偏微分方程第二次作业

班级:22 数学 1　姓名: 陈柏均　学号:202225110102

题 1. 如果已知下述常微分方程的特定初值问题

$$\begin{cases} -y'' + y = 0, \quad x > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

的解为 $y = Y(x)$，试通过它写出一般初值问题

$$\begin{cases} -y'' + y = f(x), \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases} \tag{2}$$

的解的表达式。

解. *步骤 1. 齐次化原理*

齐次化原理指出，非齐次方程的解可以分解为齐次方程的解与非齐次项的特解之和。具体来说，解的结构为：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

其中：

$$\begin{cases} -y'' + y = 0 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases} \tag{3}$$

$y_h(x)$ 是齐次方程(3)的解，$y_p(x)$ 是非齐次方程(15)的特解。

步骤 2. 齐次解 $y_h(x)$

已知齐次方程(3)的通解为：

$$y_h(x) = C_1Y(x) + C_2Y'(x)$$

其中 $Y(x)$ 是齐次方程(3)的一个特解，满足 $Y(0) = 0$ 和 $Y'(0) = 1$。通过初始条件 $y(0) = a$ 和 $y'(0) = b$，可以确定系数 C_1 和 C_2：

$$\begin{aligned} y_h(0) = a &\implies C_1Y(0) + C_2Y'(0) = a \implies C_2 = a, \\ y_h'(0) = b &\implies C_1Y'(0) + C_2Y''(0) = b \implies C_1 = b. \end{aligned}$$

因此，齐次解 $y_h(x)$ 为：

$$y_h(x) = aY'(x) + bY(x)$$

步骤 3. 构造特解 $y_p(x)$

利用 *Duhamel* 原理，特解可表示为：

$$y_p(x) = -\int_0^x Y(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

步骤 4. 最终解的表达式

综上所述，一般初值问题(15)的解为：

$$y(x) = aY'(x) + bY(x) - \int_0^x Y(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

题 2. 找出函数变换将下面的边界条件齐次化:

1. $u_x(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t)$;

解. 由边界条件

$$u_x(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t\ge 0. \tag{4}$$

设 $u(x,t)=U(x,t)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=\mu_1(t)=U_x(0,t)=b, \\ u(l,t)=\mu_2(t)=U(l,t)=al^2+bl+c, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0(\text{令最高次待定系数为 } 0) \\ b=\mu_1(t) \\ c=\mu_2(t)-\mu_1(t)l \end{cases}$$

构造关于变量 x 的线性辅助函数（直线方程）:

$$U(x,t)=\mu_1(t)(x-l)+\mu_2(t), \tag{5}$$

作变换:

$$v(x,t)=u(x,t)-U(x,t), \tag{6}$$

得:

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=f_4(x,t), & 0<x<l,\ t>0, \\ v(x,0)=\varphi_4(x), \quad v_t(x,0)=\psi_4(x), & 0\le x\le l, \\ v_x(0,t)=0, \quad v_x(l,t)=0. \end{cases} \tag{7}$$

其中:

$$\begin{cases} f_4(x,t)=f(x,t)-\mu_1''(t)(x-l)-\mu_2''(t), \\ \varphi_4(x)=\varphi(x)-\mu_1(0)(x-l)-\mu_2(0), \\ \psi_4(x)=\psi(x)-\mu_1'(0)(x-l)-\mu_2'(0). \end{cases} \tag{8}$$

2. $u(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(l,t)=\mu_2(t)$.

解. 由边界条件

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(l,t)=\mu_2(t), \quad t\ge 0. \tag{9}$$

设 $u(x,t)=U(x,t)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} u(0,t)=\mu_1(t)=U(0,t)=c, \\ u_x(l,t)=\mu_2(t)=U_x(l,t)=2al+b, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
a = 0(\text{令最高次待定系数为 }0) \\
b = \mu_2(t) \\
c = \mu_1(t)
\end{cases}
$$

构造关于变量 x 的线性辅助函数（直线方程）：

$$
U(x,t) = \mu_2(t)x + \mu_1(t), \tag{10}
$$

作变换：

$$
v(x,t) = u(x,t) - U(x,t), \tag{11}
$$

得：

$$
\begin{cases}
v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_3(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\
v(x,0) = \varphi_3(x), \quad v_t(x,0) = \psi_3(x), & 0 \le x \le l, \\
v(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0.
\end{cases} \tag{12}
$$

我的偏微分笔记有详细解答.偏微分笔记

题 3. 求方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

形如 $u = f(r,t)$ 的解（球面波），其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解. 步骤 *1.* 链式法则转换导数

三维波动方程：

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

首先，计算 r 对各变量的一阶和二阶偏导数。由 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 可得：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

同理，$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$。

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

利用链式法则，计算 $u(r)$ 的一阶和二阶偏导数：

$$u_x = u_r \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r \frac{\partial r}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = u_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

同理可得 u_{yy} 和 u_{zz} 的表达式。

将三者相加，得到拉普拉斯算子 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$：

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_{rr}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right] + u_r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \\
&= u_{rr}\left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right] + u_r\left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\right) \\
&= u_{rr}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3}\right) \\
&= u_{rr}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{3r^2 - r^2}{r^3}\right) \\
&= u_{rr} + u_r\left(\frac{2r^2}{r^3}\right) \\
&= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r
\end{aligned}$$

球对称解意味着解 u 只与到原点的距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 有关，即 $u = u(r)$。在球坐标系下，拉普拉斯算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 作用于球对称函数 $u(r)$ 的形式为：

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$$

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$$

步骤 *2.* 变量代换

为了求解这个方程，作变量代换，令 $v(r) = ru(r)$。则 $u(r) = \frac{v(r)}{r}$。

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = \frac{\partial}{\partial r}(u + ru_r) = u_r + u_r + ru_{rr} = ru_{rr} + 2u_r$$

$$v_{tt} - a^2 v_{rr} = 0$$

新的函数 $v(r, t)$ 的初始条件为：

$$v(r, 0) = ru(r, 0) = r\phi(r)$$

$$v_t(r, 0) = ru_t(r, 0) = r\psi(r)$$

我们现在有了关于 $v(r, t)$ 的一维波动方程初值问题。使用达朗贝尔公式求解：

$$v(r, t) = \frac{1}{2}[v(r + at, 0) + v(r - at, 0)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} v_t(s, 0) \, \mathrm{d}s$$

将 v 的初始条件代入：

$$v(r, t) = \frac{1}{2}[(r + at)\phi(r + at) + (r - at)\phi(r - at)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} s\psi(s) \, \mathrm{d}s$$

步骤 *3.* 回代得到最终解

最后，将解 $v(r, t)$ 代换回 $u(r, t) = v(r, t)/r$ *(*对于 $r \neq 0$*):*

$$u(r, t) = \frac{(r + at)\phi(r + at) + (r - at)\phi(r - at)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} s\psi(s) \, \mathrm{d}s$$

题 4. 求如下定解方程，并给出该问题的依赖区域、决定区域和影响区域。

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad y > y_0 \\ u|_{y=y_0} = 3x^2, \quad u_y|_{y=y_0} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

解. 步骤 *1.* 特征方程推导

齐次化原理指出，偏微分方程的解可以通过特征线法分解为齐次方程的解与初始条件的组合。具体来说，解的结构为：

$$u(x,y) = F(y-3x) + G(y+x)$$

其中：

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u|_{y=y_0} = 3x^2, \quad u_y|_{y=y_0} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$F(y-3x)$ 和 $G(y+x)$ 是特征线上的解。

步骤 *2.* 特征线方程

已知双曲型方程的特征方程为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1}$$

解得特征线为：

$$y = 3x + C_1 \quad \text{和} \quad y = -x + C_2$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数。

引入新变量：

$$\xi = y - 3x \quad \text{和} \quad \eta = y + x$$

步骤 *3.* 通解求解

将方程化简为标准形式：

$$u_{\xi\eta} = 0$$

通解为：

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

转换回原始变量：

$$u(x,y) = F(y-3x) + G(y+x)$$

步骤 *4.* 初始条件应用

代入初始条件：$u|_{y=y_0} = 3x^2$，$u_y|_{y=y_0} = 0$ 代入 $y = y_0$：

$$F(y_0 - 3x) + G(y_0 + x) = 3x^2$$

计算 u_y：

$$u_y = F'(y-3x) + G'(y+x) = 0$$

代入 $y = y_0$：

$$F'(y_0-3x) + G(y_0+x) = 0$$

对 x 积分

$$-\frac{1}{3}F(y_0-3x) + G(y_0+x) = C$$

得方程组

$$G(y_0+x) = \frac{1}{3}F(y_0-3x) + C \tag{14}$$

$$G(y_0+x) = 3x^2 - F(y_0-3x) \tag{15}$$

联立式 (14) 和式 (15) 的右边，可得：

$$\frac{1}{3}F(y_0-3x) + C = 3x^2 - F(y_0-3x)$$

$$\left(\frac{1}{3}+1\right)F(y_0-3x) = 3x^2 - C$$

$$\frac{4}{3}F(y_0-3x) = 3x^2 - C$$

$$F(y_0-3x) = \frac{3}{4}(3x^2 - C)$$

$$F(y_0-3x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}C$$

将上式代回式 (14) 以求 $G(y_0+x)$:

$$\begin{aligned} G(y_0+x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}C\right) + C \\ &= \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}C + C \\ &= \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}C \end{aligned}$$

现在，我们将 F 和 G 表示为其各自变量的函数。

令 $t = y_0 + x$，则 $x = t - y_0$。

$$G(t) = \frac{3}{4}(t-y_0)^2 + \frac{3}{4}C$$

令 $s = y_0 - 3x$，则 $x = \frac{y_0-s}{3}$。

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{9}{4}\left(\frac{y_0-s}{3}\right)^2 - \frac{3}{4}C \\ &= \frac{9}{4}\frac{(y_0-s)^2}{9} - \frac{3}{4}C \\ &= \frac{1}{4}(y_0-s)^2 - \frac{3}{4}C \end{aligned}$$

方程的解 $u(x,y)$ *(注意题目使用 y 作为类时间变量)* 为 $u(x,y) = G(y+x) + F(y-3x)$。

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \left[\frac{3}{4}((y+x)-y_0)^2 + \frac{3}{4}C\right] + \left[\frac{1}{4}(y_0-(y-3x))^2 - \frac{3}{4}C\right] \\
&= \frac{3}{4}(x+(y-y_0))^2 + \frac{1}{4}((y_0-y)+3x)^2 \\
&= \frac{3}{4}[x^2+2x(y-y_0)+(y-y_0)^2] + \frac{1}{4}[(y_0-y)^2+6x(y_0-y)+9x^2] \\
&= \frac{3}{4}[x^2+2x(y-y_0)+(y-y_0)^2] + \frac{1}{4}[(y-y_0)^2-6x(y-y_0)+9x^2] \\
&= \left(\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x^2\right) + \left(\frac{3}{4}(y-y_0)^2+\frac{1}{4}(y-y_0)^2\right) + \left(\frac{6}{4}x(y-y_0)-\frac{6}{4}x(y-y_0)\right) \\
&= \frac{12}{4}x^2 + \frac{4}{4}(y-y_0)^2 + 0 \\
&= 3x^2 + (y-y_0)^2
\end{aligned}
$$

因此，解为：

$$u(x,y) = 3x^2 + (y-y_0)^2$$

步骤 5. 依赖区域、决定区域和影响区域

依赖区域 对于任意一个时空点 (x_p, y_p)（其中 $y_p > y_0$），其解 $u(x_p, y_p)$ 的值是由初始线 $y = y_0$ 上的哪些数据决定的呢？通解 $u(x,y) = F(y-3x) + G(y+x)$ 表明，解的值由两条通过 (x_p, y_p) 的特征线决定。这两条特征线是：

- $\xi = y - 3x = y_p - 3x_p$
- $\eta = y + x = y_p + x_p$

这两条线与初始线 $y = y_0$ 的交点分别为：

- $y_0 - 3x = y_p - 3x_p \implies x = x_p + \frac{y_p - y_0}{3}$
- $y_0 + x = y_p + x_p \implies x = x_p - (y_p - y_0)$

因此，点 (x_p, y_p) 的解完全由初始线 $y = y_0$ 上，区间 $\left[x_p - (y_p - y_0), x_p + \frac{y_p - y_0}{3}\right]$ 内的初始数据所决定。这个区间就是点 (x_p, y_p) 的依赖区域。

影响区域与决定区域 反过来，考虑初始线 $y = y_0$ 上的一个区间 $[x_1, x_2]$。

- **影响区域：** 该区间上的初始数据会影响到的所有未来点 (x,y) 的集合。这个区域由从 x_1 出发的右行特征线 $y-3x = y_0-3x_1$ 和从 x_2 出发的左行特征线 $y+x = y_0+x_2$ 在上半平面 $y > y_0$ 所围成的无限区域构成。

- **决定区域：** 该区域内任意一点的解完全由且仅由区间 $[x_1, x_2]$ 上的数据决定。这个区域是由从 x_1 出发的左行特征线 $y + x = y_0 + x_1$ 和从 x_2 出发的右行特征线 $y - 3x = y_0 - 3x_2$ 在上半平面 $y > y_0$ 所围成的有限三角形区域构成。

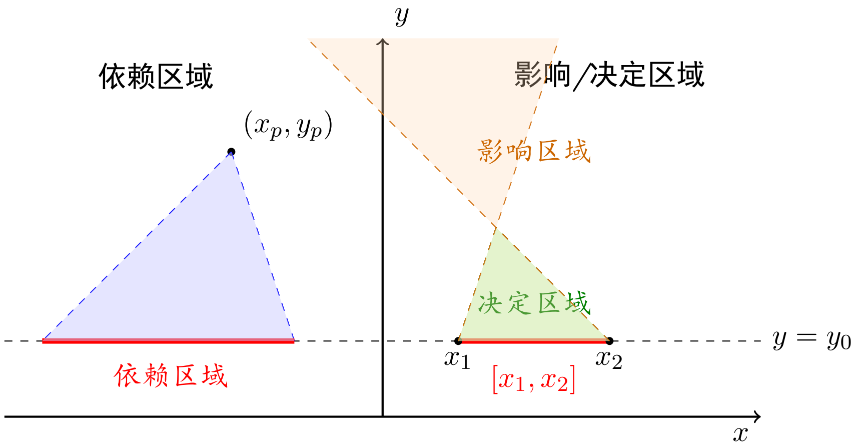

图 1: 依赖、决定与影响区域示意图。特征线斜率为 -1 和 3。

题 5. 求解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

(提示：齐次化原理 + 达朗贝尔公式)

解. 步骤 *1.* 齐次方程求解

齐次波动方程(16)的初值问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{16}$$

应用达朗贝尔公式，解为：

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin s\, ds$$

计算积分：

$$\int_{x-t}^{x+t} \sin s\, ds = -\cos s\Big|_{x-t}^{x+t} = -\cos(x+t) + \cos(x-t)$$

利用三角恒等式展开：

$$\cos(x+t) = \cos x\cos t - \sin x\sin t\cos(x-t) = \cos x\cos t + \sin x\sin t$$

代入后得到：

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2}\left[(\cos x\cos t + \sin x\sin t) - (\cos x\cos t - \sin x\sin t)\right] = \sin x\sin t$$

步骤 *2.* 非齐次方程求解

非齐次方程(17)的初值问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{17}$$

应用齐次化原理，非齐次解为：

$$u_p(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin s\, ds\, d\tau$$

计算内部积分：

$$\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin s\, ds = \tau\left[-\cos(x+t-\tau) + \cos(x-t+\tau)\right]$$

利用三角恒等式：

$$\cos(x-t+\tau) - \cos(x+t-\tau) = 2\sin x\sin(t-\tau)$$

代入后得到：

$$u_p(x,t) = \sin x \int_0^t \tau \sin(t-\tau)\, d\tau$$

变量替换 $u = t - \tau$，计算积分：

$$\int_0^t \tau \sin(t-\tau)\, d\tau = t - \sin t$$

因此，非齐次解为：

$$u_p(x,t) = \sin x(t - \sin t)$$

步骤 3. 总解求解

将齐次解和非齐次解相加，得到总解：

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t) = \sin x \sin t + \sin x(t - \sin t) = t \sin x$$

详细知识点在我的偏微分笔记里有, 有原理和例题偏微分笔记