PAÍS VASCO 2018

EJERCICIO F1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

La cuerda tensa de una guitarra tiene una longitud de 0.8 m. Cuando tocamos la nota 'Do' se crea una onda transversal que se desplaza con una velocidad de 105.6 m/s. Sabiendo que se crea el 4º armónico de una onda estacionaria:

(a) Calcula la longitud de onda y la frecuencia de dicha onda.

(b) Expresa la ecuación de dicha onda sabiendo que la elongación máxima de un punto que se encuentra a 0.1 m de uno de los extremos es de 1 cm.

(c) Calcula la velocidad máxima de dos puntos situados a 0.3 m y 0.4 m de un extremo. Interpreta el resultado.

Solución

(a) Se trata de una cuerda fija por los dos extremos, por lo que se cumple[1]

$$L = n\frac{\lambda}{2},$$

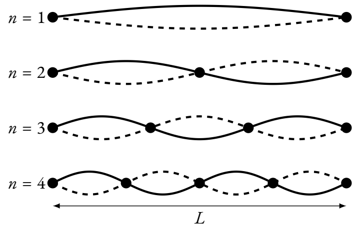
donde $L = 0.8$ m es la longitud de la cuerda, $n = 4$ por tratarse del 4º armónico y λ es la longitud de onda de la onda. Despejando:

$$\boxed{\lambda} = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 0.8}{4} = \boxed{0.4\ \mathrm{m}}$$

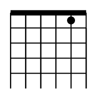
La LONGITUD de ONDA, λ, y la FRECUENCIA, f, están relacionadas a través de la velocidad de propagación de la onda, v:

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow \boxed{f} = \frac{v}{\lambda} = \frac{105.6}{0.4} = \boxed{264\ \mathrm{Hz}}$$

[1] No es difícil deducir la relación entre la longitud de la cuerda, L, y las longitudes de onda, λ, de las posibles ondas estacionarias que ésta puede *soportar*:



Esta frecuencia equivale al 'Do' del primer traste de la segunda cuerda:



(b) La ECUACIÓN GENERAL de una ONDA ESTACIONARIA viene dada por[2]

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t),$$

donde A es la amplitud de la onda, $k = 2\pi/\lambda$ el número de onda, x la posición, $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular y t el tiempo.

Calculamos lo primero k y ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi\ \mathrm{m}^{-1}$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 264 = 528\pi\ \mathrm{rad/s}$$

[2] Recordemos que una onda estacionaria se crea por INTERFERENCIA de dos ondas, de forma que la amplitud de la onda resultante el doble de la amplitud de las ondas originales.

Utilizamos la información que nos da el enunciado[3]:

$$\begin{aligned} y(0.1, t) &= A \sin(5\pi \cdot 0.1) \cos(528\pi t) \\ &= A \cdot 1 \cdot \cos(528\pi t) = A \cos(528\pi t) \end{aligned}$$

de donde es fácil ver que la elongación máxima se alcanzará cuando $\cos(528\pi t) = 1$, por lo que $\boxed{A = 0.01\ \mathrm{m}}$.

[3] La elongación máxima de un punto que se encuentra a 0.1 m de uno de los extremos es de 1 cm = 0.01 m.

(c) La VELOCIDAD puede obtenerse derivando[4] la ecuación del desplazamiento,

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= 0.01\sin(5\pi x)\cos(528\pi t)\\
v(x,t) &= \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -0.01\cdot 528\pi\sin(5\pi x)\sin(528\pi t)\\
&= -5.28\pi\sin(5\pi x)\sin(528\pi t)
\end{aligned}
$$

y calculando el valor máximo[5]:

$$v_{\text{máx}}(x) = -5.28\pi\sin(5\pi x)$$

Sustituimos para los puntos de interés:

$$x = 0.3\,\mathrm{m} \longrightarrow \boxed{v_{\text{máx}}(0.3)} = -5.28\pi\sin(5\pi\cdot 0.3) = \boxed{5.28\pi\,\mathrm{m/s} \approx 16.6\,\mathrm{m/s}}$$

$$x = 0.4\,\mathrm{m} \longrightarrow \boxed{v_{\text{máx}}(0.4)} = -5.28\pi\sin(5\pi\cdot 0.4) = \boxed{0\,\mathrm{m/s}}$$

lo que es compatible con la forma de la onda:

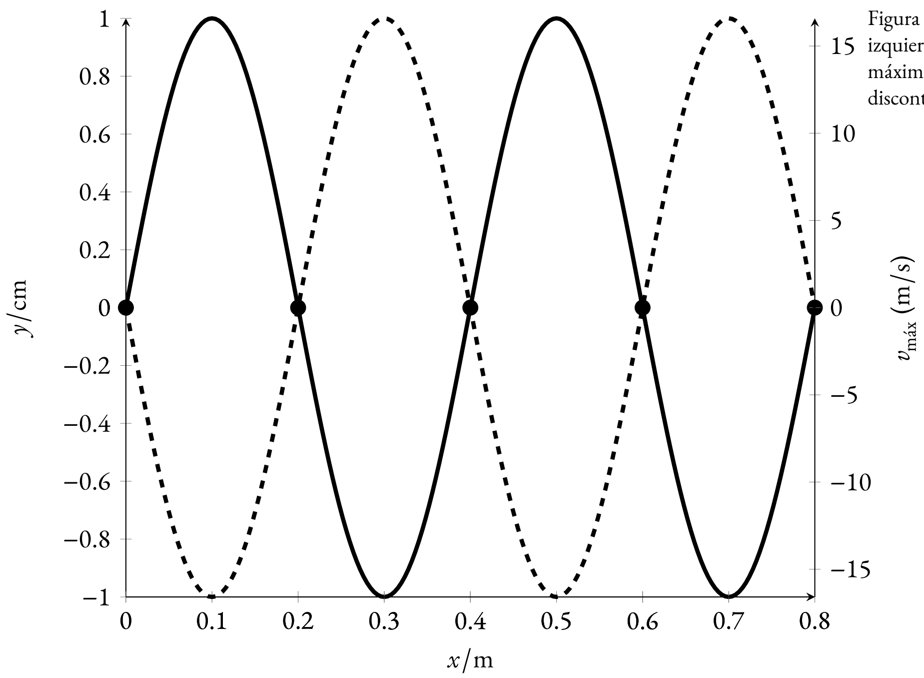


Figura 1: Gráficos del desplazamiento y (eje izquierdo, línea sólida) y de la velocidad máxima de vibración $v_{\text{máx}}$ (eje derecho, línea discontinua).

En $x = 0.3$ m la onda se encuentra en $y = -A$, por lo que su velocidad es máxima y positiva. $x = 0.4$ m es un NODO, por lo que la onda no vibra y por tanto su velocidad de vibración es nula.

[4] OJO que si queremos utilizar la *EXPRESIÓN ATAJO* $v_{\text{máx}} = A\omega$ necesitamos incluir el término $\sin(kx)$ en la amplitud, de forma que tendríamos $v_{\text{máx}}(x) = A\sin(kx)\omega$.

[5] Es fácil ver que el valor máximo se obtiene cuando $\sin(528\pi t) = 1$.