CASTILLA Y LEÓN 2018

TURNO: 1, 2 Y 3 · EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Un planeta B de masa m orbita alrededor de una estrella E de masa M mucho mayor que m. Su órbita es circular de radio $r = 1.5 \times 10^8$ km y periodo $T = 1$ año.

a. Supóngase ahora que B orbita alrededor de E siguiendo una órbita elíptica con una distancia en el perihelio (P) $r_{\mathrm{P}} = 1.5 \times 10^8$ km y una distancia en el afelio (A) $r_{\mathrm{A}} = 2.5 \times 10^8$ km. Utilizando el hecho de que el radio medio de una órbita elíptica es la longitud de su semieje mayor, hállese el periodo de la órbita elíptica, T_{e}, en años.

b. ¿En cuál de ambas órbitas tiene el planeta mayor energía total? Justifíquese razonadamente la respuesta. ¿Cómo es la velocidad en el punto P en comparación con la del punto A? Calcúlese la proporción entre ambas.

c. Si m es 10^5 veces menor que M, ¿cuántos km se aleja de E el centro de masas del sistema en la órbita elíptica cuando el planeta se halla en su afelio?

d. ¿Cuáles son los valores de las masas de la estrella y del planeta, M y m? ¿Cuál es la velocidad de escape para una nave espacial en la superficie del planeta B si éste tiene un diámetro de 20 000 km? ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$)

e. Si cuando B se encuentra en su afelio la nave parte hacia E a velocidad $v = 0.8c$, ¿cuánto tiempo tarda en alcanzar E, medido en el sistema de referencia de la estrella? ¿Cuánto tiempo mide el tripulante de la nave? ¿Por qué? Supóngase que todo el trayecto se realiza a velocidad constante —despréciense las aceleraciones de partida y llegada.

Solución

a. Para calcular el periodo de la órbita elíptica, T_{e}, aplicamos la TERCERA LEY DE KEPLER[1] tanto a la órbita circular como a la elíptica:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T_{\mathrm{e}}}{r_{\mathrm{e}}^3} \Rightarrow T_{\mathrm{e}} = \left(\frac{r_{\mathrm{e}}}{r}\right)^{3/2} T,$$

donde

$$r_{\mathrm{e}} = \frac{r_{\mathrm{P}} + r_{\mathrm{A}}}{2} = \frac{(2.5 + 1.5) \times 10^8}{2} = 2 \times 10^8\ \mathrm{km}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{T_{\mathrm{e}} = 1.54\ \text{años}}$$

b. Para calcular la ENERGÍA TOTAL utilizamos la expresión:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad orbital se calcula como[2]:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

podemos escribir:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

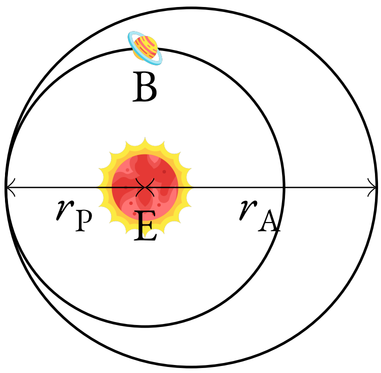

Figura 1: Esquema de las órbitas circular y elíptica en las que se mueve el planeta B alrededor de la estrella E. Iconos creados por wanicon - Flaticon.

[1] *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica:*

$$\frac{T^2}{r^3} = \mathrm{cte}$$

[2] Aplicando que la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Como $r_e > r$, tenemos que $\boxed{E < E_e}$, pues la energía de la órbita circular es más negativa, por lo que en la ÓRBITA CIRCULAR el SISTEMA estará MÁS LIGADO.

Para comparar las velocidad en los puntos P y A, aplicamos la SEGUNDA LEY DE KEPLER[3], teniendo en cuenta que la velocidad orbital siempre es tangente a la trayectoria/perpendicular en afelio y perihelio al vector posición con referencia en el foco:

[3] *El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales*, lo que equivale a la conservación del momento angular:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{cte}$$

$$L_A = L_P$$

$$mr_A v_A = mr_P v_P$$

Como $r_P < r_A$, $\boxed{v_P > v_A}$. Calculando la PROPORCIÓN v_P/v_A:

$$\boxed{\frac{v_P}{v_A}} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{2.5 \times 10^8}{1.5 \times 10^8} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

c. La posición del CENTRO DE MASAS viene dada por:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Para calcular cuánto se aleja el centro de masas de E, colocamos el origen en la estrella:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m\mathbf{r}_A}{M + m} \approx \frac{m\mathbf{r}_A}{M}$$

Calculamos el módulo de $\mathbf{r}_{CM}$, sustituyendo $m = 10^{-5} M$ y $r_A = 2.5 \times 10^8$ km:

$$\boxed{r_{CM} = 2500\ \text{km}}$$

Se aleja de E 2500 km.

d. Aplicamos de nuevo la TERCERA LEY DE KEPLER, utilizando la formulación matemática de Newton:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Despejamos M:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituyendo valores[4]:

[4] $r = 1.5 \times 10^8$ km, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$ y $T = 1$ año, teniendo cuidado de convertir adecuadamente unidades al SI.

$$\boxed{\begin{aligned} M &= 2 \times 10^{30}\ \text{kg} \\ m &= 10^{-5} M = 2 \times 10^{25}\ \text{kg} \end{aligned}}$$

Para calcular la VELOCIDAD DE ESCAPE imponemos que la energía total sea nula[5]:

[5] Cuidado porque para este apartado llamamos M a la masa del planeta y m a la masa de la nave espacial.

$$E = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{escape}}^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Longrightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Como la nave espacial se encuentra en la superficie del planeta: $r = R = D/2 = 10\,000$ km, por lo que sustituyendo valores[6]:

[6] $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$, $M = 2 \times 10^{25}$ kg y $R = 10\,000\ \text{km} = 10^7$ m.

$$\boxed{v_{\text{escape}} = 16\,334\ \text{m/s} = 16.3\ \text{km/s}}$$

e. $v = 0.8c$ es una VELOCIDAD RELATIVISTA por lo que se producirá una DILATACIÓN TEMPORAL en el sistema de referencia de la estrella. Llamamos

$$\Delta t \longrightarrow \text{tiempo en el reloj del tripulante}$$
$$\Delta t' \longrightarrow \text{tiempo en el sistema de referencia de la estrella}$$

cumpliéndose que

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Como viaja a velocidad constante:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Longrightarrow \boxed{\Delta t} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{r_A}{v} = \frac{2.5 \times 10^{11}\ \text{m}}{0.8 \cdot 3 \times 10^8\ \text{m/s}} = \boxed{1041.7\ \text{s} = 17.4\ \text{min}}$$

En el sistema de referencia de la estrella:

$$\boxed{\Delta t'} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = \boxed{28.9\ \text{min}},$$

lo que supone una dilatación de más de 10 min, equivalente a un 66 % aproximadamente.