Conferencia
Estructuras de Datos y Algoritmos II

Teoría de Grafos

© Departamento de Programación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

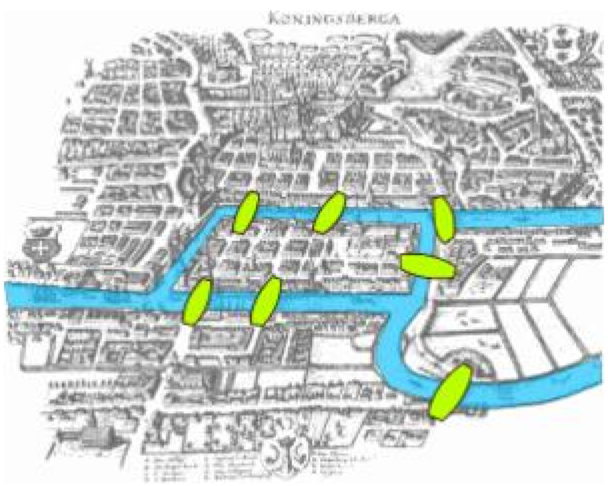
Introducción a la Teoría de Grafos
Grafos no dirigidos

Bibliografía: "Introduction to Algorithms". Third Edition.
The MIT Press. Massachusetts Institute of Technology.
Cambridge, Massachusetts 02142.
http://mitpress.mit.edu
Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest,
Clifford Stein

" Data Structures and Algorithms "
Aho, Hopcroft and Ullman

Historia – El problema de los 7 puentes

La resolución del **Problema de los Siete Puentes de *Königsberg*** por **Leonhard Euler** en ***1736*** dio origen a la *Teoría de Grafos*



Königsberg, es el nombre que antiguamente recibía la ciudad rusa de *Kaliningrado*, la cual, durante el siglo XVIII formaba parte de *Prusia Oriental*

La ciudad es atravesada por el río *Pregolya*. Este río se bifurca dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas por *7 puentes*. El **problema** fue formulado en el siglo XVIII y consistía en:

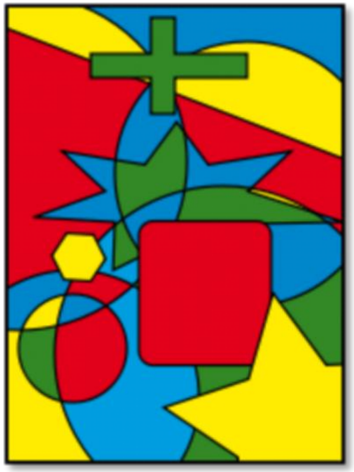
PROBLEMA: Encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de partida

Historia – El problema de los 4 colores

En ***1845*** ***Gustav Kirchoff*** publicó sus **leyes de los circuitos** para calcular el **voltaje** y la **corriente** en los circuitos eléctricos

En ***1852*** ***Francis Guthrie*** planteó el **Problema de los Cuatro Colores:**

Será posible, utilizando solo cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de forma tal que dos países vecinos nunca tengan el mismo color ?



Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por ***Kenneth Appel*** y ***Wolfgang Haken***, puede ser considerado como el nacimiento de la **Teoría de Grafos**. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales a dicha Teoría

Grafos no dirigidos – vértices y aristas

Definición de **Grafo**:

$$G=(V,A)$$

V: Conjunto ***finito*** de ***vértices***
A: Conjunto de ***aristas***

Cada ***arista*** de A es un ***par no ordenado*** de vértices, $v, w \in V$

$$\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$$

Grafos no dirigidos – vértices y aristas

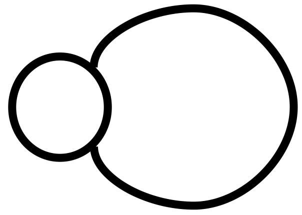
Los Grafos expresan **relaciones** entre *objetos*

- Los **objetos** están representados por los **vértices**
- Dos **objetos** están relacionados entre si, si están conectados por una **arista**

La **relación** existente entre un conjunto de **objetos**, representada por un grafo, debe cumplir, al menos:

- **Simétrica** → (pues el grafo es **no dirigido**)

- **Irreflexiva** → (los grafos que veremos **no poseen lazos**)

v 

Grafos no dirigidos – vértices adyacentes

Dos vértices $v,w \in V$ son **adyacentes** $\Leftrightarrow$ $<v,w> \in A$

Se dice que la **arista** $<v,w>$ es **incidente** sobre los vértices v, w

Densidad de los Grafos no dirigidos

Un grafo con $|V|=n$ tiene, a lo sumo, $n(n-1)/2$ aristas

$$\Rightarrow$$

$n(n-1)/2$ es $O(n^2)$ → $|A|$ es $O(n^2)$

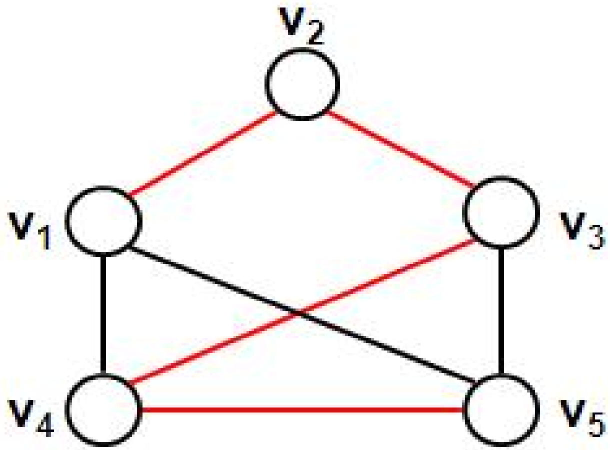
- Grafo **denso**: $|A| \to n(n-1)/2$, o sea, es $O(n^2)$
- Grafo **poco denso**: $|A|$ es $O(n \log n)$

Grafos no dirigidos – caminos

camino*:* secuencia de vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que $<v_i, v_{i+1}> \in A$; $1 \leq i < n$

El **camino** $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, **conecta** a v_1 con v_n

u,v $\in$V están **conectados** $\Leftrightarrow \exists$ un **camino** que los une

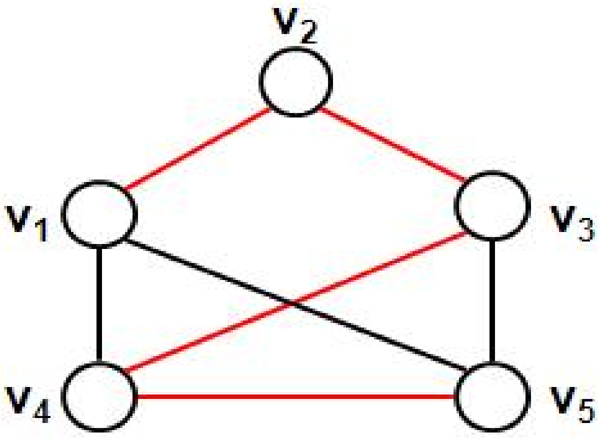


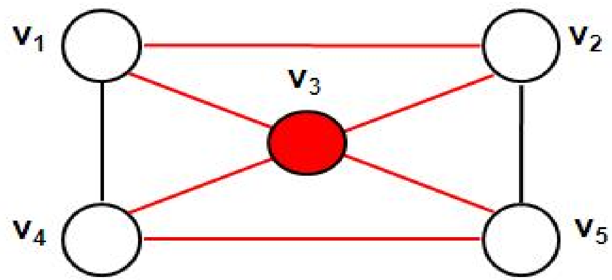
camino: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

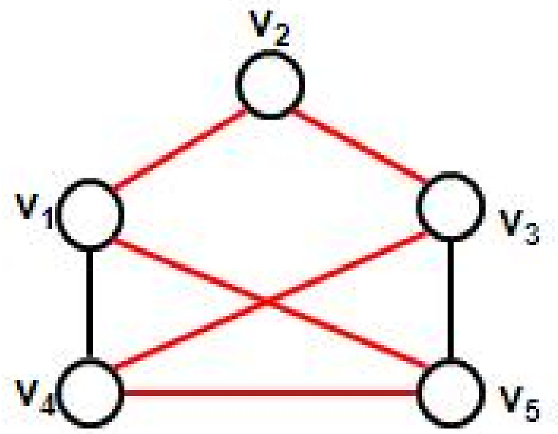
Grafos no dirigidos – caminos simples

camino simple: es aquel en que todos sus vértices son distintos, excepto, quizás, v_1 y v_n

Idea intuitiva: un **camino** que no cruza sobre si mismo







camino simple:

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

camino no simple:

$\mathbf{v_1}, v_2, \mathbf{v_3}, v_4, v_5, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1}$

camino simple:

$\mathbf{v_1}, v_2, v_3, v_4, v_5, \mathbf{v_1}$