偏微分方程笔记

陈柏均

2025 年 5 月 12 日

目录

1 齐次化

1.1 第一边界条件齐次化

要想利用 Duhamamel 原理，我们首先将第一边界条件齐次化，即要找到一个恰当的变换将第一边界值变为零。对于 (A) 方程问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t), & t \ge 0. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

由边界条件

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \tag{1.1.2}$$

对方程 (A) 构造关于变量 x 的线性辅助函数（直线方程）：

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \tag{1.1.3}$$

作变换：

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x,t), \tag{1.1.4}$$

将 $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$ 代入方程 (A)：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t), & t \ge 0. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

得到方程 (B)：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, & t \ge 0, \end{cases} \tag{1.1.6}$$

其中：

$$\begin{cases} f_1(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)), \\ \varphi_1(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)), \\ \psi_1(x) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)). \end{cases} \tag{1.1.7}$$

这样我们就完成了边界条件的齐次化。

1.2 第二边界条件齐次化

为利用 Duhamel 原理，需将非齐次 Neumann 边界条件齐次化，即构造变换使边界导数归零。

以下我们仅考虑如下第二边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\ u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t), & t \ge 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

构造辅助函数：

$$U(x,t) = x\mu_1(t) + \frac{x^2}{2l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\big), \tag{1.2.2}$$

作变换：

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x,t), \tag{1.2.3}$$

将 $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$ 代入原方程：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\ u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t), & t \ge 0. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

得到：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = -x\mu_1''(t) - \frac{x^2}{2l}\big(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\big) + \frac{a^2}{l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\big), \\ v(x,0) = \varphi(x) - x\mu_1(0) - \frac{x^2}{2l}\big(\mu_2(0) - \mu_1(0)\big), \\ v_t(x,0) = \psi(x) - x\mu_1'(0) - \frac{x^2}{2l}\big(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\big), \\ v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

此时的方程被转化为如下形式的混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

1.3 叠加原理

对于问题(1.1.6), 我们可以使用叠加原理将其分解为两个子问题.

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le l, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

根据叠加原理，原问题(1.1.6) 的解 $v(x,t)$ 可以表示为子问题 1 和子问题 2 的解的和：

$$v(x,t) = v^{(1)}(x,t) + v^{(2)}(x,t) \tag{1.3.3}$$

其中 $v^{(1)}(x,t)$ 是子问题 1 的解，$v^{(2)}(x,t)$ 是子问题 2 的解。

1.4 Duhamamel 原理之方程齐次化

1.4.1 第一边界非齐次方程

对于第一边界非齐次方程问题：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le l, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, & t \ge 0, \end{cases} \tag{1.4.1}$$

若 $w(x,t,\tau)$ 是以下定解问题的解：

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0, & t > \tau, \\ W|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f_1(x,\tau), & 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

则函数 $v(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)\,d\tau$ 就是问题的解。然后还有偏导数，那方程的函数转移到最高偏导函数上，其余依旧为 0.

所以我们最终要解决的就是初始条件非齐次，方程和边界条件齐次(1.1.6)这样的方程.

1.4.2 第二边界非齐次方程

对于有界方程非齐次问题（第二边界条件）：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le l, \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=l} = 0, & t \ge 0, \end{cases} \tag{1.4.3}$$

若 $w(x,t,\tau)$ 是以下定解问题的解：

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0, & t > \tau, \\ W|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f_1(x,\tau), & 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{1.4.4}$$

则函数 $v(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)\,d\tau$ 就是问题的解。同样地，方程的函数转移到最高偏导函数上，其余依旧为 0.

1.4.3 无界非齐次方程

对于无界区域中的非齐次波动方程：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{1.4.5}$$

假设 $w(x,t,\tau)$ 是以下齐次波动方程的解：

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, & t > \tau \\ w(x,\tau,\tau) = 0, & -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,\tau,\tau) = f_1(x,\tau) \end{cases} \tag{1.4.6}$$

那么，原非齐次波动方程的解可以表示为：

$$v(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)\,d\tau \tag{1.4.7}$$

有界无界两者齐次化方程形式上是一样的，后面热传导方程也是一样的。

2 一阶拟线性方程之传输方程

2.1 变量替换求解常系数齐次传输方程

2.1.1 问题描述

假设 $a_1 \neq 0$ 且 $a_2 \neq 0$，我们求解常系数传输方程：

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1.1}$$

2.1.2 通解

核心思想：通过变量替换，把二元偏微分转化成一元的常微分求解。

其中 $u = u(t, x)$。引入坐标变换 (α, β)，使得 $u = u(\alpha, \beta)$，且：

$$\begin{cases} \alpha = ax + bt, \\ \beta = cx + dt. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

利用链式法则计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}, \tag{2.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{2.1.4}$$

将 (2.1.3) 和 (2.1.4) 代入原方程 (2.1.1)：

$$a_1 \left(b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + a_2 \left(a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0. \tag{2.1.5}$$

整理后得到：

$$(a_1 b + a_2 a)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a_1 d + a_2 c)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \tag{2.1.6}$$

为消去一个变量，pde 转 ode，选择让第二项系数为 0，把方程 (2.1.6) 简化为：

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \tag{2.1.7}$$

选择系数

$$\begin{cases} a = 0, \quad b = 1, \\ c = a_1, \quad d = -a_2. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

此时坐标变换为：

$$\begin{cases} \alpha = t, \\ \beta = a_1 x - a_2 t. \end{cases} \tag{2.1.9}$$

由(2.1.7) 表明 u 仅依赖于 β，即通解为：

$$u(t,x) = L(a_1x - a_2t), \tag{2.1.10}$$

其中 $L(\cdot)$ 是任意可微函数。

2.1.3 特解（初始条件或边界条件）

已知初始条件 $u(x,0) = e^{-x^2}$，求下面常系数运输方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1.11}$$

由(2.1.10)可知

$$u(x,t) = f(x-t) = e^{-(x-t)^2} \tag{2.1.12}$$

2.2 波的传播求解常系数齐次传输方程

2.2.1 问题描述

在一阶线性方程中，有一种最简单的形如

$$u_t + b\cdot \mathrm{D}u = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,\infty) \tag{2.2.1}$$

的方程，称为传输方程，其中，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是已知 n 维常向量，$u=u(x,t)$，$\mathrm{D}u = (u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})$。

2.2.2 通解

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = (1,b)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.2.2}$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 为梯度，$(1,b)$ 为方向，一整个乘积为方向导数，方向导数为 0 意味着，$u(t,x)=C$ 在切向量为 $(1,b)$ 这条曲线上，即

$$u(t,x)|_{\Gamma} = C \tag{2.2.3}$$

由方程的形式可以看出，$u(x,t)$ 沿 $(1,b)$ 微商等于零。事实上，固定一点 $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$，记过该直线 Γ 的参数方程为 $(x+bs,t+s), s\in\mathbb{R}$，考查函数 u 在该直线上的值。令

$$z(s) = u(x+bs,t+s), \quad s\in\mathbb{R}. \tag{2.2.4}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \mathrm{D}u(x+sb,t+s)\cdot b + u_t(x+sb,t+s) = 0, \tag{2.2.5}$$

因此，函数 $z(s)$ 在过点 (x,t) 且具有方向 $(b,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$ 的直线上取常数值, 特征线上的取值和 s 没有关系（和下文中特征线法求解传输方程的 $(1,p(x,y))$ 含义相同）。所以，如果我们知道解 u 在这条直线上一点的值，则就得到它沿此直线上的值。这就引出下面求解初值问题的方法。

2.2.3 初值问题之特解

设 $a\in\mathbb{R}^n$ 是已知常向量，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是给定函数。考察传输方程的初值问题

$$\begin{cases}u_t+a\cdot\mathrm{D}u=0, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{2.2.6}$$

如上取定 (x,t)，过点 (x,t) 且具有方向 $(a,1)$ 的直线的参数式为 $(x+as,t+s)$，$s\in\mathbb{R}$。当 $s=-t$ 时，此直线与平面 $\Gamma:\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$ 相交于点 $(x-at,0)$。由上文分析知 u 沿此直线取常数值，而由初值条件便得

$$u(x,t)=z(0)=z(-t)=u(x-at,0)=f(x-at),\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\geq 0.\tag{2.2.7}$$

注记 2.1. 这表示对于每一个特定的点都有一条特征线，他的函数为特定的 f。取遍每个特征线就能取遍域内所有点，对于任意的点都有任意的函数表达式。因为上面的式子，at 是任意的，所以 x-at 是任意的，可以取遍整个

所以，如果有解，必由上式子表示，因此解是唯一的；反之，若 f 一阶连续可微，则可直接验证由上式子表示的函数 $u(x,t)$ 是问题的解。这就是齐次传输方程初值问题解的存在唯一性。

2.3 波的传播求解常系数非齐次传输方程

2.3.1 问题描述

考察非齐次传输方程的初值问题

$$\begin{cases}u_t+a\cdot\mathrm{D}u=f, & x\in\mathbb{R}^n,t>0,\\ u(x,0)=g(x)\end{cases}\tag{2.3.1}$$

2.3.2 求解

受齐次问题解法的启示，我们仍然先取定 $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$，对 $s\in\mathbb{R}$，令 $z(s)=u(x+as,t+s)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\mathrm{D}u(x+as,t+s)\cdot a+u_t(x+as,t+s)=f(x+as,t+s).\tag{2.3.2}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
u(x,t)-u(x-at,0) &= u(x,t)-g(x-at) \\
&= z(0)-z(-t)=\int_{-t}^{0}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-t}^{0} f(x+as,t+s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{t} f(x+a(s-t),s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

于是，得到问题的在 $x\in\mathbb{R}^n$，$t\geq 0$ 上的解

$$
u(x,t)=g(x-at)+\int_0^t f(x+a(s-t),s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.3.4}
$$

在下一章，这个公式将被用来求解一维波动方程。

2.4 特征线法求解变系数齐次传输方程

2.4.1 通解

一阶线性变系数偏微分方程如下：

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=(1,p(x,y))\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{2.4.1}
$$

其中 $p(x,y)$ 是 x 和 y 的函数。$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 为梯度，$(1,p(x,y))$ 为方向，一整个乘积为方向导数，方向导数为 0 意味着，$u(x,y)=C$ 在切向量为 $(1,p(x,y))$ 这条曲线上，即

$$
u(x,y)|_{\Gamma}=C \tag{2.4.2}
$$

$$
u(x,y)=f(C) \tag{2.4.3}
$$

Γ 曲线上，任意点 (x,y) 求导 (Γ 曲线为 XOY 平面上的曲线，故 y 可表示成 x 的函数)，可得切向量 $(1,\frac{dy}{dx})$

所以我们找到 Γ 曲线，把二元偏微分转化成一元的常微分，令

$$
\frac{dy}{dx}=p(x,y) \tag{2.4.4}
$$

可解得

$$
C=\phi(x,y) \tag{2.4.5}
$$

得方程解

$$
u(x,y)=f(C)=f(\phi(x,y)) \tag{2.4.6}
$$

$(1,\frac{dy}{dx})$ 为该曲线的切向量。我们称这条曲线叫特征线。只需要取遍所有的特征曲线就可以取遍 XOY 平面上所有的点，若有初始条件或者边界条件可以确定每条特征线在 $u(x,y)$ 对应的取值，就可以完整确定 $u(x,y)$ 这个函数。

命题 2.4.1. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2.4.7}$$

此时我们有 $p(x,y)=x$，解 $\frac{dy}{dx}=x$，我们得到特征线 $y=\frac{1}{2}x^2+C$，或 $y-\frac{1}{2}x^2=C$。从而 $\phi(x,y)=y-\frac{1}{2}x^2$，偏微分方程的通解为 $u(x,y)=f(\phi(x,y))$，其中 f 是任意函数。把它们代回方程，直接验证，便知是解。

3 一维无界齐次波动方程

3.1 d’Alembert 公式

3.1.1 问题描述

先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

3.1.2 求解

由算子复合作用的概念，易验证下述算子因式分解

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{3.1.2}$$

令

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u. \tag{3.1.3}$$

由 (2.1.2), 得

$$v_t(x,t) + a v_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.1.4}$$

这是一维传输方程，且由 (2.1.3) 知 v 满足初值条件

$$v(x,0) = \psi(x) - a\varphi'(x). \tag{3.1.5}$$

由 (2.2.7), 得

$$v(x,t) = \psi(x - at) - a\varphi'(x - at). \tag{3.1.6}$$

将 v 代入 (2.1.3)，得

$$u_t(x,t) - a u_x(x,t) = \psi(x - at) - a\varphi'(x - at), \tag{3.1.7}$$

其中 $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$。

对此非齐次传输方程，已知 $u(x,0)=\varphi(x)$，用公式(2.3.4)得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \varphi(x+at) + \int_0^t \left[\psi(x-2as+at) - a\varphi'(x-2as+at)\right] \mathrm{d}s \\
&= \varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \left[\psi(y) - a\varphi'(y)\right] \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.1.8}
$$

称此式为 d'Alembert (达朗贝尔) 公式.

4 一维齐次波动方程的初边值问题

4.1 第一边值条件半直线问题

反射法的核心思想：利用达朗贝尔公式把解延拓

4.1.1 问题描述

求解半直线 $\mathbb{R}_+=\{x>0\}$ 上的初边值问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt}-u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}_+, t>0, \\
u(x,0)=g(x), \quad u_t(x,0)=h(x), & x\in\mathbb{R}_+, \\
u(0,t)=0, & t\geq 0,
\end{cases} \tag{4.1.1}
$$

其中，g,h 是已知函数，满足 $g(0)=h(0)=0$。

4.1.2 做奇延拓

先把问题转换到全空间 $\mathbb{R}$ 上去。为此，对函数 u,g,h 作奇延拓（或称奇反射）如下：

$$
\bar{u}(x,t)=\begin{cases}
u(x,t), & x\geq 0, t\geq 0, \\
-u(-x,t), & x\leq 0, t\geq 0,
\end{cases} \tag{4.1.2}
$$

$$
\bar{g}(x)=\begin{cases}
g(x), & x\geq 0, \\
-g(-x), & x\leq 0,
\end{cases} \tag{4.1.3}
$$

$$
\bar{h}(x)=\begin{cases}
h(x), & x\geq 0, \\
-h(-x), & x\leq 0.
\end{cases} \tag{4.1.4}
$$

4.1.3 边界条件与方程验证

设波动方程参数为 a，考虑有限区间 $x \in [0, L]$ 的延拓问题。已知 f, g 为以 $2L$ 为周期的奇函数，即满足：

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(y+2L) = f(y) \\ f(-y) = -f(y) \\ g(y+2L) = g(y) \\ g(-y) = -g(y) \end{cases} \tag{4.1.5}$$

达朗贝尔解表达式 延拓后的解可表示为：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy \tag{4.1.6}$$

边界点验证

- **左端点 $x = 0$:**

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \frac{1}{2}[f(at) + f(-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} g(y)dy \\ &= \frac{1}{2}[f(at) - f(at)] + 0 \quad (\text{奇函数性质}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **右端点 $x = L$:** 利用周期性与奇性

$$\begin{aligned} u(L,t) &= \frac{1}{2}[f(L+at) + f(L-at)] + \frac{1}{2a}\int_{L-at}^{L+at} g(y)dy \\ &= \frac{1}{2}[f(L+at) + f(-(at-L))] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} g(y+L)dy \quad (y \mapsto y - L) \\ &= \frac{1}{2}[f(L+at) - f(at-L)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} -g(-y+L)dy \quad (\text{周期奇性}) \\ &= \frac{1}{2}[f(L+at) - f(L+at-2L)] + 0 \quad (\text{积分对称性}) \\ &= 0 \quad (\because f\text{的}2L\text{周期性}) \end{aligned}$$

方程验证

- **正半轴 $x \geq 0$:** 直接满足原波动方程
- **负半轴 $x < 0$:** 令 $x = -y,\ y > 0$，则延拓解为

$$\bar{u}(x,t) = -u(y,t) = -u(-x,t)$$

计算二阶导数：

$$\bar{u}_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[-u(-x,t)] = -u_{xx}(-x,t) \tag{4.1.7}$$

$$\bar{u}_{tt}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[-u(-x,t)] = -u_{tt}(-x,t) \tag{4.1.8}$$

验证波动方程：

$$\bar{u}_{tt} - a^2\bar{u}_{xx} = -u_{tt}(-x,t) + a^2 u_{xx}(-x,t) = 0$$

则 $\bar{u}(x,t)$ 满足问题：

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ \bar{u}(x,0) = \bar{g}(x), \quad \bar{u}_t(x,0) = \bar{h}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

区域分析

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[g(x+at) + g(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(s)ds, & x > at \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left[g(x+at) - g(at-x)\right] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} h(s)ds, & 0 \leq x < at \end{cases} \tag{4.1.10}$$

注记 4.1. 还可以用特征线法对问题 (3.1.1) 求解，即用初值问题中方程的特征线作自变量的变换，把方程化为双曲型的第二标准型 $u_{\xi\eta} = 0$ 的形式，对它积分两次求出通解 $u = F(\xi) + G(\eta)$，其中，F 和 G 是任意二次光滑函数。然后利用初值条件确定通解中的两个任意函数，便得 d'Alembert 公式。

4.2 第二边值条件半直线问题

反射法的核心思想：利用达朗贝尔公式把解延拓

4.2.1 问题描述

求解半直线 $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$ 上的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}_+, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

其中，g, h 是已知函数，满足 $g'(0) = h'(0) = 0$（自然相容性条件）。

4.2.2 做偶延拓

先把问题转换到全空间 $\mathbb{R}$ 上去。为此，对函数 u, g, h 作偶延拓（或称偶反射）如下：

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(-x,t), & x \leq 0, t \geq 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ g(-x), & x \leq 0, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0, \\ h(-x), & x \leq 0. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

（验证过程省略）则 $\bar{u}(x,t)$ 满足问题：

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ \bar{u}(x,0) = \bar{g}(x), \quad \bar{u}_t(x,0) = \bar{h}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

注记 4.2. 对于第二边值条件问题，需保证延拓后的函数 $\bar{g}(x)$ 和 $\bar{h}(x)$ 在 $x = 0$ 处满足导数连续的条件。通过偶延拓可自然满足 $u_x(0,t) = 0$ 的边界条件。

4.3 有界之反射法

4.3.1 有界之第一边值条件

考虑初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(L,t) = \beta(t), & t \geq 0. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

其中，弦的两端固定，即 $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$。

4.3.2 核心思想

当两端固定时，若 $f, g \in C^2$ 满足相容条件：

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f(L) = f'(L) = f''(L) = 0, \\ g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, \quad g(L) = g'(L) = g''(L) = 0, \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

则可将 f, g 延拓为实轴上以 $2L$ 为周期的奇函数：

$$\begin{aligned} &f(x) = -f(-x), \quad f(x+2L) = f(x), \\ &g(x) = -g(-x), \quad g(x+2L) = g(x). \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

延拓后，$f, g \in C^2(\mathbb{R})$，代入达朗贝尔公式得到延拓问题的解，其在区间 $[0, L]$ 上的限制即为原问题的解。

4.3.3 达朗贝尔公式的应用

因为 f,g 是以 $2L$ 为周期函数，而且是奇函数。故

$$g(y+L) = g(y-L) = -g(-y+L) \tag{4.3.4}$$

$f(y+L)$、$g(y+L)$ 是奇函数。

达朗贝尔公式为：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)\,dy \tag{4.3.5}$$

由于 f, g 为 $\mathbb{R}$ 上以 $2L$ 为周期的奇函数，代入边界点 $x = 0$ 和 $x = L$ 验证：

对于 $x = 0$：

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[f(at) + f(-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} g(y)\,dy = 0 \tag{4.3.6}$$

对于 $x = L$：

$$\begin{aligned} u(L,t) &= \frac{1}{2}[f(L+at) + f(L-at)] + \frac{1}{2a}\int_{L-at}^{L+at} g(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}[f(L+at) + f(L-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} g(y+L)\,dy \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

当 $x \geq 0$ 时，一定满足波动方程。

当 $x \leq 0$ 时, 令 $x = -y$，$y > 0$，

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}(-y,t) = -u(y,t),$$

对于 $\bar{u}_{xx}(x,t)$：

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xx}(x,t) = \bar{u}_{xx}(-y,t) = \frac{d^2}{dx^2}[-u(y,t)] = \frac{d^2}{dx^2}[-u(-x,t)] \\ = -u_{xx}(-x,t) = -u_{xx}(y,t). \end{aligned}$$

对于 $\bar{u}_{tt}(x,t)$：

$$\bar{u}_{tt}(x,t) = \bar{u}_{tt}(-y,t) = \bar{u}_{tt}(y,t) = -u_{tt}(y,t).$$

验证波动方程：

$$\bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = -u_{tt}(y,t) + u_{xx}(y,t) = 0$$

故问题延拓到全平面上就可以用达朗贝尔公式，

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - a^2\bar{u}_{xx} = 0, & x \geq 0,\ t > 0, \\ \bar{u}(x,0) = \bar{f}(x),\ \bar{u}_t(x,0) = \bar{g}(x), & x \geq 0 \\ \bar{u}(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

4.3.4 有界之第二边值条件

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

对于第二边值条件，我们先做偶延拓，再做周期延拓。

4.4 第一边值条件之分离变量法

4.4.1 问题描述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{4.4.1}$$

边界条件:

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{4.4.2}$$

初始条件:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \qquad 0 < x < l \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

4.4.2 核心思想

核心思想：分离变量法把偏微分转成为两个常微分。

设 $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$，假设解为乘积解。

代入方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T'' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T \tag{4.4.4}$$

代入原方程:

$$X \cdot T'' = c^2 \cdot X'' \cdot T \tag{4.4.5}$$

转化为可分离变量方程:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{4.4.6}$$

两个线性无关的变量相等，只能同为常数:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k \tag{4.4.7}$$

转化为两个常微分方程:

$$\begin{cases} X'' = kX \\ T'' = kc^2 T \end{cases} \tag{4.4.8}$$

4.4.3 空间常微分方程的求解

$$X'' - kX = 0 \quad X(0) = 0 \quad (X(l) = 0 \tag{4.4.9}$$

情况 1　若 $k > 0$

通解为 $X(x) = C_1 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \sinh \mu x$，其中 $k = \mu^2$

代入初始条件

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \cdot \sinh \mu l = 0 \quad \therefore C_2 = 0 \tag{4.4.10}$$

验证 4.3.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{双曲余弦} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{双曲正弦}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore X = C_1 \cdot u \cdot \sinh \mu x + C_2 \cdot u \cdot \cosh \mu x$$

$$X'' = C_1 \cdot \mu^2 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \mu^2 \cdot \sinh \mu x$$

$$X'' - kX = 0 \quad \therefore k = \mu^2$$

情况 2　若 $k = 0$

则 $X'' = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{且} \quad X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \tag{4.4.11}$$

$$\therefore C_1 = C_2 = 0 \tag{4.4.12}$$

情况 3　若 $k < 0$

即 $X'' + \mu^2 X = 0 \quad X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \quad k = -\mu^2$

通解:

$$X = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \tag{4.4.13}$$

边界条件:

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \sin \mu l = 0 \tag{4.4.14}$$

非平凡解要求:

$$\sin \mu l = 0 \quad \therefore \mu l = n\pi \quad n \text{ 为任意正整数} \tag{4.4.15}$$

特征值:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{l} \tag{4.4.16}$$

特征函数:

$$X_n = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{（C 吸收正负号）} \tag{4.4.17}$$

特征值:

$$k = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{4.4.18}$$

验证 4.4. 一阶导数:

$$X' = -C_1 \mu \sin \mu x + C_2 \mu \cos \mu x \tag{4.4.19}$$

二阶导数:

$$X'' = -C_1\mu^2 \cos\mu x - C_2\mu^2 \sin\mu x \tag{4.4.20}$$

满足方程:

$$X'' + \mu^2 X = 0 \tag{4.4.21}$$

4.4.4 时间常微分方程的求解

$T'' + \left(c \cdot \frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot T = 0 \implies T'' + (c\mu_n)^2 T = 0$，其中 $\lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l}$

同理可得通解：

$$T = C_3 \cos\lambda_n t + C_4 \sin\lambda_n t \tag{4.4.22}$$

4.4.5 得偏微分方程通解

因此：

$$u_n(x,t) = X \cdot T = \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot (a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t) \tag{4.4.23}$$

由于方程为线性齐次，故可用叠加原理：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot (a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t) \tag{4.4.24}$$

4.4.6 初始条件求系数

原函数初始条件求 a_n

$$u(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{4.4.25}$$

由初始条件：

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot a_n = f(x) \tag{4.4.26}$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$a_n = \frac{\langle f(x), \sin\frac{n\pi}{l}x \rangle}{\langle \sin\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x \rangle} = \frac{\int_0^l f(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx} \tag{4.4.27}$$

化简得：

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{4.4.28}$$

偏导初始条件求 b_n

对 u_n 求偏导:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot (-a_n\lambda_n \sin\lambda_n t + b_n\lambda_n\cos\lambda_n t) \tag{4.4.29}$$

在 $t = 0$ 时:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot b_n\lambda_n \tag{4.4.30}$$

对总解求偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n \sin\frac{n\pi}{l}x = g(x) \tag{4.4.31}$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$b_n\lambda_n = \frac{\langle g(x), \sin\frac{n\pi}{l}x\rangle}{\langle \sin\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x\rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{4.4.32}$$

化简得:

$$b_n = \frac{2}{l\lambda_n}\cdot\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{4.4.33}$$

4.4.7 用数分知识求系数，条件和前面泛函内积不一样

考虑函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{4.4.34}$$

计算 a_0:

$$\frac{a_0}{2} = f - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{4.4.35}$$

$$a_0 = 2f - 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{4.4.36}$$

对 a_0 积分, 若积分和求和可换序：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt \tag{4.4.37}$$

化简得:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dt \tag{4.4.38}$$

计算 a_n:

$$f\cos nt=\frac{a_0}{2}\cos nt+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\cos nt \tag{4.4.39}$$

积分得，若积分和求和可换序：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nt\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\,dt+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\cos nt\,dt\right) \tag{4.4.40}$$

化简得:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt=a_n\pi \tag{4.4.41}$$

因此:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt \tag{4.4.42}$$

同理可得:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\sin nt\,dt \tag{4.4.43}$$

级数收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx<\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx<\infty \tag{4.4.44}$$

详细条件可以去看我的傅里叶分析笔记。

4.4.8 总结

一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<l,\quad t>0 \tag{4.4.45}$$

边界条件:

$$u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \qquad \forall t>0 \tag{4.4.46}$$

初始条件:

$$u(x,0)=f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \qquad 0<x<l \tag{4.4.47}$$

解为:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t) \tag{4.4.48}$$

其中:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{4.4.49}$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{4.4.50}$$

$$\lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l} \tag{4.4.51}$$

4.5 第二边值条件之分离变量

求解过程一样，就是解不同，第一边界条件是把通解求出来，代入得系数，第二边界条件就还要求个导再代入。这样就不展开详细说明。

5 热传导方程

5.1 无界齐次热传导方程

对于无界的热传导方程：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中，

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{5.1.2}$$

热传导方程的基本解：

$$E(x-y,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}. \tag{5.1.3}$$

5.2 傅里叶变换

傅里叶变换定义为：

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx. \tag{5.2.1}$$

5.2.1 微分性质

若 $f\in C\cap L^p$，则：

$$\mathcal{F}(f') = (i\xi_j)\mathcal{F}(f). \tag{5.2.2}$$

这里求导是对于 x_j

证明.

$$\mathcal{F}(f') = \hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f'(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx$$

对 x_j 做分部积分

$$= \left[f(x)e^{-ix\cdot\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{-ix\cdot\xi}\right)dx$$

因为 $f\in C\cap L^p$，则 $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$(衰减性，紧支撑也有)，故可化简为：

$$= (i\xi_j)\mathcal{F}(f)$$

□

若 $f\in C^\alpha\cap L^p$，用多次分布积分, 则傅里叶变换的高阶导数性质为：

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha\mathcal{F}(f) \tag{5.2.3}$$

其中，α 为多指标，表示高阶导数。

5.2.2 幂乘性质

若 $f\in L^1$，则傅里叶变换的幂乘性质为：

$$\mathcal{F}[-ix_j f(x)] = \frac{\partial}{\partial\xi_j}\mathcal{F}[f](\xi) \tag{5.2.4}$$

证明.

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_j}e^{-ix\cdot\xi}dx = (-ix_j)\cdot\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

□

5.2.3 傅里叶变换的卷积性质

卷积定义：

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)\,dy \tag{5.2.5}$$

若 $f,g\in L^1$，卷积性质：

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g] \tag{5.2.6}$$

证明.

$$\mathcal{F}[f*g] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)\,dy\right)dx$$

根据 Fubini 定理，若 $f, g \in L^1$，我们交换外层关于 x 的积分和内层关于 y 的积分：

$$\mathcal{F}[f*g] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g(x-y)dx\right)dy$$

变量替换 $z = x - y$，即 $x = z + y$，则 $dz = dx$，代入后：

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z+y)\cdot\xi} g(z)\,dz\right)dy$$

化简指数项：

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} g(z)\,dz\right)f(y)\,dy = \mathcal{F}[g]\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\,dy = \mathcal{F}[g]\cdot\mathcal{F}[f]$$

□

5.2.4 傅里叶逆变换的卷积性质

若 $f, g \in L^1$

$$\mathcal{F}^{-1}[f\cdot g] = \mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g] \tag{5.2.7}$$

证明. 首先，根据傅里叶逆变换的定义：

$$\mathcal{F}^{-1}[f\cdot g](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(f(\xi)\cdot g(\xi))d\xi$$

卷积的定义：

$$(\mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g])(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}[f](y)\cdot\mathcal{F}^{-1}[g](x-y)dy$$

根据傅里叶逆变换的定义，将其展开：

$$\mathcal{F}^{-1}[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} f(\xi)d\xi$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x-y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\eta} g(\eta)d\eta$$

代入卷积表达式：

$$(\mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g])(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} f(\xi)d\xi\right)\cdot\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\eta} g(\eta)d\eta\right)dy$$

根据 Fubini 定理，若 $f, g \in L^1$，交换积分顺序：

$$(\mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g])(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} e^{i(x-y)\cdot\eta} dy \right) f(\xi) g(\eta) d\xi d\eta$$

合并指数项：

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot(\xi-\eta)} dy \right) f(\xi) g(\eta) d\xi d\eta$$

结果：

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (2\pi)^n f(\xi) g(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi) g(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}[f \cdot g](x)$$

□

5.3 高斯型函数的一些积分

下面是高斯型函数一些积分的计算

命题 5.3.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明.

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(y-b)^2} dy \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a((x-b)^2+(y-b)^2)} dx dy$$

由极坐标变量替换可得

$$(x-b)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x - b = r\cos\theta \\ y - b = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$dxdy = r\, d\theta\, dr$$

$$A^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ar^2} r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ar^2} d(r^2)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-\frac{1}{a}e^{-ar^2}\Big|_0^{+\infty}\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a}\,d\theta=\frac{\pi}{a}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-b)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

命题 5.3.2. $\int_c^{+\infty} e^{-a(x-b)^2}dx$ 积分没有原函数

证明. 方法 1. 不成熟的证明方法望指正

$$A^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-a(x-b)^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-a(y-b)^2}dy\right)$$

$$\neq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-ar^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

在这里不能像上面那样做极坐标变量代换，因为圆心为 (b,b)，而坐标点不是全平面，当 r 大到一定程度，角度再也不能转一圈，角度会随着 r 的增大而变小，无法用二重积分的定义表示。

□

命题 5.3.3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=e^{-\frac{k^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\cdot e^{-ax^2}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin kx\cdot e^{-ax^2}dx$$

第二项为奇函数，积分为 0，所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\cdot e^{-ax^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\cdot e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx}dx$$

配方

$$\begin{aligned}-ax^2+ikx&=-a\left(x^2-\frac{ik}{a}x\right)\\&=-a\left[x^2-\frac{ik}{a}x+\left(\frac{ik}{2a}\right)^2-\left(\frac{ik}{2a}\right)^2\right]\\&=-a\left(x-\frac{ik}{2a}\right)^2-\frac{k^2}{4a}\end{aligned}$$

所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

命题 5.3.4. $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$

证明.

$$\text{设} \quad \Phi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\frac{d\Phi}{da} = -\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{d}{da}\left(\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$$

□

命题 5.3.5. $\int_{-\infty}^{+\infty} (z+bx)^2 e^{-az^2} dz == \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} + b^2x^2\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明. 展开得

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-az^2} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} 2zbx e^{-az^2} dz + b^2x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} dz$$

$$= \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} + b^2x^2\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

5.4 解的导出

对于无界的热传导方程(5.1.1)：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{5.4.1}$$

设初值问题的解 $u(x,t)$ 和初始数据 $\varphi(x)$ 都可关于变量 x 进行 Fourier 变换，并记：

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{-ix\cdot\xi} dx, \tag{5.4.2}$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx. \tag{5.4.3}$$

对热传导方程和初始条件进行 Fourier 变换，根据傅里叶的微分性质(5.2.3)：

$$\hat{u}_t = \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t)e^{-ix\cdot\xi}dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)e^{-ix\cdot\xi}dx = \frac{d\hat{u}(\xi,t)}{dt} \tag{5.4.4}$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right](\xi) = -\xi_j^2 \hat{u}(\xi)$$

$$\mathcal{F}[\Delta u](\xi) = \sum_{j=1}^{n}(-\xi_j^2)\hat{u}(\xi) = -|\xi|^2\hat{u}(\xi) \tag{5.4.5}$$

把 ξ 看作常量, 得到关于 $\hat{u}(\xi,t)$ 的常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}(\xi,t)}{dt} + |\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{5.4.6}$$

该方程的解为：

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}. \tag{5.4.7}$$

证明. 这是一个一阶线性常微分方程，可以通过分离变量法求解。将方程改写为：

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -a^2|\xi|^2 dt$$

对两边积分：

$$\int \frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = \int -a^2|\xi|^2 dt$$

得到：

$$\ln|\hat{u}| = -a^2|\xi|^2 t + C(\xi)$$

其中，$C(\xi)$ 是积分常数，可能依赖于 ξ。

利用初始条件 $\hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi)$，代入上式得：

$$C(\xi) = \ln|\hat{\varphi}(\xi)|$$

将 $C(\xi)$ 代入积分结果：

$$\ln|\hat{u}| = -a^2|\xi|^2 t + \ln|\hat{\varphi}(\xi)|$$

对两边取指数：

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

□

对 $\hat{u}(\xi,t)$ 进行 Fourier 逆变换

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2t}] \tag{5.4.8}$$

利用 Fourier 逆变换卷积的性质(5.2.7)：

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)]*\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^2t}] \tag{5.4.9}$$

命题 5.4.1. 我们需要证明：

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2t}\right](x)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

证明. 根据傅里叶逆变换的定义：

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2t}\right](x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}e^{-|\xi|^2t}d\xi$$

我们可以将这个积分分解为每个坐标的积分：

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2t}\right](x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_j\xi_j}e^{-\xi_j^2t}d\xi_j$$

注记 5.1.

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2t}\right](x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_1\xi_1}e^{-\xi_1^2t}d\xi_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_2\xi_2}e^{-\xi_2^2t}d\xi_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_3\xi_3}e^{-\xi_3^2t}d\xi_3\right)$$

对于每个一维积分，我们有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_j\xi_j}e^{-\xi_j^2t}d\xi_j$$

对指数部分进行配方：

$$-t\xi_j^2+ix_j\xi_j=-t\left(\xi_j^2-\frac{ix_j}{t}\xi_j\right)$$

$$=-t\left(\xi_j^2-\frac{ix_j}{t}\xi_j+\left(\frac{x_j}{2t}\right)^2-\left(\frac{x_j}{2t}\right)^2\right)$$

$$=-t\left(\left(\xi_j-\frac{ix_j}{2t}\right)^2-\frac{x_j^2}{4t^2}\right)$$

$$=-t\left(\xi_j-\frac{ix_j}{2t}\right)^2+\frac{x_j^2}{4t}$$

代入积分中, 由命题(5.3.1)：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\left(\xi_j-\frac{ix_j}{2t}\right)^2+\frac{x_j^2}{4t}}d\xi_j=e^{\frac{x_j^2}{4t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\left(\xi_j-\frac{ix_j}{2t}\right)^2}d\xi_j=\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{\frac{x_j^2}{4t}}$$

将所有坐标的结果相乘，并乘以系数 $\frac{1}{(2\pi)^n}$，得到：

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t}\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\frac{\pi^{n/2}}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{(2)^n t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = (4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

□

因此，解可以表示为：

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy \tag{5.4.10}$$

其中，$E(x-y,t) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ 称为热传导方程的基本解。

5.5 热传导方程齐次化

和之前波动方程齐次化一样，把边界条件齐次化，用 Duhamamel 原理把方程齐次化。有界无界的情况，把基本解看作达朗贝尔公式，延拓和上面一模样。

分离变量的方法也一样，就是时间常微分函数变成一阶通解为指数函数，而不再是三角函数。其他全部的求解过程，验证过程全部一样。