偏微分方程第三次作业

班级:22数学1　姓名:陈柏均　学号:202225110102

题 1. 求解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

(提示：齐次化原理+达朗贝尔公式)

解. *步骤1.齐次方程求解*

齐次波动方程(1)的初值问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

应用达朗贝尔公式，解为：

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin s\, ds$$

计算积分：

$$\int_{x-t}^{x+t} \sin s\, ds = -\cos s\Big|_{x-t}^{x+t} = -\cos(x+t) + \cos(x-t)$$

利用三角恒等式展开：

$$\cos(x+t) = \cos x\cos t - \sin x\sin t\cos(x-t) = \cos x\cos t + \sin x\sin t$$

代入后得到：

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2}\left[(\cos x\cos t + \sin x\sin t) - (\cos x\cos t - \sin x\sin t)\right] = \sin x\sin t$$

步骤2. 非齐次方程求解

非齐次方程(2)的初值问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

应用齐次化原理，非齐次解为：

$$u_p(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin s\, ds\, d\tau$$

计算内部积分：

$$\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin s\, ds = \tau\left[-\cos(x+t-\tau) + \cos(x-t+\tau)\right]$$

利用三角恒等式:

$$\cos(x - t + \tau) - \cos(x + t - \tau) = 2\sin x \sin(t - \tau)$$

代入后得到:

$$u_p(x,t) = \sin x \int_0^t \tau \sin(t - \tau)\, d\tau$$

变量替换 $u = t - \tau$，计算积分:

$$\int_0^t \tau \sin(t - \tau)\, d\tau = t - \sin t$$

因此，非齐次解为:

$$u_p(x,t) = \sin x (t - \sin t)$$

步骤*3.*总解求解

将齐次解和非齐次解相加，得到总解:

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t) = \sin x \sin t + \sin x (t - \sin t) = t \sin x$$

题 2. 解下列半直线上的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 2x, & u_t|_{t=0} = x^2, \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

解. *步骤1.* 奇延拓处理

定义延拓函数以处理半无界边界条件:

$$\overline{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & x \geq 0 \\ -u(-x,t) & x < 0 \end{cases}, \quad \overline{h}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -(-x)^2 = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

边界条件满足:

$$\overline{g}(0) = 0, \quad \overline{h}(0) = 0$$

步骤2. 达朗贝尔公式应用

扩展后的问题解为:

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\overline{g}(x+at) + \overline{g}(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \overline{h}(y)\,dy$$

其中 $\overline{g}(x) = 2x$。

步骤3. 分区域求解

情形一: $x \geq at$(远离边界)

积分区间完全在正半轴:

$$\begin{aligned} \overline{u}(x,t) &= \frac{1}{2}[2(x+at) + 2(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} y^2\,dy \\ &= 2x + \frac{1}{6a}\left[(x+at)^3 - (x-at)^3\right] \\ &= 2x + \frac{t}{3}\left[3x^2 + a^2t^2\right] \\ &= 2x + tx^2 + \frac{1}{3}a^2t^3 \end{aligned}$$

情形二: $0 < x < at$(近边界)

积分区间跨越原点, 需考虑奇延拓:

$$\begin{aligned} \overline{u}(x,t) &= \frac{1}{2}[2(x+at) - 2(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} y^2\,dy \\ &= 2x + \frac{1}{6a}\left[(x+at)^3 - (at-x)^3\right] \\ &= 2x + \frac{x}{3a}\left[x^2 + 3a^2t^2\right] \\ &= \frac{1}{3a}x^3 + (at^2+2)x \end{aligned}$$

步骤4. 综合解

最终解为分段函数：

$$u(x,t)=\begin{cases}2x+tx^2+\dfrac{1}{3}a^2t^3 & x\geq at\\ \dfrac{1}{3a}x^3+(at^2+2)x & 0<x<at\end{cases}$$

题 3. 求下列特征值问题的特征值和特征函数

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

解. 步骤*1.* 当 $\lambda < 0$ 时

设 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，方程通解为：

$$X(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)$$

代入边界条件 $X(0) = 0$：

$$C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

导数表达式：

$$X'(x) = \mu C_2 \cosh(\mu x)$$

代入 $X'(l) = 0$：

$$\mu C_2 \cosh(\mu l) = 0 \implies C_2 = 0$$

故仅有零解，排除负特征值。

步骤*2.* 当 $\lambda = 0$ 时

方程简化为：

$$X''(x) = 0 \implies X(x) = C_1 x + C_2$$

代入边界条件：

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X'(l) = C_1 = 0$$

同样仅有零解，排除零特征值。

步骤*3.* 当 $\lambda > 0$ 时

设 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，方程通解为：

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

代入 $X(0) = 0$：

$$A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \implies A = 0$$

导数表达式：

$$X'(x) = \mu B\cos(\mu x)$$

代入 $X'(l) = 0$：

$$\mu B\cos(\mu l) = 0$$

要求非零解，需满足：

$$\cos(\mu l) = 0 \implies \mu l = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

得特征值：

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$$

对应特征函数：

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$$

题 4. 求弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

满足以下定解条件的解

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \sin\dfrac{3\pi x}{2l}, \qquad u_t|_{t=0} = \sin\dfrac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \le x \le l, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

解. *方法1.分离变量法*

　　步骤1. 分离变量

设解为 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入方程得：

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

分离为两个常微分方程：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

　　步骤2. 求解空间方程

边界条件 $X(0) = X'(l) = 0$，分三种情况讨论：

情形1. $\lambda < 0$

设 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，通解为：

$$X(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)$$

代入边界条件 $X(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$。再代入 $X'(l) = 0$:

$$\mu C_2 \cosh(\mu l) = 0 \implies C_2 = 0$$

无非零解，排除负特征值。

情形2. $\lambda = 0$

通解为：

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

代入边界条件得 $C_1 = C_2 = 0$，排除零特征值。

情形3. $\lambda > 0$

设 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，通解为：

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

代入 $X(0) = 0$ 得 $A = 0$。再代入 $X'(l) = 0$:

$$\mu B \cos(\mu l) = 0 \implies \cos(\mu l) = 0$$

解得特征值：

$$\mu l = \frac{(2n+1)\pi}{2} \implies \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

对应特征函数：

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$$

步骤*3.* 求解时间方程

对应每个 λ_n，时间方程为：

$$T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = 0$$

通解为：

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)$$

步骤*4.* 合成通解

由叠加原理可得*(*B_n被吸收了*)*：

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\left[C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\right]$$

步骤*5.* 确定系数得解

代入初始条件 $u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{2l}$：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = \sin\frac{3\pi x}{2l}$$

比较系数得：

$$C_1 = 1, \quad C_n = 0\ (n \neq 1)$$

代入初始条件 $u_t(x,0) = \sin\frac{5\pi x}{2l}$：

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = \sin\frac{5\pi x}{2l}$$

比较系数得：

$$D_2 = \frac{2l}{5\pi a}, \quad D_n = 0\ (n \neq 2)$$

$$u(x,t) = \sin\frac{3\pi x}{2l}\cos\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right) + \frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi x}{2l}\sin\left(\frac{5\pi a}{2l}t\right)$$

方法2.反射法达朗贝尔公式做延拓

考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

有时可以用达朗贝尔公式求解初边值问题。又设 $f, g \in C^2$，且满足相容条件：

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f'(L) = 0, \\ g(0) = 0, \quad g'(L) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

奇延拓 $(x = 0)$ + 偶延拓 $(x = L)$，周期$4L$.

题目中的f,g延拓之后还是原函数。

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2l}(x+at)\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2l}(x-at)\right)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin\left(\frac{5\pi}{2l}y\right) dy$$

计算第一项：

由于 $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$$\therefore \sin\left(\frac{3\pi}{2l}(x+at)\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2l}at\right)$$

计算第二项：

$$\int_{x-at}^{x+at} \sin\left(\frac{5\pi}{2l}y\right) dy = -\frac{2l}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2l}y\right)\Big|_{x-at}^{x+at}$$

$$= -\frac{2l}{5\pi}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2l}(x+at)\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{2l}(x-at)\right)\right]$$

由于$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$

$$\int_{x-at}^{x+at} \sin\left(\frac{5\pi}{2l}y\right) dy = -\frac{2l}{5\pi}\cdot(-2)\sin\left(\frac{5\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2l}at\right)$$

$$= \frac{4l}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2l}at\right)$$

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\cos\left(\frac{3\pi at}{2l}\right) + \frac{2l}{5\pi a}\sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right)\sin\left(\frac{5\pi at}{2l}\right)$$

题 5. 求解热传导方程

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

的$Cauchy$问题，已知初始条件为

(1) $u|_{t=0} = \sin x$;

(2) $u|_{t=0} = e^{-|x|}$;

(3) $u|_{t=0} = x^2 + 1$;

(4) $u|_{t=0} = x + x^2$.

解. 热传导方程的解由热核卷积给出：

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

公式详细推导在我$github$上的偏微分笔记上有*GitHub - Albert-Chen04/Partial-differential-equation*

下面是高斯型函数一些积分的计算

命题 1. 实数形式的高斯积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

证明.

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(y-b)^2} dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a((x-b)^2+(y-b)^2)} dxdy$$

由极坐标变量替换可得

$$(x-b)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x - b = r\cos\theta \\ y - b = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$dxdy=r\,d\theta\,dr$$

$$A^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-ar^2}r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-ar^2}d(r^2)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-\frac{1}{a}e^{-ar^2}\Big|_0^{+\infty}\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a}\,d\theta=\frac{\pi}{a}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a(x-b)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

推论 1. $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dz=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}$

证明.

$$\text{设}\quad\Phi(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\frac{d\Phi}{da}=-\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{d}{da}\left(\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}$$

□

推论 2. $\int_{-\infty}^{+\infty}(z+bx)^2e^{-az^2}dz==\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}+b^2x^2\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明. 展开得

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-az^2}dz+\int_{-\infty}^{+\infty}2zbxe^{-az^2}dz+b^2x^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-az^2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}+b^2x^2\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

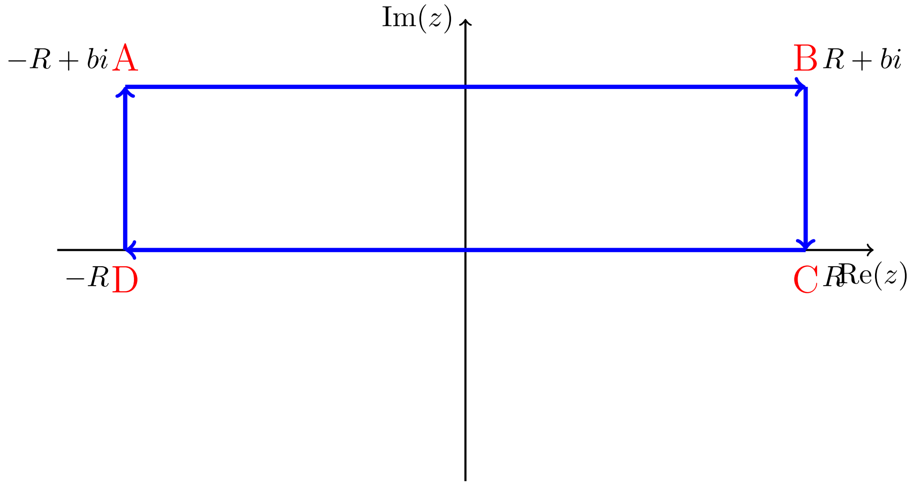
□

命题 2. 推广复数形式的高斯积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a(x-bi)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad(a>0,b\in\mathbb{R})\tag{5}$$

证明. 该积分等价于证明 $\int_{-\infty+bi}^{+\infty+bi} e^{-az^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$。即$\int_{AB} e^{-az^2}dz$，我们通过围道积分来证明。

考虑复变函数 $f(z) = e^{-az^2}$，它在整个复平面上解析（为整函数）。我们选取如下所示的矩形闭合围道 C 进行积分，该围道由四条路径组成：AB, BC, CD 和 DA。



根据柯西积分定理，函数在闭合围道上的积分为零：

$$\oint_C e^{-az^2}dz = \int_{AB} e^{-az^2}dz + \int_{BC} e^{-az^2}dz + \int_{CD} e^{-az^2}dz + \int_{DA} e^{-az^2}dz = 0 \tag{6}$$

我们分别计算 $R \to \infty$ 时各段路径的积分。

1. 路径 BC **与** DA**:** 在路径 BC 上，参数化为 $z = R + iy$, $z(b) = R + ib$, $z(0) = R$,$dz = idy$, 其中 y 从 0 到 b。

$$\left|\int_{BC} e^{-az^2}dz\right| = \left|\int_{R+bi}^{R} e^{-a(R+iy)^2}idy\right| = \left|\int_b^0 e^{-a(R+iy)^2}idy\right| \leq \int_b^0 |e^{-a(R^2-y^2+2iRy)}|dy$$

$$= \int_b^0 e^{-aR^2}e^{ay^2}dy = e^{-aR^2}\int_b^0 e^{ay^2}dy$$

由于 $\int_b^0 e^{ay^2}dy$ 是一个关于 b 的常数，而 $\lim_{R\to\infty} e^{-aR^2} = 0$，所以：

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{BC} e^{-az^2}dz\right| = 0$$

同理可证，路径 AD 的积分也为零。

2. 路径 AB**:** 在路径 AB 上，参数化为 $z = x + bi$, $dz = dx$, 其中 x 从 R 变化到 $-R$。,由柯西积分公式(6)可知

$$\int_{BA} e^{-az^2}dz = -\int_{CD} e^{-az^2}dz = \int_{DC} e^{-az^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

这证明了高斯积分的结果可以从实变量推广到复变量。

□

推论 3. 我们计算高斯函数 $f(x)=e^{-ax^2}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-iwx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+iwx)}dx\end{aligned}$$

为了计算这个积分，我们对指数部分进行配方:

$$\begin{aligned}ax^2+iwx &= a\left(x^2+\frac{iw}{a}x\right) \\ &= a\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{iw}{2a}+\left(\frac{iw}{2a}\right)^2-\left(\frac{iw}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2-\frac{i^2w^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2+a\left(\frac{w^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2+\frac{w^2}{4a}\end{aligned}$$

将配方后的结果代回积分中：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[a\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2+\frac{w^2}{4a}\right]}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2}e^{-\frac{w^2}{4a}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2}dx\end{aligned}$$

根据命题(2)：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{iw}{2a}\right)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

因此，最终结果为：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}\end{aligned}$$

推论 4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=e^{-\frac{k^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\cdot e^{-ax^2}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin kx\cdot e^{-ax^2}dx$$

第二项为奇函数，积分为0，所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\cdot e^{-ax^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx}dx$$

配方

$$\begin{aligned}-ax^2+ikx&=-a\left(x^2-\frac{ik}{a}x\right)\\&=-a\left[x^2-\frac{ik}{a}x+\left(\frac{ik}{2a}\right)^2-\left(\frac{ik}{2a}\right)^2\right]\\&=-a\left(x-\frac{ik}{2a}\right)^2-\frac{k^2}{4a}\end{aligned}$$

所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx}dx=e^{-\frac{k^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

命题 3. $\int_c^{+\infty} e^{-a(x-b)^2}dx$ 积分没有原函数

方法1.不成熟的证明方法望指正

证明.

$$A^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-a(x-b)^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-a(y-b)^2}dy\right)$$

$$\neq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-ar^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

在这里不能像上面那样做极坐标变量代换，因为圆心为(b,b)，而坐标点不是全平面，当r大到一定程度，角度再也不能转一圈，角度会随着r的增大而变小，无法用二重积分的定义表示。

□

(1) 初始条件 $u(x,0)=\sin x$

解.

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} siny\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

$$设\quad z=y-x\quad\therefore\quad y=z+x\quad dz=dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(z+x)\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin z\cdot\cos x+\cos z\cdot\sin x]\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz$$

$$=\cos x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\sin z\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz+\sin x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\cos z\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz$$

第一项为奇函数，积分为*0*

$$=\sin x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\cos z\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz$$

由推论(4)可得，

$$\therefore u(x,t)=\sin x\cdot e^{-t}\cdot\sqrt{4\pi t}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}=e^{-t}\cdot\sin x$$

(2) 初始条件 $u(x,0)=e^{-|x|}$

解.

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|y|}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-y}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy+\int_{-\infty}^{0}e^{y}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

由命题(3)可知，该方程没有原函数。

(3) 初始条件 $u(x,0)=x^2+1$

解.

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}(y+1)\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

第一项：设$z=y-x \quad y=z+x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(z+x)^2\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz$$

由推论(2)可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(z+x)^2\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4t}\right)^{-\frac{3}{2}}+x^2\cdot\sqrt{4\pi t}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=2t+x^2$$

第二项，由命题(1)可得：

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=1$$

$$\therefore u(x,t)=2t+x^2+1$$

(4) 初始条件 $u(x,0)=x+x^2$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}(y+y^2)\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy+\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

第一项:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

设 $\quad z=y-x \quad , \quad y=z+x$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}(z+x)\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dy\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot e^{-\frac{z^2}{4t}}dz+x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}}dz\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

$$=x\cdot\sqrt{4\pi t}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}=x$$

第二项，第三小题算过

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = 2t + x^2$$

$$\therefore u(x,t) = 2t + x^2 + x$$