初识傅里叶级数

陈柏均

2025 年 3 月 3 日

目录

1 三角形式

函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开的三角形式:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.0.1}$$

基底为 $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots)$，

坐标为 $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$

1.1 正交性

基底正交性证明：区间只需保证在一个周期内就行。对于 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 的周期：$\cos nx$ 在对称区间积分为 0，而且周期内为 0

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0 \quad (n \geq 1) \tag{1.1.1}$$

因为为 $\sin nx$ 为奇函数奇函数，

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0 \quad (n \geq 1) \tag{1.1.2}$$

证明. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx \quad (n \neq m)$ 已知：

$$\begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{cases} \tag{1.1.3}$$

相加得：

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2} \tag{1.1.4}$$

代入并积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = 0 \tag{1.1.5}$$

□

证明. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx \quad (n \neq m)$

已知：

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{cases} \tag{1.1.6}$$

相减得：

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} \tag{1.1.7}$$

代入并积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = 0 \tag{1.1.8}$$

□

证明. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx \quad (n = m)$

已知：

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{cases} \tag{1.1.9}$$

相减得：

$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2} \tag{1.1.10}$$

代入并积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0 \quad (\sin kx \qquad) \tag{1.1.11}$$

综上所述，正交性得证。 □

1.2 范数计算

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx = 2\pi \tag{1.2.1}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + \cos(0x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = \pi \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(0x) - \cos(2nx)) \, dx = \pi \tag{1.2.3}$$

1.3 系数的导出

1.3.1 L^2 空间内积与最佳逼近

当存在最佳逼近（L^2 空间为希尔伯特空间必存在），$f \in L^2$, 则系数有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle f(x), \cos nx \rangle}{\langle \cos nx, \cos nx \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos nx \, dx} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\langle f(x), \sin nx \rangle}{\langle \sin nx, \sin nx \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin nx \, dx} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \tag{1.3.3}$$

注记 1.1. 把他看作是有限维向量空间，内积就是向量点乘，系数就是到基的投影，这样类比理解。

1.3.2 用数分知识求系数，条件和前面泛函内积不一样

考虑函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.3.4}$$

计算 a_0:

$$\frac{a_0}{2} = f - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.3.5}$$

$$a_0 = 2f - 2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.3.6}$$

对 a_0 积分, 若积分和求和可换序：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \, dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt \tag{1.3.7}$$

化简得:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \, dt \tag{1.3.8}$$

计算 a_n:

$$f\cos nt = \frac{a_0}{2}\cos nt + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\cos nt \tag{1.3.9}$$

积分得，若积分和求和可换序：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nt\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\,dt + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\cos nt\,dt\right) \tag{1.3.10}$$

化简得:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nt\,dt = a_n\pi \tag{1.3.11}$$

因此:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nt\,dt \tag{1.3.12}$$

同理可得:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\sin nt\,dt \tag{1.3.13}$$

问题是什么时候才能让求和与积分互换，收敛性条件之后会详细讨论

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx < \infty \tag{1.3.14}$$

1.4 三角形式到复数形式的推导

由：

$$\begin{cases} e^{ikx} = \cos kx + i\cdot\sin kx \\ e^{-ikx} = \cos kx - i\cdot\sin kx \end{cases} \tag{1.4.1}$$

可得：

$$\begin{cases} \cos kx = \dfrac{1}{2}\cdot(e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ \sin kx = \dfrac{1}{2i}\cdot(e^{ikx} - e^{-ikx}) \end{cases} \tag{1.4.2}$$

所以，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}a_n\cdot(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i}b_n\cdot(e^{inx} - e^{-inx})\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{inx}\cdot\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) + e^{-inx}\cdot\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

得系数如下：

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{i0x}\,dx \tag{1.4.4}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx\cdot i \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned} C_{-n} &= \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx\cdot i \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{inx}\,dx \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

最终得复数形式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot e^{inx} \tag{1.4.7}$$

其中，

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx \tag{1.4.8}$$

2 复数形式

上面是从三角形式推到复数形式，下面是不知道系数，只知道形式，重复三角形式的步骤。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot e^{inx} \tag{2.0.1}$$

2.1 正交性和范数

证明.

$$\begin{cases} \langle e^{inx}\cdot e^{imx}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = 0, & n\neq m \\ \langle e^{inx}\cdot e^{imx}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi, & n = m \end{cases} \tag{2.1.1}$$

□

2.2 系数的推导

2.2.1 内积与最佳逼近

道理同上，可得：

$$C_n = \frac{\langle f(x), e^{inx} \rangle}{\langle e^{inx}, e^{inx} \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx \tag{2.2.1}$$

2.2.2 数分之间接法

若积分与求和可互换，则有，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{i(n-m)x} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \tag{2.2.2}$$

因为正交性只剩下 $n = m$ 的一项

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-imx} dx = C_m \cdot 2\pi \tag{2.2.3}$$

故得

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx \tag{2.2.4}$$

2.2.3 数分之直接法

由原式子可得：

$$C_n = e^{-inx} \cdot f(x) - \sum_{k \neq n} C_k \cdot e^{i(k-n)x} \tag{2.2.5}$$

若积分与求和可互换，则有，

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_n dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cdot f(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \neq n} C_k \cdot e^{i(k-n)x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx - \sum_{k \neq n} C_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$