GALICIA 2019

OPCIÓN B · EJERCICIO 6

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

La clepsidra (del griego *kléptein*, "robar", e *hydōr*, "agua") es un recipiente que normalmente tiene simetría de revolución (una esfera, un cilindro, un tronco de cono, ...), en el cual se coloca agua, que sale por un orificio en la parte inferior. Las primeras clepsidras conocidas fueron usadas por los egipcios. Se utilizaban especialmente durante la noche, cuando los relojes de sol eran inútiles. La velocidad de vaciado no es constante, pues la presión de la columna de agua varía con la altura del líquido en el recipiente. El tiempo de vaciado está relacionado con dicha altura.

a) Determina la ecuación que relaciona la velocidad de salida por el agujero con la altura del líquido en la clepsidra y los radios del cilindro y del agujero.

b) Determina la ecuación que relaciona el tiempo de vaciado con la altura inicial del líquido, H, en la clepsidra y sus dimensiones. Puedes suponer que la superficie libre del líquido en el cilindro es mucho mayor que la del orificio de salida.

c) Fabricamos una clepsidra cilíndrica que tiene 10.0 cm de radio y 50.0 cm de altura; está abierta por la cara superior, y posee un orificio en la cara inferior de 7.00 mm de radio. Calcula a que altura debemos llenarla con agua para que se vacíe exactamente en un minuto.

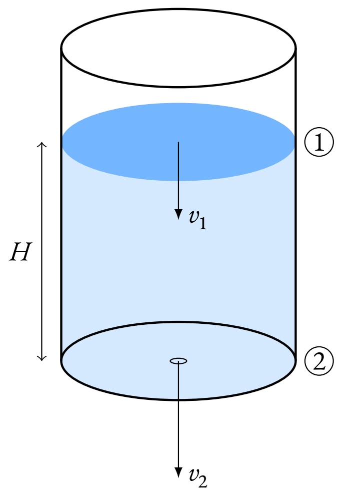

Figura 1: Esquema de clepsidra cilíndrica de radio R y orificio inferior circular de radio r. La altura inicial del líquido es H (tomamos el origen de alturas en la base de la clepsidra).

Solución

a) Aplicamos el PRINCIPIO DE BERNOULLI a los puntos 1 y 2 (figura 1):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Tanto 1 como 2 están en contacto con el aire (supuesto a la misma presión p_0), por lo que:

$$p_1 = p_2 = p_0$$

Para relacionar las velocidades en cada punto utilizamos la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Suponiendo orificios circulares[1]:

$$\cancel{\pi} R^2 v_1 = \cancel{\pi} r^2 v_2 \rightarrow v_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_2$$

Considerando el origen de alturas en la base de la clepsidra ($y = 0$ para el agujero de salida) y siendo H la altura inicial del líquido[2]:

$$\cancel{p_0} + \frac{1}{2}\cancel{\rho}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 v_2\right]^2 + \cancel{\rho} g H = \cancel{p_0} + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{r^4}{R^4}v_2^2 + gH = \frac{1}{2}v_2^2$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{r^4}{R^4}}}}$$

[1] $A = \pi r^2$. Utilizamos R y r para los radios del cilindro y del agujero, respectivamente.

[2] La expresión final coincide con la que se puede ver en la bibliografía en la forma:

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2gH}{A_1^2 - A_2^2}},$$

la cual se reduce al conocido como TEOREMA DE TORRICELLI para el caso $A_1 \ggg A_2$:

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

b) A partir de la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD y utilizando la expresión obtenida en a), podemos escribir[3]:

$$\text{masa del fluido que desciende} = \text{masa del fluido que sale}$$
$$\cancel{\rho} \cdot (\text{volumen que desciende en } \mathrm{d}t) = \cancel{\rho} \cdot (\text{volumen que sale en } \mathrm{d}t)$$
$$A_1 \cdot (-\mathrm{d}y) = A_2 v_2(y)\,\mathrm{d}t$$
$$-\cancel{\pi} R^2\,\mathrm{d}y = \cancel{\pi} r^2 v_2(y)\,\mathrm{d}t$$
$$-R^2\,\mathrm{d}y = r^2\sqrt{2gy}\,\mathrm{d}t$$

[3] Suponemos ya que la superficie libre del líquido en el cilindro es mucho mayor que la del orificio de salida: $r \lll R \rightarrow v_2 = \sqrt{2gH}$.

Separando variables[4]:

$$-\int_H^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2g}\int_0^t \mathrm{d}t$$
$$2\left(\sqrt{H} - \sqrt{y}\right) = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\cdot t \rightarrow t(y) = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2(H-y)}{g}}$$

[4] En el instante inicial ($t = 0$): $y = H$.

Particularizando para $y = 0$:

$$\boxed{t = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

c) Despejamos la altura H de la expresión del tiempo que hemos obtenido en b):

$$H = \frac{r^4}{2R^4} g t^2$$

Sustituyendo valores[5]:

$$\boxed{H = 0.42\,\mathrm{m} \approx 42\,\mathrm{cm}},$$

que significa llenarla aproximadamente al 84 %.

[5] $R = 10\,\mathrm{cm}$, $r = 7\,\mathrm{mm} = 0.7\,\mathrm{cm}$ y $t = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$.