傅里叶级数依 L2 范数均方收敛

陈柏均

2025 年 4 月 10 日

1 Bessel 不等式的第二种证明

考虑在 L^2 空间中，对于标准正交基 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和函数 f，我们有如下等式：

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\|_2^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right)$$

$$= \ (f, f) - \left(f, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, f \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right)$$

第二项：

$$\left(f, \sum_{k=1}^{n} \overline{}(f, e_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)(f, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

第三项：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, f \right) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) \overline{(e_k, f)} = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)(f, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

第四项

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right)$$

由于 e_k 是标准正交基底，因此交叉项消失，只剩下两边下标相同的项

$$= \sum_{k=1}^{n} ((f, e_k) e_k, (f, e_k) e_k) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) \overline{(f, e_k)} (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

最终得

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \geq 0$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

综合以上结果，我们得到关键不等式：

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \geq 0$$

由此直接导出 Bessel 不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

当 $n \to \infty$ 时，级数仍然收敛：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 < +\infty$$

2 完备赋范空间中级数收敛性的证明

本部分将证明在完备赋范空间中，傅里叶级数的部分和序列收敛于原函数。基本思路分为三步：

1. 证明部分和序列是 Cauchy 列
2. 利用空间完备性得到收敛性
3. 验证极限函数与原函数相等

考虑标准正交基 $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$，其中 $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$（已标准化）。定义部分和：

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e_k \qquad c_k = (f, e_k)$$

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_2^2 = \left\|c_{n+1}e_{n+1} + \cdots + c_m e_m + c_{-m}e_{-m} + \cdots + c_{-(n+1)}e_{-(n+1)}\right\|_2^2$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left|c_{n+1}e_{n+1} + \cdots + c_m e_m + c_{-m}e_{-m} + \cdots + c_{-(n+1)}e_{-(n+1)}\right|^2 dx$$

中间项正交消掉

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |c_{n+1}e_{n+1}|^2 dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} |c_m e_m|^2 dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} |c_{-m}e_{-m}|^2 dx$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} |c_k|^2$$

由 bessel 不等式

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty \quad f \in L_2$$

由柯西准则可知：

$$\sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=-m}^{-(n+1)} |c_k|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

故：

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_2^2 < \varepsilon$$

这表明 $\{S_n(f)\}$ 是 Cauchy 列。由于 L^2 空间完备，存在 $g \in L^2$ 使得：

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = g$$

最后验证 $g = f$，对任意基元素 e_j：

$$(g, e_j) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(f), e_j\right)$$

由内积的连续性，极限与内积可交换：

$$= \lim_{n\to\infty} (S_n(f), e_j) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} (f, e_k) e_k, e_j\right) = (f, e_j)$$

得：

$$(g, e_j) = (f, e_j) \Rightarrow (g - f, e_j) = 0 \Rightarrow g = f$$

故 f 在 L^2 空间下的傅里叶级数依 L2 范数的均方收敛，则必能按范数收敛。