偏微分方程小测

班级:22 数学 1　姓名: 陈柏均　学号:202225110102

题 1. 判断下列方程的类型，并化成标准型：

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0.$$

解. **步骤 *1.* 判断方程类型**

方程的系数为 $A = 1, B = 4, C = -5$。计算判别式：

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

因为 $\Delta > 0$，所以该方程为双曲型方程。

步骤 *2.* 求解特征方程

特征方程为 $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$，即：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} - 5 = 0$$

令 $\lambda = \frac{dy}{dx}$，则有 $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$，分解因式得 $(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$。解得两个特征方向：

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$$

对应的特征线方程为：

$$\frac{dy}{dx} = 5 \implies dy - 5dx = 0 \implies y - 5x = C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = -1 \implies dy + dx = 0 \implies y + x = C_2$$

步骤 *3.* 进行坐标变换

取新的坐标系：

$$\begin{cases} \xi = y - 5x \\ \eta = y + x \end{cases}$$

利用链式法则计算各阶偏导数：

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -5u_\xi + u_\eta \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-5u_\xi + u_\eta) = -5(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\
&= -5(-5u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (-5u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}) = 25u_{\xi\xi} - 10u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(-5u_\xi + u_\eta) = -5(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) \\
&= -5(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}) = -5u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi + u_\eta) = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) \\
&= (u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}) = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

步骤 *4*. 代入原方程化简

将上述偏导数代入原方程：

- **二阶项***:*

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} \\
&= (25u_{\xi\xi} - 10u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + 4(-5u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 5(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \\
&= (25 - 20 - 5)u_{\xi\xi} + (-10 - 16 - 10)u_{\xi\eta} + (1 + 4 - 5)u_{\eta\eta} \\
&= -36u_{\xi\eta}
\end{aligned}$$

- **一阶项***:*

$$\begin{aligned}
&2u_x + 6u_y \\
&= 2(-5u_\xi + u_\eta) + 6(u_\xi + u_\eta) \\
&= -10u_\xi + 2u_\eta + 6u_\xi + 6u_\eta \\
&= -4u_\xi + 8u_\eta
\end{aligned}$$

合并所有项，得到变换后的方程：

$$-36u_{\xi\eta} - 4u_\xi + 8u_\eta = 0$$

两边同除以 -4，得到标准型：

$$9u_{\xi\eta} + u_\xi - 2u_\eta = 0$$

题 2. 求方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u=0$ 的球对称特解。

解. ***步骤 1.* 引入球坐标系**

这是对球坐标系下拉普拉斯算子作用于球对称函数 $u=u(r)$ 的详细推导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

首先，计算 r 对各变量的一阶和二阶偏导数。由 $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ 可得：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{r}$$

同理，$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$。

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=-\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}$$

利用链式法则，计算 $u(r)$ 的一阶和二阶偏导数：

$$u_x=u_r\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+u_r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=u_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+u_r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

同理可得 u_{yy} 和 u_{zz} 的表达式。

将三者相加，得到拉普拉斯算子 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$：

$$\begin{aligned}
\Delta u&=u_{rr}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right]+u_r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right)\\
&=u_{rr}\left[\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right]+u_r\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)\\
&=u_{rr}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)+u_r\left(\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}\right)\\
&=u_{rr}\left(\frac{r^2}{r^2}\right)+u_r\left(\frac{3r^2-r^2}{r^3}\right)\\
&=u_{rr}+u_r\left(\frac{2r^2}{r^3}\right)\\
&=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r
\end{aligned}$$

球对称解意味着解 u 只与到原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 有关，即 $u=u(r)$。在球坐标系下，拉普拉斯算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 作用于球对称函数 $u(r)$ 的形式为：

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r$$

于是原方程变为一个关于 r 的常微分方程：

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - u = 0$$

步骤 2. 使用变量代换简化方程

为了求解这个方程，作变量代换，令 $v(r) = ru(r)$。则 $u(r) = \frac{v(r)}{r}$。计算 u 对 r 的导数：

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{v_r r - v}{r^2} = \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} \\
u_{rr} &= \frac{v_{rr} r - v_r}{r^2} - \frac{v_r r^2 - v(2r)}{r^4} = \frac{v_{rr}}{r} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{2v}{r^3} \\
&= \frac{v_{rr}}{r} - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{2v}{r^3}
\end{aligned}$$

将 u, u_r, u_{rr} 代入原方程：

$$\left(\frac{v_{rr}}{r} - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{2v}{r^3}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2}\right) - \frac{v}{r} = 0$$

化简得：

$$\frac{v_{rr}}{r} - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{2v}{r^3} + \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v}{r^3} - \frac{v}{r} = 0$$
$$\frac{v_{rr}}{r} - \frac{v}{r} = 0$$

在 $r \neq 0$ 的情况下，方程简化为：

$$v_{rr} - v = 0$$

也可用

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = \frac{\partial}{\partial r}(u + ru_r) = u_r + u_r + ru_{rr} = ru_{rr} + 2u_r$$

步骤 3. 求解并回代

这是一个常系数线性常微分方程，其通解为：

$$v(r) = C_1 e^r + C_2 e^{-r}$$

或者写成

$$v(r) = C_1 \cosh r + C_2 \sinh r$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。将 $u(r) = v(r)/r$ 代回，得到原方程的球对称特解：

$$u(r) = \frac{C_1 e^r + C_2 e^{-r}}{r}$$

或者写成

$$u(r) = \frac{C_1 \cosh r + C_2 \sinh r}{r}$$

题 3. 求解 *Cauchy* 问题:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4tu = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = xe^x, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

解. 步骤 *1.* 消除含 u 的项

设变量代换为:

$$u(x,t) = F(t)V(x,t)$$

计算其偏导数:

$$u_t = F'(t)V(x,t) + F(t)V_t(x,t)$$
$$u_{xx} = F(t)V_{xx}(x,t)$$

代入原方程 $u_t - u_{xx} - 4tu = 0$ 并整理:

$$F'(t)V + F(t)V_t - F(t)V_{xx} - 4tF(t)V = 0$$
$$\implies \quad F(t)\left[V_t - V_{xx}\right] + \left[F'(t) - 4tF(t)\right]V = 0$$

为使方程简化,我们令 $V(x,t)$ 的系数项为零:

$$F'(t) - 4tF(t) = 0$$

这样,原方程就变为标准的热传导方程:

$$V_t - V_{xx} = 0$$

现在求解关于 $F(t)$ 的常微分方程:

$$F'(t) = 4tF(t)$$
$$\frac{dF}{F} = 4t\,dt$$
$$\ln|F| = 2t^2 + C$$
$$F(t) = C_1 e^{2t^2}$$

为方便计算,取 $C_1 = 1$,得到:

$$F(t) = e^{2t^2}$$

此时,初始时刻有 $F(0) = 1$。

最后，变换初始条件 $u(x,0)=xe^x$：

$$\begin{aligned} F(0)V(x,0)&=xe^x \\ \Longrightarrow \quad V(x,0)&=xe^x \end{aligned}$$

步骤 *2*. 求解新的 *Cauchy* 问题

经过代换，原问题转化为关于 $V(x,t)$ 的标准热传导方程的 *Cauchy* 问题：

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ V(x,0) = xe^x, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

该问题的解由热核（*Poisson* 公式）给出：

$$V(x,t) = (4\pi at)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} \cdot V(y,0)\, dy$$

其中 $a=1$，$n=1$(*a* 为方程系数，n 为空间变量 x 的维度)

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} V(y,0) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^y e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

步骤 *3*. 计算积分

我们处理指数部分的项，进行配方：

$$\begin{aligned} y - \frac{(x-y)^2}{4t} &= \frac{4ty - (x^2 - 2xy + y^2)}{4t} = -\frac{1}{4t}[y^2 - (2x+4t)y + x^2] \\ &= -\frac{1}{4t}\left[(y-(x+2t))^2 - (x+2t)^2 + x^2\right] \\ &= -\frac{(y-(x+2t))^2}{4t} + \frac{(x+2t)^2 - x^2}{4t} \\ &= -\frac{(y-(x+2t))^2}{4t} + \frac{x^2 + 4xt + 4t^2 - x^2}{4t} \\ &= -\frac{(y-(x+2t))^2}{4t} + x + t \end{aligned}$$

将此结果代入积分表达式：

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-(x+2t))^2}{4t}} e^{x+t} dy = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-(x+2t))^2}{4t}} dy$$

作变量代换，令 $z = y-(x+2t)$，则 $y = z+x+2t$，$dy = dz$。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-(x+2t))^2}{4t}} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} (z+x+2t) e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz + (x+2t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \end{aligned}$$

第一项的被积函数是奇函数，积分为 0。第二项是高斯积分，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$。这里 $a = \frac{1}{4t}$。

$$(x+2t)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = (x+2t)\sqrt{4\pi t}$$

因此，

$$V(x,t) = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{4\pi t}}\left[0 + (x+2t)\sqrt{4\pi t}\right] = (x+2t)e^{x+t}$$

步骤 *4.* 回代得到最终解

将 $V(x,t)$ 的解代回 $u(x,t) = V(x,t)e^{2t^2}$：

$$u(x,t) = (x+2t)e^{x+t}e^{2t^2} = (x+2t)e^{x+t+2t^2}$$

题 4. 用分离变量法求解初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 2\sin(\pi x), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le 2, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

解. **步骤 *1.* 分离变量**

设解的形式为 $u(x,t) = X(x)T(t)$。

$$u_{tt} = XT'', \quad u_{xx} = X''T$$

代入方程 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 并分离变量，设分离常数为 k：

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = k$$

由此得到两个常微分方程：

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ T'' - kT = 0 \end{cases}$$

步骤 *2.* 求解空间方程

空间方程及其边界条件为：

$$X'' - kX = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(2) = 0$$

分三种情况讨论 k：

- **情况一**：$k > 0$. 设 $k = \mu^2$ $(\mu > 0)$，通解为 $X(x) = c_1\cosh(\mu x) + c_2\sinh(\mu x)$。由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$。由 $X(2) = 0$ 得 $c_2\sinh(2\mu) = 0$，因 $\sinh(2\mu) \neq 0$，故 $c_2 = 0$。只有平凡解，舍去。

- **情况二**：$k = 0$. 方程为 $X'' = 0$，通解为 $X(x) = c_1x + c_2$。由 $X(0) = 0$ 得 $c_2 = 0$。由 $X(2) = 0$ 得 $2c_1 = 0$，故 $c_1 = 0$。只有平凡解，舍去。

- **情况三**：$k < 0$. 设 $k = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，方程为 $X'' + \mu^2X = 0$，通解为 $X(x) = c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x)$。由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$。由 $X(2) = 0$ 得 $c_2\sin(2\mu) = 0$。为得到非平凡解，须 $\sin(2\mu) = 0$。因此 $2\mu = n\pi$，即 $\mu_n = \frac{n\pi}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$。

由此得到本征值 $k_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$。对应的本征函数为 $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$。

步骤 *3*. 求解时间方程

时间方程为 $T_n'' - k_n T_n = 0$。代入 k_n：

$$T_n'' - \left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right) T_n = 0 \implies T_n'' + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n = 0$$

其通解为：

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

步骤 *4*. 叠加并利用初始条件

根据叠加原理，解可以写成级数形式：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

利用初始条件 $u(x,0) = 2\sin(\pi x)$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(\pi x)$$

比较系数可知，当 $n = 2$ 时，$a_2 = 2$。当 $n \neq 2$ 时，$a_n = 0$。

对时间求导：

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + b_n \frac{n\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

利用初始条件 $u_t(x,0) = 0$:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 0$$

因此，所有 $b_n = 0$。

步骤 *5*. 最终解

将求得的系数代回级数，只有 $n = 2$ 的项被保留：

$$u(x,t) = a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right)$$

化简得到最终解：

$$u(x,t) = 2\cos(\pi t)\sin(\pi x)$$