MADRID 2018

EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Una onda transversal se propaga a través de una cuerda, el desplazamiento de las partículas está dado por: $y(x,t) = 0.06\sin(\pi x + 20\pi t + \pi/2)$ dada en m, x está en m y t en s. Si la tensión de la cuerda es de 600 N. Calcular:

(a) El periodo de la onda y la rapidez de propagación de la onda

(b) La densidad de masa lineal de la cuerda y la potencia media

(c) La ecuación de la cuerda en $t = 4$ s y su gráfico

A continuación, considere un punto de la cuerda situado en $x = 0$ m y determine:

(d) La ecuación del movimiento transversal y su gráfico

(e) La máxima rapidez y aceleración transversal en $x = 0$ m

Solución

Lo primero que hacemos es analizar[1] la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = 0.06\sin\left(\pi x + 20\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

de donde extraemos:

$$\begin{aligned} A &= 0.06\ \mathrm{m} \\ k &= \pi\ \mathrm{m} \\ \omega &= 20\pi\ \mathrm{rad\,s^{-1}} \\ \varphi_0 &= \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad} \end{aligned}$$

(a) La frecuencia angular ω y el periodo T están relacionados a través de la expresión:

$$\boxed{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = \boxed{0.1\ \mathrm{s}}$$

La rapidez[2] de propagación la podemos calcular con la expresión:

$$v = \lambda \cdot f,$$

donde $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda y $f = 1/T$ la frecuencia.

Sustituyendo:

$$\boxed{v} = \frac{2\pi}{k}\cdot\frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{0.1} = \boxed{20\ \mathrm{m/s}}$$

(b) La rapidez de propagación de la onda, v, la tensión de la cuerda, T, y su densidad de masa lineal, μ, están relacionadas a través de la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Despejando, obtenemos:

$$\boxed{\mu} = \frac{F}{v^2} = \frac{600}{20^2} = \boxed{1.5\ \mathrm{kg/m}}$$

La potencia media, P_m, puede calcularse a través de la expresión:

$$\boxed{P_\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 1.5\cdot 20\cdot(0.06)^2\cdot(20\pi)^2 = \boxed{\frac{108}{5}\pi^2\ \mathrm{W} \approx 213.2\ \mathrm{W}}$$

[1] Básicamente compararla con la ECUACIÓN básica de una ONDA ARMÓNICA:

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \varphi_0),$$

donde A es la amplitud de la onda, x la posición, k el número de onda, ω la frecuencia angular, t el tiempo y φ_0 la fase inicial. El signo + entre kx y ωt nos indica que la onda se propaga hacia la izquierda.

[2] Notar que al decir *rapidez* nos están pidiendo únicamente el MÓDULO de la VELOCIDAD.

(c) Particularizamos la ecuación de la onda para $t = 4$ s:

$$y(x, 4) = 0.06 \sin\left(\pi x + 20\pi \cdot 4 + \frac{\pi}{2}\right) = 0.06 \sin\left(\pi x + 80\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.06 \cos(\pi x + 80\pi),$$

cuyo gráfico es:

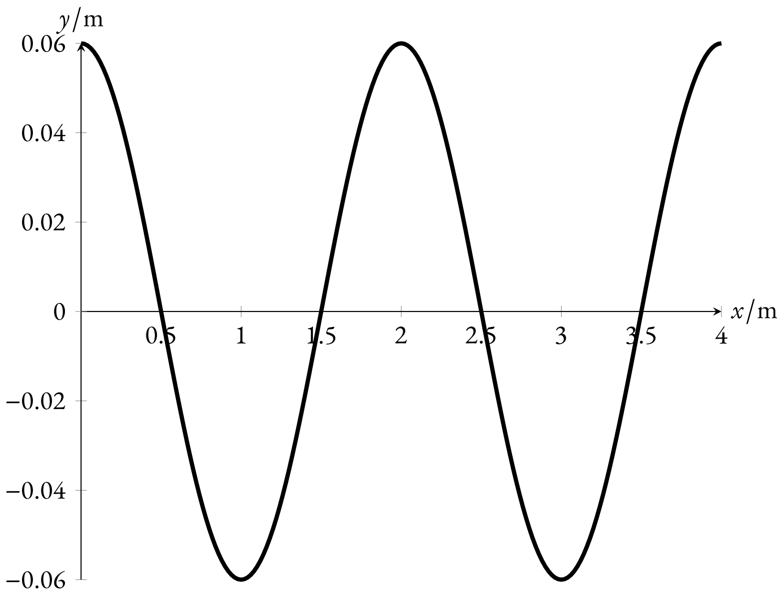

Figura 1: Gráfico de la onda en $t = 4$ s. Notar que pintamos hasta $x = 4\,\mathrm{m} = 2\lambda$.

Consideramos ahora $x = 0$:

(d) La ecuación del movimiento transversal pasa a ser:

$$y(0, t) = 0.06 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.06 \cos(20\pi t),$$

cuyo gráfico es:

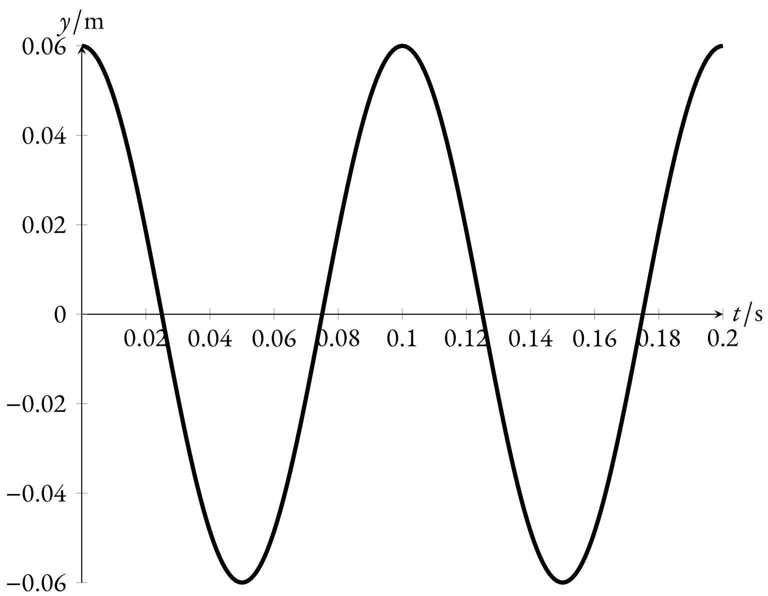

Figura 2: Gráfico de la onda en $x = 0$ m. Notar que pintamos hasta $t = 0.2\,\mathrm{s} = 2T$.

(e) La máxima rapidez y aceleración transversal pueden obtenerse derivando[3] la ecuación del desplazamiento, $y(t)$, y calculando los respectivos máximos:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -0.06 \cdot 20\pi \cdot \sin(20\pi t) = -1.2\pi \sin(20\pi t)$$
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -1.2\pi \cdot 20\pi \cos(20\pi t) = -24\pi^2 \cos(20\pi t)$$

Es fácil ver que los respectivos máximos se obtienen cuando $\sin(20\pi t)$ y $\cos(20\pi t)$ son iguales a 1, de forma que[4]:

$$v_{\text{máx}} = |-1.2\pi| \approx 3.8\,\mathrm{m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = |-24\pi^2| \approx 236.9\,\mathrm{m/s^2}$$

[3] También podemos utilizar las *EXPRESIONES ATAJO*:

$$v_{\text{máx}} = A\omega = 0.06 \cdot 20\pi = 1.2\pi\,\mathrm{m/s} \approx 3.8\,\mathrm{m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = A\omega^2 = 0.06 \cdot (20\pi)^2 = 24\pi^2\,\mathrm{m/s^2} \approx 236.9\,\mathrm{m/s^2}$$

[4] Tomamos el VALOR ABSOLUTO de las expresiones pues se entiende que nos piden los MÓDULOS.