Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ciencias Químicas e Ingeniería

SISTEMAS DE CONTROL

Transformada de Laplace

Docente: I.E. Araiza Medrano Lizette

Alumno(s):

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto 02161509

Rodríguez Contreras Raul Arturo 01261510

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

Objetivo:

El alumno calculará la Transformada de Laplace utilizando las instrucciones de syms, ***laplace, pretty, simplify, heaviside, ezplot, etc.*** de Matlab y comprobará propiedades de la transformada de Laplace

Introducción:

Por su versatilidad y su uso extendido el paquete de software MATLAB se presenta como una herramienta potente para la resolución de problemas de ingeniería de control. En esta práctica se va a presentar diferentes tipos de órdenes y funciones de las que dispone MATLAB y que van a ser utilizadas frecuentemente en las diferentes metodologías y técnicas que se usan para abordar el control de sistemas físicos, así como para simular el comportamiento de éstos.

La transformada de Laplace, la transformada de Fourier y la transformada z son tres técnicas de transformación que proporcionan una conversión de variables. Todas ellas convierten modelos de ecuaciones diferenciales lineales a modelos algebraicos. La transforma de Laplace se usa para obtener una función de transferencia, que modeliza el comportamiento de un sistema continuo, mientras que la transformada z modeliza el comportamiento de sistemas discretos.

Es una herramienta matemática de gran alcance formulada para solucionar una variedad amplia de problemas del valor inicial. La estrategia es transformar las ecuaciones diferenciales difíciles en los problemas simples del álgebra donde las soluciones pueden ser obtenidas fácilmente.

La transformada de Laplace de una función f(t) definida para todos los números positivos t ≥ 0,

La Transformada de Laplace es una técnica Matemática que forma parte de ciertas transformadas integrales como la transformada de Fourier, la transformada de Hilbert, y la transformada de Mellin entre otras. Estas transformadas están definidas por medio de una integral impropia y cambian una función en una variable de entrada en otra función en otra variable. La transformada de Laplace puede ser usada para resolver Ecuaciones Diferenciales Lineales y Ecuaciones Integrales. Aunque se pueden resolver algún tipo de ED con coeficientes variables, en general se aplica a problemas con coeficientes constantes. Un requisito adicional es el conocimiento de las condiciones iniciales a la misma ED. Su mayor ventaja sale a relucir cuando la función en la variable independiente que aparece en la ED es una función seccionada.

Material:

- Lápiz y papel (en caso de hacer anotaciones o cálculos)
  Equipo de cómputo con software Matlab

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

Desarrollo:

1. **¿Qué comando se usa en Matlab para calcular la transformada de Laplace de una función expresada en el tiempo?** laplace(t), siempre y cuando la variable t sea una variable simbólica (creada a partir del comando "syms")

2. **¿Qué comando se utiliza para representar un escalón unitario en Matlab y cómo se usa?** heaviside(), se utiliza con una variable simbólica (syms), ej: syms t; heaviside(t)

3. **¿Qué comando se utiliza para representar un impulso unitario (delta dirac) en Matlab y cómo se usa?** dirac(), se utiliza con una variable simbólica (syms), ej: syms t; dirac(t)

I.- Calcule las transformadas de Laplace de las siguientes funciones usando el comando de las preguntas anteriores:

Tabla 1. Ejercicios para transformada de Laplace

Función	Código en Matlab	Resultado en Matlab
$f(t) = 4\delta(t)$	laplace(4*dirac(t))	4
$f(t) = 3U_5(t)$	laplace(3*heaviside(t-5))	$-\left(\frac{3e^{-5s}}{s}\right)$
$f(t) = 2\delta(t-5)$	laplace(2*dirac(t-5))	$2e^{-5s}$
$f(t) = 5t$	syms t laplace(5*t)	$\frac{5}{s^2}$
$f(t) = 4t * U_2(t)$	laplace (4*t*heaviside(t-2))	$\frac{8e^{-2s}}{s} + \frac{4 * e^{-2s}}{s^2}$
$f(t) = t^2 * e^{-5t}$	laplace((t^2)*exp(-5*t))	$\frac{2}{(s+5)^3}$
$f(t) = 4sin(t)$	laplace(4*sin(t))	$\frac{4}{s^2+1}$
$f(t) = (4t+5)^2$	laplace((4*t+5)^2)	$\frac{40 * \left(\frac{5s}{8}+1\right)}{s^2} + \frac{32}{s^3}$

$\boldsymbol{f(t) = 5t * e^{-2*t} + \sin(t+\pi)}$	laplace(5*t*exp(-2*t)+sin(t+pi))	$\frac{5}{(s+2)^2} - \frac{1}{s^2+1}$
$\boldsymbol{f(t) = e^{-3*t} * \sin(2t)}$	laplace(exp(-3*t)*sin(2*t))	$\frac{2}{(s+3)^2+4}$

Matlab utiliza comando para mejorar la apariencia de las expresiones y/o los resultados desplegados:

- **pretty(F)**
- **simplify(F)**
- **expand(F)**
- **factor(F)**
- **collect(F,s)   ya esta**

II. Investigar y escribir con la ayuda de Matlab como se usan las funciones anteriores, colocar sintaxis, descripción (en *español*), ejemplo y resultado del ejemplo.

Por ejemplo:

collect()

Este comando lo que hace es ordenar una expresión algebraica en función al grado del polinomio, es decir, comienza con el término libre, luego con los que tienen exponente menor, luego los que son elevados al cuadrado y así sucesivamente.

Sintaxis: Collect(s)

Collect(s,v)

Código:

```
close all
clear all
clc
syms x y
a=collect((x+y)*(x^2+6*y),y)
```

Resultado:

a = 6*y^2 + (x^2 + 6*x)*y + x^3

pretty():

Este comando lo que hace es imprimir X en un formato de texto plano que se asimila a matemáticas escritas

Sintaxis:

pretty(X)

Código:

A = sym(pascal(2))

B = eig(A)

Pretty(B)

Resultado:

```
A =
[ 1, 1]
[ 1, 2]
B =
3/2 - 5^(1/2)/2
5^(1/2)/2 + 3/2
/ 3   sqrt(5) \
| - - ------- |
| 2      2    |
|             |
| sqrt(5)   3 |
| ------- + - |
\    2      2 /
```

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

simplify*()*:

Este comando ejecuta una simplificación algebraica de una expresión

Sintaxis:

simplify(expr)

simplify(expr,Name,Value

Código:

```
syms x a b c
S = simplify(sin(x)^2+cos(x)^2
```

Resultado:

1

factor*()*:

Este comando regresa todos los factores irreducibles de x en un vector

Sintaxis:

F = factor(x)

F = factor(x,vars)

F = factor(___,Name,Value)

Código:

```
F = factor(823429252)
```

Resultado:

```
F =

    2    2    59    283    12329
```

expand():

Este comando expande expresiones y simplifica las entradas de las funciones usando identidades

Sintaxis:

Expand(S)

Expand(S,Name,Value)

Código:

```
syms x y

expand(cos(x + y))
```

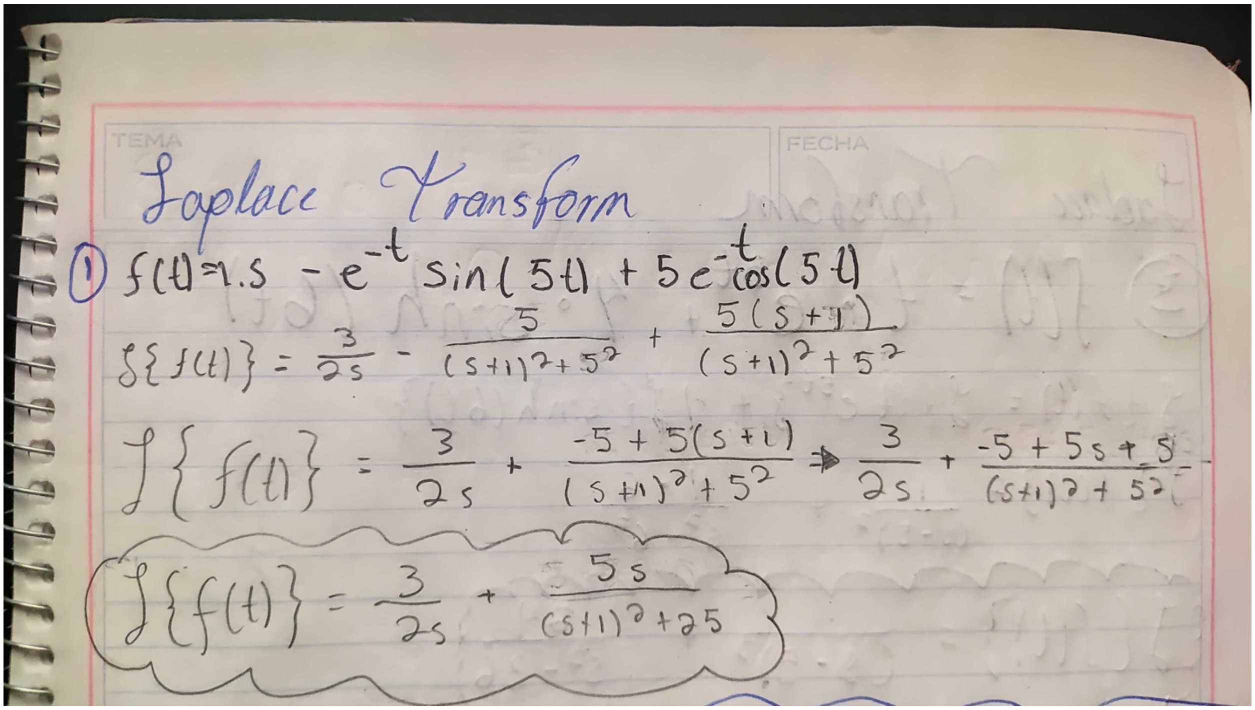
Resultado:

```
ans =

cos(x)*cos(y) − sin(x)*sin(y)
```

III.- Calcule la *transformada de Laplace* en Matlab de las siguientes expresiones, use además los comandos *simplify* y *pretty* para hacer más fácil la lectura del resultado.

Nota: Anexe capturas de pantalla del código usado, así como las capturas del resultado arrojado.

$$f(t) = 1.5e^{-t}sen(5t) + 5e^{-t}\cos(5t)$$




```
>> laplace((1.5*heaviside(t)-exp(-t)*sin(5*t)+5*exp(-t)*cos(5*t)))

ans =

(5*(s + 1))/((s + 1)^2 + 25) + 3/(2*s) - 5/((s + 1)^2 + 25)

>> pretty(ans)
  5 (s + 1)       3          5
------------- + --- - -------------
       2        2 s          2
(s + 1)  + 25           (s + 1)  + 25
```

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

$$f(t) = sen(t-2) + \cos{(t-2)}$$

(2) $f(t) = sen(t-2) + \cos(t-2)$

$sen(t-2) = sen(t)\cos(2) - \cos(t)\sin(2)$
$\cos(t-2) = \cos(t)\cos(2) + \sin(t)\sin(2)$ } Teorema de Ptolomeo

$sen(t-2) + \cos(t-2) = sen(t)(\cos(2) + \sin(2)) - \cos(t)(\sin(2) - \cos(2)$

$(sen(t) - \cos(t))(\cos(2) + \sin(2))$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = (\cos(2) + sen(2))(\mathcal{L}\{sen(t)\} - \mathcal{L}\{\cos(t)\})$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = (\cos(2) + sen(2))\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}\right)$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(\cos(2) + sen(2))(1-s)}{s^2+1}$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(\cos(2) + sen(2))s - \cos(2) + sen(2)}{s^2+1}$

```
>> laplace(sin(t-2)+cos(t-2))

ans =

(sin(2) + s*cos(2))/(s^2 + 1) + (cos(2) - s*sin(2))/(s^2 + 1)

>> simplify(ans); pretty(ans)
cos(2) + sin(2) + s cos(2) - s sin(2)
-------------------------------------
                 2
                s  + 1
```

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

$$f(t) = t * e^{5t} + 4 * \sinh(6t)$$

TEMA Laplace Transform FECHA

3 $f(t) = t \cdot e^{5t} + 4 \cdot \sinh(6t)$

$$\mathcal{L}\{f(t) = \mathcal{L}\{te^{5t}\} + 4\mathcal{L}\{\sinh(6t)\}$$

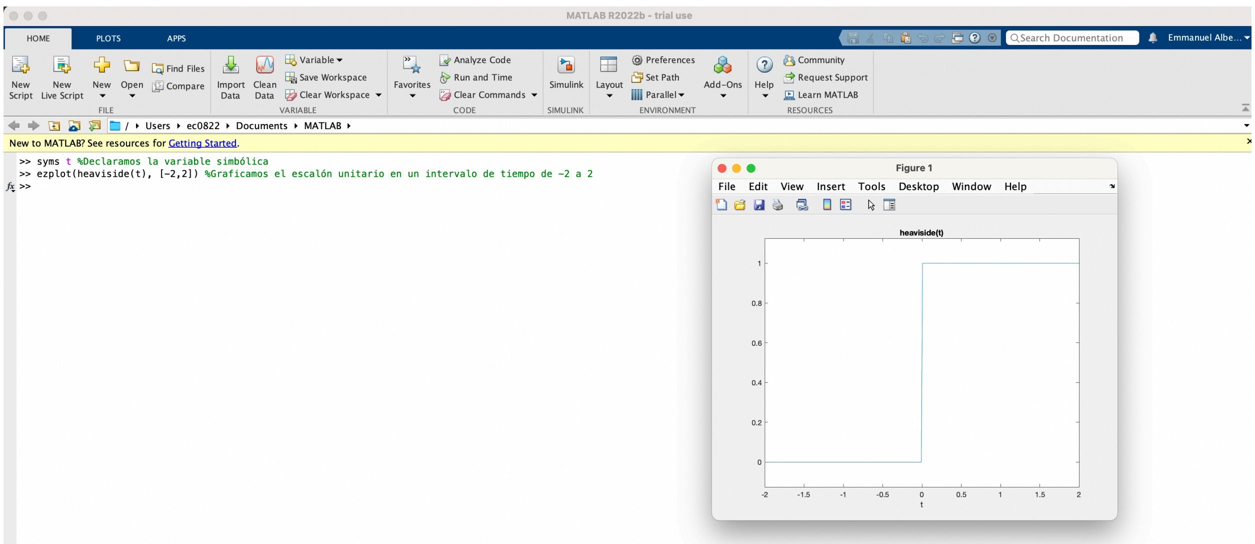
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{(s-5)^2} + \frac{4 \cdot 6}{s^2 - 6^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{(s-5)^2} + \frac{24}{s^2-36}$$

```
>> laplace(t*exp(5*t)+4*sinh(6*t))

ans =

1/(s - 5)^2 + 24/(s^2 - 36)

>> pretty(ans)
    1          24
-------- + -------
       2    2
(s - 5)    s  - 36
```

IV.-El comando *heaviside()* en Matlab evalúa un escalón Unitario (de amplitud 1), el cual tiene los siguientes valores: 0 para t<0, 1/2 para t=0, and 1 para t>0. La instrucción *ezplot()* se utiliza para graficar funciones en un rango específico, a diferencia de *plot()* la cual grafica pares de vectores. Utilice la siguiente instrucción y verifique el funcionamiento de *heaviside* y *ezplot()*

```
syms t    %declaramos una variable simbólica
ezplot(heaviside(t),[-2, 10])
                  %graficamos el escalón unitario en un intervalo de tiempo de -2 a 2
```



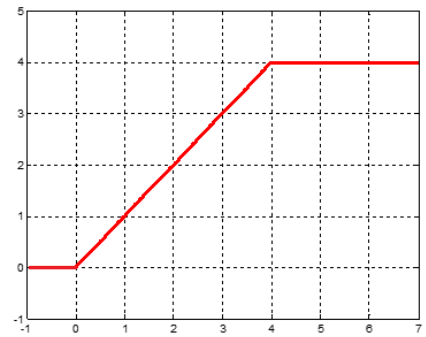
Para cada una de las figuras que se muestras a continuación obtenga:

- **La función por secciones de tiempo (CUADERNO)**
- **La función simplificada expresada con escalones unitarios (CUADERNO)**
- **Captura del cálculo de la transformada de Laplace hechas a mano (CUADERNO)**
- **Capturas de pantalla de la gráfica generada en Matlab con ezplot()**
- **Captura del programa con instrucciones en Matlab**
- **Transformada de Laplace realizada en Matlab.**

NOTA: Asegúrese de modificar las propiedades de la gráfica para obtener una línea más gruesa y variar los colores de ésta, así como de poner la cuadricula en el fondo (grid on).

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

Función #1:



Comandos de Matlab:

%Grafica cuadriculada con línea gruesa y color rojo titulada "Función 1"

f = ezplot((t)*heaviside(t)+(4-t)*heaviside(t-4),[-1,7,-1,5]); set(f,'Color','red', 'LineWidth', 4); grid on; title("Función #1");

%Transformada de Laplace de f(t) = t*H(t) + (4-t)H(t-4)

laplace((t)*heaviside(t)+(4-t)*heaviside(t-4));

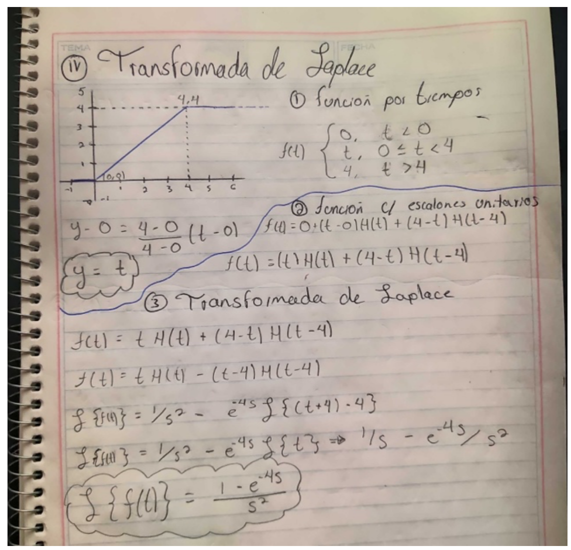
%Formateado del resultado para facilitar la comprensión

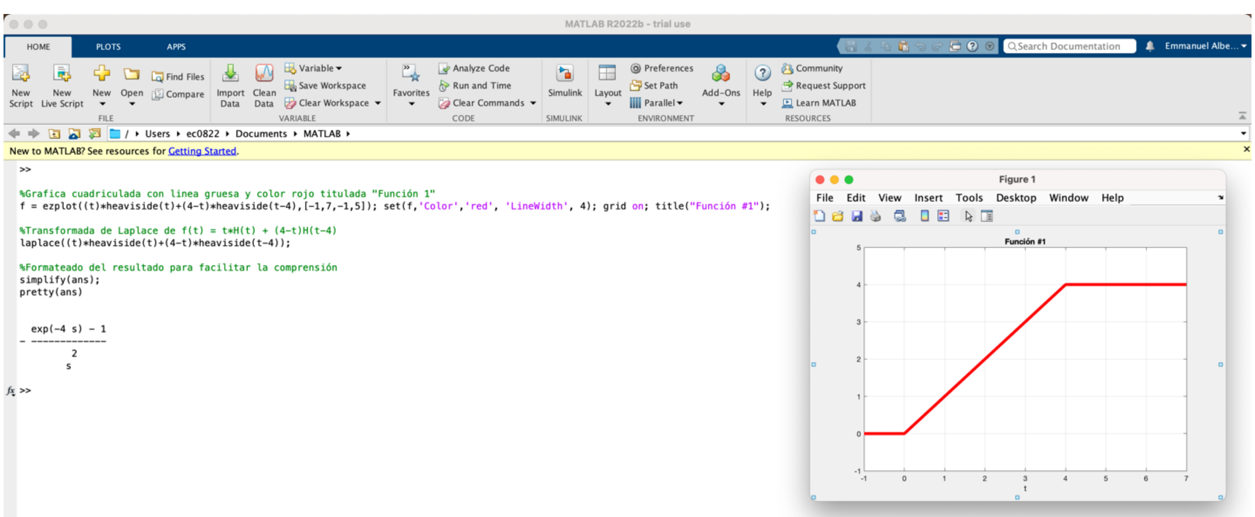
simplify(ans);

pretty(ans)

$$f(t) = tH(t) + (4-t)H(t-4)$$

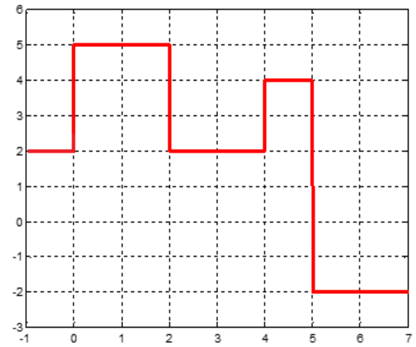
$$f(s) = -\frac{e^{-4s}-1}{s^2}$$





Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

Función #2:



Comandos de Matlab

%Grafica cuadriculada con línea gruesa y color rojo titulada "Función 2"

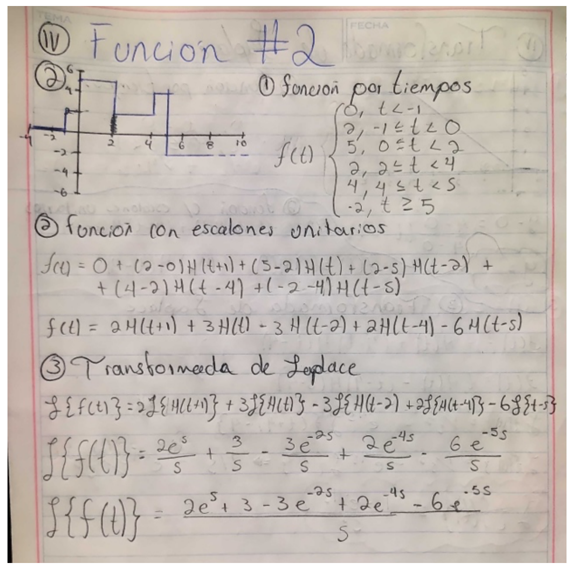
f = ezplot(2*heaviside(t+1)+3*heaviside(t)-3*heaviside(t-2)+2*heaviside(t-4)-3*heaviside(t-4.99)-3*heaviside(t-5.01),[-1,7,-3,6]); set(f,'Color','red', 'LineWidth', 4); grid on; title("Función #2");

%Transformada de Laplace de f(t) = 2H(t+1) + 3H(t) - 3H(t-2) + 2H(t-4) - 6H(t-5)

laplace(3*heaviside(t)-3*heaviside(t-2)+2*heaviside(t-4)-6*heaviside(t-5));

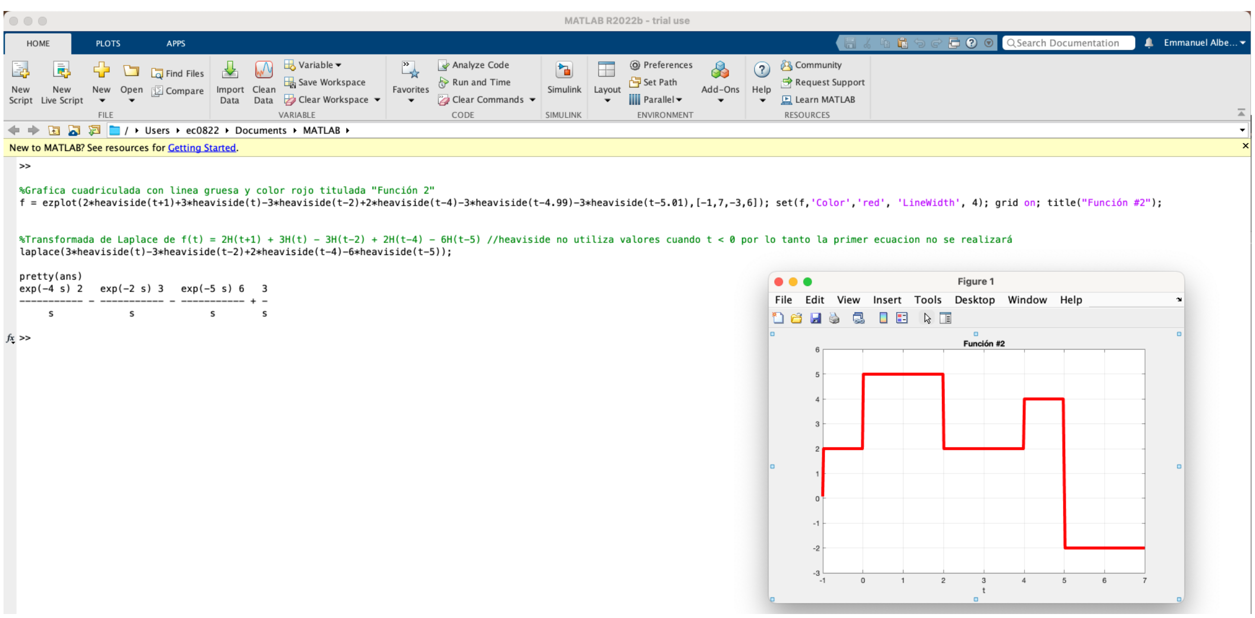
pretty(ans)

(Para demostrar la gráfica se ha sustituido el valor “6*heaviside(t-5)” a 3*heaviside(t-4.99)-3*heaviside(t-5.01)” debido a que la gráfica salía recortada al utilizar el valor completo)



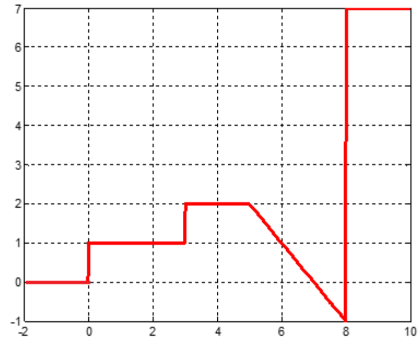
$$f(t) = 2H(t+1) + 3H(t) - 3H(t-2) + 2H(t-4) - 6H(t-5)$$

$$f(s) = \frac{2e^{-4s} - 3e^{-2s} - 6e^{-5s} + 3}{s}$$



Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto
Rodriguez Contreras Raul Arturo

Función #3:



%Grafica cuadriculada con línea gruesa y color rojo titulada "Función 3"

f = ezplot(heaviside(t)+heaviside(t-3)+(((-4/3)*t+(20/3))*heaviside(t-5)+((4/6)*t+(-5/6))*heaviside(t-7.99)+((4/6)*t+(-5/6))*heaviside(t-8.01)),[-2,10,-2,7]); set(f,'Color','red', 'LineWidth', 4); grid on; title("Función #3");

%Transformada de Laplace de f(t) = H(t) + H(t-3) + (-4t/3 +20/3)*H(t-5) + (4/3t - 5/3)H(t-8

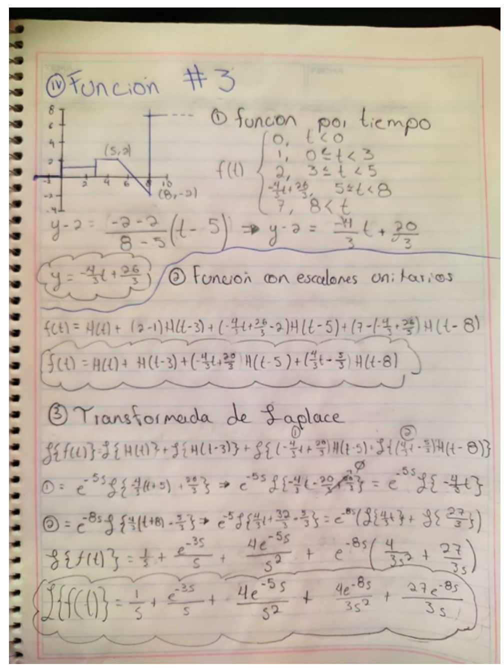
laplace((heaviside(t)+heaviside(t-3)+((-4/3)*t+20/3)*heaviside(t-5)+((4/3)*t+(-5/3))*heaviside(t-8)));

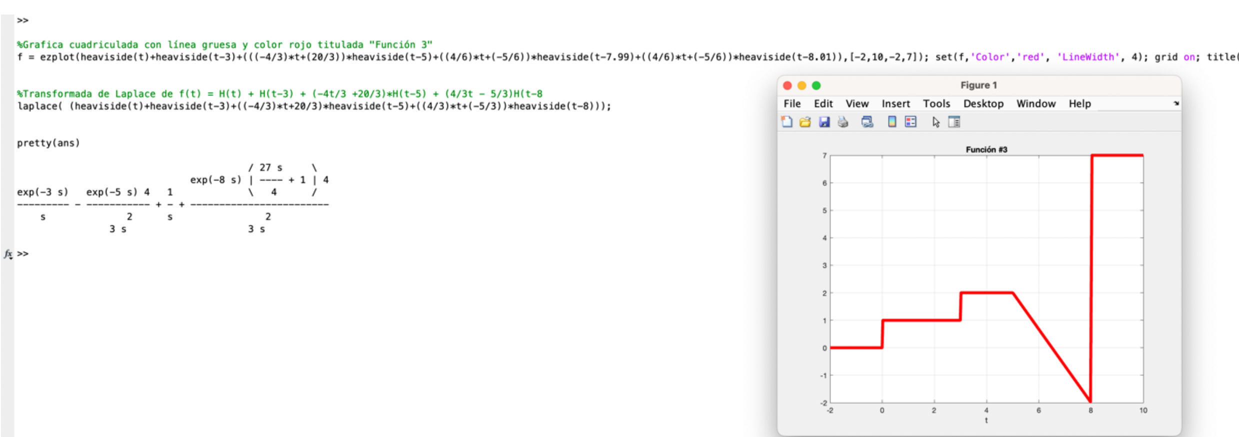
pretty(ans)

(Para demostrar la gráfica se ha sustituido el valor "((-4/3)*t+20/3)*heaviside(t-8)" a)+((4/6)*t+(-5/6))*heaviside(t-7.99)+((4/6)*t+(-5/6))*heaviside(t-8.01))" debido a que la gráfica salía recortada al utilizar el valor completo)

$$\boldsymbol{f(t) = H(t) + H(t-3) + \left(-\frac{4}{3}t + \frac{20}{3}\right) * H(t-5) + \left(\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right) * H(t-8)}$$

$$\boldsymbol{f(s) = \frac{1+e^{3s}}{s} - \frac{4e^{-5s}}{s} + \frac{4e^{-8s}\left(\frac{27}{4}+1\right)}{3s^2}}$$





```
>>

%Grafica cuadriculada con línea gruesa y color rojo titulada "Función 3"
f = ezplot(heaviside(t)+heaviside(t-3)+(((-4/3)*t+(20/3))*heaviside(t-5)+((4/6)*t+(-5/6))*heaviside(t-7.99)+((4/6)*t+(-5/6))*heaviside(t-8.01)),[-2,10,-2,7]); set(f,'Color','red', 'LineWidth', 4); grid on; title("

%Transformada de Laplace de f(t) = H(t) + H(t-3) + (-4t/3 +20/3)*H(t-5) + (4/3t - 5/3)H(t-8
laplace( (heaviside(t)+heaviside(t-3)+((-4/3)*t+20/3)*heaviside(t-5)+((4/3)*t+(-5/3))*heaviside(t-8)));

pretty(ans)

                                    / 27 s     \
                       exp(-8 s) | ---- + 1 | 4
exp(-3 s)   exp(-5 s) 4   1           \   4      /
--------- - ----------- + - + -----------------------
    s              2      s                2
                3 s                     3 s

>>
```

Conclusión Individual:

- **Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto:**
    - La transformada de laplace es una herramienta importante con bastantes aplicaciones en la física y en la ingeniería, debido a que te ayuda a transformar funciones de cálculo complejas a funciones algebraicas sencillas, facilitando el trabajo inmensamente. En esta práctica estudiamos las propiedades de la transformada de laplace y aprendimos a utilizar Matlab para resolverlas y representarlas gráficamente.

- **Rodríguez Contreras Raul Arturo:**
    - La práctica realizada con Matlab permite practicar cómo se debe utilizar la sintaxis del lenguaje para obtener las gráficas deseadas. Las gráficas son relativamente sencillas a pesar de incluir rampas, pero evidencian perfectamente como trabajar con gráficas por trozos y eso es lo más útil de este ejercicio. Los comandos usados son muy sencillos de comprender, ezplot por ejemplo es bastante flexible y fácil de utilizar, a pesar de ser una herramienta muy completa para visualizar los calculas rápidos. De la misma forma las funciones como el escalón y la rampa son muy intuitivas y fáciles de manipular.

Referencias

Expand expressions and simplify inputs of functions by using identities. – MATLAB. expand. (2022). Retrieved 7 October 2022, from https://la.mathworks.com/help/symbolic/sym.expand.html

Algebraic simplification - MATLAB simplify. (2022). Retrieved 7 October 2022, from https://la.mathworks.com/help/symbolic/sym.simplify.html

Factorization – MATLAB factor. (2022). Retrieved 7 October 2022, from https://la.mathworks.com/help/symbolic/sym.factor.html

Prettyprint symbolic expressions - MATLAB pretty. (2022). Retrieved 7 October 2022, from https://la.mathworks.com/help/symbolic/sym.pretty.html