Persamaan Lingkaran

Lingkaran dengan jari-jari r=1, berpusat di (a,b)=(1,2 , 0,5)

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut pusat lingkaran, sedangkan jarak titik terhadap pusat lingkaran disebut jari-jari lingkaran.

Gambar dibawah ini menunjukkan lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r.

A. Persamaan Lingkaran

1. Persamaan lingkaran yang berpusat O (0, 0) dan jari-jari r

Pada lingkaran disamping jari-jari atau r = OP, OQ = x dan PQ = y.

Jarak dari O (0, 0) ke P (x, y) adalah.

Lingkaran 2

Berdasarkan rumus Pythagoras

Pitagoras

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat O (0, 0) dan jari-jari r adalah x2 + y2 = r2

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat O (0, 0) dan jari-jari 5

Jawab :

4

2. Persamaan lingkaran yang berpusat P (a, b) dan berjari-jari r

5

Persamaan lingkaran yang berpusat P(a, b) dan berjari-jari r dapat diperoleh dari persamaan lingkaran yang berpusat di (0, 0) dan berjari-jari r dengan menggunakan teori pergeseran. Jika pusat (0, 0) bergeser (a, b) maka titik (x, y) bergeser ke (x + a, y + b).

Kita peroleh persamaan.

7

Persamaan lingkaran menjadi (x’– a)2 + (y’ – b)2 = r2

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat P(a, b) dan berjari-jari r adalah (x- a)2 + (y – b)2 = r2

Contoh 1 :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (3, 2) dan berjari-jari 4

Jawab :

Pusat (3, 2) maka a = 3 dan b = 2

Persamaan lingkaran (x- a)2 + (y – b)2 = r2

(x- 3)2 + (y – 2)2 = 42

(x- 3)2 + (y – 2)2 = 16

Contoh 2 :

Tentukan persamaan lingkaran berpusat di titik P(2, 3) yang melalui Q(5, -1)

Jawab :

15

Pusat (2, 3) maka a = 2 dan b = 3

Persamaan lingkaran (x- a)2 + (y – b)2 = r2

(x- 2)2 + (y – 3)2 = 252

B. Bentuk umum persamaan lingkaran

Persamaan lingkaran yang berpusat P(a, b) dan berjari-jari r adalah

(x- a)2 + (y – b)2 = r2

X2 – 2ax + a2 + y2 – 2by + b2 = r2

X2+ y2 – 2ax – 2by + a2+ b2– r2 = 0 atau x2+ y2 + Ax + By + a2+ b2+ C= 0

18

Jadi bentuk umum persamaan lingkaran x2+ y2 + Ax + By + a2+ b2+ C= 0

19

Contoh :

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran x2+ y2 – 4x +2y – 20= 0

Jawab :

A = -4, B = 2, dan C = -20

20

B. Kedudukan Titik dan Garis Pada Lingkaran

Kedudukan Titik Pada Lingkaran

Letak K (m,n) terhadap X2+Y2 +Ax + By +C= 0 , ditentukan oleh nilai kuasa titik tersebut terhadap lingkaran

Nilai kuasa K = m2+n2 +Am + Bn +C,

K < 0 di dalam lingkaran

K= 0 pada lingkaran

K > 0 di luar lingkaran

Contoh 1:

Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran X2+y2 -8x -10y +16 =0 dan gambarlah

1. H(-3,9) b L(7,9), c M(10,5), d N(1,7)

Jawaban:

H(-3,9) K = (-3)2+92 -8.(-3) -10.9 +16 = 40, K > 0, diluar lingkaran

L(7,9) K = (7)2+92 -8.(7) -10.9 +16 = 0, K = 0, pada lingkaran

M(10,5) K = (10)2+52 -8.(10) -10.5 +16 = 11, K > 0, diluar lingkaran

N(1,7) K = 12+72 -8.(1) -10.7 +16 = -12, K < 0, didalam lingkaran

Contoh 2:

Diketahui sebuah lingkaran X2+y2 -2x +6y -15 =0 dan sebuah titik S(m,1), tentukan batas nilai m agar

Titik S didalam lingkaran

Titik S diluar lingkaran

Jawaban:

S(m,1) K = kuasa

= m2 +12 – 2m +6.1 – 15

= m2 – 2m – 8

1. Syarat di dalam lingkaran, K< 0 m2 -2m -8 <0 (m-4)(m+2)=0

M=-2 atau m=4

Didalam lingkaran jika -2 < m <4 ( daerah - - - )

Diluar lingkran, K >0, jika m<-2 atau m >4 (daerah ++ )

Kedudukan Garis Pada Lingkaran

Untuk mengetahui kedudukan/ posisi sebuah garis terhadap lingkaran, substitusikan garis terhadap lingkaran sehingga didapatkan bentuk ax2+bx+c=0.

Lihat diskriminannya: D=b^2-4 ac

Jika

D<0, berarti garis berada di luar lingkaran (tidak memotong lingkaran)

D=0, berarti garis menyinggung lingkaran

D>0, berarti garis memotong lingkaran di 2 titik berbeda.

Contoh 1:

Tentukan posisi garis:

Y= x+10 terhadap lingkaran x^2+y^2= 9

Jawab:

X^2 + (x+10)^2=9

X^2+ (x^2+20x+100)-9=0

2x^2 +20x+91=0

D=b^2-4 ac

D=20^2- 4\times 91 \times 2

D= 400-728= -328

Karena D<0, maka garis berada di luar lingkaran.

Contoh 2:

Tentukan p agar garis y= -x+p terletak di luar lingkaran x^2+y^2-2x-4y+3=0!

Jawab:

X^2+ (-x+p)^2 – 2x- 4(-x+p)+ 3=0

2x^2 – 2px + p^2 – 2x + 4x -4p + 3=0

2x^2 + (2-2p)x + p^2 -4p + 3=0

Syarat: D<0

(2-2p)^2-4(2)(p^2-4p+3)<0

4p^2-8p+4-8p^2+32p-24<0

-4p^2+24p-20<0

-4(p^2-6p+5)<0

-4(p-5)(p-1)<0

P=5 atau p=1

Gambar dengan garis bilangan untuk pertidaksamaan diatas, maka akan didapatkan nilai p: p<1 atau p>5

C. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Jika persamaan lingkaran x^2+y^2=r^2, maka persamaan garis singgungnya:Persamaan garis singgung untuk suatu titik (x1,y1) yang terletak pada lingkaran

X\_1x + y\_1y = r^2

Jika persamaan lingkaran (x-x\_p)^2+ (y-y\_p)^2=r^2, maka persamaan garis singgungnya:

(x\_1-x\_p)(x-x\_p) + (y\_1-y\_p)(y-y\_p) = r^2

Jika persamaan lingkaran berbentuk x^2 + y^2 + Ax + By + C =0, maka persamaan garis singgungnya:

X\_1x + y\_1y + \frac {1}{2} A(x+x\_1) + \frac {1}{2} B(y+y\_1)+C=0

Persamaan lingkaran x^2 + y^2 + Ax + By + C =0 dapat juga diubah menjadi (x-x\_p)^2+ (y-y\_p)^2=r^2 dengan kuadrat sempurna, sehingga rumus yang harus dihafalkan jadi lebih sedikit.

Rumus:

Y = mx \pm r \sqrt {m^2+1} atau y-y\_p = m (x-x\_p) \pm r \sqrt {m^2+1}