

偏微分方程笔记

陈柏均

2025 年 5 月 12 日

目录

1	一阶拟传输方程	2
1.1	变量替换求解常系数传输方程	2
1.1.1	通解	2
1.1.2	特解（初始条件或边界条件）	3
1.2	特征线法求解变系数传输方程	3
1.2.1	通解	3
2	一维波动方程之分离变量法	4
2.1	问题描述	4
2.2	分离变量法	4
2.3	空间常微分方程的求解	4
2.3.1	情况 1	5
2.3.2	情况 2	5
2.3.3	情况 3	6
2.4	时间常微分方程的求解	6
2.5	得偏微分方程通解	7
2.6	初始条件求系数	7
2.6.1	原函数初始条件求 a_n	7
2.6.2	偏导初始条件求 b_n	7
2.6.3	用数分知识求系数，条件和前面泛函内积不一样	8
2.7	总结	9

1 一阶拟传输方程

1.1 变量替换求解常系数传输方程

假设 $a_1 \neq 0$ 且 $a_2 \neq 0$ ，我们求解常系数传输方程：

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.1)$$

1.1.1 通解

核心思想：通过变量替换，把二元偏微分转化成一元的常微分求解。

其中 $u = u(t, x)$ 。引入坐标变换 (α, β) ，使得 $u = u(\alpha, \beta)$ ，且：

$$\begin{cases} \alpha = ax + bt, \\ \beta = cx + dt. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

利用链式法则计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta}. \quad (1.1.4)$$

将 (1.1.3) 和 (1.1.4) 代入原方程 (1.1.1)：

$$a_1 \left(b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + a_2 \left(a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (1.1.5)$$

整理后得到：

$$(a_1 b + a_2 a) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a_1 d + a_2 c) \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \quad (1.1.6)$$

为消去一个变量，pde 转 ode，选择让第二项系数为 0，把方程 (1.1.6) 简化为：

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \quad (1.1.7)$$

选择系数

$$\begin{cases} a = 0, & b = 1, \\ c = a_1, & d = -a_2. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

此时坐标变换为：

$$\begin{cases} \alpha = t, \\ \beta = a_1 x - a_2 t. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

由(1.1.7) 表明 u 仅依赖于 β ，即通解为：

$$u(t, x) = L(a_1 x - a_2 t), \quad (1.1.10)$$

其中 $L(\cdot)$ 是任意可微函数。

1.1.2 特解（初始条件或边界条件）

已知初始条件 $u(x, 0) = e^{-x^2}$ ，求下面常系数运输方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.11)$$

由(1.1.10)可知

$$u(x, t) = f(x - t) = e^{-(x-t)^2} \quad (1.1.12)$$

1.2 特征线法求解变系数传输方程

1.2.1 通解

一阶线性变系数偏微分方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = (1, p(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.2.1)$$

其中 $p(x, y)$ 是 x 和 y 的函数。 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ 为梯度， $(1, p(x, y))$ 为方向，一整个乘积为方向导数，方向导数为 0 意味着， $u(x, y) = C$ 在切向量为 $(1, p(x, y))$ 这条曲线上，即

$$u(x, y)|_{\Gamma} = C \quad (1.2.2)$$

$$u(x, y) = f(C) \quad (1.2.3)$$

Γ 曲线上，任意点 (x, y) 求导 (Γ 曲线为 XOY 平面上的曲线，故 y 可表示成 x 的函数)，可得切向量 $(1, \frac{dy}{dx})$

所以我们找到 Γ 曲线，把二元偏微分转化成一元的常微分，令

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y) \quad (1.2.4)$$

可解得

$$C = \phi(x, y) \quad (1.2.5)$$

得方程解

$$u(x, y) = f(C) = f(\phi(x, y)) \quad (1.2.6)$$

$(1, \frac{dy}{dx})$ 为该曲线的切向量。我们称这条曲线叫特征线。只需要取遍所有的特征曲线就可以取遍 XOY 平面上所有的点，若有初始条件或者边界条件可以确定每条特征线在 $u(x, y)$ 对应的取值，就可以完整确定 $u(x, y)$ 这个函数。

示例 1.2.1. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.2.7)$$

此时我们有 $p(x, y) = x$ ，解 $\frac{dy}{dx} = x$ ，我们得到特征线 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ ，或 $y - \frac{1}{2}x^2 = C$ 。从而 $\phi(x, y) = y - \frac{1}{2}x^2$ ，偏微分方程的通解为 $u(x, y) = f(\phi(x, y))$ ，其中 f 是任意函数。把它们代回方程，直接验证，便知是解。

2 一维波动方程之分离变量法

2.1 问题描述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.1.1)$$

边界条件:

$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (2.1.2)$$

初始条件:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad 0 < x < l \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

2.2 分离变量法

核心思想: 分离变量法把偏微分转成为两个常微分。

设 $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, 假设解为乘积解。

代入方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T'' \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T \quad (2.2.1)$$

代入原方程:

$$X \cdot T'' = c^2 \cdot X'' \cdot T \quad (2.2.2)$$

转化为可分离变量方程:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \quad (2.2.3)$$

两个线性无关的变量相等, 只能同为常数:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k \quad (2.2.4)$$

转化为两个常微分方程:

$$\begin{cases} X'' = kX \\ T'' = kc^2 T \end{cases} \quad (2.2.5)$$

2.3 空间常微分方程的求解

$$X'' - kX = 0 \quad X(0) = 0 \quad (X(l) = 0) \quad (2.3.1)$$

2.3.1 情况 1

若 $k > 0$, 通解为 $X(x) = C_1 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \sinh \mu x$, 其中 $k = \mu^2$
代入初始条件

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \cdot \sinh \mu l = 0 \quad \therefore C_2 = 0 \quad (2.3.2)$$

检验 2.1.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{双曲余弦} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{双曲正弦} \quad (2.3.3)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (2.3.4)$$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (2.3.5)$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad (2.3.6)$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (2.3.7)$$

$$\therefore X = C_1 \cdot u \cdot \sinh \mu x + C_2 \cdot u \cdot \cosh \mu x \quad (2.3.8)$$

$$X'' = C_1 \cdot \mu^2 \cdot \cosh \mu x + C_2 \cdot \mu^2 \cdot \sinh \mu x \quad (2.3.9)$$

$$X'' - kX = 0 \quad \therefore k = \mu^2 \quad (2.3.10)$$

2.3.2 情况 2

若 $k = 0$, 则 $X'' = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{且} \quad X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\therefore C_1 = C_2 = 0 \quad (2.3.12)$$

2.3.3 情况 3

若 $k < 0$, 即 $X'' + \mu^2 X = 0$ $X(0) = 0$ $X(l) = 0$ $k = -\mu^2$

通解:

$$X = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \quad (2.3.13)$$

边界条件:

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(l) = C_2 \sin \mu l = 0 \quad (2.3.14)$$

非平凡解要求:

$$\sin \mu l = 0 \quad \therefore \mu l = n\pi \quad n \text{ 为任意正整数} \quad (2.3.15)$$

特征值:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{l} \quad (2.3.16)$$

特征函数:

$$X_n = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C 吸收正负号}) \quad (2.3.17)$$

特征值:

$$k = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (2.3.18)$$

检验 2.2. 一阶导数:

$$X' = -C_1 \mu \sin \mu x + C_2 \mu \cos \mu x \quad (2.3.19)$$

二阶导数:

$$X'' = -C_1 \mu^2 \cos \mu x - C_2 \mu^2 \sin \mu x \quad (2.3.20)$$

满足方程:

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad (2.3.21)$$

2.4 时间常微分方程的求解

$$T'' + \left(c \cdot \frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot T = 0 \implies T'' + (c\mu_n)^2 T = 0, \text{ 其中 } \lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l}$$

同理可得通解:

$$T = C_3 \cos \lambda_n t + C_4 \sin \lambda_n t \quad (2.4.1)$$

2.5 得偏微分方程通解

因此:

$$u_n(x, t) = X \cdot T = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \quad (2.5.1)$$

由于方程为线性齐次, 故可用叠加原理:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \quad (2.5.2)$$

2.6 初始条件求系数

2.6.1 原函数初始条件求 a_n

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (2.6.1)$$

由初始条件:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot a_n = f(x) \quad (2.6.2)$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$a_n = \frac{\langle f(x), \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle}{\langle \sin \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle} = \frac{\int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx} \quad (2.6.3)$$

化简得:

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (2.6.4)$$

2.6.2 偏导初始条件求 b_n

对 u_n 求偏导:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (-a_n \lambda_n \sin \lambda_n t + b_n \lambda_n \cos \lambda_n t) \quad (2.6.5)$$

在 $t = 0$ 时:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot b_n \lambda_n \quad (2.6.6)$$

对总解求偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x) \quad (2.6.7)$$

利用内积公式 (需要 $f \in L^2$):

$$b_n \lambda_n = \frac{\langle g(x), \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle}{\langle \sin \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x \rangle} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (2.6.8)$$

化简得:

$$b_n = \frac{2}{l \lambda_n} \cdot \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (2.6.9)$$

2.6.3 用数分知识求系数, 条件和前面泛函内积不一样

考虑函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (2.6.10)$$

计算 a_0 :

$$\frac{a_0}{2} = f - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (2.6.11)$$

$$a_0 = 2f - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (2.6.12)$$

对 a_0 积分, 若积分和求和可换序:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt \quad (2.6.13)$$

化简得:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dt \quad (2.6.14)$$

计算 a_n :

$$f \cos nt = \frac{a_0}{2} \cos nt + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \cos nt \quad (2.6.15)$$

积分得, 若积分和求和可换序:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nt dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos nt dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos nt dt \right) \quad (2.6.16)$$

化简得:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt dt = a_n \pi \quad (2.6.17)$$

因此:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt \, dt \quad (2.6.18)$$

同理可得:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \sin nt \, dt \quad (2.6.19)$$

级数收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx < \infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx < \infty \quad (2.6.20)$$

详细条件可以去看我的傅里叶分析笔记。

2.7 总结

一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.7.1)$$

边界条件:

$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (2.7.2)$$

初始条件:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad 0 < x < l \quad (2.7.3)$$

解为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \quad (2.7.4)$$

其中:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (2.7.5)$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad (2.7.6)$$

$$\lambda_n = c\mu_n = \frac{cn\pi}{l} \quad (2.7.7)$$