偏微分方程 2023 卷

班级:22 数学 1　姓名: 陈柏均　学号:202225110102

一、基础题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

题 1. 指出方程 $x^6u_{xx}+\dfrac{1}{1+x^2+y^2}u_{xxxxy}=0$ 的阶，并判定它是线性的还是非线性的。

解. **阶数**：方程中最高阶导数是 u_{xxxxy}，其阶数为 $4+1=5$。所以这是一个五阶偏微分方程。
线性性：该方程是线性的。因为未知函数 u 及其各阶偏导数都是一次的，并且系数 x^6 和 $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ 仅与自变量 x,y 有关。

题 2. 写出方程 $u_t=u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}$ 的特征方程。

解. 该方程可以写成 $u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}-u_t=0$。设特征曲面为 $\phi(x,y,t)=C$。特征方程由主部系数决定，其形式为:

$$A\phi_x^2+B\phi_x\phi_y+C\phi_y^2+\cdots=0$$

对于本题，方程的主部是 $u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}$。特征方程为:

$$\phi_x^2+\phi_x\phi_y+\phi_y^2=0$$

而且 $\phi_x^2++\phi_y^2=1$, 这是一个退化的方程。如果只考虑空间变量 (x,y) 的类型，判别式 $\Delta=1^2-4(1)(1)=-3<0$，在空间上是椭圆型的。

题 3. 验证 $u(x,y)=\log(x^2+y^2)$ 是调和的。

解. 一个函数是调和的，如果它满足拉普拉斯方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$。

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\log(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2} \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
u_y &= \frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2} \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
u_{xx} + u_{yy} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0
$$

所以，$u(x,y) = \log(x^2+y^2)$ 是调和函数（在 $(0,0)$ 点外）。

题 4. 对于 *Cauchy* 问题 $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$ 求点 $(2,3)$ 的依赖区域，以及区间 $[0,2]$ 的决定区域。

解. 这是一个一维波动方程，波速 $c = \sqrt{4} = 2$。

- **点 $(2,3)$ 的依赖区域**：点 $(x_0, t_0) = (2,3)$ 的依赖区域是初始直线 $t = 0$ 上的一个区间 $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$。

  $$[2 - 2\cdot 3, \quad 2 + 2\cdot 3] = [-4, 8]$$

  所以依赖区域是区间 $[-4, 8]$。

- **区间 $[0,2]$ 的决定区域**：初始区间 $[a,b] = [0,2]$ 的决定区域是 xt 平面中由该区间和从其端点发出的两条特征线 $x - ct = 2$ 和 $x + ct = 0$ 所围成的区域。这是一个由四个顶点 $(0,0)$, $(2,0)$, $(1, 1/2)$, 构成的三角区域（$t \geq 0$ ）。

题 5. 找出函数将下面的边界条件齐次化：

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t)$$

解. 设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，其中 $w(x,t)$ 是一个辅助函数，目标是使 $v(x,t)$ 满足齐次边界条件。我们构造一个简单的函数 $w(x,t)$，比如线性函数 $w(x,t)=A(t)x+B(t)$，使其满足给定的非齐次边界条件。

$$w_x(x,t)=A(t)$$
$$w(x,t)=A(t)x+B(t)$$

将边界条件代入 $w(x,t)$:

$$w_x(0,t)=A(t)=\mu_1(t)$$
$$w(1,t)=A(t)\cdot 1+B(t)=\mu_2(t)$$

从第一个式子得到 $A(t)=\mu_1(t)$。代入第二个式子：

$$\mu_1(t)+B(t)=\mu_2(t)\implies B(t)=\mu_2(t)-\mu_1(t)$$

所以，所求的函数为：

$$w(x,t)=\mu_1(t)x+\mu_2(t)-\mu_1(t)$$

令 $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$，则 $v(x,t)$ 满足齐次边界条件 $v_x(0,t)=0$ 和 $v(1,t)=0$。

二、计算题 (本大题共 3 小题, 每小题 15 分, 共 45 分)

题 6. 判断下列方程的类型，并化成标准型：

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0.$$

解. **步骤 *1.* 判断方程类型**

方程的系数为 $A = 1, B = 6, C = 5$。计算判别式：

$$\Delta = B^2 - 4AC = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16 > 0$$

因为 $\Delta > 0$，所以该方程为双曲型方程。

步骤 *2.* 求解特征方程

特征方程为 $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$，即：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6\frac{dy}{dx} + 5 = 0$$

令 $\lambda = \frac{dy}{dx}$，则有 $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$，分解因式得 $(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$。解得两个特征方向：

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

对应的特征线方程为：

$$\frac{dy}{dx} = 1 \implies dy - dx = 0 \implies y - x = C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = 5 \implies dy - 5dx = 0 \implies y - 5x = C_2$$

步骤 *3.* 进行坐标变换

取新的坐标系：

$$\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = y - 5x \end{cases}$$

计算各阶偏导数：

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\xi - 5u_\eta \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-u_\xi - 5u_\eta) = -(u_{\xi\xi}(-1) + u_{\xi\eta}(-5)) - 5(u_{\eta\xi}(-1) + u_{\eta\eta}(-5)) \\
&= u_{\xi\xi} + 10u_{\xi\eta} + 25u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(-u_\xi - 5u_\eta) = -(u_{\xi\xi}(1) + u_{\xi\eta}(1)) - 5(u_{\eta\xi}(1) + u_{\eta\eta}(1)) \\
&= -u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 5u_{\eta\eta} \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi + u_\eta) = (u_{\xi\xi}(1) + u_{\xi\eta}(1)) + (u_{\eta\xi}(1) + u_{\eta\eta}(1)) \\
&= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{aligned}
$$

步骤 *4.* 代入原方程化简

将上述偏导数代入原方程：

- **二阶项***:*

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} \\
&= (u_{\xi\xi} + 10u_{\xi\eta} + 25u_{\eta\eta}) + 6(-u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 5u_{\eta\eta}) + 5(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \\
&= (1 - 6 + 5)u_{\xi\xi} + (10 - 36 + 10)u_{\xi\eta} + (25 - 30 + 5)u_{\eta\eta} \\
&= -16u_{\xi\eta}
\end{aligned}
$$

- **一阶项***:*

$$u_x + 2u_y = (-u_\xi - 5u_\eta) + 2(u_\xi + u_\eta) = u_\xi - 3u_\eta$$

合并所有项，得到变换后的方程：

$$-16u_{\xi\eta} + u_\xi - 3u_\eta = 0$$

两边同乘以 -1，得到标准型：

$$16u_{\xi\eta} - u_\xi + 3u_\eta = 0$$

题 7. 求解 *Cauchy* 问题：

$$
\begin{cases}
u_t - 4u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\
u|_{t=0} = xe^{-x}, & -\infty < x < \infty.
\end{cases}
$$

解. 步骤 *1.* 使用泊松公式

这是一个标准的热传导方程 $Cauchy$ 问题，其解由泊松公式给出。方程形式为 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$，这里 $a^2 = 4$。一维热传导方程的解为：

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \, \mathrm{d}y$$

其中 $\phi(y) = ye^{-y}$ 是初始条件。代入 $a^2 = 4$：

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{16\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y} e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}} \, \mathrm{d}y$$

步骤 *2.* 计算积分

我们处理指数部分的项，进行配方：

$$\begin{aligned}
-y - \frac{(x-y)^2}{16t} &= -\frac{1}{16t}[16ty + (x-y)^2] \\
&= -\frac{1}{16t}[16ty + x^2 - 2xy + y^2] \\
&= -\frac{1}{16t}[y^2 - (2x-16t)y + x^2] \\
&= -\frac{1}{16t}\left[(y-(x-8t))^2 - (x-8t)^2 + x^2\right] \\
&= -\frac{(y-(x-8t))^2}{16t} + \frac{(x-8t)^2 - x^2}{16t} \\
&= -\frac{(y-(x-8t))^2}{16t} + \frac{x^2 - 16xt + 64t^2 - x^2}{16t} \\
&= -\frac{(y-(x-8t))^2}{16t} - x + 4t
\end{aligned}$$

将此结果代入积分表达式：

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{16\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{(y-(x-8t))^2}{16t}} e^{-x+4t} \, \mathrm{d}y = \frac{e^{-x+4t}}{\sqrt{16\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{(y-(x-8t))^2}{16t}} \, \mathrm{d}y$$

作变量代换，令 $z = y - (x-8t)$，则 $y = z + x - 8t$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{(y-(x-8t))^2}{16t}} \, \mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} (z + x - 8t) e^{-\frac{z^2}{16t}} \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{16t}} \, \mathrm{d}z + (x-8t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{16t}} \, \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

第一项的被积函数是奇函数，积分为 0。第二项是高斯积分，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} \, \mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$。这里 $\alpha = \frac{1}{16t}$。

$$(x-8t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{16t}} \, \mathrm{d}z = (x-8t)\sqrt{16\pi t}$$

步骤 *3.* 得到最终解

将积分结果代回：

$$u(x,t) = \frac{e^{-x+4t}}{\sqrt{16\pi t}}\left[0 + (x-8t)\sqrt{16\pi t}\right] = (x-8t)e^{-x+4t}$$

最终解为：

$$u(x,t) = (x-8t)e^{-x+4t}$$

题 8. 求解波动方程的 *Cauchy* 问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\cos x, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = xe^{-x}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

解. 步骤 *1.* 应用叠加原理

根据叠加原理，我们将解 $u(x,t)$ 分解为两部分之和 $u = u^1 + u^2$，其中：

- u^1 是非齐次波动方程满足零初始条件的解：$\begin{cases} u^1_{tt} - u^1_{xx} = t\cos x \\ u^1(x,0) = 0, \quad u^1_t(x,0) = 0 \end{cases}$
- u^2 是齐次波动方程满足给定初始条件的解：$\begin{cases} u^2_{tt} - u^2_{xx} = 0 \\ u^2(x,0) = 0, \quad u^2_t(x,0) = xe^{-x} \end{cases}$

步骤 *2.* 求解 $u^1(x,t)$ *(*使用杜哈梅尔原理*)*

我们首先定义一个辅助的齐次波动方程初值问题，其初始条件在时刻 $t = \tau$ 给出。设非齐次项为 $f(x,\tau) = \tau\cos x$。辅助问题是关于函数 $w(x,t;\tau)$ 的：

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & t > \tau, \\ w|_{t=\tau} = 0, \\ w_t|_{t=\tau} = f(x,\tau) = \tau\cos x. \end{cases}$$

引入新时间变量 $s = t - \tau$。则 w 的问题可以转化为关于 s 的标准初值问题：

$$\begin{cases} w_{ss} - w_{xx} = 0, & s > 0, \\ w|_{s=0} = 0, \\ w_s|_{s=0} = \tau\cos x. \end{cases}$$

使用达朗贝尔公式求解此问题（波速 $c=1$）：

$$w(x,s;\tau)=\frac{1}{2}\int_{x-s}^{x+s}\tau\cos y\,\mathrm{d}y=\frac{\tau}{2}[\sin y]_{x-s}^{x+s}=\frac{\tau}{2}(\sin(x+s)-\sin(x-s))$$

利用和差化积公式，上式变为 $w(x,s;\tau)=\tau\cos x\sin s$。

根据杜哈梅尔原理，$u^1(x,t)$ 是 $w(x,t;\tau)$ 从 0 到 t 的积分。在积分时，我们将 s 替换为 $t-\tau$：

$$u^1(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\cos x\sin(t-\tau)\cdot\tau\,\mathrm{d}\tau=\cos x\int_0^t\tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

计算该积分，令 $s=t-\tau$，则 $\tau=t-s$，$\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}s$。

$$\begin{aligned}\int_0^t\tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau&=\int_t^0(t-s)\sin s(-\mathrm{d}s)=\int_0^t(t-s)\sin s\,\mathrm{d}s\\&=t\int_0^t\sin s\,\mathrm{d}s-\int_0^t s\sin s\,\mathrm{d}s\\&=t[-\cos s]_0^t-\left([-s\cos s]_0^t-\int_0^t(-\cos s)\,\mathrm{d}s\right)\\&=t(-\cos t+1)-\left(-t\cos t+[\sin s]_0^t\right)\\&=-t\cos t+t-(-t\cos t+\sin t)=t-\sin t\end{aligned}$$

因此，$u^1(x,t)=(t-\sin t)\cos x$。

步骤 *3.* 求解 $u^2(x,t)$ *(使用达朗贝尔公式)*

对于 u^2，我们使用达朗贝尔公式，其中 $\phi(x)=0,\psi(x)=xe^{-x}$：

$$u^2(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}ye^{-y}\,\mathrm{d}y$$

使用分部积分法 $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$。令 $u=y,\mathrm{d}v=e^{-y}\,\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}y,v=-e^{-y}$。

$$\int ye^{-y}\,\mathrm{d}y=y(-e^{-y})-\int(-e^{-y})\,\mathrm{d}y=-ye^{-y}+\int e^{-y}\,\mathrm{d}y=-ye^{-y}-e^{-y}=-(y+1)e^{-y}$$

代入积分限：

$$\begin{aligned}u^2(x,t)&=\frac{1}{2}\left[-(y+1)e^{-y}\right]_{x-t}^{x+t}\\&=\frac{1}{2}\left[-(x+t+1)e^{-(x+t)}-(-(x-t+1)e^{-(x-t)})\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(x-t+1)e^{-(x-t)}-(x+t+1)e^{-(x+t)}\right]\end{aligned}$$

步骤 *4.* 合并解

最终解为 $u(x,t)=u^1(x,t)+u^2(x,t)$：

$$u(x,t)=(t-\sin t)\cos x+\frac{1}{2}\left[(x-t+1)e^{-(x-t)}-(x+t+1)e^{-(x+t)}\right]$$

三、解答题 (本大题共 1 题, 共 20 分)

题 9. 用分离变量法求解初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

解. 步骤 *1.* 分离变量

设解的形式为 $u(x,t) = X(x)T(t)$。代入方程 $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$:

$$X(x)T''(t) - 4X''(x)T(t) = 0 \implies \frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

其中 $-\lambda$ 是分离常数。由此得到两个常微分方程:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$T''(t) + 4\lambda T(t) = 0, \quad t > 0$$

步骤 *2.* 求解空间本征值问题

空间方程的边界条件由原问题给出:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \implies X(0) = 0u(1,t) = X(1)T(t) = 0 \implies X(1) = 0$$

我们求解 *Sturm-Liouville* 问题: $X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(1) = 0$。这是一个经典的本征值问题，其非平凡解只在 $\lambda > 0$ 时存在。设 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，方程通解为 $X(x) = C_1\cos(\mu x) + C_2\sin(\mu x)$。

- 由 $X(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$。
- 由 $X(1) = 0$ 得 $C_2\sin(\mu) = 0$。为得到非平凡解，须 $C_2 \neq 0$，故 $\sin(\mu) = 0$。

因此 $\mu = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$。本征值为 $\lambda_n = (n\pi)^2$。对应的本征函数为 $X_n(x) = \sin(n\pi x)$。

步骤 *3.* 求解时间方程

对于每个本征值 λ_n，求解时间方程:

$$T_n''(t) + 4(n\pi)^2 T_n(t) = 0$$

其通解为：

$$T_n(t) = a_n \cos(2n\pi t) + b_n \sin(2n\pi t)$$

步骤 *4.* 叠加并利用初始条件

根据叠加原理，解可以写成级数形式：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2n\pi t) + b_n \sin(2n\pi t)] \sin(n\pi x)$$

利用初始条件 $u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$$

通过比较傅里叶级数的系数可知，只有当 $n = 1$ 时系数不为零：

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0 \quad \textit{for}\; n \neq 1$$

对时间求导：

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-2n\pi a_n \sin(2n\pi t) + 2n\pi b_n \cos(2n\pi t)] \sin(n\pi x)$$

利用初始条件 $u_t(x,0) = 0$:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi b_n \sin(n\pi x) = 0$$

因此，所有系数 $b_n = 0$。

步骤 *5.* 写出最终解

将求得的系数 $a_1 = 1/2$, $a_n = 0 (n > 1)$, $b_n = 0$ 代回级数，只有 $n = 1$ 的项被保留：

$$u(x,t) = a_1 \cos(2\pi t) \sin(\pi x)$$

最终解为：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi t)\sin(\pi x)$$

四、证明题 (本大题共 1 题, 共 15 分)

题 10. 证明球波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \phi(r), \quad u_t|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$$

的解为

$$u(r, t) = \frac{(r - at)\phi(r - at) + (r + at)\phi(r + at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} \rho\psi(\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

解. **步骤 *1.* 球坐标系下的波动方程**

首先，计算 r 对各变量的一阶和二阶偏导数。由 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 可得：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

同理，$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$。

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

利用链式法则，计算 $u(r)$ 的一阶和二阶偏导数：

$$u_x = u_r \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r \frac{\partial r}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = u_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

同理可得 u_{yy} 和 u_{zz} 的表达式。

将三者相加，得到拉普拉斯算子 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$：

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{rr}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right] + u_r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \\ &= u_{rr}\left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right] + u_r\left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\right) \\ &= u_{rr}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3}\right) \\ &= u_{rr}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{3r^2 - r^2}{r^3}\right) \\ &= u_{rr} + u_r\left(\frac{2r^2}{r^3}\right) \\ &= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r \end{aligned}$$

球对称解意味着解 u 只与到原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 有关，即 $u=u(r)$。在球坐标系下，拉普拉斯算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 作用于球对称函数 $u(r)$ 的形式为：

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r$$

$$u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)$$

步骤 *2*. 变量代换

为了求解这个方程，作变量代换，令 $v(r)=ru(r)$。则 $u(r)=\frac{v(r)}{r}$。计算 u 对 r 的导数：

$$\begin{aligned}u_r&=\frac{v_r r-v}{r^2}=\frac{v_r}{r}-\frac{v}{r^2}\\u_{rr}&=\frac{v_{rr}r-v_r}{r^2}-\frac{v_r r^2-v(2r)}{r^4}=\frac{v_{rr}}{r}-\frac{v_r}{r^2}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{2v}{r^3}\\&=\frac{v_{rr}}{r}-\frac{2v_r}{r^2}+\frac{2v}{r^3}\end{aligned}$$

将 u,u_r,u_{rr} 代入原方程：

$$\left(\frac{v_{rr}}{r}-\frac{2v_r}{r^2}+\frac{2v}{r^3}\right)+\frac{2}{r}\left(\frac{v_r}{r}-\frac{v}{r^2}\right)-\frac{v}{r}=0$$

化简得：

$$\frac{v_{rr}}{r}-\frac{2v_r}{r^2}+\frac{2v}{r^3}+\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2v}{r^3}-\frac{v}{r}=0$$
$$\frac{v_{rr}}{r}-\frac{v}{r}=0$$

在 $r\neq 0$ 的情况下，方程简化为：

$$v_{rr}-v=0$$

也可用

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)=\frac{\partial}{\partial r}(u+ru_r)=u_r+u_r+ru_{rr}=ru_{rr}+2u_r$$

步骤 *3*. 转换初始条件

新的函数 $v(r,t)$ 的初始条件为：

$$v(r,0)=ru(r,0)=r\phi(r)$$
$$v_t(r,0)=ru_t(r,0)=r\psi(r)$$

步骤 *4*. 求解一维波动方程

我们现在有了关于 $v(r,t)$ 的一维波动方程初值问题。使用达朗贝尔公式求解：

$$v(r,t) = \frac{1}{2}[v(r+at,0) + v(r-at,0)] + \frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at} v_t(s,0)\,\mathrm{d}s$$

将 v 的初始条件代入：

$$v(r,t) = \frac{1}{2}[(r+at)\phi(r+at) + (r-at)\phi(r-at)] + \frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at} s\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

步骤 *5*. 回代得到最终解

最后，将解 $v(r,t)$ 代换回 $u(r,t) = v(r,t)/r$ *(*对于 $r \neq 0$*):*

$$u(r,t) = \frac{(r+at)\phi(r+at) + (r-at)\phi(r-at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} s\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

证明完毕。