INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Física 2.º Bach

Marta Rada Arias

Modelos cosmológicos

Aristóteles (350 a. C.)

Era un MODELO GEOCÉNTRICO, con la Tierra en el centro del Universo, rodeada por esferas transparentes de distintos tamaños en las que se encontraban los diferentes planetas. La esfera más externa era en la que se encontraban las estrellas fijas. Dicha esfera giraba a un ritmo constante en torno a un eje que pasaba por la estrella polar. Su movimiento era transmitido a las esferas de planetas más externos por rozamiento y así sucesivamente. Era, por tanto, un UNIVERSO MECÁNICO.

Como el mundo celeste era perfecto, los objetos en él solo podían describir órbitas circulares puesto que el círculo era el símbolo de la perfección. Este modelo podía explicar muchas de las observaciones, pero no explicaba, por ejemplo:

- Variaciones observadas en el brillo del Sol (debidas a cambios en la distancia de la Tierra).
- Movimientos retrógrados observados en algunos planetas que, aparentemente, cambian el sentido de su movimiento.

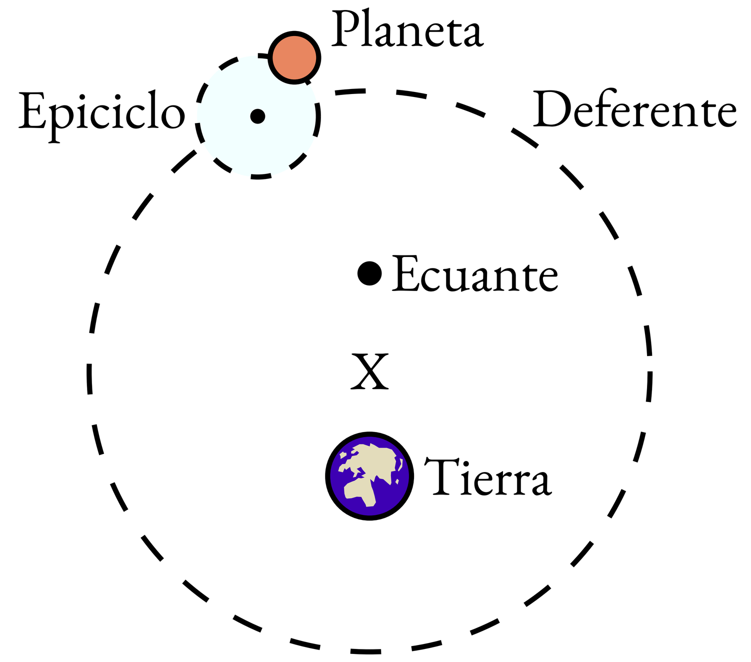
Aristarco de Samos (300 a. C.)

Fue el PRIMER MODELO HELIOCÉNTRICO, en el que el Sol se situaba en el centro del Universo y el resto de los planetas giraban en torno a él en órbitas circulares de distintas dimensiones. En este modelo, la Tierra también describía un movimiento de rotación alrededor de su eje que permitía explicar fácilmente el día y la noche. A pesar de que este modelo era bastante acertado, no prosperó por razones de índole filosófica:

- PARALAJE de las ESTRELLAS FIJAS: deberían verse en diferente posición dependiendo de la época del año. Aristarco lo justificó de forma esencialmente correcta: dado que la distancia a las estrellas es mucho mayor que el diámetro de la órbita terrestre, no se aprecia paralaje.
- IMPLICACIONES MECÁNICAS del movimiento de ROTACIÓN TERRESTRE, que requerían conocer el principio de inercia (1ª ley de Newton) para comprenderlas.

Ptolomeo (100 d. C.)

Propuso un modelo también GEOCÉNTRICO introduciendo ciertas variaciones al modelo de Aristóteles, como que los planetas podían describir movimientos circulares o una composición de estos. Para ello, introdujo varios artificios matemáticos, como los EPICICLOS, el DEFERENTE y el ECUANTE. Encajando todos estos artificios, Ptolomeo consiguió un sistema útil para astrónomos y navegantes, que perduró más de 14 siglos.



Los elementos básicos del modelo de Ptolomeo, mostrando un planeta en un epiciclo, un deferente, el excéntrico (X) y un punto ecuante. El centro del deferente es X, pero el movimiento angular del epiciclo es aparentemente acorde solo respecto al punto (·), que es el ecuante. El deferente es el recorrido circular que describe el centro del epiciclo. El ecuante es el punto en torno al cual se mueve el planeta en su trayectoria, aparentemente. Adaptada de `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ptolemaic_elements.svg`.

Copérnico (s. XV)

Propuso un MODELO HELIOCÉNTRICO igual que el de Aristarco (Sol en el centro con planetas orbitando alrededor y rotación de la Tierra), que explicaba de forma mucho más sencilla los movimientos retrógrados, que eran causados por la combinación entre el movimiento terrestre y el de los planetas. Presentaba varias VENTAJAS sobre el geocéntrico:

- Simplicidad: se requieren muchos menos movimientos para explicar las observaciones.
- Modelo único: todos los planetas se ajustan de igual forma al modelo.

Sin embargo, tardó más de un siglo en ser aceptado por el rechazo a perder la cosmología aristotélica, los dogmas y porque no existía ninguna observación que un modelo geocéntrico no pudiera explicar.

Galileo (s. XVI)

Perfeccionó el telescopio y esto permitió mejorar enormemente las observaciones. Así, descubrió las fases de Venus, que únicamente podían ser explicadas de forma satisfactoria considerando el modelo heliocéntrico (se consideró la prueba empírica definitiva).

Kepler (s. XVI–XVII)

Estableció las 3 leyes que llevan su nombre, con las que fue capaz de explicar a la perfección las observaciones.

Leyes de Kepler

Constituyen una descripción cinemática del Sistema Solar y consiguen explicar de forma muy precisa todas las observaciones relativas no solo al movimiento de planetas, sino también asteroides, cometas y satélites (incluso artificiales).

1ª ley: órbitas elípticas

"Los planetas giran en torno al Sol describiendo ÓRBITAS ELÍPTICAS, con el Sol situado en uno de los focos."

2ª ley: ley de las áreas

"Los planetas se mueven con velocidad areolar constante, es decir, el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales."

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{constante}$$

3ª ley: ley de los periodos

"El cuadrado del periodo orbital de los planetas es directamente proporcional al cubo de su distancia media al Sol."

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{constante}$$

donde $r \to a$ (semieje mayor) si la órbita es elíptica.

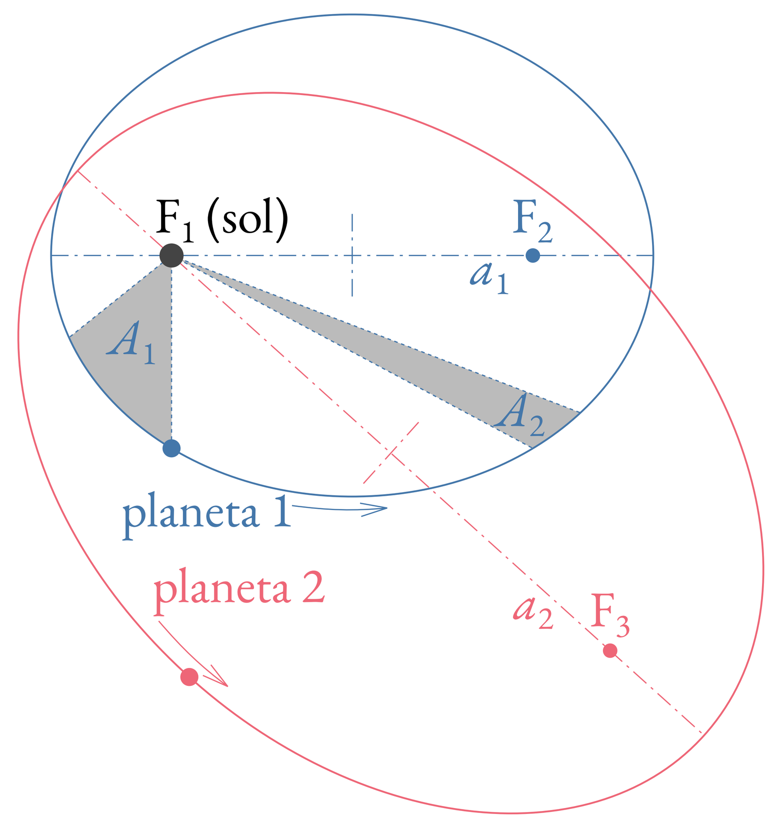


Diagrama que ilustra las LEYES DE KEPLER. Traducida y adaptada de `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_laws_diagram.svg`.

Ley de gravitación universal de Newton

Teniendo en cuenta las leyes de Kepler, Newton llegó a la conclusión de que el movimiento de los planetas era debido a una fuerza de atracción proporcional a la masa del planeta (m) y del Sol (M) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (r):

$$\vec{F}_\mathrm{g} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r},$$

donde $\hat{r}$ es el vector unitario que va de M a m y $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal, determinada experimentalmente por Henry Cavendish en 1798 utilizando una balanza de torsión.

Esta ley no solo es aplicable a cuerpos celestes, sino que también se cumple para dos masas cualesquiera (caída de cuerpos). Se conoce como LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL y es revolucionaria por muchas razones:

- Ruptura de la barrera cielo-Tierra.
- Acción a distancia.

También es aplicable a un conjunto de masas puntuales, pues cumple el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

$$\vec{F}_\mathrm{t} = \sum_i \vec{F}_i$$

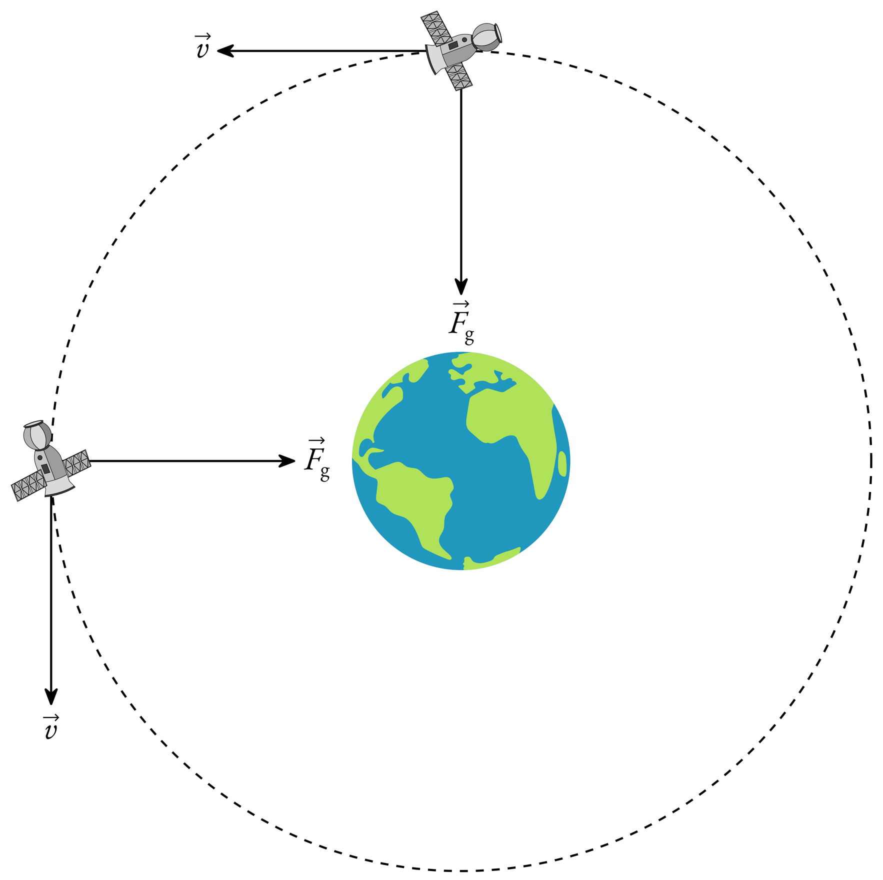
Relación con la 3ª ley de Kepler

En el movimiento de un planeta alrededor del Sol, la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta. Suponiendo una órbita circular, podemos relacionar la velocidad orbital con el periodo, $v = 2\pi r/T$:

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{c}$$
$$\frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \frac{\cancel{m}v^2}{r}$$
$$\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{r}}$$
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Esto nos permite determinar la masa de un planeta conociendo el periodo y el radio orbital de uno de sus satélites:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

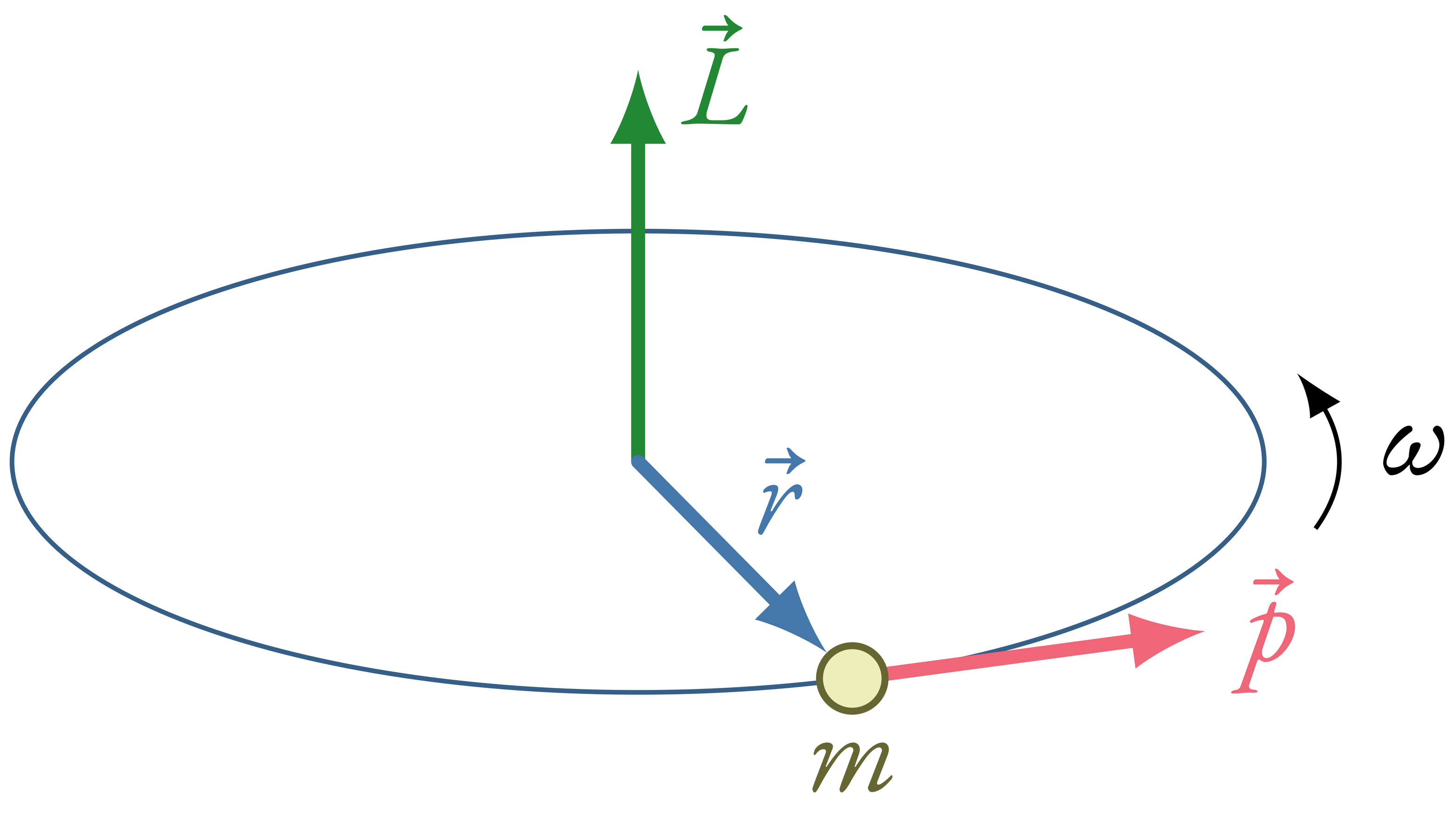


Adaptada de `https://www.nagwa.com/en/explainers/536169674242/`.

Momento angular

Newton demostró que la fuerza gravitatoria es una FUERZA CENTRAL, ya que está dirigida hacia un centro fijo (como el Sol) y depende únicamente de la distancia al mismo. Cuando las fuerzas son centrales, existe una magnitud, llamada MOMENTO ANGULAR, que se conserva, lo que facilita enormemente la descripción de muchos fenómenos asociados. Recordando que el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ representa la *inercia* en un movimiento de traslación, se define el momento angular como la magnitud análoga para la rotación:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Adaptada de `https://tikz.net/dynamics_angular_momentum/`.

Conservación del momento angular

Una magnitud se conserva cuando permanece constante, es decir, no cambia con el tiempo. Estudiemos la variación de $\vec{L}$ con el tiempo para ver en qué circunstancias se conserva:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \cancelto{0}{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{L}$ se conserva si su variación con el tiempo es cero:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = 0 & \text{La fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es cero.} \\ \vec{r} \parallel \vec{F} & \text{Sucede en fuerzas centrales.} \end{cases}$$

Movimientos planetarios

La conservación de $\vec{L}$ implica:

- Dirección de $\vec{L}$ no cambia $\Rightarrow$ órbitas planas (plano $\perp$ a $\vec{L}$).
- Sentido de $\vec{L}$ no cambia $\Rightarrow$ planetas siempre giran en el mismo sentido.
- Módulo de $\vec{L}$ es constante:

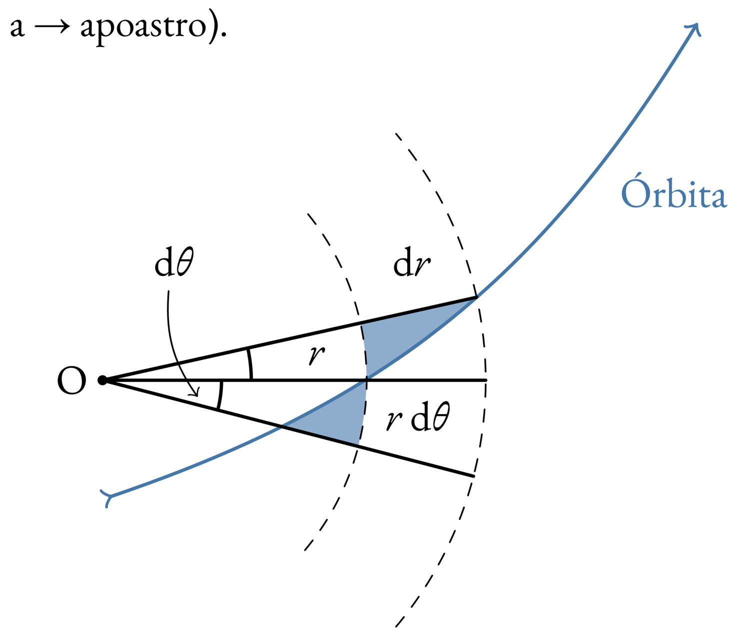
$$L_1 = L_2$$
$$r_1 \cancel{m} v_1 \sin\theta_1 = r_2 \cancel{m} v_2 \sin\theta_2$$

En órbitas circulares: $r_1 = r_2$; $\theta_1 = \theta_2 = 90° \Longrightarrow v_1 = v_2$ (velocidad constante).
En órbitas elípticas: $r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = r_\mathrm{a} v_\mathrm{a}$ (p $\to$ periastro, a $\to$ apoastro).

2ª ley de Kepler

La conservación de $\vec{L}$ también explica la 2ª ley de Kepler. El área barrida en $\mathrm{d}t$ se puede aproximar por el área de un triángulo isósceles:

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r \cdot r \sin\mathrm{d}\theta \simeq \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{1}{2} r v = \frac{L}{2m}$$



Adaptada de `https://tikz.net/kepler-second-law/`.

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Física 2.º Bach

Marta Rada Arias

Campo gravitatorio

El campo gravitatorio es la magnitud que utilizamos para explicar los fenómenos gravitatorios, como la perturbación del espacio que provoca la presencia de una masa a su alrededor.

Campo gravitatorio creado por una masa puntual

El campo gravitatorio $\vec{g}$ creado por una masa puntual M en un punto cualquiera que se encuentra a una distancia r de ella viene dado por:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r}$$

y se mide en N/kg o m/s^2 en el SI.

Distribución de masas puntuales Cuando en una misma región del espacio existen varias (n) masas puntuales, el campo gravitatorio total es la suma vectorial de los campos creados por cada una de las masas, resultado que se conoce como PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

$$\vec{g}_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{GM_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i\right)$$

Relación fuerza-campo

La fuerza $\vec{F}_g$ que actúa sobre una masa m colocada en un punto del espacio en el que existe un campo gravitatorio $\vec{g}$ viene dada por:

$$\vec{F}_g = m\vec{g},$$

expresión que coincide con la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -m\frac{GM}{r^2}\,\hat{r} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r}$$

Potencial gravitatorio

Como la FUERZA GRAVITATORIA es CONSERVATIVA, el campo gravitatorio $\vec{g}$ puede expresarse en función de un potencial gravitatorio V, definido como el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza para traer un cuerpo desde el infinito (donde $V = 0$ por convenio) hasta un punto P, a velocidad constante:

$$V = \frac{W_{\infty\to P}}{m} = \frac{1}{m}\int_{\infty}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{m}\int_{\infty}^{P}\frac{GMm}{r^2}\,dr = -\frac{GM}{r}$$

tal que $\vec{g} = -\frac{dV}{dr}\,\hat{r}$ (en general $\vec{g} = -\nabla V$, siendo ∇ el operador diferencial vectorial nabla).

Distribución de masas puntuales El potencial generado por una distribución de masas puntuales en un punto es la suma de los potenciales generados por cada una de las masas en dicho punto:

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{GM_i}{r_i}\right)$$

Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria, E_p, es la energía que adquiere una masa m dentro de un campo gravitatorio $\vec{g}$. Se define como el trabajo que debe realizar una fuerza para traer un cuerpo desde el infinito (donde $E_p = 0$ por convenio) hasta un punto P, a velocidad constante:

$$E_p = W_{\infty\to P} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{P}\frac{GMm}{r^2}\,dr = -\frac{GMm}{r}$$

También se puede calcular a partir del potencial gravitatorio V:

$$E_p = mV = -\frac{GMm}{r}$$

El signo − indica que la masa está ligada al campo gravitatorio (si $E_p > 0$ estaría fuera del campo).

Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria

Cuando una masa m se mueve libremente dentro de un campo gravitatorio, se realiza un trabajo $W_{1\to2}$:

$$W_{1\to2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -F\,dr = \int_1^2 -\frac{GMm}{r^2}\,dr = GMm\frac{1}{r}\Big|_1^2 = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} = -\Delta E_p = -m\Delta V,$$

que solo depende de las posiciones inicial y final, lo que significa que $\vec{F}_g$ es CONSERVATIVA.

$$\begin{cases} W = 0 & \text{La masa } m \text{ describe una trayectoria cerrada (o se mueve por una superficie equipotencial).} \\ W > 0 & \text{La masa } m \text{ se acerca a } M\text{, desplazándose hacia } V \text{ decrecientes (proceso espontáneo).} \\ W < 0 & \text{La masa } m \text{ se aleja de } M \text{ (proceso no espontáneo, se requiere un } \vec{F}_{\text{externa}}\text{).} \end{cases}$$

Campo gravitatorio (cont.)

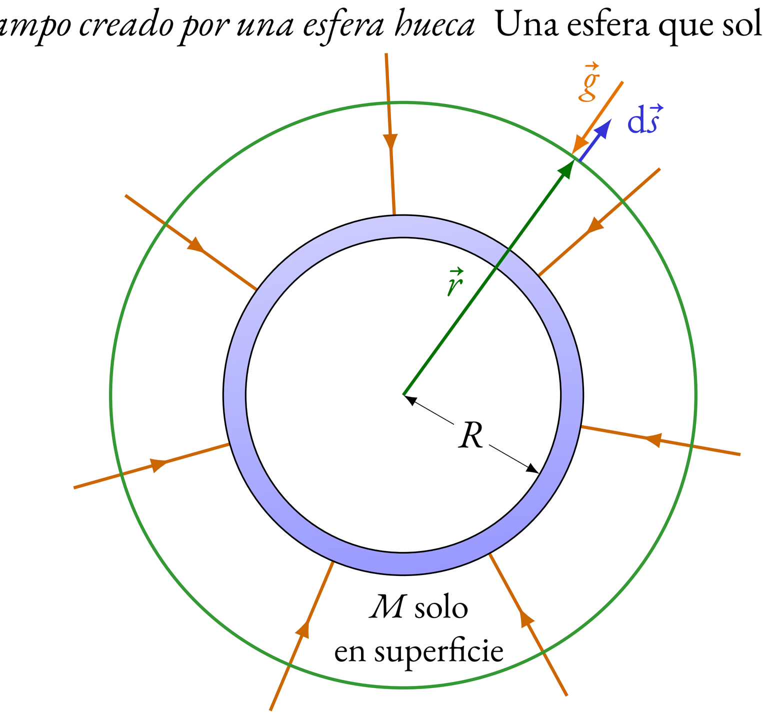
Campo gravitatorio creado por distribuciones esféricas de masa

El TEOREMA DE GAUSS nos permite relacionar el flujo neto Φ que atraviesa una superficie cerrada S con la masa encerrada $M_{\text{encerrada}}$ por dicha superficie:

$$\Phi = -4\pi G M_{\text{encerrada}},$$

donde $\Phi = \oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s}$ es el flujo (número de líneas de campo) que atraviesa la superficie S.

Campo creado por una esfera hueca Una esfera que solo tiene masa en su superficie:



Adaptada de `https://tikz.net/electric_field_sphere/`.

- Para $r < R$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = gS \\ \Phi &= -4\pi G\cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\}\ \vec{g} = \vec{0}$$

El campo gravitatorio en el interior es nulo.

- Para $r \geq R$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = -gS = -g\cdot 4\pi r^2 \\ \Phi &= -4\pi G\cdot M \end{aligned}\right\}\ \vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r}$$

Se comporta como una masa puntual M colocada en el centro de la esfera.

Campo creado por una esfera maciza homogénea Una esfera con densidad homogénea ρ:

- Para $r \leq R$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = -g\oint_S ds = -g\cdot 4\pi r^2 \\ \Phi &= -4\pi G\cdot M_{\text{encerrada}} = -4\pi G\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}\right\}\ \vec{g} = -\frac{4\pi G\rho}{3}\,r\,\hat{r} \text{ (proporcional al radio } r)$$

- Para $r \geq R$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = -g\oint_S ds = -g\cdot 4\pi r^2 \\ \Phi &= -4\pi G\cdot M \end{aligned}\right\}\ \vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r} \text{ (igual que masa puntual)}$$

Campo gravitatorio terrestre

Considerando la TIERRA como una ESFERA MACIZA HOMOGÉNEA:

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2}\,\hat{r} \qquad \text{para } r = R_T + h \geq R_T\ (h \geq 0)$$

Variación de $\vec{g}$ con la altura Siendo $g_0 = GM_T/R_T^2$ el campo gravitatorio terrestre en la superficie ($h = 0$):

$$g = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} = g_0\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = g_0\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Variación de $\vec{g}$ con la latitud Se debe a la rotación de la Tierra sobre su eje:

$$g_{\text{efectiva}} = g - a_{cf_r} = g - \omega^2 R_T\cos^2\varphi = \begin{cases} g - \omega^2 R_T & \varphi = 0° \text{ (ecuador)} \\ g & \varphi = 90° \text{ (polos)} \end{cases}$$

Movimiento de los satélites en órbitas

Supongamos que un satélite describe una órbita circular a una altura h ($r = R + h$) sobre la superficie de un planeta, con MCU. Si el satélite permanece en la órbita, debe cumplirse:

$$F_g = F_c$$
$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

de donde podemos obtener:

Velocidad orbital $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

Periodo de revolución $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} \to$ *Frecuencia* $f = 1/T$

Movimiento de los satélites en órbitas (cont.)

Satélites geoestacionarios

Son aquellos cuyo periodo coincide con el periodo de rotación terrestre, de forma que orbitan manteniéndose siempre en la misma vertical (aparentemente no se mueven). Se colocan en el plano del ecuador para que $\vec{g}$ no varíe con la latitud. Despejando de la 3ª ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \to r = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{4\pi^2}} \to h = r - R_T \approx 35\,800 \text{ km}$$

Energía de los satélites

Cuando describe una órbita, la ENERGÍA MECÁNICA de un satélite viene dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = \frac{E_p}{2}\left(= -\frac{GMm}{2a} \text{ si órbita elíptica}\right)$$

Si tenemos en cuenta que todas las FUERZAS que actúan son CONSERVATIVAS, la ENERGÍA MECÁNICA SE CONSERVA. Así, es posible calcular:

Velocidad de lanzamiento Es la velocidad que hay que comunicar a un satélite para colocarlo en su órbita, suponiendo que se lanza desde la superficie terrestre:

$$E_1 = E_2$$
$$E_{c_1} + E_{p_1} = \frac{E_{p_2}}{2}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{2r} \to v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)}$$

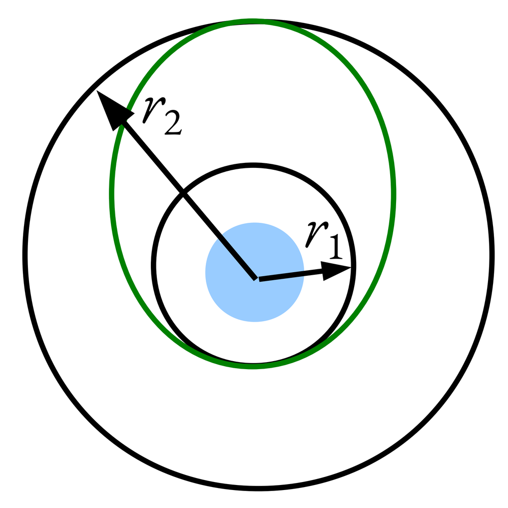
Velocidad de escape Si en el lanzamiento proporcionamos al satélite una velocidad suficientemente elevada, este puede llegar a escapar del campo gravitatorio terrestre. A esta (mínima) velocidad se le denomina VELOCIDAD DE ESCAPE. Imponiendo la condición de que el objeto se aleje hasta una distancia infinita y quede en reposo ($E = 0$):

$$E = 0$$
$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = 0 \to v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Para $v \geq v_e$ el satélite escapa de la influencia de $\vec{g}$ y se mueve libremente. Es importante destacar, a la vista de la expresión, que solo depende de M_T y de R_T (es independiente de las características del satélite).

Trabajo para pasar de una órbita a otra Supongamos que queremos pasar un satélite de una órbita 1 a otra órbita 2. Será necesario realizar un trabajo tal que:

$$E_1 + W = E_2 \to W = E_2 - E_1 = -\frac{GM_Tm}{2r_2} - \left(-\frac{GM_Tm}{2r_1}\right) = \frac{GM_Tm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



Adaptada de `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TransferOrbit.svg`.

La ÓRBITA DE TRANSFERENCIA DE HOHMANN es una maniobra orbital que traslada a una nave espacial desde una órbita circular a otra utilizando dos impulsos de su motor. El nombre proviene del científico alemán Walter Hohmann que publicó su teoría en 1925.

Energía de los satélites y tipo de órbita

La energía de un satélite determina el tipo de órbita que describe: $E = \overset{+}{\overline{\frac{1}{2}mv^2}} - \overset{-}{\overline{\frac{GMm}{r}}}$

$E < 0$ Ligado al campo (órbitas cerradas):

$$\begin{cases} E_c = 0 & \text{El satélite cae por atracción gravitatoria.} \\ E_c \neq 0 & \text{Describe una órbita cerrada (circular o elíptica). Ej. satélites o planetas.} \end{cases}$$

$E \geq 0$ No ligado al campo (órbitas abiertas):

$$\begin{cases} E = 0 & \text{Órbita parabólica: } E_c = -E_p\text{. Ej. cometas.} \\ E > 0 & \text{Órbita hiperbólica: } E_c > E_p\text{. Ej. asteroides.} \end{cases}$$