ANDALUCÍA 2000

EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Supongamos n masas M colocadas en línea recta de manera que cada masa toque a la siguiente. Desde la izquierda incide una masa $2M$ con velocidad V que choca con la fila de n masas. Si consideramos la colisión central y elástica:

(a) ¿Es posible que sea expulsada una sola bola de la derecha?

(b) ¿Pueden salir dos bolas de la derecha con velocidades diferentes?

Solución

El problema nos describe un péndulo de Newton, que es golpeado por una bola cuya masa es el doble que la masa de las bolas que forman el péndulo. La intuición (y la experiencia, si alguna vez hemos jugado con uno de estos péndulos) nos dice que la respuesta a ambas preguntas va a ser negativa. Vamos a verlo con detalle.

Como el choque es elástico, aplicamos tanto la conservación del momento lineal[1] como de la energía cinética:

$$\begin{aligned}
\text{momento lineal antes} &= 2MV \\
\text{momento lineal después} &= 2MV' + \sum_{i=1}^{n} Mv_i' \\
\text{energía cinética antes} &= \frac{1}{2}2MV^2 \\
\text{energía cinética después} &= \frac{1}{2}2MV'^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}Mv_i'^2
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que inicialmente las n masas M están en reposo y V' y v_i' son las velocidades de la masa $2M$ y de cada una de las n masas M después del choque, respectivamente.

(a) Particularizamos[2] para el caso en el que sale expulsada una sola bola de la derecha, es decir[3],

$$v_i' = \begin{cases} v' & i = 1 \\ 0 & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Si suponemos además que $V' = 0$, tenemos[4]:

$$\text{conservación de } p\text{: } 2MV = Mv' \tag{1}$$

$$\text{conservación de } E_c\text{: } MV^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \tag{2}$$

De (1) obtenemos $v' = 2V$, pero de (2) obtenemos $v' = \sqrt{2}V$, lo cual es una contradicción que nos lleva a concluir que esta situación es imposible.

[1] Ahorramos notación suponiendo que todo el movimiento ocurre en una única dimensión, por lo que trabajamos con los módulos de los momentos lineales (velocidades positivas hacia la derecha, negativas hacia la izquierda).

[2] Resolver este problema de forma general es muy complicado porque en principio tenemos solo 2 ecuaciones y $n+1$ incógnitas (las velocidades V' y v_i' de la masa $2M$ y de cada una de las n masas M después del choque).

[3] Por comodidad, suponemos que $i = 1$ corresponde a la bola de más a la derecha e $i = n$ a la primera bola contra la que impacta la masa $2M$.

[4] Este apartado se podría resolver sin hacer ninguna suposición sobre la velocidad de la masa $2M$ después del choque, siendo en este caso las ecuaciones relevantes:

$$\text{conservación de } p\text{: } 2MV = 2MV' + Mv'$$

$$\text{conservación de } E_c\text{: } MV^2 = MV'^2 + \frac{1}{2}Mv'^2,$$

cuyas 2 posibles soluciones son:

$$\begin{cases} V' = V; & v_1' = 0 \\ V' = \dfrac{V}{3}; & v_1' = \dfrac{4}{3}V \end{cases}$$

Ambas soluciones implican que la masa $2M$ se mueve hacia la derecha tras el choque, lo que es incompatible con que una sola bola salga de la derecha.

(b) Particularizamos para el caso en el que salen dos bolas de la derecha con velocidades distintas:

$$v'_i = \begin{cases} v'_1 & i = 1 \\ v'_2 & i = 2 \\ 0 & i = 3, \dots, n \end{cases}$$

Suponiendo de nuevo[5] que $V' = 0$:

$$\text{conservación de } p\text{: } 2MV = Mv'_1 + Mv'_2 \tag{3}$$

$$\text{conservación de } E_c\text{: } MV^2 = \frac{1}{2}Mv'^2_1 + \frac{1}{2}Mv'^2_2 \tag{4}$$

Resolviendo el sistema[6] llegamos a la única solución posible:

$$\boxed{v'_1 = v'_2 = V,}$$

con lo que de nuevo es IMPOSIBLE que las dos BOLAS salgan con VELOCIDADES DISTINTAS.

[5] En este caso, si dejamos V' como una variable más, las ecuaciones relevantes serían:

$$p : 2MV = 2MV' + Mv'_1 + Mv'_2$$

$$E_c : MV^2 = MV'^2 + \frac{1}{2}Mv'^2_1 + \frac{1}{2}Mv'^2_2,$$

encontrándonos con que no tenemos suficiente información para resolver el problema (2 ecuaciones, 3 incógnitas).

[6] Despejando por ejemplo $v'_2 = 2V - v'_1$ de (3) y sustituyendo en (4), llegamos a la ecuación de segundo grado para v'_1:

$$v'^2_1 - 2Vv'_1 + V^2 = 0$$