Examen de Physique Théoriques - Théories effectives

Alban Degezelle, `M1 Physique`

Thème : On se propose dans cette énnoncé d'étudié l'interaction de la lumière avec un atome dans un cas classique à deux niveaux avec udans un premier temps une approche semi-classique et dans un second temps un approche quantique. Pour ce faire on se place dans le cas d'une cavité optique considérer comme l'espace libre, permettant la création d'un champ électromagnétique monomode (typiquement un laser).

Les deux parties peuvent être traitées séparements, l'objectif étant de retrouver le même résultat avec ses deux formalismes.

1. Approche semi-classique : Calcul du potentiel dipolaire (10pts)

(a) Dans cette partie nous allons nous attacher à décrire la dynamique du centre de masse de l'atome soumis au rayonnement, de manière classique (force exercée). Les degrés de liberté internes eux seront traité quantiquement (niveaux d'énergie discrets).
On considère un atome à deux niveaux d'energie $|e\rangle$ et $|g\rangle$ soumis à une lumière monochromatique polarisé linéairement selon z.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \epsilon(r)\cos(\omega t)\vec{e_z} \tag{1}$$

La force exercée sur l'atome s'écrit :

$$\vec{f} = \vec{D}(r,t).\vec{\nabla}E(\vec{r},t) \tag{2}$$

Montrer que si $\vec{D}(r,t) = \alpha(\omega)\vec{E}(\vec{r},t)$ le potentiel dipoalire moyen au crous du temps s'écrit comme :

$$\overline{V_{dip}} = -\frac{1}{4}\alpha(\omega)\epsilon^2(\vec{r}) \tag{3}$$

(b) L'objectif est donc de calculer $\alpha(\omega)$. Pour cela on utilise le formalisme quantique de l'opérateur densité pour calculer le moment dipolaire moyen $\vec{D}(r,t)$. Il s'écrit comme :

$$\hat{D} = d_0(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \tag{4}$$

L'hamiltonien de système atome + champ est le suivant :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| - \hat{D}.\epsilon(r,t) \tag{5}$$

A l'aide de l'équation d'évolution de l'opérateur densité (6) et de la solution de l'équations de Bloch optique (7), détzrminer l'équations différentielle régissant la dynamique de l'élements de matrice ρ_{eg}.

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H},\hat{\rho}] + i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} \tag{6}$$

$$i\hbar\frac{\partial\rho_{eg}}{\partial t} = -i\frac{\hbar\Gamma}{2}\rho_{eg} \tag{7}$$

(c) Cette équation possède une solution analytique à l'ordre 1 en $\epsilon(r,t)$. Poser $\rho_{ee} = 0$ et $\rho_{gg} = 1$ puis resolvez l'equation sur ρ_{eg}.

(d) Dans le cas d'un laser très désacordé on peut négliger le terme en $i\Gamma$ dans la solution de l'équation sur ρ_{eg}. En écrivant D comme :

$$\hat{D}(r,t) = d_0(Tr\{|e\rangle\langle g|,\hat{\rho}\} + Tr\{|g\rangle\langle e|,\hat{\rho}\}) \tag{8}$$

Montrer que la polarisabilité $\alpha(\omega)$ s'écrit comme : $\alpha(\omega) = \dfrac{-d_0^2}{\hbar\bar{\Delta}}$

2. La jauge symétrique. (7pts)

(a) Pour traiter le problème nous allons prendre la jauge symétrique suivante.

$$A_x(\mathbf{r}) = -By/2 \quad ; \quad A_y(\mathbf{r}) = Bx/2 \quad ; \quad A_z(\mathbf{r}) = 0$$

Cette jauge brise l'invariance par translation mais préserve l'invariance par rotation. Montrer en appliquant le choix de jauge à notre problème à deux dimensions que l'on peut exprimer $\hat{H}$ comme :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{8}m\omega_c^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z$$

Ou encore : $\hat{H} = \hat{H}_0 - \dfrac{\omega_c}{2}\hat{L}_z$

(b) Justifier l'interet de ce choix de jauge en vous basant sur la forme de $\hat{H}$.

(c) La fonction d'onde de l'état fondamental $|0,0\rangle$ de $\hat{H_0}$ est $e^{-|r|^2/4l^2}$ où $|r|^2 = x^2 + y^2$ et l une longueur magnétique caractéristique. Rappelez la forme des fonctions propres et valeurs propres de $\hat{L}_z$
La fonction $e^{-|r|^2/4l^2}$ est elle fonction propre de $\hat{L}_z$?

(d) Les états propres de $\hat{H_0}$ du premier niveau excité sont les $|1,0\rangle$ et $|0,1\rangle$, leur fonction d'onde sont : $xe^{-|r|^2/4l^2}$ et $ye^{-|r|^2/4l^2}$. Ces états ne sont pas états propres de $\hat{L_z}$. En ecrivant $r = x + iy$ construisez, à l'aide des deux fonctions précédentes, une fonction propre $\phi(r)$ de L_z. Que vaut $\hat{L_z}\phi(r)$?

(e) De manière général on peut construire un état propre commun de $\hat{H}_0$ et $\hat{L}_z$. Le spectre $E_{n_0,m}$ s'exprime alors comme :

$$E_{n_0,m} = (\frac{n_0 - m}{2} + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$$

Avec $m = -n_0, -n_0 + 2, ..., n_0 - 2, n_0$. $n_0 \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$.
A quoi correspond le niveau de Landau fondamental (LLL) ? Commenter sa dégénérésence. Qu'elle est la dégénérésence des niveaux de Landau supérieurs ?

3. La jauge de Landau. (10pts)

On va dans cette partie etudier le problème avec une jauge différente.

(f) **Etats du "bulk"**

i) La jauge de Landau est définie comme : $\mathbf{A} = Bx\mathbf{u}_y$, quelles sont les invaraınces brisées et/ou conservées par cette jauge ?

ii) Appliquer ce choix de jauge au problème 2D et déduire l'hamiltonien du sytème en fonction des opérateurs impulsions. La non dépendence en y de $\hat{H}$ nous permet de chercher des soltions propagatives de l'équation aux valeurs propres $\psi_k = \phi(x)e^{iky}$ où $\phi(x)$ est une fonction quelconque.
Faire apparaitre un oscillateur harmonique décentré selon x dans l'équation $\hat{H}\psi_k = E\psi_k$ où l'on explicitera le décalage x_k.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi(x)'' + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - x_k)^2\phi(x) = E\phi(x)$$

iii) On note $x_k = kl^2$ où l est la longueur magnétique. Les fonctions propres normalisées du LLL (Lowest Landau Level) sont les

$$\psi_k(\mathbf{r}) \sim e^{(x-x_k)^2/2l^2}e^{iky}$$

Calculez la quantité de mouvement moyenne (en utilisant l'expression de l'opérateur quantité de mouvement de la partie 1) du LLL selon y, et l'écrire égale à $m\langle\hat{v_y}\rangle$. Que remarque-t-on pour la vitesse moyenne des particules selon y ?

iv) L'échantillon est de taille finie selon x et on a des conditons de bord périodiques selon y, on a donc en x : $0 \leq x_k \leq L_x$. La dégénérésence du LLL s'exprime comme le rapport k_{max}/k, montrer qu'elle est proportionelle au champ magnétique B. Est-ce en accord avec nos observations à la question 2.(e) ?

(g) **Etats de bord**

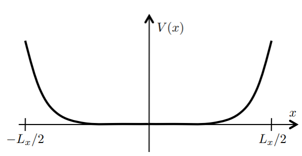

FIGURE 1 – Potentiel de bord $V(x)$

i) On décrit cette fois le direction x comme sur la figure 1 ci dessus : Un potentiel de bord confine les particules selon la direction x, l'hamiltonien est donc le même qu'à la question 3.f.ii) avec, en plus, l'ajout du potentiel $V(x)$. La fonction d'onde $\psi_k(x)$ obéit alors à l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi(x)'' + (\frac{m\omega_c^2}{2}(x - x_k)^2 + V(x))\phi(x) = E\phi(x)(x)$$

On linéarise le potentiel $V(x)$ en série de Tyalor au voisinage de x_k.

$$V(x) \approx V(x_k) + (x - x_k)V'(x_k)$$

Montrer que l'on peut réexprimer l'équation sur $\phi(x)$ comme la même équation avec un décalage des centres des oscillateurs harmoniques de δ_k du à la présence de potentiel sur les bords.

ii) Que remarque-t-on sur la quantité de mouvement moyenne selon y pour des particules situées dans des régions où $V'(x) \neq 0$ (En vous aidant de la figure 2). A quelle vitesse "classique" (mouvement cyclotron classique) v_y peut-être assimilée ?

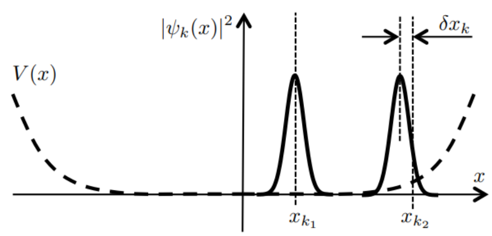

FIGURE 2 – Desnité de probabilité des fonctions propres du LLL dans le potentiel de bord $V(x)$