

# 偏微分方程笔记

陈柏均

2025 年 5 月 12 日

# 目录

<b>1</b>	<b>一阶拟线性方程之齐次传输方程</b>	<b>4</b>
1.1	变量替换求解常系数齐次传输方程 . . . . .	4
1.1.1	问题描述 . . . . .	4
1.1.2	通解 . . . . .	4
1.1.3	特解（初始条件或边界条件） . . . . .	5
1.2	波的传播求解常系数齐次传输方程 . . . . .	5
1.2.1	问题描述 . . . . .	5
1.2.2	通解 . . . . .	5
1.2.3	初值问题之特解 . . . . .	6
1.3	波的传播求解常系数非齐次传输方程 . . . . .	6
1.3.1	问题描述 . . . . .	6
1.3.2	求解 . . . . .	6
1.4	特征线法求解变系数齐次传输方程 . . . . .	7
1.4.1	通解 . . . . .	7
<b>2</b>	<b>一维齐次波动方程的初值问题</b>	<b>9</b>
2.1	d' Alembert 公式 . . . . .	9
2.1.1	问题描述 . . . . .	9
2.1.2	求解 . . . . .	9
<b>3</b>	<b>一维波动方程的初边值问题</b>	<b>10</b>
3.1	反射法 . . . . .	10
3.1.1	问题描述 . . . . .	10
3.1.2	求解 . . . . .	10
3.2	分离变量法 . . . . .	11
3.2.1	问题描述 . . . . .	11
3.2.2	核心思想 . . . . .	11
3.2.3	空间常微分方程的求解 . . . . .	12
3.2.4	时间常微分方程的求解 . . . . .	13

3.2.5	得偏微分方程通解 . . . . .	14
3.2.6	初始条件求系数 . . . . .	14
3.2.7	用数分知识求系数, 条件和前面泛函内积不一样 . . . . .	15
3.2.8	总结 . . . . .	16

# 1 一阶拟线性方程之齐次传输方程

## 1.1 变量替换求解常系数齐次传输方程

### 1.1.1 问题描述

假设  $a_1 \neq 0$  且  $a_2 \neq 0$ ，我们求解常系数传输方程：

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.1)$$

### 1.1.2 通解

核心思想：通过变量替换，把二元偏微分转化成一元的常微分求解。

其中  $u = u(t, x)$ 。引入坐标变换  $(\alpha, \beta)$ ，使得  $u = u(\alpha, \beta)$ ，且：

$$\begin{cases} \alpha = ax + bt, \\ \beta = cx + dt. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

利用链式法则计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta}. \quad (1.1.4)$$

将 (1.1.3) 和 (1.1.4) 代入原方程 (1.1.1)：

$$a_1 \left( b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + a_2 \left( a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (1.1.5)$$

整理后得到：

$$(a_1 b + a_2 a) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a_1 d + a_2 c) \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \quad (1.1.6)$$

为消去一个变量，pde 转 ode，选择让第二项系数为 0，把方程 (1.1.6) 简化为：

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \quad (1.1.7)$$

选择系数

$$\begin{cases} a = 0, & b = 1, \\ c = a_1, & d = -a_2. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

此时坐标变换为：

$$\begin{cases} \alpha = t, \\ \beta = a_1 x - a_2 t. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

由(1.1.7) 表明  $u$  仅依赖于  $\beta$ , 即通解为:

$$u(t, x) = L(a_1x - a_2t), \quad (1.1.10)$$

其中  $L(\cdot)$  是任意可微函数。

### 1.1.3 特解 (初始条件或边界条件)

已知初始条件  $u(x, 0) = e^{-x^2}$ , 求下面常系数运输方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.11)$$

由(1.1.10)可知

$$u(x, t) = f(x - t) = e^{-(x-t)^2} \quad (1.1.12)$$

## 1.2 波的传播求解常系数齐次传输方程

### 1.2.1 问题描述

在一阶线性方程中, 有一种最简单的形如

$$u_t + b \cdot Du = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, \infty) \quad (1.2.1)$$

的方程, 称为传输方程, 其中,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  是已知  $n$  维常向量,  $u = u(x, t)$ ,  $Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$ 。

### 1.2.2 通解

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = (1, b) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.2.2)$$

$\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  为梯度,  $(1, b)$  为方向, 一整个乘积为方向导数, 方向导数为 0 意味着,  $u(t, x) = C$  在切向量为  $(1, b)$  这条曲线上, 即

$$u(t, x)|_{\Gamma} = C \quad (1.2.3)$$

由方程的形式可以看出,  $u(x, t)$  沿  $(1, b)$  微商等于零。事实上, 固定一点  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , 记过该直线  $\Gamma$  的参数方程为  $(x + bs, t + s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , 考查函数  $u$  在该直线上的值。令

$$z(s) = u(x + bs, t + s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.2.4)$$

于是

$$\frac{dz}{ds} = Du(x + bs, t + s) \cdot b + u_t(x + bs, t + s) = 0, \quad (1.2.5)$$

因此, 函数  $z(s)$  在过点  $(x, t)$  且具有方向  $(b, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  的直线上取常数值, 特征线上的取值和  $s$  没有关系 (和下文中特征线法求解传输方程的  $(1, p(x, y))$  含义相同)。所以, 如果我们知道解  $u$  在这条直线上一点的值, 则就得到它沿此直线上的值。这就引出下面求解初值问题的方法。

### 1.2.3 初值问题之特解

设  $a \in \mathbb{R}^n$  是已知常向量,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是给定函数。考察传输方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a \cdot Du = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

如上取定  $(x, t)$ , 过点  $(x, t)$  且具有方向  $(a, 1)$  的直线的参数式为  $(x + as, t + s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ 。当  $s = -t$  时, 此直线与平面  $\Gamma: \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  相交于点  $(x - at, 0)$ 。由上文分析知  $u$  沿此直线取常数值, 而由初值条件便得

$$u(x, t) = z(0) = z(-t) = u(x - at, 0) = f(x - at), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (1.2.7)$$

注记 1.1. 这表示对于每一个特定的点都有一条特征线, 他的函数为特定的  $f$ 。取遍每个特征线就能取遍域内所有点, 对于任意的点都有任意的函数表达式。因为上面的式子,  $at$  是任意的, 所以  $x-at$  是任意的, 可以取遍整个

所以, 如果有解, 必由上式子表示, 因此解是唯一的; 反之, 若  $f$  一阶连续可微, 则可直接验证由上式子表示的函数  $u(x, t)$  是问题的解。这就是齐次传输方程初值问题解的存在唯一性。

## 1.3 波的传播求解常系数非齐次传输方程

### 1.3.1 问题描述

考察非齐次传输方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a \cdot Du = f, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

### 1.3.2 求解

受齐次问题解法的启示, 我们仍然先取定  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , 对  $s \in \mathbb{R}$ , 令  $z(s) = u(x + as, t + s)$ , 则

$$\frac{dz}{ds} = Du(x + as, t + s) \cdot a + u_t(x + as, t + s) = f(x + as, t + s). \quad (1.3.2)$$

因此,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) - u(x - at, 0) &= u(x, t) - g(x - at) \\
 &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \frac{dz}{ds} ds \\
 &= \int_{-t}^0 f(x + as, t + s) ds \\
 &= \int_0^t f(x + a(s - t), s) ds.
 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

于是, 得到问题的在  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$  上的解

$$u(x, t) = g(x - at) + \int_0^t f(x + a(s - t), s) ds. \tag{1.3.4}$$

在下一章, 这个公式将被用来求解一维波动方程。

## 1.4 特征线法求解变系数齐次传输方程

### 1.4.1 通解

一阶线性变系数偏微分方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = (1, p(x, y)) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \tag{1.4.1}$$

其中  $p(x, y)$  是  $x$  和  $y$  的函数。 $\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  为梯度,  $(1, p(x, y))$  为方向, 一整个乘积为方向导数, 方向导数为 0 意味着,  $u(x, y) = C$  在切向量为  $(1, p(x, y))$  这条曲线上, 即

$$u(x, y)|_{\Gamma} = C \tag{1.4.2}$$

$$u(x, y) = f(C) \tag{1.4.3}$$

$\Gamma$  曲线上, 任意点  $(x, y)$  求导 ( $\Gamma$  曲线为  $XOY$  平面上的曲线, 故  $y$  可表示成  $x$  的函数), 可得切向量  $(1, \frac{dy}{dx})$

所以我们找到  $\Gamma$  曲线, 把二元偏微分转化成一元的常微分, 令

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y) \tag{1.4.4}$$

可解得

$$C = \phi(x, y) \tag{1.4.5}$$

得方程解

$$u(x, y) = f(C) = f(\phi(x, y)) \tag{1.4.6}$$

$(1, \frac{dy}{dx})$  为该曲线的切向量。我们称这条曲线叫特征线。只需要取遍所有的特征曲线就可以取遍  $XOY$  平面上所有的点, 若有初始条件或者边界条件可以确定每条特征线在  $u(x, y)$  对应的取值, 就可以完整确定  $u(x, y)$  这个函数。

示例 1.4.1. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.4.7)$$

此时我们有  $p(x, y) = x$ , 解  $\frac{dy}{dx} = x$ , 我们得到特征线  $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ , 或  $y - \frac{1}{2}x^2 = C$ 。从而  $\phi(x, y) = y - \frac{1}{2}x^2$ , 偏微分方程的通解为  $u(x, y) = f(\phi(x, y))$ , 其中  $f$  是任意函数。把它们代回方程, 直接验证, 便知是解。



## 2 一维齐次波动方程的初值问题

### 2.1 d' Alembert 公式

#### 2.1.1 问题描述

先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

#### 2.1.2 求解

由算子复合作用的概念，易验证下述算子因式分解

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \quad (2.1.2)$$

令

$$v(x, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u. \quad (2.1.3)$$

由 (2.1.2), 得

$$v_t(x, t) + av_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2.1.4)$$

这是一维传输方程，且由 (2.1.3) 知  $v$  满足初值条件

$$v(x, 0) = \psi(x) - a\varphi'(x). \quad (2.1.5)$$

由 (1.2.7), 得

$$v(x, t) = \psi(x - at) - a\varphi'(x - at). \quad (2.1.6)$$

将  $v$  代入 (2.1.3), 得

$$u_t(x, t) - au_x(x, t) = \psi(x - at) - a\varphi'(x - at), \quad (2.1.7)$$

其中  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 。

对此非齐次传输方程, 已知  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , 用公式(1.3.4)得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x + at) + \int_0^t [\psi(x - 2as + at) - a\varphi'(x - 2as + at)] \, ds \\ &= \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi(y) - a\varphi'(y)] \, dy \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) \, dy. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

称此式为 d'Alembert (达朗贝尔) 公式.

## 3 一维波动方程的初边值问题

### 3.1 反射法

反射法的核心思想: 利用达朗贝尔公式把解延拓

#### 3.1.1 问题描述

求解半直线  $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$  上的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}_+, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), & x \in \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

其中,  $g, h$  是已知函数, 满足  $g(0) = h(0) = 0$ .

#### 3.1.2 求解

先把问题转换到全空间  $\mathbb{R}$  上去. 为此, 对函数  $u, g, h$  作奇延拓 (或称奇反射) 如下:

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & x \geq 0, t \geq 0, \\ -u(-x, t), & x \leq 0, t \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ -g(-x), & x \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0, \\ -h(-x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

则  $\bar{u}(x, t)$  满足问题:

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{g}(x), \quad \bar{u}_t(x, 0) = \bar{h}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

注记 3.1. 还可以用特征线法对问题 (3.1.1) 求解, 即用初值问题中方程的特征线作自变量的变换, 把方程化为双曲型的第二标准型  $u_{\xi\eta} = 0$  的形式, 对它积分两次求出通解  $u = F(\xi) + G(\eta)$ , 其中,  $F$  和  $G$  是任意二次光滑函数。然后利用初值条件确定通解中的两个任意函数, 便得 d'Alembert 公式。

## 3.2 分离变量法

### 3.2.1 问题描述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.2.1)$$

边界条件:

$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.2.2)$$

初始条件:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad 0 < x < l \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

### 3.2.2 核心思想

核心思想: 分离变量法把偏微分转成为两个常微分。

设  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , 假设解为乘积解。

代入方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T'' \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T \quad (3.2.4)$$

代入原方程:

$$X \cdot T'' = c^2 \cdot X'' \cdot T \quad (3.2.5)$$

转化为可分离变量方程:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \quad (3.2.6)$$

两个线性无关的变量相等, 只能同为常数:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k \quad (3.2.7)$$

转化为两个常微分方程:

$$\begin{cases} X'' = kX \\ T'' = kc^2T \end{cases} \quad (3.2.8)$$

### 3.2.3 空间常微分方程的求解

$$X'' - kX = 0 \quad X(0) = 0 \quad (X(l) = 0) \quad (3.2.9)$$

情况 1 若  $k > 0$

通解为  $X(x) = C_1 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \sinh \mu x$ , 其中  $k = \mu^2$

代入初始条件

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \cdot \sinh \mu l = 0 \quad \therefore C_2 = 0 \quad (3.2.10)$$

验证 3.2.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{双曲余弦} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{双曲正弦} \quad (3.2.11)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (3.2.12)$$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (3.2.13)$$

$$(\cosh x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad (3.2.14)$$

$$(\sinh x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (3.2.15)$$

$$\therefore X = C_1 \cdot u \cdot \sinh \mu x + C_2 \cdot u \cdot \cosh \mu x \quad (3.2.16)$$

$$X'' = C_1 \cdot \mu^2 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \mu^2 \cdot \sinh \mu x \quad (3.2.17)$$

$$X'' - kX = 0 \quad \therefore k = \mu^2 \quad (3.2.18)$$

情况 2 若  $k = 0$

则  $X'' = 0$

$$X(x) = C_1x + C_2 \quad \text{且} \quad X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \quad (3.2.19)$$

$$\therefore C_1 = C_2 = 0 \quad (3.2.20)$$

情况 3 若  $k < 0$

$$\text{即 } X'' + \mu^2 X = 0 \quad X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \quad k = -\mu^2$$

通解:

$$X = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \quad (3.2.21)$$

边界条件:

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \sin \mu l = 0 \quad (3.2.22)$$

非平凡解要求:

$$\sin \mu l = 0 \quad \therefore \mu l = n\pi \quad n \text{ 为任意正整数} \quad (3.2.23)$$

特征值:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{l} \quad (3.2.24)$$

特征函数:

$$X_n = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C 吸收正负号}) \quad (3.2.25)$$

特征值:

$$k = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (3.2.26)$$

验证 3.3. 一阶导数:

$$X' = -C_1 \mu \sin \mu x + C_2 \mu \cos \mu x \quad (3.2.27)$$

二阶导数:

$$X'' = -C_1 \mu^2 \cos \mu x - C_2 \mu^2 \sin \mu x \quad (3.2.28)$$

满足方程:

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad (3.2.29)$$

### 3.2.4 时间常微分方程的求解

$$T'' + \left(c \cdot \frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot T = 0 \implies T'' + (c\mu_n)^2 T = 0, \quad \text{其中 } \lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l}$$

同理可得通解:

$$T = C_3 \cos \lambda_n t + C_4 \sin \lambda_n t \quad (3.2.30)$$

### 3.2.5 得偏微分方程通解

因此:

$$u_n(x, t) = X \cdot T = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \quad (3.2.31)$$

由于方程为线性齐次, 故可用叠加原理:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \quad (3.2.32)$$

### 3.2.6 初始条件求系数

原函数初始条件求  $a_n$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (3.2.33)$$

由初始条件:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot a_n = f(x) \quad (3.2.34)$$

利用内积公式 (需要  $f \in L^2$ ):

$$a_n = \frac{\langle f(x), \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle}{\langle \sin \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle} = \frac{\int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx} \quad (3.2.35)$$

化简得:

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (3.2.36)$$

偏导初始条件求  $b_n$

对  $u_n$  求偏导:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (-a_n \lambda_n \sin \lambda_n t + b_n \lambda_n \cos \lambda_n t) \quad (3.2.37)$$

在  $t = 0$  时:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot b_n \lambda_n \quad (3.2.38)$$

对总解求偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x) \quad (3.2.39)$$

利用内积公式 (需要  $f \in L^2$ ):

$$b_n \lambda_n = \frac{\langle g(x), \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle}{\langle \sin \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (3.2.40)$$

化简得:

$$b_n = \frac{2}{l\lambda_n} \cdot \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (3.2.41)$$

### 3.2.7 用数分知识求系数, 条件和前面泛函内积不一样

考虑函数  $f(t)$  的傅里叶级数展开:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (3.2.42)$$

计算  $a_0$ :

$$\frac{a_0}{2} = f - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (3.2.43)$$

$$a_0 = 2f - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (3.2.44)$$

对  $a_0$  积分, 若积分和求和可换序:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt \quad (3.2.45)$$

化简得:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dt \quad (3.2.46)$$

计算  $a_n$ :

$$f \cos nt = \frac{a_0}{2} \cos nt + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \cos nt \quad (3.2.47)$$

积分得, 若积分和求和可换序:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nt dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos nt dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos nt dt \right) \quad (3.2.48)$$

化简得:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt dt = a_n \pi \quad (3.2.49)$$

因此:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt dt \quad (3.2.50)$$

同理可得:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \sin nt dt \quad (3.2.51)$$

级数收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx < \infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx < \infty \quad (3.2.52)$$

详细条件可以去看我的傅里叶分析笔记。

### 3.2.8 总结

一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.2.53)$$

边界条件:

$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.2.54)$$

初始条件:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad 0 < x < l \quad (3.2.55)$$

解为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \quad (3.2.56)$$

其中:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (3.2.57)$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (3.2.58)$$

$$\lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l} \quad (3.2.59)$$