

第三次课程讲义

湛秋辉

2025 年 4 月 8 日笔记

1 敛散性历史回顾

1.1 主要发展阶段

1. **Fourier 的发现 (1807 年)**: 首次提出 Fourier 级数理论, 并认为其收敛性在物理问题中是自然成立的。
2. **Dirichlet 的贡献 (1829 年)**: 提出 Dirichlet 条件, 证明了满足该条件的周期函数其 Fourier 级数逐点收敛。但当时普遍误认为所有连续函数的 Fourier 级数均收敛。
3. **Du Bois-Reymond 的反例 (1873 年)**: 构造了一个连续周期函数, 其 Fourier 级数在某一点发散, 这一结果颠覆了当时的认知。
4. **Kolmogorov 的工作 (1926 年)**: 证明存在 $L^1(\mathbb{T})$ 函数, 其 Fourier 级数在每一点都发散。
5. **Carleson 的突破 (1966 年)**: 证明了 $L^2(\mathbb{T})$ 函数的 Fourier 级数几乎处处收敛:

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{T}.$$

6. **Hunt 的推广 (1967 年)**: 将结果扩展至 $L^p(\mathbb{T})$ 空间 ($p > 1$), 证明对任意 $f \in L^p(\mathbb{T})$, 有:

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{T}.$$

1.2 总结与意义

- Carleson 的证明极其复杂, 但其结论 (Carleson-Hunt 定理) 奠定了现代 Fourier 分析的基石。
- 连续函数的 Fourier 级数收敛性问题并非完全解决, 例如是否存在连续函数其 Fourier 级数在某个正测集上发散, 仍是未解之谜。
- 这些成果深刻影响了调和分析、偏微分方程及信号处理等领域。

2 各种求和理论

2.1 Fejér 求和法（算术平均求和法）

定义 Fejér 和为：

$$G_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) C_k e^{ikx}$$

其积分形式可表示为：

$$G_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 dt$$

定理 1 (Lebesgue). 若 $f \in L^1(\mathbb{T})$, 则：

1. 若 f 在 x_0 处满足 Lebesgue 条件：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)| dt = 0,$$

则 $G_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$).

2. 在几乎处处意义下, $G_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{T}$.

定理 2 (L^p 收敛性). 若 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 且 $1 \leq p < \infty$, 则：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - G_n(f)\|_p = 0.$$

2.2 Abel 求和与 Poisson 核

定义 Abel-Poisson 和为：

$$F(r, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k r^{|k|} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x-t) dt,$$

其中 Poisson 核为：

$$P(r, \theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

- 解析性：当 $r \rightarrow 1^-$ 时, $F(r, x)$ 在单位圆内解析, 边界值与原函数相关。
- 收敛性：若 $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p \geq 1$), 则 $F(r, x) \rightarrow f(x)$ a.e. 当 $r \rightarrow 1^-$ 。

3 Fourier 级数逐点收敛

3.1 基本定义与部分和

设 $f \in L^1[-\pi, \pi]$ 为广义周期函数, 其 Fourier 部分和为:

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中系数由积分表达式给出:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku) du, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ku) du.$$

3.2 积分表示与 Dirichlet 核

部分和可重写为积分形式:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos k(u-x) du.$$

进一步化简为:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(u-x) \right) du.$$

利用三角恒等式:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2 \sin \frac{\theta}{2}},$$

可得 Dirichlet 核表示:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(u-x))}{2 \sin \frac{u-x}{2}} du.$$

3.3 Dirichlet 核的性质

定义 Dirichlet 核:

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

则部分和可进一步简化为:

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(u-x) du.$$

3.4 收敛性分析

- 逐点收敛: 若 f 在 x 处满足 Dini 条件, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty,$$

则 $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$.

- 均方收敛: 对 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0.$$

4 Fourier 级数的复数形式与 Dirichlet 核

4.1 复数形式部分和

周期函数 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 的 Fourier 部分和可表示为:

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-u)} du,$$

其中复数系数为:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du.$$

4.2 Dirichlet 核的积分表示

通过几何级数求和公式, 部分和可化简为卷积形式:

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u) du = (f * D_n)(x),$$

其中 Dirichlet 核定义为:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\pi \sin(\frac{t}{2})}.$$

4.3 Dirichlet 核的性质

- 归一性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

- 对称性:

$$D_n(-t) = D_n(t).$$

- 正交投影: S_n 是从 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $2n+1$ 维三角多项式空间的投影算子, 即

$$S_n : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{T}_n, \quad \mathcal{T}_n = \text{span}\{e^{ikx}\}_{k=-n}^n.$$

4.4 收敛性评注

Dirichlet 核的振荡特性导致:

- 对 $f \in L^1(\mathbb{T})$, $S_n(f, x)$ 的逐点收敛需额外条件 (如 Dini 条件)。
- 对 $f \in L^2(\mathbb{T})$, 部分和在 L^2 范数下收敛:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0.$$

5 fourier 级数的收敛性分析

5.1 基本假设与收敛目标

设 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 为周期函数, 研究其 Fourier 部分和 $S_n(f, x)$ 在点 $x \in \mathbb{R}$ 处的收敛性。假设存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时:

$$S_n(f, x) \rightarrow c.$$

5.2 偏差积分表达式

$$c = \int_{-\pi}^{\pi} c \cdot D_n(t) dt$$

这是因为 Dirichlet 核满足归一性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

其中 $D_n(t)$ 为 Dirichlet 核:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

积分运算的线性性允许将偏差分解为:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - c &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} c D_n(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - c] D_n(t) dt. \end{aligned}$$

5.3 积分分解与对称性

将积分分解为对称部分:

$$S_n(f, x) - c = \int_0^{\pi} (f(x-t) - c) D_n(t) dt + \int_{-\pi}^0 (f(x-t) - c) D_n(t) dt.$$

利用 Dirichlet 核的偶函数性质 $D_n(-t) = D_n(t)$, 可将第二项变量替换 $t \rightarrow -t$:

$$\int_{-\pi}^0 (f(x-t) - c) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} (f(x+t) - c) D_n(t) dt.$$

因此, 总偏差可合并为:

$$S_n(f, x) - c = \int_0^{\pi} [f(x-t) + f(x+t) - 2c] D_n(t) dt.$$

5.4 收敛性条件

1. **Dini 条件**: 若存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2c|}{t} dt < \infty,$$

则 $S_n(f, x) \rightarrow c$ 当 $n \rightarrow \infty$ 。

2. **Jordan 条件**: 若 f 在 x 处有界变差, 则 $c = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ 且收敛成立。

5.4.1 注记

- 当 $c = f(x)$ 时, 收敛性要求 f 在 x 处满足某种正则性 (如连续性或 Dini 条件)。
- 对 $f \in L^2(\mathbb{T})$, 部分和在 L^2 范数下收敛:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0.$$

5.5 积分化简

设 $\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2c$, 且 $\psi_x(-t) = \psi_x(t)$ 。假设 $\psi_x(t) \in L^1(0, \pi)$, 则有:

$$\int_0^\pi \psi_x(t) dt = \int_0^\pi f(x+t) dt + \int_0^\pi f(x-t) dt - 2c\pi.$$

部分和 $S_n(f, x) - c$ 可表示为:

$$S_n(f, x) - c = \int_0^\pi \psi_x(t) D_n(t) dt,$$

其中 Dirichlet 核为:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\pi \sin \frac{t}{2}}.$$

5.6 积分化简与 Riemann-Lebesgue 引理

将积分化简为:

$$S_n(f, x) - c = \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\pi \sin \frac{t}{2}} dt.$$

进一步分解为:

$$= \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\sin(nt) \cos \frac{t}{2} + \cos(nt) \sin \frac{t}{2}}{2\pi \sin \frac{t}{2}} dt.$$

化简后得到:

$$= \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2} \sin nt}{2\pi \sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \cos(nt) dt.$$

应用 Riemann-Lebesgue 引理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时:

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{\sin nt}{\sin \frac{t}{2}} dt + o(1).$$

5.6.1 注记

对于 $\psi_x(t) \cos \frac{t}{2}$, 不能直接应用 Riemann-Lebesgue 引理, 因为 $\frac{t}{2}$ 在 0 点有奇异性, 不属于 $L^1(0, \pi)$ 。

5.7 偏差积分表达式与 Dirichlet 核

设 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 部分和 $S_n(f, x) - c$ 可表示为:

$$S_n(f, x) - c = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2} \sin nt}{\sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2} \sin nt}{\sin \frac{t}{2}} dt + o(1).$$

其中 $\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2c$ 。

5.8 应用 Riemann-Lebesgue 引理

对于第一项:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2} \sin nt}{\sin \frac{t}{2}} dt = o(1),$$

因为 $\psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \in L^1([\delta, \pi])$, 应用 Riemann-Lebesgue 引理。

对于第二项:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2} \sin nt}{\sin \frac{t}{2}} dt,$$

需要进一步分析。

5.9 归纳与结论

归纳:

$$S_n(f, x) \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\delta} \psi_x(t) \cdot \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin nt \, dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

进一步分解:

$$\int_0^{\delta} \psi_x(t) \cdot \cos \left(\frac{t}{2} \right) \cdot \frac{t}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \cdot \frac{1}{t} \sin(nt) \, dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

5.9.1 注记

f 在 $(0, \delta)$ 的取值有关, 任意小邻域的取值决定收敛性。

6 Dini 判别法

6.1 Dini 条件

定理 3 (Dini 判别法). 在 Dini 条件下, Fourier 部分和满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = C.$$

$f \in L^1(\mathbb{T})$, $C \in \mathbb{C}$ 为常数。偏差函数:

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2C,$$

存在 $\delta > 0$ 使得:

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt < \infty.$$

6.2 证明

利用 Dirichlet 核的对称性, 部分和偏差可表示为:

$$S_n(f, x) - C = \int_0^\delta \psi_x(t) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\pi \sin(\frac{t}{2})} dt + o(1).$$

将 Dirichlet 核拆分为主导项与余项:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \cdot \frac{t \cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \sin(nt) dt + o(1)$$

从而偏差积分可近似为:

$$S_n(f, x) - C = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \cdot \frac{t \cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \sin(nt) dt + o(1).$$

应用 Riemann-Lebesgue 引理由于 $\frac{\psi_x(t)}{t} \in L^1(0, \delta)$ 且 $\frac{t \cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ 在 $(0, \delta)$ 上连续, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \cdot \frac{t \cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \sin(nt) dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此 $S_n(f, x) \rightarrow C$ 当 $n \rightarrow \infty$ 。

6.2.1 注记

- Dini 条件的物理意义: 偏差函数 $\psi_x(t)$ 在 $t \rightarrow 0$ 时的衰减速度快于 $1/t$ 。
- 当 $C = f(x)$ 时, 条件退化为经典 Dini 条件:

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \infty.$$

6.3 推论 1: 可微性条件下的收敛性

设 $f \in L(-\pi, \pi)$, 若 f 在 x 处可微, 则 $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 。

证明在 Dini 定理中, 令 $c = f(x)$ 。

定义:

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

则:

$$\frac{\psi_x(t)}{t} = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x)}{-t}.$$

进一步化简为:

$$= \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \frac{f(x-t) - f(x)}{t}.$$

当 $t \rightarrow 0$ 时:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_x(t)}{t} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

因此, 若:

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt < \infty,$$

则 $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 。

6.3.1 注记

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $t \in (0, \delta_1)$ 时:

$$\left| \frac{\psi_x(t)}{t} \right| < \varepsilon.$$

因此:

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt = \int_0^{\delta_1} \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt + \int_{\delta_1}^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt.$$

估计每一项:

$$\leq \varepsilon \delta_1 + \int_{\delta_1}^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt.$$

由于 $\frac{1}{t}$ 在 (δ_1, δ) 上是连续的, 积分收敛。

6.3.2 结论

因此:

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

6.4 推论 2: Dirichlet 收敛定理

定理 4 (Dirichlet 收敛定理). 设函数 f 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足:

- 分段光滑
- 在 $[-\pi, \pi]$ 上除有限个第一类间断点外连续

则对任意 $x \in (-\pi, \pi)$, 其 Fourier 级数部分和满足:

$$S_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

6.4.1 收敛性证明

定义偏差积分:

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \sin(nt) dt = \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin(nt) dt + \int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin(nt) dt$$

其中定义辅助函数:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}, \quad t \in (0, \delta] \\ \varphi_2(t) &= \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}, \quad t \in (0, \delta]\end{aligned}$$

6.4.2 正则性分析

- 在 $t \rightarrow 0^+$ 时 (分段光滑保证左右导数存在)

$$\varphi_1(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x^+)$$

$$\varphi_2(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} = -f'(x^-)$$

- φ_1, φ_2 在 $[0, \delta]$ 上连续

应用 Riemann-Lebesgue 引理

$$\int_0^\delta \varphi_i(t) \sin(nt) dt = o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad i = 1, 2$$

因此原积分满足:

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \sin(nt) dt = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

6.5 推论 3: Lipschitz 条件下的收敛性

设 $f \in L(-\pi, \pi)$, 若 f 在 x 处满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1]$, 使得:

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^\alpha \quad \alpha \in (0, 1].$$

则 $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$.

证明, 应用 Dini 定理

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

则:

$$\left| \frac{\psi_x(t)}{t} \right| \leq \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| + \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right| \leq 2M|t|^{\alpha-1}.$$

因此, 积分:

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} dt \leq 2M \int_0^\delta |t|^{\alpha-1} dt < \infty.$$

6.5.1 结论

由 Dini 定理可知:

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

6.6 处理 Dini 条件的积分转换

在处理 Dini 条件时, 将积分:

$$\int_0^\delta \psi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt$$

转换为:

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{2t} \sin nt \, dt$$

是基于以下分析, 定义函数 $g(t)$ 如下:

$$g(t) = \begin{cases} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{t}, & t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上连续。

6.6.1 极限分析

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \right).$$

展开 $\cot \frac{t}{2}$:

$$\cot \frac{t}{2} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 利用等价无穷小:

$$\sin \frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}, \quad \cos \frac{t}{2} \sim 1 - \frac{t^2}{8}.$$

因此:

$$\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{t^2}{8}}{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t} \left(1 - \frac{t^2}{8} \right) = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t^2}{8} \right).$$

所以:

$$\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t^2}{8} \right) - \frac{1}{t} = -\frac{t}{8}.$$

当 $t \rightarrow 0$ 时:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \right) = 0.$$

6.6.2 结论

因此, $g(t)$ 在 $t = 0$ 处连续, 且:

$$\int_0^\delta \psi_x(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt \, dt = \int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{2t} \sin nt \, dt.$$

6.6.3 注记

这种推论可以构造很多条件, 只需要保证存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \, dt < \infty$$

如 $f \in C^2[-\pi, \pi]$ 且满足 Hölder 条件:

$$|f(x + \epsilon) - f(x)| \leq M \cdot \frac{1}{|\ln |x||^{\epsilon+1}} \quad (\epsilon > 0)$$

则

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

即 Fourier 级数在点 x 处收敛于 $f(x)$ 。

7 Jordan 判别法

定理 5 (Jordan 判别法). 设 $f \in L^1[-\pi, \pi]$, 且 f 在点 x 的某邻域 $U(x, r)$ 上有界变差, 则其 Fourier 级数部分和满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

7.1 证明思路

1. 积分估计引理: 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 6.$$

证明. 分情况讨论:

- 当 $1 \leq |a| \leq b$ 时, 由第二积分中值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使得:

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right| = \frac{1}{|a|} \left| \int_a^\xi \sin t dt \right| \leq \frac{2}{|a|} \leq 2.$$

- 当 $0 \leq a \leq b \leq 1$ 时:

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_a^b 1 dt = b - a \leq 1.$$

- 综合两种情况可得：

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 3 \quad (\text{同号积分}).$$

- 对于一般情况 ($a < 0 < b$):

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{|a|} + \int_0^b \leq 6.$$

□

7.1.1 应用说明

- 有界变差函数类包含分段单调函数，故 Jordan 判别法比 Dini 条件适用范围更广。
- 当 f 在 x 处连续时，收敛值为 $f(x)$ ；在跳跃间断点收敛于左右极限的平均值。

7.2 Jordan 判别法证明步骤

设 $f \in BV(x-r, x+r)$ ，则 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 存在（因有界变差函数在每点存在单侧极限）。令：

$$c = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)),$$

并定义偏差函数：

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0).$$

7.2.1 Jordan 分解定理应用

根据 Jordan 分解定理，存在单调递增函数 h_1, h_2 使得：

$$\psi_x(t) = h_1(t) - h_2(t), \quad \text{且} \quad h_1(0+) = h_2(0+) = 0.$$

7.2.2 偏差积分分解

部分和偏差可表示为：

$$S_n(f, x) - c = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \psi_x(t) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt + o(1).$$

7.2.3 积分估计

对任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得：

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - C &= S_n(f, x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \psi_x(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt + o(1) \end{aligned}$$

根据积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} |S_n(f, x) - C| &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta h_1(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta h_2(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| + \epsilon \\ &= \left| \frac{1}{\pi} h_1(\delta) \int_{\xi_1}^\delta \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| + \left| \frac{1}{\pi} h_2(\delta) \int_{\xi_2}^\delta \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| + \epsilon \\ &\leq \left(\frac{6+6}{\pi} \right) \epsilon + \epsilon = \left(1 + \frac{12}{\pi} \right) \epsilon. \end{aligned}$$

7.2.4 积分第二中值定理

设 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。

若 g 在 $[a, b]$ 上递减且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx.$$

若 g 在 $[a, b]$ 上递增且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\eta \in [a, b]$, 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\eta^b f(x) dx.$$

7.2.5 一般情况

若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 且 g 单调, 则存在 $\xi, \eta \in [a, b]$, 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\eta^b f(x) dx.$$

7.3 推论 1: Dirichlet 条件

定理 6 (Dirichlet 条件). 设函数 $f \in L^1[-\pi, \pi]$ 上满足:

- 有限个极值点 (分段单调)
- 在 $[-\pi, \pi]$ 上除有限个第一类间断点外连续

则对任意 $x \in (-\pi, \pi)$, 其 Fourier 级数部分和满足:

$$S_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

因为满足 Dirichlet 条件的函数是有界变差函数, 故逐点收敛到左右极限的平均值。