



CANTABRIA 2016

EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Una lanzadera espacial coloca un satélite artificial a 15 000 km del centro de la Tierra con una velocidad de 5600 m/s que forma un ángulo de 72° con la dirección radial. Calcula:

- (a) Posición del apogeo y perigeo de la órbita que sigue el satélite.
- (b) Velocidad del satélite en esos puntos.
- (c) Período orbital del satélite.

Datos: Masa de la Tierra = 5.98×10^{24} kg y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻².

Con correcciones de Enrique García Simón (enrique@fiquipedia.es).

Solución

Sea $r_0 = 15\,000$ km la distancia inicial a la que se encuentra el satélite del centro de la Tierra y $v_0 = 5600$ m/s su velocidad inicial, la cual forma un ángulo $\theta_0 = 72^\circ$ con la dirección radial¹.

¹ Es decir, $|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = r_0 v_0 \sin \theta_0$.

- (a) Utilizamos la CONSERVACIÓN tanto de la ENERGÍA MECÁNICA como del MOMENTO ANGULAR. La energía mecánica inicial, E_0 , viene dada por

$$E_0 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0},$$

mientras que el módulo del momento angular inicial es

$$L_0 = |\mathbf{L}_0| = m|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = mr_0 v_0 \sin \theta_0$$

En una posición cualquiera, r , la energía mecánica total será

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

siendo el módulo del momento angular²

$$L = |\mathbf{L}| = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mrv \sin \theta$$

² La velocidad orbital es siempre tangente a la trayectoria/perpendicular en apogeo y perigeo al vector posición con referencia en el foco.

Igualando los momentos angulares obtenemos

$$L_0 = L \Rightarrow v = \frac{r_0 v_0 \sin \theta_0}{r \sin \theta} \quad (1)$$

Igualando las energías mecánicas totales y sustituyendo v por (1) llegamos a la ecuación de segundo grado para r :

$$\left(v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}\right)r^2 + 2GMr - \left(\frac{r_0 v_0 \sin \theta_0}{\sin \theta}\right)^2 = 0$$

Esta ecuación tiene 2 SOLUCIONES. Particularizando para el apogeo, r_a , y el perigeo, r_p , donde $\theta = \pi/2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} r_a &= 2.47 \times 10^7 \text{ m} \\ r_p &= 1.18 \times 10^7 \text{ m} \end{aligned}$$

(b) No tenemos más que sustituir r_a y r_p en (1) para obtener³:

$$v_a = \frac{r_0 v_0 \sin \theta_0}{r_a} = 3.23 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_p = \frac{r_0 v_0 \sin \theta_0}{r_p} = 6.76 \times 10^3 \text{ m/s}$$

³ Aquí de nuevo utilizamos que la velocidad orbital es siempre perpendicular en apogeo y perigeo al vector posición con referencia en el foco.

(c) Para calcular el período orbital utilizamos la 3ª LEY de KEPLER:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

donde

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$$

es el radio medio de la órbita, que coincide con el semieje mayor de la elipse.

Sustituyendo valores, obtenemos:

$$T = 2.46 \times 10^4 \text{ s} = 6.84 \text{ h}$$