Pumping Lemma

(O Lema del Bombeo para los amigos)

> Sea L un lenguaje regular. Existe entonces una constante n (que depende de L) tal que para toda cadena w perteneciente a L con $|w| \geq n$, podemos descomponer w en tres cadenas, $w = xyz$, tales que:
>
> 1. $|y| > \emptyset$.
> 2. $|xy| \leq n$.
> 3. Para todo $k \geq 0$, la cadena xy^kz también pertenece a L.

Es decir, siempre podemos hallar una cadena no vacía y no demasiado alejada del principio de w que pueda *“bombearse”*; es decir, si se repite y cualquier número de veces, o se borra (el caso en que $k = 0$), la cadena resultante también pertenece al lenguaje L.

Ejercicio 1

> Determine si el lenguaje $\{a^n b^m | n = 2m\}$ es regular

Supongamos que el lenguaje es regular, entonces $\exists n \mid \forall w \in L$ se cumple que $w = xyz$ con $|xy| \leq n$ y $|y| > 0$.

Tomemos la cadena $w = a^{2n} b^n \in L$, luego por el **Lema del Bombeo** se cumple que $w = xyz$ donde $|xy| \leq n \implies xy \subseteq a^n$, por lo que y está compuesto solo por a y no es vacío, luego, siendo $|y| = m$, como $xz \in L$ por el **Lema del Bombeo** resulta que la cadena $a^{2n-m} b^n \in L$ con $m > 0 \implies$ esta cadena no pertence al lenguaje, lo cual es una contradicción, por tanto el lenguaje L no es regular.

> 2. $\{x \in \{a, b, c\}^* \mid x$ es un palíndromo, $x = rev(x)\}$

Supongamos que el lenguaje es regular, entonces por el **Lema del Bombeo** $\exists n \mid \forall w \in L$ se cumple que $w = xyz$ con $|xy| \leq n$ y $|y| > 0$.

Tomemos la cadena $w = 0^n 110^n$, de la cual, dado que $|xy| \leq n \implies xy \subseteq 0^n$, por lo que, según el lema la cadena $xy^2z \in L$, lo cual genera una contradicción porque, dado que $|y| > 0 \implies xy^2z = 0^p110^n$ donde $p > n \implies$ no pertenece a L, contradición, por lo que L no es regular.

Ejercicio 10

> * Determine si el lenguaje $\{0^n | n \text{ es un cubo perfecto } \}$ es regular.

Supongamos que el lenguaje es regular, entonces por el **Lema del Bombeo** $\exists n | \forall w \in L$ se cumple que $w = xyz$ con $|xy| \leq n$ y $|y| > \emptyset$.

Sea la cadena $w = 0^{(n+1)^3} = 0^{n^3}0^{3n^2}0^{3n}0 = 0^n0^{n^3}0^{3n^2}0^{2n}0$. Como $|xy| \leq n \implies xy \subseteq 0^n$.

Según el lema, la cadena $w' = xy^kz \in L \ \ \forall k \in Z$, por lo que, haciendo $k = 0$ se cumple que $xz \in L$, y suponiendo que $x = 0^q$ donde $q < n$ (porque $|y| > 0$) $\implies 0^{n^3}0^{3n^2}0^{2n}0^q0 \in L$, cumpliéndose que $n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n + q + 1 < (n+1)^3 \implies n^3 + 3n^2 + 2n + q + 1$ no es un cubo perfecto, por lo que la cadena $w' \in L$, lo cual es una contradicción, y por tanto L no es regular

Ejercicio 17

> ** Determine si el lenguaje del conjunto de cadenas de la forma 0^i1^j tal que $mcd(i,j) = 1$ es regular.

Supongamos que el lenguaje es regular, entonces por el **Lema del Bombeo** $\exists n \mid \forall w \in L$ se cumple que $w = xyz$ con $|xy| \leq n$ y $|y| > 0$.

Tomemos la cadena $w = 0^n1^p$ con p el mayor primo más cercano a n. Si $w = xyz$ entonces siendo $n = m + r$ y $q > 0$ se cumple que:

- $x = 0^{m-q}$
- $y = 0^q$
- $z = 0^r1^p$

Luego, si existe i tal que al bombear i veces la subcadena y se cumple que $w = 0^{n+q(i-1)}1^p$ no pertenece al lenguaje entonces el lenguaje L no es regular, por lo que debe cumplirse que $n + q(i-1) \equiv 0 \ mod(p) \implies q(i-1) \equiv -n \ mod(p)$.

Recordemos que una ecuación de congruencia lineal $ax \equiv b \ mod(n)$ tiene solución $\iff \ mcd(a, n)|b$. Como $n < p$ y $q < n \implies q < p \implies mcd(q, p) = 1$ por lo que existe i tal que se cumple que $n + q(i - 1) \equiv 0 \ mod(p)$ por lo que la cadena no pertenece al lenguaje $\implies L$ no es regular.