

Práctica no. 6: Análisis Teórico del Proceso de Muestreo-Retención

El teorema del muestreo es uno de los teoremas fundamentales que permiten en electrónica el paso del mundo analógico al mundo digital y viceversa. Por ello, es necesario entenderlo en profundidad ya que, hoy, la mayoría de las señales analógicas procedentes de sensores necesitan de procesamiento digital y deben ser muestreadas.

El **Muestreo** es un proceso de **discretización temporal**: La señal muestreada es el resultado de una secuencia discreta de niveles tomados de la señal continua en instantes regulares equiespaciados de tiempo.

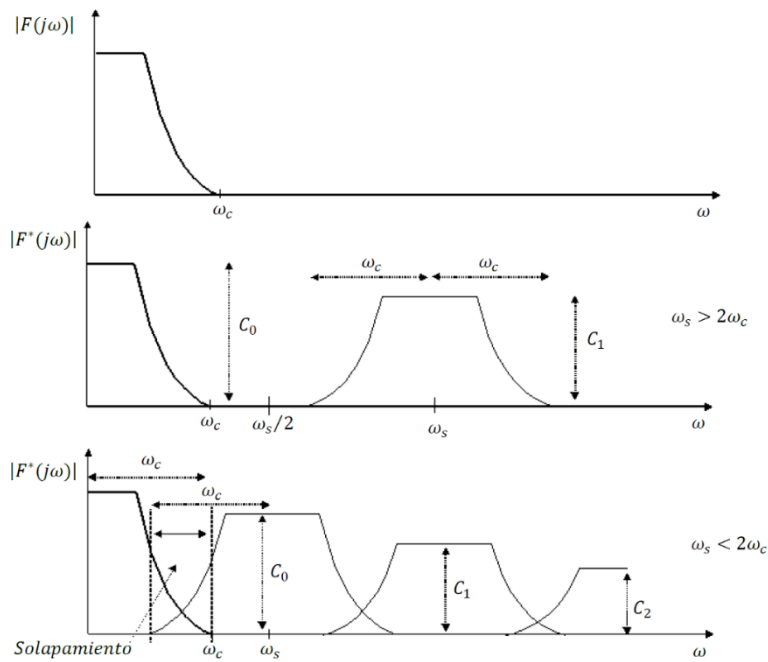
1. Teorema del Muestreo.

El teorema del muestreo dice que una señal analógica de ancho de banda limitado a una frecuencia máxima ω_c , **puede reconstruirse completamente** sin pérdida de información a partir de una secuencia temporal de sus muestras tomadas a intervalos regulares equiespaciados en tiempo siempre y cuando el número de muestras que se tomen por segundo sea mayor o igual que dos veces ω_c . En el apartado 7.6 del tema 7 se realiza el estudio analítico pudiendo concluirse que no existe pérdida de información al muestrear una señal continua y discretizarla en tiempo a intervalos regulares. Sin embargo, para que tal recuperación sea posible sin perder armónicos ni recuperar otros que no pertenecen a la señal se deben cumplir dos condiciones:

- a) La señal a muestrear $f(t)$ **debe estar limitada en banda** de forma que su espectro $F(j\omega)$ se anule o sea despreciable a partir de una cierta frecuencia ω_c .
- b) La frecuencia de muestreo ω_s , **debe ser superior al doble** de la frecuencia de la máxima componente del espectro de la señal ω_c :

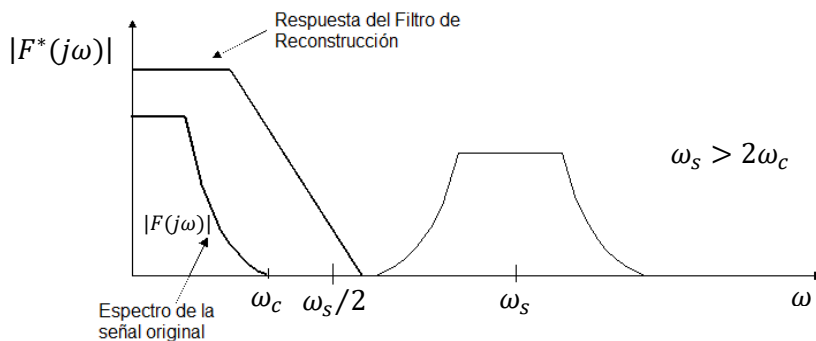
$$\omega_s \geq 2\omega_c \quad (1)$$

El análisis geométrico es inmediato. El espectro de una señal muestreada (Véase el estudio analítico en el apartado 7.6), posee el espectro de la señal original repetido muchas veces y en componentes espectrales centradas en la frecuencia de muestreo ω_s . Si las bandas producidas por el proceso de muestreo no se solapan, se podrá recuperar la señal original mediante un simple proceso de filtrado pasa baja:



Si la frecuencia de muestreo no supera dos veces la frecuencia máxima de la señal, se produce el fenómeno de solapamiento espectral o '**Aliasing**' que impide reconstruir la señal original mediante un proceso de filtrado pasa baja. La interpretación gráfica es inmediata sin más que ver que si los espectros resultantes no están separados distancias superiores a $2\omega_c$ las colas de los espectros se ven solapadas o imbricadas, siendo imposible recuperar la información que contienen mediante un proceso de filtrado pasa baja (tercera figura).

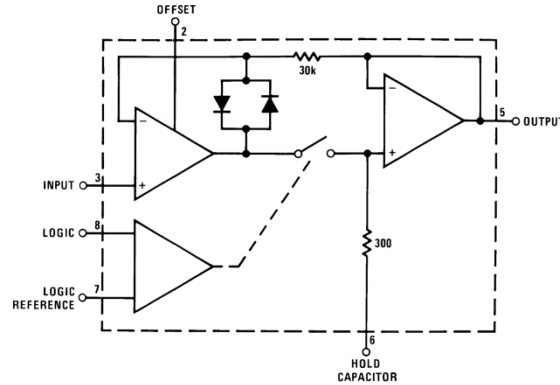
En el caso en que se cumpla el teorema del muestreo, la recuperación de la señal original se obtiene mediante un filtro pasa baja que elimina las componentes armónicas adicionales de frecuencia superior centradas en los múltiplos de la frecuencia de muestreo:



2. Proceso de Muestreo.

En esta práctica estudiaremos el fenómeno del muestreo real de señales a partir del muestreador-retenedor integrado LF398 (S_H.OLB), diseñado para realizar el muestreo de señales y, a la vez, la retención temporal de las mismas con el objeto de proceder a su transformación analógica a digital (Proceso previo al de Cuantificación dentro del conjunto de bloques funcionales de una Conversión A/D).

El diagrama esquemático del circuito integrado LF398 es:



Consta de dos AOs en configuración de driver con un limitador de la amplitud de entrada y un conmutador de estado sólido controlado por una puerta lógica de nivel de referencia programable. La ganancia es unitaria. El conmutador podrá conectar o desconectar la señal de entrada en el driver de salida. El conmutador analógico debe ser controlado por un tren de impulsos $S(t)$ de periodo T_s y anchura τ_s :

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT) \quad (2)$$

Donde $p(t)$ es una función impulso:

$$\underbrace{p(t)}_{-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}} = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau \\ 0 & \text{resto del periodo} \end{cases} \quad (3)$$

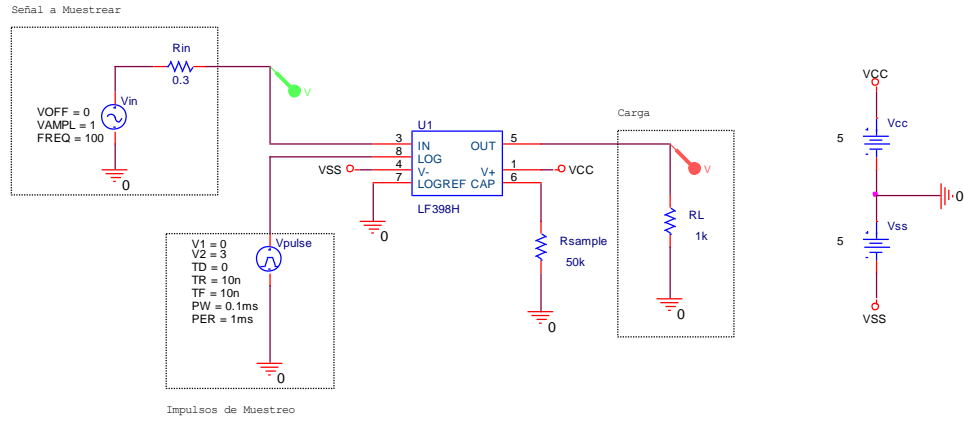
La señal muestreada es el resultado de **multiplicar** a la señal analógica de entrada por este tren de impulsos:

$$f_n^*(t) = f(t) \cdot S(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT) \quad (4)$$

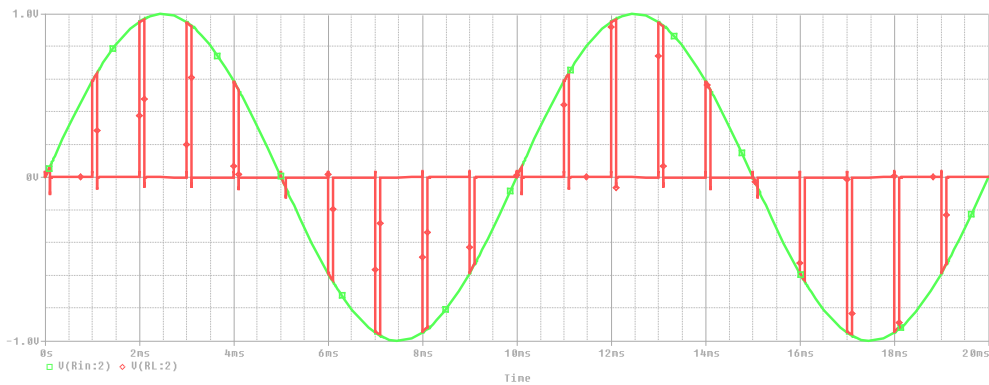
Vamos a estudiar mediante simulación la morfología temporal y espectral de una señal muestreada. Para ello debemos poner la señal a muestrear en la entrada INPUT y en la entrada LOGIC debemos introducir el tren de impulsos a la frecuencia de muestreo deseada (Periodo deseado con anchura de impulsos deseado). La entrada de referencia lógica la llevamos a tierra y el pin 6 lo conectamos también a tierra a través de una resistencia de alto valor.

- **Muestreo de una señal senoidal de 100Hz muestreada a una frecuencia de 1000Hz (periodo de 1ms), y un tamaño de impulso de 0.1ms.**

La señal muestreada la obtendremos en el pin de salida OUTPUT. Utilizando la librería S_H.OLB (descargable desde la página de la Asignatura), podemos simular el circuito en Pspice:



El análisis temporal nos muestra la forma de la señal muestreada:



La expresión analítica de una señal muestreada $f_n^*(t)$ por impulsos reales de periodo T_s y anchura τ (lo veremos analíticamente en el Tema 9), es:

$$f_n^*(t) = f(t) \cdot S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n) \cdot f(t) \cdot e^{jn\omega_s t}$$

Siendo

(5)

$$S(n) = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)$$

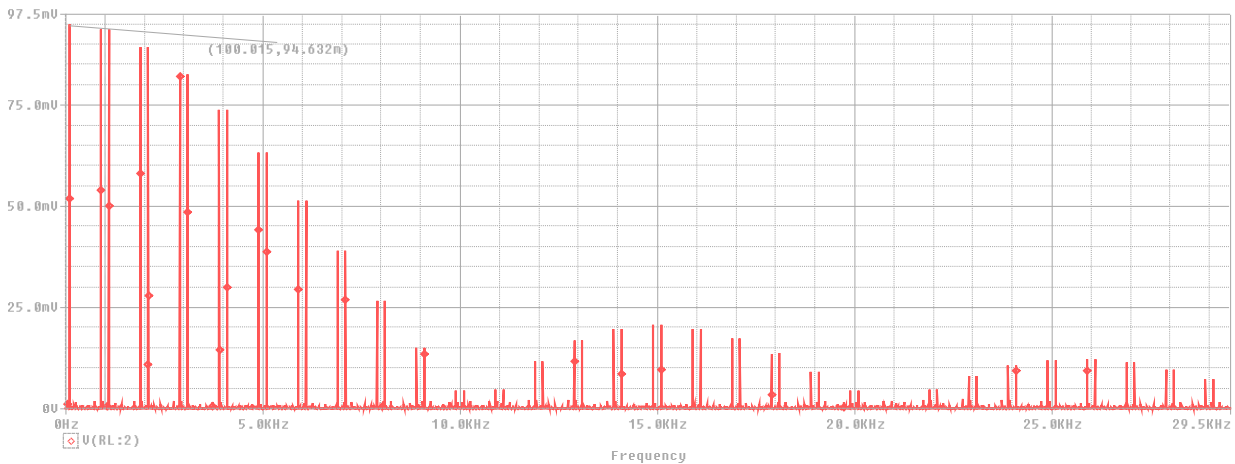
Es decir, en el dominio del tiempo se trata de un tren de impulsos de anchura τ y periodo T_s con el signo de la señal de entrada cuyas alturas se multiplican por la señal a muestrear $f(t)$. Observemos la señal roja formada por el tren de impulsos cuya amplitud sigue a la señal analógica

En el dominio de la frecuencia tenemos, calculando la transformada de Fourier de (5) y expresándola en hertzios:

$$F_n^*(f) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_s}\right) \cdot F\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad (6)$$

Que nos muestra que la señal muestreada en el dominio de la frecuencia es una versión del espectro de la señal original desplazada n veces, pero ponderada por la anchura del impulso τ y por el periodo de muestreo T_s .

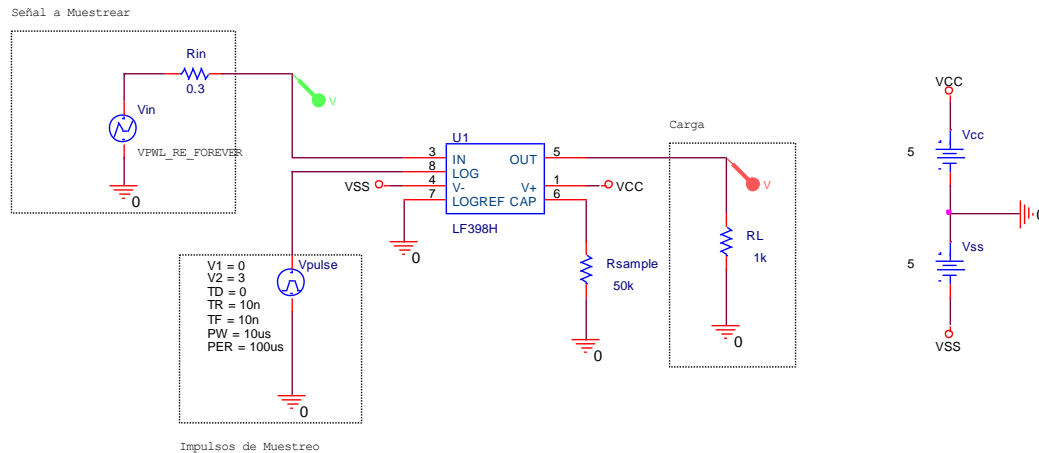
Calculando la FFT de la señal senoidal muestreada (en un intervalo de 200ms), obtenemos:



En efecto, en el espectro de la señal muestreada observamos que el primer armónico es precisamente el de la señal original a muestrear de 100Hz. Los sucesivos armónicos se encuentran apareados entornos a frecuencias múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo (1000Hz), y cada pareja se encuentra a una distancia de ± 100 Hz de la frecuencia múltiplo. Todo el conjunto modulado o por una función lobular de tipo sinc (se ven tres lóbulos).

- **Muestreo de una señal triangular (multiespectral) de frecuencia de 100Hz a una frecuencia de muestreo de 1000Hz. (Periodo de 100us) y anchura de impulso de 10us.**

Si ahora muestreamos una señal triangular de 100Hz a una frecuencia de 10000Hz o 10000 muestras por segundo tenemos la siguiente señal triangular muestreada:



Construcción de la señal triangular

VPWL_RE_FOREREVER

Par 1: 0ms -1V

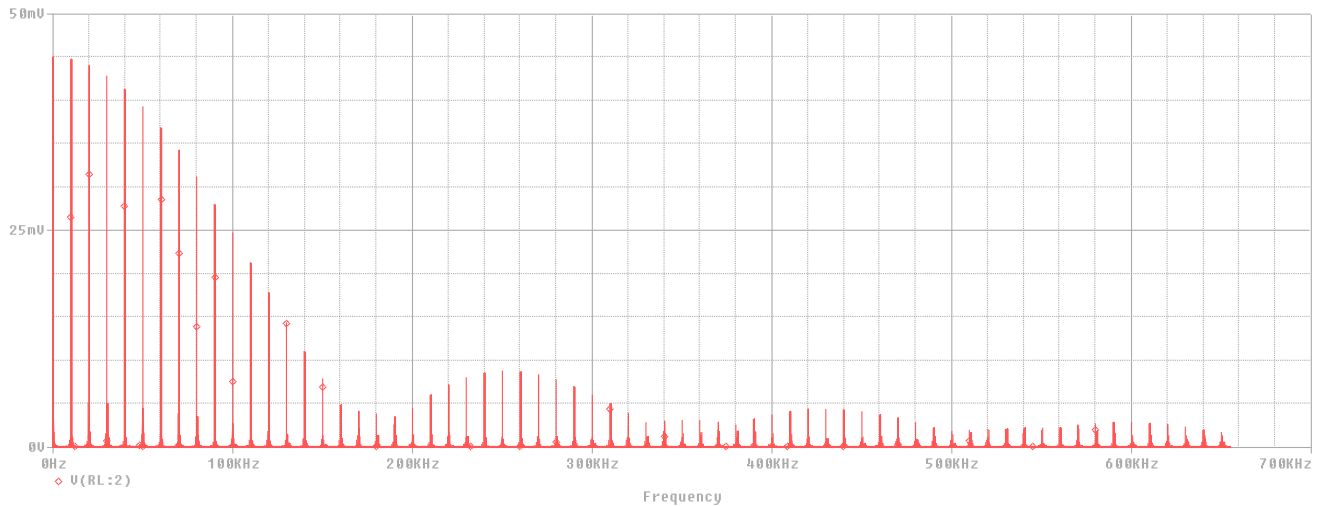
Par 2: 5ms 1V

Par 3: 10ms -1V

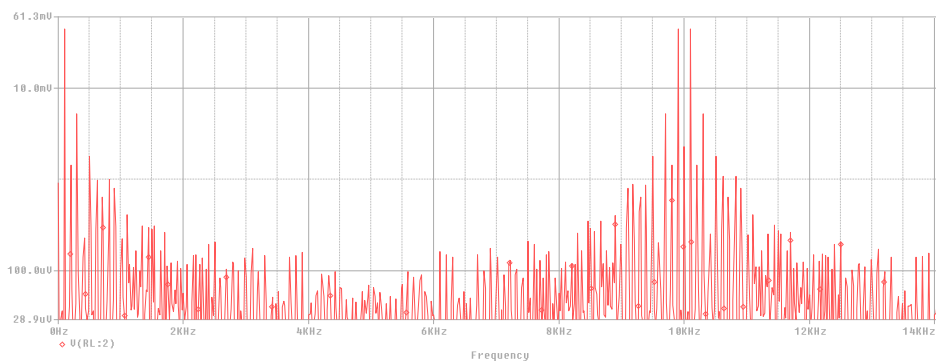
La forma de la señal muestreada en el dominio del tiempo es:



Como una señal triangular tiene un espectro complejo de muchas componentes armónicas, el espectro de una señal triangular muestreada es igualmente complejo. Simulando 20ms de señal muestreada y calculando su FFT tenemos:



Observamos una estructura parecida a la señal seno muestreada en un espectro mucho más amplio (hasta 600KHz), pero solo de apariencia ya que en cada armónico múltiplo de la frecuencia de muestreo del tren de impulsos se encuentra el espectro de una señal triangular repetido tantas veces como armónicos hay. Haciendo un zoom en el primer armónico del tren de impulsos y usando una escala logarítmica tenemos:

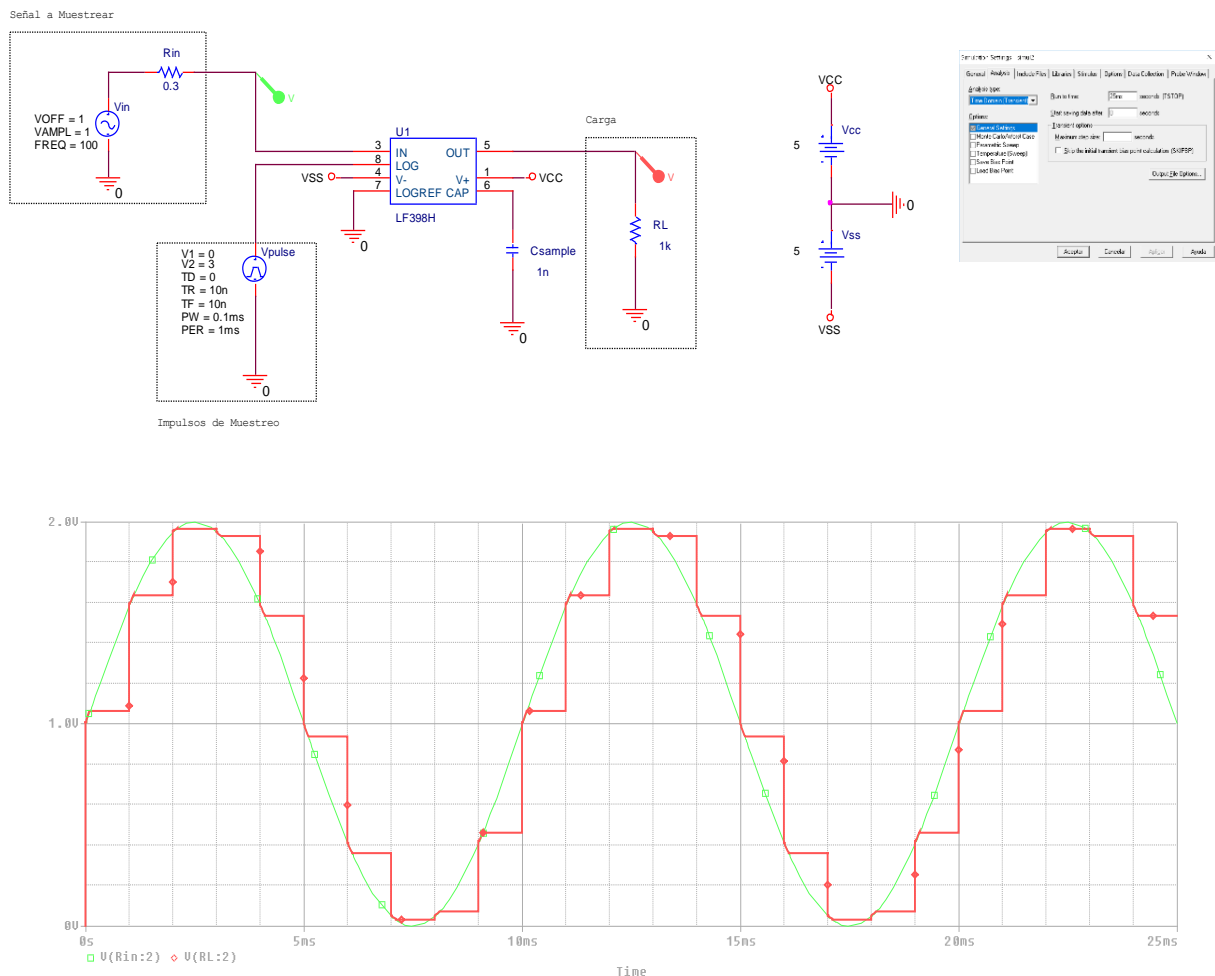


En baja frecuencia se observa el espectro de la señal triangular de origen (frecuencia fundamental de 100Hz), y entorno al primer armónico de tren de impulsos (a 10.000Hz), se encuentran copias de la señal triangular original a izquierdas y a derechas produciéndose entorno a los 5KHz un fenómeno de solapamiento espectral o **Aliasing**. El fenómeno de Aliasing siempre ocurre en señales muestreadas no limitadas en banda. Si el muestreo se realiza a frecuencias muy elevadas, el Aliasing solo se produce en componentes armónicas muy pequeñas y podemos despreciarlo. No obstante, a veces no es posible subir la frecuencia de muestreo por lo que debemos filtrar la señal para evitar el fenómeno.

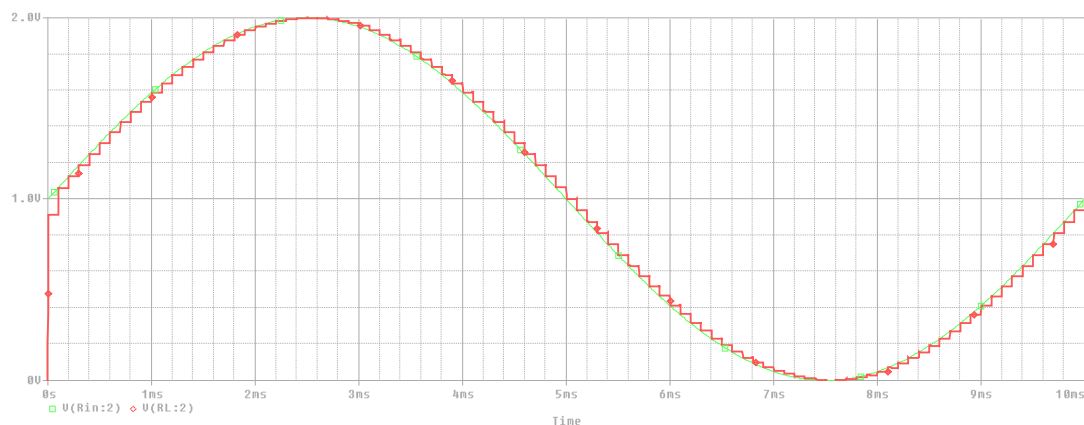
3. Proceso de Muestreo-Retención (proceso Sample-Hold ó Track-Hold):

Para realizar una transformación analógico-digital, no sólo hay que discretizar el tiempo, sino también las amplitudes como un paso previo a la cuantificación. La retención de la amplitud de la señal durante un tiempo permite realizar, en ese tiempo, su cuantificación y su transformación (codificación), a una palabra digital de n bits.

Para retener el valor de tensión de una señal en un instante de muestreo dado usaremos un condensador para almacenar el nivel de tensión entre muestras sucesivas. En el circuito anterior, solo tenemos que cambiar la resistencia de carga por un condensador de una capacidad lo suficientemente grande como para almacenar la carga inyectada y lo suficientemente pequeña para que pueda reaccionar a los cambios de carga entre muestreos sucesivos. El circuito siguiente realiza una función de muestreo y retención simultánea sobre una señal sinusoidal de 100Hz, 1V de amplitud y 1V de nivel de offset, muestreada a una frecuencia de 1000 muestras por segundo y generando una nueva señal 'sinusoidal escalonada' con amplitudes discretizadas. Dichas amplitudes se encuentran retenidas un tiempo igual al periodo de muestreo (1ms):

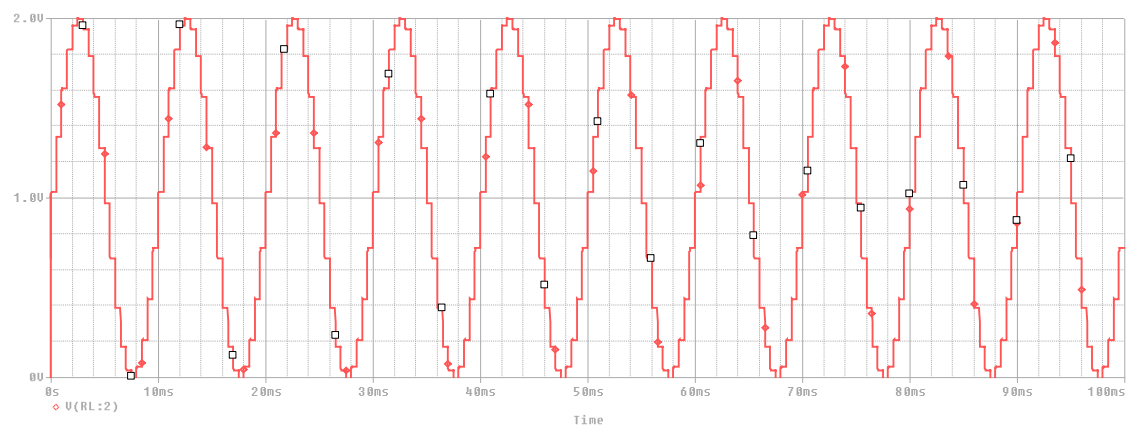


Observemos que los escalones producidos contienen al principio el proceso de muestreo con duración de 0.1ms y después un escalón recto que completa la duración del periodo de muestreo hasta 1ms. Como la señal es de 100Hz y la frecuencia de muestreo de 1000Hz (relación 1:10), aparecen 10 escalones por cada periodo de señal muestreada. Si quisiéramos más escalones por periodo deberíamos de aumentar la ratio aumentando la frecuencia de muestreo. Igualmente, si los impulsos de muestreo se hacen muy estrechos en su duración τ , podemos evitar la distorsión (ponderación sinc del espectro), en el escalón. Por ejemplo, si la duración del impulso la hacemos de $5\mu s$ manteniendo el periodo tenemos una señal con escalones mas precisos y, si a la vez, aumentamos la frecuencia de muestreo a 10Khz, tendremos 100 escalones por ciclo de señal:

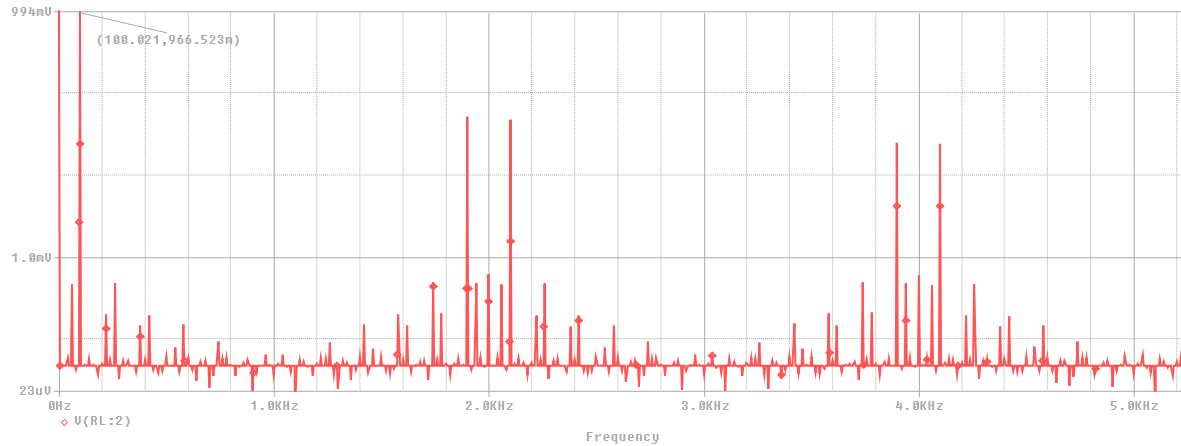


Observemos que el tamaño del escalón (en altura), depende de la pendiente de la señal a muestrear.

Por otro lado, el espectro de una señal muestreada y retenida también es diferente al de una señal senoidal muestreada ya que, se trata de escalones de altas pendientes que contienen armónicos de alta frecuencia. Por ejemplo, una señal muestreada y retenida de 100Hz muestreada a 2000Hz con un tamaño de impulso de $50\mu s$ es:



Y su espectro es:



Observemos que, en baja frecuencia, no solo aparece el espectro de la señal senoidal de 100Hz, sino que, además, aparecen otras componentes espectrales a frecuencias inferiores a 100Hz que no se podrían eliminar mediante filtrado pasa baja para obtener la señal original. Por tanto, ha de quedar claro que, para recuperar las señales analógicas originales, debemos usar señales muestreadas y no señales muestreadas-retenidas. En todo caso, para eliminar el ruido granular de los escalones, se debe cumplir que el tamaño de ellos sea del orden del ruido de fondo del sistema. En este último caso, si pueden recuperarse mediante una operación de filtrado pasa-baja.