偏微分方程 2020 卷

班级:22 数学 1　姓名: 陈柏均　学号:202225110102

一、基础题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

题 1. 指出方程 $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u^2} = 0$ 的阶，并判定它是线性的还是非线性的。

解. **阶数：**方程中最高阶导数是 u_{xxxx}，所以这是一个四阶非偏微分方程。

线性性：该方程是非线性的。因为出现了关于未知函数 u 的非线性项 $\sqrt{1+u^2}$。

题 2. 判别方程 $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$ 的类型。

解. 该方程是一个二阶线性偏微分方程。其类型由主部 $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy}$ 的系数决定。系数为 $A = 1, B = 1, C = 1$。计算判别式：

$$\Delta = B^2 - 4AC = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

因为 $\Delta < 0$，所以该方程为椭圆型方程。

题 3. 验证 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ 和 $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ 是调和的。

解. 一个函数是调和的，如果它满足拉普拉斯方程 $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$。

对于 $u(x,y)$**:**

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \qquad u_{xx} = 6x$$
$$u_y = -6xy, \qquad u_{yy} = -6x$$

因此, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$。所以 $u(x,y)$ 是调和函数。

对于 $v(x,y)$**:**

$$v_x = 6xy, \qquad v_{xx} = 6y$$
$$v_y = 3x^2 - 3y^2, \qquad v_{yy} = -6y$$

因此, $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6y - 6y = 0$。所以 $v(x,y)$ 是调和函数。

题 4. 对 *Cauchy* 问题 $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), & -\infty<x<\infty, \end{cases}$ 求关于点 $(3,1)$ 的依赖区域。

解. 这是一个一维波动方程，其波速 c 满足 $c^2=9$，所以 $c=3$。点 $(x_0,t_0)=(3,1)$ 的依赖区域是初始直线 $t=0$ 上的一个区间 $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$。代入数值：

$$[3-3\cdot 1, \quad 3+3\cdot 1]=[0,6]$$

所以点 $(3,1)$ 的依赖区域是初始轴上的闭区间 $[0,6]$。

题 5. 设 u,v 是 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的连续且具有连续的二阶偏导数，在 $\overline{\Omega}$ 上具有连续的一阶偏导数，则写出第二 *Green* 公式。

解. 第二 *Green* 公式为：

$$\int_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域，$\partial\Omega$ 是其边界，$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿边界外法线方向的方向导数。

根据第一格林公式，我们有：

$$\int_\Omega (v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

交换上式中 u 和 v 的位置，得到：

$$\int_\Omega (u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{2}$$

将方程 (1) 减去方程 (2)，注意到 $\nabla u\cdot\nabla v=\nabla v\cdot\nabla u$，这两项相减后消去，即可得到**第二格林公式**：

$$\int_\Omega (v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

二、计算题 (本大题共 2 小题, 每小题 15 分, 共 30 分)

题 6. 判断下列方程的类型，并化成标准型：

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0.$$

解. 步骤 *1.* 判断方程类型

方程的系数为 $A = 1, B = 2, C = -3$。计算判别式：

$$\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

因为 $\Delta > 0$，所以该方程为双曲型方程。

步骤 *2.* 求解特征方程

特征方程为 $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$，即：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0$$

令 $\lambda = \frac{dy}{dx}$，则有 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$，分解因式得 $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$。解得两个特征方向：

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

对应的特征线方程为：

$$\frac{dy}{dx} = 3 \implies dy - 3dx = 0 \implies y - 3x = C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = -1 \implies dy + dx = 0 \implies y + x = C_2$$

步骤 *3.* 进行坐标变换

取新的坐标系：

$$\begin{cases} \xi = y - 3x \\ \eta = y + x \end{cases}$$

计算各阶偏导数：

$$u_x = -3u_\xi + u_\eta \qquad u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \qquad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -3u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

步骤 *4*. 代入原方程化简

将偏导数代入原方程：

- **二阶项**：$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=(9-6-3)u_{\xi\xi}+(-6-4-6)u_{\xi\eta}+(1+2-3)u_{\eta\eta}=-16u_{\xi\eta}$
- **一阶项**：$2u_x+6u_y=2(-3u_\xi+u_\eta)+6(u_\xi+u_\eta)=-6u_\xi+2u_\eta+6u_\xi+6u_\eta=8u_\eta$

合并所有项，得到变换后的方程：

$$-16u_{\xi\eta}+8u_\eta=0$$

两边同除以 -8，得到标准型：

$$2u_{\xi\eta}-u_\eta=0$$

题 7. 求解 *Cauchy* 问题：

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-6tu=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u|_{t=0}=xe^x, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

解. 步骤 *1*. 消除含 u 的项

设变量代换为 $u(x,t)=F(t)V(x,t)$。计算其偏导数：

$$u_t=F'(t)V+F(t)V_t,\quad u_{xx}=F(t)V_{xx}$$

代入原方程：

$$F'(t)V+F(t)V_t-F(t)V_{xx}-6tF(t)V=0$$

整理得 $F(t)[V_t-V_{xx}]+[F'(t)-6tF(t)]V=0$。为使方程简化，我们令 $V(x,t)$ 的系数项为零：$F'(t)-6tF(t)=0$。解此常微分方程：

$$\frac{F'(t)}{F(t)}=6t \implies \int\frac{\mathrm{d}F}{F}=\int 6t\ \mathrm{d}t \implies \ln|F|=3t^2+C$$

为方便计算，取 $C=0$ 和正号，得 $F(t)=e^{3t^2}$。

步骤 *2*. 求解新的 *Cauchy* 问题

原问题转化为关于 $V(x,t)$ 的标准热传导方程问题：

$$\begin{cases} V_t-V_{xx}=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ V(x,0)=u(x,0)/F(0)=xe^x/e^0=xe^x, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

该问题的解由泊松公式给出 $(a = 1, n = 1)$:

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^y e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$$

步骤 3. 计算积分 (详细配方法)

我们处理指数部分的项，进行配方：

$$\begin{aligned}
y - \frac{(x-y)^2}{4t} &= -\frac{1}{4t}[-4ty + (x-y)^2] \\
&= -\frac{1}{4t}[-4ty + x^2 - 2xy + y^2] \\
&= -\frac{1}{4t}[y^2 - 2(x+2t)y + x^2] \\
&= -\frac{1}{4t}\left[(y-(x+2t))^2 - (x+2t)^2 + x^2\right] \\
&= -\frac{(y-(x+2t))^2}{4t} + \frac{(x+2t)^2 - x^2}{4t} \\
&= -\frac{(y-(x+2t))^2}{4t} + \frac{x^2 + 4xt + 4t^2 - x^2}{4t} \\
&= -\frac{(y-(x+2t))^2}{4t} + x + t
\end{aligned}$$

将此结果代入积分表达式：

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-(x+2t))^2}{4t}} e^{x+t} \, \mathrm{d}y = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-(x+2t))^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$$

作变量代换，令 $z = y - (x+2t)$，则 $y = z + x + 2t$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-(x+2t))^2}{4t}} \, \mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} (z + x + 2t) e^{-\frac{z^2}{4t}} \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} \, \mathrm{d}z + (x+2t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} \, \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

第一项的被积函数是奇函数，积分为 0。第二项是高斯积分，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$。这里 $a = \frac{1}{4t}$。

$$(x+2t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} \, \mathrm{d}z = (x+2t)\sqrt{4\pi t}$$

因此，$V(x,t) = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{4\pi t}} \left[(x+2t)\sqrt{4\pi t}\right] = (x+2t)e^{x+t}$。

步骤 4. 回代得到最终解

$u(x,t) = V(x,t)F(t) = (x+2t)e^{x+t}e^{3t^2}$。

$$u(x,t) = (x+2t)e^{x+t+3t^2}$$

三、解答题 (本大题共 1 题, 共 20 分)

题 8. 用分离变量法求解初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{4}\sin(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 2, \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

解. 步骤 *1.* 分离变量

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$。代入方程 $u_{tt} - u_{xx} = 0$：

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 \implies \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k$$

其中 $-k$ 是分离常数。得到两个常微分方程：

$$X''(x) + kX(x) = 0 \quad 和 \quad T''(t) + kT(t) = 0$$

步骤 *2.* 求解空间本征值问题

空间方程的边界条件为 $X(0) = 0$ 和 $X(2) = 0$。我们对 k 分情况讨论：

- **情况一：** $k < 0$. 设 $k = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，方程为 $X'' - \mu^2 X = 0$，通解为 $X(x) = c_1\cosh(\mu x) + c_2\sinh(\mu x)$。由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$。由 $X(2) = 0$ 得 $c_2\sinh(2\mu) = 0$。因 $\mu > 0$, $\sinh(2\mu) > 0$，故 $c_2 = 0$。只有平凡解，舍去。
- **情况二：** $k = 0$. 方程为 $X'' = 0$，通解为 $X(x) = c_1 x + c_2$。由 $X(0) = 0$ 得 $c_2 = 0$。由 $X(2) = 0$ 得 $2c_1 = 0$，故 $c_1 = 0$。只有平凡解，舍去。
- **情况三：** $k > 0$. 设 $k = \mu^2$ $(\mu > 0)$，方程为 $X'' + \mu^2 X = 0$，通解为 $X(x) = c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x)$。由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$。由 $X(2) = 0$ 得 $c_2\sin(2\mu) = 0$。为得到非平凡解，须 $c_2 \ne 0$，故 $\sin(2\mu) = 0$。因此 $2\mu = n\pi$，即 $\mu_n = \frac{n\pi}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$。

由此得到本征值 $k_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$。对应的本征函数为 $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$。

步骤 *3.* 求解时间方程

时间方程为 $T_n'' + k_n T_n = 0$，即 $T_n'' + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n = 0$。其通解为 $T_n(t) = a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$。

步骤 *4.* 叠加并利用初始条件

解的级数形式为 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$。利用 $u(x,0)=\frac{1}{4}\sin(\pi x)$:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{1}{4}\sin(\pi x)$$

比较系数，当 $\frac{n\pi}{2}=\pi$ 即 $n=2$ 时，$a_2=\frac{1}{4}$。当 $n\neq 2$ 时，$a_n=0$。

对时间求导：$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n\frac{n\pi}{2}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)+b_n\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$。利用 $u_t(x,0)=0$:

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi}{2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=0$$

因此，所有 $b_n=0$。

步骤 *5.* 最终解

将求得的系数代回，只有 $n=2$ 的项非零：

$$u(x,t)=a_2\cos\left(\frac{2\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos(\pi t)\sin(\pi x)$$

四、证明题 (本大题共 1 题, 共 15 分)

题 9. 设 $u(x_1,\ldots,x_n)=f(r)$ (其中 $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$) 是 n 维 $(n\geq 3)$ *Laplace* 方程 $\Delta_n u=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$ 的解。试证明 $f(r)=C_1+\frac{C_2}{r^{n-2}}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

解. 步骤 *1.* 计算径向函数的偏导数

我们有 $r^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$。对 x_i 求导：

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right)=\frac{1\cdot r-x_i\frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2}=\frac{r-x_i\frac{x_i}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x_i^2}{r^3}=\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}$$

利用链式法则计算 $u=f(r)$ 的偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2+f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}=f''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

步骤 *2.* 推导拉普拉斯算子

将所有二阶导数相加得到拉普拉斯算子：

$$\begin{aligned}\Delta_n u=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}&=\sum_{i=1}^n\left[f''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\right]\\&=f''(r)\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{r^2}+f'(r)\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\\&=f''(r)\frac{\sum x_i^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{n}{r}-\frac{\sum x_i^2}{r^3}\right)\\&=f''(r)\frac{r^2}{r^2}+f'(r)\left(\frac{n}{r}-\frac{r^2}{r^3}\right)=f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)\end{aligned}$$

步骤 *3.* 求解常微分方程

因为 $\Delta_n u=0$，我们得到关于 $f(r)$ 的常微分方程：

$$f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)=0$$

令 $g(r)=f'(r)$，方程变为一阶方程：$g'(r)+\frac{n-1}{r}g(r)=0$。分离变量：

$$\frac{\mathrm{d}g}{g}=-(n-1)\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

两边积分：$\ln|g| = -(n-1)\ln|r| + \ln|A| \implies g(r) = \frac{A}{r^{n-1}}$。

步骤 *4.* 积分得到 $f(r)$

我们已经得到 $f'(r) = g(r) = Ar^{-(n-1)}$。再次对 r 积分：

$$f(r) = \int Ar^{-(n-1)}\,\mathrm{d}r$$

因为 $n \geq 3$, $-(n-1) \neq -1$。

$$f(r) = A\frac{r^{-n+2}}{-n+2} + C_1$$

令常数 $C_2 = \frac{A}{2-n}$，则解的形式为：

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^{n-2}}$$

证明完毕。