MOVIMIENTO PARABÓLICO

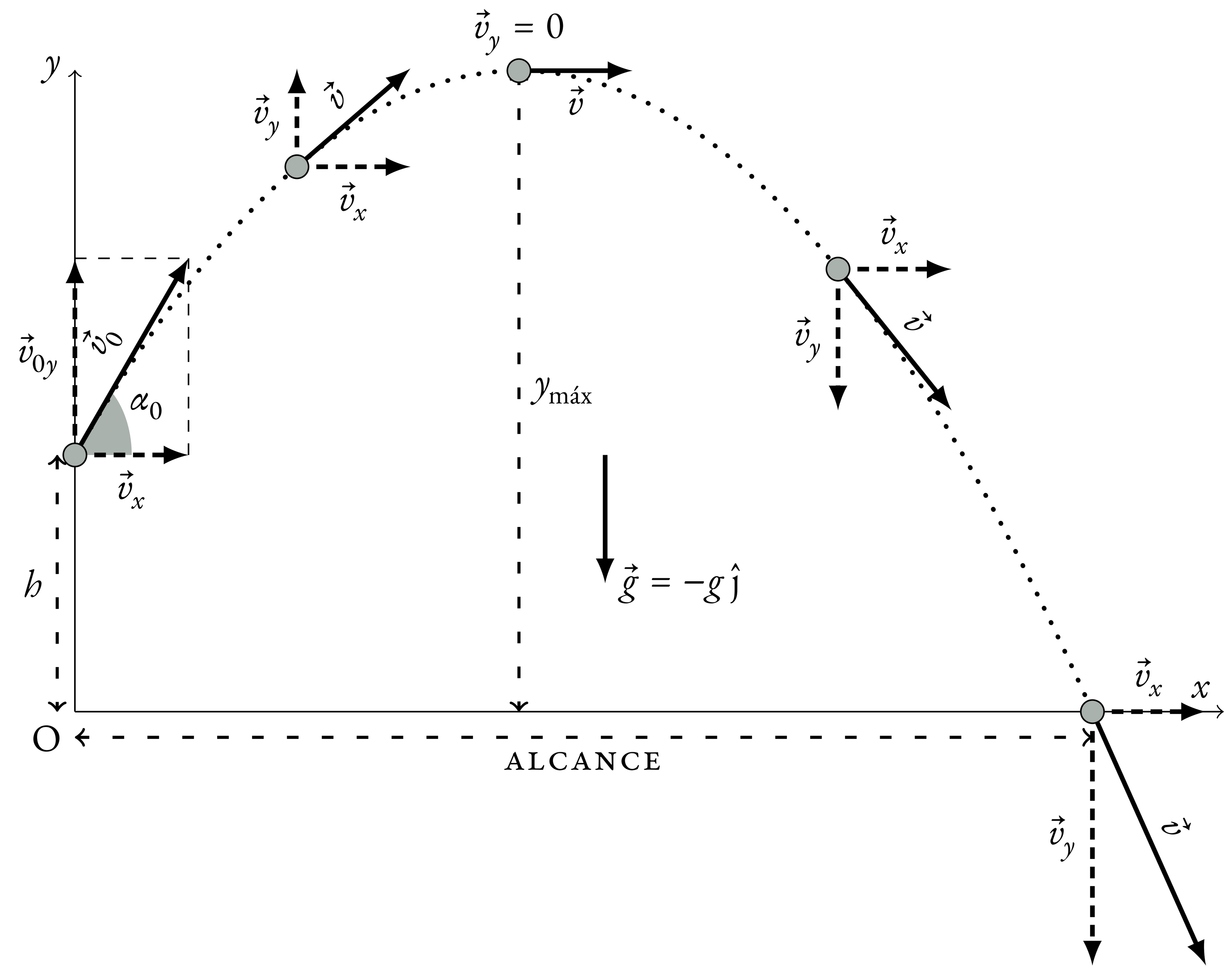
Rodrigo Alcaraz de la Osa

1º Bach

El **movimiento parabólico** surge de la **composición** de:

- Un **MRU horizontal** con velocidad $\vec{v}_x = v_x\,\hat{\imath}$ constante.
- Un **MRUV vertical** con velocidad inicial $\vec{v}_{0y} = v_{0y}\,\hat{\jmath}$ hacia arriba. La aceleración $\vec{g} = -g\,\hat{\jmath}$ apunta hacia abajo (despreciamos aquí el rozamiento con el aire).

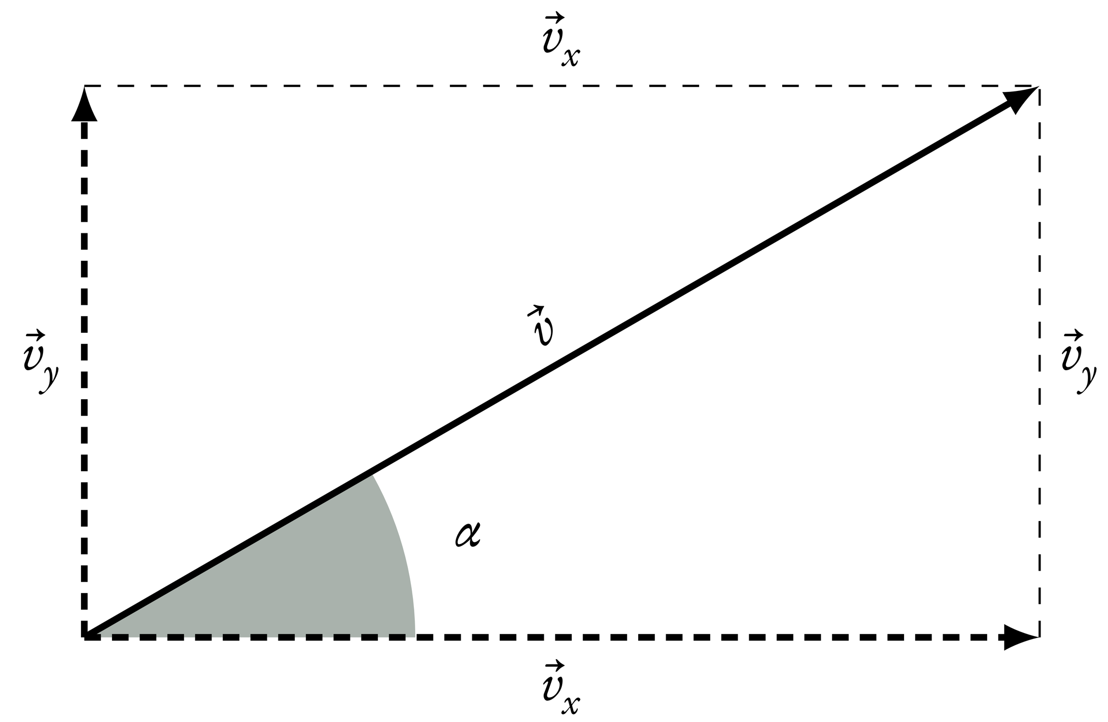
La figura muestra el esquema de un **tiro parabólico**, con un proyectil lanzado desde una altura h con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_x\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath}$ que forma un ángulo α_0 con la horizontal.



Como el proyectil se lanza desde una altura h, su **posición inicial** viene dada por:

$$\vec{r}_0 = x_0\,\hat{\imath} + y_0\,\hat{\jmath} = 0 + h\,\hat{\jmath} = h\,\hat{\jmath}$$

Componentes de la velocidad



En cualquier momento, las **componentes** de la **velocidad** $\vec{v}$ son:

$$\vec{v}_x = (v\cos\alpha)\,\hat{\imath}$$
$$\vec{v}_y = (v\sin\alpha)\,\hat{\jmath}$$

Según el **teorema de Pitágoras**:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecuaciones vectoriales del movimiento

Magnitud	Ecuación vectorial
Posición	$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} = \underbrace{(v_0\cos\alpha_0 \cdot t)}_{x(t)}\,\hat{\imath} + \underbrace{\left(h + v_0\sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)}_{y(t)}\,\hat{\jmath}$
Velocidad	$\vec{v}(t) = v_x\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} = \underbrace{(v_0\cos\alpha_0)}_{v_x}\,\hat{\imath} + \underbrace{(v_0\sin\alpha_0 - gt)}_{v_y(t)}\,\hat{\jmath}$
Aceleración	$\vec{a}(t) = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} = 0 - g\,\hat{\jmath} = -g\,\hat{\jmath}$

Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo t se obtiene la ecuación de una **parábola**, tal y como se observa en la figura:

$$y = h + x\tan\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}$$

Tiempo de vuelo

El **tiempo de vuelo** t_{vuelo} es el tiempo total que el móvil permanece en el aire. Se obtiene imponiendo $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$ y despejando el tiempo:

$$0 = h + v_0\sin\alpha_0 \cdot t_{\text{vuelo}} - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}}^2$$

Despejando t_{vuelo}:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{v_0\sin\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha_0 + 2gh}}{g},$$

donde nos quedamos únicamente con la opción positiva (+).

Alcance

El **alcance** es la distancia horizontal que recorre el móvil, siendo máximo para un ángulo $\alpha_0 = 45°$, y teniendo el mismo valor para $\alpha_0 = 45° + a$ que para $\alpha_0 = 45° - a$. Se obtiene sustituyendo en la ecuación de la coordenada x la expresión del tiempo de vuelo, es decir **alcance** $= x(t_{\text{vuelo}})$.

Altura máxima

La **altura máxima** $y_{\text{máx}}$ se alcanza cuando:

$$v_y(t) = v_0\sin\alpha_0 - gt = 0$$

Despejando el tiempo $t = v_0\sin\alpha_0/g$ y sustituyendo en $y(t)$:

$$y_{\text{máx}} = h + v_0\sin\alpha_0 \cdot \frac{v_0\sin\alpha_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha_0}{g}\right)^2 = h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g},$$

obteniéndose su valor máximo para $\alpha_0 = 90°$ (lanzamiento vertical).

Ángulo de la trayectoria

El **ángulo de la trayectoria** en un determinado punto coincide con el ángulo que el vector velocidad $\vec{v}$ forma con la horizontal en ese punto. Para su cálculo obtenemos las componentes $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$ y gracias a la definición trigonométrica de tangente de un ángulo:

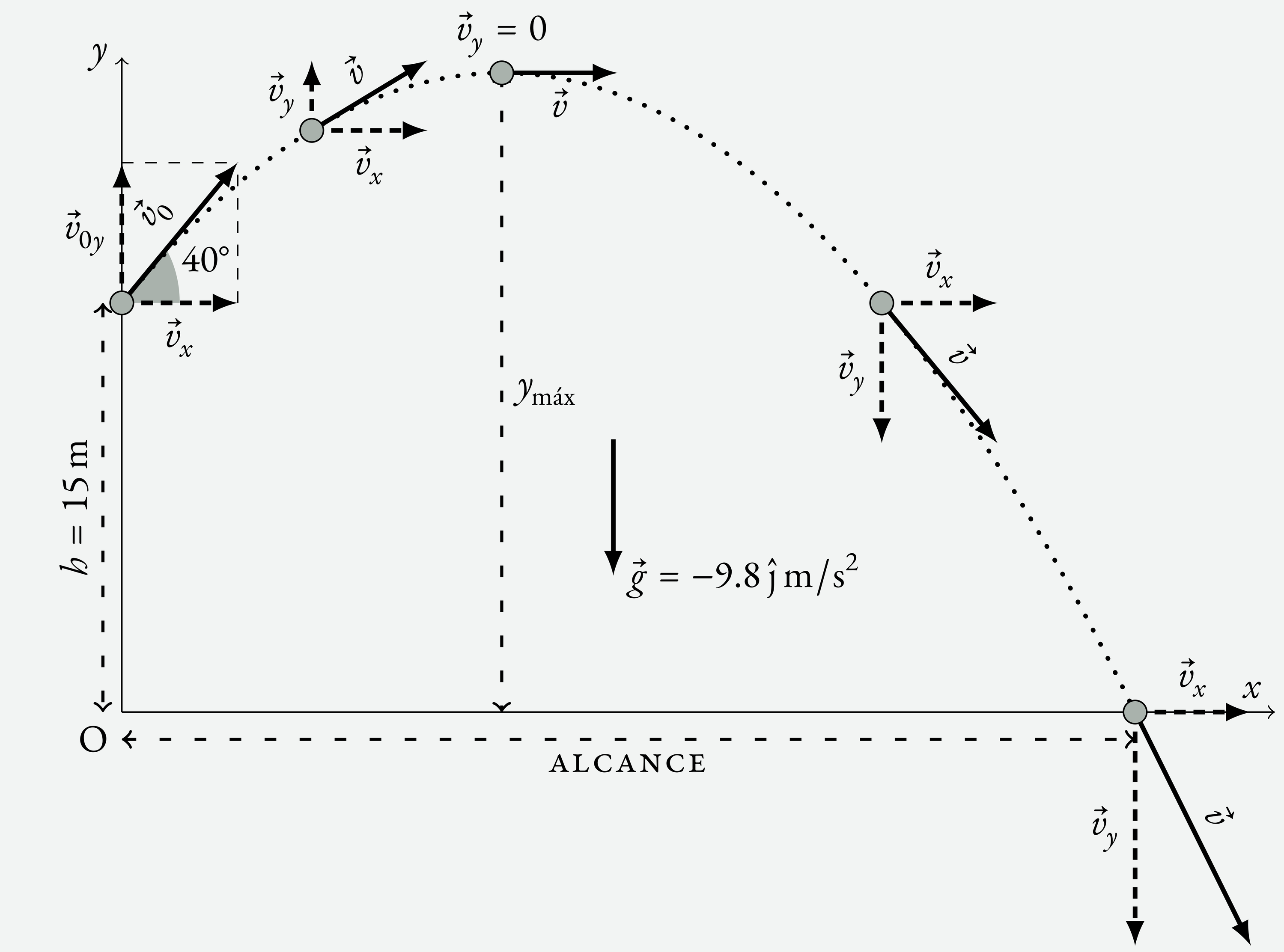
$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Ejemplo

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s con un ángulo de 40°. Calcula la distancia a la que caerá el agua y la velocidad con la que llega.

Solución

Lo primero hacemos un dibujo representando la situación:



Vamos a escribir las **ecuaciones del movimiento**:

$$\textbf{componente } x \rightarrow x(t) = 0 + v_0\cos\alpha_0 \cdot t = (20\cos 40° \cdot t)\text{ m}$$
$$\textbf{componente } y \rightarrow y(t) = h + v_0\sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(15 + 20\sin 40° \cdot t - 4.9t^2\right)\text{ m}$$

Lo primero que nos piden es la distancia a la que caerá el agua, el **alcance**. Para ello necesitamos calcular primero el **tiempo de vuelo** t_{vuelo}, por lo que imponemos $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$:

$$0 = 15 + 20\sin 40° \cdot t_{\text{vuelo}} - 4.9t_{\text{vuelo}}^2$$

Despejamos el **tiempo de vuelo** t_{vuelo} (notar que únicamente nos quedamos con la opción positiva):

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{20\sin 40° \pm \sqrt{20^2\sin^2 40° + 294}}{9.8} = \begin{cases} 3.5\text{ s} \\ \cancel{-0.9\text{ s}} \end{cases}$$

Sustituyendo el **tiempo de vuelo** en la coordenada x obtenemos el **alcance**:

$$\textbf{alcance} = x(t_{\text{vuelo}}) = 20\cos 40° \cdot t_{\text{vuelo}} = 20\cos 40° \cdot 3.5 = 53.6\text{ m}$$

Para calcular la velocidad con la que llega al suelo, escribimos primero la **ecuación de la velocidad**:

$$\vec{v}(t) = v_x\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} = (v_0\cos\alpha_0)\,\hat{\imath} + (v_0\sin\alpha_0 - gt)\,\hat{\jmath} = \left[(20\cos 40°)\,\hat{\imath} + (20\sin 40° - 9.8t)\,\hat{\jmath}\right]\text{ m/s}$$

Sustituyendo el **tiempo de vuelo** obtenemos la **velocidad** con la que llega al suelo, $\vec{v}(t_{\text{vuelo}})$:

$$\vec{v}(t_{\text{vuelo}}) = (20\cos 40°)\,\hat{\imath} + (20\sin 40° - 9.8 \cdot t_{\text{vuelo}})\,\hat{\jmath} = 15.3\,\hat{\imath} + (20\sin 40° - 9.8 \cdot 3.5)\,\hat{\jmath} = (15.3\,\hat{\imath} - 21.4\,\hat{\jmath})\text{ m/s}$$

siendo el **módulo** $v = |\vec{v}| = \sqrt{15.3^2 + (-21.4)^2} = 26.3$ m/s (**teorema de Pitágoras**).