



CANTABRIA 2018

OPCIÓN 2 · EJERCICIO 2

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

En el SI, el vector de posición de un cuerpo que se mueve en una trayectoria plana es $\vec{r} = (2 \cos \pi t + 1) \hat{i} + (2 \sin \pi t - 2) \hat{j}$.

- Demuestra que el movimiento es circular uniforme.
- Calcula el radio y la posición del centro de la trayectoria.
- Calcula el periodo y la frecuencia del movimiento.

Solución

- Para demostrar que el MOVIMIENTO es CIRCULAR UNIFORME vamos a demostrar primero que la TRAYECTORIA es una CIRCUNFERENCIA. Para ello escribimos las componentes x e y :

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \pi t + 1 \rightarrow \cos \pi t = \frac{x-1}{2} \\ y &= 2 \sin \pi t - 2 \rightarrow \sin \pi t = \frac{y+2}{2} \end{aligned}$$

Aplicamos la ECUACIÓN FUNDAMENTAL de la TRIGONOMETRÍA¹:

$$^1 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t &= 1 \\ \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

la cual podemos escribir de la forma:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad (1)$$

que puede ya compararse directamente con la ECUACIÓN GENERAL de una CIRCUNFERENCIA². Así hemos demostrado que el MOVIMIENTO es CIRCULAR. Para demostrar que además es UNIFORME, calculamos la ACELERACIÓN TANGENCIAL y comprobamos que es igual a CERO.

$$^2 (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (2)$$

Calculamos primero el vector VELOCIDAD:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\pi \sin \pi t \hat{i} + 2\pi \cos \pi t \hat{j}$$

Calculamos la ACELERACIÓN TANGENCIAL como la DERIVADA del MÓDULO de la VELOCIDAD:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(-2\pi \sin \pi t)^2 + (2\pi \cos \pi t)^2} = 2\pi \text{ m/s}$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

por lo que el MOVIMIENTO es CIRCULAR UNIFORME.

- Comparando (1) con la ECUACIÓN GENERAL de una CIRCUNFERENCIA de radio r centrada en (a, b) , (2), tenemos:

$$\text{RADIO} = 2 \text{ m}$$

$$\text{CENTRO} = (1 \text{ m}, -2 \text{ m})$$

- (c) Como hemos demostrado que el MOVIMIENTO es CIRCULAR UNIFORME, podemos utilizar la RELACIÓN entre el módulo de la VELOCIDAD y el PERIODO:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2\text{ m}}{2\pi \text{ m/s}} = 2 \text{ s}$$

Y para calcular la FRECUENCIA, f , utilizamos la relación³:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0.5 \text{ s}^{-1} = 0.5 \text{ Hz}$$

³ La FRECUENCIA ANGULAR, ω , vendría dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \pi \text{ rad/s}$$