

Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ciencias Químicas e Ingeniería



SISTEMAS DE CONTROL

Transformada Inversa de Laplace

Docente: I.E. Araiza Medrano Lizette

Alumno(s):

Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto 02161509

Rodríguez Contreras Raul Arturo 01261510

Objetivo:

El alumno implementara la Transformada Inversa de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de diferentes grados, apoyándose de la herramienta de Matlab, con los comandos de ilaplace, roots, etc.

Introducción:

La transformada de Laplace es una transformada que convierte una función de una variable real en el dominio del tiempo a una función de variable compleja en el dominio de la frecuencia (s). Su estudio es fundamental ya que Laplace demostró cómo transformar las ecuaciones diferenciales que están en el dominio del tiempo a ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia, y de esta manera es mucho más fácil encontrar la solución de la ecuación diferencial, ya que al tener ecuaciones algebraicas comunes se puede aplicar cualquier método para la solución de ecuaciones algebraicas como factorización, completando el cuadrado perfecto, por fórmula general, etc. Una vez que se obtiene la solución de la ecuación algebraica se utiliza la transformada inversa para mostrar la solución en el dominio del tiempo.

Desarrollo:

1. **¿De qué forma o cómo se representa un polinomio para poderlo trabajar en Matlab, complementa tu respuesta con un ejemplo?** Matlab representa polinomios con vectores numéricos que contienen los coeficientes polinómicos ordenados por potencia descendente. Por ejemplo, $[1 \ -4 \ 4]$ corresponde a $x^2 - 4x + 4$.
2. **Utilizando Matlab y tu respuesta en la pregunta anterior: transcriba los siguientes ejemplos de polinomios de manera correcta, para poderlos trabajar (anexar captura de pantalla):**

Polinomio	Matlab
$x^5 - x^4 + x^3 + 5x^2 + 9x + 8$	$[1 \ -1 \ 1 \ 5 \ 9 \ 8]$
$x^5 + x^3$	$[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$

```
a = [1 -1 1 5 9 8]
```

```
a = 1x6  
1    -1    1    5    9    8
```

```
b = [1 0 1 0 0 0]
```

```
b = 1x6  
1    0    1    0    0    0
```

3. **¿Cuál es la instrucción que nos da las raíces de un polinomio de Matlab, complementa tu respuesta con un ejemplo?** roots(p)
 $p = [3 \ 2 \ 1];$
 $r = \text{roots}(p)$

```
r = 2x1  
-2  
-1
```

4. Calcule las raíces de los siguientes polinomios usando Matlab, utilizando el comando que investigaste en la pregunta anterior:

Tabla 2. Ejercicios para usar la función roots.

Función	Código en Matlab	Resultado en Matlab
$f(s) = s^2 + 2 * s + 1$	<code>s = [1 2 1] roots(s)</code>	<code>ans = -1 -1</code>
$f(s) = s^2 + 2 * s + 2$	<code>s = [1 2 2] roots(s)</code>	<code>ans = -1.0000 + 1.0000i -1.0000 - 1.0000i</code>
$f(s) = 2 * s^3 + 4 * s^2 + 2 * s$	<code>s = [1 4 2 0] roots(s)</code>	<code>ans = 0 -3.4142 -0.5858</code>
$f(s) = s^6 - 7.5s^5 + 10.5s^4 + 20.5s^3 - 25.5s^2 - 27s$	<code>s = [1 -7.5 10.5 20.5 -35.5 -27 0] roots(s)</code>	<code>ans = 0.0000 + 0.0000i 4.7870 + 0.0000i 2.3756 + 0.8116i 2.3756 - 0.8116i -1.3983 + 0.0000i -0.6400 + 0.0000i</code>

5. ¿Qué comando se usa en Matlab para expandir una función en sus fracciones parciales, explica también como se interpretan los resultados arrojados por dicha función. Complementa tu respuesta con un ejemplo? Se utiliza el comando `residue`, el cual regresa como vectores los valores del numerador y el denominador.

Por ej. Tenemos la función $\frac{s^2+6s+3}{s^3+3s^2+2s}$,

Creamos los vectores a y b para facilitar la manipulación de los polinomios

$$a = [1 \ 6 \ 3]; \quad b = [1 \ 3 \ 2 \ 0];$$

Llamamos la función guardando los resultados en los vectores (n = numeradores, d = denominadores)

$$[n \ d] = \text{residue}(a, b)$$

Lo que nos da como resultado la expansión por fracciones parciales

$$\begin{array}{cc} n = 3 \times 1 & d = \\ -2.5000 & -2 \\ 2.0000 & -1 \\ 1.5000 & 0 \end{array}$$

Esto se interpreta como $-\frac{2.5}{s+2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1.5}{s}$

6. Descomponga las siguientes funciones en fracciones parciales usando Matlab y anexa también los cálculos a mano para comparar tus resultados.

Tabla 2. Ejercicios para encontrar fracciones parciales

Función	Código en Matlab	Resultado arrojado
$f(t) = \frac{s+5}{s(s+10)}$	<pre>a = [1 5]; b = [1 10 0]; [n d] = residue(a,b)</pre>	<pre>n = 0.5000 0.5000 d = -10 0</pre>
$f(t) = \frac{s^2(s+5)(s-5)}{s^3(s^2-25)}$	<pre>a = [1 0 0]; b = [1 0 0 0]; [n d] = residue(a,b)</pre>	<pre>n = 1 0 0 d = 0 0 0</pre>
$f(t) = \frac{(s+10)(s+60)}{s(s+4)(s+5)(s^2+7s+10)(s+10)}$	<pre>a = [1 60]; b = [1 16 93 230 200 0]; [n d] = residue(a,b)</pre>	<pre>n = -5.6889 -3.6667 7.0000 -1.6111 0.3000 d = -5.0000 -5.0000 -4.0000 -2.0000 0</pre>

7. ¿Qué comando se usa en Matlab para calcular la transformada inversa de Laplace de una función expresada en el dominio de la frecuencia? Se utiliza el comando `ilaplace`

8. Use Matlab para calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones, anexa también los cálculos a mano para comprobar tus resultados:

$$F(s) = \frac{5(s+5)}{s(s+10)}$$

```
ilaplace((5*(s+5))/(s*(s+10)))
```

ans =

$$\frac{5e^{-10t}}{2} + \frac{5}{2}$$

TEMA Transformada Inversa de Laplace FECHA 20/OCT/22

$$F(s) = \frac{5(s+5)}{s(s+10)} \Rightarrow \frac{5}{2s} + \frac{5}{2(s+10)}$$
$$5s + 25 = \frac{A}{s+10} + \frac{B}{s}$$
$$5s + 25 = As + B(s+10)$$
$$5s + 25 = As + Bs + 10B$$
$$5s = As + Bs$$
$$\textcircled{1} 5 = A + B$$
$$5 = A + \frac{5}{2}$$
$$A = 5 - \frac{5}{2}$$
$$A = \frac{5}{2}$$
$$\textcircled{2} 25 = 10B$$
$$2.5 = B$$
$$B = \frac{5}{2}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{2s} + \frac{5}{2(s+10)}\right\}$$
$$\frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+10}\right\} = \frac{5}{2}(1 + e^{-10t})$$

$$F(s) = \frac{25}{s(s^2 + 7s + 12)}$$

ilaplace((25)/(s*(s^2+7*s+12)))

ans =

$$\frac{25 e^{-4t}}{4} - \frac{25 e^{-3t}}{3} + \frac{25}{12}$$

TEMA: Transformada Inversa de Laplace FECHA: 20/OCT/22

$F(s) = \frac{25}{s(s^2 + 7s + 12)}$ $\Rightarrow \frac{25}{12s} - \frac{25}{3(s+3)} + \frac{25}{4(s+4)}$

$25 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$ Ej. 2

$25 = A(s+3)(s+4) + B(s+4)(s) + C(s)(s+3)$
 $25 = As^2 + 7As + 12A + Bs^2 + 4Bs + Cs^2 + 3Cs$

$As^2 + Bs^2 + Cs^2 = 0$ $7As + 4Bs + 3Cs = 0$
 $A + B + C = 0$ ① $7A + 4B + 3C = 0$ ②

$12A = 25$ ③
 $A = \frac{25}{12}$ $B = -\frac{25}{3}$ $C = \frac{25}{4}$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 25 \left\{ \frac{1}{12s} - \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{4(s+4)} \right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{25}{12} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{25}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s+3} \right\} + \frac{25}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s+4} \right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{25}{12} - \frac{25 e^{-3t}}{3} + \frac{25 e^{-4t}}{4}$

Conclusión Individual:

- **Gómez Cárdenas Emmanuel Alberto:**
 - En esta práctica aprendimos que para trabajar con polinomios en Matlab se tienen que utilizar vectores numéricos, aprendimos a realizar más funciones importantes como lo son la transformada inversa de laplace, obtener las raíces de un polinomio y hasta a expandir una función con fracciones parciales.
- **Rodríguez Contreras Raul Arturo:**
 - La práctica de Matlab permite saber cómo se utilizan las fracciones parciales, pues Matlab tiene su manera exclusiva de tratarlas. Por medio de vectores de cocientes, los cuales tienen reglas y este ejercicio permitió familiarizarse con esas normas de uso. Es necesario que esta forma de representar las fracciones sea natural para alguien que trabaja con Matlab y estas prácticas ayudan a reforzar estas habilidades.

Referencias

Polinomios. Polinomios - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina. Retrieved October 20, 2022, from <https://la.mathworks.com/help/matlab/polynomials.html>