偏微分方程笔记

陈柏均

2025 年 5 月 12 日

目录

1 一阶拟线性方程之齐次传输方程

1.1 变量替换求解常系数齐次传输方程

假设 $a_1 \neq 0$ 且 $a_2 \neq 0$，我们求解常系数传输方程：

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1.1}$$

1.1.1 通解

核心思想：通过变量替换，把二元偏微分转化成一元的常微分求解。

其中 $u = u(t, x)$。引入坐标变换 (α, β)，使得 $u = u(\alpha, \beta)$，且：

$$\begin{cases} \alpha = ax + bt, \\ \beta = cx + dt. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

利用链式法则计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{1.1.4}$$

将 (1.1.3) 和 (1.1.4) 代入原方程 (1.1.1)：

$$a_1\left(b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + a_2\left(a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0. \tag{1.1.5}$$

整理后得到：

$$(a_1 b + a_2 a)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a_1 d + a_2 c)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \tag{1.1.6}$$

为消去一个变量，pde 转 ode，选择让第二项系数为 0，把方程 (1.1.6) 简化为：

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \tag{1.1.7}$$

选择系数

$$\begin{cases} a = 0, \quad b = 1, \\ c = a_1, \quad d = -a_2. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

此时坐标变换为：

$$\begin{cases} \alpha = t, \\ \beta = a_1 x - a_2 t. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

由(1.1.7) 表明 u 仅依赖于 β，即通解为：

$$u(t, x) = L(a_1 x - a_2 t), \tag{1.1.10}$$

其中 $L(\cdot)$ 是任意可微函数。

1.1.2 特解（初始条件或边界条件）

已知初始条件 $u(x,0)=e^{-x^2}$，求下面常系数运输方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1.11}$$

由(1.1.10)可知

$$u(x,t)=f(x-t)=e^{-(x-t)^2} \tag{1.1.12}$$

1.2 特征线法求解变系数齐次传输方程

1.2.1 通解

一阶线性变系数偏微分方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=(1,p(x,y))\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1.2.1}$$

其中 $p(x,y)$ 是 x 和 y 的函数。$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 为梯度，$(1,p(x,y))$ 为方向，一整个乘积为方向导数，方向导数为 0 意味着，$u(x,y)=C$ 在切向量为 $(1,p(x,y))$ 这条曲线上，即

$$u(x,y)|_\Gamma=C \tag{1.2.2}$$

$$u(x,y)=f(C) \tag{1.2.3}$$

Γ 曲线上，任意点 (x,y) 求导 (Γ 曲线为 XOY 平面上的曲线，故 y 可表示成 x 的函数)，可得切向量 $(1,\frac{dy}{dx})$

所以我们找到 Γ 曲线，把二元偏微分转化成一元的常微分，令

$$\frac{dy}{dx}=p(x,y) \tag{1.2.4}$$

可解得

$$C=\phi(x,y) \tag{1.2.5}$$

得方程解

$$u(x,y)=f(C)=f(\phi(x,y)) \tag{1.2.6}$$

$(1,\frac{dy}{dx})$ 为该曲线的切向量。我们称这条曲线叫特征线。只需要取遍所有的特征曲线就可以取遍 XOY 平面上所有的点，若有初始条件或者边界条件可以确定每条特征线在 $u(x,y)$ 对应的取值，就可以完整确定 $u(x,y)$ 这个函数。

示例 1.2.1. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.2.7}$$

此时我们有 $p(x,y)=x$，解 $\frac{dy}{dx}=x$，我们得到特征线 $y=\frac{1}{2}x^2+C$，或 $y-\frac{1}{2}x^2=C$。从而 $\phi(x,y)=y-\frac{1}{2}x^2$，偏微分方程的通解为 $u(x,y)=f(\phi(x,y))$，其中 f 是任意函数。把它们代回方程，直接验证，便知是解。

2　一维齐次波动方程之分离变量法

2.1　问题描述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{2.1.1}$$

边界条件:

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{2.1.2}$$

初始条件:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \qquad 0 < x < l \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

2.2　分离变量法

核心思想：分离变量法把偏微分转成为两个常微分。

设 $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$，假设解为乘积解。

代入方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T'' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T \tag{2.2.1}$$

代入原方程:

$$X \cdot T'' = c^2 \cdot X'' \cdot T \tag{2.2.2}$$

转化为可分离变量方程:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{2.2.3}$$

两个线性无关的变量相等，只能同为常数:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k \tag{2.2.4}$$

转化为两个常微分方程:

$$\begin{cases} X'' = kX \\ T'' = kc^2 T \end{cases} \tag{2.2.5}$$

2.3　空间常微分方程的求解

$$X'' - kX = 0 \quad X(0) = 0 \quad (X(l) = 0 \tag{2.3.1}$$

2.3.1 情况 1

若 $k>0$，通解为 $X(x)=C_1\cdot\cosh\mu x+C_2\cdot\sinh\mu x$，其中 $k=\mu^2$

代入初始条件

$$X(0)=C_1=0\quad X(l)=C_2\cdot\sinh\mu l=0\quad\therefore C_2=0\tag{2.3.2}$$

检验 2.1.

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad\text{双曲余弦}\quad\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\text{双曲正弦}\tag{2.3.3}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x\tag{2.3.4}$$

$$\therefore\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\quad\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\tag{2.3.5}$$

$$(\cosh x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x\tag{2.3.6}$$

$$(\sinh x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x\tag{2.3.7}$$

$$\therefore X=C_1\cdot u\cdot\sinh\mu x+C_2\cdot u\cdot\cosh\mu x\tag{2.3.8}$$

$$X''=C_1\cdot\mu^2\cdot\cosh\mu x+C_2\cdot\mu^2\cdot\sinh\mu x\tag{2.3.9}$$

$$X''-kX=0\quad\therefore k=\mu^2\tag{2.3.10}$$

2.3.2 情况 2

若 $k=0$，则 $X''=0$

$$X(x)=C_1x+C_2\quad\text{且}\quad X(0)=0\quad X(l)=0\tag{2.3.11}$$

$$\therefore C_1=C_2=0\tag{2.3.12}$$

2.3.3 情况 3

若 $k<0$，即 $X''+\mu^2X=0 \quad X(0)=0 \quad X(l)=0 \quad k=-\mu^2$

通解:

$$X=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x \tag{2.3.13}$$

边界条件:

$$X(0)=C_1=0 \quad X(l)=C_2\sin\mu l=0 \tag{2.3.14}$$

非平凡解要求:

$$\sin\mu l=0 \quad \therefore \mu l=n\pi \quad n\text{ 为任意正整数} \tag{2.3.15}$$

特征值:

$$\mu_n=\frac{n\pi}{l} \tag{2.3.16}$$

特征函数:

$$X_n=C_2\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{（C 吸收正负号）} \tag{2.3.17}$$

特征值:

$$k=-\mu^2=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{2.3.18}$$

检验 2.2. *一阶导数:*

$$X'=-C_1\mu\sin\mu x+C_2\mu\cos\mu x \tag{2.3.19}$$

二阶导数:

$$X''=-C_1\mu^2\cos\mu x-C_2\mu^2\sin\mu x \tag{2.3.20}$$

满足方程:

$$X''+\mu^2X=0 \tag{2.3.21}$$

2.4 时间常微分方程的求解

$T''+\left(c\cdot\frac{n\pi}{l}\right)^2\cdot T=0 \implies T''+(c\mu_n)^2T=0$，其中 $\lambda_n=c\mu_n=\frac{cn\pi}{l}$

同理可得通解：

$$T=C_3\cos\lambda_n t+C_4\sin\lambda_n t \tag{2.4.1}$$

2.5 得偏微分方程通解

因此：

$$u_n(x,t) = X \cdot T = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \tag{2.5.1}$$

由于方程为线性齐次，故可用叠加原理：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \tag{2.5.2}$$

2.6 初始条件求系数

2.6.1 原函数初始条件求 a_n

$$u(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{2.6.1}$$

由初始条件：

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot a_n = f(x) \tag{2.6.2}$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$a_n = \frac{\langle f(x), \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle}{\langle \sin \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle} = \frac{\int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx} \tag{2.6.3}$$

化简得：

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \tag{2.6.4}$$

2.6.2 偏导初始条件求 b_n

对 u_n 求偏导:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (-a_n \lambda_n \sin \lambda_n t + b_n \lambda_n \cos \lambda_n t) \tag{2.6.5}$$

在 $t = 0$ 时:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot b_n \lambda_n \tag{2.6.6}$$

对总解求偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x) \tag{2.6.7}$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$b_n\lambda_n = \frac{\langle g(x), \sin\frac{n\pi}{l}x\rangle}{\langle \sin\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x\rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{2.6.8}$$

化简得:

$$b_n = \frac{2}{l\lambda_n}\cdot\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{2.6.9}$$

2.6.3 用数分知识求系数，条件和前面泛函内积不一样

考虑函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{2.6.10}$$

计算 a_0:

$$\frac{a_0}{2} = f - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{2.6.11}$$

$$a_0 = 2f - 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{2.6.12}$$

对 a_0 积分, 若积分和求和可换序：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt \tag{2.6.13}$$

化简得:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,dt \tag{2.6.14}$$

计算 a_n:

$$f\cos nt = \frac{a_0}{2}\cos nt + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\cos nt \tag{2.6.15}$$

积分得，若积分和求和可换序：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nt\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\,dt + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\cos nt\,dt\right) \tag{2.6.16}$$

化简得:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\cos nt\,dt = a_n\pi \tag{2.6.17}$$

因此:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nt\,dt \tag{2.6.18}$$

同理可得:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\sin nt\,dt \tag{2.6.19}$$

级数收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx < \infty \tag{2.6.20}$$

详细条件可以去看我的傅里叶分析笔记。

2.7 总结

一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l,\quad t > 0 \tag{2.7.1}$$

边界条件:

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{2.7.2}$$

初始条件:

$$u(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < l \tag{2.7.3}$$

解为:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t) \tag{2.7.4}$$

其中:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{2.7.5}$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{2.7.6}$$

$$\lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l} \tag{2.7.7}$$