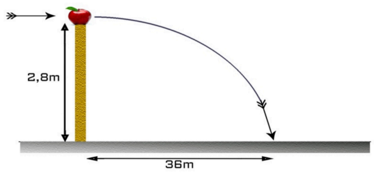
CANTABRIA 2018

OPCIÓN 1 · EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Una manzana de 170 g está colocada sobre un poste de 2.8 m de altura. Una flecha de 45 g moviéndose horizontalmente a 130 m/s pasa horizontalmente a través de la manzana y cae al suelo a una distancia de 36 m de la base del poste:



(a) ¿A qué distancia del poste cae la manzana?

(b) ¿Con qué ángulo llega la flecha al suelo?

(c) En el momento de comenzar la caída de la manzana otro tirador, situado en el suelo a la derecha del poste, lanza otra flecha a 130 m/s con un ángulo de 10° respecto a la horizontal. ¿En qué punto deberá situarse para interceptar la manzana?

Despreciar cualquier efecto de fricción en el poste o de rozamiento en el aire.

Solución

(a) Para saber a qué distancia cae la manzana necesitamos conocer su velocidad inicial tras ser atravesada por la flecha[1]. Imponemos la CONSERVACIÓN del MOMENTO LINEAL en la colisión[2]:

[1] Al atravesar la manzana, la flecha cede parte de su energía cinética a la manzana, de forma que la flecha se frena y la manzana se acelera.

[2] Omitimos la notación vectorial pues todo ocurre en una dimensión (mismo sentido de hecho).

$$p_{\text{antes}} = p_{\text{después}}$$
$$m_{\text{f}} \cdot v_{\text{f}} = m_{\text{m}} \cdot v'_{\text{m}} + m_{\text{f}} \cdot v'_{\text{f}}$$

de donde podemos despejar la velocidad de la manzana v'_{m}:

$$v'_{\text{m}} = \frac{m_{\text{f}}}{m_{\text{m}}}\left(v_{\text{f}} - v'_{\text{f}}\right), \tag{1}$$

donde m_{f} y m_{m} son las masas de la flecha y de la manzana, respectivamente; v_{f} es la velocidad de la flecha antes de atravesar la manzana; y v'_{m} y v'_{f} son las velocidades de la manzana y de la flecha después de la colisión, respectivamente.

A partir del dato del ALCANCE, Δx, podemos conocer la velocidad de la flecha después de atravesar la manzana. Para ello escribimos las ECUACIONES del MOVIMIENTO de la FLECHA[3]:

[3] Un MRU en la dirección horizontal y un MRUA (caída libre) en la dirección vertical. Tomamos el origen en la base del poste, con sentidos positivos hacia arriba y hacia la derecha.

$$x_{\text{f}}(t) = x_{0_{\text{f}}} + v'_{\text{f}} \cdot t$$
$$y_{\text{f}}(t) = y_{0_{\text{f}}} + v_{0_{y_{\text{f}}}} \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

donde $x_{0_{\text{f}}} = 0$, v'_{f} es lo que queremos conocer, $y_{0_{\text{f}}} = h$, $v_{0_{y_{\text{f}}}} = 0$ y $a = -g$. Por lo que las ECUACIONES PARTICULARIZADAS quedan:

$$x_{\text{f}}(t) = v'_{\text{f}} \cdot t \tag{2a}$$
$$y_{\text{f}}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2b}$$

El ALCANCE se obtiene imponiendo $y_{\text{f}}\left(t_{\text{caída}}\right) = 0$, despejando el tiempo de caída de (2b) y sustituyéndolo en x_{f} (2a):

$$y_{\text{f}}\left(t_{\text{caída}}\right) = h - \frac{1}{2}gt^2_{\text{caída}} = 0 \rightarrow t_{\text{caída}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sustituimos en (2a):

$$\text{ALCANCE}_\text{f} = \Delta x_\text{f} = x_\text{f}(t_\text{caída}) = v'_\text{f} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Despejamos v'_f:

$$v'_\text{f} = \Delta x_\text{f} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Sustituyendo v'_f en (1):

$$v'_\text{m} = \frac{m_\text{f}}{m_\text{m}}\left(v_\text{f} - \Delta x_\text{f} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}\right) \tag{3}$$

Ahora escribimos las ECUACIONES del MOVIMIENTO de la MANZANA para ver dónde cae[4]:

$$x_\text{m}(t) = x_{0_\text{m}} + v'_\text{m} \cdot t$$

$$y_\text{m}(t) = y_{0_\text{m}} + v_{0_{y_\text{m}}} \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

donde $x_{0_\text{m}} = 0$, v'_m viene dada por (3), $y_{0_\text{m}} = h$, $v_{0_{y_\text{m}}} = 0$ y $a = -g$. PARTICULARIZANDO[5]:

$$x_\text{m}(t) = v'_\text{m} \cdot t \tag{4a}$$

$$y_\text{m}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4b}$$

El tiempo de caída de la manzana es el mismo que el de la flecha[6]:

$$t_\text{caída} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Así que sustituyendo en (4a) tenemos el ALCANCE de la MANZANA:

$$\text{ALCANCE}_\text{m} = \Delta x_\text{m} = x_\text{m}(t_\text{caída}) = v'_\text{m} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sustituyendo v'_m de (3) tenemos:

$$\Delta x_\text{m} = \frac{m_\text{f}}{m_\text{m}}\left(v_\text{f} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} - \Delta x_\text{f}\right),$$

donde $m_\text{f} = 45\,\text{g}$, $m_\text{m} = 170\,\text{g}$, $v_\text{f} = 130\,\text{m/s}$, $h = 2.8\,\text{m}$, $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ y $\Delta x_\text{f} = 36\,\text{m}$:

$$\boxed{\Delta x_\text{m} = 16.5\,\text{m}}$$

(b) Para saber con qué ÁNGULO llega la flecha al suelo necesitamos escribir primero la ECUACIÓN de la VELOCIDAD de la FLECHA[7]:

$$v_{x_\text{f}}(t) = v'_\text{f} = \Delta x_\text{f} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} \tag{5a}$$

$$v_{y_\text{f}}(t) = v_{0_{y_\text{f}}} - gt = -gt \tag{5b}$$

La velocidad con la que llega la flecha al suelo se obtiene sustituyendo $t = t_\text{caída}$ en (5):

$$v_{x_\text{f}}(t_\text{caída}) = \Delta x_\text{f} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$v_{y_\text{f}}(t_\text{caída}) = -gt_\text{caída} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

[4] También un MRU en la dirección horizontal y un MRUA (caída libre) en la dirección vertical.

[5] La única diferencia con la flecha es la veloocidad inicial.

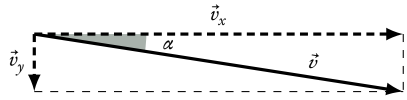
[6] Esto se puede ver imponiendo $y_\text{m} = 0$ y despejando t de (4b).

[7] Recordemos: MRU en horizontal, MRUA en vertical.

El ángulo se obtiene a partir de la tangente[8]:

$$\alpha = \arctan\left[\frac{v_{y_\mathrm{f}}(t_\text{caída})}{v_{x_\mathrm{f}}(t_\text{caída})}\right] = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2gh}}{\Delta x_\mathrm{f}\cdot\sqrt{\frac{g}{2h}}}\right) = \arctan\left(\frac{-2h}{\Delta x_\mathrm{f}}\right) = -8.8°$$

[8] Componentes de la velocidad de la flecha cuando llega al suelo:



(c) Se trata de un problema de encuentros, por lo que lo primero escribimos las ecuaciones del movimiento de la manzana (4) y de la nueva flecha[9]:

[9] MRU en la dirección horizontal y MRUA (caída libre) en la dirección vertical.

$$x_\mathrm{f}(t) = x_{0_\mathrm{f}} + v_{x_\mathrm{f}}\cdot t$$
$$y_\mathrm{f}(t) = y_{0_\mathrm{f}} + v_{0_{y_\mathrm{f}}}\cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

Nos dicen que el tirador está en el suelo, por lo que $y_{0_\mathrm{f}} = 0$. Respecto a las componentes de la velocidad, nos dicen que lanza otra flecha a $v_0 = 130\,\mathrm{m/s}$ con un ángulo $\alpha = 10°$. Se puede demostrar que el tirador ha de colocarse a la derecha de donde cae la manzana[10], por lo que lanzará la flecha hacia la izquierda[11]:

[10] Si no es así, nos sale una solución en la que el tirador debería estar situado a la izquierda del poste, lo que contradice el enunciado.

[11] La componente x de la velocidad será por tanto negativa.

$$v_{x_\mathrm{f}} = -v_0\cos\alpha$$
$$v_{0_{y_\mathrm{f}}} = v_0\sin\alpha$$

Particularizando:

$$x_\mathrm{f}(t) = x_{0_\mathrm{f}} - v_0\cos\alpha\cdot t \tag{6a}$$
$$y_\mathrm{f}(t) = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{6b}$$

donde x_{0_f} es lo que nos piden. El encuentro se producirá cuando las posiciones de la manzana y de la flecha coincidan, es decir, (4a) = (6a) y (4b) = (6b):

$$v'_\mathrm{m}\cdot t = x_{0_\mathrm{f}} - v_0\cos\alpha\cdot t \tag{7}$$
$$h - \frac{1}{2}gt^2 = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{8}$$

Despejamos t de (8):

$$t = \frac{h}{v_0\sin\alpha}$$

y lo sustituimos en (7):

$$x_{0_\mathrm{f}} = \left(v'_\mathrm{m} + v_0\cos\alpha\right)\cdot t = \left(v'_\mathrm{m} + v_0\cos\alpha\right)\cdot\frac{h}{v_0\sin\alpha} = \frac{hv'_\mathrm{m}}{v_0\sin\alpha} + h\cot\alpha,$$

con $h = 2.8\,\mathrm{m}$, v'_m dada por (3), $v_0 = 130\,\mathrm{m/s}$ y $\alpha = 10°$. Sustituyendo:

$$x_{0_\mathrm{f}} = 18.6\,\mathrm{m}$$