Flujo Máximo

Colectivo Estructuras de Datos y Algoritmos

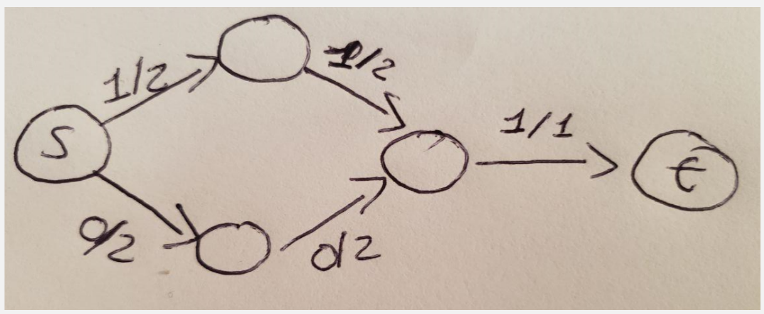
Noviembre 2020

1. Responda V o F. Justifique en cada caso.

   (a) Sea $G = \langle V, E, c \rangle$ una red de flujo con fuente y receptor s, t respectivamente. Si f es un flujo máximo en G, entonces satura a cada arista que sale de s (esto significa que cada arista que sale de s tendrá $f(e) = c(e)$).

   Respuesta

   (F). Contrajemplo. En la imagen se muestra una red de flujo $G = \langle V, E, c \rangle$ con fuente y receptor s, t donde se muestra un flujo f máximo pero no se saturan todas las aristas que salen de s.

   Demostremos que f es máximo. Sabemos de conferencia que en toda red de flujo $G = \langle V, E, c \rangle$ con receptor $t \in V$ para todo flujo f se cumple que:

   $$|f| = \sum_{v \in V} f(v,t) \leq \sum_{v \in V} c(v,t) \tag{1}$$

   Por lo tanto para la red de flujo $G = \langle V, E, c \rangle$ con receptor $t \in V$ se cumple que para todo flujo f :

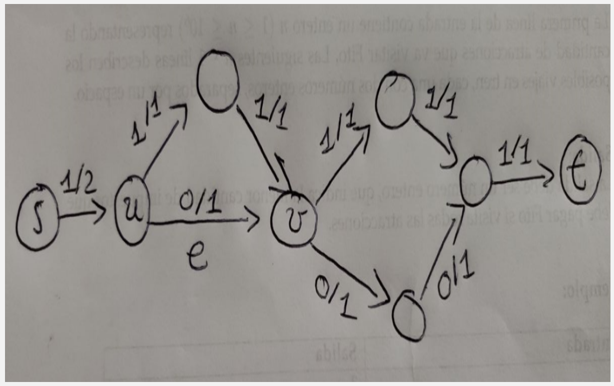
   $$|f| \leq \sum_{v \in V} c(v,t) = 1 \tag{2}$$

   Luego el flujo f que se muestra en el contraejemplo tiene exactamente el valor de una cota superior para todos los flujos posibles en G, por lo tanto es máximo.
   Particularmente en la red de flujo $G = \langle V, E, c \rangle$ no es díficil demostrar que el flujo f es máximo dado que solo una arista llega al vértice t y su capacidad es 1. Pero es importante recordar que si usan un contraejemplo donde afirman que el flujo que presentan es máximo tienen que demostrarlo. Por eso es bueno elegir este tipo de contraejemplos.

   (b) Sea $G = \langle V, E, c \rangle$ una red de flujo con fuente y receptor s, t respectivamente. Sea f^* un flujo máximo en dicha red. Si se añade una nueva arista e entre dos vértices $< u, v >$ tal que $c(e) = 1$ y el vértice u aún tiene aristas que entran a él pertenecientes a E que no están saturadas y el vértice v aún tiene aristas que salen de él que no están saturadas pertenecientes a E. Entonces se puede obtener un flujo máximo f^* de valor $|f^*| + 1$.

Respuesta

(F). Contraejemplo. En la imagen se muestra una red de flujo $G = \langle V, E, c\rangle$ con fuente y receptor s, t donde se muestra el flujo máximo f^* previo, pero aunque exista al menos una arista que entra a u que no se encuentre saturada y una arista que salga de v que no se encuentre saturada, eso no significa que exista un camino aumentativo que incluya a e que pueda aumentar el flujo.



Similar al contraejemplo del ejercicio 1-) (a) sucede que en la red ilustrada para todo flujo y en particular el máximo:

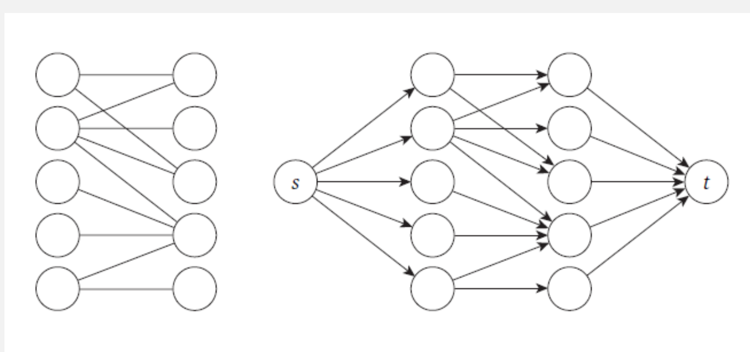
$$|f| \leq \sum_{v \in V} c(v, t) = 1 \tag{3}$$

Por lo que si el valor de f^* inicialmente era 1 ya no es posible aumentarlo más incluso añadiendo una nueva arista e pues la cota superior de todo flujo en la red no cambia y sigue siendo 1.

2. Suponga que se permite que una red de flujo tenga varios vértices fuente y varios vértices receptores. ¿Cómo es posible utilizar los algoritmos vistos en clase para resolver el problema de flujo máximo sobre una red con estas condiciones?

Respuesta

Se puede presentar la situación en que en la modelación de un problema por una red de flujo $G = \langle V, E\rangle$ existan múltiples fuentes o múltiples receptores. Esto es un problema pues los algoritmos presentados no funcionan con múltiples fuentes o receptores. La solución a este tipo de problemas es crear un vértice super fuente que este enlazado a cada uno de los vértices fuentes con aristas de capacidad la que necesite el problema. Análogamente se crea un vértice super receptor que se une a cada uno de los vértices receptores por aristas generalmente de capacidad la que necesite el problema.



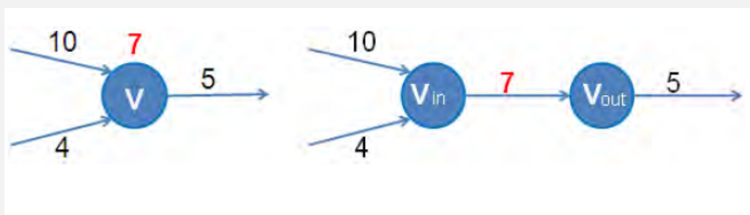
Es importante destacar de que en esta nueva red en efecto se pueden ejecutar los algoritmos de flujo máximo vistos en conferencias para hallar el flujo máximo en esta nueva red G' con fuente y receptor s^* y t^* respectivamente. Pero depende de la modelación que se haga el que el valor del flujo máximo en G' les resuelva el problema que inicialmente tenían en G. Precisamente por eso la elección de cómo queda

G' depende del problema que intentan resolver. Puede que no sea suficiente con tener una superfuente y un superreceptor aún hay que considerar las capacidades de las nuevas aristas que se añaden, las que ya existían, los nodos, etc. Incluso en el peor caso el flujo máximo podría no ser la solución a vuestro problema o al menos no con la nueva red G' usando superfuente y superreceptor.

3. Suponga que se permite que una red de flujo tenga capacidad en las aristas y en los vértices. ¿Cómo es posible utilizar los algoritmos vistos en clase para resolver el problema de flujo máximo sobre una red con estas condiciones?

Respuesta

Otra situación que se puede presentar en la modelación de un problema por una red de flujo es que los vértices puedan recibir hasta una cantidad determinada de flujo, o sea, que los vértices también tengan capacidad como las aristas. Nuevamente este es un problema que no resuelven los algoritmos vistos en conferencia. La solución para este problema es adaptar esta red de flujo a una en la que si sea posible aplicar dichos algoritmos. Una forma de hacerlo es la siguiente: Cada vértice $v \in V$ en la red de flujo $G = \langle V, E, , c\rangle$ se sustituye por dos nuevos vértices v_{in} y v_{out}, a v_{in} le entran todas las aristas que le entraban a v y tiene una sola arista que sale que es la arista $< v_{in}, v_{out} >$ con la capacidad de v, y a v_{out} se le ponen saliendo de el todas las aristas que salen de v. De esta forma v_{in} y v_{out} modelan el estado de v en la red anterior y con la arista que los une modelan la capacidad que tenía v.



Particularmente utilizaremos una notación cuando se haga este tipo de transformación y la definiremos en una función que denotaremos por $VertCap$ que al recibir una red de flujo con vertices V', aristas E', una función de capacidad c en aristas y una función de capacidad c_v en vértices devolverá una red de flujo con vértices V'', aristas E'' y función de capacidad c' en aristas:

$$G'' = \langle V'', E'', c'\rangle = VertCap(V', E', c, c_v) \tag{4}$$

Para esto también definiremos la función inversa que al aplicarla a un grafo en el que se realizó dicha trasnformación retornará el grafo original, en este caso la red de flujo original:

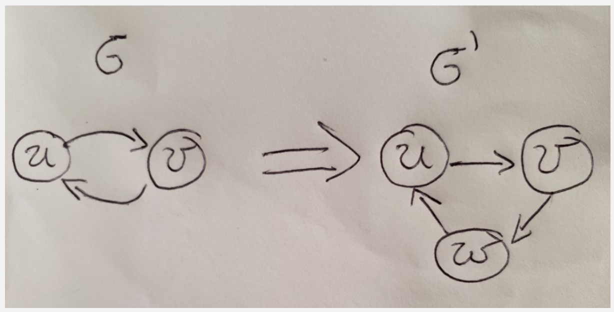
$$G' = \langle V', E', c\rangle = VertCap^{-1}(V'', E'', c', c_v) \tag{5}$$

4. Suponga que se permite que una red de flujo tenga aristas anti-paralelas. ¿Cómo es posible utilizar los algoritmos vistos en clase para resolver el problema de flujo máximo sobre una red con estas condiciones?. **Nota**: Si en un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$ existe par de vértices $u, v \in V$ tal que existen las aristas $< u, v >$ y $< v, u >$, dichas aristas se les llama antiparalelas.

Respuesta

Primero que nada hay que entender cuál sería el problema de tener en la red de flujo aristas antiparalelas. Como se describe en conferencia para cada arista $< u, v >$ en la red de flujo G existe una arista inversa $< v, u >$ en la red residual G' que representa la posibilidad de regresar el flujo que ya se había pasado por la arista $< u, v >$. De la forma que se ve conferencia G' no es más que el mismo grafo G con además las aristas inversas. Entonces el problema está que si en G existe una arista $< u, v >$ y una arista $< v, u >$ entonces es necesario encontrar como representar las aristas inversas en G'. Para esto proponemos dos soluciones.

La primera solución puede ser trasnformar G en un grafo G' tal que todos los flujos f que existían en G, sigan asignando los mismos valores de flujo a las aristas originales de G, en G'. Una forma intuitiva de verlo con respecto a lo que sabemos que hacen los algoritmos que es precisamente hallar caminos aumentativos desde s hacia t y la idea sería que cualquiera que sea la transformación hecha no afecte la cantidad de caminos simples desde s hacia t y la cantidad de flujo que era posible pasar por esos caminos. Dicho esto la solución es para todo par de vértices u y v tales que existe en G las aristas $< u, v >$ y $< v, u >$ añadiremos un nuevo vértice w y quitaremos la arista $< v, u >$ y en su lugar añadiremos las aristas $< v, w >$ y $< w, u >$ las cuales tendrán la misma capacidad que la original arista $< v, u >$. La siguiente imagen ilustra dicha idea:



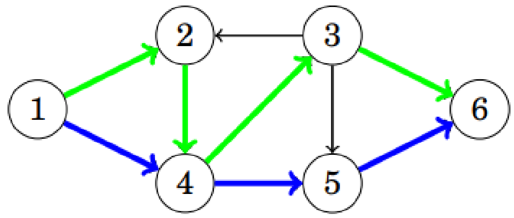
Se deja como estudio independiente demostrar por qué esta trasnformación no afecta los valores de los flujos f originales en G, incluido el flujo máximo.

La segunda solución es mantener precisamente la idea original de para cada arista real en la red de flujo G, tener una arista inversa en la red residual G'. En los casos que tengamos un par de vértices u y v en G tales que existen en G las aristas $< u, v >$ y $< v, u >$, entonces simplemente tendríamos una arista inversa para cada uno en G' por lo que en G' tendríamos dos aristas $< u, v >$, una representando a la original y otra representando a la inversa de $< v, u >$ y de la misma forma dos aristas $< v, u >$ siguiendo la misma idea. Esta solución como se puede apreciar la única complejidad que trae a nivel de implementación es la necesidad de saber en la red residual G' cual arista es la inversa y cuál es la real.

Como se puede ver ambas soluciones tienen sus ventajas y desventajas. La ventaja de la solución 1 con respecto a la 2 sería que al añadir el nuevo vértice en G y entonces correr el algoritmo en la red residual del G trasnformado, no se altera el algoritmo de flujo máximo sino solamente el grafo, a diferencia de la solución 2 donde es necesario durante el algoritmo tener uan forma de identificar para cada arista $< u, v >$ en G cuál de las dos aristas $< u, v >$ en G' representa la arista real y cuál la inversa de la arista $< v, u >$. La ventaja de 2 sobre 1 es que ese cambio de implementación no es díficil y a diferencia de 1 donde se añade un vértice y dos aristas, en 2 solo se añade dos aristas lo cual mejora relativamente la complejidad temporal. La otra gran ventaja de 2 sobre 1 es precisamente que no altera G, por lo cual si el problema además de exigir el valor del flujo máximo, pide extraer cierta información a partir del problema que quisimos modelar con flujo máximo, digáse por ejemplo los caminos aumentativos, entonces tendremos un conjunto de vértices ficticios que originalmente no pertenecían al grafo, lo cual hace la tarea más compleja.

5. Diseñe un algoritmo que dado un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$ y los vértices $s, t \in V$, permita determinar el número máximo de caminos disjuntos con respecto a aristas que inician en el vértice s y terminan en el vértice t. Esto significa que se debe encontrar la cardinalidad del conjunto máximo de caminos de s hacia t tal que cada arista aparece en a lo sumo un camino. Sea S un conjunto máximo de caminos disjuntos en aristas desde s hacia t entonces la complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(|E||S|)$.

   En la figura siguiente se muestra un ejemplo de un grafo y su solución a este problema:



Respuesta

Como queremos determinar el número máximo de caminos disjuntos con respecto a aristas que inician en el vértice s y terminan en el vértice t, una forma de hacerlo es precisamente enfocándolo como un problema de flujo máximo. En todo problema que se quiera enfocar de tal forma que el valor del flujo máximo sea la respuesta al problema siempre es bueno primero plantearse que representarían mis nodos y aristas en el problema y que representaría una unidad de flujo y las capacidades. En este caso los nodos y aristas los usaríamos para representar el grafo G, sin embargo aún falta definir que representaría nuestra unidad de flujo y las capacidades.
En este caso para el problema que queremos resolver queremos la cardinalidad de algún conjunto máximo de caminos de s a t disjunto en aristas. Si recuerdan la propia forma en la que se halla el flujo máximo siguiendo los algoritmos vistos en clases es hallando caminos aumentativos que puedan incrementar el valor de flujo que se tiene. Por lo que cuando se halla un camino aumentativo se transmite un flujo desde s hacia t, así que es una buena idea intentar construir la red de flujo de forma tal que esos caminos sean precisamente los caminos de nuestro conjunto máximo de caminos disjuntos en aristas desde s hacia t y si queremos que cada camino aumentativo que se halle aporte solo una unidad de flujo para el valor del flujo máximo (de esta forma lo contaría solo una vez) entonces aquí nos damos cuenta que la capacidad de todas las aristas tiene que ser 1 para lograr este objetivo y ya tenemos todo lo que necesitamos para nuestra demostración.
Ahora hagamos la construcción formal de la red de flujo y la demostración de que al hallar el valor del flujo máximo en dicha red ese valor coincide con la cardinalidad del conjunto máximo de caminos de s a t disjuntos en aristas:

Construcción: Se construye la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ donde $V' = V$ y $E' = E$ donde los vértices s y t son fuente y receptor respectivamente y para toda arista $e \in E$ se cumple que $c(e) = 1$.

Demostración: Una forma de demostrar una igualdad entre dos valores x y y es demostrar que $x \leq y$ y $x \geq y$. Por lo que demostremos las dos siguientes proposiciones:

Proposición 1: Si existe un conjunto de caminos disjuntos respecto a aristas en un grafo $G = \langle V, E\rangle$, que van desde s hacia t, de cardinalidad k, entonces el valor del flujo máximo en la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ construida a partir de G es como mínimo k.

Proposición 2: Si existe un flujo f de valor k en la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ construida a partir de $G = \langle V, E\rangle$, donde para toda arista $e \in E'$ se cumple que $f(e) = 1$ o $f(e) = 0$ existe un conjunto de caminos disjuntos respecto a aristas en G, que van desde s hacia t, de cardinalidad k.

Demostremos primero la proposición 1:

Supongamos que existe un conjunto de caminos disjuntos respecto a aristas en un grafo $G = \langle V, E\rangle$, que van desde s hacia t, de cardinalidad k. Entonces en la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ construida a partir de G podemos hacer pasar una unidad de flujo de s hacia t por cada uno de los caminos. Ponemos para cada arista $e \in E'$ que está presente en algún camino $f(e) = 1$ y para el resto de las aristas e' ponemos $f(e') = 0$. Esto define un flujo factible en la red G' dado que se cumple la restricción de capacidad:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \tag{6}$$

Pues todas las aristas de G' tendrán valor 1 o 0 y para toda arista $e \in E'$ tenemos $c(e) = 1$.

Además se cumple la conservación del flujo, o sea que para todo vértice $u \in V'$ a excepción de s y t se cumple que:

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v) \tag{7}$$

Para demostrar que se cumple esta segunda propiedad, tomemos un vértice cualquiera $u \in V'$ a excepción de los vértices s y t. La forma en la que asignamos a las aristas $e \in E'$ el valor de $f(e) = 1$ fue precisamente tomando cada camino y a cada una de sus aristas ponerle un valor de flujo 1 y al resto que no pertenecían a ningún camino las dejamos con valor 0 de flujo. Luego para cada vértice u puede ocurrir dos casos. El primer caso es que dicho vértice no este presente en ningún camino, en cuyo caso todas las aristas que entran a él serán de valor 0 al igual que las que salen por lo que se cumple la propiedad. El segundo caso es que el vértice u se encuentre en al menos uno de los k caminos, en ese caso el camino no puede terminar, ni comenzar en u dado que todos los caminos empiezan en s y terminan en t, por lo que el vértice u para cada camino en el que se encuentre presente debe tener exactamente una arista que entre y una arista que sale de él diferentes entre ellas dado que los caminos son disjuntos en aristas, por lo que para cada unidad de flujo que entre habrá una unidad de flujo que salga por lo que se cumple la propiedad de la conservación del flujo.

Finalmente, al demostrar que f es un flujo factible en G', luego como pasamos una unidad de flujo por cada camino desde s hacia t entonces $|f| = k$ por lo que si denotamos f^* como un flujo máximo en G' se cumple que:

$$|f^*| \geq |f| = k \tag{8}$$

Con lo que queda demostrada la proposición 1.

Para demostrar ahora la proposición 2, demostremos el siguiente lema:

Lema 1: Si f es un flujo de valores 0 y 1, donde $|f| = k$ en una red de flujo $G' = \langle V', E', c \rangle$. Entonces el conjunto de las aristas $e \in E'$ que cumplen $f(e) = 1$ contiene un conjunto de k caminos disjuntos que van desde el vértice fuente $s \in V'$ hasta el vétice $t \in V'$.

Demostremos ahora el Lema 1 por inducción fuerte en la cantidad de aristas en G' tales que $f(e) = 1$, donde f es un flujo en G'.

Caso Base: Si el valor del flujo $|f| = 0$ entonces no hay nada que probar, por lo que al no incumplirse el **Lema 1**, todos los casos en los que $|f| = 0$ cumplen la propiedad (dentro de este análisis entra el caso en que ninguna arista $e \in E'$ cumpla $f(e) = 1$).

Paso inductivo $P(0), P(1), ..., P(m) \Rightarrow P(n)$ donde $m < n$. En este caso $P(i)$ con $0 \leq i \leq m$ es: *Dado un flujo f de valores 0 y 1, donde $|f| = k$ en una red de flujo $G' = \langle V', E', c \rangle$. Si la cantidad de aristas $e \in E'$ tales que $f(e) = 1$ es i entonces el conjunto de las aristas tales que $f(e) = 1$ contiene un conjunto de caminos disjuntos respecto aristas que van desde el vértice fuente s hasta el vértice receptor t de cardinalidad k.*

Como demostramos en el caso base todos los casos donde $|f| = 0$, entonces podemos asumir a partir de aquí que $|f| > 0$ lo cual implica que existe al menos una arista $e \in E'$ tal que $f(e) = 1$. Si ese es el caso, entonces debe haber una arista $< s, u >$ tal que $f(< s, u >) = 1$ donde $s \in V'$ y es el vértice fuente y u es un vértice en V', sabemos que dicha arista tiene que existir pues $|f| > 0$. Ahora buscamos un camino de aristas $e \in E'$ tales que $f(e) = 1$ a partir de la arista $< s, u >$. Como $f(< s, u >) = 1$, entonces por la propiedad de la conservación del flujo, existe una arista $< u, v >$ tal que $f(< u, v >) = 1$, de la misma forma debe existir una arista $< v, w >$ tal que $f(< v, w >) = 1$ y así consecutivamente. Si se continua este proceso dos cosas pueden pasar eventualmente:

(a) Se alcanza el vértice receptor t.

(b) Se alcanza un vértice $v \in V'$ por segunda vez.

Si sucede el caso (a), entonces se encuentra un camino P desde s hacia t, donde todas las aristas e_p que pertenecen a P cumplen que $f(e_p) = 1$. Luego utilizaremos el camino P como uno de los k caminos disjuntos en aristas. Sea f' el flujo obtenido al decrecer el flujo de cada una de las aristas $e_p \in P$ a 0. Este nuevo flujo f' tiene valor $k - 1$ dado que eliminamos la unidad de flujo que llevaba el camino P desde s hacia t, al mismo tiempo se tienen ahora menos aristas $e \in E'$ tales que $f(e) = 1$. Luego, aplicando la hipótesis de inducción en el flujo f', se obtienen $k - 1$ caminos disjuntos en aristas que van desde s hacia t, los cuales junto al camino P conforman los k caminos disjuntos en aristas desde s hacia t.

Ahora veamos que sucede en el caso (b). Si el camino P que se está formando a partir de la arista $< s, u >$ alcanza por segunda vez un vértice v entonces tenemos un ciclo. Sea el ciclo C el conjunto de aristas visitadas entre la primera y la segunda aparición de v. Se obtiene un flujo f' a partir de f decrementando el flujo de las aristas $e_c \in C$ hasta 0. Este nuevo flujo f' tiene valor k pero tiene menos aristas $e \in E'$ tales que $f(e) = 1$. Aplicando la hipótesis de inducción para f' obtenemos k caminos disjuntos en aristas desde s hacia t. Y de esta forma queda probada la propiedad.

Finalmente demostremos la **Proposición 2** la cual es prácticamente inmediata a partir del **Lema 1**:

Si existe un flujo f de valor k en la red de flujo $G' = \langle V', E', c \rangle$, y además como la red de flujo G' es una red donde para toda arista $e \in E'$ se cumple que $f(e) = 1$ o $f(e) = 0$, entonces por **Lema 1**, el conjunto de aristas $e \in E'$ tales que $f(e) = 1$ contiene un conjunto de k caminos disjuntos desde s hacia t, luego como $V' = V$ y $E' = E$, estos k caminos existen también en G con lo que queda demostrada la proposición.

Luego como la **Proposición 2** fue demostrada para todo flujo f en G', entonces en particular se cumple para un flujo máximo f^* en G'. Por lo que tenemos que, sea k la cardinalidad de un conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a aristas que van desde s hacia t en G y sea f^* un flujo máximo en la red G':

$$k \geq |f^*| \tag{9}$$

Finalmente, tenemos por **Proposición 2** que $k \geq |f^*|$ y por **Proposición 1** que $k \leq |f^*|$ por lo tanto $|f^*| = k$. Con lo que queda demostrada la correctitud del algoritmo planteado.

Observaciones finales:

(a) Algo muy importante a considerar en los problemas que se modelan como flujo máximo es que a veces no solo se quiere el valor que representa el flujo máximo sino también lo que representa cada unidad. En este caso por ejemplo sería que se quisiera no solo la cardinalidad de un conjunto máximo de caminos disjuntos en aristas desde s hacia t, sino además el conjunto de los caminos. Y precisamente como pueden ver esta demostración ya da un algoritmo para encontrar dichos caminos, es precisamente la inducción hecha para demostrar el **Lema 1**. Dicho procedimiento se conoce en la literatura como *Path Decomposition of the flow*, dado que descompone el flujo en un conjunto de caminos.

(b) Muchas demostraciones de correctitud en los problemas del flujo máximo tienen dos acercamientos básicos. Las demostraciones constructivas y basadas en las propiedades de un flujo f, como es esta que se realizó. O demostraciones utilizando el *Teorema de Max Flow/ Min Cut* el cual podrán ver en la próxima conferencia.

Pseudocódigo

```
G' ← Build_Network_From(G)
|f*| ← FordFulckerson(G')
return |f*|
```

Como se puede observar la complejidad temporal depende de los métodos *Build_Network_From(G)* y del algoritmo de *Ford-Fulkerson*. Construir la red de flujo es básicamente crear un grafo con los mismos nodos $O(V)$ y las mismas aristas con capacidad 1, lo cual es $O(E)$. Luego el método *Build_Network_From(G)* es $O(|V| + |E|)$. Y el algoritmo de *Ford-Fulkerson* tal y como vimos en la conferencia sería $O(|E| * |S|)$ dado que $|S|$ es el valor que tendrá el flujo máximo en la red de flujo construida. Luego por regla de la suma el algoritmo es $O(|E| * |S|)$.

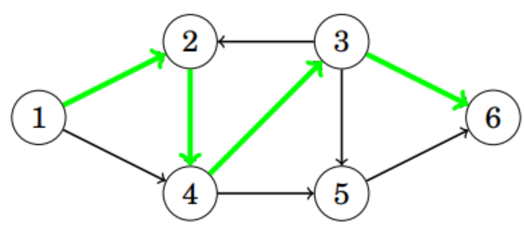
Lista de Estudios Independientes:

(a) Pseudocódigo del algoritmo para extraer los caminos que conforman un conjunto de caminos disjuntos respecto a aristas desde s hacia t y analizar su complejidad temporal.

(b) Resolver el mismo problema pero esta vez en grafos no dirigidos aprovechando todas las ideas discutidas para el caso en que fueron dirigidos.

6. Diseñe un algoritmo que dado un grafo dirigido $G = \langle V, E \rangle$ y los vértices $s, t \in V$, permita determinar el número máximo de caminos disjuntos con respecto a vértices que inician en el vértice s y terminan en el vértice t, con excepción de los vértices s, t. Esto significa que se debe encontrar la cardinalidad del conjunto máximo de caminos de s hacia t tal que cada nodo interior aparece a lo sumo en un camino. Sea S un conjunto máximo de caminos disjuntos en vértices desde s hacia t entonces la complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(|E||S|)$.

   En la figura siguiente se muestra un ejemplo de un grafo y su solución a este problema:



Respuesta

En este caso es un problema semejante al ejercicio 5-) lo que esta vez respecto a nodos. Nuevamente intentemos enfocar el problema como un problema de flujo máximo. Como vimos en el problema anterior primero nos planteamos que representarían los nodos, las aristas, las capacidades y una unidad de flujo con respecto a este problema. De la misma forma que en el ejercicio anterior podemos crear una red de flujo $G' = \langle V', E', c \rangle$ donde inicialmente $V' = V$ y $E' = E$. También podemos seguir la misma idea y considerar que cada unidad de flujo representará un camino en un conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a nodos desde el vértice s hacia el vértice t. Pero esta vez lo que necesitamos limitar son los nodos, las aristas no nos interesan en este problema, lo cual significa que podemos ponerles a las aristas una capacidad infinita ∞ y en el caso de los vértices, sabemos por ejercicio 3-) que podemos ponerles capacidad, dado que queremos que solo sean usados en un camino entonces podemos ponerle capacidad 1 a cada uno de los vértices a excepción de s y t. Finalmente, para utilizar los algoritmos vistos en conferencia como vimos en el ejercicio 3-) es necesario aplicar dicha transformación cuando existen vértices con capacidades lo cual implica que si consideramos $n = |V|$ entonces para todo vértice $v \in V - \{s, t\}$ se tendrán dos vértices v_{in} y v_{out}, por lo que finalmente si $V = s, v_1, v_2, ..., v_{n-2}, t$ entonces $V' = s, v_{in_1}, v_{out_1}, v_{in_2}, v_{out_2}, ..., v_{in_{n-2}}, v_{out_{n-2}}, t$ y a su misma vez sabemos que la trasnformación en el ejercicio 3-) añade una arista entre todo par de vértices v_{in} y v_{out} con la capacidad que tenía el vértice inicialmente, si denotamos a esas aristas como e_v, entonces tenemos que si $E = e_1, e_2, ..., e_m$ entonces $E' = E \cup \{e_{v_1}, e_{v_2}, ..., e_{v_{n-2}}\}$. Por último hay que considerar un caso puntual y es que queremos caminos disjuntos en nodos interiores entre s y t pero un camino válido es precisamente una arista de s hacia t, por lo que si la arista $< s, t > \in E$ le pondremos capacidad de 1 en vez de infinito como al resto $c(< s, t >) = 1$.

Ahora hagamos una construcción formal de la red de flujo y demostremos que el algoritmo de hallar el valor del flujo máximo en la red de flujo que construimos es igual a la cardinalidad de un conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a vértices que van desde s hacia t.

Construcción: Se construye la red de flujo $G' \langle V', E', c\rangle$ donde inicialmente $V' = V$ y $E' = E$, los vértices s y t son fuente y receptor respectivamente y la función de capacidad de aristas c se define como:

$$\text{c(e)=} \begin{cases} 1 & e = < s, t > \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea la función c_v una función de capacidad con respecto a vértices:

$$\text{c(v)=} \begin{cases} 1 & v \in V' - \{s, t\} \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego se aplica la transformación vista en el ejercicio 3-):

$$G'' \langle V'', E'', c'\rangle = VertCap(V', E', c, c_v) \tag{10}$$

dando resultado a los conjuntos $V'' = \{s, v_{in_1}, v_{out_1}, v_{in_2}, v_{out_2}, ..., v_{in_{n-2}}, v_{out_{n-2}}, t\}$ y $E'' = E \cup \{e_{v_1}, e_{v_2}, ..., e_{v_{n-2}}\}$. Donde para toda arista $e \in E - \{< s, t >\}$ se cumple que $c'(e) = \infty$ y para toda arista e_{v_i} con $1 \leq i \leq n-2$ se tiene una capacidad de 1 ($c'(e_{v_i}) = 1$) y finalmente si $< s, t > \in E$ entonces $c'(< s, t >) = 1$.

Demostración: Nuevamente demostraremos la igualdad entre el valor del flujo máximo en la red G'' y la cardinalidad de un conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a nodos entre los vértices s y t en el grafo G. Para esto nuevamente demostraremos las siguientes proposiciones:

Proposición 1: Si existe un conjunto de caminos disjuntos respecto a vértices en un grafo $G = \langle V, E\rangle$, que van desde $s \in V$ hasta $t \in V$, de cardinalidad k, entonces el valor del flujo máximo en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c'\rangle$ construida a partir de G es como mínimo k.

Proposición 2: Si existe un flujo f de valor k en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c'\rangle$ construida a partir de $G = \langle V, E\rangle$, entonces existe un conjunto de caminos disjuntos respecto a vértices de cardinalidad k en el grafo G, que van desde $s \in V$ hacia $t \in V$.

Demostremos primero la proposición 1:
Supongamos que existe un conjunto de caminos disjuntos respecto a vértices en un grafo $G = \langle V, E\rangle$, que van desde $s \in V$ hasta $t \in E$, de cardinalidad k. Entonces en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c'\rangle$ construida a partir de G podemos pasar una unidad de flujo de s hacia t por cada uno de los caminos. Cada camino pasa una única unidad de flujo pues o el camino es la arista $< s, t >$ en cuyo caso solo puede pasar una unidad de flujo o es un camino P con nodos interiores que al tener un nodo interior v_i con $1 \leq i \leq n-2$ entonces en la red de flujo dicho camino se traduce a un camino P' donde P' posee todas las aristas presentes en P y además las aristas del tipo $< v_{in_i}, v_{out_i} >$. Esto lo hacemos de la siguiente forma, en la red de flujo G'' a toda arista $e \in E''$ que se encuentre en algún camino le adicionamos una unidad de flujo ($f(e) = f(e)+1$) y a toda arista que no esté presente en ningún camino entonces mantenemos su flujo en infinito o 0 en dependencia si la arista pertenece a E o es una arista e_{v_i} con $1 \leq i \leq n-2$ respectivamente. Esto define un flujo factible en la red G'' dado que se cumple la restricción de la capacidad:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \tag{11}$$

Pues para toda arista que inicialmente pertenecía a E a excepción de $< s, t >$ (si existe), se tiene una capacidad infinita por lo que nunca se violará dicha propiedad en dichas aristas. Ahora en el caso de las aristas del tipo $< v_{in}, v_{out} >$ y la arista $< s, t >$ se tiene una capacidad de 1, pero a esas aristas solo se le aumentará el valor del flujo en una unidad una única vez, pues los caminos son disjuntos en vértices por lo que si a alguna arista de ese tipo se le aumentara el valor del flujo en una unidad más de una vez, significaría que en G había dos caminos en el conjunto pasando por el mismo vértice lo cual no puede suceder.
Además se cumple la conservación del flujo, o sea que para todo vértice $u \in V''$ a excepción de s y t se cumple que:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) \tag{12}$$

Pues para todo vértice $v \in V - \{s, t\}$ en la red de flujo G'' se representa como dos vértices v_{in} y v_{out} donde existe la arista $< v_{in}, v_{out} >$ con capacidad 1. Por lo tanto demostremos que para todo vértice v_{in_i} y v_{out_i} con $1 \leq i \leq n-2$ se cumple la propiedad. Para los vértices del tipo v_{in_i} solo tienen una arista saliendo que es la arista $< v_{in}, v_{out} >$ la cual tiene capacidad 1 y por la forma que definimos que iríamos modificando la red de flujo G'' por cada camino, sabemos que dicha arista solo se le puede aumentar el flujo en una unidad una única vez por lo que solo una de las aristas que entra a v_{in_i} puede tener flujo 1 y no mayor que uno, dado que nuevamente si dicha arista tuviese flujo mayor que 1 o si hubiese alguna otra arista con flujo 1 o mayor entonces significaría que en el conjunto de caminos disjuntos respecto a vértices existe más de un camino que pasa por $v_i \in V$ lo cual no puede suceder. Luego la propiedad se cumple para los vértices de tipo v_{in}. De forma semejante se demuestra v_{out} (dicha demostración se deja de estudio independiente).

Finalmente, al demostrar que f es un flujo factible en G'', luego como pasamos una unidad de flujo por cada camino desde s hacia t entonces $|f| = k$ por lo que si denotamos f^* como un flujo máximo en G'' se cumple que:

$$|f^*| \geq |f| = k \tag{13}$$

Con lo que queda demostrada la proposición 1.

Demostremos ahora la **Proposición 2** demostrando primero el siguiente Lema:

Lema 1: Si f es flujo, de valor $|f| = k$ en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c' \rangle$ construida a partir del grafo inicial $G = \langle V, E \rangle$, entonces el conjunto de caminos desde s hacia t que pasan por una arista $e \in E''$ tal que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$ (recordar que estas aristas serán del tipo e_{v_i} o la arista $< s, t >$), al ser trasnformado al conjunto de caminos originales en $VertCap^{-1}(V'', E'', c', c_v)$ se obtiene un conjunto de caminos disjuntos respecto a vértices en el grafo G que van desde s hacia t.

Demostremos el **Lema 1** por inducción fuerte en la cantidad de aristas en G'' tales que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$.

Caso Base: Si el valor del flujo $|f| = 0$ entonces no hay nada que probar, por lo que al no incumplirse el **Lema 1**, todos los casos en los que $|f| = 0$ cumplen la propiedad (dentro de este análisis entra el caso en que ninguna arista $e \in E''$ cumple que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$).

Paso inductivo $P(0), P(1), ..., P(m) \Rightarrow P(n)$ donde $m < n$. En este caso $P(i)$ con $0 \leq i \leq m$ es: *Si existe un flujo f de valor k en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c' \rangle$ construida a partir de $G = \langle V, E \rangle$, donde la cantidad de atistas $e \in E''$ tales que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$) es i, entonces existe un conjunto de caminos en G'' que pasan por al menos una arista $e \in E''$ tal que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$ que al sustituir dichos caminos por los originales en $VertCap^{-1}(V'', E'', c', c_v)$ entonces se obtiene un conjunto de caminos disjuntos respecto a vértices en el grafo original $G = \langle V, E \rangle$ de cardinalidad k que van desde s hacia t.*

Como demostramos en el caso base todos los casos donde $|f| = 0$, entonces podemos asumir a partir de aquí que $|f| > 0$ lo cual implica que existe al menos una arista $e \in E'$ tal que $f(e) > 0$. Si ese es el caso, entonces debe haber una arista $< s, u >$ tal que $f(< s, u >) > 0$ donde $s \in V'$ y es el vértice fuente y u es un vértice en V', sabemos que dicha arista tiene que existir pues $|f| > 0$. Ahora buscamos un camino de aristas $e \in E'$ tales que $f(e) > 0$ a partir de la arista $< s, u >$. Como $f(< s, u >) > 0$, entonces por la propiedad de la conservación del flujo, existe una arista $< u, v >$ tal que $f(< u, v >) > 0$, de la misma forma debe existir una arista $< v, w >$ tal que $f(< v, w >) > 0$ y así consecutivamente. Si se continua este proceso tres cosas puden pasar eventualmente:

(a) La arista $< s, u >$ es precisamente la arista $< s, t >$.

(b) Se alcanza el vértice receptor t a partir de un camino de más de una arista.

(c) Se alcanza un vértice $v \in V'$ por segunda vez.

Si sucede el caso (a), entonces se encontró un camino de s hacia t donde la única arista del camino cumple que $c'(< s, t >) = 1$ y $f(< s, t >) = 1$. Luego si se hace $f(< s, t >) = 0$ entonces $|f| = k - 1$ y ahora tenemos la red de flujo G' con una arista $e =< s, t >\in E''$ menos que cumple que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$. Luego por hipótesis de inducción existen $k - 1$ caminos en G'' desde s hacia t que pasan por una arista $e \in E''$ tal que $c'(e) = 1$ y $f(e) = 1$ y al revertir la transformación con $VertCap^{-1}(V'', E'', c', c_v)$ hecha en G'' se obtienen $k - 1$ caminos disjuntos respecto a vértices en el grafo original G que van desde s hacia t. Luego como la arista $< s, t >$ ya no cumple $f(< s, t >) = 1$ entonces dicha arista no fue incluida en el conjunto de los caminos, luego si se añade dicha arista al conjunto de caminos en G se obtiene un conjunto de k caminos disjuntos respecto a vértices en G que van desde s hacia t.

Si sucede el caso (b), entonces se encuentra un camino P desde s hacia t, donde todas las aristas e_p que pertenecen a P cumplen que $f(e_p) > 0$ y además al menos una arista e_{v_p} cumple que $f(e_{v_p}) = 1$ y $c'(e_{v_p}) = 1$, pues si no fuese el caso, debido a la construcción hecha en G'' dicho camino no podría pasar por ningún otro vértice en V'' que no sean s y t. Luego utilizaremos el camino P como uno de los k caminos disjuntos en vértices. Sea f' el flujo obtenido al decrecer el flujo de cada una de las aristas $e_p \in P$ en una unidad. Este nuevo flujo f' tiene valor $k - 1$ dado que eliminamos una unidad de flujo que llevaba el camino P desde s hacia t, al mismo tiempo se tienen ahora menos aristas $e \in E'$ tales que $f(e) = 1$ y $c'(e) = 1$. Luego, aplicando la hipótesis de inducción en el flujo f', se obtienen $k - 1$ caminos en G'' que al revertir los cambios hechos en la trasnformación de G' en G'' usando $VertCap^{-1}(V'', E'', c', c_v)$ se convierten en $k - 1$ caminos disjuntos en vértices que van desde s hacia t en el grafo original G, los cuales junto al camino P después de revertir también la transformación en dicho camino, conforman los k caminos disjuntos en vértices desde s hacia t.

Ahora veamos que sucede en el caso (c). Si el camino P que se está formando a partir de la arista $< s, u >$ alcanza por segunda vez un vértice v entonces tenemos un ciclo. Sea el ciclo C el conjunto de aristas visitadas entre la primera y la segunda aparición de v. Se obtiene un flujo f' a partir de f decrementando el flujo de las aristas $e_c \in C$ en una unidad, debido a que en el ciclo C debe existir al menos una arista $e_{v_c} \in E''$ tal que $f(e_{v_c}) = 1$ y $c'(e_{v_c}) = 1$ pues dicho ciclo debe estar conformado por al menos un vértice que no sea s o t. Este nuevo flujo f' tiene valor k pero tiene menos aristas $e \in E''$ tales que $f(e) = 1$ y $c'(e) = 1$. Aplicando la hipótesis de inducción para f' se obtiene k caminos en G'' que al revertir los cambios hechos en la trasnformación de G' en G'' utilizando $VertCap(V'', E'', c', c_v)$ se convierten en k caminos disjuntos en vértices que van desde s hacia t en el grafo original G. Y de esta forma queda probada la propiedad.

Finalmente demostremos la **Proposición 2** la cual es prácticamente inmediata a partir del **Lema 1**:

Si existe un flujo f de valor k en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c' \rangle$ construida a partir de $G = \langle V, E \rangle$, entonces por **Lema 1**, el conjunto de caminos que pasan por al menos una arista $e \in E''$ tal que $f(e) = 1$ y $c'(e) = 1$ al revertir la transformación utilizando $VertCap(V'', E'', c', c_v)$ se obtienen k

caminos disjuntos desde s hacia t en G con lo que queda demostrada la proposición.

Luego como la **Proposición 2** fue demostrada para todo flujo f en G'', entonces en particular se cumple para un flujo máximo f^* en G'. Por lo que tenemos que, sea k la cardinalidad de un conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a vértices que van desde s hacia t en G y sea f^* un flujo máximo en la red G'':

$$k \geq |f^*| \tag{14}$$

Finalmente, tenemos por **Proposición 2** que $k \geq |f^*|$ y por **Proposición 1** que $k \leq |f^*|$ por lo tanto $|f^*| = k$. Con lo que queda demostrada la correctitud del algoritmo planteado.

Pseudocódigo

```
1: G'' ← Build_Network_From(G)
2: |f*| ← Ford-Fulkerson(G')
3: return |f*|
```

Como se puede observar la complejidad temporal depende de los métodos *Build_Network_From(G)* y del algoritmo de *Ford-Fulkerson*. Construir la red de flujo es básicamente crear un grafo que conserva los nodos s y t pero al resto de los nodos los divide en dos nodos nuevos, lo cual sería $O(2 * |V| - 2)$ que es $O(|V|)$. En cuanto a las aristas se toman todas las aristas del grafo G y se añade una nueva arista por cada vértice en V lo cual sería $O(|E| + |V| - 2)$. Luego el método *Build_Network_From(G)* es $O(|V| + |E|)$. Y el algoritmo de *Ford-Fulkerson* tal y como vimos en la conferencia sería $O(|E||f^*|)$ que en este caso sería $O(|E||S|)$, donde S es un conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a vértices desde s hacia t en G.

Lista de Estudios Independientes:

(a) Terminar la demostración del cumplimiento de la propiedad de la conservación del flujo en la **Proposición 1**.

7. Dado un conjunto de vértices V y dos números enteros para cada vértice que representan el indegree y outdegree respectivamente de dicho vértice. Diseñe un algoritmo que permita determinar si existe un grafo $G = \langle V, E \rangle$ que cumpla con dicha descripción. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser de $O(|V|^4)$.

Respuesta

Para este problema una posible solución sería iterar por todos los grafos posibles con $|V|$ vértices y $|E|$ aristas y ver si alguno cumple con las condiciones mencionadas en el ejercicio, pero esto es sumamente costoso. Otro acercamiento a estos problemas de existencia es crear un nuevo problema del cual se conozca su solución y que su solución existe si y solo si el grafo G existe. Esto lo haremos modelando el problema como una red de flujo donde el valor del flujo máximo $|f^*| = \sum_{v \in V} indegree(v)$ si y solo si el grafo G existe.

Ahora, como en el resto de los problemas que hemos visto, tenemos que pensar como modelar dicha red de flujo. Lo que queremos saber es si dada una descripción de un grafo a partir del *indegree* y *outdegree* de sus vértices, si dicho grafo existe. Una forma de saber la no existencia es precisamente si no importa como se asignen las aristas va a existir $v \in V$ tal que no va a poseer su valor de *indegree* o *outdegree* señalado. Además sabemos que cada arista $e =< u, v >\in E$ proporciona una unidad de *outdegree* a $u \in V$ y una unidad de *indegree* a $v \in V$. También sabemos que:

$$\sum_{v \in V} indegree(v) = \sum_{v \in V} outdegree(v) = |E| \tag{15}$$

Luego puede surgir la idea de en una red de flujo representar que una arista ha sido colocada a partir de una unidad de flujo y si nuestro flujo máximo es $|E|$ significa que se colocaron las $|E|$ de aristas necesarias cumpliendo todas las restricciones de *indegree* y *outdegree* para cada vértice lo que implicaría la existencia de un grafo que cumple con dicha descripción. Pero aún con esta idea nos queda una parte importante que es como restringir a cada vértice $v \in V$ a tener $indegree(v)$ y $outdegree(v)$, esto claramente lo podemos lograr con las capacidades, pero antes de poder pensar en eso, tenemos que pensar cuál será nuestra red de flujo. Cómo lograr representar en una red de flujo cuáles son las aristas que entran a v y cuáles son las que salen. La idea interesante en este problema es duplicar los vértices de V creando dos conjuntos X y Y, donde $X = V$ y $Y = V_d$ donde V_d será un conjunto de vértices representando un duplicado de los vértices originales por lo que $|V_d| = |V|$. Para poder distinguir entre original y duplicado sigamos la siguiente notación: $X = V = v_1, v_2, ..., v_n$ y $Y = V_d = v_{d_1}, v_{d_2}, ..., v_{d_n}$ donde para todo vértice $v_i \in V$ su duplicado en Y se denota por v_{d_i} con $1 \leq i \leq n$ (consideremos $n = |V|$).

Luego colocaremos aristas entre X y Y y sabemos que una unidad de flujo emitida desde X hacia Y representa una unidad de *outdegree* del vértice $u \in X$ y una de *indegree* de $v \in Y$ donde tanto u como v representan vértices en V. Luego tendríamos un problema de múltiples fuentes y receptores por lo que aplicaríamos la transformación vista en el ejercicio 2-) añadiendo una superfuente s con aristas hacia cada vértice en X y un superreceptor t con una arista entrando desde cada vértice en Y.

La siguiente parte de las discusión es cuáles son exactamente las aristas que van desde X hacia Y. Como queremos modelar el pasar por todos los grafos posibles a partir de una red de flujo entonces las aristas que van desde X hacia Y serían para representar todas las aristas posibles entre los vértices del grafo con el conjunto V de vértices, por lo tanto serían todas las aristas posibles $< v_i, v_{d_j} >$ con $u \in X$ y $v \in Y$ y $1 \leq i, j \leq |V|$ tales que $i \neq j$ pues no queremos aristas de un vértice hacia él mismo.

Finalmente podemos volver a discutir como a través de las capacidades restringiremos que cada vértice representado a partir de un vértice en X y un vértice en Y termine con $indegree(v)$ y $outdegree(v)$. La idea es que como cada vértice en X, sus aristas representarán las aristas que salen de un vértice en V, entonces las capacidades de todas las aristas del tipo $< s, v_i >$ con $v_i \in X$ serán de $outdegree(v_i)$, similarmente como los vértices en Y sus aristas representan las aristas que entran a los vértices en V, entonces las capacidades de todas las aristas del tipo $< v_{d_i}, t >$ con $v_{d_i} \in Y$ serán de $indegree(v_i)$. Por último las aristas del tipo $< v_i, v_{d_j} >$ con $v_i \in X$ y $v_{d_j} \in Y$ tendrán capacidad 1 pues queremos que cada unidad de flujo represente solamente una arista.

Ahora pasemos a la construcción formal de la red de flujo y a demostrar que existe un grafo G que cumple dicha descripción si y solo si en la red de flujo que construiremos el valor del flujo máximo es $|E|$.

Construcción: Sea $G' = \langle V', E', c\rangle$ una red de flujo construida a partir del conjunto de vértices V, tal que $V' = X \cup Y \cup \{s, t\}$, donde si $V = v_1, v_2, ..., v_n$ entonces $X = V$ y $Y = v_{d_1}, v_{d_2}, ..., v_{d_n}$. Y sean $E_s = \{< s, u > \mid u \in X\}$, $E_t = \{< v, t > \mid v \in Y\}$ y $E_{xy} = \{< v_i, v_{d_j} > \mid v_i \in X, v_{d_j} \in Y, 1 \leq i, j \leq |V|$ y $i \neq j\}$ entonces $E' = E_s \cup E_t \cup E_{xy}$. Donde la función de capacidad se define como:

$$c(e) = \begin{cases} \text{outdegree(v}_i) & \text{si } e = \langle s, v_i\rangle \in E_s \\ \text{indegree(v}_i) & \text{si } e = \langle v_{d_i}, t\rangle \in E_t \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para la demostración de la correctitud demostraremos la siguiente proposición:

Proposición: Sea un conjunto de vértices V y un valor de *indegree* y *outdegree* para cada vértice, existe un grafo $G = \langle V, E\rangle$ que cumple con dicha descripción si y solo si en la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ construida a partir de V se cumple que el valor de su flujo máximo f^* es $|f^*| = |E| = \sum_{v \in V} indegree(v) = \sum_{v \in V} outdegree(v)$.

$(\longrightarrow)$ Supongamos que existe un grafo $G = \langle V, E\rangle$ que cumple con la descripción. Definamos entonces en la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ el siguiente flujo f:

$$f(e) = \begin{cases} \text{outdegree}(\text{v}_i) & \text{si } e = \langle s, v_i \rangle \in E_s \\ \text{indegree}(\text{v}_i) & \text{si } e = \langle v_{d_i}, t \rangle \in E_t \\ 1 & \text{si } e = \langle v_i, v_{d_j} \rangle \text{ y } e' = \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostremos primero que el flujo f es un flujo válido en G'.

El flujo f cumple con la propiedad de la restricción de la capacidad:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \tag{16}$$

Pues a las aristas $e = \langle s, v_i \rangle \in E_s$ se les asigna $outdegree(v_i)$ y a las $e = \langle v_{d_i}, t \rangle \in E_t$ se les asigna $indegree(v_i)$ de flujo que es exactamente el valor de su capacidad respectivamente. El resto de las aristas que son las pertenecientes al conjunto E_{xy} se les asigna 1 o 0 lo cual cumple con la restricción de la capacidad dado que todas las aristas en E_{xy} poseen capacidad de 1.

También cumple la propiedad de la conservación del flujo:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) \tag{17}$$

Supongamos que existe un vértice $v \in V'$ que no cumple con la propiedad de la conservación del flujo. Tenemos dos casos:

(a) $v \in X$

(b) $v \in Y$

Si es el caso (a) entonces por la función de flujo f sabemos la arista $< s, v >$ cumple que $f(< s, v >) = outdegree(v)$ y al mismo tiempo sabemos que toda arista que sale de v en G se le asigna una unidad de flujo en G' y de v solamente salen exactamente $outdegree(v)$ aristas en G por lo que llegamos a una contradicción dado que asumimos que no cumplía la conservación del flujo.

Análogamente se demuestra el caso (b) el cual se deja de estudio independiente.

Ahora demostremos que f es máximo, como sabemos:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(< s, v >) \leq \sum_{v \in V} c(< s, v >) \tag{18}$$

Pero como para toda arista $e \in E_s$ se cumple que $f(e) = c(e)$ entonces:

$$|f| = \sum_{v \in V} c(< s, v >) \tag{19}$$

Que era una cota superior de todo flujo por lo que si alcanza el valor de la cota superior entonces el flujo f es máximo.

Finalmente como:

$$|f| = \sum_{v \in V} c(< s, v >) \tag{20}$$

Entonces:

$$|f| = \sum_{v \in V} outdegree(v) = |E| \tag{21}$$

Con lo que queda demostrada la implicación.

($\longleftarrow$) Supongamos ahora que existe un flujo máximo f^* en G' tal que $|f^*| = |E| = \sum_{v \in V} indegree(v) = \sum_{v \in V} outdegree(v)$. Esto significa que:

$$|f^*| = \sum_{v \in V} outdegree(v) = \sum_{v \in V} f(< s, v >) = \sum_{v \in V} c(< s, v >) \tag{22}$$

Demostremos que si tomamos todas las aristas $< v_i, v_{d_j} >$ con $v_i \in X$ y $v_{d_j} \in Y$ tales que $f(< v_i, v_{d_j} >) = 1$ y las ponemos entre vértices en el grafo G desde el vértice v_i hacia el vértice v_j se forma un grafo que cumple con la descripción.

Supongamos que no cumple la descripción, eso significa que existe un vértice $v \in V$ tal que no posee el valor correcto de $indegree(v)$ o de $outdegree(v)$. Supongamos primero que el valor incorrecto es $outdegree(v)$. En ese caso significaría que el vértice $v \in X$ representando a v en la red de flujo o bien no le entran $outdegree(v)$ unidades de flujo o le entran $outdegree(v)$ unidades de flujo pero la cantidad de aristas de flujo 1 que salen de v no es $outdegree(v)$. Lo primero no puede suceder, pues en ese caso existe una arista $< s, v >$ tal que $f(< s, v >) < outdegree(v)$ lo que implica que $|f^*| < \sum_{v \in V} outdegree(v)$ lo cual es una contradicción. De la misma forma lo segundo no puede suceder pues dado que a v entran $outdegree(v)$ unidades de flujo, entonces por propiedad de la conservación del flujo, de v tienen que salir $outdegree(v)$ unidades de flujo y como toda arista que sale de v tiene capacidad 1, entonces hay $outdegree(v)$ aristas que salen de v con flujo 1 que fueron seleccionadas lo cual entra en contradicción con nuestra suposición de que v tiene un valor incorrecto de $outdegree(v)$ en el grafo G.

Análogamente se demuestra el caso de que $indegree(v)$ tenga un valor incorrecto, el cual dejamos de estudio independiente.

Pseudocódigo

```
1: G' ← Build_Network_From(V)
2: |f*| ← Ford-Fulkerson(G')
3: if |f*| == Σ_{v∈V} outdegree(v) then
4:    return TRUE
5: end if
6: return FALSE
```

Como se puede observar la complejidad temporal depende de los métodos *Build_Network_From(V)* y del algoritmo de *Ford-Fulkerson*. Construir la red de flujo es básicamente crear un grafo donde $V' = V \cup \{s, t\}$ lo cual es $O(|V| + 2)$ y $E' = E_s \cup E_t \cup E_{xy}$ lo cual es $O(|V|^2 - |V| + 2|V|)$. Luego el método *Build_Network_From(V)* es $O(|V|^2)$. Y el algoritmo de *Ford-Fulkerson* tal y como vimos en la conferencia sería $O(|E| * \sum_{v \in V} outdegree(v))$ lo cual es $O(|V|^2 * |V|^2)$ en el caso peor donde sea un grafo completo el que se describe. Donde finalmente por regla de la suma resulta en $O(|V|^4)$

Lista de Estudios Independientes:

(a) Terminar la demostraciones análogas que se dejaron pendientes.

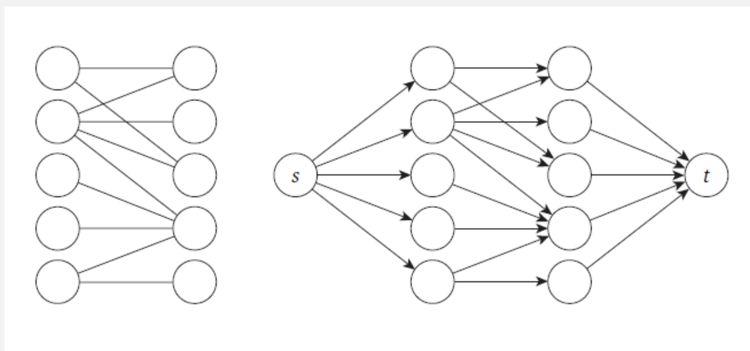
(b) Pseudocódigo de un algoritmo que extraiga el grafo G a partir de los resultados en la red de flujo en caso de existir dicho grafo.

8. Sea $G = \langle V, E \rangle$ un grafo no dirigido bipartito diseñe un algoritmo para determinar la cardinalidad del emparejamiento máximo M que se puede formar a partir de G. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser de $O(|E||M|)$.

Respuesta

Nuevamente intentaremos resolver este problema modelandolo a partir de una red de flujo. Sabemos que un grafo bipartito $G = \langle V, E \rangle$ es un grafo no dirigido el cual su conjunto de vértices puede ser particionado en los conjuntos $V = X \cup Y$ con la propiedad de que cada arista $e \in E$ tiene un vértice en X y el otro en Y. Y sabemos que un emparejamiento M en G es un subconjunto de aristas M de E tal que cada vértice $v \in V$ aparece en a lo sumo una arista de M. En nuestro problema estamos buscando la cardinalidad de un conjunto M máximo. Una idea que se puede ocurrir es que queremos seleccionar la mayor cantidad de aristas posibles tales que ninguna repita vértices, y sabemos que cada arista va siempre de un vértice del conjunto X a otro en el conjunto Y, por lo que puede saltar a la mente la idea de que una unidad de flujo represente una arista en el emparejamiento máximo y con la capacidad en las aristas restringir que cada vértice se utilice en solo una arista. Finalmente como queremos que una unidad de flujo sea una arista se puede ver como que cada vértice en X es una fuente que intenta mandar una única unidad de flujo a un y solo un receptor que se encuentra en Y. Luego si inicialmente construimos una red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ donde $V' = V$ y $E' = E$, tenemos la situación de múltiples fuentes y múltiples receptores. Luego si se aplica la transformación vista en el ejercicio 2-) pondríamos una superfuente s con una arista dirigida a cada vértice en X y un superreceptor t que reciba una arista dirigida hacia él por cada uno de los vértices en Y. Otro problema es que el grafo original es no dirigido, pero como en este caso queremos mandar una unidad de flujo de cada vértice en X a un vértice en Y, entonces dirigimos las aristas desde X hacia Y.

La figura muestra como quedaría el grafo aún sin considerar valores de capacidad.



Solo nos falta considerar ahora cuáles serían las capacidades de las aristas. Como queremos que cada vértice en X solo pueda mandar una unidad de flujo a Y entonces pondremos todas las aristas del tipo $< s, u >$ con $u \in X$ con capacidad 1. De la misma forma queremos que cada vértice en Y solo reciba una unidad de flujo por lo que debe enviar solo una unidad de flujo a t, entonces pondremos a cada arista del tipo $< v, t >$ con $v \in Y$ capacidad 1. Finalmente falta considerar las aristas que van desde un vértice de X hacia un vértice de Y, como queremos que cada una se utilice a lo sumo una vez les pondremos entonces capacidad 1 también.

Ahora pasemos a realizar la construcción formal y demostrar que el valor del flujo máximo en dicha red de flujo es igual a la cardinalidad de un emparejamiento máximo en G.

Construcción: Se construye la red de flujo $G' = \langle V', E', c\rangle$ a partir del grafo no dirigido $G = \langle V, E\rangle$ bipartito con $V = X \cup Y$, donde $V' = V \cup \{s, t\}$ y $E' = E \cup \{e | e =< s, u >, u \in X\} \cup \{e | e =< v, t >, v \in Y\}$. Donde para toda arista $e \in E'$ se tiene que $c(e) = 1$.

Para la demostración de la correctitud demostraremos la siguiente proposición:

Proposición: Sea $G = \langle V, E\rangle$ un grafo no dirigido y bipartito con $V = X \cup Y$ y sea $G' = \langle V', E', c\rangle$ la red de flujo construida a partir de G. Si M es un emparejamiento en G, entonces existe un flujo f en G' tal que $|f| = |M|$. Recíprocamente si f es un flujo definido en G', entonces existe un emparejamiento M en G tal que $|M| = |f|$.

$(\longrightarrow)$ Demostremos primero que si M es un emparejamiento en G entonces existe un flujo f en G' tal que $|f| = |M|$.

Para esto tomemos cada arista $e =< u, v >\in M$ donde $u, v \in V'$ y a través de dicha arista pasemos una unidad de flujo desde s hacia t en G'. Esto lo haremos haciendo $f(< s, u >) = 1$,$f(< u, v >) = 1$ y $f(< v, t >) = 1$ en la red de flujo G'. Sabemos que cada arista se utiliza una sola vez pues todas las aristas en el emparejamiento son diferentes y además ningún vértice está en más de una arista por lo que no se repiten las aristas del tipo $< s, u >$ y $< v, t >$. Esta asignación de valores de f a cada una de las aristas mencionadas define un flujo en G', donde $|f| = |M|$. Dado que por cada arista del emparejamiento llega una y solo una unidad de flujo desde s hacia t entonces $|f| = |M|$. Ahora demostremos que f es un flujo válido en G'.

El flujo f cumple con la propiedad de la restricción de la capacidad:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \tag{23}$$

Pues cada arista se le asigna a lo sumo un valor de f de solamente una unidad por lo que para toda arista $e \in E'$ se cumple $0 \leq f(e) \leq 1$, y como la capacidad de todas las aristas es 1, entonces $0 \leq f(e) \leq c(e)$. También se cumple la propiedad de la conservación del flujo:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) \tag{24}$$

Pues para cada vértice $v \in V' - \{s, t\}$ sucede lo siguiente. Si el vértice $v \in X$ entonces existe una arista $< s, v >\in E'$, luego se tienen dos casos:

(a) v no se encuentra en ninguna arista perteneciente a M

(b) v forma parte de una arista perteneciente a M

Si es el caso (a) entonces ninguna arista que sale de v se le asigna valor de flujo 1, por lo que se mantiene en 0. Y como ninguna arista que sale de v se seleccionó tampoco entonces se le asigna una unidad de flujo a la arista $< s, v >$.

Si el caso (b) entonces hay una sola arista $< v, w >$ que sale de v donde $w \in Y$ y una única arista que entra a v que es $< s, v >$, ambas con un valor de flujo 1, por lo cual se cumple la propiedad.

Análogamente se demuestra el caso en que $v \in Y$, el cual se deja de estudio independiente.

($\longleftarrow$) Ahora demostremos que si f es un flujo en G', entonces existe un emparejamiento M en G tal que $|M| = |f|$.

Sea f un flujo en G' y sea $M =\{< u, v > \mid u \in X,\ v \in Y \text{ y } f(< u, v >) = 1\}$. Demostremos que M es un emparejamiento en G y que además $|M| = |f|$. Para cada arista $< u, v >\in M$ sabemos que la arista $< s, u >$ es la única en entrar a u y la arista $< v, t >$ la única en salir de v y como para toda arista $e \in E'$ se cumple que $c(e) = 1$, entonces por conservación del flujo del vértice u solo puede salir una unidad de flujo que sería el flujo perteneciente a la arista $< u, v >$, pues solo entra una arista a u ($< s, u >$) con capacidad 1.

Análogamente se demuestra que al vértice v solo puede entrar una arista con flujo 1 y esa arista es precisamente $< u, v >$. La demostración se deja de estudio independiente.

Luego de esta forma demostramos que cada arista $< u, v >$ es la única en M que contiene a los vértices u y v, pues si existiese otra, significaría que o de u sale más de una unidad de flujo o que a v entra más de una unidad de flujo lo cual no puede suceder por lo demostrado anteriormente. Al quedar demostrado que cada vértice $v \in V$ se encuentra en a lo sumo una de las aristas pertenecientes a M, por lo tanto M es un emparejamiento.

Ahora demostremos que $|M| = |f|$. Para esto sea P el conjunto de caminos tales que $P = \{s- > u- > v- > t \mid u \in X,\ v \in Y \text{ y } < u, v >\in M\}$, primero demostremos que cada arista $< u, v >\in M$ se encuentra en solo un camino de P. Supongamos que existe una arista $< u, v >$ que está en más de un camino en P eso significaría que hay dos aristas desde s hacia u y dos desde v a hacia t lo cual no puede suceder dado como se construyó G'. Luego a cada arista $< u, v >\in M$ le corresponde uno y solo un camino en P lo que implica $|P| = |M|$. Ahora, cada camino en P lleva una unidad de flujo desde s hacia t pues si $f(< u, v >) = 1$, entonces $f(< s, u >) = 1$ y $f(< v, t >) = 1$ por conservación del flujo. Luego cada camino en P traslada una unidad de flujo desde s hacia t, por lo que $|f| \geq |P| = |M|$, ahora demostremos que son exactamente iguales. Supongamos que $|f| > |P|$ eso significa que existe otro camino $p' = s- > a- > b- > t$ que no pertenece a P donde todas las aristas en p' poseen una unidad de flujo. Pero la arista $< a, b >$ en p' cumple que $a \in X$ y $b \in Y$, luego como $f(< a, b >) = 1$ entonces $< a, b >\in M$ lo que implica que $p' \in P$, luego como llegamos a una contradicción entonces $|f| = |P| = |M|$.

Pseudocódigo

```
1: G′ ← Build_Network_From(G)
2: |f*| ← Ford-Fulkerson(G′)
3: return |f*|
```

Como se puede observar la complejidad temporal depende de los métodos *Build_Network_From(G)* y del algoritmo de *Ford-Fulkerson*. Construir la red de flujo es básicamente crear un grafo donde $V' = V \cup \{s, t\}$ lo cual es $O(|V| + 2)$ y $E' = E \cup \{e|e =< s, u >, u \in X\} \cup \{e|e =< v, t >, v \in Y\}$ lo cual es $O(|E| + |V|)$. Luego el método *Build_Network_From(G)* es $O(|V| + |E|)$. Y el algoritmo de *Ford-Fulkerson* tal y como vimos en la conferencia sería $O(|E||f^*|)$ que en este caso sería $O(|E||M|)$, donde M es un emparejamiento máximo en G.

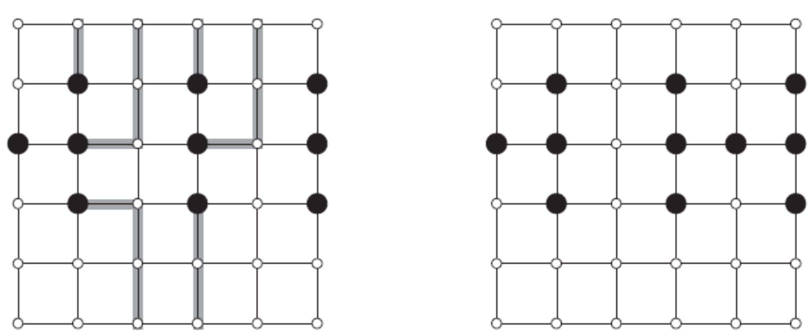
Lista de Estudios Independientes:

(a) Pseudocódigo del algoritmo para extraer el emparejamiento máximo M.

(b) Demostrar nuevamente la correctitud pero esta vez utilizando el *Teorema de Max Flow/ Min Cut*.

(c) Terminar la demostraciones análogas que se dejaron pendientes.

9. **Escape Problem:** Una matriz de n x n se puede interpretar como un grafo no dirigido. Denotamos por (i,j) al vértice ubicado en la i-ésima fila y j-ésima columna. Todos los vértices en la matriz tienen exactamente 4 vecinos, excepto los de los bordes. Luego, dado $m \leq n^2$ puntos de inicio: $(x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), ..., (x_{i_m}, y_{j_m})$, en la matriz, el **Escape Problem** consiste en determinar cuando hay o no m caminos disjuntos respecto a vértices cada uno comenzando de un punto de inicio distinto y terminando cada uno en un punto distinto del borde de la matriz. Diseñe un algoritmo que dada una matriz de n x n de entrada y m puntos en la matriz resuelva el **Escape Problem**. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(|E| * m)$.



Respuesta

En este problema siguiendo ya las ideas que hemos visto anteriormente queremos m caminos disjuntos en vértices que van desde un punto señalado (x_i, y_i) con $1 \leq i \leq m$ hacia un punto del borde de la matriz de n x n. Si lo modelaramos con flujo, qué serían nuestras unidades de flujo? Pues en este caso una unidad de flujo representaría un camino encontrado para un punto (x_i, y_i). Como tenemos m puntos podemos verlo como tener m fuentes y como tenemos además todos los puntos de los bordes para terminar un camino tendríamos entonces los $4n$ puntos de los bordes como receptores. Tenemos entonces un problema de múltiples fuentes y receptores que podemos resolver como hemos visto anteriormente con la trasnformación estudiada en el ejercicio 2, por lo que pondríamos una superfuente s hacia los m puntos y un superreceptor t que le entran aristas de los $4n$ puntos de los bordes.

Como queremos que los caminos sean disjuntos en vétices podemos utilizar la misma idea que en el ejercicio 6, donde cada vértice tendrá una capacidad de 1 y realizaremos la transformación vista en el ejercicio 3. También como mismo vimos en el ejercicio 6, tendríamos a todas las aristas con capacidad infinito dado que no existe ninguna restricción sobre las aristas.

Finalmente el otro problema que presentamos es precisamente que la matriz es unidireccional, por lo que en la red de flujo que construyamos para toda pareja de vértices que representan puntos en la matriz y son adyacentes u, v existirán las aristas $< u, v >$ y $< v, u >$. Para lidiar con este problema de aristas antiparalelas haremos una trasnformación como la vista en el ejericio 4. Particularmente usaremos la solución de múltiples aristas y no la de añadir un nuevo vértice.

Ahora realicemos la construcción formal de la red de flujo G' a partir de la matriz y demostremos que existen m caminos disjuntos en vértices de un punto (x_i, y_i) hacia un punto del borde si y solo si el valor del flujo máximo en dicha red de flujo es m.

Construcción: Sea $G' = \langle V', E' \rangle$ una red de flujo y M el conjunto de puntos en la matriz de n x n y sea S el conjunto de los puntos $(x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), ..., (x_{i_m}, y_{j_m})$ seleccionados en M y sea $B =\{(x_i, y_j) \mid i = n$ o $j = n$, $(x_i, y_j) \in M\}$ el conjunto de los puntos del borde de la matriz. Sea $V_c = \{v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n$, $(x_i, y_j) \in M\}$, $V_m = \{v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n$, $(x_i, y_j) \in S\}$, $V_b = \{v_{ij} \mid i = n$ o $j = n$, $(x_i, y_j) \in B\}$, c_v una función de capacidad en vértices tal que:

$$\mathrm{c}_v(u) = \begin{cases} 1 & u \in V_c \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces inicialmente sea $V' = V_c \cup \{s, t\}$. Sean $E_s =\{< s, v_{ij} > \mid 1 \leq i, j \leq n$, $v_{ij} \in V_m\}$, sea $E_t =\{< v_{ij}, t > \mid i = n$ o $j = n$, $v_{ij} \in V_b\}$, sea $E =\{< v_{ij}, v_{kl} > \mid 1 \leq i, j \leq n; 1 \leq k, l \leq n; v_{ij}, v_{kl} \in V_c;$ $|i - k| + |j - l| = 1\}$, luego inicialmente sea $E' = E_s \cup E_t \cup E$. Sea c la función de capacidad en aristas la cual para toda $e \in E'$, $c(e) = \infty$.

Finalmente apliquemos la trasnformación de la función $VertCap$ vista el ejercicio 3 para obtener la red de flujo final:

$$G'' = \langle V'', E'', c' \rangle = VertCap(V', E', c, c_v) \tag{25}$$

Para la demostración de la correctiud demostraremos la siguiente proposición:

Proposición: Sea una matriz de n x n, donde se tienen m puntos seleccionados $(x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), ..., (x_{i_m}, y_{j_m})$, existen m caminos disjuntos en vértices, donde cada camino inicia en un punto seleccionado y termina en un punto del borde de la matriz, si y solo si en la red de flujo $G'' = \langle V'', E'', c' \rangle$ construida a partir de la matriz el valor del flujo máximo $|f^*| = m$.

Debido a la similaridad de esta demostración con las hechas anteriormente en ejercicios 5 y 6, se deja de estudio independiente. Se pueden auxiliar en las demostraciones anteriores.

La razón fundamental de poner este problema además del hecho de tener las tres transformaciones vistas en ejercicios 2,3 y 4 es para dos observaciones.

La primera es que como pueden ver particularmente seleccionamos la solución a las aristas antiparalelas de múltiples aristas y no añadimos vértices, la razón de esta selección es que si este fuera un problema de la vida real, es altamente probable que tarde o temprano les pidiesen las rutas de escape, para las cuales montones de vértices extras en el camino sería un verdadero estorbo.

La segunda sugerencia es que a veces sabemos que el problema es de flujo y queremos resolverlo con flujo pero como habrán podido apreciar las demostraciones formales son bastante largas debido a todo lo que hay que atender durante ellas y explicar, por lo que una idea para ahorrar mucho tiempo en estos casos es demostrar una equivalencia de vuestro problema inicial con otro problema que ya resolvieron con flujo en clase práctica y cuya demostración ya pueden asumir. La idea sería que tomen y construyan un grafo G dirigido, donde los vértices son las casillas de la matriz y las aristas son la relación de adyacente entre las casillas de la matriz y además añadan un vértice s con aristas dirigidas hacia cada punto seleccionado y un vértice t con aristas de cada punto del borde hacia él y demuestren, lo cual es más fácil, que en la matriz existen m caminos disjuntos en vértices, donde cada camino inicia en un punto seleccionado y termina en un punto del borde de la matriz, si y solo si en el grafo G la cantidad máxima de caminos disjuntos en vértices desde s hacia t es m, lo cual es más fácil de demostrar y como ya tienen la equivalencia por el ejercicio 6 entonces si la red de flujo la construyen a partir de G en vez de a partir de la matriz, entonces pueden hacer algo como esto: Sea A la proposición de que existen caminos disjuntos en vértices, donde cada camino inicia en un punto seleccionado y termina en un punto del borde de la matriz; sea B la proposición de que en el grafo G la cardinalidad del conjunto máximo de caminos disjuntos desde s hacia t es m y sea C la proposición de que el valor del flujo máximo en G'' construida a partir de G es m, entonces tienen:

$$A \iff B \iff C \tag{26}$$

Y por ejercicio 6 ya tienen $B \iff C$ demostrado, solo les queda demostrar $A \iff B$. Incluso pueden dejarlo en $A \iff B$ y su pseudocódigo reducirlo a un algoritmo que construye G a partir de la matriz y en G calcula la cardinalidad del conjunto máximo de caminos disjuntos respecto a vértices desde s hacia t.

10. Diseñe un algoritmo que dado un grafo no dirigido $G = \langle V, E \rangle$ y los vértices x, y, z, donde todos pertenecen a V, encuentre un camino disjunto en vértices que empiece en x pase por y y termine en z. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(|V| + |E|)$.

Respuesta

Este es un problema que después de un tiempo una posible idea que puede ocurrirse es hallar un camino desde y hacia x y un camino desde y hacia z lo cual conforma el camino que se busca. Sin embargo con qué algoritmo hallaríamos dichos caminos, en un principio no parece un problema de flujo y puede ocurrirse la idea de hallar dichos caminos con algoritmos como BFS o DFS. Cuál es el problema con esa solución? Pues que ni BFS, ni DFS tienen en cuenta la restricción de que el camino tiene que ser disjunto en vértices y al utilizar BFS o DFS es posible que el camino que se encontró desde y hacia x utilice un vértice w que se encuentra también en el camino que BFS o DFS hallaron desde y hacia z.

Sin embargo el problema de vértices disjuntos lo hemos tratado más de una vez en esta clase práctica haciendo uso de la modelación con flujo, pues a través de las capacidades es posible restringir que vértices se utilizan para cada camino. Luego la idea sería construir una red de flujo a partir del grafo G donde los vértices poseean capacidad 1 y las aristas capacidad infinita y luego considerar al vértice y como fuente y hallar un camino aumentativo desde y hacia x como si x fuera el receptor, y luego hacer una segunda iteración hallando un camino aumentativo desde y hacia z como si z fuera el receptor esta vez.

Finalmente se demostraría que existe un camino disjunto en vértices que sale de x pasa por y y termina en z si y solo si existe un camino aumentativo en la red de flujo construida desde y hacia x y un camino aumentativo desde y hacia z respectivamente.

Debido a que la demostración utiliza la teoría que ya hemos visto en abundancia en el resto de las demostraciones, en particular el trato de vértices con capacidad, caminos aumentativos, caminos disjuntos en vértices y aristas en ambos sentidos, entonces la demostración así como construcción formal, pseudocódigo y complejidad temporal se deja de estudio independiente.

En cuanto a la complejidad temporal noten que no se está hallando el flujo máximo, solo se hayan dos caminos aumentativos bajo ciertas restricciones lo que en $Ford - Fulkerson$ se traduce a dos DFS desde y teniendo en cuenta las unidades de flujo y capacidades de las aristas en la red de flujo que se construye.