Escuela de Ingenierías Industriales

Titulación: **Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y Mecatrónica**

Asignatura: **Electrónica Digital**

Tema 3: **Teoría de la Conmutación. Puertas Lógicas**

TEMA 3: TEORÍA DE LA CONMUTACIÓN. PUERTAS LÓGICAS

Álgebra de Boole: Axiomas y Teoremas

Boole (1854) - Shannon (1938) Álgebra de Conmutación.

(**B**, + , •)

Postulados de Huntington

AX	OPERACIÓN +	OPERACIÓN •	DESCRIPCIÓN
1º	$\forall(x,y) \in B$ $x + y \in B$	$\forall(x,y) \in B$ $x \bullet y \in B$	**B** es cerrado respecto a ambas operaciones
2º	$\forall x \in B$ $\exists 0 \mid 0 + x = x$	$\forall x \in B$ $\exists 1 \mid 1 \bullet x = x$	Existe un elemento identidad para cada una de las operaciones
3º	$\forall(x,y) \in B$ $x + y = y + x$	$\forall(x,y) \in B$ $x \bullet y = y \bullet x$	Ambas operaciones son conmutativas
4º	$\forall(x,y,z) \in B$ $x \bullet (y+z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$	$\forall(x,y,z) \in B$ $x + (y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$	Cada operación es distributiva respecto a la otra
5º	$\forall x \in B$ $\exists \bar{x} \mid x + \bar{x} = 1$	$\forall x \in B$ $\exists \bar{x} \mid x \bullet \bar{x} = 0$	Existe el elemento complementario
6º	$\exists x, y \in B \mid x \neq y$		Existen por lo menos dos elementos distintos en **B**

Álgebra de Boole: Axiomas y Teoremas

Algunos Teoremas Básicos

T1: Dualidad	Si G es identidad -> G^D es identidad
T2:	$\forall x \in B \quad x + 1 = 1 \quad x \bullet 0 = 0$
T3: Ley de Idempotencia	$\forall x \in B \quad x + x = x \quad x \bullet x = x$
T4: Ley de Involución	$\forall x \in B \quad \bar{\bar{x}} = x$
T5: Ley de Absorción	$\forall x, y \in B \quad x + (x \bullet y) = x \quad x \bullet (x + y) = x$
T6: Ley asociativa	$\forall (x, y, z) \in B \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
T7: Leyes de De Morgan	$\forall x, y \in B \quad \overline{x + y} = \bar{x} \bullet \bar{y} \quad \overline{x \bullet y} = \bar{x} + \bar{y}$

Ej: T3: Ley de Idempotencia

$$\forall x \in B \qquad x + x = x$$

Por Dualida T1

$$\forall x \in B \qquad x \bullet x = x$$

Demostración

$$x + x = \mathbf{1} \bullet (x + x)$$ **Ax 2º Elemento Identidad del la operación ●**

$$= (x + \bar{x}) \bullet (x + x)$$ **Ax 5º Elemento complementario de la operación +**

$$= x + (\bar{x} \bullet x)$$ **Ax 4º Distributiva de la op. + sobre ●**

$$= x + (x \bullet \bar{x})$$ **Ax 3º Conmutatividad de la operación ●**

$$= x + \mathbf{0}$$ **Ax 5º Elemento complementario de la operación ●**

$$= \mathbf{0} + x$$ **Ax 3º Conmutatividad de la operación +**

$$= x$$ **Ax 2º Elemento Identidad del la operación +**

Álgebra de Boole: Axiomas y Teoremas

Demostración de Algunos Teoremas Básicos

Ej: T5: Ley de Absorción

$$\forall x, y \in B \qquad x + (x \bullet y) = x$$

Demostración

$x + (x \bullet y) = (\mathbf{1} \bullet x) + (x \bullet y)$	**Ax 2º Elemento Identidad del la operación ●**
$x + (x \bullet y) = (x \bullet \mathbf{1}) + (x \bullet y)$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación ●**
$= x \bullet (\mathbf{1} + y)$	**Ax 4º Distributiva de la op.● sobre +**
$= x \bullet [\mathbf{1} \bullet (\mathbf{1} + y)]$	**Ax 2º Elemento Identidad del la operación ●**
$= x \bullet [(y + \bar{y}) \bullet (\mathbf{1} + y)]$	**Ax 5º Elemento complementario de la operación +**
$= x \bullet [(y + \bar{y}) \bullet (y + \mathbf{1})]$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación +**
$= x \bullet [(y + \mathbf{1}) \bullet (y + \bar{y})]$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación ●**
$= x \bullet [y + (1 \bullet \bar{y})]$	**Ax 4º Distributiva de la op. + sobre ●**
$= x \bullet [y + \bar{y}]$	**Ax 2º Elemento Identidad del la operación ●**
$= x \bullet \mathbf{1}$	**Ax 5º Elemento complementario de la operación +**
$= \mathbf{1} \bullet x$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación ●**
$= x$	**Ax 2º Elemento Identidad del la operación ●**

Por Dualida T1

$$\forall x, y \in B \qquad x \bullet (x + y) = x$$

Álgebra de Boole: Axiomas y Teoremas

Demostración de Algunos Teoremas Básicos

Ej: El elemento complementario es único

$$\forall x, y \in B \qquad SI \qquad \left.\begin{array}{l} x \bullet y = 0 \\ x + y = \mathbf{1} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \bar{x}$$

Demostración

Su pongamos que se cumple $\left.\begin{array}{l} x \bullet y = 0 \\ x + y = \mathbf{1} \end{array}\right\}$ pero $y \neq \bar{x}$

$y = 0 + y$	**Ax 2º Elemento Identidad del la operación +**
$= (x \bullet \bar{x}) + y$	**Ax 5º Elemento complementario de la operación ●**
$= y + (x \bullet \bar{x})$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación +**
$= (y + x) \bullet (y + \bar{x})$	**Ax 4º Distributiva de la op. + sobre ●**
$= \mathbf{1} \bullet (y + \bar{x})$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación + e hipótesis** $x + y = \mathbf{1}$
$= (x + \bar{x}) \bullet (y + \bar{x})$	**Ax 5º Elemento complementario de la operación +**
$= (\bar{x} + x) \bullet (\bar{x} + y)$	**Ax 3º Conmutatividad de la operación +**
$= \bar{x} + (x \bullet y)$	**Ax 4º Distributiva de la op. + sobre ●**
$= \bar{x} + 0$	**Hipótesis** $x \bullet y = 0$
$= \bar{x}$	**Ax 3º Conmut. y Ax 2º Element Id. de la operación +**

Se llega una contradicción: se ha supuesto que $y \neq \bar{x}$
pero asumiendo las hipótesis se obtiene que $y = \bar{x}$

Luego el teorema es cierto.

Álgebra de Boole: Axiomas y Teoremas

Demostración de Algunos Teoremas Básicos

Ej: T7: Leyes de Demorgan

$$\forall x, y \in B \qquad \overline{x+y} = \bar{x} \bullet \bar{y}$$

Demostración

Su pongamos que $\left.\begin{array}{l} \bar{x} \bullet \bar{y} = w \\ x + y = z \end{array}\right\}$ $(z, w) \in B$ **Ax 1º B es cerrado**

$\exists \ \bar{z} \in B$ **Ax 5º Elemento complementario y es único (**lo hemos demostrado**)**

Vamos a ver que se cumple $\left.\begin{array}{l} z \bullet w = 0 \\ z + w = \mathbf{1} \end{array}\right\}$

$$\begin{aligned} z \bullet w &= (x+y) \bullet (\bar{x} \bullet \bar{y}) \\ &= (x \bullet \bar{x} \bullet \bar{y}) + (y \bullet \bar{x} \bullet \bar{y}) && \textbf{Ax 4º Distributiva} \\ &= (0 \bullet \bar{y}) + (0 \bullet \bar{x}) && \textbf{Ax 5º Complementario} \\ &= 0 + 0 && \textbf{T2:} \\ &= 0 && \textbf{T3: Idempotencia o Ax 2º} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + w &= (x+y) + (\bar{x} \bullet \bar{y}) \\ &= (x + y + \bar{x}) \bullet (x + y + \bar{y}) && \textbf{Ax 4º Distributiva} \\ &= (x + \bar{x} + y) \bullet (x + y + \bar{y}) && \textbf{Ax 3º Conmutativa} \\ &= (1 + y) \bullet (1 + x) && \textbf{T6º y Ax 5º Complementario} \\ &= 1 \bullet 1 && \textbf{T2:} \\ &= 1 && \textbf{T3: Idempotencia o Ax 2º} \end{aligned}$$

Por tanto si $\left.\begin{array}{l} z \bullet w = 0 \\ z + w = \mathbf{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{z} = w$ y por tanto $\overline{x+y} = \bar{x} \bullet \bar{y}$

Por Dualida T1

$$\forall x, y \in B \qquad \overline{x \bullet y} = \bar{x} + \bar{y}$$

Álgebra de Boole: Axiomas y Teoremas

Convenio de precedencia de operadores

Al evaluar una expresión del algebra de Boole, se sigue la siguiente relación de precedencia:

1º Se evaluan las expresiones entre paréntesis

2º La operación de complementar u operación NOT.

3º La operación $\bullet$ u operación AND

4º La operación $+$ u operación OR

Ej: La expresión $x + (y \bullet z) = (x + y) \bullet (x + z)$ es equivalente a $x + y \bullet z = (x + y) \bullet (x + z)$

que también escribiremos como $x + yz = (x + y)(x + z)$

Ej: La expresión $x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$ es equivalente a $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$

que también escribiremos como $x(y + z) = xy + xz$

Álgebra de Boole Bivalente

Sea el conjunto $B = \{0, 1\}$ y las operaciones $(+ , \bullet)$ definidas en la tabla.
$(B, + , \bullet)$ forman un álgebra de Boole.

x	y	$x+y$	$x \bullet y$	$\bar{x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

1º Ambas operaciones son cerradas, como muestra la tabla; tanto **0**, **1** son elementos de B

2º **0** es el elemento identidad de la operación $+$
1 es el elemento identidad de la operación $\bullet$

3º Es claro que ambas operaciones son conmutativas

4º Cada operación es distributiva respecto de la otra

$$x \bullet (y+z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$$

$$x + (y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$$

5º **0** es el complementario del **1** y viceversa

6º Existen dos elementos, el **0** y el **1** que son distintos

xyz	$y+z$	$x \bullet (y+z)$	$x \bullet y$	$x \bullet z$	$(x \bullet y)+(x \bullet z)$
000	0	0	0	0	0
001	1	0	0	0	0
010	1	0	0	0	0
011	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0
101	1	1	0	1	1
110	1	1	1	0	1
111	1	1	1	1	1

Funciones booleanas

Definiciones:

- Una función Booleana F es una aplicación biyectiva definida sobre $\mathbf{B}^N$ **(BxBx ...xB)**, o producto cartesiano de N álgebras de Boole, sobre un álgebra de Boole **B**
- Los elementos genéricos de B se denominan variables booleanas y se representan con letras *x, y, z*, etc.
- Los elementos de $\mathbf{B}^N$ son vectores o n-uplas del la forma $X = (x_1, x_2, .x_i.., x_n)$, donde cada $x_i \in \mathbf{B}_i$

$$F: \mathbf{B}^N \longrightarrow \mathbf{B}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow x$$

Una forma de representar una función booleana es mediante una Expresión algebraica

Funciones Booleanas sobre algebras de Boole bivalente modelan el comportamiento de los Sistemas Digitales

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ variables de entrada

$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ variables o función de salida

Funciones booleanas de dos variables: Operadores Lógicos

Sea $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

$(\boldsymbol{B}, + , \bullet)$

F: $\mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$

$(x_1, x_2) \longrightarrow x$

Solo existen

16 funciones booleanas diferentes de dos variables

Muchas de ellas se asocian a un sistema digital combinacional básico:

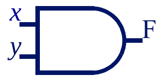
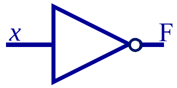
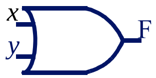
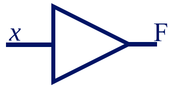
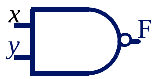
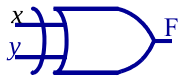
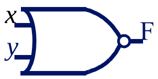
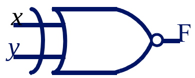
Operador lógico

Puerta lógica de dos entradas

Nota que solo existen $2^{(2^n)}$ funciones booleanas distintas de n variables

$x\,y$	0 0	0 1	10	1 1	Nombre F(x,y)
f_0	0	0	0	0	F(x,y)=0
f_1	0	0	0	1	AND(x,y)
f_2	0	0	1	0	F(x,y)=xy'
f_3	0	0	1	1	F(x,y)=x
f_4	0	1	0	0	F(x,y)=$x'y$
f_5	0	1	0	1	F(x,y)=y
f_6	0	1	1	0	XOR(x,y)
f_7	0	1	1	1	OR(x,y)
f_8	1	0	0	0	NOR(x,y)
f_9	1	0	0	1	XNOR(x,y)
f_{10}	1	0	1	0	F(x,y)=y'
f_{11}	1	0	1	1	F(x,y)=$x+y'$
f_{12}	1	1	0	0	F(x,y)=x'
f_{13}	1	1	0	1	F(x,y)=$x'+y$
f_{14}	1	1	1	0	NAND(x,y)
f15	1	1	1	1	F(x,y)=1

Operadores Lógicos: Puertas Lógicas

Nombre	Símbolo	Función	Tabla de verdad	Nombre	Símbolo	Función	Tabla de verdad
AND		$F = x \bullet y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1	INV		$F = \bar{x}$	x | F 0 | 1 1 | 0
OR		$F = x + y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1	BUFF		$F = x$	x | F 0 | 0 1 | 1
NAND		$F = \overline{x \bullet y}$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0	XOR		$F = x\bar{y} + \bar{x}y$ $F = x \oplus y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = \overline{x + y}$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0	XNOR		$F = xy + \bar{x}\bar{y}$ $F = \overline{x \oplus y}$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

La función de cada operador lógico se implementa mediante un circuito electrónico basado en transistores

Puertas Lógicas

- Las puertas lógicas son circuitos electrónicos con transistores que, si se utilizan adecuadamente, muestran un comportamiento semejante al de las funciones booleanas básicas (**operadores lógicos**).

  Esto es, si se aplica a cada una de sus entradas señales digitales, con dos **niveles de tensión**, los cuales se interprestan como valores asociados a una **variable booleana**, y se interpreta la señal eléctrica a su salida como una señal digital de dos niveles de tensión asociados a una **variable booleana** de salida.

  Desde el punto de vista del **diseño lógico**, los valores exactos de estos niveles de tensión no son importantes, lo que interesa es que sean dos niveles de tensión distintos y bien diferenciados.
  Los niveles, o rangos concretos, de tensión asociados al cero y uno lógicos se denominan **niveles lógicos**, y son característicos de la tecnología electrónica concreta empleada para implementar las puertas lógicas.

- Según el tipo de transistores empleados en el diseño, se distinguen distintas **familias lógicas**.

  Las más usuales son:

  - **TTL** . **L**ógica **T**ransistor-**T**ransistor. Emplea transistores bipolares.
  - **ECL**. **L**ógica de **E**misor a**C**oplado. Emplea transistores bipolares.
  - **CMOS**. Logica con transistores **M**etal-**O**xido-**S**emiconductor.
  - **BiCMOS** . Lógica con transistores **Bi**polares y **CMOS**.

  cada una de las cuales presenta distintas características eléctricas.

  Entre ellas las más destacadas son:

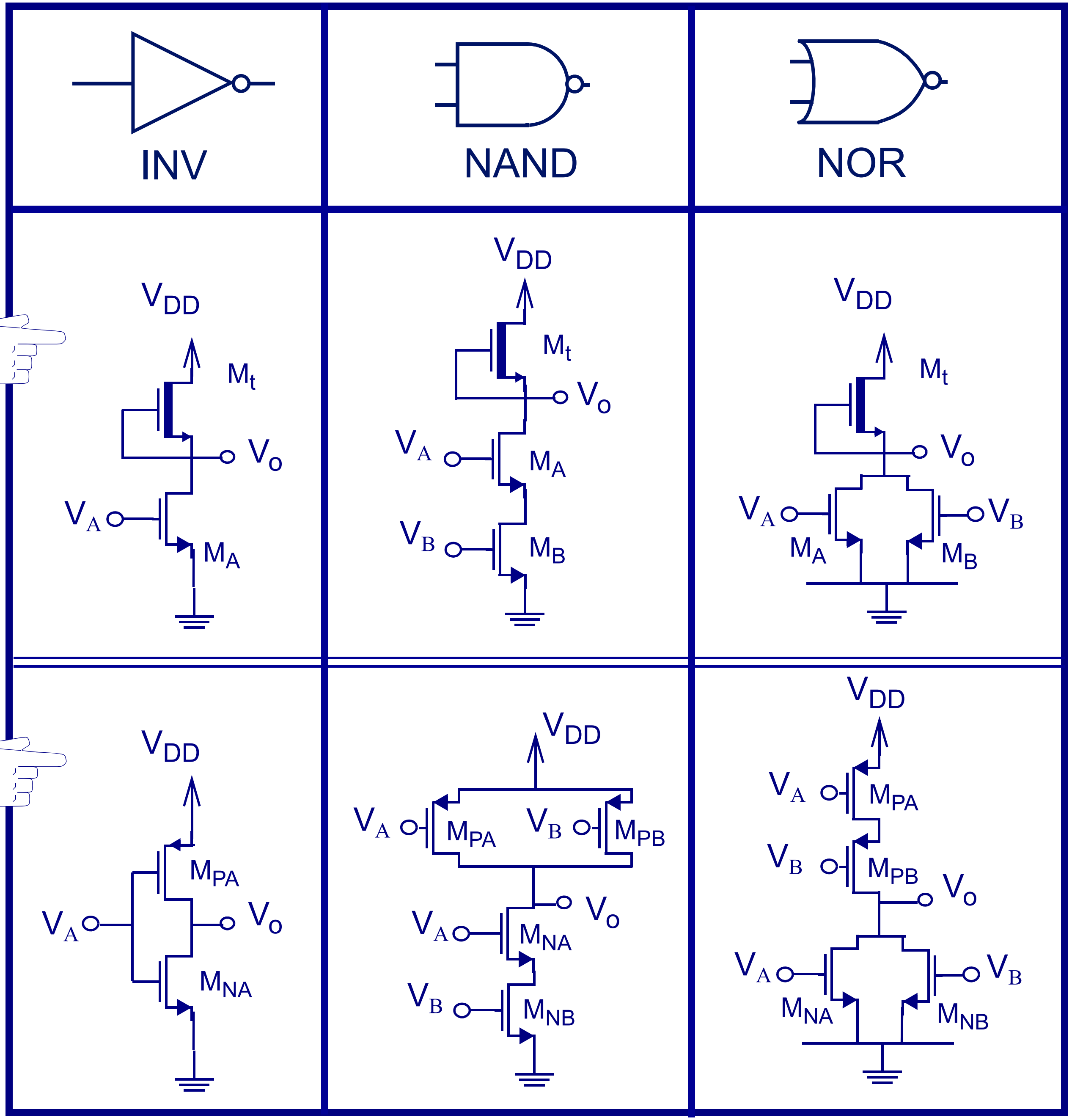
  - **Los niveles lógicos.**
  - **Margenes de ruido.**
  - **Características de entrada/salida. Fan-in, Fan-out.**
  - **Tiempo de propagación.**
  - **Consumo de potencia**.

Puertas Lógicas

- Ejemplos de implementación de puertas lógicas básicas en tecnologías MOS

Familia lógica NMOS

Familia lógica CMOS

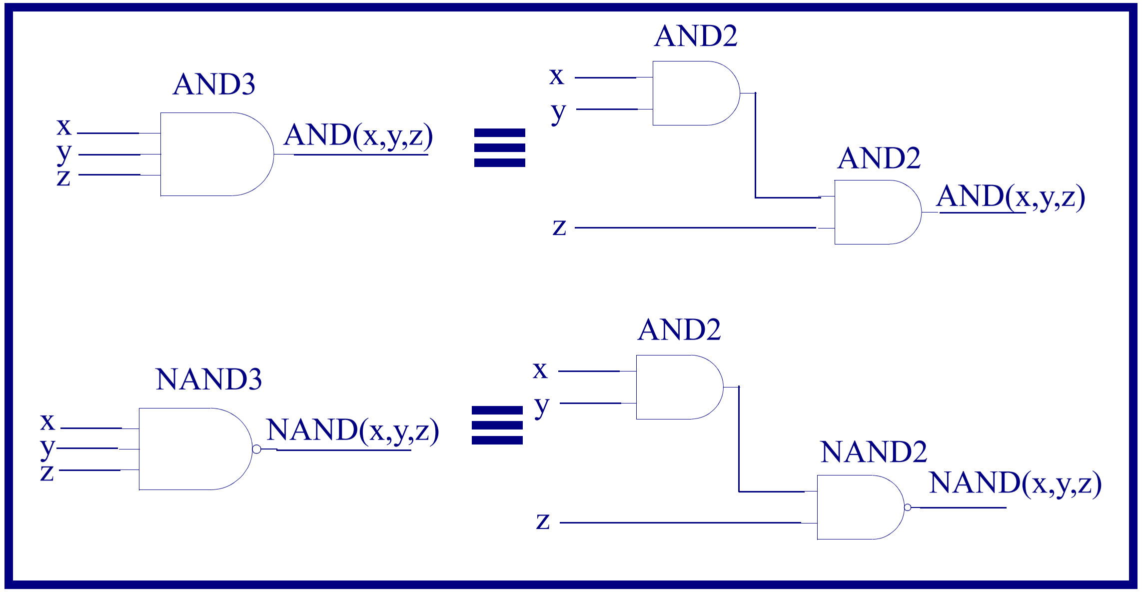


Puertas Lógicas

- Las puertas lógicas, salvo **NOT** y **BUF**, pueden expandirse para obtener operadores de múltiples entradas.

  La expansión es directa para aquellos operadores que son asociativos como **AND**, **OR**, **XOR** y **XNOR**,

  y necesita alguna operación intermedia para aquellos operadores que no lo son como **NAND**, **NOR**.



Ej: (propuesto) Construir una AND y una OR de 4 y 5 entradas respectivamente, empleando operadores lógicos de dos entradas.

Ej: (propuesto) Construir una NAND y una NOR de 4 y 5 entradas respectivamente, empleando operadores lógicos de dos entradas

Puertas Lógicas: Circuitos Lógicos

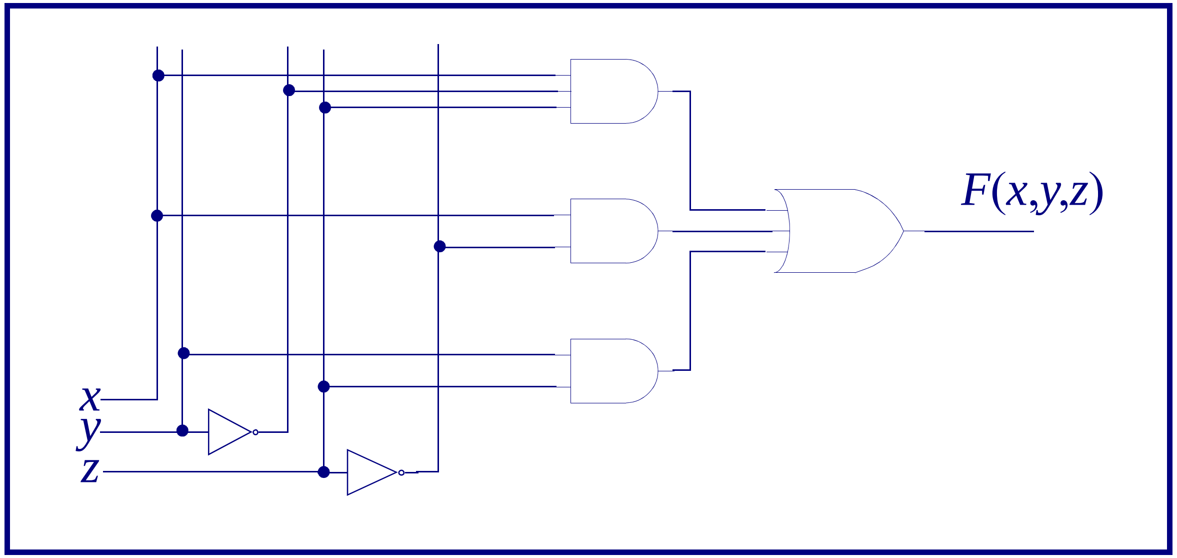
- Disponiendo de puertas **AND** y **OR** de cualquier número de entradas y puertas **NOT**, podremos construir, tomando como base una expresión que contenga estos operadores, un **circuito de puertas lógicas** que se comporte como modela dicha función.

Ej: Sea $F: \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$

$(x,y,z) \longrightarrow x$

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z + x\bar{z} + yz$$

Diagrama o circuito lógico



Ej: Dibujar el circuito lógico que se realiza físicamente la función booleana:

$$F_3(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z)$$

Funciones booleanas

Representación de funciones booleanas:

- **Expresión algebraica**: Construida con variables y operaciones booleanas. No es única.

$$F(x, y, z) = (x \bullet y) + (\bar{y} \bullet z) + (\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z})$$

$$F(x, y, z) = (x \bullet y \bullet \bar{z}) + (\bar{y} \bullet z) + (\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}) + (x \bullet y \bullet z)$$

- **Tabla de verdad**: Tabla que recoge el valor de la función para todas las combinaciones de las variables del espacio origen sobre el que se define la función. Es única.

$x\ y\ z$	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Definición:

- Se dice que dos **expresiones booleanas** son **equivalentes**:
  - Si dan lugar a la misma tabla de verdad.

Ejemplo:

$$F_1(x, y, z) = y(x + \bar{x}\bar{z}) + \overline{(y + \bar{z})}$$

$$F_2(x, y, z) = xy + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

Son equivalentes $F_1(x, y, z) \equiv F_2(x, y, z)$

Les corresponde la misma tabla de Verdad

Funciones booleanas

Definiciones:

- Se llama **literal** a una variable binaria x o a su complementaria $\overline{x}$
- Se llama **término producto** de una función booleana, a todo producto de literales
- Se llama **término producto canónico** de una función booleana, a todo término producto en el que aparezcan todas las variables de la función.
- Se llama **término suma** de una función booleana, a toda suma de literales.
- Se llama **término suma canónico** de una función booleana, a todo término suma en el que aparezcan todas las variables de la función.

Función suma de términos producto

$$F(x, y, z) = (x \bullet y) + (\bar{y} \bullet z) + (\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z})$$

Términos producto *Término producto canónico*

Función producto de términos suma

$$F_1(x, y, z) = (x + y) \bullet (\bar{y} + z) \bullet (\bar{x} + y + \bar{z})$$

Términos suma *Término suma canónica*

Funciones booleanas

Definiciones:

- Se llama **minitérmino** o **minterm** de n variables, a cada una de las funciónes booleanas de n variables formadas por un único término producto canónico.
  Cada minterm cumple la propiedad de tomar el valor lógico **1**, para una y sólo una de las 2^n combinaciones de sus variables de entrada.
  Cada minterm se suele nombrar como $\boldsymbol{m_i}$, donde i representa al valor entero de la combinación de entrada para la cual el minitérmino vale **1**.

$$\boxed{F(x, y, z) = (\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}) = m_2}$$

- Se llama **maxitérmino** o **maxterm** de n variables, a cada una de las funciónes booleanas de n variable formadas por un único término suma canónico.
  Cada maxterm cumple la propiedad de tomar el valor lógico **0**, para una y sólo una de las 2^n combinación de sus variables de entrada.
  Cada maxterm se suele nombrar como $\boldsymbol{M_i}$, donde i representa al valor entero de la combinación de entrada para la cual el maxitérmino vale **0**.

$$\boxed{F_1(x, y, z) = (x + \bar{y} + z) = M_2}$$

- Existen tantos maxterm y minterm como combinaciones de las variables de entrada.
  Por tanto, para funciones de nº de variables de entrada, existen 2^n minterms y 2^n maxterm
  Se cumple además que $m_i = \overline{M_i}$ para todo i.

$$\boxed{m_2 = (\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}) = \overline{(x + \bar{y} + z)} = \overline{M}_2}$$

Funciones booleanas

Minterm y Maxterm de tres variables. $F(x,y,z)$

$x\ y\ z$	Minterm	Término Producto	Maxterm	Término Suma
0 0 0	m_0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	M_0	$x+y+z$
0 0 1	m_1	$\bar{x}\bar{y}z$	M_1	$x+y+\bar{z}$
0 1 0	m_2	$\bar{x}y\bar{z}$	M_2	$x+\bar{y}+z$
0 1 1	m_3	$\bar{x}yz$	M_3	$x+\bar{y}+\bar{z}$
1 0 0	m_4	$x\bar{y}\bar{z}$	M_4	$\bar{x}+y+z$
1 0 1	m_5	$x\bar{y}z$	M_5	$\bar{x}+y+\bar{z}$
1 1 0	m_6	$xy\bar{z}$	M_6	$\bar{x}+\bar{y}+z$
1 1 1	m_7	xyz	M_7	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

Minterm y Maxterm de n variables. $F(x_1,x_2, ... x_n)$

En general existe 2^n mintern y maxterm para funciones de n variables

Teorema de Expansión de Shannon

$$\forall F | F: B_b^N \to B_b \text{ y } \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_b^N$$

$$\text{a) } F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \bullet F(1, x_2, \ldots, x_n)) + (\overline{x_1} \bullet F(0, x_2, \ldots, x_n))$$

$$b) \ F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + F(0, x_2, \ldots, x_n)) \bullet (\overline{x_1} + F(1, x_2, \ldots, x_n))$$

Veamos un ejemplo de aplicación del teorema a):

$$F(x, y, z) = xy + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

$$F(x, y, z) = x \cdot F(1, y, z) + \bar{x} \cdot F(0, y, z) = x \cdot (y + \bar{y}z) + \bar{x} \cdot (\bar{y}z + y\bar{z}) = xy + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

Si ahora sobre esta expresión repetimos el teorema a) para la variable *y*

$$F(x, y, z) = y \cdot F(x, 1, z) + \bar{y} \cdot F(x, 0, z) = y \cdot (x + \bar{x}\bar{z}) + \bar{y} \cdot (xz + \bar{x}z) = xy + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

Si repetimos el teorema a) para la variable *z*

$$F(x, y, z) = z \cdot F(x, y, 1) + \bar{z} \cdot F(x, y, 0) = z \cdot (xy + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) + \bar{z} \cdot (xy + \bar{x}y) = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

Llegamos finalmente a: $F(x,y,z) = m_7 + m_5 + m_1 + m_6 + m_2$

que es la suma de los minitérminos de tres variables para los cuales F(x,y,z) vale 1, según hemos visto en su tabla de verdad.

$x\ y\ z$	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Este resultado se puede generalizar

Formas canónicas de una función booleana

Vamos a aplicar el teorema de expansión de Shannon a) a cada una de las variables de una función genérica de tres variables $F(x,y,z)$, comenzamos por la variable x.

$$F(x, y, z) = x \cdot F(1, y, z) + \bar{x} \cdot F(0, y, z)$$

Repetimos el teorema a) para la variable y

$$F(x, y, z) = y \cdot [x \cdot F(1, 1, z) + \bar{x} \cdot F(0, 1, z)] + \bar{y} \cdot [x \cdot F(1, 0, z) + \bar{x} \cdot F(0, 0, z)]$$

$$F(x, y, z) = xy \cdot F(1, 1, z) + \bar{x}y \cdot F(0, 1, z) + x\bar{y} \cdot F(1, 0, z) + \bar{x}\bar{y} \cdot F(0, 0, z)$$

Repetimos el teorema a) para la variable z

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= z \cdot [xy \cdot F(1, 1, 1) + \bar{x}y \cdot F(0, 1, 1) + x\bar{y} \cdot F(1, 0, 1) + \bar{x}\bar{y} \cdot F(0, 0, 1)] + \\ &\quad \bar{z} \cdot [xy \cdot F(1, 1, 0) + \bar{x}y \cdot F(0, 1, 0) + x\bar{y} \cdot F(1, 0, 0) + \bar{x}\bar{y} \cdot F(0, 0, 0)] = \\ &= xyz \cdot F(1, 1, 1) + \bar{x}yz \cdot F(0, 1, 1) + x\bar{y}z \cdot F(1, 0, 1) + \bar{x}\bar{y}z \cdot F(0, 0, 1) + \\ &\quad xy\bar{z} \cdot F(1, 1, 0) + \bar{x}y\bar{z} \cdot F(0, 1, 0) + x\bar{y}\bar{z} \cdot F(1, 0, 0) + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cdot F(0, 0, 0) \end{aligned}$$

Vemos finalmente que: $F(x,y,z) = F(0).m_0 + F(1).m_1 + F(2).m_2 + F(3).m_3 + F(4).m_4 + F(5).m_5 + F(6).m_6 + F(7).m_7$

$F(x,y,z)$ puede expresarse como la suma del producto de cada minterm de tres variables por el valor de la función para la combinación binaria asociada a cada minterm.
Esta es la **Forma canónica de F en forma de suma de productos** (SDP).

Si repetimos el ejemplo aplicando el teorema de Shannon b) se obtendrá que $F(x,y,z)$ se puede expresar:

$$F(x,y,z) = [F(0)+M_0] . [F(1)+M_1] . [F(2)+M_2] . [F(3)+M_3] . [F(4)+M_4] . [F(5)+M_5] . [F(6)+M_6] . [F(7)+M_7]$$

$F(x,y,z)$ puede expresarse como el producto de la suma de cada maxterm de tres variables y el valor de la función para la combinación binaria asociada a cada maxterm.
Esta es la **Forma canónica de F en forma producto de sumas** (PDS).

Formas canónicas de una función booleana

$$\forall F | F: B_b^N \to B_b \text{ y } \forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_b^N$$

Forma canónica suma de minitérminos	
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{0}^{2^n - 1} (a_i \cdot m_i)$	Donde m_i es el *i*-ésimo minterm de n variables Donde a_i es el valor de la función para i, $F(i)$
$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_N (i, j, k, \ldots, p)$	donde i,j,k,...,p son los índices de los minterm para los que F toma el valor 1.
Forma canónica producto de maxitérminos	
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{0}^{2^n - 1} (a_i + M_i)$	Donde M_i es el *i*-ésimo maxterm de n variables Donde a_i es el valor de la función para i, $F(i)$
$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_N (i', j', k', \ldots, p')$	donde i,j,k,...,p son los índices de los maxterm para los que F toma el valor 0.

Formas canónicas de una función booleana

Ejemplo: $F(x, y, z) = xy + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$

$$F(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

$$F(x,y,z) = m_7 + m_5 + m_1 + m_6 + m_2$$

Se dice que $\{m_1, m_2, m_5, m_6, m_7\}$ son los Minitérminos de la función F

x y z	F	
0 0 0	0	M_0
0 0 1	1	m_1
0 1 0	1	m_2
0 1 1	0	M_3
1 0 0	0	M_4
1 0 1	1	m_5
1 1 0	1	m_6
1 1 1	1	m_7

Su expresión canónica en forma suma de productos se representa:

$$\boxed{F(x, y, z) = \sum_3 (1, 2, 5, 6, 7)}$$

Su expresión canónica en forma producto de sumas se representa:

$$\boxed{F(x, y, z) = \prod_3 (0, 3, 4)}$$

$$F(x,y,z) = M_0\, M_3\, M_4$$

$$F(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z)$$

Se dice que $\{M_0, M_3, M_4,\}$ son los Maxitérminos de la función F

Formas canónicas y formas normales de las funciones booleanas

Definiciones:

- Se dice que dos **expresiones booleanas** son **equivalentes**:
  - Si dan lugar a la misma tabla de verdad, o bien,
  - Si se pueden expresar en la misma forma canónica

x y z	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Ejemplos:

$$F_1(x, y, z) = y(x + \bar{x}\bar{z}) + \overline{(y + \bar{z})}$$

$$F_2(x, y, z) = xy + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

$$F_3(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z)$$

Les corresponde la misma tabla de Verdad

Son equivalentes $F_1(x, y, z) \equiv F_2(x, y, z) \equiv F_3(x, y, z)$

Dan lugar a la misma expresión en forma canónica $F(x, y, z) = \sum_3 (1, 2, 5, 6, 7)$

- Se dice que una expresión algebraica está **normalizada** si tiene una de estas dos formas:
  - Una suma de términos producto. Forma normal disyuntiva
  - Un producto de términos suma. Forma normal conjuntiva.

Toda función booleana puede expresarse en forma normalizada SDP y PDS

Ejemplos:

Expresión en forma normal disyuntiva, no canónica

$$F_2(x, y, z) = xy + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

Expresión en forma normal conjuntiva, forma canónica

$$F_3(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z)$$

Expresión no normalizada

$$F_1(x, y, z) = y(x + \bar{x}z) + \overline{(y + \bar{z})}$$

Puertas Lógicas: Conjunto completo de operadores

- Se dice que un conjunto de operadores es **funcionalmente completo** si cualquier función booleana puede representarse empleando únicamente operadores de ese conjunto.

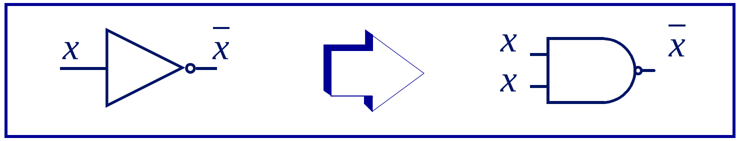
  El conjunto de operadores **AND**, **OR** y **NOT** es funcionalmente completo debido a que cualquier función booleana puede expresarse de forma canónica como suma de productos o producto de sumas, las cuales pueden realizarse mediantes los operadores antes citados.
  Las sumas mediante operadores **OR** y los productos mediante operadores **AND**.

- Puede demostrarse que los operadores **NAND** y **NOR** por separado forman también, cada uno de ellos, un conjunto completo de operadores.

  Ejemplo: $\mathrm{NAND}(x,y) = \overline{xy}$

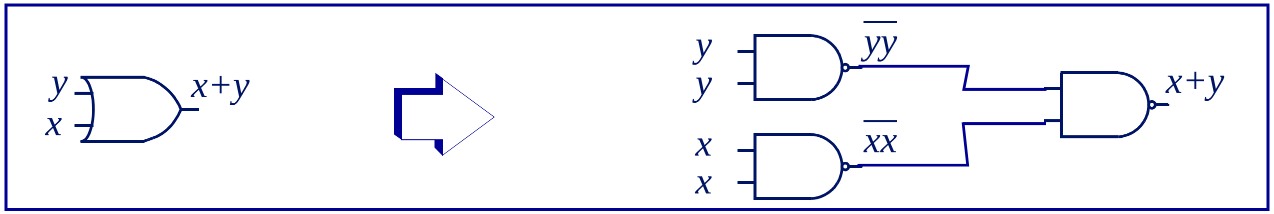
  Vamos a tratar de expresar los operadores **AND**, **OR** y **NOT** mediante operadores **NAND**.

$$\mathrm{NOT}(x) = \overline{x} = \overline{xx} = \mathrm{NAND}(x,x)$$



$$\mathrm{AND}(x,y) = xy = \mathrm{NOT}(\overline{xy}) = \mathrm{NOT}\ (\mathrm{NAND}(\overline{xy})) = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(x,y),\mathrm{NAND}(x,y))$$

$$\mathrm{OR}(x,y) = x{+}y = \mathrm{NOT}(\overline{x}\ \overline{y}) = \mathrm{NAND}(\overline{x}\ \overline{y}) = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(x,x),\mathrm{NAND}(y,y))$$



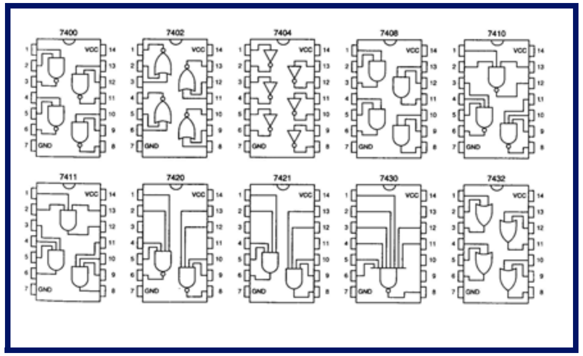
Propuesta: (Repetir este ejemplo para el operador NOR)

Escalas de integración

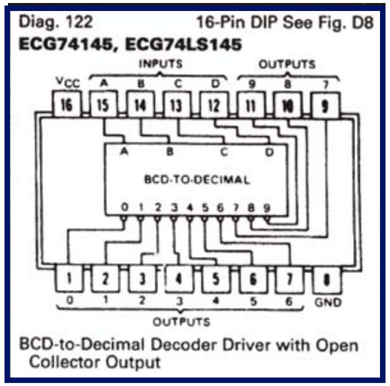
- Las puertas lógicas se fabrican sobre obleas o láminas de material semiconductor, generalmente silicio, y se encapsulan en bloques cerámicos o plásticos, formando componentes compactos denominados **circuitos integrados** (IC).

  Según el nº de puertas lógicas, o de transistores, incluidos en un IC, y por tanto de la complejidad de este, se habla diferentes escalas de integración

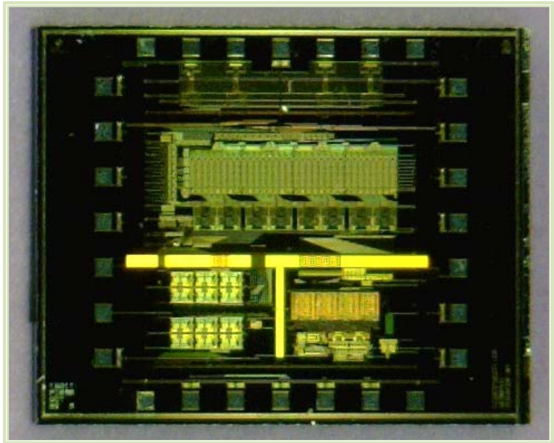
SSI, **S**mall **S**cale **I**ntegration	Hasta 12 puertas	Hasta 100 transistores
MSI, Medium **S**cale **I**ntegration	Hasta 100 puertas	Hasta 1.000 transistores
LSI, Large **S**cale **I**ntegration	Hasta 1.000 puertas	Hasta 10.000 transistores
VLSI, Very **L**arge **S**cale **I**ntegration	Hasta 10.000 puertas	Hasta 100.000 transistores
ULSI. **U**ltra **L**arge **S**cale **I**ntegration	Mas de 10.000 puertas	Mas de 100.000 transistores



Chips SSI

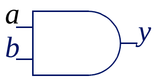
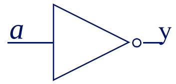
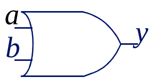
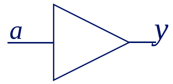
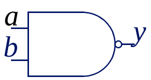
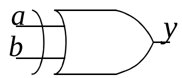


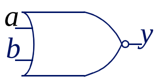
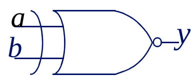
Chip LSI



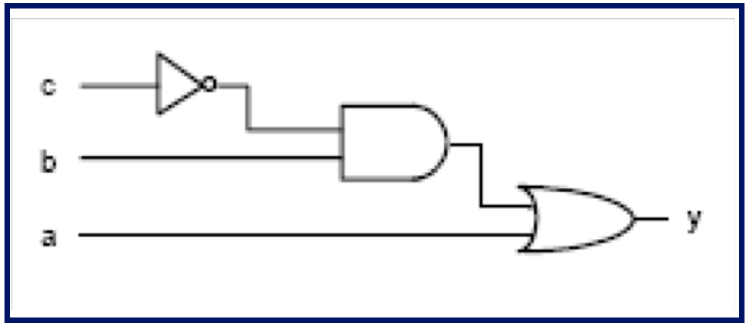
Chip VLSI

Lenguajes de Descripción del Hardware (HDL): Operadores Lógicos

Nombre	Símbolo Función	HDL	Nombre	Símbolo	HDL
AND	 $F = x \bullet y$	i) y <= a and b; ii) y <= a when b = '1' else '0';	INV	 $y = \bar{a}$	i) y <= not a; ii) y <= '1' when a = '0' else '0';
OR	 $y = a + b$	i) y <= a or b; ii) y <= a when b = '0' else '1';	BUFF	 $y = a$	i) y <= a; ii) y <= '1' when a = '1' else '0';
NAND	 $y = \overline{a \bullet b}$	i) y <= a nand b; ii) y <= '0' when (a = '1') and (b = '1') else '1';	XOR	 $y = a\bar{b} + \bar{a}b$ $y = a \oplus b$	i) y <= a xor b; ii) y <= not a when b = '1' else a; iii) y <= '0' when a = b else '1';

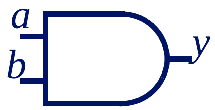
NOR	
	$y = \overline{a + b}$
		i) y <= a nor b;
		ii) y <= '1' when (a = '0') and (b = '0') else '0';
			XNOR	
				$y = ab + \bar{a}\bar{b}$
				$y = \overline{a \oplus b}$
					i) y <= not (a xor b);
					ii) y <= a when b = '1' else a;
					iii) y <= '1' when a = b else '0';

Lenguajes de Descripción del Hardware (HDL): Circuitos Lógicos



$$y = F(a, b, c) \;=\; a + \bar{c}b$$

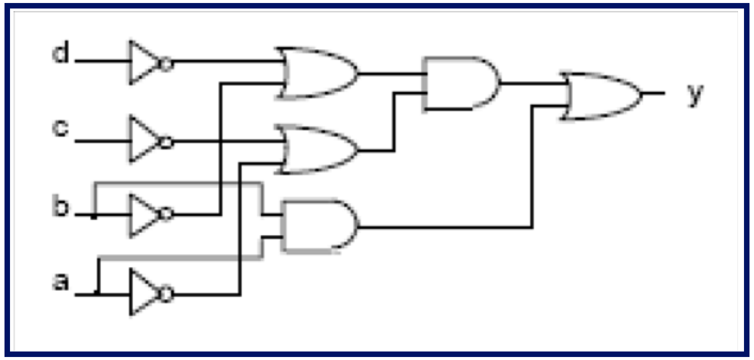
y <= a or (b **and** not c);



AND.vhd

```
library IEEE;
use IEEE.std_logic_1164.all;
entity and2 is
   port (
            a : in STD_LOGIC;
            b : in STD_LOGIC;
             y : out STDLOGIC;
           );
end and2;

architecture and2 of and2 is
begin
        y <= a and b;
end and2;
```



$$y = F(a, b, c, d) \;=\; ab + (\bar{b} + d)(\bar{c} + \bar{a})$$

y <= ((**not** d **or not** b) **and** (**not** c **or not** a)) **or** (b **and** a);