OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1. Dos cuerpos, A y B, el cuerpo A de masa $4.0\ 10^7$ kg y el cuerpo B de masa $16.0\ 10^7$ kg, se encuentran fijos en dos puntos del plano (X,Y), el cuerpo A en el punto (–300, 0) y el cuerpo B en el punto (600, 0), con las distancias dadas en metros.

En el punto (0, 0) se encuentra situada una esfera de masa 1 kg.

a) [1 PUNTO] Hallar la fuerza gravitatoria ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera.

b) [0,5 PUNTOS] Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (0, 0) hasta el punto (0, 10).

c) [0,5 PUNTOS] Describir brevemente el concepto de 'potencial gravitatorio'.

2. Un oscilador armónico está formado por un muelle de constante elástica 20 N m^{-1} y un cuerpo sólido de masa 0.5 kg.

a) [1 PUNTO] Si el desplazamiento del cuerpo unido al muelle viene descrito por la ecuación

$$x(t) = 5 \cos\left(\omega t + \phi\right)$$

hallar los valores de ω y de ϕ sabiendo que en el instante inicial $t = 0$ su posición es nula $x\ (t = 0) = 0$ m.

b) [1 PUNTO] Hallar la energía cinética que tiene el cuerpo en el punto central de la oscilación.

3. Una lámina horizontal de vidrio de índice de refracción 1.55 de caras plano-paralelas, con aire encima de ella, reposa sobre una capa de agua, de índice de refracción 1.33. Desde el aire, sobre la lámina de vidrio, incide un rayo de luz monocromática de longitud de onda 460 nm, con ángulo de incidencia de 30º. Determínese:

a) [1 PUNTO] El valor del ángulo que forma el rayo emergente de la lámina de vidrio hacia el agua con la normal a la misma.

b) [1 PUNTO] La longitud de onda de la luz que atraviesa el vidrio, sabiendo que la frecuencia de la luz incidente y la frecuencia de la luz refractada son iguales.

Datos: 1 nm = 10^{-9} m.

4. Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión

$$B(t) = 10 \text{ sen } (5t)$$

(en unidades del SI) atraviesa perpendicularmente una espira circular de radio 100 cm.

a) [1 PUNTO] Hallar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

b) [0,5 PUNTOS] Hallar la fuerza electromotriz máxima de la corriente inducida.

c) [0,5 PUNTOS] Explicar brevemente el 'principio de inducción de Faraday'.

5. La actividad de una muestra de una sustancia radiactiva queda dividida por 8 cuando han transcurrido 4000 días.

a) [1 PUNTO] Hallar la constante de desintegración y el período de semidesintegración de dicha sustancia.

b) [1 PUNTO] Si el número inicial de átomos radiactivos en la muestra era de $1.0\ 10^{22}$ átomos, ¿cuál será la actividad de la muestra al cabo de 16000 días?

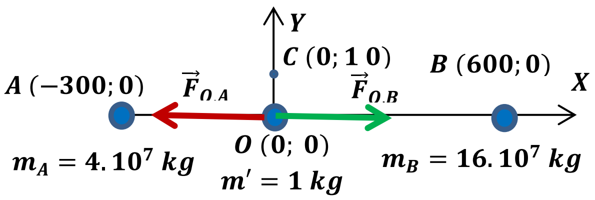
Datos: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

CONSTANTES FÍSICAS			
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.0\ 10^{8}$ m s^{-1}	Masa del protón	$m_{p+} = 1.7\ 10^{-27}$ kg
Constante de gravitación universal	$G = 6.7\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}	Masa del electrón	$m_{e-} = 9.1\ 10^{-31}$ kg
Constante de Coulomb	$k = 9.0\ 10^{9}$ N m^2 C^{-2}	Carga del protón	$q_{p+} = 1.6\ 10^{-19}$ C
Constante de Planck	$h = 6.6\ 10^{-34}$ J s	Carga del electrón	$q_{e-} = -1.6\ 10^{-19}$ C

Nota: estas constantes se facilitan a título informativo

1.- Dos cuerpos, A y B, el cuerpo A de masa $4{,}0.10^{7}$ kg y el cuerpo B de masa $16{,}0.10^{7}$ se encuentran fijos en dos puntos del plano XY, el cuerpo A en el punto (-300; 0) y l cuerpo B en el punto (600; 0), con las distancias dadas en metros.
En el punto (0; 0) se encuentra situada una esfera de masa 1 kg.

a) **(1 p)** Hallar la fuerza gravitatoria ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera.



$r_{A,O} = 300\ m \qquad r_{B,O} = 600\ m$

$r_{A,C} = 300{,}17\ m \qquad r_{B,C} = 600{,}08\ m$

$$\vec{F}_O = \vec{F}_{O,A} + \vec{F}_{O,B} = G\,.\,\frac{m_A\,.\,m'}{(r_{A,O})^2}\,.\,(-\vec{\imath}) + G\,.\,\frac{m_B\,.\,m'}{(r_{B,O})^2}\,.\,\vec{\imath} = G\,.\,m'\,.\left(\frac{m_B}{(r_{B,O})^2} - \frac{m_A}{(r_{A,O})^2}\right).\,\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_O = 6{,}67.10^{-11}\,.\,1\,.\left(\frac{16.10^7}{(600)^2} - \frac{4.10^7}{(300)^2}\right).\,\vec{\imath} = 0\ \vec{\imath}\ \ N \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{F}_O| = 0\ \ N$$

b) **(0,5 p)** Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (0; 0) hasta el punto (0; 10).

Calculamos el potencial gravitatorio en los puntos O y C.

$$V_O = V_{A,O} + V_{B,O} = -G\,.\left(\frac{m_A}{r_{A,O}} + \frac{m_B}{r_{B,O}}\right) = -6{,}7.10^{-11}\,.\left(\frac{4.10^7}{300} + \frac{16.10^7}{600}\right) = -2{,}68.10^{-5}\ J/kg$$

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = -G\,.\left(\frac{m_A}{r_{A,C}} + \frac{m_B}{r_{B,C}}\right) = -6{,}7.10^{-11}\,.\left(\frac{4.10^7}{300{,}17} + \frac{16.10^7}{600{,}08}\right) = -2{,}679.10^{-5}\ J/kg$$

$$W_{O\rightarrow C}^{F\,gravitatoria} = -m'.\,\Delta V = m'.\,(V_O - V_C) = 1\,.\,\left[-2{,}68.10^{-5} - \left(-2{,}679.10^{-5}\right)\right] = -1.10^{-8}\ J$$

El traslado no es espontáneo, se necesita una fuerza externa para realizarlo (las masas debido a la fuerza gravitatoria se atraen entre sí, y en este caso estamos alejando la masa m' de las masas m_A y m_B). El trabajo realizado por esta fuerza externa queda almacenado íntegramente en la masa m' en forma de energía potencial gravitatoria.

c) **(0,5 p)** Describe brevemente el concepto de "potencial gravitatorio".

La existencia de una masa M en un punto del espacio hace que, al colocar cualquier otra masa m en un punto de su entorno, ésta adquiera una energía potencial. Es decir, la existencia de una masa M en un punto del espacio dota a los puntos de su alrededor de una propiedad escalar que se pone de manifiesto al poner otra masa a su alrededor, a la que llamamos potencial gravitatorio. Definimos el potencial gravitatorio, V, en un punto como la energía potencial que tendría una partícula de masa unidad colocada en dicho punto.

$$V_x = \frac{E_{p,x}}{m} = -G\,.\,\frac{M}{r_x} \quad (J/kg)$$

También podemos definir el potencial gravitatorio en un punto del campo gravitatorio como una magnitud escalar que representa el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza externa para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio.

2.- Un oscilador armónico está formado por un muelle de constante elástica 20 N.m^{-1} y un cuerpo sólido de masa 0,5 kg.

a) **(1 p)** Si el desplazamiento del cuerpo unido al muelle viene descrito por la ecuación, $x\,(t) = 5\,.\cos(\omega\,.\,t + \varphi)$, hallar los valores de ω y φ, sabiendo que en el instante inicial $t = 0$ su posición es nula, $x\,(t = 0) = 0\ m$.

La fuerza responsable del m.a.s. es la fuerza recuperadora del muelle, que, a su vez, debe cumplir la 2ª ley de Newton. Por lo tanto:

$$\begin{cases} \vec{F} = -K\,.\,\vec{x} \\ \vec{F} = m\,.\,\vec{a} = -m\,.\,\omega^2\,.\,\vec{x} \end{cases} \Rightarrow\ K = m\,.\,\omega^2\ \Rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} = 6,32\ rad/s$$

Por otro lado:

$$x\,(t=0) = 0\ m \quad \Rightarrow \quad 0 = 5\,.\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ rad \\ \dfrac{3\pi}{2}\ rad \end{cases}$$

b) **(1 p)** Hallar la energía cinética que tiene el cuerpo en el punto central de la oscilación.

Para un m.a.s. la velocidad varía con la elongación de acuerdo a:

$$v = \pm\,\omega\,.\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

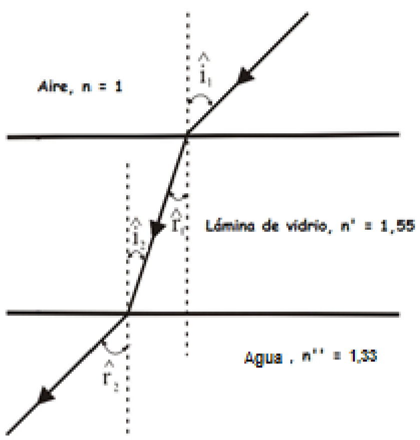
Teniendo en cuenta que en el punto central de la oscilación $x = 0\ \Rightarrow\ v\,(x=0) = \pm\,\omega\,.\,A$

Por lo tanto:

$$E_C\,(x=0) = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,[v\,(x=0)]^2 = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,\omega^2\,.\,A^2 = \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,A^2 = \frac{1}{2}\,.\,20\,.\,5^2 = 250\ J$$

3.- Una lámina horizontal de vidrio de índice de refracción 1,55 de caras plano-paralelas, con aire encima de ella, reposa sobre una capa de agua, de índice de refracción 1,33. Desde el aire, sobre la lámina de vidrio, incide un rayo de luz monocromática de longitud de onda 460 nm, con un ángulo de incidencia de 30°. Determínese:

a) **(1 p)** El valor del ángulo que forma el rayo emergente de la lámina de vidrio hacia el agua con la normal a la misma.



Se produce una doble refracción.

Aire – Lámina: si aplicamos la ley de Snell de la refracción

$$n\,.\,sen\ \hat{\imath}_1 = n'.\,sen\ \hat{r}_1\ \Rightarrow\ 1\,.\,sen\ 30° = 1,55\,.\,sen\,\hat{r}_1$$

$$\hat{r}_1 = 18,82°$$

Lámina – Líquido: $\hat{r}_1 = \hat{\imath}_2$**, ya que se trata de ángulos internos alternos**

$$n'.\,sen\ \hat{\imath}_2 = n''.\,sen\ \hat{r}_2\ \Rightarrow\ 1,55\,.\,sen\ 18,82° = 1,33\,.\,sen\,\hat{r}_2$$

$$\hat{r}_2 = 22,1°$$

b) **(1 p)** La longitud de onda que atraviesa el vidrio, sabiendo que la frecuencia de la luz incidente la frecuencia de la luz refractada son iguales.

$$f_{aire} = f_{vidrio} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} = \frac{v_{vidrio}}{\lambda_{vidrio}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c/n_{aire}}{\lambda_{aire}} = \frac{c/n_{aire}}{\lambda_{vidrio}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{vidrio} = \lambda_{aire} \cdot \frac{n_{aire}}{n_{vidrio}}$$

$$\lambda_{vidrio} = 460 \,.\, \frac{1}{1,55} = 296,77 \;\; nm$$

4.- Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión, $B\,(t) = 10\,.\,sen\,(5t)$, en unidades del S.I. atraviesa perpendicularmente una espira circular de radio 100 cm.

a) **(1 p)** Hallar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

El flujo que atraviesa la espira será:

$$\phi\;(t) = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B(t).\;S\,.\,\cos\theta = 10\,.\,sen\,(5\,.\,t)\,.\,\pi\,.\,1^2\;.\,cos\,0^\circ = 10\pi\,.\;sen\,(5\,.\,t)\;\;Wb$$

Al estar la espira perpendicular al campo magnético el ángulo que forman entre sí $\vec{B}$ y $\vec{S}$ es de 0°.

b) **(0,5 p)** Hallar la fuerza electromotriz máxima de la corriente inducida.

De acuerdo a la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon_{ind} = -N\,.\,\frac{d\phi}{dt} = -N\,.\frac{d\,(10\pi\,.\,sen\,(5\,.\,t))}{dt} = -50\pi\,.\;cos\;(5\,.\,t)\;\;V$$

La fuerza electromotriz máxima inducida se consigue cuando $cos\;(5\,.\,t) = \pm 1$

$$(\varepsilon_{ind})_{máx} = \pm\,50\pi\;\;V = \pm\,157,8\;\;V$$

c) **(0,5 p)** Explicar brevemente el "principio de inducción de Faraday"

Toda variación de flujo magnético que atraviesa un circuito cerrado produce en éste una corriente eléctrica inducida, que solo existe mientras exista dicha variación de flujo.
Esta corriente inducida es producida por una fuerza electromotriz inducida que es proporcional a la rapidez con que varía el flujo y al número de espiras del inducido.

$$\varepsilon_{ind} \propto \;N\,.\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

5.- La actividad de una muestra de una sustancia radiactiva queda dividida por 8 cuando han transcurrido 4000 días.

a) **(1 p)** Hallar la constante de desintegración y el período de semidesintegración de dicha sustancia.

$$A = A_0\,.\,e^{-\lambda\,.\,t} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_0}{8} = A_0\,.\,e^{-\lambda\,.\,t} \quad \Rightarrow \quad ln\,\left(\frac{1}{8}\right) = -\,\lambda\,.\,t$$

$$\lambda = -\,\frac{ln\,\left(\frac{1}{8}\right)}{t} = -\,\frac{-2,079}{4000\,.\,24\,.\,3600} = 6,016.\,10^{-9}\;\;s^{-1}$$

$$t_{1/2} = \frac{ln\,2}{\lambda} = \frac{ln\,2}{6,016.\,10^{-9}} = 1,15.\,10^{8}\;\;s = 1333,5\;\;días$$

b) **(1 p)** Si el número inicial de átomos radiactivos en la muestra era de $1{,}0.10^{22}$ átomos, ¿cuál será la actividad de la muestra al cabo de 16000 días?

$$N = N_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t} \quad \Rightarrow \quad N = 10^{22} \,.\, e^{-6{,}016.10^{-9} \,.\, (16000 \,.\, 24 \,.\, 3600)} = 2{,}44.10^{18} \quad \text{núcleos}$$

$$A = \lambda \,.\, N = 6{,}016.10^{-9} \,.\, 2{,}44.10^{18} = 1{,}47.10^{10} \ Bq$$