偏微分方程第一次作业

班级:22 数学 1　姓名: 陈柏均　学号:202225110102

问题 1. 指出下列方程的阶并判断它是线性的，还是非线性的。如果是线性的，说明它是齐次的，还是非齐次的：

(1) $u_t - u_{xx} + xu = 0$;

(2) $u_x^2 + uu_y = 0$;

(3) $u_x + e^y u_y = 0$;

(4) $u_x(1+u_y^2)^{-\frac{1}{2}} + u_y(1+u_x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$;

(5) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \log u = 0$.

解. *(1)* **二阶线性齐次方程**。方程中 u 及其各阶偏导数都是一次的，且没有常数项。

(2) **一阶非线性方程**。出现了 u_x 的平方项 u_x^2 和 u 与其导数 u_y 的乘积项 uu_y。

(3) **一阶线性齐次方程**。方程中 u 及其偏导数都是一次的，系数 e^y 仅依赖于自变量。

(4) **一阶非线性方程**。方程中含有 u_y^2 和 u_x^2 的项，且它们出现在分母的根号内，显然不是线性的。

(5) **三阶非线性方程**。出现了非线性项 $\log u$。

问题 2. 有一柔软的均匀细线，在阻尼介质中作微小横振动，单位长度弦受的阻力 $F = -Ru_t$。试推导其振动方程。

解. 设弦的线密度为 ρ，张力为 T。考虑弦上一段微元 $[x, x+\Delta x]$。根据牛顿第二定律，微元在垂直方向上的运动方程为：

$$\rho\Delta x \cdot u_{tt}(x,t) = \sum F_y$$

微元受到的力有：两端的张力在 y 方向的分量，以及介质阻力。

- 在 $x+\Delta x$ 处的张力分量为 $T\sin\theta_2 \approx T\tan\theta_2 = Tu_x(x+\Delta x, t)$。
- 在 x 处的张力分量为 $-T\sin\theta_1 \approx -T\tan\theta_1 = -Tu_x(x,t)$。
- 介质阻力为 $F\Delta x = -Ru_t\Delta x$。

因此，合力为：

$$\sum F_y = Tu_x(x+\Delta x, t) - Tu_x(x,t) - Ru_t\Delta x$$

代入牛顿第二定律：

$$\rho\Delta x \cdot u_{tt} = T(u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) - Ru_t\Delta x$$

两边同除以 Δx，并令 $\Delta x \to 0$，得到：

$$\rho u_{tt} = T\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} - Ru_t$$

$$\rho u_{tt} = Tu_{xx} - Ru_t$$

整理后，令 $a^2 = T/\rho$，得到有阻尼的波动方程（电报方程）：

$$u_{tt} - a^2u_{xx} + \frac{R}{\rho}u_t = 0$$

问题 3. 设三维热传导方程具有球对称形式 $u(x, y, z, t) = u(r, t)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 的解，试验证

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2u_r}{r} \right).$$

解. 首先，计算 r 对各变量的一阶和二阶偏导数。由 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 可得：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

同理，$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$。

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

利用链式法则，计算 $u(r)$ 的一阶和二阶偏导数：

$$u_x = u_r \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r \frac{\partial r}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = u_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

同理可得 u_{yy} 和 u_{zz} 的表达式。

将三者相加，得到拉普拉斯算子 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$：

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_{rr}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right] + u_r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \\
&= u_{rr}\left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right] + u_r\left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\right) \\
&= u_{rr}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3}\right) \\
&= u_{rr}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{3r^2 - r^2}{r^3}\right) \\
&= u_{rr} + u_r\left(\frac{2r^2}{r^3}\right) \\
&= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r
\end{aligned}$$

球对称解意味着解 u 只与到原点的距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 有关，即 $u = u(r)$。在球坐标系下，拉普拉斯算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 作用于球对称函数 $u(r)$ 的形式为：

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$$

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right)$$

证毕。

问题 4. 考虑 *Poisson* 方程的 *Neumann* 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, & (x,y,z) \in \Gamma. \end{cases}$$

(1) 问上述边值问题的解是否唯一？

(2) 由散度定理证明上述边值问题有解的必要条件是 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$。

解. *(1)* **解不唯一**。如果 $u(x,y,z)$ 是一个解，那么 $u(x,y,z)+C$（其中 C 是任意常数）也是一个解。因为 $\Delta(u+C) = \Delta u + \Delta C = \Delta u = f$，并且 $\frac{\partial(u+C)}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial C}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$。因此，解在相差一个常数的意义下是不唯一的。

(2) 根据散度定理（高斯公式），对于定义在区域 Ω 上的任意光滑向量场 $\mathbf{F}$，有

$$\iiint_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{F})\,\mathrm{d}V = \iint_\Gamma (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}S.$$

我们令 $\mathbf{F} = \nabla u$。则 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$，而 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$。将这些代入散度定理，得到：

$$\iiint_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}V = \iint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S.$$

根据题目给出的方程和边界条件，我们有 $\Delta u = f$ 和 $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0$。代入上式，即得：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_\Gamma 0\,\mathrm{d}S = 0.$$

此即为 *Neumann* 问题有解的必要条件（也称相容性条件）。

问题 5. 写出下列方程的特征方程或特征方向。

(1) $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = u_{x_3x_3} + u_{x_4x_4}$;

(2) $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$;

(3) $u_t = u_{xx} - u_{yy}$;

(4) $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} = 0$.

解. 特征方程的形式为 $\sum a_{ij}\alpha_i\alpha_j = 0$，其中 α_i 是特征方向的余弦。

(1) 方程为 $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = 0$。主部系数为 $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = -1, a_{44} = -1$，其余为 0。特征方程为：$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = 0$。

(2) 方程为 $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0$。令 $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$。主部系数为 $a_{00} = 1, a_{11} = -1, a_{22} = -1, a_{33} = -1$。特征方程为：$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0$。

(3) 方程为 $u_t - u_{xx} + u_{yy} = 0$。这是一个一阶时间，二阶空间的方程，主部只看二阶项。令 $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y$。主部系数为 $a_{11} = -1, a_{22} = 1$，其余二阶项系数为 0。特征方程为：$-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$，即 $\alpha_2 = \pm\alpha_1$。

(4) 方程为 $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} = 0$。主部系数为 $a_{12} = a_{21} = 1/2, a_{23} = a_{32} = 1/2, a_{13} = a_{31} = 1/2$。特征方程为：$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = 0$。

问题 **6.** 将下列方程分类，并化成标准型：

(1) $u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0$;

(2) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0 \quad (x>0, y>0)$.

解. *(1)* **方程**：$u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0$

***1.* 分类**

主部系数为 $a=1, b=0, c=y$。判别式为：

$$\Delta(y)=b^2-4ac=0^2-4(1)(y)=-4y.$$

这是一个混合型方程，其类型依赖于 y 的值：

- 当 $y>0$ 时，$\Delta<0$，方程为 **椭圆型**。
- 当 $y<0$ 时，$\Delta>0$，方程为 **双曲型**。
- 当 $y=0$ 时，$\Delta=0$，方程为 **抛物型**。

***2.* 化为标准型**

情形 *(i)*：当 $y<0$ 时 *(*双曲型*)*

特征方程为 $a(\frac{dy}{dx})^2-b\frac{dy}{dx}+c=0 \implies (\frac{dy}{dx})^2+y=0$。解得 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-y}$。积分 $\int(-y)^{-1/2}dy=\pm\int dx$，得到 $-2\sqrt{-y}=\pm x+const$。两族特征线为：$x+2\sqrt{-y}=c_1$ 和 $x-2\sqrt{-y}=c_2$。取新坐标：

$$\xi=x+2\sqrt{-y}, \quad \eta=x-2\sqrt{-y}.$$

计算变换关系：

$$\xi_x=1, \quad \xi_y=-(-y)^{-1/2}, \quad \eta_x=1, \quad \eta_y=(-y)^{-1/2}.$$

一阶导数：

$$\begin{aligned}
u_x&=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta,\\
u_y&=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-(-y)^{-1/2}u_\xi+(-y)^{-1/2}u_\eta=(-y)^{-1/2}(u_\eta-u_\xi).
\end{aligned}$$

二阶导数：

$$\begin{aligned}
u_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi+u_\eta)=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},\\
u_{yy}&=\frac{\partial}{\partial y}\left((-y)^{-1/2}(u_\eta-u_\xi)\right)\\
&=-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}(u_\eta-u_\xi)+(-y)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}(u_\eta-u_\xi)\\
&=-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}(u_\eta-u_\xi)+(-y)^{-1/2}\left((u_{\eta\eta}-u_{\xi\eta})\eta_y+(u_{\eta\xi}-u_{\xi\xi})\xi_y\right)\\
&=-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}(u_\eta-u_\xi)+(-y)^{-1}\left((u_{\eta\eta}-u_{\xi\eta})-(u_{\eta\xi}-u_{\xi\xi})\right)\\
&=-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}(u_\eta-u_\xi)-\frac{1}{y}(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}).
\end{aligned}$$

代入原方程 $u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0$：

$$(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})+y\left(-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}(u_\eta-u_\xi)-\frac{1}{y}(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})\right)+\frac{1}{2}(-y)^{-1/2}(u_\eta-u_\xi)=0$$

$$(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})+\frac{1}{2}(-y)^{-1/2}(u_\eta-u_\xi)-(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})+\frac{1}{2}(-y)^{-1/2}(u_\eta-u_\xi)=0$$

化简得：

$$4u_{\xi\eta}+(-y)^{-1/2}(u_\eta-u_\xi)=0.$$

从 $\xi-\eta=4\sqrt{-y}$ 可得 $\sqrt{-y}=(\xi-\eta)/4$，代入上式得到第一标准型：

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\xi-\eta}(u_\eta-u_\xi)=0.$$

情形 *(ii)*：当 $y>0$ 时 *(*椭圆型*)*

特征方程为 $a(\frac{dy}{dx})^2-b\frac{dy}{dx}+c=0 \implies (\frac{dy}{dx})^2+y=0$。解得 $\frac{dy}{dx}=\pm i\sqrt{y}$。积分 $\int y^{-1/2}dy=\pm i\int dx$，得到 $2\sqrt{y}=\pm ix+const$。一族复特征线为 $x-i(2\sqrt{y})=c$。

我们取该复特征线的实部和虚部作为新的坐标变量：

$$\xi=x,\quad \eta=2\sqrt{y}.$$

接下来，我们计算原方程在 (ξ,η) 坐标系下的形式。

步骤 *1*：计算坐标变换的偏导数

$$\xi_x=1,\quad \xi_y=0,\quad \eta_x=0,\quad \eta_y=2\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

步骤 *2*：计算 u 的一阶偏导数变换 运用链式法则：

$$\begin{aligned}
u_x&=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi\cdot 1+u_\eta\cdot 0=u_\xi,\\
u_y&=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi\cdot 0+u_\eta\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}u_\eta.
\end{aligned}$$

步骤 *3*：计算 u 的二阶偏导数变换

$$\begin{aligned}
u_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}(u_x)=\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi)=u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x=u_{\xi\xi}\cdot 1+u_{\xi\eta}\cdot 0=u_{\xi\xi}.\\
u_{yy}&=\frac{\partial}{\partial y}(u_y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}u_\eta\right)\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)u_\eta+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial y}\right)\\
&=\left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}\right)u_\eta+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y\right)\\
&=-\frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\eta+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(u_{\eta\xi}\cdot 0+u_{\eta\eta}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\\
&=\frac{1}{y}u_{\eta\eta}-\frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\eta.
\end{aligned}$$

步骤 *4*:代入原方程并化简 将 u_{xx}, u_{yy} 和 u_y 的表达式代入原方程 $u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y = 0$:

$$(u_{\xi\xi}) + y\left(\frac{1}{y}u_{\eta\eta} - \frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\eta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}u_\eta\right) = 0.$$

展开括号:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{y}{2y\sqrt{y}}u_\eta + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta = 0.$$

化简分数:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta = 0.$$

可以看到，含有 u_η 的低阶项恰好相互抵消。最终得到标准型:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

情形 *(iii)*: 当 $y = 0$ 时 *(*抛物型*)*

此时原方程退化为 $u_{xx} + \frac{1}{2}u_y = 0$。令 $\xi = x, \eta = -2y$，则 $u_y = -2u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi}$。代入得 $u_{\xi\xi} - u_\eta = 0$，即标准型 $u_\eta = u_{\xi\xi}$。

(2) **方程**：$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0 \quad (x>0,y>0)$

1. 分类

主部系数为 $a=y^2,b=0,c=x^2$。判别式为：

$$\Delta=b^2-4ac=0^2-4(y^2)(x^2)=-4x^2y^2.$$

在区域 $x>0,y>0$ 内，$x^2y^2>0$，因此 $\Delta<0$。方程为椭圆型。

2. 化为标准型

特征方程为 $a(\frac{dy}{dx})^2-b\frac{dy}{dx}+c=0 \implies y^2(\frac{dy}{dx})^2+x^2=0$。解得 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-\frac{x^2}{y^2}}=\pm i\frac{x}{y}$。
这是一个变量可分离的方程，积分得：

$$\int y\,dy=\pm i\int x\,dx \implies \frac{1}{2}y^2=\pm i\frac{1}{2}x^2+const.$$

一族复特征线为 $y^2-ix^2=c$。

我们取该复特征线的实部和虚部作为新的坐标变量：

$$\xi=y^2,\quad \eta=x^2.$$

接下来，我们计算原方程在 (ξ,η) 坐标系下的形式。

步骤 *1*：计算坐标变换的偏导数

$$\xi_x=0,\quad \xi_y=2y,\quad \eta_x=2x,\quad \eta_y=0.$$

步骤 *2*：计算 u 的一阶偏导数变换 运用链式法则：

$$\begin{aligned} u_x&=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi\cdot 0+u_\eta\cdot 2x=2xu_\eta,\\ u_y&=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi\cdot 2y+u_\eta\cdot 0=2yu_\xi. \end{aligned}$$

步骤 *3*：计算 u 的二阶偏导数变换

$$\begin{aligned} u_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}(u_x)=\frac{\partial}{\partial x}(2xu_\eta)\\ &=\left(\frac{\partial(2x)}{\partial x}\right)u_\eta+2x\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x}\right)\\ &=2u_\eta+2x(u_{\eta\xi}\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x)\\ &=2u_\eta+2x(u_{\eta\xi}\cdot 0+u_{\eta\eta}\cdot 2x)\\ &=2u_\eta+4x^2u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy}&=\frac{\partial}{\partial y}(u_y)=\frac{\partial}{\partial y}(2yu_\xi)\\ &=\left(\frac{\partial(2y)}{\partial y}\right)u_\xi+2y\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial y}\right)\\ &=2u_\xi+2y(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y)\\ &=2u_\xi+2y(u_{\xi\xi}\cdot 2y+u_{\xi\eta}\cdot 0)\\ &=2u_\xi+4y^2u_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

步骤 4：代入原方程并化简 将 u_{xx} 和 u_{yy} 的表达式代入原方程 $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$：

$$y^2(2u_\eta+4x^2u_{\eta\eta})+x^2(2u_\xi+4y^2u_{\xi\xi})=0.$$

展开括号：

$$2y^2u_\eta+4x^2y^2u_{\eta\eta}+2x^2u_\xi+4x^2y^2u_{\xi\xi}=0.$$

用新坐标 $\xi=y^2,\eta=x^2$ 替换表达式中的 x^2,y^2：

$$2\xi u_\eta+4\eta\xi u_{\eta\eta}+2\eta u_\xi+4\eta\xi u_{\xi\xi}=0.$$

因为在所讨论的区域内 $x>0,y>0$，所以 $\xi>0,\eta>0$。两边同除以 $4\xi\eta$：

$$\frac{2\xi}{4\xi\eta}u_\eta+\frac{4\eta\xi}{4\xi\eta}u_{\eta\eta}+\frac{2\eta}{4\xi\eta}u_\xi+\frac{4\eta\xi}{4\xi\eta}u_{\xi\xi}=0.$$

化简得到：

$$\frac{1}{2\eta}u_\eta+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_\xi+u_{\xi\xi}=0.$$

整理成标准形式：

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_\xi+\frac{1}{2\eta}u_\eta=0.$$