



PAÍS VASCO 2018

EJERCICIO F1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

La cuerda tensa de una guitarra tiene una longitud de 0.8 m. Cuando tocamos la nota 'Do' se crea una onda transversal que se desplaza con una velocidad de 105.6 m/s. Sabiendo que se crea el 4º armónico de una onda estacionaria:

- Calcula la longitud de onda y la frecuencia de dicha onda.
- Expresa la ecuación de dicha onda sabiendo que la elongación máxima de un punto que se encuentra a 0.1 m de uno de los extremos es de 1 cm.
- Calcula la velocidad máxima de dos puntos situados a 0.3 m y 0.4 m de un extremo. Interpreta el resultado.

Solución

- (a) Se trata de una cuerda fija por los dos extremos, por lo que se cumple¹

$$L = n \frac{\lambda}{2},$$

donde $L = 0.8$ m es la longitud de la cuerda, $n = 4$ por tratarse del 4º armónico y λ es la longitud de onda de la onda. Despejando:

$$\lambda = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 0.8}{4} = 0.4 \text{ m}$$

La LONGITUD DE ONDA, λ , y la FRECUENCIA, f , están relacionadas a través de la velocidad de propagación de la onda, v :

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{105.6}{0.4} = 264 \text{ Hz}$$

- (b) La ECUACIÓN GENERAL de una ONDA ESTACIONARIA viene dada por²

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t),$$

donde A es la amplitud de la onda, $k = 2\pi/\lambda$ el número de onda, x la posición, $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular y t el tiempo.

Calculamos lo primero k y ω :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 264 = 528\pi \text{ rad/s}$$

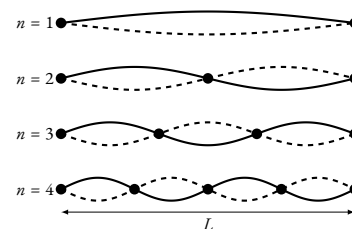
Utilizamos la información que nos da el enunciado³:

$$y(0.1, t) = A \sin(5\pi \cdot 0.1) \cos(528\pi t)$$

$$= A \cdot 1 \cdot \cos(528\pi t) = A \cos(528\pi t)$$

de donde es fácil ver que la elongación máxima se alcanzará cuando $\cos(528\pi t) = 1$, por lo que $A = 0.01 \text{ m}$.

¹ No es difícil deducir la relación entre la longitud de la cuerda, L , y las longitudes de onda, λ , de las posibles ondas estacionarias que ésta puede *soportar*:



Esta frecuencia equivale al 'Do' del primer traste de la segunda cuerda:



² Recordemos que una onda estacionaria se crea por INTERFERENCIA de dos ondas, de forma que la amplitud de la onda resultante es doble de la amplitud de las ondas originales.

³ La elongación máxima de un punto que se encuentra a 0.1 m de uno de los extremos es de 1 cm = 0.01 m.

(c) La VELOCIDAD puede obtenerse derivando⁴ la ecuación del desplazamiento,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 0.01 \sin(5\pi x) \cos(528\pi t) \\ v(x, t) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -0.01 \cdot 528\pi \sin(5\pi x) \sin(528\pi t) \\ &= -5.28\pi \sin(5\pi x) \sin(528\pi t) \end{aligned}$$

⁴ OJO que si queremos utilizar la EXPRESIÓN ATAJO $v_{\text{máx}} = A\omega$ necesitamos incluir el término $\sin(kx)$ en la amplitud, de forma que tendríamos $v_{\text{máx}} = A \sin(kx)\omega$.

y calculando el valor máximo⁵:

$$v_{\text{máx}}(x) = -5.28\pi \sin(5\pi x)$$

⁵ Es fácil ver que el valor máximo se obtiene cuando $\sin(528\pi t) = 1$.

Sustituimos para los puntos de interés:

$$x = 0.3 \text{ m} \rightarrow v_{\text{máx}}(0.3) = -5.28\pi \sin(5\pi \cdot 0.3) = 5.28\pi \text{ m/s} \approx 16.6 \text{ m/s}$$

$$x = 0.4 \text{ m} \rightarrow v_{\text{máx}}(0.4) = -5.28\pi \sin(5\pi \cdot 0.4) = 0 \text{ m/s}$$

lo que es compatible con la forma de la onda:

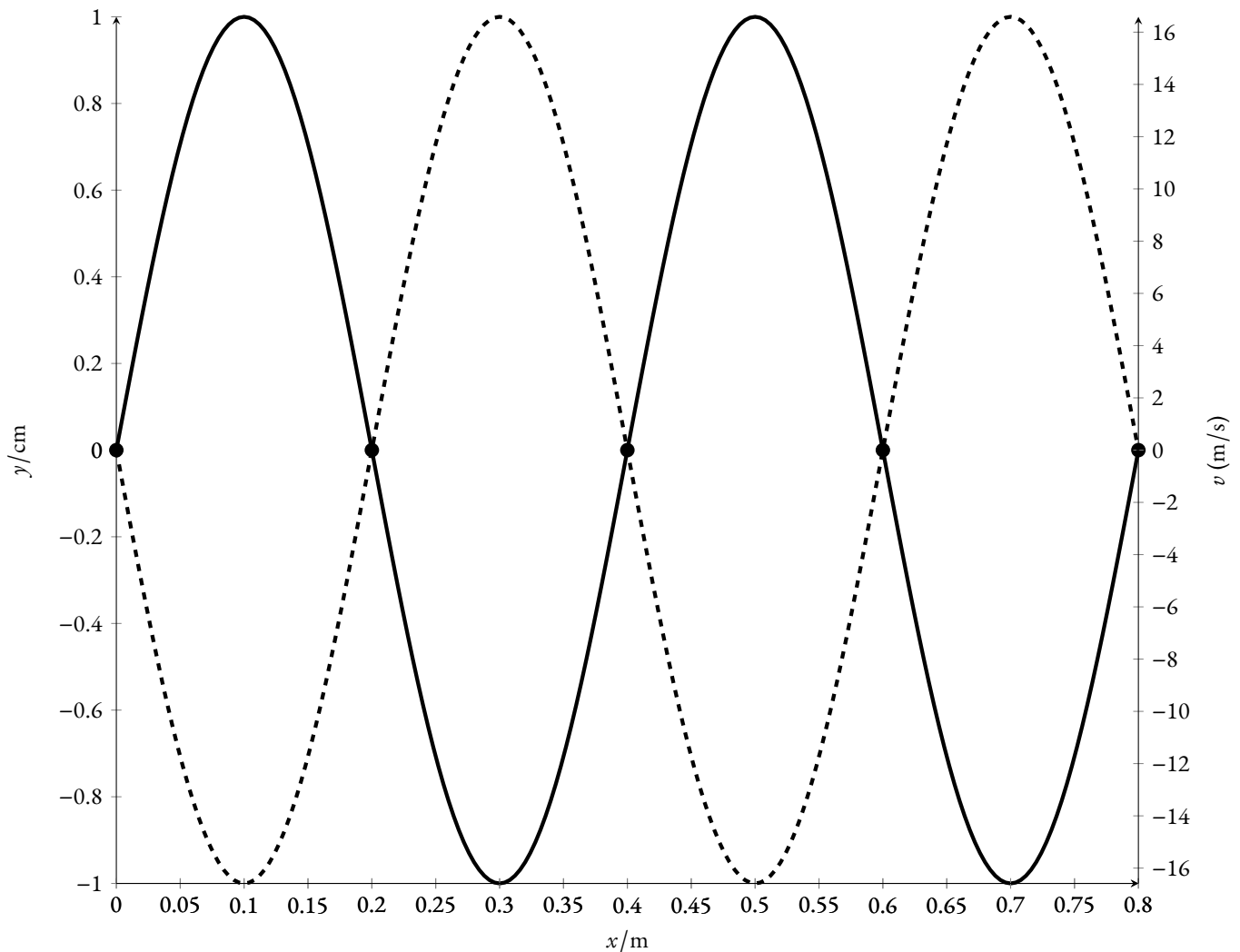


Figura 1: Gráficos del desplazamiento (eje izquierdo, línea sólida) y de la velocidad (eje derecho, línea discontinua) en $t = 0$ s. En $x = 0.3$ m la onda está *subiendo*, por lo que su velocidad es máxima y positiva. $x = 0.4$ m es un NODO, por lo que la onda no vibra y por tanto su velocidad de vibración es nula.