# 偏微分方程 2022 卷

班级:22 数学 1　姓名: 陈柏均　学号:202225110102

## 一、基础题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

**题 1.** 指出方程 $(x^2+y^2+3xy)u_{xy}+(\sin x+\cos y)u_{xxyy}=2x^4+3x^2\sin y+y^3$ 的阶，并判定它是线性的还是非线性的。

---

**解.** **阶数**：方程中最高阶导数是 $u_{xxyy}$，其阶数为 $2+2=4$。所以这是一个四阶偏微分方程。

**线性性**：该方程是线性的。因为未知函数 $u$ 及其各阶偏导数都是一次的，并且其系数和方程右端的项都仅与自变量 $x,y$ 有关。

---

**题 2.** 写出方程 $u_{xy}+u_{yz}+u_{zz}=0$ 的特征方程。

---

**解.** 设特征曲面为 $\phi(x,y,z)=C$。特征方程由主部系数决定，其形式为：

$$\phi_x\phi_y+\phi_y\phi_z+\phi_z^2=0$$

---

**题 3.** 验证 $v(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 是调和的。

---

**解.** 一个函数是调和的，如果它满足拉普拉斯方程 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$。

$$v_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(y(x^2+y^2)^{-1}\right)=-y(x^2+y^2)^{-2}(2x)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_{xx}=\frac{-2y(x^2+y^2)^2-(-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-2y(x^2+y^2)+8x^2y}{(x^2+y^2)^3}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$v_y=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_{yy}=\frac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-2y(x^2+y^2)-4y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

因此，

$$v_{xx}+v_{yy}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}+\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}=0$$

所以，$v(x,y)$ 是调和函数（在 $(0,0)$ 点外）。

**题 4.** 对于 *Cauchy* 问题 $\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$ 求关于点 $(0,2)$ 的依赖区域。

---

**解.** 这是一个一维波动方程，波速 $c$ 满足 $c^2 = 16$，所以 $c = 4$。点 $(x_0, t_0) = (0,2)$ 的依赖区域是初始直线 $t = 0$ 上的一个区间 $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$。代入数值：

$$[0 - 4 \cdot 2, \quad 0 + 4 \cdot 2] = [-8, 8]$$

所以点 $(0,2)$ 的依赖区域是初始轴上的闭区间 $[-8, 8]$。

---

**题 5.** 写出一维波动方程 *Cauchy* 问题 $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$ 的 *D'Alembert (*达朗贝尔*)* 公式。

---

**解.** 该方程的波速 $c = 1$。*D'Alembert* 公式为：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+t) + \phi(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

## 二、计算题 (本大题共 3 题, 前两题每题各 15 分, 第三题 10 分, 共 40 分)

**题 6.** 判断下列方程的类型，并化成标准型：

$$3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

---

**解. 步骤 *1.* 判断类型**

系数 $A = 3, B = 2, C = -1$。判别式 $\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16 > 0$。方程为双曲型。

**步骤 *2.* 求解特征方程**

特征方程为 $A(\frac{dy}{dx})^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0 \implies 3(\frac{dy}{dx})^2 - 2\frac{dy}{dx} - 1 = 0$。分解得 $(3\frac{dy}{dx} + 1)(\frac{dy}{dx} - 1) = 0$。特征方向为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1/3$。对应的特征线方程为 $y - x = C_1$ 和 $y + \frac{1}{3}x = C_2$ (或 $3y + x = C_2$)。

**步骤 *3.* 进行坐标变换**

取新坐标 $\xi = y - x, \eta = 3y + x$。计算偏导数：

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\xi + u_\eta \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + 3u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-u_\xi + u_\eta) = -(-u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (-u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}) = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(-u_\xi + u_\eta) = -(u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}) + (u_{\eta\xi} + 3u_{\eta\eta}) = -u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta} \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi + 3u_\eta) = (u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}) + 3(u_{\eta\xi} + 3u_{\eta\eta}) = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

**步骤 *4.* 代入原方程化简**

**二阶项***:* $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} = 3(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + 2(-u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) - (u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}) = (3 - 2 - 1)u_{\xi\xi} + (-6 - 4 - 6)u_{\xi\eta} + (3 + 6 - 9)u_{\eta\eta} = -16u_{\xi\eta}$。

**一阶项***:* $u_x + u_y = (-u_\xi + u_\eta) + (u_\xi + 3u_\eta) = 4u_\eta$。

合并得到 $-16u_{\xi\eta} + 4u_\eta = 0$。两边同除以 $-4$，得到标准型：

$$4u_{\xi\eta} - u_\eta = 0$$

---

**题 7.** 求解热传导方程 $u_t - 4u_{xx} = 0, (-\infty < x < \infty, t > 0)$ 的 *Cauchy* 问题，已知初值条件为 $u|_{t=0} = (x+1)^2$。

---

**解. 步骤 *1.* 使用泊松公式**

这是一个标准的热传导方程 *Cauchy* 问题。方程形式为 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$，这里 $a^2 = 4$。初始条件为 $\phi(y) = (y+1)^2$。根据泊松公式，解为：

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{16\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (y+1)^2 e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}} \,\mathrm{d}y$$

---

**步骤 *2.* 变量代换与展开**

令 $z = y - x$, 则 $y = z + x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$。此时 $y + 1 = z + x + 1$。

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{16\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (z+x+1)^2 e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} ((x+1)+z)^2 e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x+1)^2 + 2(x+1)z + z^2\right] e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{\infty} 2(x+1) z e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{\infty} (x+1)^2 e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z\right]
\end{aligned}$$

---

**步骤 *3.* 计算各积分项**

我们分项计算上述三个积分。

- **第一项：** $\int z^2 e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z$

  我们使用对参数求导的方法。设 $A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} \,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \pi^{1/2}\alpha^{-1/2}$。两边对 $\alpha$ 求导：

  $$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{-\alpha z^2}) \,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} -z^2 e^{-\alpha z^2} \,\mathrm{d}z$$

  另一方面，对 $A(\alpha)$ 的闭式解求导：

  $$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha} = \pi^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\alpha^{-3/2}\right) = -\frac{1}{2}\pi^{1/2}\alpha^{-3/2}$$

  因此，$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\alpha z^2} \,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{2}\pi^{1/2}\alpha^{-3/2}$。令 $\alpha = \frac{1}{16t}$，则

  $$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{16t}} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi^{1/2}\left(\frac{1}{16t}\right)^{-3/2} = \frac{1}{2}\pi^{1/2}(16t)^{3/2} = \frac{1}{2}\pi^{1/2}(64t^{3/2}) = 32\pi^{1/2}t^{3/2}$$

- **第二项**：$\int 2(x+1)ze^{-\frac{z^2}{16t}}\,\mathrm{d}z$

  被积函数 $ze^{-\frac{z^2}{16t}}$ 是关于 $z$ 的奇函数，在对称区间 $(-\infty,\infty)$ 上的积分为 $0$。

- **第三项**：$\int (x+1)^2 e^{-\frac{z^2}{16t}}\,\mathrm{d}z$

  这是一个标准的高斯积分：

$$(x+1)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{16t}}\,\mathrm{d}z = (x+1)^2\sqrt{\frac{\pi}{1/(16t)}} = (x+1)^2\sqrt{16\pi t}$$

---

**步骤 *4*. 合并得到最终解**

将计算结果代回 $u(x,t)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{16\pi t}}\left[32\pi^{1/2}t^{3/2} + 0 + (x+1)^2\sqrt{16\pi t}\right] \\
&= \frac{32\pi^{1/2}t^{3/2}}{\sqrt{16\pi t}} + \frac{(x+1)^2\sqrt{16\pi t}}{\sqrt{16\pi t}} \\
&= \frac{32\sqrt{\pi}t^{3/2}}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}} + (x+1)^2 \\
&= 8t + (x+1)^2
\end{aligned}$$

最终解为 $u(x,t) = (x+1)^2 + 8t$。

---

**题 8.** 求方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-(x^2+y^2+z^2)=0$ 的球对称解 $u(x,y,z)=u(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

---

**解. 步骤 *1*. 将偏微分方程转化为常微分方程**

对于球对称函数 $u(r)$，原方程变为 $\Delta u = r^2$。我们首先推导拉普拉斯算子 $\Delta u$ 作用于 $u(r)$ 的表达式。

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

利用链式法则：

$$u_x = u_r\frac{\partial r}{\partial x} = u_r\frac{x}{r}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\frac{x}{r}\right) = u_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + u_r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + u_r\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

将三个二阶偏导数相加：

$$\begin{aligned}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= \sum_{cyc} \left( u_{rr} \frac{x^2}{r^2} + u_r \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \right) \\ &= u_{rr} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + u_r \left( \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) \\ &= u_{rr} + u_r \left( \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r\end{aligned}$$

因此，原方程化为常微分方程：

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = r^2$$

---

**步骤 *2.* 使用变量代换求解常微分方程**

作变量代换，令 $g(r) = ru(r)$，则 $u(r) = \frac{g(r)}{r}$。计算 $u$ 对 $r$ 的导数：

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{g_r r - g}{r^2} = \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2} \\ u_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2} \right) = \left( \frac{g_{rr} r - g_r}{r^2} \right) - \left( \frac{g_r r^2 - g(2r)}{r^4} \right) \\ &= \frac{g_{rr}}{r} - \frac{g_r}{r^2} - \frac{g_r}{r^2} + \frac{2g}{r^3} = \frac{g_{rr}}{r} - \frac{2g_r}{r^2} + \frac{2g}{r^3}\end{aligned}$$

将 $u_r, u_{rr}$ 代入常微分方程：

$$\left( \frac{g_{rr}}{r} - \frac{2g_r}{r^2} + \frac{2g}{r^3} \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2} \right) = r^2$$

化简得：

$$\frac{g_{rr}}{r} - \frac{2g_r}{r^2} + \frac{2g}{r^3} + \frac{2g_r}{r^2} - \frac{2g}{r^3} = r^2 \implies \frac{g_{rr}}{r} = r^2$$

于是得到关于 $g(r)$ 的一个更简单的方程：

$$g_{rr} = r^3$$

也可用

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = \frac{\partial}{\partial r}(u + ru_r) = u_r + u_r + ru_{rr} = ru_{rr} + 2u_r$$

---

**步骤 *3.* 积分并回代**

对 $g_{rr} = r^3$ 积分两次：

$$\begin{aligned}g_r &= \int r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{4} r^4 + C_1 \\ g(r) &= \int \left( \frac{1}{4} r^4 + C_1 \right) \mathrm{d}r = \frac{1}{20} r^5 + C_1 r + C_2\end{aligned}$$

将 $u(r)=g(r)/r$ 代回，得到原方程的球对称解：

$$u(r)=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{20}r^5+C_1r+C_2\right)=\frac{1}{20}r^4+C_1+\frac{C_2}{r}$$

其中 $C_1,C_2$ 是任意常数。

# 三、解答题 (本大题共 1 题, 共 25 分)

**题 9.** 用分离变量法求解初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right), \quad u_t(x,0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right), & 0 \le x \le 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

---

**解. 步骤 *1.* 分离变量**

设解的形式为 $u(x,t) = X(x)T(t)$。代入方程 $u_{tt} - u_{xx} = 0$：

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 \implies \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k$$

其中 $-k$ 是分离常数。由此得到两个常微分方程：

$$X''(x) + kX(x) = 0 \quad 和 \quad T''(t) + kT(t) = 0$$

---

**步骤 *2.* 求解空间本征值问题**

空间方程的边界条件由原问题给出：$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \implies X'(0) = 0$ 和 $u(1,t) = X(1)T(t) = 0 \implies X(1) = 0$。我们求解 *Sturm-Liouville* 问题*:* $X'' + kX = 0,\ X'(0) = 0,\ X(1) = 0$。

- **情况一：** $k < 0$*.* 设 $k = -\mu^2$ *(*$\mu > 0$*)*，方程为 $X'' - \mu^2 X = 0$，通解为 $X(x) = c_1\cosh(\mu x) + c_2\sinh(\mu x)$。其导数为 $X'(x) = c_1\mu\sinh(\mu x) + c_2\mu\cosh(\mu x)$。由 $X'(0) = 0$ 得 $c_2\mu = 0 \implies c_2 = 0$。由 $X(1) = 0$ 得 $c_1\cosh(\mu) = 0$。因 $\mu > 0$*,* $\cosh(\mu) > 1$，故 $c_1 = 0$。只有平凡解，舍去。

- **情况二：** $k = 0$*.* 方程为 $X'' = 0$，通解为 $X(x) = c_1 x + c_2$。$X'(x) = c_1$。由 $X'(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$。由 $X(1) = 0$ 得 $c_1 \cdot 1 + c_2 = c_2 = 0$。只有平凡解，舍去。

- **情况三：** $k > 0$*.* 设 $k = \mu^2$ *(*$\mu > 0$*)*，方程为 $X'' + \mu^2 X = 0$，通解为 $X(x) = c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x)$。$X'(x) = -c_1\mu\sin(\mu x) + c_2\mu\cos(\mu x)$。由 $X'(0) = 0$ 得 $c_2\mu = 0 \implies c_2 = 0$。由 $X(1) = 0$ 得 $c_1\cos(\mu) = 0$。为得到非平凡解，须 $c_1 \neq 0$，故 $\cos(\mu) = 0$。因此 $\mu_n = \frac{\pi}{2} + n\pi = (n + \frac{1}{2})\pi$ *for* $n = 0, 1, 2, \ldots$。

本征值为 $k_n = \mu_n^2 = ((n + \frac{1}{2})\pi)^2$。对应的本征函数为 $X_n(x) = \cos\left((n + \frac{1}{2})\pi x\right)$。

---

**步骤 3. 求解时间方程及叠加**

时间方程 $T_n'' + k_n T_n = 0$ 的解为 $T_n(t) = a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t)$。根据叠加原理，解的形式为 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t)] \cos(\mu_n x)$。

---

**步骤 4. 利用初始条件确定系数**

利用初始位移 $u(x,0) = \cos(\frac{3\pi}{2}x)$:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left((n+\frac{1}{2})\pi x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

通过比较傅里叶级数的系数，当 $(n+\frac{1}{2})\pi = \frac{3\pi}{2} \implies n = 1$ 时，$a_1 = 1$。其他所有 $a_n = 0$。

对时间求导:$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a_n \mu_n \sin(\mu_n t) + b_n \mu_n \cos(\mu_n t)] \cos(\mu_n x)$。利用初始速度 $u_t(x,0) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + \cos(\frac{5\pi}{2}x)$:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mu_n \cos(\mu_n x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$$

比较系数:

- 对于 $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ 项: $n = 0$, $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$。$b_0\mu_0 = 1 \implies b_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies b_0 = \frac{2}{\pi}$。
- 对于 $\cos(\frac{5\pi}{2}x)$ 项: $n = 2$, $\mu_2 = \frac{5\pi}{2}$。$b_2\mu_2 = 1 \implies b_2\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 \implies b_2 = \frac{2}{5\pi}$。
- 其他所有 $b_n = 0$ (除了 $n = 0, 2$)。

---

**步骤 5. 写出最终解**

将所有非零系数代回级数，得到最终解:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a_1 \cos(\mu_1 t)\cos(\mu_1 x) + b_0 \sin(\mu_0 t)\cos(\mu_0 x) + b_2 \sin(\mu_2 t)\cos(\mu_2 x) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

# 四、证明题 (本大题共 1 题, 共 15 分)

**题 10.** 证明下述 *Neumann* 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = g(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = f(y), & y \in \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

有解的必要条件是

$$\int_{\Omega} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma} f(y)\,\mathrm{d}S.$$

---

**解.** 证明:

假设该 $Neumann$ 问题有（足够光滑的）解 $u(x)$。

对泊松方程 $\Delta u = g(x)$ 在区域 $\Omega$ 上进行积分，可得:

$$\int_{\Omega} \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} g(x)\,\mathrm{d}x$$

根据高斯散度定理（或格林第一恒等式），我们可以将左边的体积分转化为面积分:

$$\int_{\Omega} \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\nabla u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}S$$

其中 $\mathbf{n}$ 是边界 $\partial\Omega = \Gamma$ 上的单位外法向量。

沿外法线方向的方向导数定义为 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$。因此，

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S$$

将上述等式联立，我们得到:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} g(x)\,\mathrm{d}x$$

最后，利用给定的边界条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = f(y)$，代入上式左端，即得:

$$\int_{\Gamma} f(y)\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} g(x)\,\mathrm{d}x$$

这就是解存在的必要条件，也称为相容性条件。证明完毕。