Examen Interaction Rayonnement Matière

Alban Degezelle, M2 MCN

Thème : On se propose dans un premier temps d'étudier l'interaction atome-matière par le biais de l'interaction dipoalire.

Pour ce faire vous traiterez donc **UNE** des deux approches proposées partie 1. Cette partie permet d'exprimer le potentiel dipoalire, elle competra pour 10pts.
La partie 2 met en application l'utilisation du potentiel dipolaire dans le cadre d'un réseau optique, elle comptera pour 10 pts.
Les deux parties peuvent néanmoins être taitées séparement.

Partie 1

A. Approche semi-classique par la force dipolaire : Calcul du potentiel dipolaire (10pts)

(a) Dans cette partie nous allons nous attacher à décrire la dynamique du centre de masse de l'atome soumis au rayonnement, de manière classique (force exercée). Les degrés de liberté internes eux seront traité quantiquement (niveaux d'énergie discrets).
On considère un atome à deux niveaux d'energie $|e\rangle$ et $|g\rangle$ soumis à une lumière monochromatique polarisé linéairement selon z.

$$\vec{E}(r,t) = \epsilon(r)\cos(\omega t)\vec{e_z} \tag{1}$$

La force exercée sur l'atome s'écrit :

$$\vec{f} = \vec{D}(r,t).\vec{\nabla}E(r,t) \tag{2}$$

Montrer que si $\vec{D}(r,t) = \alpha(\omega)\vec{E}(\vec{r},t)$ le potentiel dipoalire moyen au crous du temps s'écrit comme :

$$\overline{V_{dip}} = -\frac{1}{4}\alpha(\omega)\epsilon^2(\vec{r}) \tag{3}$$

(b) L'objectif est donc de calculer $\alpha(\omega)$. Pour cela on utilise le formalisme quantique de l'opérateur densité pour calculer le moment dipolaire moyen $\vec{D}(r,t)$. Il s'écrit comme :

$$\hat{D} = d_0(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \tag{4}$$

L'hamiltonien de système atome + champ est le suivant :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| - \hat{D}.\vec{E}(r,t) \tag{5}$$

A l'aide de l'équation d'évolution de l'opérateur densité (6) et de la solution de l'équations de Bloch optique (7), déterminer l'équation différentielle régissant la dynamique de l'élement de matrice ρ_{eg}.

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} \tag{6}$$

$$i\hbar\frac{\partial\rho_{eg}}{\partial t} = -i\frac{\hbar\Gamma}{2}\rho_{eg} \tag{7}$$

(c) Cette équation possède une solution analytique à l'ordre 1 en $\vec{E}(r,t)$. Poser $\rho_{ee} = 0$ et $\rho_{gg} = 1$ puis resolver l'equation sur ρ_{eg}. (Imposer $\rho_{eg}^{(0)} = 0$)

(d) Dans le cas d'un laser très désacordé on peut négliger le terme en $i\Gamma$ dans la solution de l'équation sur ρ_{eg}. En écrivant $D(r,t)$ comme :

$$D(r,t) = d_0(Tr\{|e\rangle\langle g|, \hat{\rho}\} + Tr\{|g\rangle\langle e|, \hat{\rho}\}) \tag{8}$$

Montrer que le potentiel dipoalire s'écrit alors comme (9), où Δ est une fonction du désacord en fréquence et $\hbar\Omega(r) = d_0\epsilon(r)$.

$$V_{dip} = \frac{\hbar\Omega^2(r)}{4\Delta} \tag{9}$$

B. Approche quantique de "l'atome habillé" : Calcul du potentiel dipolaire (10pts)

Sans interaction

(e) On se place dans une cavité sans pertes, dans le cas ou l'on éclaire avec un laser monomode de fréquence ω_L un atome à deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ d'énergie 0 et $\hbar\omega_0$. En utilisant le formalisme de quantification du champ électromagnétique, donner l'hamiltonien du sytême atome + champ sans interaction.

(f) Les états propres de cet hamiltonien sont les états $|atome\rangle \otimes |N_{champ}\rangle$. Avec N le nombre de photon laser. On envoi un photon sur l'atome qui le fait passer de l'état $|g, N\rangle$ à l'état $|e, N+1\rangle$. Ecrire la différence d'energie ΔE entre ces deux niveaux, on notera $\Delta = \omega_L - \omega_0$, le désacord en fréquence.

(g) On appel $M(N)$, la multiplicté qui contient les niveaux $\{|g, N\rangle, |e, N+1\rangle\ \}$. Faire un schéma en énergie représentant les multiplictés $M(N+1), M(N)$et $M(N-1)$ dans le cas ou $\Delta > 0$ et dans le cas $\Delta < 0$, vous ferez apparaitre les espacements en énergie entre les différentes multiplicités.

Avec interaction

(h) On considère seulement la multiplicté $M(N)$ et ses deux niveaux respectifs. Dans cette dernière l'opérateur d'interaction dipolaire prend la forme suivante. Ou $\Omega(r)$ est la pulsation de Rabbi.

$$\hat{V_{dip}^{int}} = \frac{\hbar\Omega(r)}{2}[|e\rangle\langle g| \otimes \hat{a} + |g\rangle\langle e| \otimes \hat{a}^+] \tag{10}$$

Montrer que l'hamiltonien total du systeme atome + champ **en interraction** peut s'écrire sous la forme suivante dans la multiplicité M(N), ou vous expliciterez C.

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \Delta & \Omega(r)\sqrt{N+1} \\ \Omega(r)\sqrt{N+1} & -\Delta \end{pmatrix} + C \tag{11}$$

(i) Les états "habillés" $|e, \tilde{N+1}\rangle$ et $|g, N\rangle$ sont les nouveaux états propres de cet hamiltonien d'énergie E_+ et E_-. Dans la limite perturbative à l'ordre 1 en $\Omega(r)$, l'énergie potentiel dipolaire correspond directement au déplacement en énergie (déplacement dit "lumineux") des niveaux "nus" à cause de l'interaction avec le laser. Montrer que dans cette limite, ce déplacement en énergie s'écrit :

$$V_{dip} = \pm \frac{\hbar\Omega^2(r)}{4\Delta} \tag{12}$$

(j) Représenter graphiquement l'évolution des énergies des états "habillés" en fonction de la fréquence du laser $\hbar\omega_L$, faire apparaitre la pulsation propre de l'atome ω_0. Quel est l'impact du signe du désacord sur le déplacement lumineux des états "nus" ? Est ce bien en accord avec le schéma en énergie de la question question (g) ?

Partie 2

Mise en application : Diffusion par un réseau optique (10 pts)

L'étude de l'interraction rayonnement matière et de l'optique quantique à permis au fil des années de developper des dispositifs de réseau/pièges optiques permettant de controler la dynamique des atomes et de les "ralentir" voir de les immobiliser à des températures allant jusqu'au nano kelvin. On appel ces atomes, des **atomes froids**.
Nous allons dans cet exercice entrevoir le principe d'un réseau optique simple et le comportement d'un atome en interaction avec ce dernier.

(k) On se place dans un repère à trois dimensions comme sur la figure (). Le dispositif expérimental est le suivant : On à deux lasers (assimillés à une onde plane progressive) de fréquence et d'amplitude identiques, disposés de part et d'autre de l'axe z. La combinaison de ces ondes planes donne lieu à un dispositif d'onde stationnaire le long de l'axe z. Le champ résultant s'écrit comme (13). On s'intéresse au comportement d'un atome situé au centre du dispositif.

$$E(z,t) = 2\epsilon sin(kz)cos(\omega t - \phi) \tag{13}$$

Ou ϵ est l'amplitude et ϕ une phase quelconque.
Montrer que l'expression du potentiel dipolaire de notre dispositif s'écrit comme (14), en utilisant l'expression du potentiel dipolaire trouver dans la partie 1 et le fait que $\hbar\Omega(z) = d_0\epsilon(z)$.

$$V(z) = V_0 sin^2(kz) \tag{14}$$

(l) Quel avanatage, la dépendance explicite de V en fonction de Δ apporte-elle ?
Resoudre l'équation de Schrodinger pour un potentiel V comme celui ci présente des difficultés (équivalent à trouver les solutions d'une équation de Mathieu). On va donc étudier la diffusion d'un atome par ce potentiel.
On rappel l'expression de l'amplitude de diffusion dans le cadre de l'approximation de Born :

$$A_{diff} = -\frac{m}{2\pi\hbar} TF_{3D}[V(\vec{q})] \tag{15}$$

(m) Determiner l'amplitude de diffusion si le potentiel V est défini de 0 à R. Quel est le problème pour $R \to \infty$?

(n) On se propose de localiser ce potentiel par une fonction gaussienne arbitraire (16). Tracer l'allure de V'.

$$V'(z) = V_0 sin^2(kz) e^{-\dfrac{z^2}{L^2}} \tag{16}$$

(o) Qu'obtiendrait-on si l'on calulait A_{diff} avec V'(z) et que l'on prennait la limite $L \to \infty$?

(p) Ce potentiel pourrait-il selon vous palier au problème de la question (m) ?