阻值序列选出 R_1 和 R_2 的任意一对随机数。比如 $R_1 = 10.35$, $R_2 = 992$, 用此组随机数进行电路分析,得传输系数

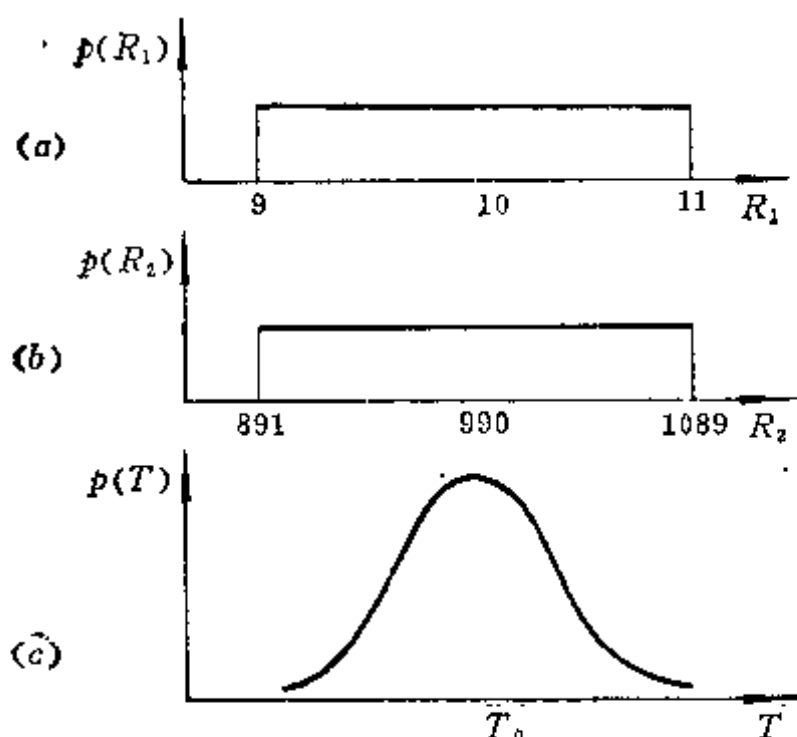


图3-20 电阻和传输系数概率分布

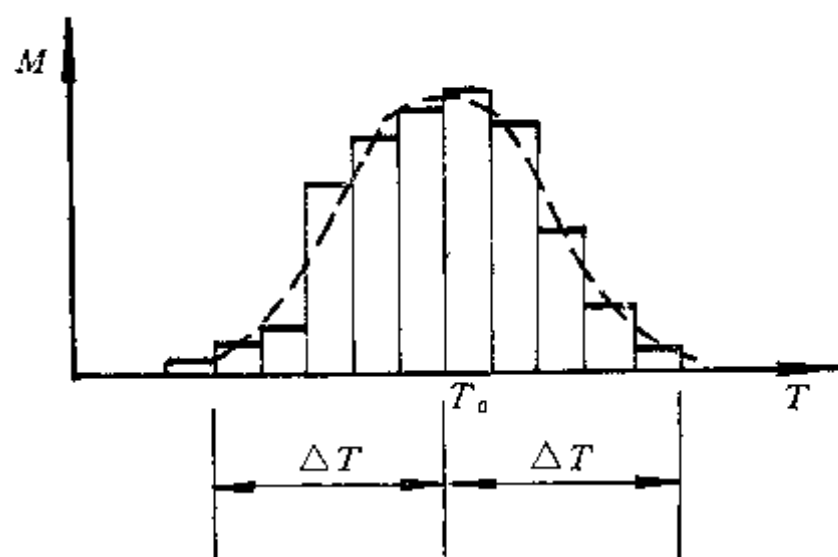


图3-21 分压器传输系数概率直方图

$$T_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10.35}{10.35 + 992} = 0.010326$$

再取第2组随机数, 比如 $R_1 = 9.82$, $R_2 = 1036$, 算得

$$T_2 = 0.0094$$

如此继续下去, 得出传输系数一系列随机值

$$T = T_1, T_2, \dots, T_n$$

为保证准确性, 计算次数 n 要足够大。

2. 对随机数列 T_i 进行统计分类, 做出概率分布直方图, 见图 3-21。图中 M 代表各 T 值区间的统计数。

3. 根据概率直方图, 估计 T 的公差。如果在 $T_0 \pm \Delta T$ 范围内概率密度已达 99%, 则可认为 T 的误差是 $\pm \Delta T$, 如图 3-21 中的标注。在用直方图代替概率分布密度时, 计算次数愈多, 直方图愈平滑, 也就愈接近真实分布情况。

4. 按照允许的误差 ΔT_0 反过来修正元件值的初始公差。如果 ΔT 低于允许的 ΔT_0 , 则满足要求。如果 $\Delta T < \Delta T_0$, 则可以放松对 R_1 和 R_2 的公差。如果 $\Delta T > \Delta T_0$, 则需提高 R_1 和 R_2 的公差。

§ 3.4.2 伪随机数列的产生

用蒙特-卡洛法分析公差时, 首先要模拟实际情况, 产生变量的随机数。由于实际电路的元件随机数往往数以万计甚至更多, 所以不能把各变量随机值存入计算机等待选取, 否则计算机存储单元将被大量数据占用。通常是用计算机模拟产生随机数, 叫做伪随机数列 (严格说, 并非真正的随机数列, 而仅是近似代替)。

(一) 均匀分布随机数的产生

在产生伪随机数列的过程中, 首先要获得 $(0, 1)$ 区间的随机数列, 然后乘以适当比例转化成任意变量区间的随机数列。例如, X_i 为 $(0, 1)$ 区间的均匀随机数列, 则 (a, b) 区间均匀分布的随机数列 Y_i 可由下式求得

$$Y_i = a + (b - a)x_i \quad (3-100)$$

用计算机产生均匀分布随机数列的方法很多，现仅介绍常用的几种。

1. 平方取中法

平方取中法的计算步骤是：有一个小数点后 K 位的数 x_0 。（例如 $x_0 = 0.6182$ ，此处 $K = 4$ ），对 x_0 取平方值，得到小数为 $2K$ 位的数 x_0^2 ，再把 x_0^2 截头去尾，保留中间的 K 位数，做为新的随机数；如此继续下去，从而得到均匀分布随机数列。初值为 $x_0 = 0.6182$ 的随机数列的产生过程是：

$x_0 = 0.6182$	$x_0^2 = 0.38217124$
$x_1 = 0.2171$	$x_1^2 = 0.04713241$
$x_2 = 0.7132$	$x_2^2 = 0.50865424$
$x_3 = 0.8654$	$x_3^2 = 0.74891716$
$x_4 = 0.8917$
.....

截去尾数的作用是为了避免 x^2 的末尾数只出现 0、1、5、6，而不出现 2、3、7、8 这种不均匀性。截去头位则可以避免小于 1 的数平方后向小数值偏倚的现象。最后保持每个随机数皆为 K 位。

用计算机实现上述运算时，可利用计算机字长有限的特性。当对 K 位数取平方之后，尾数超过计算机字长的时候，超出的尾数就会自动舍去。而截头的方法是：先判断 x_0^2 是否小于 1，如果 $x_0^2 < 1$ ，则右移小数点直至 $x_0^2 \geq 1$ 为止，然后截去整数部分。其程序如下：

RN 是 (0, 1) 区间的随机数。第一次调用该子程序时要对 RN 赋初值。每调用一次子程序，产生一个随机数 RN 送回主程序，同时这个 RN 又做为下次计算的初值。

```

SUBROUTINE  RONM (RN)
  IF (RN .EQ. 0 .0)  RN = 0.314159
  R = RN * RN
5  R = R * 10.0
  IF (R - 1.0) 5, 10, 10
10  RN = R - FLOAT (IFIX(R))
  RETURN
END

```

如果需要一次产生 N 个数的随机数列，程序可写为：

```

SUBROUTINE  RONM (RNR, N)
  DIMENSION  RNR (N)
  RN = 0.314159
  DO 20  I = 1, N
    R = RN * RN
5  R = R * 10.0
    IF (R - 1.0) 5, 10, 10
10  RN = R - FLOAT (IFIX(R))
    RNR (I) = RN
20  CONTINUE
  RETURN
END

```

用此程序得到的随机数列是：0.8695812, 0.5617141, 0.1552276, 0.4095621, 0.6774110, 0.5888566, 0.4675216, 0.1857643, ..., 0.2045116, 0.1825008, 0.3306550, 0.0933265, ..., 0.0933265。其中第1342个数与第897个数相同，继续下去就会产生数列重复，因此该数列长度为1342。初始值不同，数列长度也不同。初值选择不恰当时，数列可能很短就开始重复。

2. 同余法

根据模同余的概念可构成随机数列的产生方法。模同余可用下式说明

$$x = A \text{ (模 } M)$$

该等式说明 A/M 的余数部分为 x 。这样运算的结果是对 A 截头。例如， $A = 1869$ ， $M = 100$ ，则 $x = 69$ 。

同余法产生伪随机数列的递推公式为

$$NR_{n+1} = (Ix \cdot NR_n + C) \text{ (模 } M) \quad (3-101)$$

$$r_{n+1} = NR_{n+1}/M \quad (3-102)$$

式中 NR_{n+1} 是伪随机数列中第 $n+1$ 个数（是正整数）， NR_n 是前一个随机数， Ix 是倍乘因子（也是正整数）， C 为增量， M 为模， r_{n+1} 是 $(0, 1)$ 区间的小数随机数列中第 $n+1$ 个数。当 $C = 0$ 时称为乘同余法，递推公式简化为

$$NR_{n+1} = Ix \cdot NR_n \text{ (模 } M) \quad (3-103)$$

$$r_{n+1} = NR_{n+1}/M \quad (3-104)$$

乘同余法也是一种常用方法，其数列长度较大，均匀性好。乘同余法计算步骤如下：

(1) 选初始值 NR_0 。注意要选用不能被 5 整除的数，否则最末尾数永远是 5，数列长度将缩短。例如，可选 $NR_0 = 21324$ ，并选定模为 $M = 10^5$ 。

(2) 确定倍乘因子 Ix 按下述公式算出 Ix

$$Ix = 200 \cdot IT \pm IR$$

式中 IT 为任意整数， IR 为下列数中的任意一个：3, 13, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, 91, 93, ...，这些数是经验数据。选择 IT 和 IR 代入上式，应该使 Ix 值接近 \sqrt{M} 。

(3) 计算随机数按递推公式 $NR_{n+1} = Ix \cdot NR_n \text{ (模 } 10^5)$ 计算随机数。用计算机求模同余时，可借助计算机的整型变量特性进行运算。计算机语句是

$$NR1 = Ix \cdot NR0/M$$

由于 $NR1$ 是整型变量，等式右边经运算后，小数位自动被舍去。

$$NR2 = Ix \cdot NR0 - NR1 \cdot M$$

经此语句运算后截去 $Ix \cdot NR0$ 的头位，保留后 K 位。

现举例如下：选初值 $NR_0 = 21324$ ，取 5 位有效数，模为 10^5 。为使 Ix 较为接近 $\sqrt{10^5}$ ，可选 $IT = 1$ ， $IR = 77$ ，利用 $Ix = 200 \cdot IT + IR$ 计算得 $Ix = 277$ 。循环计算出的随机数 r_i 是：

$277 \times 21324 = 5906748$	按模取余 $NR_1 = 6748$	除以模 $r_1 = 0.06748$
$277 \times 6748 = 1869196$	按模取余 $NR_2 = 69196$	除以模 $r_2 = 0.69196$
$277 \times 69196 = 19167292$	按模取余 $NR_3 = 67292$	除以模 $r_3 = 0.67292$
$277 \times 67292 = 18639884$	按模取余 $NR_4 = 39884$	除以模 $r_4 = 0.39884$
.....

5 位数的乘同余子程序如下：HNR 为 $(0, 1)$ 区间伪随机数，NRR 是初值，若所给初值

为零，则利用程序中自带的初值。每次计算给出一个随机数，同时又作为下次计算的初值。

```
SUBROUTINE RUNM (HNR, NRR)
  IF (NRR .EQ. 0) NRR = 21324
  NRR = 277 * NRR
  NRR = NRR - NRR/100000 * 100000
  HNR = FLOAT (NRR) /100000 * 0
  RETURN
END
```

用RUNM子程序得出的随机数列如下：0.06748, 0.69196, 0.67292, 0.39884,
0.47868, 0.59436, 0.63772, 0.64844, 0.61788, 0.15276, 0.31452,
0.12204, 0.80508, 0.00716, 0.98332, 0.37964, 0.16028, 0.39756,
0.12412, 0.38124, 0.60348, 0.16396, 0.41692, 0.48684, 0.85468,
0.74634, 0.74172, 0.45644, 0.43388, 0.18476, ..., 0.75932,
0.33164, 0.86428, 0.40556, 0.34012, 0.21324。

此随机数列第2500个数是0.21324，等于初始值。如果继续计算下去，则每2500个数循环一次，因此数列长度是2500。

(二) 正态分布随机数的产生

各种非均匀分布的随机数中，最常遇到的是正态分布或称高斯分布。正态分布随机变量 x 的概率密度是

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3-105)$$

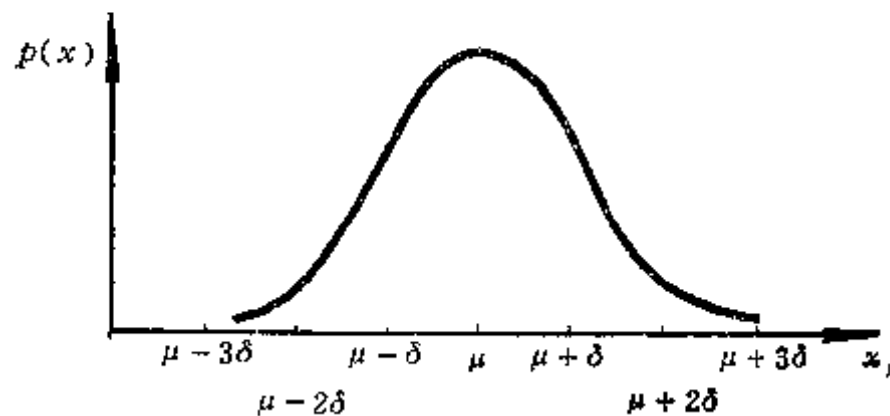


图3-22 正态分布曲线

正态分布曲线如图3-22所示。通常，电阻、电容元件值以及加工尺寸等都是在一定范围（即公差范围）内按正态分布的随机数。图3-22中所示的随机变量均值为

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (3-106)$$

方差为

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (3-107)$$

x 处于 $\mu \pm \sigma$ 之间的概率为

$$p_x(\sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x) dx = 0.683 \quad (3-108)$$

x 处于 $\mu \pm 2\sigma$ 之间的概率为

$$p_x(2\sigma) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} p(x) dx = 0.954 \quad (3-109)$$

x 处于 $\mu \pm 3\sigma$ 之间的概率为

$$p_x(3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} p(x) dx = 0.997 \quad (3-110)$$

此式说明正态分布随机变量处于 $\mu \pm 3\sigma$ 之间的概率几乎等于1，即可以近似认为变量的公差不出 $\mu \pm 3\sigma$ 的范围。这个性质是计算正态分布公差的基本原则。

正态分布的伪随机数列可以由均匀分布随机数列用中心极限定理求得。中心极限定理的

含意是指大量均匀分布随机变量的总和是正态分布随机变量。正态分布随机数计算公式是

$$\xi = \mu_G + \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i - n\mu_m}{\sqrt{n\sigma_m^2}} \sigma_G \quad (3-111)$$

式中 η_i 是在 $(0, 1)$ 区间的均匀分布随机变量序列, $\sum_{i=1}^n \eta_i$ 是 n 个均匀分布随机变量的代数组合, μ_m 是 η_i 的均值, σ_m^2 是 η_i 的方差, μ_G 是正态分布随机变量的均值, σ_G 是正态分布随机变量的均方差。公式 (3-111) 中的几项变量可做如下简化: 由于 η_i ($i=1, \dots, n$) 是在 $(0, 1)$ 之间均匀分布的随机变量, 则可知 η_i 的均值是

$$\mu_m = \int_0^1 \eta p(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \quad (3-112)$$

η_i 的方差

$$\sigma_m^2 = \int_0^1 (\eta - \frac{1}{2})^2 d\eta = \frac{1}{12} \quad (3-113)$$

n 个均匀分布随机变量的代数和 $\eta_0 = \sum_{i=1}^n \eta_i$, η_0 的均值为

$$n\mu_m = \frac{n}{2} \quad (3-114)$$

η_0 的方差为

$$n\sigma_m^2 = \frac{n}{12} \quad (3-115)$$

把式 (3-114)、(3-115) 代入式 (3-111), 得正态分布的随机数计算公式为

$$\xi = \mu_G + \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \sigma_G \quad (3-116)$$

如果是标准正态分布, 则其均值 μ_{G_0} 和均方差 σ_{G_0} 为

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{G_0} = 0 \\ \sigma_{G_0} = 1 \end{array} \right\} \quad (3-117)$$

此时可得标准正态分布随机数计算式

$$\xi_{G_0} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \quad (3-118)$$

一般情况下, 当 $n=10-20$ 左右就可以认为 ξ 接近于正态分布。当取 $n=12$, 可得

$$\xi_{G_0} = \sum_{i=1}^{12} (\eta_i - \frac{1}{2}) \quad (3-119)$$

非标准正态分布随机数为

$$\xi = \mu_G + \xi_{G_0} \sigma_G \quad (3-120)$$

标准正态分布随机数子程序RNORM

程序中 GNR 代表标准正态分布随机数。每调用一次 RNORM 给出一个正态分布随机数。SNR(I)代表20个均匀分布随机数的数组，它由子程序RUNM给出。每产生一个正态分布随机数，需调用一次子程序RUNM。SNR的最后一个数作为下次调用RUNM的初值。

```
SUBROUTINE RNORM (GNR)
  END
```

如果要求一次产生L个标准正态分布随机数列，可用下面的RNORL子程序。

```
SUBROUTINE RNORL (GNR, L)
  DIMENSION GNR (L), SNR (20)
  NRR = 11111
  DO 20 I = 1, L
    CALL RUNM (SNR, NRR)
    SUM = 0.0
    DO 30 J = 1, 20
30  SUM = SUM + SNR (J)
    GNR (I) = (SUM - 10.0) / 1.291
    NRR = IFIX (SNR (20) * 100000.0)
20  CONTINUE
  RETURN
  END
```

用程序RNORL算得的800个标准正态分布随机数如下：

- 1.2943506, - 0.70488399, 0.03949658, 0.93880010, - 0.33075941, - 0.67080367,
2.2424393, - 0.88614047, - 0.76143301, - 0.48180479, 0.72733563, - 1.0069761,

```
DIMENSION SNR (20)
  NRR = 11111
  CALL RUNM (SNR, NRR)
  SUM = 0.0
  DO 30 J = 1, 20
30  SUM = SUM + SNR (J)
  GNR = (SUM - 10.0) / 1.291
  NRR = IFIX (SNR (20) * 100000.0)
  RETURN
  END
```

```
SUBROUTINE RUNM (HNR, NRR)
  DIMENSION HNR (20)
  IF (NRR .EQ. 0) NRR = 11111
  DO 10 K = 1, 20
    NRR = 277 * NRR
    NRR = NRR - NRR / 100000 * 100000
    HNR (K) = FLOAT (NRR) / 100000.0
10  CONTINUE
  RETURN
```

0.51199812, -0.13788605, -0.63284874, -0.97289599, -0.38342941, 0.36095488,
 -1.0635223, -1.5584879, 1.1998377, -1.3090687, 0.20990723, 0.33461839,
 2.1634312, -0.50039446, 0.86366445, -0.71572977, -1.3656149, -0.31139410,
 -0.65143842, 0.71261978, 1.4570026, 0.80711997, -2.0116234, 1.5212936,

 0.59100604, -0.52363056, -0.70875853, 1.5848112, 0.93492854, -1.1092234。

应用举例

有交叉指耦合器，其耦合缝宽设计值为 $S = 1.2\text{mm}$ ，由于加工造成的误差范围是 $\pm 0.05\text{mm}$ 。试求耦合缝宽 S 的随机数列。

通常加工误差值近似为正态分布。根据正态分布的特性可知，偏离中心值 $\pm 3\sigma$ 内的概率已达 0.997，故可以近似取 $3\sigma_G = 0.05$ 。耦合缝宽的均值是 $\mu_G = 1.2$ 。把 σ_G 和 μ_G 的值代入公式 (3-120)，得到耦合缝的计算式为

$$\xi = 1.2 + \frac{0.05}{3} \xi_G$$

再用子程序 RNORM 算出标准正态分布随机数 ξ_G ，代入上式即可得耦合缝的随机数列如下：
 1.1784, 1.1882, 1.2007, 1.2156, 1.2055, 1.1888, 1.2373, 1.1852, 1.1873, 1.1920,
 1.2121, 1.1832,。

§ 3.4.3 蒙特-卡洛公差分析法

用蒙特-卡洛法对电路进行公差分析的过程可以概括为：先用计算机给出电路元件参数或尺寸的随机数列；然后用电路分析程序对这些元件随机数进行电路分析，得出电路特性的

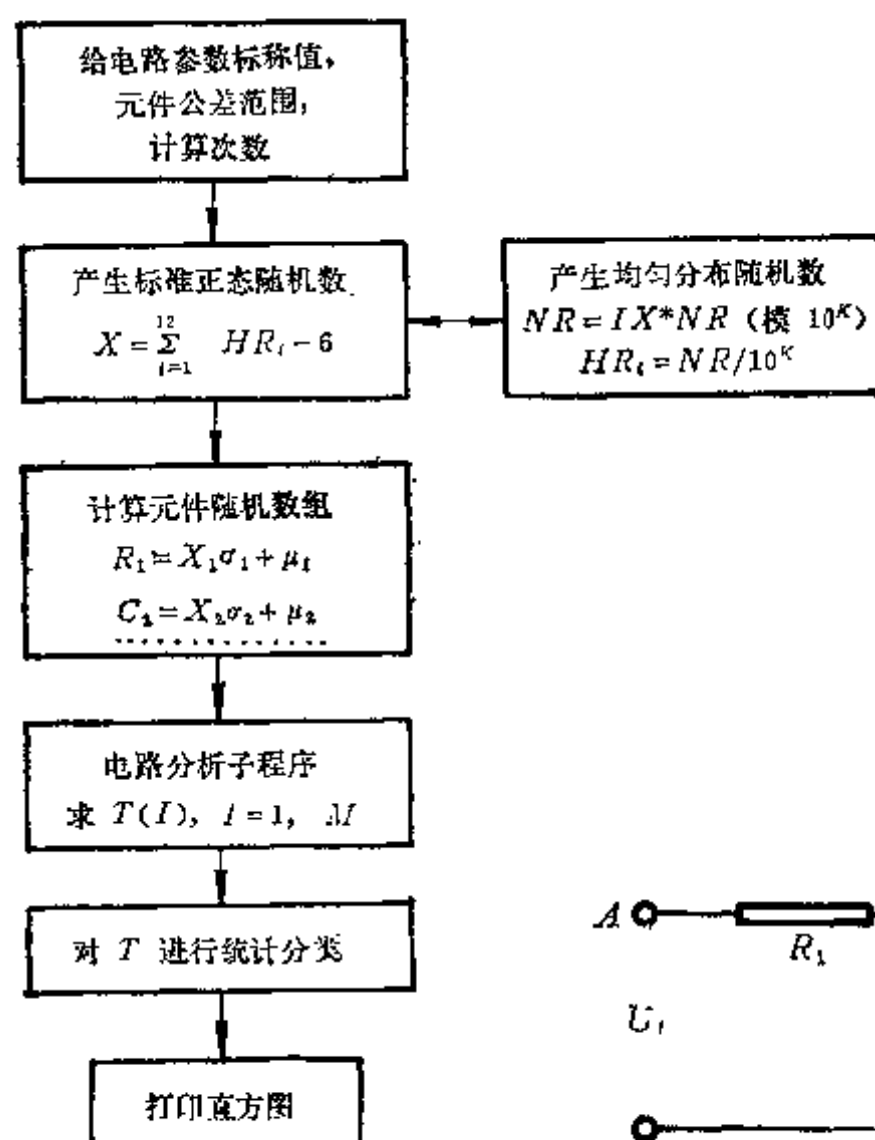


图3-23 蒙特-卡洛法计算公差

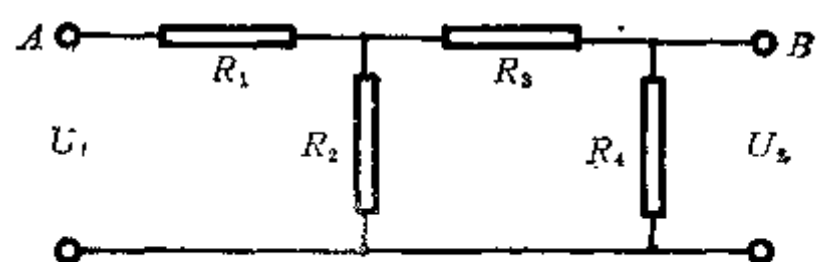


图3-24 步进分压器

随机数序列，最后对此序列进行统计分类，做统计直方图。该过程框图示于图3-23。

通常蒙特-卡洛法的运算量相当大，这是由于对元件值和电路特性的随机变化进行模拟时需要几百次电路分析，而且分析计算次数愈多，愈接近统计特性的真实情况。

现以步进分压器为例，说明蒙特-卡洛法分析公差的计算步骤。步进衰减器由电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 组成，见图3-24。电阻标称值为 $R_{10} = R_{20} = R_{30} = R_{40} = 50\Omega$ 。电阻值误差都是 $\pm 10\%$ 。图中A、B两端的分压系数是

$$T = \frac{R_2 R_4}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}$$

当4个电阻皆为标称值 50Ω 时，分压系数标称值是 $T_0 = 0.2$ 。

(1) 按极限误差法分析。电阻值最大偏差是 $\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = \pm 5\Omega$ 。当 R_1 和 R_3 处于负公差极限且 R_2 和 R_4 处于正公差极限时，分压系数为最大值，此时有 $R_1 = R_3 = 45\Omega$ ， $R_2 = R_4 = 55\Omega$ ， $T_{\max} = 0.2425$ 。分压系数公差是

$$\frac{T_{\max} - T_0}{T_0} = +21.24\%$$

当 R_1 和 R_3 处于正公差极限且 R_2 和 R_4 处于负公差极限时，分压系数为最小值，此时 $R_1 = R_3 = 55\Omega$ ， $R_2 = R_4 = 45\Omega$ ， $T_{\min} = 0.1623$ 。分压系数公差是

$$\frac{T_{\min} - T_0}{T_0} = -18.84\%$$

如果要求分压系数公差小于 $\pm 10\%$ ，必须降低电阻误差。

(2) 电阻误差是均匀分布随机数的情况。取分析次数为 $M = 200$ ，电阻元件总数为 $H = 4$ ，所需 $(0 \sim 1)$ 区间的均匀分布随机数 HNR 的总数是 $M \cdot H = 800$ 。电阻值的均匀分布随机数列是：

$$R_{1i} = R_{10} + 2(HNR_i - 0.5)\Delta R_{10}$$

$$R_{2i} = R_{20} + 2(HNR_k - 0.5)\Delta R_{20}$$

$$R_{3i} = R_{30} + 2(HNR_l - 0.5)\Delta R_{30}$$

$$R_{4i} = R_{40} + 2(HNR_m - 0.5)\Delta R_{40}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, 200$ ， $j = 1, 5, 9, \dots, 797$ ， $k = 2, 6, 10, \dots, 798$ ， $l = 3, 7, 11, \dots, 799$ ， $m = 4, 8, 12, \dots, 800$ 。

用计算机分析过程的数据是：

序号	R_1	R_2	R_3	R_4	T_i
1	52.774	48.591	49.956	47.895	0.1864
2	46.942	53.127	46.428	50.639	0.2204
3	47.031	47.504	48.580	46.743	0.1975
4	47.839	51.320	45.612	54.607	0.2261
5	46.167	48.176	54.724	48.631	0.1956
6	50.815	45.672	51.116	49.215	0.1870
7	52.583	45.408	47.988	52.759	0.1954
8	54.271	52.984	46.540	51.663	0.2042
.....					
200	49.327	53.496	48.364	46.911	0.2018

对分压系数按值进行分类,做出概率直方图,如图3-25所示。纵坐标是 T_i 出现的次数,横坐标是 T_i 分档间隔。如果分析次数 M 足够大,则概率分布直方图将接近图中的虚线曲线。由直方图可以看出, T_i 出现198次,概率已达99%,此时分压系数的范围是0.174—0.226,相应的公差为 $\pm 13\%$ 。而 T_i 在 $\pm 10\%$ 公差范围内的出现概率为91%。由此可见,尽管电阻值是均匀分布随机值,分压系数最不利的极限情况出现概率几乎为零,因此无需对电阻误差提出过苛的要求。

(3) 电阻误差是正态分布随机数的情况 分析次数仍取为 $M=200$,所需的标准正态随机数 GNR 为800个。电阻值的均方差近似取为 $\sigma_{R_1}=\Delta R_1/3$, $\sigma_{R_2}=\Delta R_2/3$, $\sigma_{R_3}=\Delta R_3/3$, $\sigma_{R_4}=\Delta R_4/3$ 。电阻的正态分布随机数列是

$$R_{1i}=R_{10}+GNR_i\sigma_{R_1}, \quad R_{2i}=R_{20}+GNR_i\sigma_{R_2},$$

$$R_{3i}=R_{30}+GNR_i\sigma_{R_3}, \quad R_{4i}=R_{40}+GNR_i\sigma_{R_4},$$

其中 $i=1,2,\dots,200$, $j=1,5,\dots,797$, $k=2,6,\dots,298$, $l=3,7,\dots,799$, $m=4,8,\dots,800$ 。

分析的部分数据如下:

序号	R_1	R_2	R_3	R_4	T_i
1	47.843	48.825	50.066	51.565	0.2070
2	49.449	48.882	53.737	48.523	0.1902
3	48.731	49.197	51.212	48.322	0.1957
4	50.857	49.770	48.945	48.378	0.1954
5	49.361	50.602	48.228	47.403	0.1989
6	51.999	47.818	50.350	50.558	0.1925
7	53.606	49.166	51.439	48.807	0.1855
8	47.724	49.481	48.914	51.188	0.2095
.....					
200	48.819	52.641	51.558	48.151	0.1998

正态分布电阻值情况下的分压系数直方图见图3-26。由概率直方图可看出, T_i 出现概率为99.5%的公差范围仅仅为 $\pm 9\%$,而电阻的最大误差仍为 $\pm 10\%$ 。这说明,从实际应用

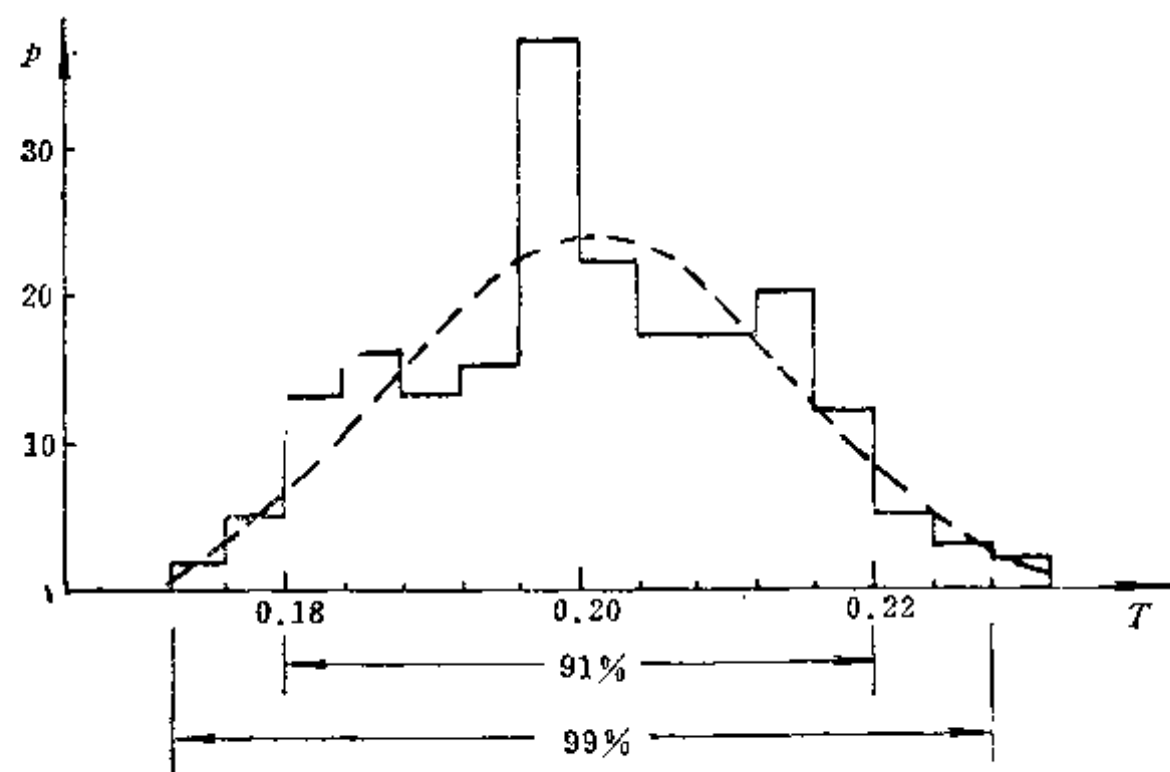


图3-25 均匀分布电阻值的分压器概率直方图

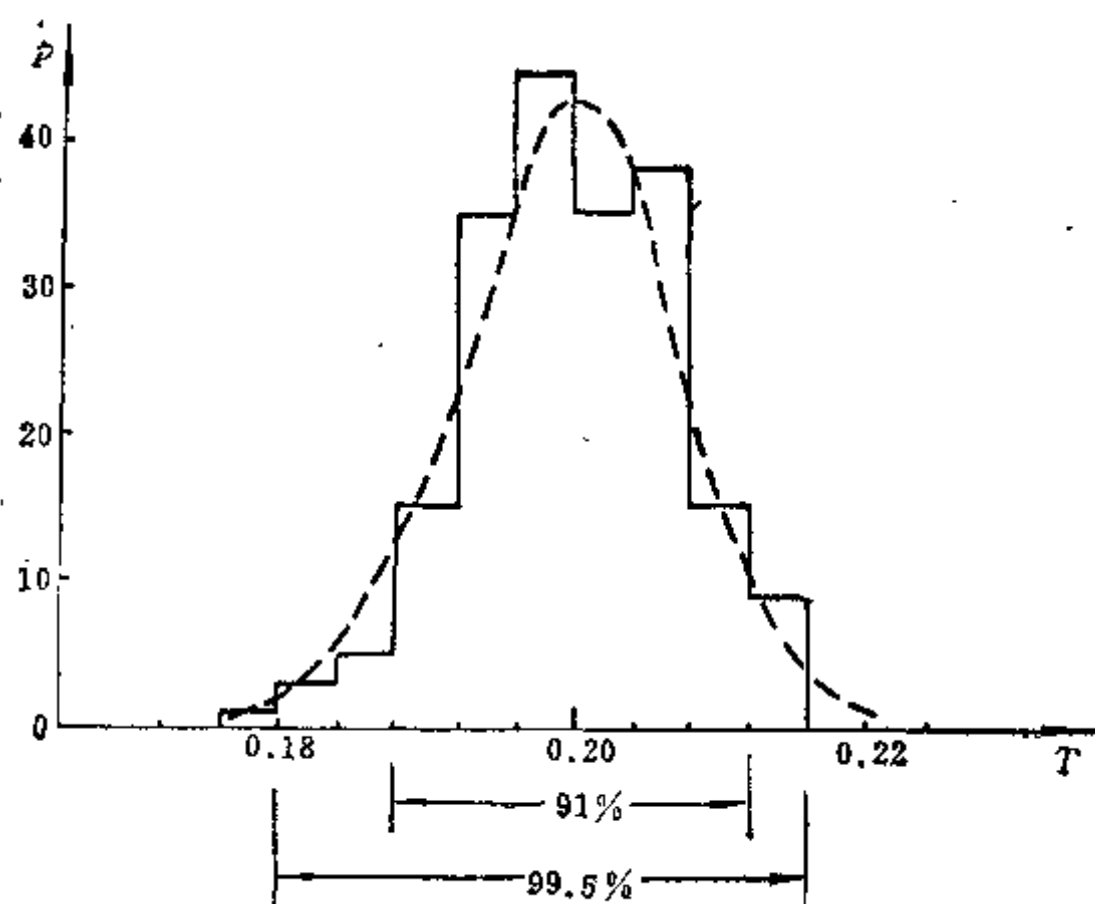


图3-26 正态分布电阻值的分压器概率直方图

来看，由于电阻误差有一定概率分布，最不利的极限情况几乎不存在。因此，用概率统计方法比极限误差法所得结果更符合实际。

步进分压器的蒙特-卡洛法公差分析程序

程序说明：

1. 电阻值为正态分布；
2. 程序10—15句是计算分压系数 T ；
3. 程序21—25句对分压系数进行统计分类；
4. 程序26—30句按分档范围打印 T 的分类数；
5. 主要变量。

GNR——标准正态随机数列；

HNR——(0, 1)区间的均匀随机数列；

T ——分压系数；

T_0 ——分压系数分档最低值；

DT——分压系数分档间隔；

A——分压系数各档起始值；

B——分压系数各档终止值。

```

1  MAINPROGRAM OF MONTE CARLO METHOD
2  DIMENSION GNR (800), R1 (200), R2 (200), R3 (200), R4 (200), T (200), IT (15),
   * A (15), B (15),
3  R10 = 50.0
4  R20 = 50.0
5  R30 = 50.0
6  R40 = 50.0
7  T0 = 0.172
8  DT = 0.004

```

```

9      CALL RNORL (GNR, 800)
10     DO 10 I=1,200
11       R1(I) = R10 * (1.0 + GNR(4 * I - 3)/30.0)
12       R2(I) = R20 * (1.0 + GNR(4 * I - 2)/30.0)
13       R3(I) = R30 * (1.0 + GNR(4 * I - 1)/30.0)
14       R4(I) = R40 * (1.0 + GNR(4 * I)/30.0)
15       T(I) = R2(I) * R4(I)/(R1(I) * (R2(I) + R3(I) + R4(I)) + R2(I) * (R3(I) + R4(I)))
16 10   CONTINUE
17     WRITE (6,12)
18 12   FORMAT (1X, 'THE TRANS. COEFFICIENTS IN NORMAL DISTRIBUTION' )
19     WRITE (6,15) (R1(I), R2(I), R3(I), R4(I), T(I), I=1,200)
20 15   FORMAT (2X, 3 (3X, 5F 7.3) )
21     DO 30 I=1,15
22 30   IT(I) = 0
23     DO 40 I=1,200
24       J = (T(I) - T0)/DT
25 40   IT(J) = IT(J) + 1
26     DO 50 I=1,15
27       A(I) = T0 + DT * I
28 50   B(I) = T0 + DT * (I + 1)
29     WRITE (6,55) (A(I), B(I), IT(I), I=1,15)
30 55   FORMAT (1X, 5(5X, 2F 7.3, 15),/)
31     STOP
32     END

```

```

33     RANDOM NUMBERS IN NORMAL DISTRIBUTION
34     SUBROUTINE RNORL (GNR, L)
35     DIMENSION GNR(L), SNR(20)
36     NRR=11111
37     DO 20 I=1, L
38       CALL RUNM (SNR, NRR)
39     SUM=0.0
40     DO 30 J=1,20
41 30   SUM=SUM+SNR(J)
42     NRR=IFIX (SNR(20) * 100000.0)
43     GNR(I) = (SUM - 10.0)/1.291
44 20   CONTINUE
45     RETURN
46     END

```

```

47     RANDOM NUMBERS IN UNIFORM DISTRIBUTION
48     SUBROUTINE RUNM (HNR, NRR)
49     DIMENSION HNR (20)
50     IF (NRR * EQ * 0) NRR=11111

```

```

51 DO 10 K=1,20
52 NRR=277*NRR
53 NRR=NRR-NRR/100000*100000
54 10 HNR(K)=FLOAT(NRR)/100000.0
55 RETURN
56 END

```

如果电路元件很多,则所需正态随机数组 GNR 将很大,此时可以利用循环语句,每调用一次RNORL子程序只产生 N 个(N 为元件数)随机数。这样就可能减少计算机内存量。

由上述分析可以看出蒙特-卡洛公差分析的重要意义。首先,在电路部件成批生产中用蒙特-卡洛法可以确定元件的合理公差,在保证产品质量的前提下降低对元件的要求;还能找出产品合格率与元件指标的最佳关系,从而降低生产成本。其次,蒙特-卡洛法可用来分析电路产品的寿命与可靠性。微波元器件的参数不仅随环境变化,而且随时间衰老,尤其是微波有源器件,其 S 参数的离散性通常都在百分之几或百分之十几以上。蒙特-卡洛法可以

根据元件参数变化范围及老化速度分析出部件或整机的可靠性和有效寿命;反过来也可以对元件提出合理的筛选规范。

蒙特-卡洛法运算量很大,因为每一组元件随机值就要进行一次电路分析,往往需要计算几百组随机值。为了减少运算量,可以采用子电路法。其原理很简单,就是把有随机变量的部分电路作为子电路分离出来,而其余电路当作常量考虑。见示意图3-27。

在用节点法时,可把没有随机变量的电路的内部节点消去,此时其导纳矩阵的阶数等于外端点数,比如,图3-27中子电路Ⅲ已成为不变的低阶导纳矩阵,因而简化了高阶矩阵运算。

在用双口矩阵法时,可把没有随机变量的若干相邻双口矩阵级联成一个双口矩阵。经过这样的简化,运算量可能有较大减少。

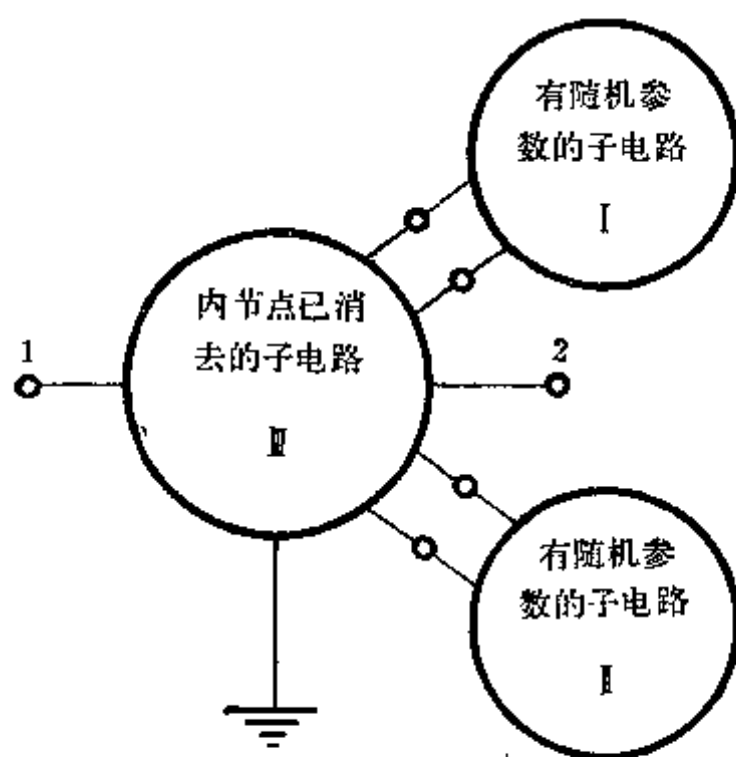


图3-27 子电路分离

参 考 文 献

1. B.И. 科兹洛夫, Г.А. 尤菲特著, 杨振起、杨逢春译, 微波部件的计算机辅助设计, 科学出版社, 1980。
2. 张惠廉、庄镇泉, 电子线路的计算机辅助设计(下), 人民教育出版社, 1980。
3. 李亚军(研究生)、李鉴树(指导教师), 微带滤波器最优化设计, 北京航空学院研究生论文, 1982。
4. D.A. Calahan, *Computer aided network design*, McGraw-Hill, 1972。
5. K.C. Gupta, R. Garg, R. Chadha, *Computer aided design of microwave circuits*, Artech House Inc. 1981。

第四章 微波电路通用程序设计

§ 4.1 通用程序的一般要求

微波电路部件的研制周期较长。据统计,为研制一个典型的微波电路产品,用于理论计算约占10—20%的时间,其余时间大多用于配置仪表、加工试验电路、调试性能、修改电路元件和结构、再复制试验和小批量试生产。有时由于仪器不完善或计算不精确,还要靠实验凑试来解决。而采用CAD技术之后,不仅理论计算可以快速解决,而且能用计算机对电路进行模拟分析,从而代替了大量繁琐的调试工作。CAD的最终目标是利用计算机自动设计,使新产品研制达到一次设计成功而能投产。

一个CAD程序的编制往往要费不少人力和时间,如果只为某一个电路编制专用程序有时不大经济,因此逐渐向通用程序发展。所谓通用程序就是具有多种功能、可适应多种不同的微波电路。至于多少功能才算是通用程序并没有一定标准。美国的大型微波通用程序SUPER-COMPACT包括FORTRAN语句多达五、六万条,能进行多种类型的微波电路设计,它是先后用了近十年时间不断改进扩充而成的。而小型通用程序仅有几百至几千条语句,功能只限于对某几种电路的分析设计。

对于通用程序主要有以下几个要求:

- 1.功能全——应包括网络综合、电路分析、最优化设计、敏感度及公差分析、寿命与可靠性分析、结构设计等。
- 2.适应面宽——能够对分布参数电路、集总参数电路、各种结构的传输线、单口及多口微波网络、有源和无源各种结构电路进行分析。
- 3.效能高——运算速度要快,计算方法要考究,计算机语言结构要精练。
- 4.精度高——运算误差小,收敛性能好。应具有多种分析和优化方法相互配合,能适应各种复杂的目标函数。
- 5.使用方便——输入、输出格式要便于掌握和容易记忆。既能适用于微波理论研究也便于初学者使用。

对于不同的电路结构需要采用不同的分析方法。一般微波电路的拓扑结构大多是树形或链形,因此宜于采用双口传输矩阵,它的运算速度最快。如果电路含有多个节点,例如各种反馈电路,则最好采用待定导纳矩阵的节点分析法。在多端口微波网络的情况下,例如电路中包含有环形电桥、分功率器、定向耦合器等,则应该采用多口S矩阵法。

用上述三类方法编制的程序软件,其区别在于电路分析子程序不一样。较好的通用程序大都把这几种方法综合运用。

通用程序功能很多,为便于灵活调用,多采用人机对话方式,也就是由计算机在显示终端上提出问题或提示几种可行的设计方案,设计人用键盘回答和选择需要的运算功能。用人机对话方式不仅便于灵活调用程序的各种功能,而且对使用人给出提示,以便于记忆和使用。

§ 4.2 节点分析程序

节点分析法适用于多节点电路，既能用于分布参数电路，也能用于集总参数电路，所以是一种重要的分析方法。节点分析常用待定导纳矩阵做为电路分析的数学工具。第一章已经介绍了待定导纳矩阵的性质和建立待定导纳矩阵的规则。本节将着重介绍用计算机读入电路拓扑结构和自动建立待定导纳矩阵，从而得到电路的节点电压方程。

§ 4.2.1 电路拓扑及元件值的输入

节点法电路分析程序的内容包括：用计算机读入电路拓扑和元件数值，编写用待定导纳矩阵构成的电路方程，解电路方程，计算电路特性和输出运算结果，如图 4-1 所示。

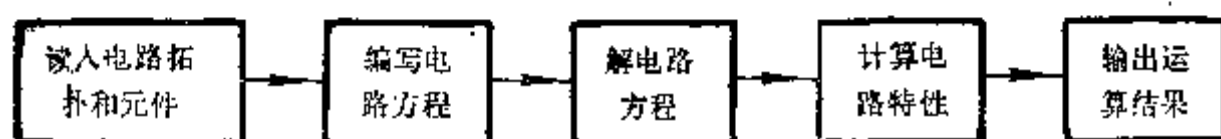


图 4-1 节点法电路分析框图

根据第一章公式 (1-25)、(1-26) 可知，一般电路的节点电压方程组具有如下形式

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{B} \quad (4-1)$$

式中
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{I}_s \\ \bar{V}_s \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{V}_n \\ \bar{I}_v \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

\bar{A} 是需要建立的导纳矩阵， \bar{B} 是需要建立的电源向量， \bar{x} 是待求电压和电流向量。电路拓扑、数据输入以及填写矩阵 \bar{A} 、 \bar{B} 的方法见程序框图 4-2 及下述说明。

1. 读入电路总体参数 首先要将全电路的总状况参数输入计算机。表征全电路总状况的参数有： $N1$ ——电路节点数， $N2$ ——元件总数， $N3$ ——独立电流源数， $N4$ ——独立电压源数， $N5$ ——电流控制电流源数， $N6$ ——电压控制电流源数， $N7$ ——双口网络数， $N8$ ——有一端接地的双口网络数。

为了便于说明程序设计方法，以下叙述将结合第一章图 1-5 的例子进行。对于图 1-5 的具体电路，总体参数是 $N1=5$ ， $N2=5$ ， $N3=1$ ， $N4=1$ ， $N5=N7=N8=0$ ， $N6=1$ 。

2. 读入无源元件导纳 为了把元件值按照电路拓扑正确填入导纳矩阵，必须先把元件位置和元件值存储在计算机中。元件位置可用元件的两个端点在电路中的节点号码表示，因此每个元件需要用 3 个特征参数（或称特征符）的一组数来说明，即用 n_i ， n_j ， y 来说明， n_i 是元件始节点号， n_j 是元件终节点号， y 是元件导纳值，见图 4-3 (a)。将全部元件的节点号码存入数组 $IY(N2, 2)$ ，元件导纳值存入数组 $Y(N2)$ 。比如，对于图 1-5 的电路来说，

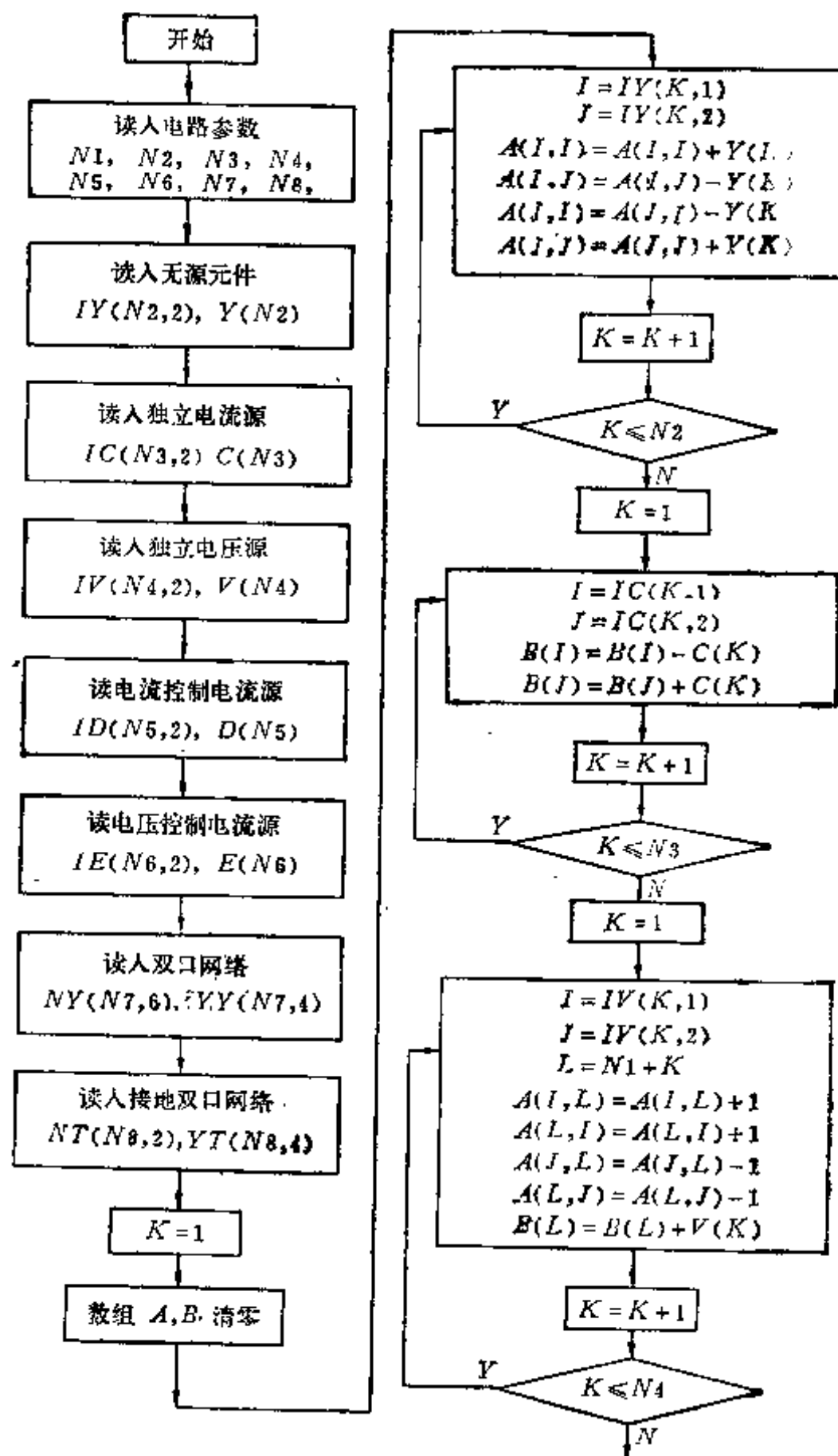


图 4-2 (a) 节点法程序框图

这两个数组是

$$IY(N2,2) = IY(5,2) = \begin{bmatrix} n_{i1} & n_{j1} \\ n_{i2} & n_{j2} \\ n_{i3} & n_{j3} \\ n_{i4} & n_{j4} \\ n_{i5} & n_{j5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Y(N2) = Y(5) = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5]$$

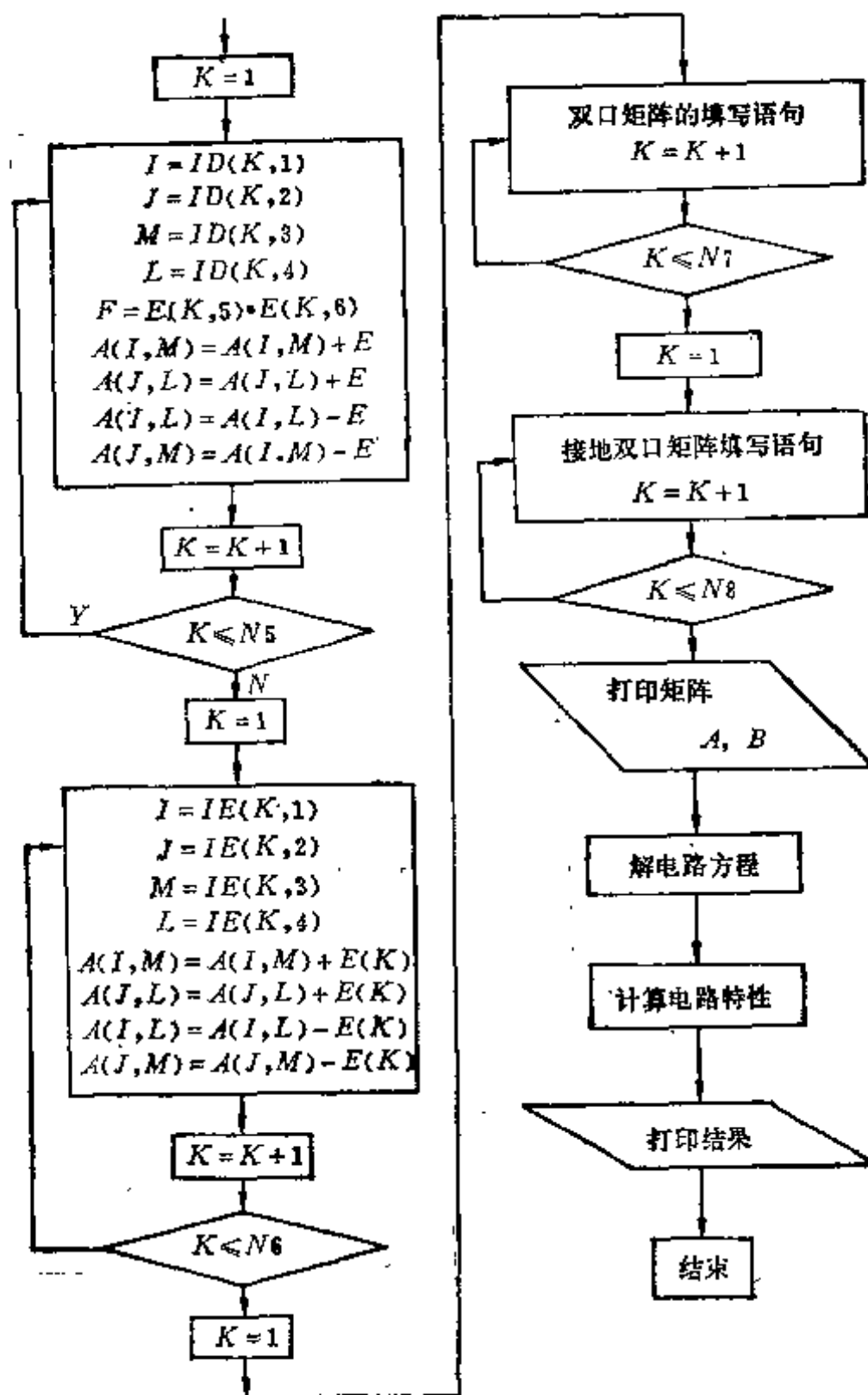
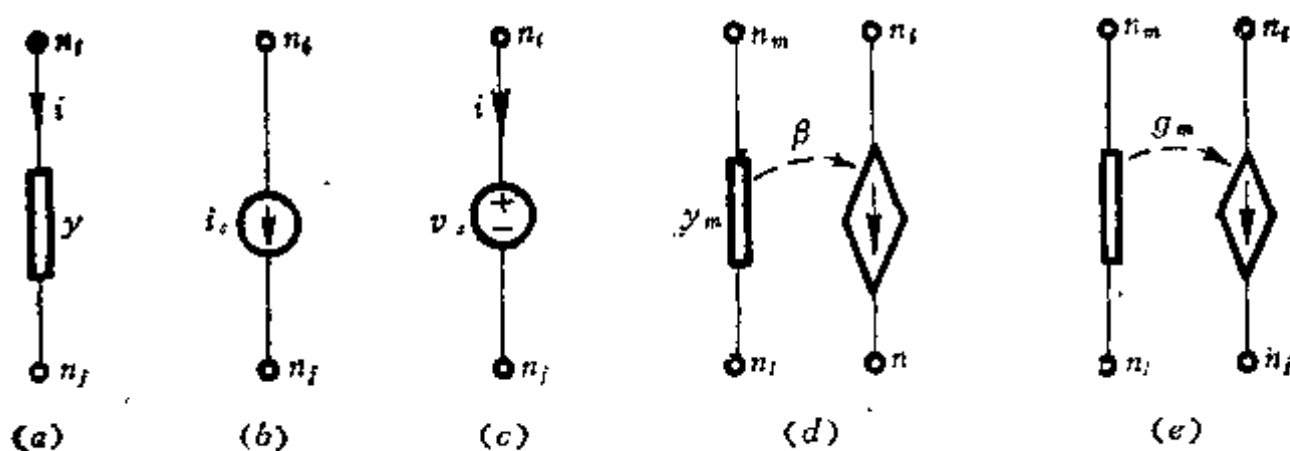


图 4-2 (b) 节点法程序框图



(a) 无源元件 (b) 电流源 (c) 电压源
(d) 电流控制电流源 (e) 电压控制电流源

图 4-3 各元件的符号含义

3. 读入独立电流源 电流源也用三个特征参数(即 n_i, n_j, i_s)表示。 n_i 和 n_j 分别是电流源始节点号和终节点号, i_s 是电流值, 见图 4-3(b)。各电流源的节点号存入数组 $IC(N3, 2)$,

电流值存入数组 $C(N3)$ 。比如图 1-5 中只有一个电流源, 电流源数组是

$$IC(N3, 2) = IC(1, 2) = [n_{i1} \ n_{j1}] = [1 \ 2]$$

$$C(N3) = C(1) = [i,]$$

4. 读入独立电压源 电压源的特征参数是 n_i, n_j, v_s , 见图 4-3 (c)。分别存入数组 $IV(N4, 2)$ 和 $V(N4)$ 。

5. 读入电流控制电流源 电流控制电流源需要用 6 个特征参数 (即 $n_i, n_j, n_m, n_l, \beta, y_m$) 表示, 见图 4-3 (d)。 n_i 和 n_j 是受控电流源的始节点和终节点号, n_m 和 n_l 分别是控制支路的始节点和终节点号。4 个节点号存入数组 $ID(N5, 4)$, 受控支路放大系数 β 和控制支路导纳 y_m 存入数组 $D(N5, 2)$ 。

6. 读入电压控制电流源 电压控制电流源需要 5 个特征参数 (即 n_i, n_j, n_m, n_l, g_m) 表示, 见图 4-3 (e)。4 个节点号存入数组 $IE(N6, 4)$, 互导 g_m 存入数组 $E(N6)$ 。

7. 读入双口网络 用双口网络表示的元件较多是有源器件, 往往用实验方法测得它的 S 参数, 再转换成 Y 参数。因而网络的已知参数是确定导纳矩阵的 4 个元素, 即 $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ 。其待定导纳矩阵参数可根据行、列元素之和为零的原理, 把确定导纳矩阵增加一行、一列来获得, 即待定导纳矩阵

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & -Y_{11} - Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} & -Y_{21} - Y_{22} \\ -Y_{11} - Y_{21} & -Y_{12} - Y_{22} & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

其运算过程是列程序而由计算机完成的。

双口网络的读入要用 10 个特征参数的一组数来表示, 其中 6 个是节点号, 存入数组 $NY(N7, 6)$, 4 个是确定导纳矩阵参数, 存入数组 $YY(N7, 4)$ 。此二数组的形式是

$$NY = \begin{pmatrix} n_{i1} & n_{j1} & n_{m1} & n_{a1} & n_{b1} & n_{c1} \\ n_{i2} & n_{j2} & n_{m2} & n_{a2} & n_{b2} & n_{c2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$YY = \begin{pmatrix} Y_{111} & Y_{121} & Y_{211} & Y_{221} \\ Y_{112} & Y_{122} & Y_{212} & Y_{222} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

n_i, n_j, n_m 是双口元件在电路中的节点号, 下标 1, 2, ... 表示第 1, 2, ... 个双口元件。 n_a, n_b, n_c 是连接于 n_i, n_j, n_m 的元件自身的端点号。见图 4-4 (a) 中的标注。

8. 读入接地的双口网络 在微波电路中常遇到双口元件有一端接地的情况, 比如微波三极管或其它微波元件。如果双口矩阵第③端接地, 第①、②两端分别接在电路中的 n_i, n_j 节点, 如图 4-4 (b) 所示, 则此时仅需 6 个特征参数即可表示双口元件。电路的两个节点号 n_i 和 n_j 存入数组 $NT(N8, 2)$, 双口矩阵的 4 个 Y 参数存入 $YT(N8, 4)$, $N8$ 是双口

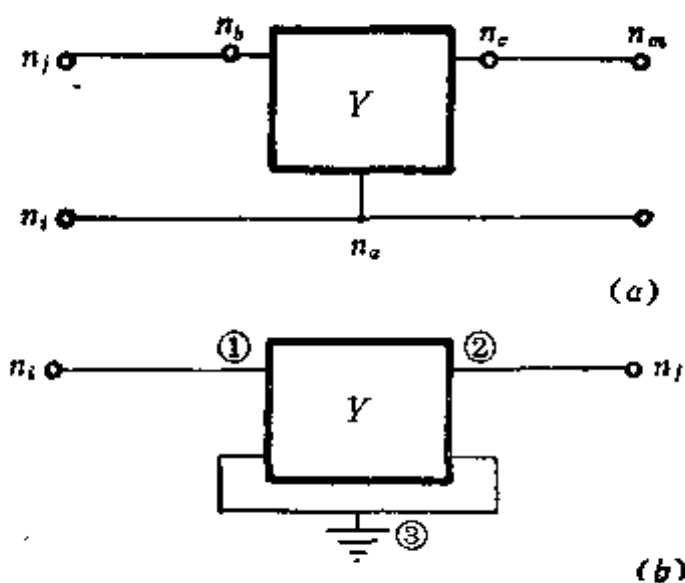


图 4-4 双口矩阵连接编号

矩阵数。这两个数组形式是

$$NT = \begin{bmatrix} n_{i1} & n_{j1} \\ n_{i2} & n_{j2} \\ n_{i3} & n_{j3} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$YT = \begin{bmatrix} Y_{11_1} & Y_{12_1} & Y_{21_1} & Y_{22_1} \\ Y_{11_2} & Y_{12_2} & Y_{21_2} & Y_{22_2} \\ Y_{11_3} & Y_{12_3} & Y_{21_3} & Y_{22_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

由于电路已有接地点，电路矩阵已是确定导纳矩阵，无需再加变换。

§ 4.2.2 待定导纳矩阵的建立

建立待定导纳矩阵就是把元件值填入矩阵 A 和矩阵 B 。根据第一章 § 1.1.3 和图 1-6 给出的矩阵填写规律，按数组 IY 、 IC 、 IV 、 ID 、 IE 、 NY 、 NT 中存储的元件联接关系顺次把各元件值填入 A 和 B 。图 4-2 的框图中给出了主要的程序语句。双口矩阵的程序语句较多，未写入框图，现给出如下：

```

I = NY(K,1)
J = NY(K,2)
M = NY(K,3)
I1 = NY(K,4)
J1 = NY(K,5)
M1 = NY(K,6)
Y0(K,1,1) = YY(K,1)
Y0(K,1,2) = YY(K,2)
Y0(K,1,3) = -YY(K,1) - Y(K,2)
Y0(K,2,1) = YY(K,3)
Y0(K,2,2) = YY(K,4)
Y0(K,2,3) = -YY(K,3) - YY(K,4)
Y0(K,3,1) = -YY(K,1) - YY(K,3)
Y0(K,3,2) = -YY(K,2) - YY(K,4)
Y0(K,3,3) = YY(K,1) + YY(K,2) + YY(K,3) + YY(K,4)
A(I,I) = A(I,I) + Y0(K,I1,I1)
A(I,J) = A(I,J) + Y0(K,I1,J1)
A(I,M) = A(I,M) + Y0(K,I1,M1)
A(J,I) = A(J,I) + Y0(K,J1,I1)
A(J,J) = A(J,J) + Y0(K,J1,J1)
A(J,M) = A(J,M) + Y0(K,J1,M1)
A(M,I) = A(M,I) + Y0(K,M1,I1)
A(M,J) = A(M,J) + Y0(K,M1,J1)
A(M,M) = A(M,M) + Y0(K,M1,M1)

```

接地双口网络填写矩阵的程序语句是

```

I = NT(K,1)
J = NT(K,2)
A(I,I) = A(I,I) + YT(K,1)
A(I,J) = A(I,J) + YT(K,2)
A(J,I) = A(J,I) + YT(K,3)
A(J,J) = A(J,J) + YT(K,4)

```

待定导纳矩阵建立之后就可以着手解电路方程。求解方法可用第一章给出的高斯消元法子程序, 此时待解的增广矩阵是 $[\bar{A} \ \bar{B}]$ 。

解方程以后即求得节点电压向量 V ., 再根据 V , 就可以算出支路电流, 从而可得出电路的传输增益、损耗、输入阻抗和输出阻抗等电路特性参数。

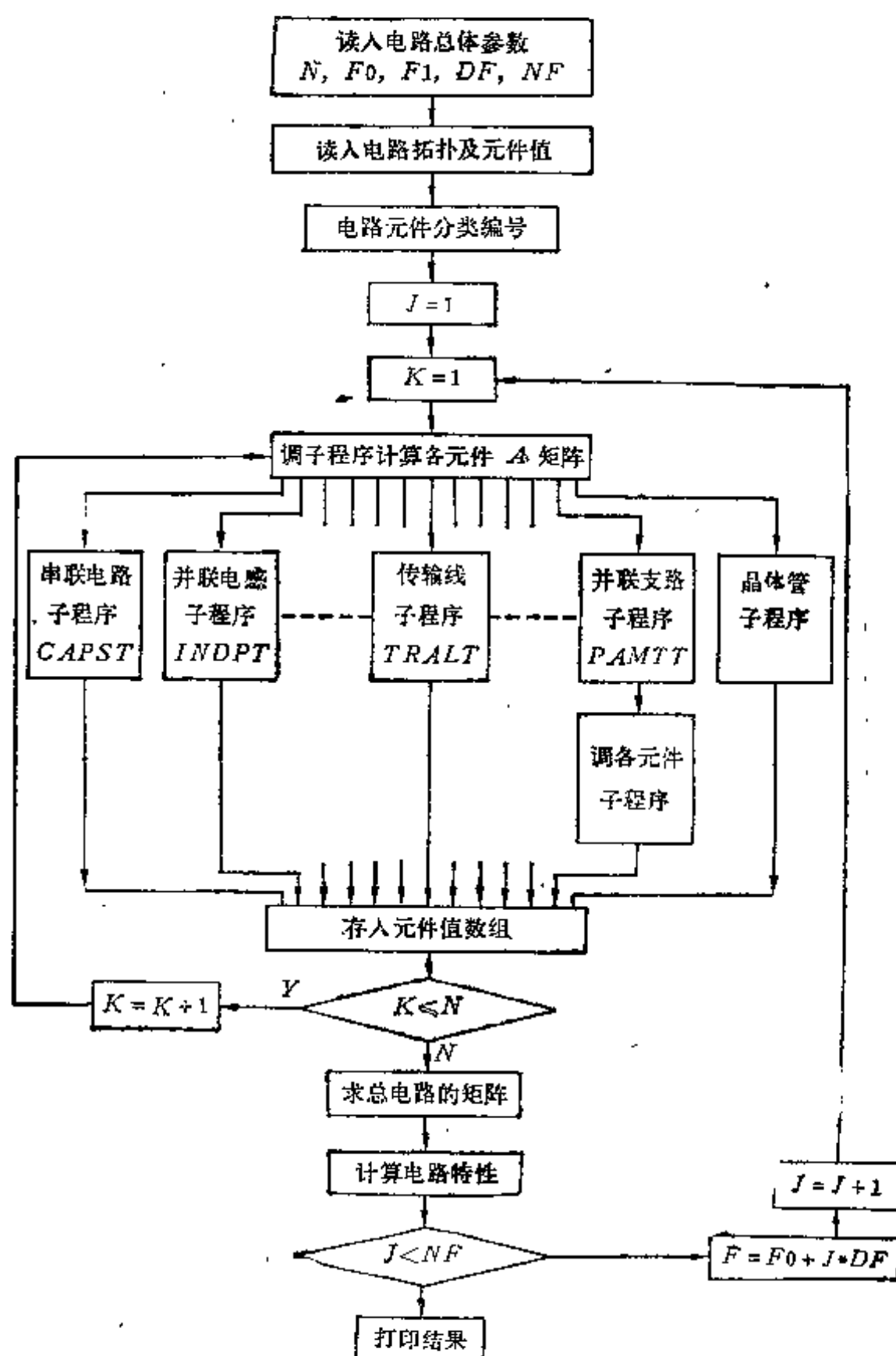


图 4-5 双口矩阵分析法简要框图

§ 4.3 双口矩阵分析程序

双口矩阵分析子程序主要包含图 4-5 所示的几个内容。以下按框图的次序分别叙述。

§ 4.3.1 电路拓扑及元件值输入

首先要把电路的总体参数和指标要求输入计算机。总体参数包括： N ——电路元件总数， F_0 ——中心频率(GHz)， F_1 ——初始频率(GHz)， DF ——频率间隔(GHz)， NF ——频率点数，以及其它有关参数。

通用程序常采用元件特征符和说明语句的方式。节点分析法中每个元件要用 3—10 个特征符表示其节点位置和元件性质。在双口矩阵分析法中也同样要用一串符号和数字分别表示元件在电路中的联接顺序、元件性质 (R 、 L 、 C 或分布参数传输线)、元件数值和其它参数。例如图 4-6 的电路可表示为

```
DIST, TRAL, A
1, 70.0, 48.0, 3.0, 0.01, 0.0
LUMP, CAPP
2, 12.5, 100.0, 0.1, 0.0, 0.0
```

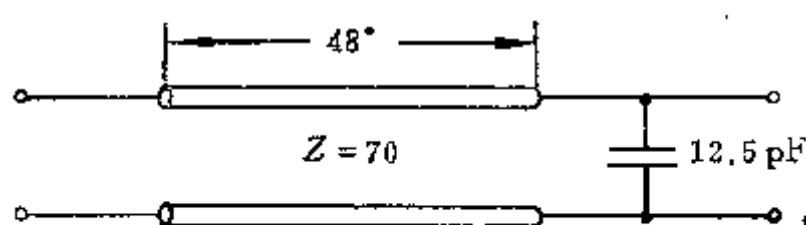


图 4-6 电路举例

第一行的 3 个特征符说明第一个元件的性质。
特征符是英文字的缩写：

DIST (*Distributed*) —— 分布参数元件
TRAL (*Transmission Line*) —— 传输线段
A —— 表示用电参数输入 (若用 B , 则表示用传输线的几何尺寸)

第二行的 6 个数代表此元件的参数值，即：

主线上的元件号	$ND = 1$
特性阻抗	$Z = 70\Omega$
传输线段电长度	$\theta = 48^\circ$
中心频率	$f_0 = 3\text{GHz}$
传输线衰减	$\alpha = 0.01 \text{ dB/波长}$

最后一个是备用参数，对于传输线段用 5 个参数已足够说明全部性质，所以第 6 个参数空着没有用，需置零。第 3、4 行代表第二个元件：

LUMP (*Lumped*) —— 集总参数元件
CAPP (*Capacitance parallel*) —— 电容并联在主线上

元件号	$ND = 2$
电容量	$C = 12.5\text{PF}$
品质因数	$Q = 100$
Q 值的测量频率	$f = 0.1 \text{ GHz}$

把电路拓扑中各元件的特征符汇编成表格，见表 4-1。表中所列为一部分常用元件。根据需要，可以自行增补其它元件。

用下述读入语句格式可把各元件的特征符分别存入 3 个数组，即 CODE(I), TYPE(I),

SIGN(I); 把元件参数值存入 5 个数组, 即 X1(I)—X5(I)。

DO 10 I=1,N

READ(5,6) CODE(I), TYPE(I), SIGN(I)

6 FORMAT (A4, 1X, A4, 1X, A1)

READ(5,*) NOB(I), X1(I), X2(I), X3(I), X4(I), X5(I)

10 CONTINUE

表4-1 集总参数元件符号


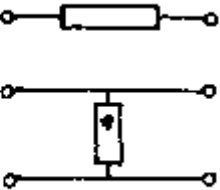
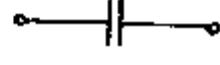
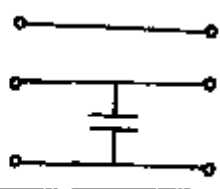

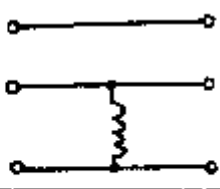

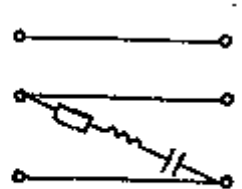

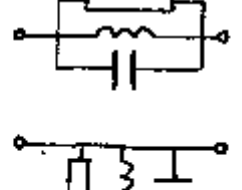
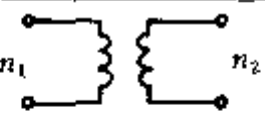

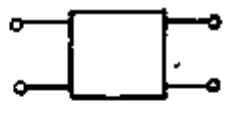

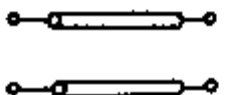
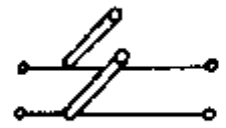



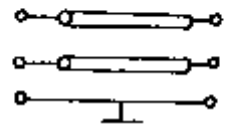

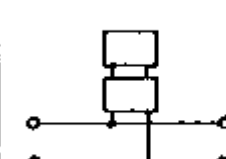
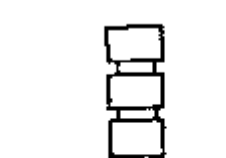
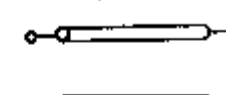
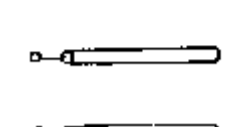
元件 类型	特征符		联接图及元件值 (举例)	输入参数				
	CODE(I)	TYPE(I)		X1(I)	X2(I)	X3(I)	X4(I)	X5(I)
电阻	LUMP	RESS		11.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		RESP						
电容	LUMP	CAPS		22.5	100.0	0.1	0.0	0.0
		CAPP						
电感	LUMP	INDS		25.0	40.0	0.05	0.0	0.0
		INDP						
谐振 电路	LUMP	SRXS		10.0	15.0	36.0	0.0	0.0
		SRXP						
		PRXS						
		PRXP						
变压器	LUMP	TRFN		2.5	0.0	0.0	0.0	0.0
		TRFZ		70.0	50.0	0.0	0.0	0.0
双口 网络	LUMP	TWOS		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		TWOY						

表4-2 分布参数元件符号

元件 类型	特 征 符			联接图及元件值 (举例)	输 入 参 数				
	CODE (I)	TYPE (I)	SIGN (I)		X1 (I)	X2 (I)	X3 (I)	X4 (I)	X5 (I)
传输 线段	DIST	TRAL	A	 $Z = 40\Omega \quad f = 2\text{GHz}$	40.0	45.0	2.0	0.01	0.0
			B	$W = 1.2\text{mm} \quad \epsilon_r = 9.9$ $h = 0.8\text{mm} \quad \gamma = 0.01\text{dB/波长}$ $\theta = 45^\circ \quad \alpha = 0.01/\text{波长}$ $l = 35\text{mm}$	1.2	35.0	9.9	0.8	0.01
开路线 并联	DIST	OSTP	A	 $Z = 30\Omega \quad f = 4.5\text{GHz}$	30.0	65.0	4.5	0.1	0.0
			B	$W = 2.4\text{mm} \quad \epsilon_r = 3.8$ $h = 1.0\text{mm} \quad \gamma = 0.01\text{dB/波长}$ $\theta = 65.5^\circ \quad \alpha = 0.1/\text{波长}$ $l = 28.6\text{mm}$	2.4	28.6	3.8	1.0	0.01
短路线 并联	DIST	SSTP	A	 参数同上	30.0	65.0	4.5	0.1	0.0
			B		2.4	28.6	3.8	1.0	0.01
开路线 串联	DIST	OSTS	A	 参数同上		同		上	
			B						
短路线 串联	DIST	SSTS	A	 参数同上		同		上	
			B						
耦合 线段	DIST	CUPL	A	 $Z_{0o} = 40\Omega \quad Z_{0e} = 85\Omega$	40.0	85.0	90.0	9.4	0.0
			B	$\theta = 90^\circ \quad f = 9.4\text{GHz}$ $W = 0.25\text{mm} \quad l = 2.8\text{mm}$ $S = 0.1\text{mm} \quad h = 0.6\text{mm}$ $\epsilon_r = 9.9$	0.25	2.8	9.9	0.6	0.1

续表4-2

元件 类型	特 征 符			联接图及元件值 (举例)	输 入 参 数				
	CODE(I)	TYPE(I)	SIGN(I)		X1(I)	X2(I)	X3(I)	X4(I)	X5(I)
扇形 短路器	DISI	FANL	B	 $r = 5.2\text{mm}$ $W = 0.1\text{mm}$ $\theta = 120^\circ$ $h = 0.6\text{mm}$ $\epsilon_r = 9.9$	5.2	0.1	120.0	0.6	9.9
并联 支路	DIST	PAMT		 支路由2 个元件级 联组成	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
串联 支路	DIST	SAMT		 支路由2 个元件级 联组成	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0
短路线	DIST	TRLS	A	 $Z = 60$ $f = 6\text{GHz}$ $W = 0.7$ $h = 0.8$	60.0	75.0	6.0	0.1	0.0
			B	$\theta = 75^\circ$ $\alpha = 0.1/\text{波长}$ $l = 4.6$ $\epsilon_r = 9.6$ $\gamma = 0.05\text{dB/波长}$	0.7	4.6	9.6	0.8	0.05
开路线	DIST	TRLO	A B	 参数同上		同		上	

§ 4.3.2 电路元件按类型编号

电路元件的类型是以特征符形式输入到计算机中的, 为了便于调用子程序, 需要把特征符变换为顺序号码。可用下述语句形式进行转换。

```
DO 30 I=1, N
  [N是已输入的元件总数]
  COD=CODE(I)
  TYP=TYPE(I)
  IF(COD.EQ.LUMP) GOTO 20
```

IF(COD.EQ.DIST) GOTO 25
 [以下为集总参数元件]
 20 IF(TYP.EQ.RESS) NTYP(I) = 1
 [串联电阻编号为1]
 IF(TYP.EQ.RESP) NTYP(I) = 2
 [并联电阻编号为2, 以下类同]
 IF(TYP.EQ.CAPS) NTYP(I) = 3
 IF(TYP.EQ.CAPP) NTYP(I) = 4
 IF(TYP.EQ.INDS) NTYP(I) = 5
 IF(TYP.EQ.INDP) NTYP(I) = 6

 IF(TYP.EQ.TWOS) NTYP(I) = 13
 IF(TYP.EQ.TWOY) NTYP(I) = 14
 GOTO 30
 [以下为分布参数元件]
 25 SIG = SIGN(I)
 IF(SIG.EQ.B) GOTO 28
 IF(TYP.EQ.TRAL) NTYP(I) = 51
 IF(TYP.EQ.OSTP) NTYP(I) = 52

 IF(TYP.EQ.PAMT) NTYP(I) = 57
 IF(TYP.EQ.SAMT) NTYP(I) = 58
 IF(TYP.EQ.TRLS) NTYP(I) = 59
 IF(TYP.EQ.TRLO) NTYP(I) = 60
 GOTO 30
 28 IF(TYP.FQ.TRAL) NTYP(I) = 71

 IF(TYP.EQ.TRLO) NTYP(I) = 79
 30 CONTINUE

§ 4.3.3 调子程序计算各元件的传输矩阵

表 4-1 和 4-2 中的各元件可按第一章所给的单元矩阵分别编成子程序, 存储于计算机中以便电路分析时调用。在运算过程中若采用梯度法最优化时, 还应该把单元矩阵元素的偏导数也编入子程序中。以下给出几个主要的单元元件的 T 矩阵参数子程序。

(一) 串联电容

见图 4-7(a)。传输矩阵参数为

$$T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2R\left(\frac{\omega_0 C}{Q} + j\omega C\right)} & \frac{-1}{2R\left(\frac{\omega_0 C}{Q} + j\omega C\right)} \\ \frac{1}{2R\left(\frac{\omega_0 C}{Q} + j\omega C\right)} & 1 - \frac{1}{2R\left(\frac{\omega_0 C}{Q} + j\omega C\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + AZ & -AZ \\ AZ & 1 - AZ \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

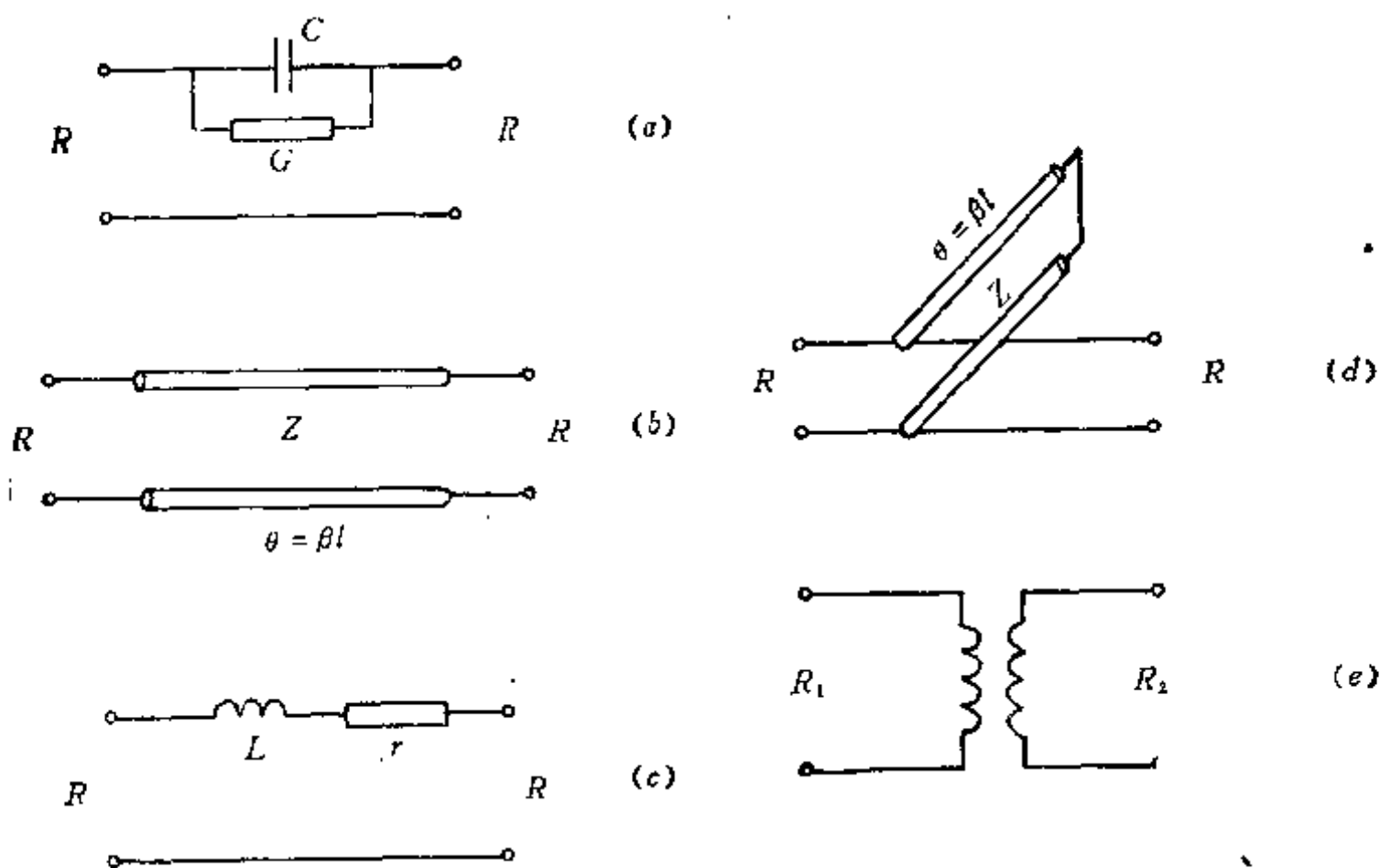


图 4-7 双口单元元件

式中 $Q = \frac{\omega_0 C}{G}$, ω_0 为测 Q 值时的频率, $AZ = \frac{BZ}{2R}$, R 为标准源阻抗 (50Ω),

$$BZ = \frac{1}{\frac{\omega_0 C}{Q} + j\omega C}.$$

对电容的偏导数

$$T_1 = \frac{\partial T}{\partial C} = \begin{pmatrix} -\frac{AZ}{C} & \frac{AZ}{C} \\ -\frac{AZ}{C} & \frac{AZ}{C} \end{pmatrix}. \quad (4-7)$$

对 Q 的偏导数

$$T_2 = \frac{\partial T}{\partial Q} = \begin{pmatrix} DZ & -DZ \\ DZ & -DZ \end{pmatrix} \quad (4-8)$$

$$DZ = \frac{(BZ)^2}{2R} \cdot \frac{\omega_0 C}{Q^2} \quad (4-9)$$

子程序语句如下:

```
SUBROUTINE CAPST(C,Q,F0,T,T1,T2,F)
COMPLEX T(2,2),T1(2,2),T2(2,2),AZ,BZ,DZ
R = 50.0
WN = 6.2832E-3 * F
[工作角频率  $\omega = 2\pi F$ ,  $F$  单位为 GHz,  $C$  单位为 pF]
FF = 6.2832E-3 * F0
```


[电容Q值的测量频率是 $\omega_0 = 2\pi F_0$]
 $BZ = 1.0 / \text{CMPLX}(FF * C / Q, WN * C)$
 $AZ = BZ * 0.5 / R$

[以下求T矩阵]
 $T(1,1) = 1.0 + AZ$
 $T(1,2) = -AZ$
 $T(2,1) = AZ$
 $T(2,2) = 1.0 - AZ$

[以下求 $\partial T / \partial C$]
 $T1(1,1) = -AZ / C$
 $T1(1,2) = -T1(1,1)$
 $T1(2,1) = T1(1,1)$
 $T1(2,2) = -T1(1,1)$

[以下求 $\partial T / \partial Q$]
 $DZ = BZ * BZ * FF * C / (2.0 * R * Q * Q)$
 $T2(1,1) = DZ$
 $T2(1,2) = -DZ$
 $T2(2,1) = DZ$
 $T2(2,2) = -DZ$
 RETURN
 END

(二) 传输线段

见图4-7 (b)。传输矩阵参数为

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta + j\frac{Z^2 + R^2}{2ZR}\sin\theta & -j\frac{Z^2 - R^2}{2ZR}\sin\theta \\ j\frac{Z^2 - R^2}{2ZR}\sin\theta & \cos\theta - j\frac{Z^2 + R^2}{2ZR}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CBL + jSBL & jSBL1 \\ jSBL1 & CBL - jSBL \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

对阻抗的偏导数

$$T1 = \frac{\partial T}{\partial Z} = \begin{bmatrix} j\frac{Z^2 - R^2}{2Z^2R}\sin\theta & -j\frac{Z^2 + R^2}{2Z^2R}\sin\theta \\ j\frac{Z^2 + R^2}{2Z^2R}\sin\theta & -j\frac{Z^2 - R^2}{2Z^2R}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jSBL2 & -jSBL3 \\ jSBL3 & -jSBL2 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

对长度的偏导数

$$T2 = \frac{\partial T}{\partial l} = \begin{bmatrix} -\beta\sin\theta + j\frac{Z^2 + R^2}{2ZR}\beta\cos\theta & -j\frac{Z^2 - R^2}{2ZR}\beta\cos\theta \\ j\frac{Z^2 - R^2}{2ZR}\beta\cos\theta & -\beta\sin\theta - j\frac{Z^2 + R^2}{2ZR}\beta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -BS + jBC & -jBZ \\ jBZ & -BZ - jBC \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

子程序语句

```

SUBROUTINE TRALT(Z,BL0,T,T1,T2,F)
COMPLEX T(2,2),T1(2,2),T2(2,2)
R = 50.0
BL = 3.1416 * BL0 / 180.0
SB = SIN(BL)
CBL = COS(BL)
SBL = (Z * Z + R * R) / (2.0 * Z * R) * SB
SBL1 = (Z * Z - R * R) / (2.0 * Z * R) * SB
T(1,1) = CMPLX(CBL,SBL)
T(1,2) = CMPLX(0.0, -SBL1)
T(2,1) = CMPLX(0.0,SBL1)
T(2,2) = CMPLX(CBL, -SBL)
SBL2 = SBL1/Z
SBL3 = SBL/Z
T1(1,1) = CMPLX(0.0,SBL2)
T1(1,2) = CMPLX(0.0, -SBL3)
T1(2,1) = CMPLX(0.0,SBL3)
T1(2,2) = CMPLX(0.0, -SBL2)
BETA = 6.2832 * F / 300.0
BS = BETA * SB
BC = (Z * Z + R * R) / (2.0 * Z * R) * BETA * CBL
BZ = (Z * Z - R * R) / (2.0 * Z * R) * BETA * CBL
T2(1,1) = CMPLX(-BS,BC)
T2(1,2) = CMPLX(0.0, -BZ)
T2(2,1) = CMPLX(0.0,BZ)
T2(2,2) = CMPLX(-BS, -BC)
RETURN
END

```

(三) 串联电感

见图 4-7 (c)。传输矩阵参数为

$$T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2R} \left(\frac{\omega_0 L}{Q} + j\omega L \right) & \frac{-1}{2R} \left(\frac{\omega_0 L}{Q} + j\omega L \right) \\ \frac{1}{2R} \left(\frac{\omega_0 L}{Q} + j\omega L \right) & 1 - \frac{1}{2R} \left(\frac{\omega_0 L}{Q} + j\omega L \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + AZ & -AZ \\ AZ & -AZ \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

$$\text{式中 } Q = \frac{\omega_0 L}{r} \quad (4-14)$$

$$AZ = \frac{1}{2R} \left(\frac{\omega_0 L}{Q} + j\omega L \right) \quad (4-15)$$

对电感的偏导数

$$T_1 = \frac{\partial T}{\partial L} = \begin{pmatrix} \frac{AZ}{L} & -\frac{AZ}{L} \\ \frac{AZ}{L} & -\frac{AZ}{L} \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

对Q的偏导数

$$T_2 = \frac{\partial T}{\partial Q} = \begin{pmatrix} -CZ & CZ \\ -CZ & CZ \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

$$CZ = \frac{\omega_0 L}{2RQ^2} \quad (4-18)$$

(四) 并联短路线

见图 4-7 (d)。终端短路线的输入导纳是

$$Y_{in} = \frac{-j}{Z \tan \theta} \quad (4-19)$$

导纳 Y_{in} 并联在主线上构成了单元矩阵。

传输矩阵参数

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{jR}{2Z \tan \theta} & -\frac{jR}{2Z \tan \theta} \\ \frac{jR}{2Z \tan \theta} & 1 + \frac{jR}{2Z \tan \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - jYA & -jYA \\ jYA & 1 + jYA \end{pmatrix} \quad (4-20)$$

式中 YA 是归一化导纳

$$YA = \frac{R}{2Z \tan \theta} \quad (4-21)$$

对特性阻抗的偏导数

$$T_1 = \frac{\partial T}{\partial Z} = \begin{pmatrix} j\frac{YA}{Z} & j\frac{YA}{Z} \\ -j\frac{YA}{Z} & -j\frac{YA}{Z} \end{pmatrix} \quad (4-22)$$

对线长的偏导数

$$T_2 = \frac{\partial T}{\partial l} = \begin{pmatrix} jYB & jYB \\ -jYB & -jYB \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

$$YB = -\frac{R\beta}{2Z \sin^2 \theta} \quad \left(\beta = \frac{\theta}{l} \right) \quad (4-24)$$

(五) 理想变压器

见图 4-7 (e)。理想变压器的输入端阻抗为 R_1 ，输出端阻抗为 R_2 时，变压器变比 $n = \sqrt{R_1/R_2}$ 。

传输矩阵参数

$$T = \begin{pmatrix} \frac{n^2 + 1}{2n} & \frac{n^2 - 1}{2n} \\ \frac{n^2 - 1}{2n} & \frac{n^2 + 1}{2n} \end{pmatrix} \quad (4-25)$$

对输入端阻抗的偏导数

$$T_1 = \frac{\partial T}{\partial R_1} = \frac{1}{4R_1} \begin{pmatrix} n - \frac{1}{n} & n + \frac{1}{n} \\ n + \frac{1}{n} & n - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (4-26)$$

对输出端阻抗的偏导数

$$T_2 = \frac{\partial T}{\partial R_2} = \frac{-1}{4R_2} \begin{pmatrix} n - \frac{1}{n} & n + \frac{1}{n} \\ n + \frac{1}{n} & n - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (4-27)$$

对于表 4-1 和 4-2 中的其它单元电路不难做出各单元矩阵及其偏导数矩阵，此处不再一一例举。

在读入了电路拓扑并编号之后，可用下述语句调用单元元件矩阵子程序，把各单元矩阵参数及其偏导数存入数组 AT (II, 2, 2), AT1 (II, 2, 2) 和 AT2 (II, 2, 2)：

```

      I = 1
      II = 1
120  NT = NTYP(I)
      IF (NT * GT * 50) GOTO 90
      GOTO (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) NT
1   CALL RESST(X1(I), T, T1, T2, F)
      GOTO 100
2   CALL RESPT(X1(I), T, T1, T2, F)
      GOTO 100
3   CALL CAPST(X1(I), X2(I), X3(I), T, T1, T2, F)
      GOTO 100
4   CALL CAPPT(X1(I), X2(I), X3(I), T, T1, T2, F)
      GOTO 100
      [以下为 5—14号元件的子程序调用语句，可自己编写]
      .....
90  IF (NT * GT * 70) GOTO 95
      NTT = NTYP(I) - 50
      GOTO (51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61) NTT
51  CALL TRALT(X1(I), X2(I), T, T1, T2, F)
      GOTO 100

```

[以下为 52—57号元件的子程序调用语句]

```

58 CALL PAMTT (X1(I),NOB(I),T,T1,T2,F)
   I=I+IFIX(X1(I))
   GOTO 100
59 CALL SAMTT(X1(I),NOB(I),T,T1,T2,F)
   I=I+IFIX(X1(I))
   GOTO 100
60 CALL TRLST (X1(I),X2(I),X3(I),X4(I),T,T1,T2,F)
   GOTO 100
61 CALL TRLOT(X1(I),X2(I),X3(I),X4(I),T,T1,T2,F)
   GOTO 100
95 NTB=NTYP(I)-70
   GOTO(71,72,73,74,75,76,77,78,79)NTB
71 CALL TRALTB(X1(I),X2(I),X3(I),X4(I),X5(I),T,T1,T2,F)
   GOTO 100
.....
79 CALL TRLOTB(X1(I),X2(I),X3(I),X4(I),X5(I),T,T1,T2,F)
   [把各元件的T矩阵参数及其偏导数存入三维数组]
100 DO 110 J=1,2
   DO 110 K=1,2
   AT(II,J,K)=T(J,K)
   AT1(II,J,K)=T1(J,K)
   AT2(II,J,K)=T2(J,K)
110 CONTINUE
   I=I+1
   II=II+1
   IF(I.LE.N) GOTO 120

```

在 $AT(II,J,K)$ 中存入的是电路全部元件的单元矩阵参数,在 $AT1(II,J,K)$ 中和 $AT2(II,J,K)$ 中存入了各元件矩阵参数的偏导数。下一步可把各单元矩阵连乘,求出总电路矩阵及电路二次特性参数(参见第一章§1.2的矩阵连乘子程序)。

至此已完成图4-5中的主要操作。如果把前述拓扑读入语句、元件编号语句、子程序调用语句、各单元矩阵子程序以及矩阵相乘程序联在一起,就构成了一个双口矩阵法的分析程序。当然这只是最简单程序的原理结构。应用时可适当加以充实完善。

在采用梯度法最优化时需要用到梯度,可利用第三章§3.1的方法求出电路特性对元件参数的导数,也可求出各元件的敏感度。

例 图4-8是宽频带FET放大器。要求工作频带为 $f=2-4\text{GHz}$,计算5个频率点。电

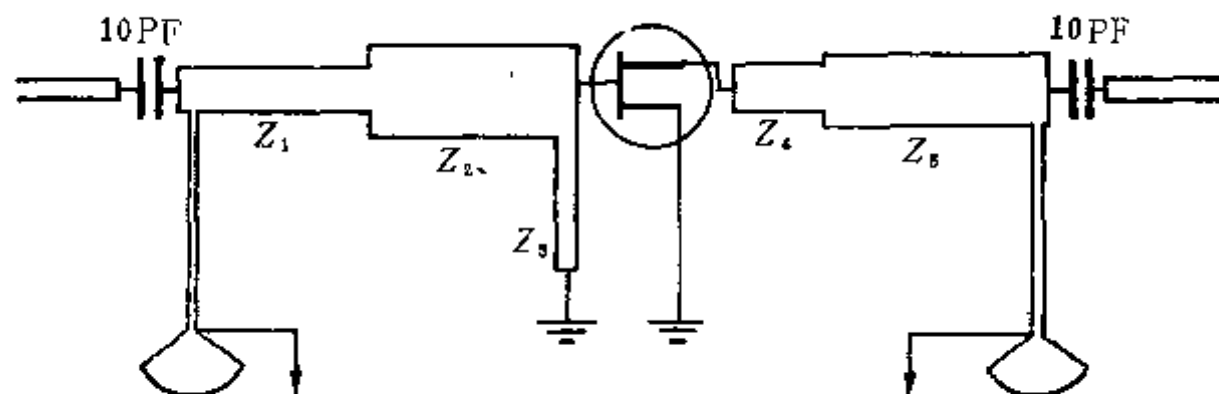


图4-8 放大器电路举例

路元件包括5段微带线段和1个晶体管。考虑偏压电路影响时还应计入两个扇形短路器、两段微带线（并联分支）和两个电容，总计14个元件。给定隔直电容为 $C = 10\text{pF}$, $Q = 100$, $F_0 = 0.1\text{GHz}$ ；偏压线为 $Z = 100\Omega$, $\theta = 90^\circ$ ；扇形短路器为 90° 张角。按上述程序语句规定可写出输入数据及特征符的清单如下：

```

14, 3.0, 2.0, 0.5, 5
LUMP, CAPS
1, 10., 100., 0.1, 0., 0.
DIST, PAMT, A
2, 2., 0., 0., 0., 0.
DIST, TRAL, A
3, 100., 90., 3., 0., 0.
DIST, FANL, B
4, r, W, 90., h,  $\epsilon_r$ 
DIST, TRAL, A
5,  $Z_1$ ,  $\theta_1$ , 3., 0., 0.
DIST, TRAL, A
6,  $Z_2$ ,  $\theta_2$ , 3., 0., 0.
DIST, SSTP, A
7,  $Z_3$ ,  $\theta_3$ , 3., 0., 0.
LUMP, TWOS
8, 0., 0., 0., 0., 0.
DIST, TRAL, A
9,  $Z_4$ ,  $\theta_4$ , 3., 0., 0.
DIST, TRAL, A
10,  $Z_5$ ,  $\theta_5$ , 3., 0., 0.
DIST, PAMT, A
11, 2., 0., 0., 0., 0.
DIST, TRAL, A
12, 100., 90., 3., 0., 0.
DIST, FANL, B
13, r, W, 90., h,  $\epsilon_r$ 
LUMP, CAPS
14, 10., 100., 0.1, 0., 0.

```

数据单中各元件初始值（比如 Z , θ , ...）由电路综合得来或凭经验赋值。其它已知的参数值（比如 h , ϵ_r , ...）按实际电路中的数值填入。

§ 4.4 多口电路 S 参数分析程序

微波多端口电路的计算机分析采用 S 参数法比较方便。在第一章 § 1.4 节已叙述了多口微波电路的 S 矩阵分析方法。其步骤是首先根据电路拓扑编出全电路（包括内联端口）的散射矩阵

$$\overline{s}_0 = \begin{pmatrix} \overline{s}_{aa} & \overline{s}_{ab} \\ \overline{s}_{ba} & \overline{s}_{bb} \end{pmatrix} \quad (4-28)$$

再根据各单元矩阵的互联关系编出关联矩阵 \overline{h} 。然后,用公式(1-123)把电路互联端口消除,得出电路的外口 S 参数矩阵

$$\overline{s}_x = \overline{s}_{aa} + \overline{s}_{ab} (\overline{h} - \overline{s}_{bb})^{-1} \overline{s}_{ba} \quad (4-29)$$

最后,根据 \overline{s}_x 计算出全电路的增益、损耗、驻波系数等二次参数。

下面介绍如何用计算机直接建立电路总矩阵 \overline{s}_0 和关联矩阵 \overline{h} 。

§ 4.4.1 多端口网络 S 矩阵的建立

图4-9是一个多端口电路,由4个单元网络 A 、 B 、 C 、 D 组成,其中 A 和 B 是三口网络, C 是二口网络, D 是一口网络。各单元网络的 S 参数是已知的,分别用 \overline{s}^A 、 \overline{s}^B 、 \overline{s}^C 、 \overline{s}^D 表示,例如

$$\overline{s}^A = \begin{pmatrix} s_{11}^A & s_{12}^A & s_{13}^A \\ s_{21}^A & s_{22}^A & s_{23}^A \\ s_{31}^A & s_{32}^A & s_{33}^A \end{pmatrix}$$

其余类推。

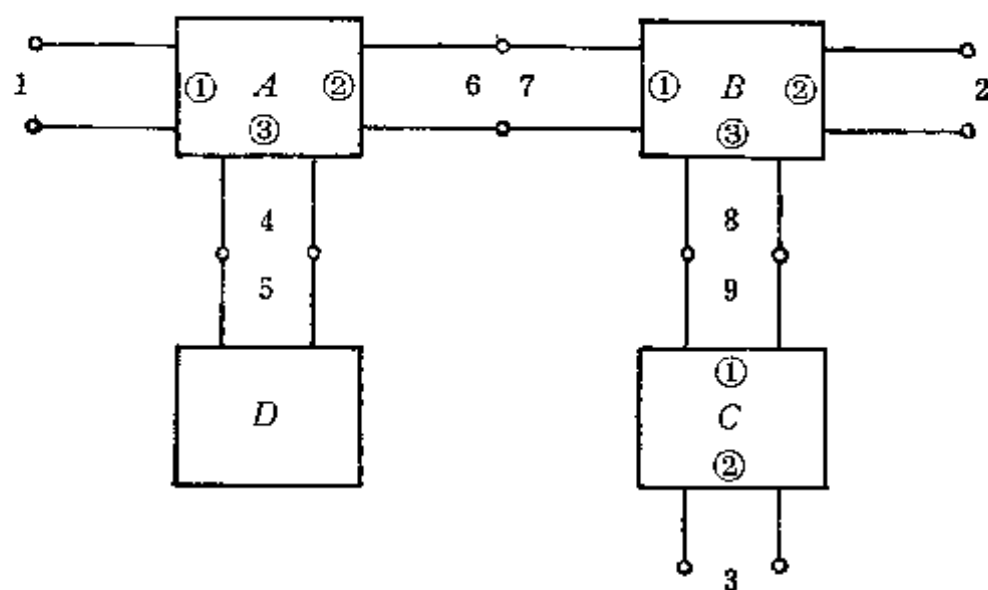


图4-9 多口 S 参数网络的组合电路

把电路的各端口编上号码。三个外端口分别用标号1、2、3表示,其余内部互联端口按顺序用标号4-9表示。图内方框中的①、②、③是单元网络自身的端口号。

全电路方程可写成

$$\begin{pmatrix} \overline{b}^A \\ \overline{b}^B \\ \overline{b}^C \\ \overline{b}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{s}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{s}^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{s}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{s}^D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}^A \\ \overline{a}^B \\ \overline{a}^C \\ \overline{a}^D \end{pmatrix} \quad (4-30)$$

即

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_6 \\ b_4 \\ \dots \\ b_7 \\ b_2 \\ b_8 \\ \dots \\ b_9 \\ b_3 \\ \dots \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^A & s_{12}^A & s_{13}^A & & & & \\ s_{21}^A & s_{22}^A & s_{23}^A & & 0 & & 0 \\ s_{31}^A & s_{32}^A & s_{33}^A & & & & 0 \\ \hline & & & s_{11}^B & s_{12}^B & s_{13}^B & \\ & 0 & & s_{21}^B & s_{22}^B & s_{23}^B & 0 \\ & & & s_{31}^B & s_{32}^B & s_{33}^B & \\ \hline & & & & & & s_{11}^C & s_{12}^C \\ & 0 & & & 0 & & s_{21}^C & s_{22}^C \\ & & & & & & & 0 \\ \hline & & & & & & & & s_{11}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_6 \\ a_4 \\ \dots \\ a_7 \\ a_2 \\ a_8 \\ \dots \\ a_9 \\ a_3 \\ \dots \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

按§1.3所述的方法对方程(4-31)进行行列交换,使外端口参数集中在左上角成为式(4-32)的形式

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^A & 0 & 0 & s_{13}^A & 0 & s_{12}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^B & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{21}^B & s_{23}^B & 0 \\ 0 & 0 & s_{22}^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{21}^C \\ \hline s_{31}^A & 0 & 0 & s_{33}^A & 0 & s_{32}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{11}^D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^A & 0 & 0 & s_{23}^A & 0 & s_{22}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{12}^B & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{11}^B & s_{13}^B & 0 \\ 0 & s_{32}^B & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{31}^B & s_{33}^B & 0 \\ 0 & 0 & s_{12}^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{11}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

把式(4-32)按虚线分块则成为

$$\begin{bmatrix} \overline{b}_a \\ \overline{b}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{s}_{aa} & \overline{s}_{a\beta} \\ \overline{s}_{\beta a} & \overline{s}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_a \\ \overline{a}_\beta \end{bmatrix} = [\overline{s}_0] \begin{bmatrix} \overline{a}_a \\ \overline{a}_\beta \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

式中, \overline{b}_a 和 \overline{a}_a 是外端口入射波和反射波向量; \overline{b}_β 和 \overline{a}_β 是内联端口的入射波和反射波向量。

根据图4-9和公式(4-32)可以归纳出多口S参数矩阵的填写规律如下:

单元元件是双口网络时,如果其端口①接到电路的*i*口,②口接到电路的*j*口,如图4-10(a)所示,则此双口网络S参数应按图4-10(b)的规律填入 \overline{s}_{ij} 。图4-10(b)中的*i*、*j*分别代表 \overline{s}_0 矩阵的行和列编号。同样道理,三口单元元件应按图4-11的规律填写;四口单元元件应按图4-12的规律填写。图中的*i*、*j*、*k*、*l*是电路的端口号,也是 \overline{s}_0 矩阵的行和列编号。

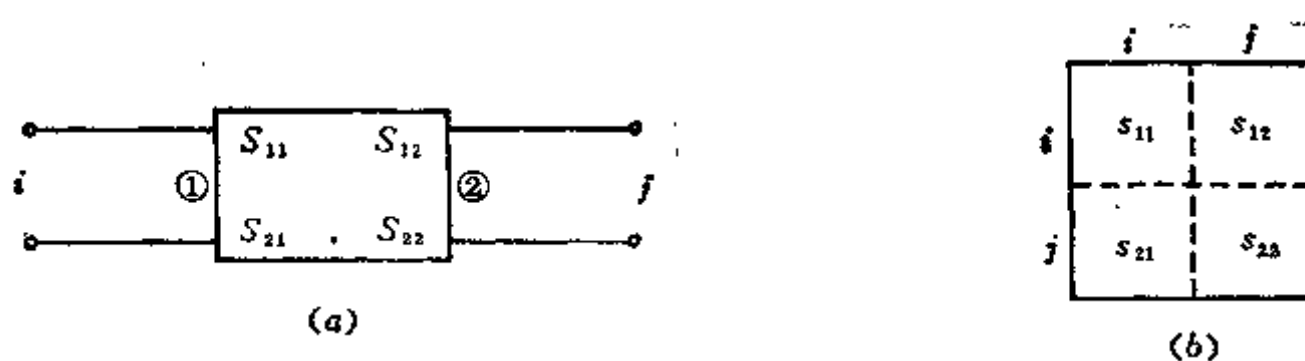


图 4-10 双口单元元件S参数填写规律

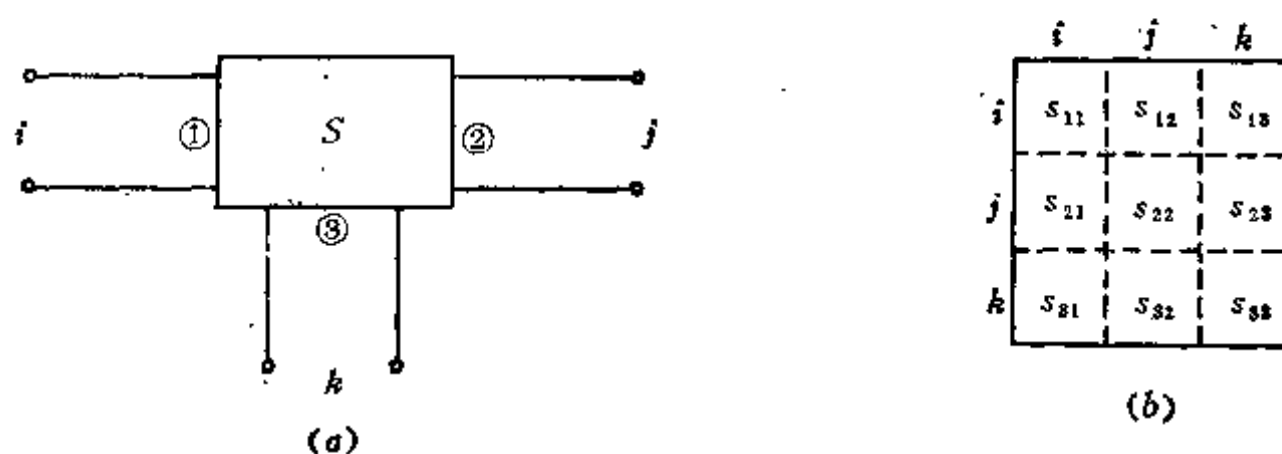


图 4-11 三口单元元件S参数填写

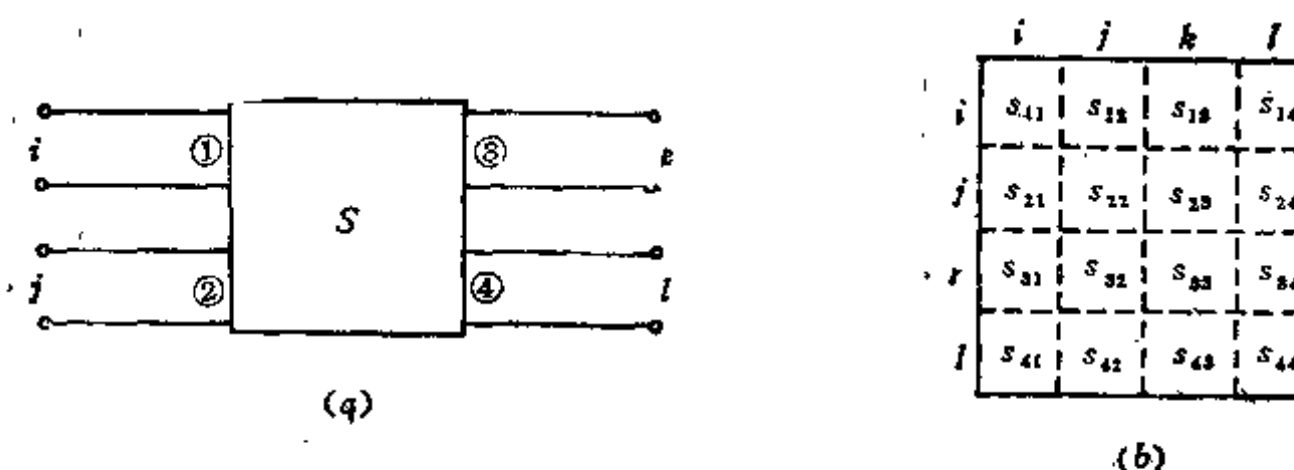


图 4-12 四口单元元件S参数填写

为了用计算机自动填写出全电路的散射矩阵 \bar{s}_0 ，需要先把每个单元元件在电路中的位置 and 它的参数存入计算机以便于进行网络组装。采用类似于待定导纳矩阵填写方式，把各单元元件在电路中的联接端口编号存入二维数组 $NP(M, 4)$ ，把各单元元件的 S 参数存入二维数组 $SP(4, 4)$ 。 M 是单元元件的总数。在微波电路中常见的单元元件通常不大于四口，所以在编写程序时，可以暂定单元元件的最多端口数就是四口。

为了输入数据格式一致，以便于处理，每个单元元件——不管是二口、三口还是四口——一律都用四个端口号表示。不足四口时，多余的数组元素位置可以空着。

单元元件的 S 参数一般是根据输入的元件类型和结构参数由子程序算出。

建立 \bar{s}_0 矩阵的局部程序框图见图 4-13。图 4-13 的第 5~6 框可参照 § 4.3.2 和 § 4.3.3 所叙述的方法编写程序，但此时编写的子程序是用于计算单元元件的 S 参数。第 7 框是 \bar{s}_0 矩阵的建立，此矩阵在框图和程序中用 $S0$ 表示。

```
DO 20 N=1, M
  I=NP(N,1)
```

$J = NP(N, 2)$
 $K = NP(N, 3)$
 $L = NP(N, 4)$
 $S_0(I, I) = S_0(I, I) + SP(1, 1)$
 [S0已先清零]
 $S_0(I, J) = S_0(I, J) + SP(1, 2)$
 $S_0(I, K) = S_0(I, K) + SP(1, 3)$
 $S_0(I, L) = S_0(I, L) + SP(1, 4)$
 $S_0(J, I) = S_0(J, I) + SP(2, 1)$
 $S_0(J, J) = S_0(J, J) + SP(2, 2)$
 $S_0(J, K) = S_0(J, K) + SP(2, 3)$
 $S_0(J, L) = S_0(J, L) + SP(2, 4)$
 $S_0(K, I) = S_0(K, I) + SP(3, 1)$
 $S_0(K, J) = S_0(K, J) + SP(3, 2)$
 $S_0(K, K) = S_0(K, K) + SP(3, 3)$
 $S_0(K, L) = S_0(K, L) + SP(3, 4)$
 $S_0(L, I) = S_0(L, I) + SP(4, 1)$
 $S_0(L, J) = S_0(L, J) + SP(4, 2)$
 $S_0(L, K) = S_0(L, K) + SP(4, 3)$
 $S_0(L, L) = S_0(L, L) + SP(4, 4)$

20 CONTINUE

以图 4-9 为例, 4 个单元矩阵是

$$\overline{S}^A = \begin{pmatrix} s_{11}^A & s_{12}^A & s_{13}^A & 0 \\ s_{21}^A & s_{22}^A & s_{23}^A & 0 \\ s_{31}^A & s_{32}^A & s_{33}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{S}^C = \begin{pmatrix} s_{11}^C & s_{12}^C & 0 & 0 \\ s_{21}^C & s_{22}^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{S}^B = \begin{pmatrix} s_{11}^B & s_{12}^B & s_{13}^B & 0 \\ s_{21}^B & s_{22}^B & s_{23}^B & 0 \\ s_{31}^B & s_{32}^B & s_{33}^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{S}^D = \begin{pmatrix} s_{11}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

读入的数据单包括元件总数 M 及联接端口编号

4

1, 6, 4, 50

7, 2, 8, 50

9, 3, 50, 50

5, 50, 50, 50

在程序内, NP 数组形式为

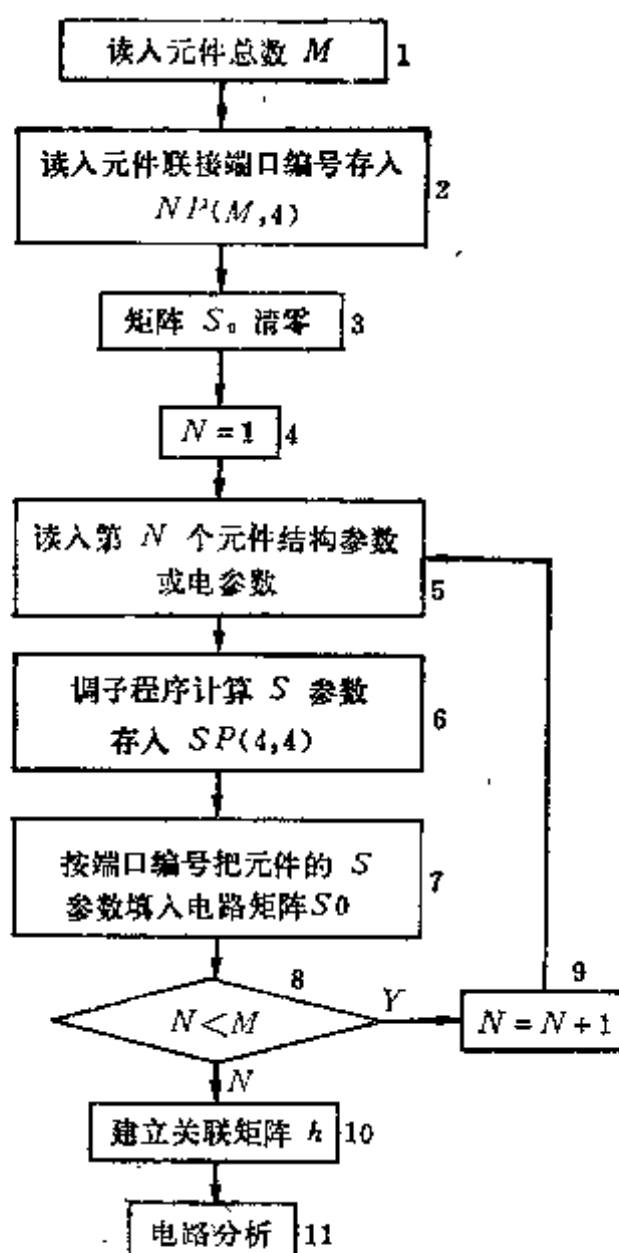


图 4-13 直接建立 \overline{S} 矩阵的框图

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 50 \\ 7 & 2 & 8 & 50 \\ 9 & 3 & 50 & 50 \\ 5 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$$

编号50表示已无此端口。

§ 4.4.2 关联矩阵的建立

为了解电路 S 参数方程(4-29), 还要建立关联矩阵 \bar{h} 。根据公式(1-117)所述原则, 可以把图4-9的内联端口的联接方程 $\bar{b} = \bar{h} \cdot \bar{a}$ 写成

$$\begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{pmatrix} \quad (4-34)$$

从上式知, 凡是相互联接的两个内口在 \bar{h} 矩阵中相应的元素为1, 其余无联接关系的各元素为零。

用计算机建立 \bar{h} 矩阵的步骤是先把两个互联端口的两个端口号编成一组存入NA(M)和NB(M), 再按互联口元素为1的原则填入 \bar{h} 矩阵。程序语句的形式为:

```

READ(5,*)M1,P
  [M1是互联端口的组数, P是外端口数, 在图4-9中M1=3, P=3]
READ(5,*)(NA(I),NB(I),I=1,M1)
DO 10 I=1,M1
  NC(NA(I))=NB(I)
10 NC(NB(I))=NA(I)
  M2=2*M1
  DO 20 I=1,M2
    DO 20 J=1,M2
20 H(I,J)=(0.,0.)
  [h矩阵清零。M2是互联端口总个数]
  P1=P+1
  M3=M2+P
  DO 30 K=P1,M3
    I=K-P
    J=NC(K)-P
    H(I,J)=(1.0,0.0)
30 CONTINUE

```

例如对于图4-9, 输入数据是

3,3

4,5,6,7,8,9

此时数组NA(I)和NB(I)是

$$NA(1)=4, \quad NA(2)=6, \quad NA(3)=8$$

$$NB(1)=5, \quad NB(2)=7, \quad NB(3)=9$$

建立了矩阵 \overline{s}_0 及矩阵 \overline{h} 以后,利用公式(4-29)就可以算出全电路矩阵 \overline{s}_x 以及二次特性参数了。

当电路由很多单元元件组成时,必然有很多内联端口,这时的总电路矩阵 \overline{s}_0 将是很大型的矩阵,其运算时间将很长。为了加快运算速度,最好把各元件逐个联接组合。例如,图4-14(a)的电路由4个元件组成,电路外口为2个,内联端口8个,全电路矩阵将是 10×10 矩阵。由公式(4-29)求解 \overline{s}_x 时,如果只考虑运算中的乘除法次数(加减法所需运算时间相对很短可以忽略),总运算次数是

$$N_0 = C\beta^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = 672$$

式中 β 是内联口数, α 是外口数, $C\beta^3$ 是矩阵 $(\overline{h} - \overline{s}_{\beta\beta})^{-1}$ 求逆运算次数(系数 C 取决于矩阵求逆方法,可假定 $C=1$), $\alpha\beta^2$ 是 $\overline{s}_{\alpha\beta}(\overline{h} - \overline{s}_{\beta\beta})^{-1}$ 的矩阵相乘运算次数, $\alpha^2\beta$ 是与 $\overline{s}_{\beta\alpha}$ 相乘的运算次数。对于图4-14(a), $\alpha=2$, $\beta=8$,总运算次数为672次。如果按图4-14(a)、(b)、(c)、(d)的顺序逐次计算,则总运算次数为

$$\begin{aligned} N &= (C\beta_1^3 + \alpha_1\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1) \\ &\quad + (C\beta_2^3 + \alpha_2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2) \\ &\quad + (C\beta_3^3 + \alpha_3\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_3) \\ &= 188 \end{aligned}$$

可见,逐次组合计算的运算次数少3倍多。如果单元矩阵数很多,则运算时间减少的比例将更大。

为了便于组合运算,可把上述程序语句编为子程序,顺次调用即可。

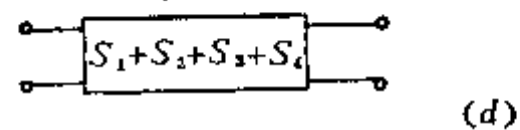
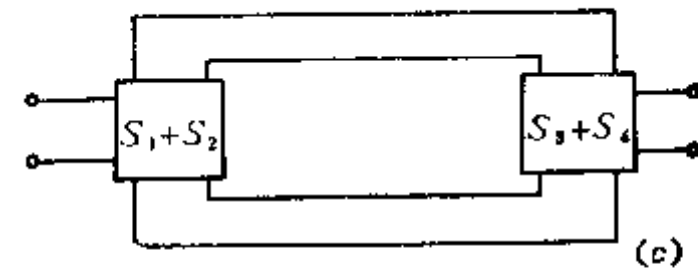
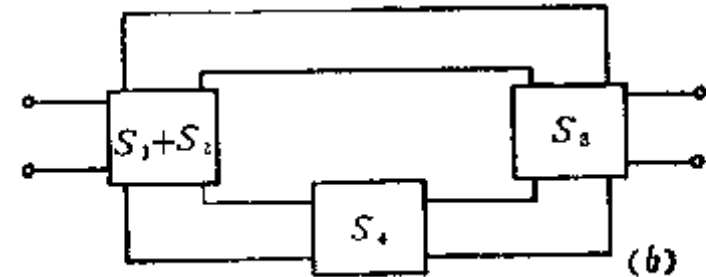
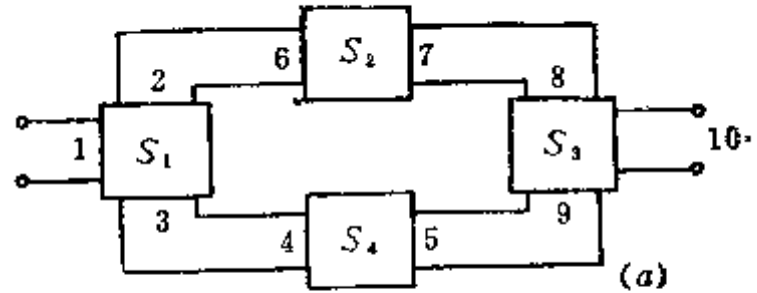


图4-14 多口S矩阵组合

§ 4.5 通用程序其它功能及调用

§ 4.5.1 全域最小值判断

在进行最优化设计时,由于微波电路目标函数往往为多解,不论采用梯度法还是直接法都难免只找到局部极小,而找不到全域最小。通常在优化设计之前要进行电路综合先找近似最小解,而对于无法综合的电路或者优化后仍不能满足要求的电路则可借助随机寻查法或扫描法来判断全域最小值的位置。

(一) 随机寻查

随机寻查是利用概率统计的一种最优化方法，其原理是取变量的随机值计算目标函数，然后把各随机目标函数值进行比较，找出最小值。计算过程类似于蒙特-卡洛分析，但是变量随机数的取值范围较大，应包含各变量可能存在的全域。为说明随机寻查过程，以下举一个简单的例子。

要求设计如图 4-15 所示的滤波网络。给定的指标是：通频带 $f = 950-1050$ MHz，通带反射损耗 $L_0 = 20$ dB，阻带反射损耗 $L = 0$ dB，信源及负载阻抗 $Z_g = Z_L = 50\Omega$ 。

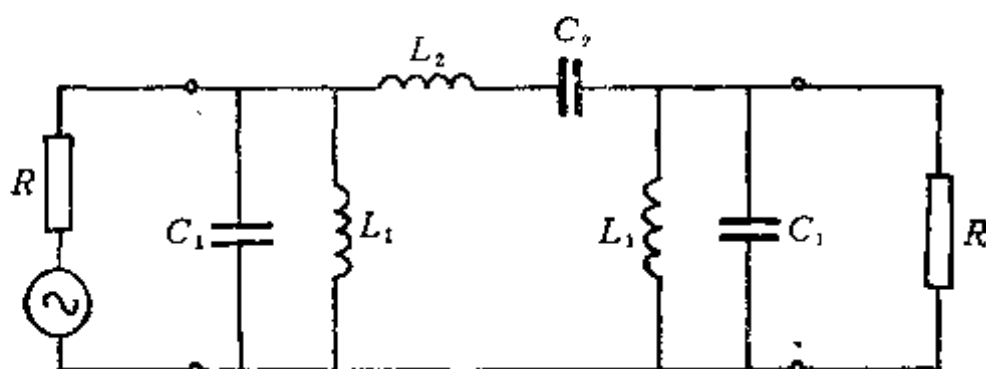


图 4-15 随机寻查法举例

由于滤波器对称，所以变量仅有 4 个，即 L_1 、 C_1 、 L_2 、 C_2 。

1. 给出变量取值范围及该范围的随机取值点：

$L_1 = 2-22$ mH，步长间隔 4 mH，共 6 个点；

$L_2 = 2-22$ mH，步长间隔 4 mH，共 6 个点；

$C_1 = 2-22$ pF，步长间隔 4 pF，共 6 个点；

$C_2 = 2-22$ pF，步长间隔 4 pF，共 6 个点。

2. 估算全部随机值可能的组合数： $N_0 = 6^4 = 1296$ 。各变量按均匀分布随机数法则取值。

3. 通常无需对全部随机组合变量进行计算，只要计算组合数的 1/2 至 1/3 即可判断目标函数全域最小的邻域。例如选用 1/3 组合时，即进行 $N = 432$ 次计算。

4. 按随机组合逐次计算目标函数并进行比较，每当目标函数有下降时就打印一次。计算结果是：

EF (目标函数值)	ITER No. (计算次数)	X_1 (L_1)	X_2 (C_1)	X_3 (L_2)	X_4 (C_2)
123.0199	1	2.0	10.0	10.0	18.0
61.9004	2	10.0	10.0	10.0	6.0
51.6681	7	18.0	2.0	10.0	22.0
30.0879	31	10.0	2.0	2.0	10.0
19.3904	39	2.0	14.0	10.0	14.0
6.4975	56	18.0	2.0	14.0	2.0
0.6385	111	6.0	6.0	10.0	10.0

表中最下面一组数就是全域最小值邻域 ($L_1 = 6$ mH, $C_1 = 6$ pF, $L_2 = 10$ mH,

$C_2 = 10\text{pF}$)。

5.用此组变量值做初值,按梯度优化法进行最优化设计,最后得到: $L_1 = 2.4067\text{mH}$, $C_1 = 13.2110\text{pF}$, $L_2 = 9.5307\text{mH}$, $C_2 = 15.777\text{pF}$, $EF = 0.006$ 。

随机寻查法虽然是较原始的优化方法,计算结果粗糙,耗费机时也多,但是由于它能对全域最小值提供信息,所以仍是一种有用的辅助优化方法。

(二) 扫描寻查

扫描寻查是把变量取值域内的各点顺次扫描递增,计算出全部取值组合。在二维扫描寻查时可以打印出全域目标函数的分布情况,以便于判断目标函数的分布结构。下面举一个简单例子。

有阻抗匹配器如图4-16所示。变量为 R_1 和 R_2 。显然,为了使信源(阻抗为 75Ω)和负载(阻抗为 50Ω)匹配,如果不考虑插入衰减,其解必为无限多。

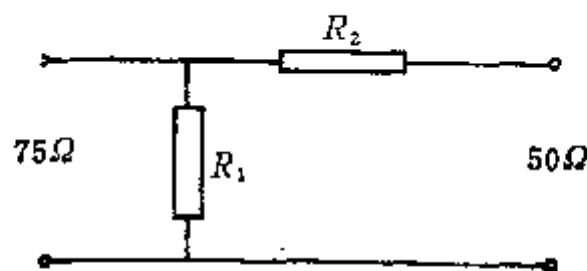


图 4-16 阻抗匹配器举例

1.给出假设的初值: $R_1 = R_2 = 200\Omega$ 。

2.在初值的上下进行扫描式的计算:取倍乘率为10, 2.5, 1.25, 1.0, 0.8, 0.4, 0.1, 则 R_1 和 R_2 的扫描顺序是2000, 500, 250, 200, 160, 80, 20 Ω 。

3.以匹配器的输入反射系数为目标函数,即 $EF = 10 \times |S_{11}|^2$ 。

4.打印目标函数的二维分布图如下:

EF R_1	R_2						
	2000.0	500.0	250.0	200.0	160.0	80.0	20.0
2000.0	7.43	4.95	3.06	2.45	1.88	0.67	0.03
500.0	4.70	3.08	1.84	1.44	1.07	0.25	0.10
250.0	2.46	1.54	0.84	0.63	0.43	0.04	0.25
200.0	1.74	1.05	0.53	0.38	0.24	0.01	0.33
160.0	1.08	0.61	0.27	0.17	0.09	0.00	0.45
80.0	0.00	0.01	0.07	0.11	0.16	0.42	1.12
20.0	3.39	3.49	3.60	3.65	3.70	3.90	4.31

由二维分布图可看出,全域最小有许多个,它们处在有横线所标数值的附近。当采用梯度优化寻查没有前进时,可以选几个灵敏度高的变量,顺次每两个变量为一组进行扫描,做出分布图以帮助判断全域最小的位置。扫描比例可以按情况决定。

§ 4.5.2 统计分析

微波电路通用程序应具有统计分析功能。通常微波晶体管 S 参数比较离散,精度大约百分之几,而且随时间老化和受环境影响而变化。因此电路成品率分析和寿命分析对于保证微波电路质量与可靠性是很重要的。统计分析应包括:

1.电路特性对各元件的敏感度。

2. 均匀分布和正态分布随机值的蒙特-卡洛分析。

3. 统计分布图。需要把全电路的 S 参数在史密斯图上打印出统计分布等值图（比如概率为99%、90%、70%、50%的等值圆）以便于直观判断。还应给出统计直方图或增益偏差图。

蒙特-卡洛分析占用机时量很大，通常仅在电路设计结束以后做为最终检查用。编制程序法已在第三章介绍过。

§ 4.5.3 数据库

当电路含有微波有源器件时，往往要把相当大量的 S 参数用键盘输入，很费人力。此外，很多介质材料和金属材料特性参数需要查阅手册图表，也很麻烦。这类数据最好都存储在计算机中，构成数据库。数据库的内容可包括：

1. 常用的微波晶体管主要性能（噪声、增益、功率、电压、电流）。在设计电路时供选型采用。

2. 各型号微波晶体管的 S 参数。以数据表或数学模型的形式存储。

3. 各种介质材料的介电常数、损耗、硬度、光洁度、厚度及外形尺寸。

4. 常用电路（比如宽频带放大器和匹配电路等）拓扑结构。

5. 各类微波传输线数学模型。

§ 4.5.4 通用程序使用的注意事项

微波电路设计的优劣和运算速度的快慢不仅取决于程序软件的质量，而且和使用程序的技巧有关。初始值设置不当或调用步骤不合理都可能浪费机时且得不到满意的结果。以下几点可供使用程序时的参考：

1. 避免一开始就用很多频率和很多变量。最好先分析敏感度，选择几个敏感度高的元件和3~5个频率点进行优化。把得到的初步结果做为初值，再增加频率点和变量数进行全电路优化。

2. 设计多级放大器时要逐步进行。比如先对级间电路优化求最大增益，然后再对输入、输出匹配电路优化求最小噪声和最佳匹配，最后再对全电路优化。

3. 对有源双口网络要先进行稳定性分析。在潜在不稳定情况时不要按输入、输出共轭匹配设计，可以适当加电阻负载或反馈来改善设计结果。

4. 需要对目标函数的形式和结构有清楚的了解，并选用恰当的权系数和收敛参数，使相互有矛盾的指标（如噪声与匹配）得到合理兼顾。

5. 当优化进展很慢又没满足预定指标时，可换用随机寻查法判断一下目标函数全域最小值的分布状况，以免盲目优化浪费机时。

6. 尽量选用最简单的目标函数。例如窄频带FET放大器处于绝对稳定时，可以把输入、输出反射系数的权系数取为零，只对增益优化。只要达到增益最高，输入与输出自然就达到了匹配。

7. 在电路中有开路或短路支节时，注意不要用 90° 做为支节线长的初始值。

8. 非必要时先不要对变量加约束，以免增加额外运算时间。

目前微波电路CAD技术已经相对成熟，进一步的发展将是CAD/CAM系统。CAM是计算机辅助制造（Computer-Aided Manufacture）的简称。计算机辅助电路设计的后工序将

是:结构设计——版图掩模设计及制造——电路加工及有源器件焊装——电路性能调测检验。完整的CAD/CAM系统应包括上述全过程,现在已能实现版图掩模的计算机设计和程控加工,而且已和电路CAD结合在一起。

版图和掩模的常规制造颇烦,例如微带混合集成电路的版图掩模制造就包括图形尺寸计算、画工艺结构图、放大底图、制版、照象缩版等工序。由于占用人力多、时间长,在国外被称为“瓶口”工序,因此,既有需要又有可能用计算机控制实现自动化。已经实现的机助掩模制造包括三部分内容:

1.工艺尺寸设计。把CAD算得的电路电参数模型用计算机算出微带电路的工艺尺寸,其中包括微带线不连续区的尺寸补偿、外接集总参数元件所需的缝隙以及光刻腐蚀所需的尺寸修正。

2.图形编辑。上述微带尺寸图还不是掩模图,还需要编插直流偏置电源引入线、微调用的微带“小岛”,以及工艺定位边框等。图形编辑方法是用程序软件在显示器屏幕上用光标图形进行的,以在规定的面积尺寸内进行图形的合理布局。编辑完成的图形自动以指令和坐标数据形式存储。

3.掩模加工。把工艺图的指令输入到程控制版机,自动完成掩模版的加工。

程控自动掩模加工是向CAD/CAM系统迈进的一大步。相信不久即可能实现完整的自动化设计与加工系统。

参 考 文 献

- 1.王蕴仪、苗敬峰、沈楚玉、陈顺生,微波器件与电路,江苏科学技术出版社,1981。
- 2.高葆新译,Les Besser著,80年代的计算机辅助设计,国外测量技术,1984年第1期,28~31页。
- 3.阿·弗拉吉米列斯科等编,田淑清译,SPICE通用电路模拟程序用户指南,清华大学出版社,1983。
- 4.K.C.Gupta et. al, Computer aided design of microwave circuits, Artech House Inc, 1981.
- 5.COMPACT user manual TYMSHARE Inc,1975.
- 6.COMPACT circuit analysis and optimization user manual,1979.
- 7.高葆新,微波电路计算机辅助设计发展概况,电子测量技术,1985年2月。