

初探傅里叶变换

陈柏均

2025 年 4 月 16 日

1 *Fourier* 级数到 *Fourier* 变换的推导

傅里叶级数可以解决周期函数和非周期函数但定义域有界，那如果是定义在 \mathbb{R} 上或者 $(-\infty, 0]$ 这样定义域无界的非周期函数我们又该如何解决？

假设 f 是定义在 \mathbb{R} 上的非周期函数。为得到 *Fourier* 变换的具体形式，考虑 f 在区间 $[-l, l]$ 上的 *Fourier* 级数展开：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/l},$$

其中系数

$$\alpha_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{-in\pi y/l} dy.$$

将系数代入展开式得：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{in\pi(y-x)/l} dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(y) e^{in\pi(y-x)/l} dy \frac{\pi}{l}, \quad -l < y < l. \end{aligned}$$

1.1 极限过程推导

令 $t_n = \frac{n\pi}{l}$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{l}$, 并定义

$$F_l(t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(y) e^{it_n(y-x)} dy,$$

则展开式可表示为:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(t_n) \Delta t_n, \quad -l < y < l.$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时, 上述求和为定积分:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_l(t_n) \Delta t_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F_l(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

其中

$$F_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{it(y-x)} dy$$

最终得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{it(y-x)} dy \right] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ity} dy \right) e^{itx} dt \end{aligned}$$

其中

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ity} dy$$

$\hat{f}(t)$ 或 $\mathcal{F}[f]$ 称为 f 的 *Fourier* 变换

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt$$

$\mathcal{F}^{-1}[f]$ 称为 *Fourier* 逆变换。

2 傅里叶变换的泛函与拓扑性质

2.1 傅里叶变换与逆变换是线性算子

傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$ 和逆变换 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ 都是线性算子。

加法性:

$$\mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$$

证明:

$$\mathcal{F}[f + g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) + g(t)) e^{-i\lambda t} dt$$

由积分的线性性可得：

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t} dt = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$$

齐次性（数乘不变性）：

$$\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f], \quad \text{其中 } c \in \mathbb{C}$$

证明：

$$\mathcal{F}[cf] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} cf(t)e^{-i\lambda t} dt = c \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt = c\mathcal{F}[f]$$

逆变换的线性性：类似地，傅里叶逆变换 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ 也满足：

$$\mathcal{F}^{-1}[f + g] = \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}[g], \quad \mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f]$$

证明方法与傅里叶变换完全相同，只需将积分核中的 $e^{-i\lambda t}$ 替换为 $e^{i\lambda t}$ 。

2.2 傅里叶变换是有界线性算子

傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$ 是有界线性算子。

对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，有：

$$|\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

证明：

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\lambda t}| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

因此，若 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，则 $\mathcal{F}[f] \in L^\infty(\mathbb{R})$ ，且：

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty} = \text{ess sup } |\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 < +\infty$$

这表明傅里叶变换将 L^1 空间中的函数映射到 L^∞ 空间中的函数，且变换后的函数有界。

2.3 傅里叶变换 $\mathcal{F}[f](\lambda)$ 的连续性

$$|\mathcal{F}[f](\lambda + \Delta\lambda) - \mathcal{F}[f](\lambda)|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-it(\lambda + \Delta\lambda)} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-it\lambda} dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-it\lambda} \cdot (e^{-it\Delta\lambda} - 1) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-it\lambda}| \cdot |e^{-it\Delta\lambda} - 1| dt$$

因为

$$|e^{-it\lambda}| = 1 \quad |e^{-it\Delta\lambda} - 1| \leq 2$$

所以

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot 2 dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

应用勒贝格控制收敛定理，交换极限与积分：

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-it\Delta\lambda} - 1| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} |e^{-it\Delta\lambda} - 1| dt$$

证明. $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} |e^{-it\Delta\lambda} - 1| = 0$

$$e^{-it\Delta\lambda} = \cos(t\Delta\lambda) - i \sin(t\Delta\lambda)$$

因此， $e^{-it\Delta\lambda} - 1$ 可以表示为：

$$e^{-it\Delta\lambda} - 1 = \cos(t\Delta\lambda) - 1 - i \sin(t\Delta\lambda)$$

$$|e^{-it\Delta\lambda} - 1| = \sqrt{(\cos(t\Delta\lambda) - 1)^2 + (\sin(t\Delta\lambda))^2}$$

展开平方项：

$$(\cos(t\Delta\lambda) - 1)^2 + (\sin(t\Delta\lambda))^2 = \cos^2(t\Delta\lambda) - 2\cos(t\Delta\lambda) + 1 + \sin^2(t\Delta\lambda)$$

$$= 1 - 2\cos(t\Delta\lambda) + 1 = 2(1 - \cos(t\Delta\lambda))$$

因此：

$$|e^{-it\Delta\lambda} - 1| = \sqrt{2(1 - \cos(t\Delta\lambda))}$$

利用三角恒等式 $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ：

$$|e^{-it\Delta\lambda} - 1| = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{t\Delta\lambda}{2}\right)} = 2 \left| \sin\left(\frac{t\Delta\lambda}{2}\right) \right|$$

当 $\Delta\lambda \rightarrow 0$ 时, 由洛必达法则可得

$$|e^{-it\Delta\lambda} - 1| = \left| 2 \sin \left(\frac{t\Delta\lambda}{2} \right) \right| = \left| \frac{2t\Delta\lambda}{2} \right| = |t\Delta\lambda|$$

对于 $\forall t \in \mathbb{R}$, 当 $\Delta\lambda \rightarrow 0$ 时, $|t\Delta\lambda| \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} |e^{-it\Delta\lambda} - 1| = 0$$

□

最终得

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} |F[f](\lambda + \Delta\lambda) - F[f](\lambda)| = 0$$

这表明傅里叶变换 $\mathcal{F}[f](\lambda)$ 是连续的。

综上所述, 傅里叶变换 \mathcal{F} 将 $L^1(\mathbb{R})$ 中的函数映射到有界连续函数空间 $C_b(\mathbb{R})$

3 傅里叶变换的性质 (续)

3.1 平移性 (Translation Property)

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a} \cdot \mathcal{F}[f](\lambda)$$

证明.

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-i\lambda x} dx$$

令 $t = x - a$, 则 $x = t + a$, $dx = dt$, 代入得:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t+a)} dt \\ &= e^{-i\lambda a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = e^{-i\lambda a} \cdot \mathcal{F}[f](\lambda) \end{aligned}$$

□

3.2 调制性 (Modulation Property)

$$\mathcal{F}[e^{iax} f(x)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda - a)$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)e^{-i\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\lambda-a)x}dx = \mathcal{F}[f](\lambda-a)\end{aligned}$$

□

3.3 伸缩性 (Scaling Property)

$$\mathcal{F}[f(bx)](\lambda) = \frac{1}{|b|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)$$

证明.

$$\mathcal{F}[f(bx)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(bx)e^{-i\lambda x}dx$$

令 $u = bx$, 则 $x = u/b$, $dx = du/|b|$ (这里是因为变量替换, 积分上下限会根据单调性改变, du 也会因为单调性改变, 最后都是正的, 所以加了绝对值), 代入得:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda \cdot \frac{u}{b}} \cdot \frac{du}{|b|} \\ &= \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{\lambda}{b}u}du = \frac{1}{|b|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)\end{aligned}$$

□

3.4 傅里叶变换综合练习, 好像说是会考

练习 3.1. 计算 $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w)$

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x-b}{a}\right)e^{-iwx}dx$$

令 $u = \frac{x-b}{a}$, 则 $x = au + b$, $dx = |a|du$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iw(au+b)} \cdot |a|du \\ &= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-ibw} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i(aw)u}du\end{aligned}$$

$$= |a|e^{-ibw} \cdot \mathcal{F}[f](aw)$$

练习 3.2. 计算 $\mathcal{F}[f(ax-b)](w)$

$$\mathcal{F}[f(ax-b)](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax-b)e^{-iwx} dx$$

令 $u = ax - b$, 则 $x = \frac{u+b}{a}$, $dx = \frac{1}{|a|} du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iw(\frac{u+b}{a})} \cdot \frac{1}{|a|} du$$

$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{bw}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{w}{a}u} du$$

$$= \frac{1}{|a|} e^{-i\frac{bw}{a}} \cdot \mathcal{F}[f]\left(\frac{w}{a}\right)$$

4 傅里叶变换的衰减性, 连续的 Riemann-Lebesgue 定理

在傅里叶级数的时候我们探讨的整数上的 Riemann-Lebesgue 定理, 得出系数具有一定的衰减性。现在我们考虑连续下的 Riemann-Lebesgue 定理, 得傅里叶变换具有一定的衰减性。

定理 4.1 (连续的 Riemann-Lebesgue 定理). 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \hat{f}(w) = 0$$

即 $\hat{f}(w) \rightarrow 0$ 当 $|w| \rightarrow \infty$ 。

证明. (1) 当 $f = \chi_{[a,b]}$ 时, 直接计算其 Fourier 变换:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-iwt} dt$$

计算积分:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw}$$

整理得:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw}$$

取绝对值:

$$|\hat{f}(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{|w|} \rightarrow 0 \quad (|w| \rightarrow \infty)$$

因此, $\hat{f}(w) \rightarrow 0$ 当 $|w| \rightarrow \infty$ 。

(2) 当 f 是有限个特征函数 $\chi_{[a_i, b_i]}$ 的线性组合时, 利用积分线性性和极限线性性, 可知:

$$\hat{f}(w) \rightarrow 0 \quad (|w| \rightarrow \infty)$$

即紧支撑的分片常函数的 Fourier 变换趋于 0 (当 $|w| \rightarrow \infty$ 时)。

(3) 对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个紧支撑的分片常函数 g , 使得:

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

(4) 对于 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 分解其 Fourier 变换:

$$\hat{f}(w) = \hat{f}(w) - \hat{g}(w) + \hat{g}(w)$$

即:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) e^{-iwx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-iwx} dx$$

记为:

$$\hat{f}(w) = J_1(w) + J_2(w)$$

估计 $J_1(w)$ 的绝对值:

$$|J_1(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon$$

这里利用了 L^1 范数的性质, 即:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

估计 $J_2(w)$ 的绝对值:

由于 g 是紧支撑的分片常函数, 根据第 (2) 部分的结论:

$$|J_2(w)| = o(1) \quad (|w| \rightarrow \infty)$$

综上所述

将 $J_1(w)$ 和 $J_2(w)$ 的估计结果结合起来:

$$|\hat{f}(w)| \leq |J_1(w)| + |J_2(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon + o(1)$$

由于 ε 是任意的, 当 $|w| \rightarrow \infty$ 时, $o(1)$ 趋于 0, 因此:

$$\hat{f}(w) \rightarrow 0 \quad (|w| \rightarrow \infty)$$

□