# 偏微分方程笔记

陈柏均

2025 年 5 月 12 日

# 目录

# 1 一阶拟线性方程之齐次传输方程

## 1.1 变量替换求解常系数齐次传输方程

### 1.1.1 问题描述

假设 $a_1 \neq 0$ 且 $a_2 \neq 0$，我们求解常系数传输方程：

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1.1}$$

### 1.1.2 通解

核心思想：通过变量替换，把二元偏微分转化成一元的常微分求解。

其中 $u = u(t, x)$。引入坐标变换 $(\alpha, \beta)$，使得 $u = u(\alpha, \beta)$，且：

$$\begin{cases} \alpha = ax + bt, \\ \beta = cx + dt. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

利用链式法则计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{1.1.4}$$

将 (1.1.3) 和 (1.1.4) 代入原方程 (1.1.1)：

$$a_1 \left( b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + a_2 \left( a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0. \tag{1.1.5}$$

整理后得到：

$$(a_1 b + a_2 a)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a_1 d + a_2 c)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \tag{1.1.6}$$

为消去一个变量，pde 转 ode，选择让第二项系数为 0，把方程 (1.1.6) 简化为：

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \tag{1.1.7}$$

选择系数

$$\begin{cases} a = 0, \quad b = 1, \\ c = a_1, \quad d = -a_2. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

此时坐标变换为：

$$\begin{cases} \alpha = t, \\ \beta = a_1 x - a_2 t. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

由(1.1.7) 表明 $u$ 仅依赖于 $\beta$，即通解为：

$$u(t,x)=L(a_1x-a_2t), \tag{1.1.10}$$

其中 $L(\cdot)$ 是任意可微函数。

### 1.1.3 特解（初始条件或边界条件）

已知初始条件 $u(x,0)=e^{-x^2}$，求下面常系数运输方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1.11}$$

由(1.1.10)可知

$$u(x,t)=f(x-t)=e^{-(x-t)^2} \tag{1.1.12}$$

## 1.2 波的传播求解常系数齐次传输方程

### 1.2.1 问题描述

在一阶线性方程中，有一种最简单的形如

$$u_t+b\cdot \mathrm{D}u=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,\infty) \tag{1.2.1}$$

的方程，称为传输方程，其中，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是已知 $n$ 维常向量，$u=u(x,t)$，$\mathrm{D}u=(u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})$。

### 1.2.2 通解

由方程的形式可以看出，$u(x,t)$ 沿一个具体的方向的方向微商等于零。事实上，固定一点 $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$，记过该直线的参数方程为 $(x+bs,t+s),s\in\mathbb{R}$，考查函数 $u$ 在该直线上的值。令

$$z(s)=u(x+bs,t+s),\quad s\in\mathbb{R}. \tag{1.2.2}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\mathrm{D}u(x+sb,t+s)\cdot b+u_t(x+sb,t+s)=0, \tag{1.2.3}$$

因此，函数 $z(s)$ 在过点 $(x,t)$ 且具有方向 $(b,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$ 的直线上取常数值）（和下文中特征线法求解传输方程的 $(1,p(x,y))$ 含义相同）。所以，如果我们知道解 $u$ 在这条直线上一点的值，则就得到它沿此直线上的值。这就引出下面求解初值问题的方法。

### 1.2.3 初值问题之特解

设 $a \in \mathbb{R}^n$ 是已知常向量，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是给定函数。考察传输方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a \cdot \mathrm{D}u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

如上取定 $(x,t)$，过点 $(x,t)$ 且具有方向 $(a,1)$ 的直线的参数式为 $(x+as, t+s)$，$s \in \mathbb{R}$。当 $s = -t$ 时，此直线与平面 $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \{t=0\}$ 相交于点 $(x-at, 0)$。由上文分析知 $u$ 沿此直线取常数值，而由初值条件，$u(x-at,0) = f(x-at)$，便得

$$u(x,t) = f(x-at), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \tag{1.2.5}$$

*注记* 1.1. 这表示对于每一个特点的点都有一条特征线，他的函数为特定的 $f$。取遍每个特征线就能取遍域内所有点，对于任意的点都有任意的函数表达式

所以，如果有解，必由上式子表示，因此解是唯一的；反之，若 $f$ 一阶连续可微，则可直接验证由上式子表示的函数 $u(x,t)$ 是问题的解。这就是齐次传输方程初值问题解的存在唯一性。

## 1.3 波的传播求解常系数非齐次传输方程

### 1.3.1 问题描述

考察非齐次传输方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a \cdot \mathrm{D}u = f, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{1.3.1}$$

### 1.3.2 求解

受齐次问题解法的启示，我们仍然先取定 $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$，对 $s \in \mathbb{R}$，令 $z(s) = u(x+as, t+s)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \mathrm{D}u(x+as,t+s) \cdot a + u_t(x+as,t+s) = f(x+as,t+s). \tag{1.3.2}$$

因此，

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x-at,0) &= u(x,t) - g(x-at) \\ &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-t}^{0} f(x+as,t+s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{0}^{t} f(x+a(s-t),s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

于是，得到问题的在 $x \in \mathbb{R}^n$，$t \geq 0$ 上的解

$$u(x,t) = g(x-at) + \int_0^t f(x+a(s-t),s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.3.4}$$

在下一章，这个公式将被用来求解一维波动方程。

## 1.4 特征线法求解变系数齐次传输方程

### 1.4.1 通解

一阶线性变系数偏微分方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = (1, p(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.4.1}$$

其中 $p(x,y)$ 是 $x$ 和 $y$ 的函数。$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 为梯度，$(1, p(x,y))$ 为方向，一整个乘积为方向导数，方向导数为 0 意味着，$u(x,y) = C$ 在切向量为 $(1, p(x,y))$ 这条曲线上，即

$$u(x,y)|_{\Gamma} = C \tag{1.4.2}$$

$$u(x,y) = f(C) \tag{1.4.3}$$

$\Gamma$ 曲线上，任意点 $(x,y)$ 求导 ($\Gamma$ 曲线为 $XOY$ 平面上的曲线，故 $y$ 可表示成 $x$ 的函数)，可得切向量 $(1, \frac{dy}{dx})$

所以我们找到 $\Gamma$ 曲线，把二元偏微分转化成一元的常微分，令

$$\frac{dy}{dx} = p(x,y) \tag{1.4.4}$$

可解得

$$C = \phi(x,y) \tag{1.4.5}$$

得方程解

$$u(x,y) = f(C) = f(\phi(x,y)) \tag{1.4.6}$$

$(1, \frac{dy}{dx})$ 为该曲线的切向量。我们称这条曲线叫特征线。只需要取遍所有的特征曲线就可以取遍 $XOY$ 平面上所有的点，若有初始条件或者边界条件可以确定每条特征线在 $u(x,y)$ 对应的取值，就可以完整确定 $u(x,y)$ 这个函数。

**示例 1.4.1.** 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.4.7}$$

此时我们有 $p(x,y) = x$，解 $\frac{dy}{dx} = x$，我们得到特征线 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$，或 $y - \frac{1}{2}x^2 = C$。从而 $\phi(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2$，偏微分方程的通解为 $u(x,y) = f(\phi(x,y))$，其中 $f$ 是任意函数。把它们代回方程，直接验证，便知是解。

# 2　一维齐次波动方程的初值问题

## 2.1　d’Alembert 公式

### 2.1.1　问题描述

先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

### 2.1.2　求解

由算子复合作用的概念，易验证下述算子因式分解

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{2.1.2}$$

令

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u. \tag{2.1.3}$$

由 (2.1.2), 得

$$v_t(x,t) + a v_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{2.1.4}$$

这是一维传输方程，且由 (2.1.3) 知 $v$ 满足初值条件

$$v(x,0) = \psi(x) - a\varphi'(x). \tag{2.1.5}$$

由 (1.2.5), 得

$$v(x,t) = \psi(x-at) - a\varphi'(x-at). \tag{2.1.6}$$

将 $v$ 代入 (2.1.3)，得

$$u_t(x,t) - a u_x(x,t) = \psi(x-at) - a\varphi'(x-at), \tag{2.1.7}$$

其中 $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$。

对此非齐次传输方程，已知 $u(x,0)=\varphi(x)$，用公式(1.3.4)得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(x+at)+\int_0^t\left[\psi(x-2as+at)-a\varphi'(x-2as+at)\right]\mathrm{d}s\\&=\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left[\psi(y)-a\varphi'(y)\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

称此式为 d'Alembert (达朗贝尔) 公式.

# 3 一维波动方程的初边值问题

## 3.1 反射法

反射法的核心思想：利用达朗贝尔公式把解延拓

### 3.1.1 问题描述

求解半直线 $\mathbb{R}_+=\{x>0\}$ 上的初边值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}_+,t>0,\\ u(x,0)=g(x),\quad u_t(x,0)=h(x), & x\in\mathbb{R}_+,\\ u(0,t)=0, & t\geq 0,\end{cases}\tag{3.1.1}$$

其中，$g,h$ 是已知函数，满足 $g(0)=h(0)=0$。

### 3.1.2 求解

先把问题转换到全空间 $\mathbb{R}$ 上去。为此，对函数 $u,g,h$ 作奇延拓（或称奇反射）如下：

$$\bar{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & x\geq 0,t\geq 0,\\ -u(-x,t), & x\leq 0,t\geq 0,\end{cases}\tag{3.1.2}$$

$$\bar{g}(x)=\begin{cases}g(x), & x\geq 0,\\ -g(-x), & x\leq 0,\end{cases}\tag{3.1.3}$$

$$\bar{h}(x)=\begin{cases}h(x), & x\geq 0,\\ -h(-x), & x\leq 0.\end{cases}\tag{3.1.4}$$

则 $\bar{u}(x,t)$ 满足问题：

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ \bar{u}(x,0) = \bar{g}(x), \quad \bar{u}_t(x,0) = \bar{h}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

注记 3.1. 还可以用特征线法对问题 (3.1.1) 求解，即用初值问题中方程的特征线作自变量的变换，把方程化为双曲型的第二标准型 $u_{\xi\eta} = 0$ 的形式，对它积分两次求出通解 $u = F(\xi) + G(\eta)$，其中，$F$ 和 $G$ 是任意二次光滑函数。然后利用初值条件确定通解中的两个任意函数，便得 d'Alembert 公式。

## 3.2 分离变量法

### 3.2.1 问题描述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{3.2.1}$$

边界条件:

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{3.2.2}$$

初始条件:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \qquad 0 < x < l \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

### 3.2.2 核心思想

核心思想：分离变量法把偏微分转成为两个常微分。

设 $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$，假设解为乘积解。

代入方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T'' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T \tag{3.2.4}$$

代入原方程:

$$X \cdot T'' = c^2 \cdot X'' \cdot T \tag{3.2.5}$$

转化为可分离变量方程:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{3.2.6}$$

两个线性无关的变量相等，只能同为常数:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k \tag{3.2.7}$$

转化为两个常微分方程:

$$\begin{cases} X'' = kX \\ T'' = kc^2T \end{cases} \tag{3.2.8}$$

### 3.2.3 空间常微分方程的求解

$$X'' - kX = 0 \quad X(0) = 0 \quad (X(l) = 0 \tag{3.2.9}$$

情况 1　若 $k > 0$

通解为 $X(x) = C_1 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \sinh \mu x$，其中 $k = \mu^2$

代入初始条件

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \cdot \sinh \mu l = 0 \quad \therefore C_2 = 0 \tag{3.2.10}$$

验证 3.2.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{双曲余弦} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{双曲正弦} \tag{3.2.11}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{3.2.12}$$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{3.2.13}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \tag{3.2.14}$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \tag{3.2.15}$$

$$\therefore X = C_1 \cdot u \cdot \sinh \mu x + C_2 \cdot u \cdot \cosh \mu x \tag{3.2.16}$$

$$X'' = C_1 \cdot \mu^2 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \mu^2 \cdot \sinh \mu x \tag{3.2.17}$$

$$X'' - kX = 0 \quad \therefore k = \mu^2 \tag{3.2.18}$$

情况 2　若 $k=0$

则 $X''=0$

$$X(x)=C_1x+C_2 \quad 且 \quad X(0)=0 \quad X(l)=0 \tag{3.2.19}$$

$$\therefore C_1=C_2=0 \tag{3.2.20}$$

情况 3　若 $k<0$

即 $X''+\mu^2X=0 \quad X(0)=0 \quad X(l)=0 \quad k=-\mu^2$

通解:

$$X=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x \tag{3.2.21}$$

边界条件:

$$X(0)=C_1=0 \quad X(l)=C_2\sin\mu l=0 \tag{3.2.22}$$

非平凡解要求:

$$\sin\mu l=0 \quad \therefore \mu l=n\pi \quad n\ 为任意正整数 \tag{3.2.23}$$

特征值:

$$\mu_n=\frac{n\pi}{l} \tag{3.2.24}$$

特征函数:

$$X_n=C_2\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,3,\ldots \quad （C\ 吸收正负号） \tag{3.2.25}$$

特征值:

$$k=-\mu^2=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{3.2.26}$$

验证 3.3. 一阶导数:

$$X'=-C_1\mu\sin\mu x+C_2\mu\cos\mu x \tag{3.2.27}$$

二阶导数:

$$X''=-C_1\mu^2\cos\mu x-C_2\mu^2\sin\mu x \tag{3.2.28}$$

满足方程:

$$X''+\mu^2X=0 \tag{3.2.29}$$

### 3.2.4　时间常微分方程的求解

$T''+\left(c\cdot\frac{n\pi}{l}\right)^2\cdot T=0 \implies T''+(c\mu_n)^2T=0$，其中 $\lambda_n=c\mu_n=\frac{cn\pi}{l}$

同理可得通解：

$$T=C_3\cos\lambda_nt+C_4\sin\lambda_nt \tag{3.2.30}$$

### 3.2.5 得偏微分方程通解

因此：

$$u_n(x,t) = X \cdot T = \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot (a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t) \tag{3.2.31}$$

由于方程为线性齐次，故可用叠加原理：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot (a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t) \tag{3.2.32}$$

### 3.2.6 初始条件求系数

原函数初始条件求 $a_n$

$$u(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{3.2.33}$$

由初始条件：

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot a_n = f(x) \tag{3.2.34}$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$a_n = \frac{\langle f(x), \sin\frac{n\pi}{l}x \rangle}{\langle \sin\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x \rangle} = \frac{\int_0^l f(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx} \tag{3.2.35}$$

化简得：

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.2.36}$$

偏导初始条件求 $b_n$

对 $u_n$ 求偏导:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot (-a_n\lambda_n \sin\lambda_n t + b_n\lambda_n \cos\lambda_n t) \tag{3.2.37}$$

在 $t = 0$ 时:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot b_n\lambda_n \tag{3.2.38}$$

对总解求偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n \sin\frac{n\pi}{l}x = g(x) \tag{3.2.39}$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$b_n\lambda_n = \frac{\langle g(x), \sin\frac{n\pi}{l}x \rangle}{\langle \sin\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x \rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.2.40}$$

化简得:

$$b_n = \frac{2}{l\lambda_n} \cdot \int_0^l g(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.2.41}$$

### 3.2.7 用数分知识求系数，条件和前面泛函内积不一样

考虑函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{3.2.42}$$

计算 $a_0$:

$$\frac{a_0}{2} = f - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{3.2.43}$$

$$a_0 = 2f - 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{3.2.44}$$

对 $a_0$ 积分, 若积分和求和可换序：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt \tag{3.2.45}$$

化简得:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,dt \tag{3.2.46}$$

计算 $a_n$:

$$f\cos nt = \frac{a_0}{2}\cos nt + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\cos nt \tag{3.2.47}$$

积分得，若积分和求和可换序：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nt\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\,dt + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\cos nt\,dt\right) \tag{3.2.48}$$

化简得:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt = a_n\pi \tag{3.2.49}$$

因此:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt \tag{3.2.50}$$

同理可得:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\sin nt\,dt \tag{3.2.51}$$

级数收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx < \infty \tag{3.2.52}$$

详细条件可以去看我的傅里叶分析笔记。

### 3.2.8 总结

一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{3.2.53}$$

边界条件:

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{3.2.54}$$

初始条件:

$$u(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < l \tag{3.2.55}$$

解为:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \tag{3.2.56}$$

其中:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \tag{3.2.57}$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \tag{3.2.58}$$

$$\lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l} \tag{3.2.59}$$