

偏微分方程第三次作业

班级:22 数学 1 姓名: 陈柏均 学号:202225110102

题 1. 求解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

(提示: 齐次化原理 + 达朗贝尔公式)

解. 步骤 1. 齐次方程求解

齐次波动方程(1)的初值问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

应用达朗贝尔公式, 解为:

$$u_h(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin s \, ds$$

计算积分:

$$\int_{x-t}^{x+t} \sin s \, ds = -\cos s \Big|_{x-t}^{x+t} = -\cos(x+t) + \cos(x-t)$$

利用三角恒等式展开:

$$\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t, \quad \cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$$

代入后得到:

$$u_h(x, t) = \frac{1}{2} [(\cos x \cos t + \sin x \sin t) - (\cos x \cos t - \sin x \sin t)] = \sin x \sin t$$

步骤 2. 非齐次方程求解

非齐次方程(2)的初值问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (2)$$

应用齐次化原理, 非齐次解为:

$$u_p(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau \sin s \, ds \, d\tau$$

计算内部积分:

$$\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau \sin s \, ds = \tau [-\cos(x+t-\tau) + \cos(x-t+\tau)]$$

利用三角恒等式：

$$\cos(x - t + \tau) - \cos(x + t - \tau) = 2 \sin x \sin(t - \tau)$$

代入后得到：

$$u_p(x, t) = \sin x \int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau$$

变量替换 $u = t - \tau$ ，计算积分：

$$\int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau = t - \sin t$$

因此，非齐次解为：

$$u_p(x, t) = \sin x(t - \sin t)$$

步骤 3. 总解求解

将齐次解和非齐次解相加，得到总解：

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t) = \sin x \sin t + \sin x(t - \sin t) = t \sin x$$

题 2. 解下列半直线上的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 2x, & u_t|_{t=0} = x^2, \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

解. 步骤 1. 奇延拓处理

定义延拓函数以处理半无界边界条件:

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & x \geq 0 \\ -u(-x, t) & x < 0 \end{cases}, \quad \bar{h}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -(-x)^2 = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

边界条件满足:

$$\bar{g}(0) = 0, \quad \bar{h}(0) = 0$$

步骤 2. 达朗贝尔公式应用

扩展后的问题解为:

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\bar{g}(x + at) + \bar{g}(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{h}(y) dy$$

其中 $\bar{g}(x) = 2x$ 。

步骤 3. 分区域求解

情形一: $x \geq at$ (远离边界)

积分区间完全在正半轴:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \frac{1}{2} [2(x + at) + 2(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} y^2 dy \\ &= 2x + \frac{1}{6a} [(x + at)^3 - (x - at)^3] \\ &= 2x + \frac{t}{3} [3x^2 + a^2 t^2] \\ &= 2x + tx^2 + \frac{1}{3} a^2 t^3 \end{aligned}$$

情形二: $0 < x < at$ (近边界)

积分区间跨越原点, 需考虑奇延拓:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \frac{1}{2} [2(x + at) - 2(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} y^2 dy \\ &= 2x + \frac{1}{6a} [(x + at)^3 - (at - x)^3] \\ &= 2x + \frac{x}{3a} [x^2 + 3a^2 t^2] \\ &= \frac{1}{3a} x^3 + (at^2 + 2)x \end{aligned}$$

步骤 4. 综合解

最终解为分段函数：

$$u(x, t) = \begin{cases} 2x + tx^2 + \frac{1}{3}a^2t^3 & x \geq at \\ \frac{1}{3a}x^3 + (at^2 + 2)x & 0 < x < at \end{cases}$$

题 3. 求下列特征值问题的特征值和特征函数

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

解. 步骤 1. 当 $\lambda < 0$ 时

设 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$), 方程通解为:

$$X(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)$$

代入边界条件 $X(0) = 0$:

$$C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

导数表达式:

$$X'(x) = \mu C_2 \cosh(\mu x)$$

代入 $X'(l) = 0$:

$$\mu C_2 \cosh(\mu l) = 0 \implies C_2 = 0$$

故仅有零解, 排除负特征值。

步骤 2. 当 $\lambda = 0$ 时

方程简化为:

$$X''(x) = 0 \implies X(x) = C_1 x + C_2$$

代入边界条件:

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X'(l) = C_1 = 0$$

同样仅有零解, 排除零特征值。

步骤 3. 当 $\lambda > 0$ 时

设 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$), 方程通解为:

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

代入 $X(0) = 0$:

$$A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \implies A = 0$$

导数表达式:

$$X'(x) = \mu B \cos(\mu x)$$

代入 $X'(l) = 0$:

$$\mu B \cos(\mu l) = 0$$

要求非零解, 需满足:

$$\cos(\mu l) = 0 \implies \mu l = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

得特征值：

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2$$

对应特征函数：

$$X_n(x) = B_n \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right)$$

题 4. 求弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

满足以下定解条件的解

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{2l}, & u_t|_{t=0} = \sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

解. 方法 1. 分离变量法

步骤 1. 分离变量

设解为 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程得:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

分离为两个常微分方程:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

步骤 2. 求解空间方程

边界条件 $X(0) = X'(l) = 0$, 分三种情况讨论:

情形 1. $\lambda < 0$

设 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$), 通解为:

$$X(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)$$

代入边界条件 $X(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$ 。再代入 $X'(l) = 0$:

$$\mu C_2 \cosh(\mu l) = 0 \implies C_2 = 0$$

无非零解, 排除负特征值。

情形 2. $\lambda = 0$

通解为:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

代入边界条件得 $C_1 = C_2 = 0$, 排除零特征值。

情形 3. $\lambda > 0$

设 $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$), 通解为:

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

代入 $X(0) = 0$ 得 $A = 0$ 。再代入 $X'(l) = 0$:

$$\mu B \cos(\mu l) = 0 \implies \cos(\mu l) = 0$$

解得特征值:

$$\mu l = \frac{(2n+1)\pi}{2} \implies \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

对应特征函数:

$$X_n(x) = B_n \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right)$$

步骤 3. 求解时间方程

对应每个 λ_n , 时间方程为:

$$T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = 0$$

通解为:

$$T_n(t) = C_n \cos \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} t \right) + D_n \sin \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} t \right)$$

步骤 4. 合成通解

由叠加原理可得 (B_n 被吸收了):

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right) \left[C_n \cos \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} t \right) + D_n \sin \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} t \right) \right]$$

步骤 5. 确定系数得解

代入初始条件 $u(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{2l}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right) = \sin \frac{3\pi x}{2l}$$

比较系数得:

$$C_1 = 1, \quad C_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

代入初始条件 $u_t(x, 0) = \sin \frac{5\pi x}{2l}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right) = \sin \frac{5\pi x}{2l}$$

比较系数得:

$$D_2 = \frac{2l}{5\pi a}, \quad D_n = 0 \quad (n \neq 2)$$

$$u(x, t) = \sin \frac{3\pi x}{2l} \cos \left(\frac{3\pi a}{2l} t \right) + \frac{2l}{5\pi a} \sin \frac{5\pi x}{2l} \sin \left(\frac{5\pi a}{2l} t \right)$$

方法 2. 反射法达朗贝尔公式做延拓

考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

有时可以用达朗贝尔公式求解初边值问题。又设 $f, g \in C^2$, 且满足相容条件:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, f'(L) = 0, \\ g(0) &= 0, g'(L) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

奇延拓 ($x=0$) + 偶延拓 ($x=L$), 周期 $4L$.

题目中的 f, g 延拓之后还是原函数。

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{3\pi}{2l}(x+at) \right) + \sin \left(\frac{3\pi}{2l}(x-at) \right) \right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin \left(\frac{5\pi}{2l}y \right) dy$$

计算第一项:

由于 $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$

$$\therefore \sin \left(\frac{3\pi}{2l}(x+at) \right) = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2l}x \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2l}at \right)$$

计算第二项:

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} \sin \left(\frac{5\pi}{2l}y \right) dy &= -\frac{2l}{5\pi} \cos \left(\frac{5\pi}{2l}y \right) \Big|_{x-at}^{x+at} \\ &= -\frac{2l}{5\pi} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{2l}(x+at) \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{2l}(x-at) \right) \right] \end{aligned}$$

由于 $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B$

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} \sin \left(\frac{5\pi}{2l}y \right) dy &= -\frac{2l}{5\pi} \cdot (-2) \sin \left(\frac{5\pi}{2l}x \right) \sin \left(\frac{5\pi}{2l}at \right) \\ &= \frac{4l}{5\pi} \sin \left(\frac{5\pi}{2l}x \right) \sin \left(\frac{5\pi}{2l}at \right) \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sin \left(\frac{3\pi x}{2l} \right) \cos \left(\frac{3\pi at}{2l} \right) + \frac{2l}{5\pi a} \sin \left(\frac{5\pi x}{2l} \right) \sin \left(\frac{5\pi at}{2l} \right)$$

题 5. 求解热传导方程

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

的 *Cauchy* 问题, 已知初始条件为

$$(1) \quad u|_{t=0} = \sin x;$$

$$(2) \quad u|_{t=0} = e^{-|x|};$$

$$(3) \quad u|_{t=0} = x^2 + 1;$$

$$(4) \quad u|_{t=0} = x + x^2.$$

解. 热传导方程的解由热核卷积给出:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

公式详细推导在我 *github* 上的偏微分笔记上有 *GitHub - Albert-Chen04/Partial-differential-equation*

下面是高斯型函数一些积分的计算

命题 1. 实数形式的高斯积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

证明.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(y-b)^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a((x-b)^2 + (y-b)^2)} dx dy \end{aligned}$$

由极坐标变量替换可得

$$(x-b)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x-b = r \cos \theta \\ y-b = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$dx dy = r d\theta dr$$

$$A^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} d(r^2) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{1}{a} e^{-ar^2} \Big|_0^{+\infty} \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a} d\theta = \frac{\pi}{a}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

推论 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dz = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$

证明.

$$\text{设 } \Phi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\frac{d\Phi}{da} = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{d}{da} \left(\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \right) = \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$$

□

推论 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} (z + bx)^2 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} + b^2 x^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明. 展开得

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-az^2} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} 2zbx e^{-az^2} dz + b^2 x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} + b^2 x^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

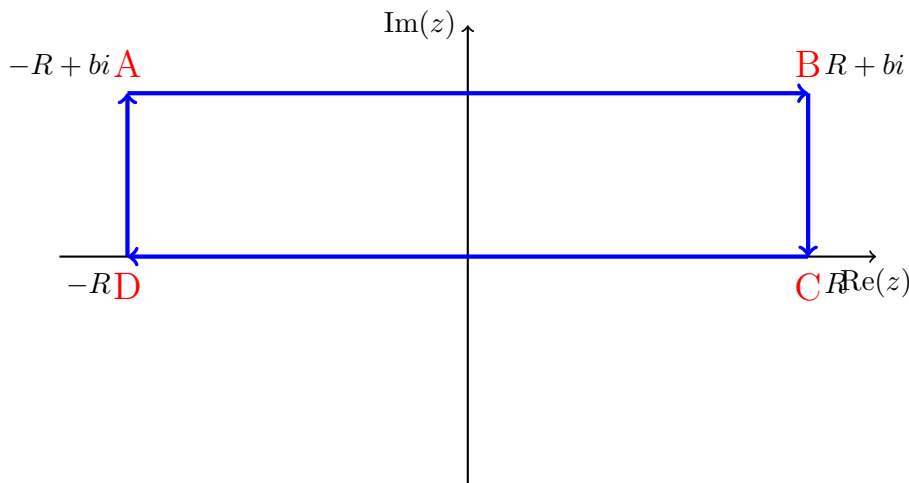
□

命题 2. 推广复数形式的高斯积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+bi)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}) \quad (5)$$

证明. 该积分等价于证明 $\int_{-\infty+bi}^{+\infty+bi} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ 。即 $\int_{AB} e^{-az^2} dz$, 我们通过围道积分来证明。

考虑复变函数 $f(z) = e^{-az^2}$, 它在整个复平面上解析 (为整函数)。我们选取如下所示的矩形闭合围道 C 进行积分, 该围道由四条路径组成: AB, BC, CD 和 DA 。



根据柯西积分定理, 函数在闭合围道上的积分为零:

$$\oint_C e^{-az^2} dz = \int_{AB} e^{-az^2} dz + \int_{BC} e^{-az^2} dz + \int_{CD} e^{-az^2} dz + \int_{DA} e^{-az^2} dz = 0 \quad (6)$$

我们分别计算 $R \rightarrow \infty$ 时各段路径的积分。

1. 路径 BC 与 DA : 在路径 BC 上, 参数化为 $z = R + iy$, $z(b) = R + ib$, $z(0) = R, dz = idy$, 其中 y 从 0 到 b 。

$$\begin{aligned} \left| \int_{BC} e^{-az^2} dz \right| &= \left| \int_{R+bi}^R e^{-a(R+iy)^2} idy \right| = \left| \int_b^0 e^{-a(R+iy)^2} idy \right| \leq \int_b^0 |e^{-a(R^2 - y^2 + 2iRy)}| dy \\ &= \int_b^0 e^{-aR^2} e^{ay^2} dy = e^{-aR^2} \int_b^0 e^{ay^2} dy \end{aligned}$$

由于 $\int_b^0 e^{ay^2} dy$ 是一个关于 b 的常数, 而 $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-aR^2} = 0$, 所以:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{BC} e^{-az^2} dz \right| = 0$$

同理可证, 路径 AD 的积分也为零。

2. 路径 AB : 在路径 AB 上, 参数化为 $z = x + bi$, $dz = dx$, 其中 x 从 R 变化到 $-R$ 。由柯西积分公式(6)可知

$$\int_{BA} e^{-az^2} dz = - \int_{CD} e^{-az^2} dz = \int_{DC} e^{-az^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

这证明了高斯积分的结果可以从实变量推广到复变量。

□

推论 3. 我们计算高斯函数 $f(x) = e^{-ax^2}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+iwx)} dx\end{aligned}$$

为了计算这个积分，我们对指数部分进行配方：

$$\begin{aligned}ax^2 + iwx &= a \left(x^2 + \frac{iw}{a}x \right) \\ &= a \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{iw}{2a} + \left(\frac{iw}{2a} \right)^2 - \left(\frac{iw}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2 - \frac{i^2 w^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2 + a \left(\frac{w^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2 + \frac{w^2}{4a}\end{aligned}$$

将配方后的结果代回积分中：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[a \left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2 + \frac{w^2}{4a} \right]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2} e^{-\frac{w^2}{4a}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2} dx\end{aligned}$$

根据命题(2)：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left(x + \frac{iw}{2a} \right)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

因此，最终结果为：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}\end{aligned}$$

推论 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \cdot e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ax^2} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \cdot e^{-ax^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \cdot e^{-ax^2} dx$$

第二项为奇函数，积分为 0，所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \cdot e^{-ax^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx} dx$$

配方

$$\begin{aligned} -ax^2 + ikx &= -a \left(x^2 - \frac{ik}{a}x \right) \\ &= -a \left[x^2 - \frac{ik}{a}x + \left(\frac{ik}{2a} \right)^2 - \left(\frac{ik}{2a} \right)^2 \right] \\ &= -a \left(x - \frac{ik}{2a} \right)^2 - \frac{k^2}{4a} \end{aligned}$$

所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

命题 3. $\int_c^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx$ 积分没有原函数

方法 1. 不成熟的证明方法望指正

证明.

$$A^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-a(y-b)^2} dy \right)$$

$$\neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} \cdot r dr d\theta$$

在这里不能像上面那样做极坐标变量代换，因为圆心为 (b, b) ，而坐标点不是全平面，当 r 大到一定程度，角度再也不能转一圈，角度会随着 r 的增大而变小，无法用二重积分的定义表示。

□

(1) 初始条件 $u(x, 0) = \sin x$

解.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

$$\text{设 } z = y - x \quad \therefore \quad y = z + x \quad dz = dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(z + x) \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\sin z \cdot \cos x + \cos z \cdot \sin x] \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz$$

$$= \cos x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz + \sin x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz$$

第一项为奇函数, 积分为 0

$$= \sin x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz$$

由推论(4)可得,

$$\therefore u(x, t) = \sin x \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{4\pi t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} = e^{-t} \cdot \sin x$$

(2) 初始条件 $u(x, 0) = e^{-|x|}$

解.

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \int_{-\infty}^0 e^y \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

由命题(3)可知, 该方程没有原函数。

(3) 初始条件 $u(x, 0) = x^2 + 1$

解.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y + 1) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

第一项：设 $z = y - x$ $y = z + x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (z+x)^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz$$

由推论(2)可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (z+x)^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4t}\right)^{-\frac{3}{2}} + x^2 \cdot \sqrt{4\pi t}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = 2t + x^2$$

第二项，由命题(1)可得：

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = 1$$

$$\therefore u(x, t) = 2t + x^2 + 1$$

(4) 初始条件 $u(x, 0) = x + x^2$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (y + y^2) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

第一项：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

设 $z = y - x$, $y = z + x$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} (z+x) \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz + x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

$$= x \cdot \sqrt{4\pi t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} = x$$

第二项，第三小题算过

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = 2t + x^2$$

$$\therefore u(x, t) = 2t + x^2 + x$$