



MADRID 2018

EJERCICIO 2

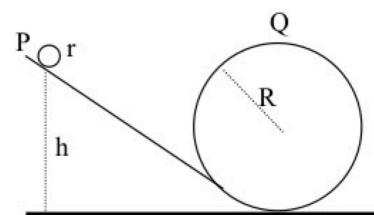
R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Un cilindro homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar siguiendo una vía en forma de lazo circular de radio R , como indica la figura. El cilindro parte del reposo en el punto P, a una altura h por encima de la parte inferior del lazo. Calcular:

- Su energía cinética cuando alcanza el punto Q.
- Su aceleración centrípeta en dicho punto admitiendo que no se sale de la vía.
- El mínimo valor de h para que el cilindro llegue a Q sin salirse de la vía.

Suponiendo que h es mayor que este valor mínimo:

- Obtener una expresión para la fuerza normal ejercida por la vía sobre el cilindro en el punto Q.



Solución

- Como nos dicen que el cilindro rueda sin deslizar, podemos imponer la CONSERVACIÓN de la ENERGÍA MECÁNICA, pues las fuerzas que actúan son el peso (conservativa) y el rozamiento, pero sin disipar energía¹:

$$\begin{aligned} E_P &= E_Q \\ U_P &= U_Q + K_Q \\ mg(h + r) &= mg(2R - r) + K_Q \end{aligned}$$

de donde despejamos $K_Q = mg(h + 2r - 2R)$.

- La ACELERACIÓN CENTRÍPETA en el punto Q, a_c^Q , viene dada por²

$$a_c^Q = \frac{v_Q^2}{R - r} \quad (1)$$

Para calcular la velocidad que tiene en Q hacemos uso del resultado obtenido en el apartado anterior³:

$$\begin{aligned} K_Q &= mg(h + 2r - 2R) = \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2}I\omega_Q^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}mr^2 \frac{v_Q^2}{r^2} \\ &= \frac{3}{4}mv_Q^2 \end{aligned}$$

Despejamos v_Q^2 :

$$v_Q^2 = \frac{4g}{3}(h + 2r - 2R) \quad (2)$$

y sustituimos en (1):

$$a_c^Q = \frac{4g}{3(R - r)}(h + 2r - 2R)$$

¹ Esto es así porque el punto de contacto entre el cilindro y la vía no se desplaza, lo que implica que el TRABAJO VIRTUAL de la FUERZA ROZAMIENTO es NULO. En P el cilindro solo tiene energía potencial gravitatoria, U_P , mientras que en Q tiene energía potencial gravitatoria, U_Q , y energía cinética K_Q (tanto de traslación como de rotación en principio). IMPORTANTE: hay que tener en cuenta el radio del cilindro, r , para las alturas, que se calculan desde su centro de masas.

² OJO porque el centro de masas del cilindro está a una distancia $R - r$ del centro del lazo.

³ Teniendo en cuenta que en Q tiene ENERGÍA CINÉTICA tanto de TRASLACIÓN como de ROTACIÓN. Para esta última necesitamos conocer el MOMENTO de INERCIA, que al tratarse de un cilindro homogéneo de radio r y masa m viene dado por

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

Además, como rueda sin deslizar, sabemos que las velocidades lineal y angular están relacionadas a través de la expresión

$$v = \omega r$$

- (c) Tanto el peso como la normal (reacción) actúan como fuerzas centrípetas causantes de que el cilindro describa esa trayectoria circular a lo largo de la vía (ver figura 1). La fuerza normal (reacción de la vía) depende de la velocidad a la que se mueva el cilindro, que a su vez depende de la altura h desde la que parte en P (ecuación 2). En el caso límite, el cilindro pasará tan despacio por Q que el peso por sí solo ya será capaz de proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para mantenerlo en la trayectoria circular. En este caso tendremos:

$$P = f_c$$

$$mg = ma_c$$

$$g = \frac{4g}{3(R-r)}(h + 2r - 2R)$$

de donde podemos despejar el valor mínimo de h

$$h_{\min} = \frac{3}{4}(R-r) + 2(R-r) = \frac{11}{4}(R-r)$$

Suponiendo que $h > h_{\min}$:

- (d) Como se ve en la figura 1, en el caso general en el que el cilindro pasa por Q con una cierta velocidad, se cumple que ambas fuerzas, el peso y la normal, actúan como fuerzas centrípetas, por lo que se tiene que

$$P + N = f_c$$

de donde podemos despejar la fuerza normal N

$$N = f_c - P$$

$$= ma_c - mg$$

$$= \frac{4mg}{3(R-r)}(h + 2r - 2R) - mg$$

$$= mg \left[\frac{4}{3(R-r)}(h + 2r - 2R) - 1 \right]$$

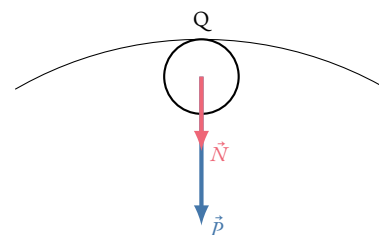


Figura 1: Fuerzas que actúan sobre el cilindro en el punto Q.