一阶偏微分方程之传输方程

陈柏均

2025 年 5 月 11 日

1 一阶拟传输方程

1.1 变量替换求解常系数传输方程

1.1.1 通解

解决方法：通过变量替换，把二元偏微分转化成一元的常微分求解。

假设 $a_1 \neq 0$ 且 $a_2 \neq 0$，我们求解常系数传输方程：

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1.1}$$

其中 $u = u(t, x)$。引入坐标变换 (α, β)，使得 $u = u(\alpha, \beta)$，且：

$$\begin{cases} \alpha = ax + bt, \\ \beta = cx + dt. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

特别地，指定 $\beta = a_1 x - a_2 t$。

利用链式法则计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{1.1.4}$$

将 (1.1.3) 和 (1.1.4) 代入原方程 (1.1.1)：

$$a_1 \left(b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + a_2 \left(a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0. \tag{1.1.5}$$

整理后得到：

$$(a_1 b + a_2 a)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a_1 d + a_2 c)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \tag{1.1.6}$$

为消去一个变量，pde 转 ode，选择让第二项系数为 0，把方程 (1.1.6) 简化为：

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \tag{1.1.7}$$

选择系数

$$\begin{cases} a = 0, & b = 1, \\ c = a_1, & d = -a_2. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

此时坐标变换为：

$$\begin{cases} \alpha = t, \\ \beta = a_1 x - a_2 t. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

由(1.1.7) 表明 u 仅依赖于 β，即通解为：

$$u(t,x) = L(a_1 x - a_2 t), \tag{1.1.10}$$

其中 $L(\cdot)$ 是任意可微函数。

1.1.2 特解（初始条件或边界条件）

已知初始条件 $u(x,0) = e^{-x^2}$，求下面常系数运输方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1.11}$$

由(1.1.10)可知

$$u(x,t) = f(x-t) = e^{-(x-t)^2} \tag{1.1.12}$$

1.2 特征线法求解变系数传输方程

1.2.1 通解

一阶线性变系数偏微分方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = (1, p(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.2.1}$$

其中 $p(x,y)$ 是 x 和 y 的函数。$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 为梯度，$(1, p(x,y))$ 为方向，一整个乘积为方向导数，方向导数为 0 意味着，$u(x,y) = C$ 在切向量为 $(1, p(x,y))$ 这条曲线上，即

$$u(x,y)|_{\Gamma} = C \tag{1.2.2}$$

$$u(x,y) = f(C) \tag{1.2.3}$$

Γ 曲线上，任意点 (x,y) 求导 (Γ 曲线为 XOY 平面上的曲线，故 y 可表示成 x 的函数)，可得切向量 $(1, \frac{dy}{dx})$

所以我们找到 Γ 曲线，把二元偏微分转化成一元的常微分，令

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y) \tag{1.2.4}$$

可解得

$$C = \phi(x, y) \tag{1.2.5}$$

得方程解

$$u(x, y) = f(C) = f(\phi(x, y)) \tag{1.2.6}$$

$(1, \frac{dy}{dx})$ 为该曲线的切向量。我们称这条曲线叫特征线。只需要取遍所有的特征曲线就可以取遍 XOY 平面上所有的点，若有初始条件或者边界条件可以确定每条特征线在 $u(x, y)$ 对应的取值，就可以完整确定 $u(x, y)$ 这个函数。

示例 1.2.1. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.2.7}$$

此时我们有 $p(x, y) = x$，解 $\frac{dy}{dx} = x$，我们得到特征线 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$，或 $y - \frac{1}{2}x^2 = C$。从而 $\phi(x, y) = y - \frac{1}{2}x^2$，偏微分方程的通解为 $u(x, y) = f(\phi(x, y))$，其中 f 是任意函数。把它们代回方程，直接验证，便知是解。