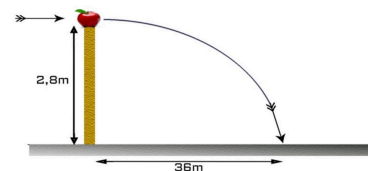


CANTABRIA 2018

OPCIÓN 1 · EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Una manzana de 170 g está colocada sobre un poste de 2.8 m de altura. Una flecha de 45 g moviéndose horizontalmente a 130 m/s pasa horizontalmente a través de la manzana y cae al suelo a una distancia de 36 m de la base del poste:



- ¿A qué distancia del poste cae la manzana?
- ¿Con qué ángulo llega la flecha al suelo?
- En el momento de comenzar la caída de la manzana otro tirador, situado en el suelo a la derecha del poste, lanza otra flecha a 130 m/s con un ángulo de 10° respecto a la horizontal. ¿En qué punto deberá situarse para interceptar la manzana?

Despreciar cualquier efecto de fricción en el poste o de rozamiento en el aire.

Solución

- Para saber a qué distancia cae la manzana necesitamos conocer su velocidad inicial tras ser atravesada por la flecha¹. Imponemos la CONSERVACIÓN del MOMENTO LINEAL en la colisión²:

$$p_{\text{antes}} = p_{\text{después}}$$

$$m_f \cdot v_f = m_m \cdot v'_m + m_f \cdot v'_f$$

de donde podemos despejar la velocidad de la manzana v'_m :

$$v'_m = \frac{m_f}{m_m} (v_f - v'_f), \quad (1)$$

donde m_f y m_m son las masas de la flecha y de la manzana, respectivamente; v_f es la velocidad de la flecha antes de atravesar la manzana; y v'_m y v'_f son las velocidades de la manzana y de la flecha después de la colisión, respectivamente.

A partir del dato del ALCANCE, Δx , podemos conocer la velocidad de la flecha después de atravesar la manzana. Para ello escribimos las ECUACIONES del MOVIMIENTO de la FLECHA³:

$$x_f(t) = x_{0_f} + v'_f \cdot t$$

$$y_f(t) = y_{0_f} + v_{0_{y_f}} \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

donde $x_{0_f} = 0$, v'_f es lo que queremos conocer, $y_{0_f} = h$, $v_{0_{y_f}} = 0$ y $a = -g$. Por lo que las ECUACIONES PARTICULARIZADAS quedan:

$$x_f(t) = v'_f \cdot t \quad (2a)$$

$$y_f(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2b)$$

El ALCANCE se obtiene imponiendo $y_f(t_{\text{caída}}) = 0$, despejando el tiempo de caída de (2b) y sustituyéndolo en x_f (2a):

$$y_f(t_{\text{caída}}) = h - \frac{1}{2} g t_{\text{caída}}^2 = 0 \rightarrow t_{\text{caída}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

¹ Al atravesar la manzana, la flecha cede parte de su energía cinética a la manzana, de forma que la flecha se frena y la manzana se acelera.

² Omitimos la notación vectorial pues todo ocurre en una dimensión (mismo sentido de hecho).

³ Un MRU en la dirección horizontal y un MRUA (caída libre) en la dirección vertical. Tomamos el origen en la base del poste, con sentidos positivos hacia arriba y hacia la derecha.

Sustituimos en (2a):

$$\text{ALCANCE}_f = \Delta x_f = x_f(t_{\text{caída}}) = v'_f \cdot \sqrt{\frac{2b}{g}}$$

Despejamos v'_f :

$$v'_f = \Delta x_f \cdot \sqrt{\frac{g}{2b}}$$

Sustituyendo v'_f en (1):

$$v'_m = \frac{m_f}{m_m} \left(v_f - \Delta x_f \cdot \sqrt{\frac{g}{2b}} \right) \quad (3)$$

Ahora escribimos las ECUACIONES del MOVIMIENTO de la MANZANA para ver dónde cae⁴:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x_{0_m} + v'_m \cdot t \\ y_m(t) &= y_{0_m} + v_{0_{y_m}} \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

donde $x_{0_m} = 0$, v'_m viene dada por (3), $y_{0_m} = b$, $v_{0_{y_m}} = 0$ y $a = -g$.

PARTICULARIZANDO⁵:

$$x_m(t) = v'_m \cdot t \quad (4a)$$

$$y_m(t) = b - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4b)$$

El tiempo de caída de la manzana es el mismo que el de la flecha⁶:

$$t_{\text{caída}} = \sqrt{\frac{2b}{g}}$$

Así que sustituyendo en (4a) tenemos el ALCANCE de la MANZANA:

$$\text{ALCANCE}_m = \Delta x_m = x_m(t_{\text{caída}}) = v'_m \cdot \sqrt{\frac{2b}{g}}$$

Sustituyendo v'_m de (3) tenemos:

$$\Delta x_m = \frac{m_f}{m_m} \left(v_f \cdot \sqrt{\frac{2b}{g}} - \Delta x_f \right),$$

donde $m_f = 45 \text{ g}$, $m_m = 170 \text{ g}$, $v_f = 130 \text{ m/s}$, $b = 2.8 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ y $\Delta x_f = 36 \text{ m}$:

$$\Delta x_m = 16.5 \text{ m}$$

- (b) Para saber con qué ÁNGULO llega la flecha al suelo necesitamos escribir primero la ECUACIÓN de la VELOCIDAD de la FLECHA⁷:

$$v_{x_f}(t) = v'_f = \Delta x_f \cdot \sqrt{\frac{g}{2b}} \quad (5a)$$

$$v_{y_f}(t) = v_{0_{y_f}} - g t = -g t \quad (5b)$$

La velocidad con la que llega la flecha al suelo se obtiene sustituyendo $t = t_{\text{caída}}$ en (5):

$$\begin{aligned} v_{x_f}(t_{\text{caída}}) &= \Delta x_f \cdot \sqrt{\frac{g}{2b}} \\ v_{y_f}(t_{\text{caída}}) &= -g t_{\text{caída}} = -g \sqrt{\frac{2b}{g}} = -\sqrt{2gb} \end{aligned}$$

⁴ También un MRU en la dirección horizontal y un MRUA (caída libre) en la dirección vertical.

⁵ La única diferencia con la flecha es la velocidad inicial.

⁶ Esto se puede ver imponiendo $y_m = 0$ y despejando t de (4b).

⁷ Recordemos: MRU en horizontal, MRUA en vertical.

El ángulo se obtiene a partir de la tangente⁸:

$$\alpha = \arctan \left[\frac{v_{y_f}(t_{\text{caída}})}{v_{x_f}(t_{\text{caída}})} \right] = \arctan \left(\frac{-\sqrt{2gb}}{\Delta x_f \cdot \sqrt{\frac{g}{2b}}} \right) = \arctan \left(\frac{-2b}{\Delta x_f} \right) = -8.8^\circ$$

- (c) Se trata de un problema de ENCUENTROS, por lo que lo primero escribimos las ECUACIONES del MOVIMIENTO de la MANZANA (4) y de la nueva FLECHA⁹:

$$\begin{aligned} x_f(t) &= x_{0_f} + v_{x_f} \cdot t \\ y_f(t) &= y_{0_f} + v_{0_{y_f}} \cdot t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Nos dicen que el tirador está en el suelo, por lo que $y_{0_f} = 0$. Respecto a las componentes de la velocidad, nos dicen que lanza otra flecha a $v_0 = 130 \text{ m/s}$ con un ángulo $\alpha = 10^\circ$. Se puede demostrar que el tirador ha de colocarse a la derecha de donde cae la manzana¹⁰, por lo que lanzará la flecha hacia la izquierda¹¹:

$$\begin{aligned} v_{x_f} &= -v_0 \cos \alpha \\ v_{0_{y_f}} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

PARTICULARIZANDO:

$$x_f(t) = x_{0_f} - v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (6a)$$

$$y_f(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6b)$$

donde x_{0_f} es lo que nos piden. El ENCUENTRO se producirá cuando las POSICIONES de la manzana y de la flecha COINCIDAN, es decir, (4a) = (6a) y (4b) = (6b):

$$v'_m \cdot t = x_{0_f} - v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (7)$$

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

Despejamos t de (8):

$$t = \frac{h}{v_0 \sin \alpha}$$

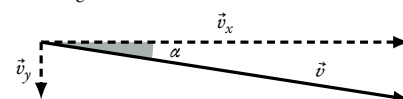
y lo sustituimos en (7):

$$x_{0_f} = (v'_m + v_0 \cos \alpha) \cdot t = (v'_m + v_0 \cos \alpha) \cdot \frac{h}{v_0 \sin \alpha} = \frac{h v'_m}{v_0 \sin \alpha} + h \cot \alpha,$$

con $h = 2.8 \text{ m}$, v'_m dada por (3), $v_0 = 130 \text{ m/s}$ y $\alpha = 10^\circ$. SUSTITUYENDO:

$$x_{0_f} = 18.6 \text{ m}$$

⁸ Componentes de la velocidad de la flecha cuando llega al suelo:



⁹ MRU en la dirección horizontal y MRUA (caída libre) en la dirección vertical.

¹⁰ Si no es así, nos sale una solución en la que el tirador debería estar situado a la izquierda del poste, lo que contradice el enunciado.

¹¹ La componente x de la velocidad será por tanto negativa.