# 傅里叶变换学习大纲

## 1 傅里叶变换的推导

## 2 傅里叶变换的性质

### 2.1 有界线性算子

- $L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$
- $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L^1}$

### 2.2 连续性

- $L^1(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}[f]$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

### 2.3 三个经典性质

- 平移
- 调制
- 伸缩

### 2.4 微分性质

速降函数空间的应用

### 2.5 积分性质

### 2.6 乘积公式

## 3 卷积与卷积傅里叶变换的性质

- 定义：$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$
- 性质：$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$

## 4 傅里叶逆变换的性质

- 定义：$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \int_{\mathbb{R}} g(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
- 性质：$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ 和 $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[g]] = g$

## 5 傅里叶变换从 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$

- 映射原因：完备性和保能量性质
- 性质：等距满射，酉算子
- Plancherel 定理：$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

## 6 傅里叶变换从 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- 速降函数空间的定义
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的稠密性
- $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- 经典例子：高斯函数

## 7 广义函数的傅里叶变换

- 广义函数定义
- 例子：狄利克雷函数
- $\mathcal{F}[\delta](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

## 8 离散傅里叶变换及其改进快速傅立叶变换

- 离散傅里叶变换：$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}$
- 快速傅立叶变换：计算复杂度 $O(N \log N)$