OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1. En dos de los vértices, A y B, de un triángulo equilátero de lado 20 m se sitúan dos masas puntuales de 30 kg cada una.

a) [0,75 PUNTOS] Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el vértice libre C del triángulo.

b) [0,5 PUNTOS] Calcular la fuerza sobre una masa puntual de 10 kg, situada en ese vértice libre.

c) [0,75 PUNTOS] Hallar el potencial gravitatorio en dicho vértice libre C.

2. Supongamos un sistema óptico consistente en una lente divergente delgada que tiene una distancia focal en valor absoluto de 8 cm. Determina la posición, tamaño y naturaleza de la imagen que se obtiene de un objeto de altura 2.5 cm que se sitúa a una distancia de 12 cm de la lente:

a) [0,75 PUNTOS] Cualitativamente mediante trazado de rayos.

b) [0,75 PUNTOS] Cuantitativamente mediante el uso de las fórmulas correspondientes.

c) [0,5 PUNTOS] Demuestra razonadamente el tipo de imagen se obtiene con una lente divergente. ¿Qué problema de visión corrige?

3. Una muestra de una sustancia radiactiva presenta una actividad inicial de $6.2 \cdot 10^7$ Bq y de $1.6 \cdot 10^7$ Bq cuando han transcurrido 12 días.

a) [1 PUNTO] Calcular la constante de desintegración y el periodo de semidesintegración de dicha sustancia

b) [1 PUNTO] La actividad de una segunda muestra de la misma sustancia es de $2.8 \cdot 10^8$ Bq cuando han transcurrido 20 días. Hallar cuántos núcleos radiactivos había inicialmente en esta segunda muestra.

Datos: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

4. En una cuerda se propaga una onda armónica transversal cuya ecuación (en unidades del SI) viene dada por la siguiente función:

$$y\,(x,\,t) = 20 \text{ sen}\left(-\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}x\right)$$

a) [1 PUNTO] Determinar la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

b) [1 PUNTO] Razonar el sentido de propagación de la onda y hallar la distancia a la que se encuentran, en un instante dado, dos puntos de esa cuerda que tienen una diferencia de fase entre ellos de $\pi/2$ rad.

5. Un campo magnético espacialmente uniforme y que varia con el tiempo según la expresión $B(t) = 2.4 \cos(4\,t)$ (en unidades del S.I.) atraviesa perpendicularmente una espira cuadrada de lado 15 cm.

a) [1 PUNTO] Determinar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

b) [0,5 PUNTOS] Hallar la fuerza electromotriz máxima.

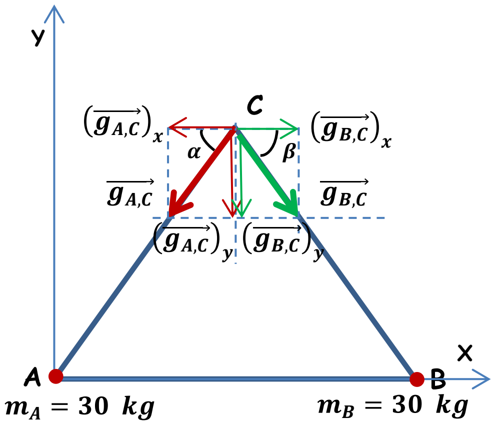
c) [0,5 PUNTOS] Explicar brevemente el principio de inducción de Faraday.

CONSTANTES FÍSICAS			
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.0\ 10^{8}$ m s^{-1}	Masa del protón	$m_{p+} = 1.7\ 10^{-27}$ kg
Constante de gravitación universal	$G = 6.7\ 10^{-11}$ N m^{2} kg^{-2}	Masa del electrón	$m_{e-} = 9.1\ 10^{-31}$ kg
Constante de Coulomb	$k = 9.0\ 10^{9}$ N m^{2} C^{-2}	Carga del protón	$q_{p+} = 1.6\ 10^{-19}$ C
Constante de Planck	$h = 6.6\ 10^{-34}$ J s	Carga del electrón	$q_{e-} = -1.6\ 10^{-19}$ C
Radio de la Tierra	$R_T = 6370$ km	Masa de la Tierra	$M_T = 5.97{\cdot}10^{24}$ kg

Nota: estas constantes se facilitan a título informativo.

1.- En dos de los vértices, A y B, de un triángulo equilátero de lado 20 m se sitúan dos masas puntuales de 30 kg cada una.

a) **(0,75 p)** Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el vértice libre C del triángulo.



$$r_{A,C} = r_{B,C} = r = 20\ m$$

$$\alpha = \beta = 60°$$

$$\vec{g}_{A,C} = G\,.\,\frac{m_A}{r^2}\,.\,(-\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{A,C} = 6,7.10^{-11}\,.\,\frac{30}{20^2}\,.\,(-\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{A,C} = -2,51.10^{-12}\ \vec{\imath} - 4,35.10^{-12}\,\vec{\jmath}\ \ N/kg$$

$$\vec{g}_{B,C} = G\,.\,\frac{m_B}{r^2}\,.\,(\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{B,C} = 6,7.10^{-11}\,.\,\frac{30}{20^2}\,.\,(\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{B,C} = -2,51.10^{-12}\ \vec{\imath} - 4,35.10^{-12}\,\vec{\jmath}\ \ N/kg$$

$$\vec{g}_C = \vec{g}_{A,C} + \vec{g}_{B,C} = -8,70.10^{-12}\,\vec{\jmath}\ \ N/kg$$

Las componentes del vector $\vec{g}_C$ dependen de los vértices elegidos, pero el módulo no.

b) **(0,5 p)** Calcular la fuerza sobre una masa puntual de 10 kg, situada en ese vértice libre.

$$\vec{F} = m\,.\,\vec{g} = 10\,.\,(-8,70.10^{-12}\,\vec{\jmath}) = -8,70.10^{-11}\,\vec{\jmath}$$

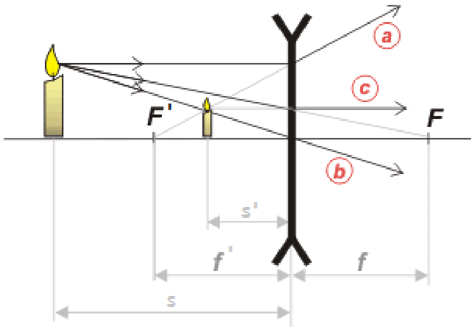
Las componentes del vector $\vec{F}$ dependen de los vértices elegidos, pero el módulo no.

c) **(0,75 p)** Hallar el potencial gravitatorio en dicho vértice libre C.

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = -G\,.\left(\frac{m_A}{r_{A,C}} + \frac{m_B}{r_{B,C}}\right) = -2\,.\,\frac{G\,.\,m}{r} = -2\,.\,\frac{6,7.10^{-11}\,.\,30}{20} = -2,01.10^{-10}\ J/kg$$

2.- Supongamos un sistema óptico consistente en una lente divergente delgada que tiene una distancia focal en valor absoluto de 8 cm. Determina la posición, tamaño y naturaleza de la imagen que se obtiene de un objeto de altura 2,5 cm que se sitúa a una distancia de 12 cm de la lente:

a) **(0,75 p)** Cualitativamente mediante trazado de rayos.



Se trata de una imagen virtual (se forma por delante de la lente), derecha y de menor tamaño que el objeto.

b) **(0,75 p)** Cuantitativamente mediante el uso de las fórmulas correspondientes.

Al tratarse de una lente divergente la distancia focal imagen, f', es negativa.

Aplicando la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-12} = \frac{1}{-8} \quad \Rightarrow \quad s' = -4,8\ cm$$

La imagen es virtual ya que se forma delante del espejo (distancia imagen negativa).

Aplicando la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad y' = y\,.\left(\frac{s'}{s}\right) = 2,5\,.\left(\frac{-4,8}{-12}\right) = 1\ cm$$

La imagen es derecha (objeto e imagen tienen el mismo signo) y de menor tamaño que el objeto.

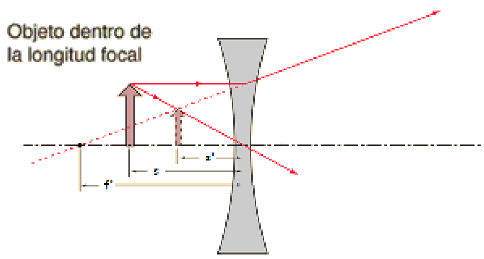
c) **(0,5 p)** Demuestra razonadamente el tipo de imagen se obtiene con una lente divergente. ¿Qué problema de visión corrige?

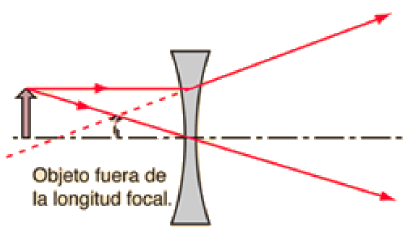
En una lente divergente $f' < 0$, y teniendo en cuenta que $s < 0$, al aplicar la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

s' es siempre negativa, es decir, que la imagen se forma siempre por delante de la lente, por lo que este tipo de lentes siempre forma imágenes virtuales.

También se puede demostrar gráficamente:





Este tipo de lentes se utilizan para corregir la miopía, defecto visual por el que el cristalino no enfoca sobre la retina los rayos paralelos procedentes de un objeto lejano, formándose la imagen por delante de la retina. La lente forma una imagen virtual de los objetos lejanos en el punto remoto del ojo miope, lo que permite al cristalino enfocarlos correctamente en la retina.

3.- Una muestra de una sustancia radiactiva presenta una actividad inicial de 6,2.10^7 Bq y de 1,6.10^7 Bq cuando han transcurrido 12 días.

DATOS: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

a) **(1 p)** Calcular la constante de desintegración y el periodo de semidesintegración de dicha sustancia.

$$A = A_0 \,.\, e^{-\lambda\,.\,t} \Rightarrow 1,6.10^7 = 6,2.10^7 \,.\, e^{-\lambda\,.\,t} \Rightarrow ln\left(\frac{1,6.10^7}{6,2.10^7}\right) = -\lambda\,.\,t \Rightarrow \lambda = -\frac{ln\left(\frac{1,6.10^7}{6,2.10^7}\right)}{t}$$

$$\lambda = -\frac{ln\left(\frac{1,6.10^7}{6,2.10^7}\right)}{12} = 0,113 \; día^{-1} = 1,31.10^{-6} \; s^{-1}$$

$$t_{1/2} = \frac{ln\,2}{\lambda} = \frac{ln\,2}{1,31.10^{-6}} = 5,29.10^5 \; s \cong 6,12 \; días$$

b) **(1 p)** La actividad de una segunda muestra de la misma sustancia es de 2,8.10^8 Bq cuando han transcurrido 20 días. Hallar cuántos núcleos radiactivos había inicialmente en esta segunda muestra.

$$A = \lambda\,.\,N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{A}{\lambda} = \frac{2,8.10^8}{1,31.10^{-6}} = 2,14.10^{14} \; núcleos$$

$$N = N_0 \,.\, e^{-\lambda\,.\,t} \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{N}{e^{-\lambda\,.\,t}} = \frac{2,14.10^{14}}{e^{-(0,113\,.\,20)}} = 2,05.10^{15} \; núcleos$$

4.- En una cuerda se propaga una onda armónica transversal cuya ecuación (en unidades del SI) viene dada por la siguiente función:

$$y\,(x,t) = 20\,.\,sen\left(-\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}x\right)$$

a) **(1 p)** Determinar la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

Si reordenamos la fase de la ecuación de la onda

$$y\,(x,t) = 20\,.\,sen\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}t\right)$$

y la comparamos con la ecuación general de una onda

$$y\,(x;t) = A\,.\,sen\,(k\,.\,x - \omega\,.\,t + \varphi_0) = A\,.\,sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,.\,x - 2\pi\,.\,f\,.\,t + \varphi_0\right)$$

Por identificación:

$$2\pi\,.\,f = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{4} = 0,25 \; Hz\,; \qquad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \lambda = 8 \; m; \quad v = \lambda\,.\,f = 8\,.\,0,25 = 2 \; m/s$$

b) **(1 p)** Razonar el sentido de propagación de la onda y hallar la distancia a la que se encuentran, en un instante dado, dos puntos de esa cuerda que tienen una diferencia de fase entre ellos de π/2 rad.

Sería suficiente con decir que la onda se desplaza en el sentido positivo del eje X debido al signo (-) en la fase de la onda entre el término espacial y el temporal.

Si lo queremos argumentar de forma más rigurosa. Cada frente de onda tiene una fase distinta pero todos los pertenecientes a mismo frente de onda tienen la misma fase (kx - ωt + φ_0 = cte). Si derivamos esta fase respecto de t para hallar la velocidad de propagación:

$$\frac{d\,(kx - \omega t + \varphi_0)}{dt} = k\,.\,v_x - \omega = 0 \;\Rightarrow\; v_x = \frac{\omega}{k} > 0 \;\Rightarrow\; propagación\;en\;el\;sentido\;positivo\;del\;eje\;X$$

Para calcular la distancia que separa dos puntos de la onda con un desfase de π/2 rad,

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{4}x_2 - \frac{\pi}{2}t\right) - \left(\frac{\pi}{4}x_1 - \frac{\pi}{2}t\right) = \frac{\pi}{4}\,.\,(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{4}\,.\,\Delta x \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{4\,.\,\Delta\varphi}{\pi} = \frac{4\,.\,{}^{\pi}/_{2}}{\pi} = 2\ m$$

También se puede resolver teniendo en cuenta que dos puntos de la onda separados una distancia igual a la longitud de onda tienen un desfase entre sí de 2π radianes. Por lo tanto:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi} \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{\lambda\,.\,\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{8\,.\,{}^{\pi}/_{2}}{2\pi} = 2\ m$$

5.- Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión $B\,(t) = 2,4\,.\cos(4t)$ (en unidades del S.I.) atraviesa perpendicularmente una espira cuadrada de lado 15 cm.

a) **(1 p)** Determinar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

Por definición el flujo magnético que atraviesa una superficie es:

$$\phi = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B\,.\,S\,.\cos\theta$$

Siendo θ el ángulo formado entre los vectores intensidad de campo magnético y superficie, que en este caso es de 0° al ser el campo magnético perpendicular a la superficie de la espira.

$$\phi\,(t) = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B(t).\,S\,.\cos\theta = B\,(t)\,.\,L^2\,.\,\cos 0^\circ = 2,4.\cos(4t)\,.\,0,15^2\,.\,1 = 0,054\,.\,\cos(4t)\ Wb$$

b) **(0,5 p)** Hallar la fuerza electromotriz máxima.

De acuerdo a la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon_{ind} = -N\,.\,\frac{d\phi}{dt} = -1\,.\frac{d\left(0,054\,.\,\cos(4\,.\,t)\right)}{dt} = 0,216\,.\,sen\ (4\,.\,t)\ \ V$$

La fuerza electromotriz máxima inducida se consigue cuando $sen\ (4\,.\,t) = \pm 1$

$$(\varepsilon_{ind})_{máx} = \pm\,0,216\ V$$

c) **(0,5 p)** Explicar brevemente el principio de inducción de Faraday.

Toda variación de flujo magnético que atraviesa un circuito cerrado produce en éste una corriente eléctrica inducida, que solo existe mientras exista dicha variación de flujo.
Esta corriente inducida es producida por una fuerza electromotriz inducida que es proporcional a la rapidez con que varía el flujo y al número de espiras del inducido.

$$\varepsilon_{ind} \propto N\,.\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$