

OPCIÓN DE EXAMEN N° 2

1. Marte tiene una masa de $6.42 \cdot 10^{23}$ kg es decir unas 0.107 veces la masa de la Tierra y un radio de 3400 km, es decir, unas 0.533 veces el radio terrestre.
 - a) [1 PUNTO] Determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.
 - b) [1 PUNTO] Halla la velocidad de escape desde la superficie del planeta.

2. Un material de caras planas y paralelas tiene un espesor d y un índice de refracción de 1.45. Si lo colocamos entre agua ($n = 1.33$) y aire ($n = 1$) e incidimos con un rayo de luz monocromática de frecuencia $4.5 \cdot 10^{14}$ Hz desde el agua en el material, determinar:
 - a) [1 PUNTO] La longitud de onda del rayo en el agua y en el material.
 - b) [1 PUNTO] El ángulo de incidencia a partir del cual se produce reflexión total interna en la segunda cara.

3. El trabajo de extracción de un metal es 3.2 eV ($1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Sobre él incide radiación de longitud de onda $\lambda = 340 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Calcula:
 - a) [1 PUNTO] La frecuencia umbral y la velocidad máxima con la que son emitidos los electrones.
 - b) [0,5 PUNTOS] Si la longitud de onda se reduce a la tercera parte, ¿cuál es, en su caso, la nueva velocidad máxima que adquieren los electrones?
 - c) [0,5 PUNTOS] Describir el concepto de frecuencia umbral y su relación con la hipótesis cuántica de Planck.

4. La función de una onda armónica transversal que se mueve sobre una cuerda viene dada por
$$y(x, t) = 0.3 \text{ m} \sin(2.2 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} x - 3.5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} t)$$
 - a) [0,5 PUNTOS] ¿En qué dirección se propaga esta onda y cuál es su velocidad?
 - b) [1 PUNTO] Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda.
 - c) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda?

5. Dos cargas positivas idénticas de valor $q_1 = q_2 = 4.0 \text{ } \mu\text{C}$ ($1 \text{ } \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$) están situadas sobre el eje x en las posiciones $x_1 = -5 \text{ cm}$ y $x_2 = 5 \text{ cm}$.
 - a) [1 PUNTO] Calcular el vector campo eléctrico creado por las dos cargas en el punto ($x = 0, y = 3 \text{ cm}$). Representarlo gráficamente.
 - b) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la fuerza que experimentaría una carga de $2 \text{ } \mu\text{C}$ colocada en las coordenadas ($x = 5, y = 3$) en cm.?
 - c) [0,5 PUNTOS] Explica brevemente el “principio de superposición”.

CONSTANTES FÍSICAS			
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$	Masa del protón	$m_{p^+} = 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	Masa del electrón	$m_{e^-} = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Coulomb	$k = 9.0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$	Carga del protón	$q_{p^+} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	Carga del electrón	$q_{e^-} = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Radio de la Tierra	$R_T = 6370 \text{ km}$	Masa de la Tierra	$M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Nota: estas constantes se facilitan a título informativo.

1.- Marte tiene una masa de $6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ es decir unas 0,107 veces la masa de la Tierra y un radio de 3400 km, es decir, unas 0,533 veces el radio terrestre.

a) (1 p) Determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.

Teniendo en cuenta la definición de intensidad de campo gravitatorio:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

Cuyo módulo es:

$$g = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Si llamamos $g_{0,M}$ a la intensidad de campo gravitatorio en la superficie de Marte, tenemos:

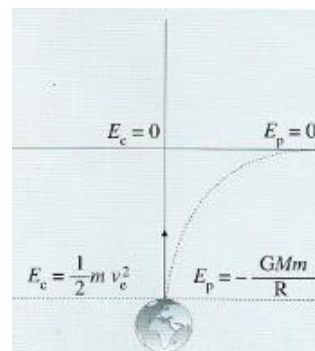
$$g_{0,M} = G \cdot \frac{M_M}{(R_M)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6,42 \cdot 10^{23}}{(3,4 \cdot 10^6)^2} = 3,7 \text{ N/kg} = 3,7 \text{ m/s}^2$$

b) (1 p) Halla la velocidad de escape desde la superficie del planeta.

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste.

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.

Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:



$$-\frac{G \cdot M_M \cdot m}{R_M} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,4 \cdot 10^6}} = 5030 \text{ m/s}$$

2.- Un material de caras planas y paralelas tiene un espesor d y un índice de refracción de 1,45. Si lo colocamos entre agua ($n = 1,33$) y aire ($n = 1$) e incidimos con un rayo de luz monocromática de frecuencia $4,5 \cdot 10^{14}$ Hz desde el agua en el material, determinar:

- a) (1 p) La longitud de onda del rayo en el agua y en el material.

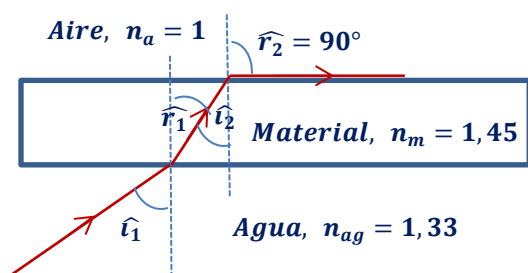
$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{f_{agua}} = \frac{c/n_{agua}}{f_{agua}} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1,33}{4,5 \cdot 10^{14}} = 5,01 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 501 \text{ nm}$$

La frecuencia de la onda no varía al cambiar de medio de propagación:

$$f_{agua} = f_{material} \Rightarrow \frac{v_{agua}}{\lambda_{agua}} = \frac{v_{material}}{\lambda_{material}}$$

$$\lambda_m = \lambda_{ag} \cdot \frac{v_m}{v_{ag}} = \lambda_{agua} \cdot \frac{\left(\frac{c}{n_{material}}\right)}{\left(\frac{c}{n_{agua}}\right)} = \lambda_{agua} \cdot \frac{n_{agua}}{n_{material}} = 501 \cdot \frac{1,33}{1,45} = 459,5 \text{ nm}$$

- b) (1 p) El ángulo de incidencia a partir del cual se produce reflexión total interna en la segunda cara.



Se produce una doble refracción.

Lámina - Aire (reflexión total): si aplicamos la ley de Snell de la refracción

$$n_m \cdot \sin i_2 = n_a \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow 1,45 \cdot i_2 = 1$$

$$i_2 = 43,6^\circ$$

Agua - Lámina: $r_1 = i_2$, ya que se trata de ángulos internos alternos

$$n_{ag} \cdot \sin i_1 = n_{mat} \cdot \sin r_2 \Rightarrow 1,33 \cdot \sin i_1 = 1,45 \cdot \sin 43,6^\circ$$

$$i_1 = 48,75^\circ$$

3.- El trabajo de extracción de un metal es 3,2 eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Sobre el incide radiación de longitud de onda $\lambda = 340 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Calcula:

- a) (1 p) La frecuencia umbral y la velocidad máxima con la que son emitidos los electrones.

$$W_0 = h \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{3,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,6 \cdot 10^{-34}} = 7,76 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Si aplicamos la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_{fotón \text{ inc.}} = W_0 + (E_{c,máx})_{\text{electrón emitido}} \Rightarrow E_{c,máx} = E_{fotón \text{ inc.}} - W_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_0$$

$$E_{c,máx} = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{340 \cdot 10^{-9}} - (3,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 7,03 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$E_{c,máx} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{máx}^2 \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c,máx}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,03 \cdot 10^{-20}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 3,93 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

- b) (0,5 p) Si la longitud de onda se reduce a la tercera parte, ¿cuál es, en su caso, la nueva velocidad máxima que adquieren los electrones?

$$E_{fotón \text{ inc.}} = W_0 + (E_{c,máx})_{\text{electrón emitido}} \Rightarrow E'_{c,máx} = E'_{fotón \text{ inc.}} - W_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda'} - W_0$$

$$E_{c,m\acute{a}x} = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{113,33 \cdot 10^{-9}} - (3,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 1,23 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_{c,m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{m\acute{a}x}^2 \Rightarrow v_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c,m\acute{a}x}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,23 \cdot 10^{-18}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,64 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

- c) (0,5 p) Describir el concepto de frecuencia umbral y su relación con la hipótesis cuántica de Planck.

En el efecto fotoeléctrico, para cada metal existe una frecuencia luminosa umbral, f_0 , por debajo de la cual no se produce la emisión fotoeléctrica, sea cual sea la intensidad de la luz o radiación incidente. Einstein propuso que en el efecto fotoeléctrico la radiación electromagnética en su interacción con los electrones de la materia se comporta en la forma propuesta por Planck para los osciladores atómicos en relación con la radiación del cuerpo negro, de tal manera que la energía no se absorbe de forma uniforme sino de forma cuantizada.

Para un cierto metal, su función trabajo es:

$$W_0 = h \cdot f_0$$

En esta expresión, f_0 es la frecuencia umbral del metal. Cuando el metal es iluminado con luz de menor frecuencia, no surgen electrones del metal, con independencia de la intensidad de la luz incidente. A partir de esa frecuencia de iluminación, surgen electrones con velocidad al cuadrado proporcional a la diferencia entre la frecuencia de iluminación y la frecuencia umbral. Se trata de un fenómeno cuántico (relacionado con la hipótesis de Planck); es decir, los electrones en la materia, como si fueran osciladores cuánticos, no pueden acumular energía de forma continua, sólo discreta.

4.- La función de una onda armónica transversal que se mueve sobre una cuerda viene dada por:

$$y(x, t) = 3 \cdot \text{sen}(2,2x - 3,5t) \text{ (m; s)}$$

- a) (0,5 p) ¿En qué dirección se propaga esta onda y cuál es su velocidad?

Sería suficiente con decir que la onda **se desplaza en el sentido positivo del eje X** debido al signo (-) en la fase de la onda entre el término espacial y el temporal.

Otra forma de razonar el sentido de propagación es el siguiente, cada frente de onda tiene una fase distinta pero todos los pertenecientes a mismo frente de onda tienen la misma fase ($kx - \omega t + \varphi_0 = \text{cte}$). Si derivamos esta fase respecto de t para hallar la velocidad de propagación:

$$\frac{d(kx - \omega t + \varphi_0)}{dt} = k \cdot v_x - \omega = 0 \Rightarrow v_x = \frac{\omega}{k} > 0 \Rightarrow \text{propagación en el sentido positivo del eje X}$$

- b) (1 p) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda.

La ecuación general de una onda que se propaga en el sentido positivo del eje X es:

$$y(x; t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - 2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0\right)$$

Por identificación:

$$2\pi \cdot f = 3,5 \Rightarrow f = \frac{3,5}{2\pi} = 0,56 \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,56} = 1,78 \text{ s}; \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 2,2 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2,2} = 2,85 \text{ m}$$

- c) (0,5 p) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda?

La velocidad de vibración de los puntos del medio es:

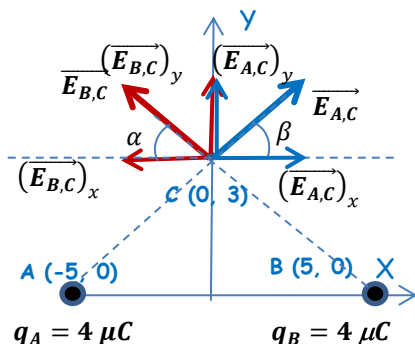
$$v = \frac{dy}{dt} = -10,5 \cdot \cos(2,2x - 3,5t)$$

La máxima velocidad de vibración se consigue cuando:

$$\cos(2,2x - 3,5t) = \pm 1 \Rightarrow v_{\max} = \pm 10,5 \text{ m/s}$$

5.- Dos cargas positivas idénticas de valor $q_1 = q_2 = 4,0 \mu\text{C}$ ($1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$) están situadas sobre el eje X en las posiciones $x_1 = -5 \text{ cm}$ y $x_2 = 5 \text{ cm}$.

- a) (1 p) Calcular el vector campo eléctrico creado por las dos cargas en el punto ($x = 0, y = 3 \text{ cm}$). Representarlo gráficamente.



$$r_A = r_B = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \text{ cm}$$

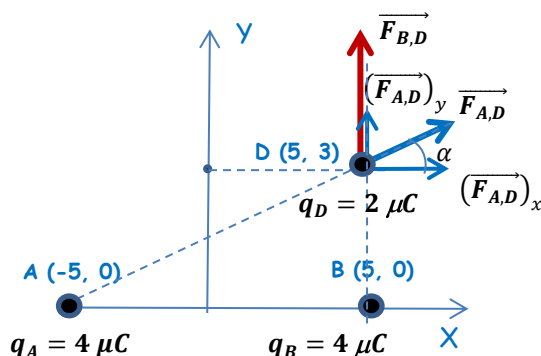
$$\alpha = \beta = \arctg \frac{3}{5} = 31^\circ$$

Por simetría, las cargas son iguales (en módulo) y las distancias son iguales, las componentes horizontales son iguales y de sentido contrario, anulándose entre sí, quedando como campo resultante la suma de las dos componentes verticales que son iguales entre sí.

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{A,C} + \vec{E}_{B,C} = 2 \cdot (\vec{E}_{A,C})_y = 2 K \cdot \frac{q}{(5)^2} \cdot (\text{sen } \alpha \cdot \vec{j})$$

$$\vec{E}_C = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{34} \cdot 10^{-2})^2} \cdot (\text{sen } 31^\circ \cdot \vec{j}) = 1,09 \cdot 10^7 \vec{j} \text{ N/C}$$

- b) (0,5 p) ¿Cuál es la fuerza que experimentaría una carga de $2 \mu\text{C}$ colocada en las coordenadas ($x = 5, y = 3$) en cm?



$$r_{A,D} = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109} \text{ cm}$$

$$r_{B,D} = 3 \text{ cm}$$

$$\alpha = \beta = \arctg \frac{3}{10} = 16,7^\circ$$

$$\vec{F}_D = \vec{F}_{A,D} + \vec{F}_{B,D}$$

$$\vec{F}_D = K \cdot \frac{q_D \cdot q_A}{(r_{A,D})^2} \cdot (\cos 16,7^\circ \vec{i} + \text{sen } 17,6^\circ \vec{j}) + K \cdot \frac{q_D \cdot q_B}{(r_{B,D})^2} \cdot (\vec{j})$$

$$\vec{F}_D = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{109} \cdot 10^{-2})^2} \cdot (\cos 16,7^\circ \vec{i} + \text{sen } 17,6^\circ \vec{j}) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (\vec{j})$$

$$\vec{F}_D = 6,3 \vec{i} + 81,9 \vec{j} \text{ N}$$

- c) (0,5 p) Explica brevemente el "principio de superposición".

Aplicado al campo eléctrico, el principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico, \vec{E} , en un punto debido a un sistema de cargas puntuales es igual a la suma de las intensidades de campo debidos a cada una de las cargas q_i del sistema. Además, el campo creado en dicho punto por cada carga q_i es el mismo que si las demás cargas del sistema no existieran:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$$

Este principio puede ser aplicado también a la fuerza electrostática, al potencial electrostático y a la energía potencial electrostática, siendo en estos últimos dos casos una suma escalar.