积分变换

Qiuhui Chen

目录

本文旨在将纸质笔记 Latex 化，方便复习

Part I

Lecture 3 Fouier 级数敛散性

Chapter 1

敛散性历史

(I)**Fourier 的发现（1807 年）**：首次提出 Fourier 级数理论，并认为其收敛性在物理问题中是自然成立的。
(II) **Dirichlet 的贡献（1829 年）**：提出 Dirichlet 条件，证明了满足该条件的周期函数其 Fourier 级数逐点收敛。但当时普遍误认为所有连续函数的 Fourier 级数均收敛。
(III) **Du Bois-Reymond 的反例（1873 年）**：构造了一个连续周期函数，其 Fourier 级数在某一点发散，这一结果颠覆了当时的认知。
(IV) **Kolmogorov 的工作（1926 年）**：证明存在 $L^1[-\pi,\pi)$ 函数，其 Fourier 级数在每一点都发散。
(V) **Carleson 的突破（1966 年）**：证明了 $L^2[-\pi,\pi)$ 函数的 Fourier 级数几乎处处收敛：

$$S_n(f,x) \to f(x), \quad \text{a.e. } x \in [-\pi,\pi).$$

(VI) **Hunt 的推广（1967 年）**：将结果扩展至 $L^p([-\pi,\pi))$ 空间（$p>1$），证明对任意 $f \in L^p[-\pi,\pi)$，有：

$$S_n(f,x) \to f(x), \quad \text{a.e. } x \in [-\pi,\pi).$$

世界性难题解决！
注：(i)Carleson 的证明极其复杂，但其结论（Carleson-Hunt 定理）奠定了现代 Fourier 分析的基石。
(ii) 连续函数的 Fourier 级数收敛性问题并非完全解决，例如是否存在连续函数其 Fourier 级数在某个正测集上发散，仍是未解之谜。
(iii) 这些成果深刻影响了调和分析、偏微分方程及信号处理等领域。

Chapter 2

求和理论初步

2.1 一些和

2.1.1 Fejér 求和法 (算术平均求和法)

定义 Fejér 和为:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)C_k e^{ikx} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f*\varrho_k$$

则其积分形式可表示为:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt$$

$$\textbf{Fejér 核:} K(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

2.1.2 Abel 求和与 Poisson 核

定义 Abel-Poisson 和为:

$$F(r,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k r^{|k|} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,x-t)dt,$$

其中 Poisson 核为:

$$P(r,t) \overset{\textbf{负号变正，通分}}{=} \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int}.$$

注:(i) **解析性**：当 $r \to 1^-$ 时，$F(r,x)$ 在单位圆内解析，边界值与原函数相关。
(ii) **收敛性**：若 $f \in L^p(\mathbb{E})$ $(p \geq 1)$，则 $F(r,x) \to f(x)$ a.e. 当 $r \to 1^-$。

2.2 Lebesgue 定理

Theorem 1 (Lebesgue)**.** *若 $f \in L^1[-\pi,\pi)$ 且 f 在 x_0 处满足 Lebesgue 条件：*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)| dt = 0,$$

(i) $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$

(ii) 在几乎处处意义下，$\sigma_n(x) \to f(x)$ a.e. $x \in [-\pi,\pi)$.

Theorem 2 (L^p 收敛性)**.** *若 $f \in L^p[-\pi,\pi)$ 且 $1 \leq p < \infty$，则：*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_p = 0.$$

Chapter 3

Fourier 级数的收敛性

3.1 基本定义与部分和

设 $f \in L^1[-\pi, \pi]$ 为广义周期函数，其 Fourier 部分和为：

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中系数由积分表达式给出：

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku)\, du, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ku)\, du.$$

于是：

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, du + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos k(u - x)\, du.$$

进一步化简为：

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u - x) \right) du.$$

利用三角恒等式：

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}},$$

可得 Dirichlet 核表示：

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})(u - x)\right)}{2 \sin \frac{u - x}{2}}\, du.$$

令 $u = x + t$, 则:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{3.1}$$

定义 Dirichlet 核:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}} \tag{3.2}$$

3.1.1 dirichlet 核性质

归一性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1.$$

偶性:

$$D_n(-t) = D_n(t).$$

正交投影: S_n 是从 $L^2(\mathbb{E})$ 到 $2n+1$ 维三角多项式空间的投影算子，即

$$S_n : L^2(\mathbb{E}) \to \mathcal{T}_n, \quad \mathcal{T}_n = \mathrm{span}\{e^{ikx}\}_{k=-n}^{n}.$$

3.1.2 复指数的化简

$f \in L^1(\mathbb{E})$ 的 Fourier 部分和可表示为:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)}du$$

其中复数系数为:

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du.$$

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{e^{-in(x-u)} - e^{in(x-u)}e^{i(x-u)}}{1-e^{-i(x-u)}}du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{\frac{i(x-u)}{2}}\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})(x-u)} - e^{i(n+\frac{1}{2})(x-u)}e^{i(x-u)}}{(e^{\frac{i(x-u)}{2}})(e^{-\frac{i(x-u)}{2}} - e^{\frac{i(x-u)}{2}})}du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{\sin(x-u)}du$$

$$= f * D_n(u)$$

3.2 收斂性

3.2.1 技术性处理

问题直接归结于 $\{S_n\}$ 的敛散性，如果存在极限，那么假设偏差量:

$$S_n(f,x)-c=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-c)\,D_n(t)\,dt,$$

将正负分开换元得到:

$$S_n(f,x)-c=\int_0^{\pi}[f(x-t)+f(x+t)-2c]\,D_n(t)\,dt. \tag{3.3}$$

记 $\psi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2c$，且 $\psi_x(-t)=\psi_x(t)$。$\psi_x(t)\in L^1(0,\pi)$ 由 f 控制，则有:

$$\int_0^{\pi}\psi_x(t)\,dt=\int_0^{\pi}f(x+t)\,dt+\int_0^{\pi}f(x-t)\,dt-2c\pi.$$

$$S_n(f,x)-c=\int_0^{\pi}\psi_x(t)D_n(t)\,dt.$$

$$=\int_0^{\pi}\psi_x(t)\cdot\frac{\sin(nt)\cos\frac{t}{2}+\cos(nt)\sin\frac{t}{2}}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

$$=\int_0^{\pi}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\cos(nt)\,dt.$$

Riemann-Lebesgue 引理告诉我们第二项在 $n\to\infty$ 时为 $\mathrm{o}(1)$ 故只需关注:

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{3.4}$$

3.2.2 奇点的处理

问什么情况下 3.4趋于 0? 一个自然的想法是尽可能的运用 Riemann-Lebesgue 引理：我们设 $\forall\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

因此第二项使用 Riemann-Lebesgue 引理后, 充分条件即为:

$$S_n(f,x)\to c\quad(n\to\infty)\quad\Leftrightarrow\quad\int_0^{\delta}\psi_x(t)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin nt\,dt\to 0\quad(n\to\infty).$$

下面的 Dini 条件告诉我们 $\delta\in(0,\pi)$ 满足一定条件下只需要一个即可

3.2.3 Fouier 级数收敛第一充分条件 (Dini)

Theorem 3. $f \in L^1(\mathbb{E})$，$C \in \mathbb{C}$ 为常数。偏差函数：

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2c,$$

若存在 $\delta > 0$ 使得：

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt < \infty.$$

则

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = C.$$

Proof. 考虑

$$\int_0^\delta \psi_x(t)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin nt\,dt$$

显然

$$\frac{\psi_x(t)}{t} \subset L^1(0,\delta)$$

$$\text{利用}\frac{t\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\text{在}(-\infty,\infty)\text{的连续性}$$

使用 Riemann-Lebesgue 引理得证 □

Theorem 4 (推论 1)**.** 设 $f \in L(-\pi,\pi)$，若 f 在 x 处可微，则 $S_n(f,x) \to f(x)$ *(*$n \to \infty$*)*

Proof. 在定理 10 中，令 $c = f(x)$。定义：

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

$$\Rightarrow \frac{\psi_x(t)}{t} = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x)}{t}.$$

$$= \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t}.$$

当 $t \to 0$ 时：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi_x(t)}{t} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

因此，若：

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt < \infty,$$

note: $\forall\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $t \in (0,\delta_1)$ 时：

$$\left|\frac{\psi_x(t)}{t}\right| < \varepsilon.$$

同样的思想，第二项由 Riemann-Lebesgue 引理控制，第一项是经典分析学的内容：

$$\begin{aligned}&\int_0^{\delta} \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt\\ &= \int_0^{\delta_1} \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt + \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt\\ &\le \varepsilon\delta_1 + \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt \to o(1)\end{aligned}$$

□

Theorem 5 (推论 2)**.** 设 $f \in L(-\pi,\pi)$，若 f 在 x 处满足 *Lipschitz* 条件，即存在常数 $M>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$，使得：

$$|f(x+t)-f(x)| \le M|t|^{\alpha} \quad \alpha\in(0,1].$$

则 $S_n(f,x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$

Proof. 这是显然的：使用 (**Theorem**3)：

$$\psi_x(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

则：

$$\left|\frac{\psi_x(t)}{t}\right| \le \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\right| \le 2M|t|^{\alpha-1}.$$

因此，积分：

$$\int_0^{\delta} \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt \le 2M\int_0^{\delta} |t|^{\alpha-1}\,dt < \infty.$$

□

注：这种推论可以构造很多条件，只需要保证存在 $\delta>0$ 使得

$$\int_0^{\delta} \frac{\psi_x(t)}{t}\,dt < \infty$$

再举一个例子：$f\in C^2[-\pi,\pi]$ 且满足 Hölder 条件：

$$|f(x+\epsilon)-f(x)| \le M\cdot\frac{1}{|\ln|x||^{\epsilon+1}} \quad (\epsilon>0)$$

则

$$S_n(f,x)\to f(x) \quad (n\to\infty).$$

即 Fourier 级数在点 x 处收敛于 $f(x)$

3.2.4 Fouier 级数收敛第二充分条件 (Jordan)

先证明一个引理以便行文流畅:

Lemma 6. 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \leq 6.$$

Proof. 当 $1 \leq |a| \leq b$ 时, 由第二积分中值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使得:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt\right| = \frac{1}{|a|}\left|\int_a^\xi \sin t dt\right| \leq \frac{2}{|a|} \leq 2.$$

当 $0 \leq a \leq b \leq 1$ 时:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt\right| \leq \int_a^b 1 dt = b - a \leq 1.$$

综合两种情况可得:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \leq 3 \text{ (同号积分)}.$$

对于一般情况 ($a < 0 < b$):

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \leq \int_0^{|a|} + \int_0^{|b|} \leq 6.$$

note: 定理并非是必要的甚至可以直接令 $I \leq \frac{\pi}{2}$ □

现在来证明 Jordan 条件:

Theorem 7. 设 $f \in L^1[-\pi, \pi]$, 且 f 在点 x 的某邻域 $U(x, r)$ 上有界变差, 则其 *Fourier* 级数部分和满足:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right].$$

Proof. 设 $f \in BV(x-r, x+r)$, 则 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 存在 (Jordan 分解定理: 因有界变差函数在每点存在单侧极限) 换句话说: 存在单调递增函数 g, h 使得:

$$\psi_x(t) = g(t) - h(t)$$

$$g(x+0) = \mathbf{inf}\{g\}$$

$$h(x+0) = \mathbf{sup}\{h\}.$$

定义：

$$c = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$$

$$\text{则}\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0) \in B.V(-r,r)$$

$$\Rightarrow \text{存在单调递增函数 } h_1, h_2 \text{ 使得：} \psi_x(t) \overset{\text{Jordan 分解}}{=} h_1(t) - h_2(t)$$

$$\text{且 (极限形式)} \quad h_1(0+0) = h_2(0+0) = 0 (\because \psi_x(0+0) = 0)$$

$$\text{则}S_n(f,x) - c = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \psi_x(t) \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + o(1) \tag{3.5}$$

$$\text{取 } n \text{ 足够大} \Rightarrow |o(1)| < \varepsilon$$

$\varepsilon - \delta$ 语言告诉我们：$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta < r$, 使得 $t \in (0,\delta), 0 \le h_j \le \varepsilon$
重新考虑 (3.5) 只需要估计 Dirichlet 核即可, 使用引理 (**Lemma**6) 和积分第二中值定理：

$$|S_n(f,x) - C| \le \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta h_1(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta h_2(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \varepsilon$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}h_1(\delta)\int_{\xi_1}^\delta \frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}h_2(\delta)\int_{\xi_2}^\delta \frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \varepsilon \le \left(\frac{6+6}{\pi}\right)\varepsilon + \varepsilon$$

$$= \left(1 + \frac{12}{\pi}\right)\varepsilon$$

□

3.3 补充资料

积分第二中值定理

Theorem 8. 设 f 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积。若 g 在 $[a,b]$ 上递减且 $g(x) \ge 0$，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

若 g 在 $[a,b]$ 上递增且 $g(x) \ge 0$，则存在 $\eta \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\eta^b f(x)dx$$

为什么选择 Dirichlet 核

$$\int_0^\delta \psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt$$

转换为:

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t}\sin nt\,dt$$

是基于以下分析, 定义函数 $g(t)$ 如下:

$$g(t) \triangleq \begin{cases}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}, & t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}\\ 0, & t=0\end{cases}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上连续

证明是容易的，注意到分母是 1 阶的，而分子有 2 阶以上的余项

数学分析中的经典收敛定理

Theorem 9 (Dirichlet 收敛定理)**.** *(i)* 设函数 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足：分段光滑

(ii) 在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个第一类间断点外连续则对任意 $x\in(-\pi,\pi)$, 其 *Fourier* 级数部分和满足:

$$S_n(x)\to\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\quad(n\to\infty)$$

Proof. 定义偏差积分:

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t}\sin(nt)\,dt=\int_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin(nt)\,dt+\int_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin(nt)\,dt$$

其中定义辅助函数:

$$\varphi_1(t)=\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t},\quad t\in(0,\delta]$$
$$\varphi_2(t)=\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t},\quad t\in(0,\delta]$$

关于正则性分析：在 $t\to 0^+$ 时（分段光滑保证左右导数存在）

$$\varphi_1(0^+)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=f'(x^+)$$

$$\varphi_2(0^+)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}=-f'(x^-)$$

φ_1,φ_2 在 $[0,\delta]$ 上连续（可数个第一类间断点其他都是连续点）

应用 Riemann-Lebesgue 引理

$$\int_0^\delta \varphi_i(t)\sin(nt)\,dt=o(1)\quad(n\to\infty),\quad i=1,2$$

因此原积分满足：

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t}\sin(nt)\,dt = o(1) \quad (n \to \infty)$$

$\square$

评注：现在回顾来看观点有点低了

Part II

Lecture 4 Fourier 变换

Chapter 4

级数到变换的形式推演

4.1 代数运算

若 $f \in L^1(-\ell,\ell)$ ，则 $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\frac{\pi}{\ell}x}$ ，其中 $C_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{-ik\frac{\pi}{\ell}t}dt$ 。
那么

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\frac{\pi}{\ell}x}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{-ik\frac{\pi}{\ell}y}dy\right) e^{ik\frac{\pi}{\ell}x}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{ik\frac{\pi}{\ell}(x-y)}dy$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{i(k\frac{\pi}{\ell})(x-y)}dy\right)\frac{\pi}{\ell}$$

令 $t_k = k\frac{\pi}{\ell}$ ，则 $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = (k+1)\frac{\pi}{\ell} - k\frac{\pi}{\ell} = \frac{\pi}{\ell}$ 。
故上述式子可写为

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{it_k(x-y)}dy\right)\Delta t_k$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_\ell(t_k)\Delta t_k;\ \text{其中} g_\ell = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{it(x-y)}dy$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{it(x-y)}dy\right)dt$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{it(x-y)}dydt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ity} dy \right) e^{itx} dt$$

令

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ity} dy$$

则

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt$$

。以上是从傅里叶级数到非周期函数的傅里叶变换的形式推导，严格的证明将在不同空间展开。

4.2 Riemann-Lebesgue 引理

Theorem 10 (Riemann-Lebesgue)**.**

$$\text{若} f \in L^1(\mathbb{R}) \text{则} \lim_{|w| \to \infty} \hat{f}(w) = 0$$

$$\text{即} \hat{f}(w) = o(1) \text{当} |w| \to \infty$$

(这暗示我们高频幅度可忽略不计)

Proof. (i) 考虑特征函数：当 $f = \chi_{[a,b]}$ 时，直接计算其 *Fourier* 变换，这个积分是简单的：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-iwt} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw}$$

取绝对值：

$$|\hat{f}(w)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{|w|} \to 0 \quad (|w| \to \infty)$$

因此，$\hat{f}(w) \to 0$ 当 $|w| \to \infty$。

(ii) 当 f 是有限个特征函数 $\chi_{[a_i,b_i]}$ 的线性组合时，利用积分线性性和极限线性性，可知：

$$\hat{f}(w) \to 0 \quad (|w| \to \infty)$$

即紧支撑的分片 (或紧支集) 常数函数的 Fourier 变换趋于 0($|w| \to \infty$)

(iii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$，$\forall \varepsilon > 0$，存在一个紧支撑的分片常函数 g，使得：

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

(iv) 对于 $f \in L^1(\mathbb{R})$，分解其 *Fourier* 变换：

$$\hat{f}(w) = \hat{f}(w) - \hat{g}(w) + \hat{g}(w)$$

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) e^{-iwx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-iwx} dx$$

记为：

$$\hat{f}(w) = J_1(w) + J_2(w)$$

第一项：

$$|J_1(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon$$

第二项：由于 g 是紧支撑的分片常函数，根据 (ii)：

$$|J_2(w)| = o(1) \quad (|w| \to \infty)$$

所以：

$$|\hat{f}(w)| \leq |J_1(w)| + |J_2(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon + o(1)$$

令 $\varepsilon \to 0$ $|w| \to \infty$ 得

$$\hat{f}(w) \to 0 \quad (|w| \to \infty)$$

□

4.3 Fourier 变换的性质

4.3.1 线性变换，且可逆

略

4.3.2 有界

Theorem 11.

$$\mathcal{F}\text{是}:L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})\text{有界线性算子}$$

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

Proof.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\lambda t}| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

因此, 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$，则 $\mathcal{F}[f] \in L^\infty(\mathbb{R})$，且：

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} |\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 < +\infty$$

□

傅里叶变换将 L^1 空间中的函数映射到 L^∞ 空间中的函数，且变换后的函数几乎处处有界

4.3.3 一致连续

Theorem 12. 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，则 $\hat{f}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 一致连续

Proof.

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\omega_1) - \hat{f}(\omega_2)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-it\omega_1} - e^{-it\omega_2}) dt \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega_2} [e^{-it(\omega_1 - \omega_2)} - 1] dt \right| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{-it(\omega_1 - \omega_2)} - 1| dt
\end{aligned}
$$

而 $|e^{-ix} - 1| = |(\cos x - 1) - i \sin x| = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \sqrt{2(1 - \cos x)} = 2|\sin \frac{x}{2}|$ ，所以

$$
|\hat{f}(\omega_1) - \hat{f}(\omega_2)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot 2 \left| \sin \frac{t(\omega_1 - \omega_2)}{2} \right| dt
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |t| \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} dt \quad (\text{若} tf(t) \in L^1(\mathbb{R})) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\omega_1 - \omega_2| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |t| dt \\
&= A|\omega_1 - \omega_2|
\end{aligned}
$$

满足 Lipschitz 条件. 当 $tf(t)$ 不属于 $L^1(\mathbb{R})$ 时，不能用上述推理。但注意到

$$
e^{-i0} - 1 = 0
$$

于是 $\forall t \in \mathbb{R}$ ，

$$
\lim_{\omega_1 \to \omega_2} |e^{-it(\omega_1 - \omega_2)} - 1| = 0
$$

则 $\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ，当 $|\omega_1 - \omega_2| < \delta$, 对 $\forall t \in \mathbb{R}$

$$
|e^{-it(\omega_1 - \omega_2)} - 1| < \varepsilon
$$

所以 $|\hat{f}(\omega_1) - \hat{f}(\omega_2)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \varepsilon dt = B \cdot \varepsilon$ ，其中 $B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$
所以 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 一致连续。也可以利用 Lebesgue 控制收敛理论：

$$
|\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}) dt \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} (e^{-iht} - 1) dt \right| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{-iht} - 1| dt
\end{aligned}
$$

又因为

$$|e^{-iht}-1|\leq 2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\cdot|e^{-iht}-1|dt\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$$

而 $f\in L^1(\mathbb{R})$ ，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<+\infty$$

由勒贝格控制收敛定理可知，

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\cdot|e^{-iht}-1|dt=0$$

。这就表明对于任意给定的 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，当 $|h|<\delta$ 时，有 $|\hat{f}(\omega+h)-\hat{f}(\omega)|<\varepsilon$ ，对任意的 $\omega\in\mathbb{R}$ 都成立，所以 $\hat{f}(\omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。 □

Chapter 5

调制、平移与 Fourier 变换

5.1 平移性质

设 $T_a : f \to f(\cdot - a)$ ，则 $(T_a f)^\wedge(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$ ，即 $\mathcal{F}(T_a f)(\omega) = M_{-a}(\hat{f})(\omega)$

Proof. 根据傅里叶变换定义

$$\mathcal{F}(T_a f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\omega x} dx$$

，令 $t = x - a$ ，则 $x = t + a$

$$\mathcal{F}(T_a f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t+a)} dt$$

$$= e^{-ia\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$= e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$$

□

5.2 调制性质

设 $M_b : f \to e^{ib\cdot} f$ ，则 $\mathcal{F}(M_b f)(\omega) = T_b(\hat{f})(\omega)$

Proof. 由傅里叶变换定义

$$\mathcal{F}(M_b f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-b)x} dx$$

这就是函数 $f(x)$ 关于频率 $\omega - b$ 的傅里叶变换，即 $(\hat{f})(\omega - b) = T_b(\hat{f})(\omega)$ 。

□

5.3 伸缩性质

设 $D_a f(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} f(\frac{x}{a})$ ，则 $\mathcal{F}(D_a f)(\omega) = D_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\omega) = |a|^{\frac{1}{2}} \hat{f}(a\omega)$(注意是对自变量位置操作)

Proof. 根据傅里叶变换定义

$$\mathcal{F}(D_a f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} f(\frac{x}{a}) e^{-i\omega x} dx$$

令 $t = \frac{x}{a}$ ，则 $x = at$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(D_a f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} f(t) e^{-i\omega(at)} |a| dt \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(a\omega)t} dt \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \hat{f}(a\omega) = D_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\omega) = D f_{\frac{1}{a}}(\omega)\end{aligned}$$

□

5.3.1 一些练习

(i) 计算 $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w)$

$$f(\frac{x-b}{a}) = \sqrt{|a|} T_b D_a \{f(x)\}$$

$$\begin{aligned}\text{则} = \mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w) &= \mathcal{F}(\sqrt{a} T_b D_a \{f(x)\}) \\ &= \sqrt{|a|} M_{-b} D_{\frac{1}{a}} \hat{f}(w)\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x-b}{a}\right) e^{-iwx} dx$$

令 $u = \frac{x-b}{a}$，则 $x = au + b, \quad dx = |a| du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iw(au+b)} \cdot |a| du$$

$$= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-ibw} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(aw)u} du$$

$$= |a| e^{-ibw} \cdot \mathcal{F}[f](aw)$$

(ii) 计算 $\mathcal{F}\left[f(ax-b)\right](w)$

$$\text{只给出一种, 另一种同理: } f(ax-b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}D_{\frac{1}{a}}T_b f \Rightarrow \mathcal{F}f(ax-b)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}D_a M_{-b}\hat{f}(w)=$$

$$\mathcal{F}\left[f(ax-b)\right](w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(ax-b)e^{-iwx}dx$$

令 $u=ax-b$，则 $x=\frac{u+b}{a}$, $\quad dx=\frac{1}{|a|}du$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-iw\left(\frac{u+b}{a}\right)}\cdot\frac{1}{|a|}du$$

$$=\frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}}e^{-i\frac{bw}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\frac{w}{a}u}du$$

$$=\frac{1}{|a|}e^{-i\frac{bw}{a}}\cdot\mathcal{F}[f]\left(\frac{w}{a}\right)$$

Chapter 6

乘积公式

6.1 证明

Theorem 13. 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$,$g \in L^1(\mathbb{R})$,则 $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx$

Proof. (i) 证明积分存在性

考虑

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right) g(x)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ixt}g(x)|dtdx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(x)|dtdx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < +\infty
\end{aligned}$$

所以 $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx$ 存在，同理 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx$ 也存在。

(ii) 利用 Fubini 定理证明等式成立

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right) g(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x)e^{-ixt}dtdx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixt}dx\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)dt
\end{aligned}$$

□

总结：Tonelli 定理用于在函数非负可测时判断重积分的存在性，Fubini 定理则用于在积分存在时交换积分次序，从而得出傅里叶变换的乘法公式。

6.2 两个定理的条件

Theorem 14 (Tonelli)**.** *设 f 为 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数，则：*

(i) 对于 $(a.e)$ $x \in \mathbb{R}^p$ ，$f(x,\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数。

(ii) 记 $F_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$ ，则 $F_f(x)$ 为 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数。

(iii) $F_f(x)$ 为 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数。$\int_{\mathbb{R}^p} F_f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy$ 。

Theorem 15 (Fubini)**.** $f \in L(\mathbb{R}^n)$ （即 f 在 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上对于勒贝格测度可积），$(x,y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ，则：

(i) 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^p$ $f(x,\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^q$ 上的可积函数

(ii) $\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$ 为 $\mathbb{R}^p$ 上的可积函数

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^q} dy \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx$

Chapter 7

卷积公式

7.1 定理的证明

Theorem 16. *$f \in L^1(\mathbb{R})$ ，$g \in L^1(\mathbb{R})$ ，则 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$*

(i) $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

(ii) $(f * g)^\wedge(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ (卷积变乘积即滤波)

Proof. (i) 根据卷积定义 $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx$ 。由 Tonelli 定理有：

$$\|f * g\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx \right| dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)g(x)|dxdt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)|dt \int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx$$

$$= \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < +\infty$$

这表明 $f * g$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 中的函数，即 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ ，同时得到范数不等式。

(ii)

$$(f * g)^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx \right) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) e^{-i\omega(t-x)} g(x) e^{-i\omega x} dxdt$$

Fubini 定理交换积分次序：

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) e^{-i\omega(t-x)} dt \right) dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$$

□

7.2 卷积范数性质

已知 $1 \leq p \leq +\infty$ ，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ，$g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ，则 $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ 。

Proof. (i) $p = 1$

根据 Tonelli 定理:

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| dy dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1$$

这表明 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，且满足 $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

(ii) $p = \infty$

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

$$= \|f\|_\infty \|g\|_1$$

所以 $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ ，即 $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

(iii) $p \in (1, +\infty)$

设 q 为 p 的共轭指数，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 。由 Hölder 不等式：

$$|(f*g)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right|$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}}dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

对两边同时取 p 次幂并积分：

$$\|f*g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy\right)^{\frac{p}{q}}\right] dx$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy\right)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p|g(y)|dydx$$

$$= \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p|g(y)|dydx$$

$$\overset{Fubini}{=\!=} \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx\right)|g(y)|dy$$

$$= \|g\|_1^{\frac{p}{q}}\|f\|_p^p\|g\|_1$$

$$= \|f\|_p^p\|g\|_1^{1+\frac{p}{q}}$$

因为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 所以 $1+\frac{p}{q}=p$

$$则\|f*g\|_p^p \leq \|f\|_p^p\|g\|_1^p$$

$$即\|f*g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$$

且 $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 。

综上对于 $1 \leq p \leq +\infty$,$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 都有 $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$ □

7.2.1 一般的 Young 不等式

Theorem 17 (Young)**.** 已知 $1 \le p \le +\infty$ ，$1 \le q \le +\infty$ ，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \ge 1$ ，令 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ 。若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ，$g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ，则 $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ ，且 $\|f*g\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$ 。

Proof. 首先先根据卷积定义有

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

将其变形为

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^{\frac{p}{r}}g(y)^{\frac{q}{r}}\cdot f(x-y)^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}g(y)^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}dy$$

因为 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$则

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{1-\frac{1}{r}} \\ &= \frac{1}{1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)} \\ &= \frac{1}{2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} f*g(x) &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x-y)^{\frac{p}{r}}g(y)^{\frac{q}{r}}\right)^r dy\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x-y)^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}g(y)^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\right)^s dy\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})s}|g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})s}dy\right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

对两边同时取 r 次幂并积分：

$$\begin{aligned} \|f*g\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}^n}|f*g(x)|^r dx \le \int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})s}|g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})s}dy\right)^{\frac{r}{s}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})s}|g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})s}dy\right)^{r-1} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{(\frac{r-p}{r-1})}|g(y)|^{(\frac{r-q}{r-1})}dy\right)^{r-1} dx \end{aligned}$$

必要的探路：$\|f*g\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q \Leftrightarrow \|f*g\|_r^r \le \|f\|_p^r\|g\|_q^r$ 第一项 fubini 定理解决; 第二项只有 Hölder 不等式, 做一些技术处理：

(·) 只希望是 p,q-范数, 验证是否满足 Hölder 不等式的使用条件, 指数应该分别乘以:

$$p(\frac{r-1}{r-p})\text{和}q(\frac{r-1}{r-q})(\text{全部都大于}1)$$

$$\text{则}\frac{1}{p}(\frac{r-p}{r-1})+\frac{1}{q}(\frac{r-q}{r-1})=(\frac{\frac{r}{p}-1}{r-1})+(\frac{\frac{r}{q}-1}{r-1})=1\mathbf{!!}$$

于是使用不等式后得到

$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dy)^{\frac{r}{p}-1}(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^q dy)^{\frac{r}{q}-1}dx$$

$$\text{显然}\|f*g\|_r^r\leq\|f\|_p^r\|g\|_q^r$$

两边同时开 r 次方，即 $\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$ ，也就证明了 $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$ 。当 $q=1$ 时，就是前面证明过的卷积在 L^p 空间的范数性质结论 □

Chapter 8

求导与算子 (时域衰减与频率光滑)

Theorem 18. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，$tf(t)$ （$x \in \mathbb{R}$）也在 $L^1(\mathbb{R})$ 中，则

(i) $\hat{f}(\omega)$ 可微。

(ii) $\frac{d}{d\omega}(\hat{f})(\omega) = \mathcal{F}(-itf(t))(\omega)$，等价形式为 $D\hat{f} = \mathcal{F}(X(f))$，其中 $X = -itf(t)$ 表示乘子算子。

Proof. 考虑

$$\frac{\hat{f}(\omega+h)-\hat{f}(\omega)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{-i(\omega+h)t}-e^{-i\omega t}}{h}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\frac{e^{-ihx}-1}{h}dt$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-i\omega t}\frac{e^{-iht}-1}{h}|dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\frac{|e^{-iht}-1|}{|h|}dt$$

又已知

$$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

且

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-iht}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-ite^{-iht}}{1} = -it$$

由控制收敛定理（Lebesgue）可得：

$$(\hat{f}(\omega))' = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\omega+h)-\hat{f}(\omega)}{h}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-iht}-1}{h}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-itf(t)) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \mathcal{F}(-itf(t))(\omega)$$

进一步可推广：

$$D^n \hat{f} = D^{n-1}(D\hat{f}) = D^{n-1}(\mathcal{F}(Xf)) = D^{n-2}(D\mathcal{F}(Xf)) = D^{n-2}(\mathcal{F}(X^2 f)) = \cdots = \mathcal{F}(X^n f)$$

，即 $(\frac{d}{d\omega})^n \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}((-ix)^n f(x))(\omega)$
设 P_m 为 m 次多项式，则 $P_m(\frac{d}{d\omega})\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(P_m(-it)f(t))(\omega)$ 。 □

Theorem 19. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$，f 连续可微且 $f' \in L^1(\mathbb{R})$，则 $(f')^\wedge(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$，等价记号表示为 $\mathcal{F}D = \tilde{X}\mathcal{F}$，其中 $\tilde{X} : f(t) \to itf(t)$ 。

Proof. 对于任意 $A > 0$，$B > 0$，由分部积分公式：

$$\int_{-B}^{A} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-B}^{A} e^{-i\omega t} df(t)$$

$$= e^{-i\omega t} f(t)\Big|_{t=-B}^{A} - \int_{-B}^{A} f(t) d(e^{-i\omega t})$$

$$= e^{-i\omega A} f(A) - e^{i\omega B} f(-B) + \int_{-B}^{A} f(x) e^{-i\omega t} \cdot (i\omega)$$

下证

$$\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0 \quad \lim_{B\to+\infty} f(-B) = 0$$

因为

$$f(A) - f(0) = \int_0^A f'(x)dx$$

又 $f' \in L^1(\mathbb{R})$ 所以

$$\int_0^\infty f'(x)dx$$

收敛，根据下面的定理

$$\lim_{A\to+\infty} f(A) = \lim_{B\to+\infty} f(-B) = 0$$

□

Theorem 20 (任意数学分析书上有)**.** 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$，则 $c = 0$

Proof. 采用反证法。假设 $c \neq 0$，不妨设 $c > 0$ 。因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c > 0$$

根据函数极限的定义，对于 $\varepsilon = \frac{c}{2}$ ，存在 $M > 0$ ，当 $x > M$ 时，有 $f(x) > c - \varepsilon = \frac{c}{2}$ 又

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} f(x)dx$$

。由于当 $x > M$ 时，$f(x) > \frac{c}{2}$ ，所以

$$\int_M^{+\infty} f(x)dx > \int_M^{+\infty} \frac{c}{2}dx$$

。而

$$\int_M^{+\infty} \frac{c}{2}dx = \lim_{N\to+\infty} \int_M^N \frac{c}{2}dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{c}{2}(N-M) = +\infty$$

那么

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} f(x)dx > \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} \frac{c}{2}dx = +\infty$$

这与已知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾。所以假设不成立，即 $c = 0$ 。 □

注：f 有连续导数保证 $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$ 有的编者把这一条件弱化为局部绝对连续 (即在任何有界闭区间上绝对连续，记为 $f \in AC_{loc}$), 相关结论依然成立。

高阶推广

设 f 满足一定条件（如 f 及其相应阶数导数在合适的函数空间中），则有

$$((f^{(n)})^\wedge(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

从傅里叶变换的定义出发，结合分部积分法（当 $n = 1$ 时），对 $f'(x)$ 进行傅里叶变换：

$$(f')^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}dx \right]$$

若 f 满足一定的衰减条件（如当 $|x| \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$ 足够快），则 $f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ ，进而得到 $(f')^\wedge(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$ 。通过数学归纳法可将此结论推广到 n 阶导数的情形。

Part III

Lecture 6 速降函数空间 S(Especially Schwarz) 中的 Fourier 变换

Chapter 9

速降空间相关性质

Definition 1. $\mathcal{S}$ 若 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 且 $\forall p, q \in \mathbb{Z}_{+} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，有

$$\lim_{|t| \to \infty} t^p f^{(q)}(t) = 0$$

即速降函数，则 $f \in \mathcal{S}$

9.1 性质

(i) $f \in \mathcal{S}$, $f(\cdot - a) \in \mathcal{S}$ (平移)

(ii) $f, g \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha, \beta$ 有 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$ (线性)

(iii) $f \in \mathcal{S}$ ，$\frac{d}{dx} f \in \mathcal{S}$ (可微)

例子

(1) $f(t) = e^{-t^2} \in \mathcal{S}$ 但是 $e^{-|t|} \notin \mathcal{S}$

(2) 若 $P_n(t)$ 为多项式, 则 $P_n(t) e^{-t^2} \in S$ 但是 $\frac{1}{1+t^2} \notin \mathcal{S}$

同时，速降空间 $\mathcal{S}$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 的子集，即 $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$ 且 $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$ 。

9.2 紧支集速降函数空间 $\mathbb{D}$(Schwarz 测试函数空间)

Definition 2. f 的支集 $suppf \subset [a, b]$ ，且 $f \in S$ ，则 f 属于紧支集速降函数空间 $\mathbb{D}$

例子: 定义函数 $h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

其导数 $h'(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} \cdot \frac{2t}{(1-t^2)^2}, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 这样的函数有无穷多个，构造函数

族：

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = c$$

令

$$a_\lambda(t) = \frac{1}{c\lambda} h(\frac{t}{\lambda})(\lambda > 0)$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_\lambda(t)dt = 1$$

定义

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1, & |t| \le r \\ 0, & |t| > r \end{cases}$$

令

$$\mathbb{B}_{r,\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\lambda(t-y)\chi_r(y)dy \quad r > \lambda$$

可以证明 $\varphi_{r,\lambda} \in S$ 且具有紧支集。
$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$,$\varphi(t)\mathbb{B}_{r,\lambda}(t) \in S$ 且具有紧支集，即 $\varphi \in \mathbb{D}$
相关结论

(i) 速降空间 S 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 涉及 Gabor 系统、Hermite 函数等内容 (略)

(ii) 在 $\mathcal{S}$ 或 $\mathbb{D}$ 中定义极限，使其完备，由集合构成空间（参考文献《广义函数及其在调和分析中的表示》，李常和、李雅卿）

由于 $\mathcal{S}$，且 $\forall f \in \mathcal{S}$ 时 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$，且对任意 $p, q \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$，有

$$\lim_{|x|\to\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0$$

因此 f 与 $\hat{f}$ 的光滑性与衰减性如下论述

Theorem 21. $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$

Proof. (1) 对于任意

$$q \in \mathbb{Z}_+$$

因为 $f \in S$，所以

$$t^q f \in L^1(\mathbb{R})$$

利用公式 $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{F}X$（其中 $X: f \to tf(t)$），更一般地

$$(\mathcal{D})^n\mathcal{F} = \mathcal{F}X^n$$

可得

$$\hat{f}^{(q)} = (-it^q f)^\wedge$$

即

$$\hat{f}^{(q)}(w) = (-it^q f)^\wedge(w)$$

这表明 $\hat{f}$ 无穷可微。

(2) 下证 $\forall p \in \mathbb{Z}_+$，当 $|w| \to \infty$ 时，$|w|^p \hat{f}^{(q)} \to 0$。利用

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{F}\tilde{X}$$

其中 $\tilde{X} : f \to itf(t)$
一般地 $(\mathcal{F}\mathcal{D})^n = \tilde{X}^n\mathcal{F}$，即 $(f^{(n)})^\wedge(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$。于是

$$\left(\frac{d^p}{dt^p}[(-it)^q f(t)]\right)^\wedge(\omega) = (i\omega)^p(-it^q f)^\wedge(\omega) = (i\omega)^p \hat{f}^{(q)}(\omega)$$

由于 $F(t) = \frac{d^p}{dt^p}[(-it)^q f(t)] \in L^1(\mathbb{R})$，由 Riemann - Lebesgue 引理，

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^p}{dt^p}[(-it)^q f(t)]\right)(\omega) \to 0 \quad (\omega \to \infty)$$

即

$$(i\omega)^p \hat{f}^{(q)}(\omega) \to 0(\omega \to \infty)$$

综合上述两点，可得 $\hat{f} \in S$。

□

9.3 逆公式

若 $f \in \mathcal{S}$，

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{it\omega} d\omega$$

(a.e) 记为 $f^\vee$
由

$$f^\vee(t) = (\hat{f})^\wedge(-t)$$

$$(\hat{f})^\wedge(w) = f(-w)$$

等可得:

$$(\mathcal{F})^{-1}\mathcal{F} = I_d, \quad (\mathcal{F})(\mathcal{F})^{-1} = I_d$$

即

$$\mathcal{F}^2 f(t) = f(-t), \mathcal{F}^3 f(t) = +\hat{f}(-t), \mathcal{F}^4 f(t) = f(t)$$

9.4 $\mathcal{S}$ 中的 Parseval 等式

Theorem 22.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$$

简记 $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$。特别地，当 $f = g$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt \quad \text{(保能量)}$$

即

$$\|f\|_1 = \|\hat{f}\|_1$$

Proof.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{it\omega}d\omega$$

$$\overline{g(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)}e^{-iy\omega}d\omega = (\overline{\hat{g}})^\wedge(t)$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\overline{\hat{g}})^\wedge(t)dt \overset{\text{卷积公式}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}}(\omega)d\omega$$

□

9.4.1 过渡到 $L^2(\mathbb{R})$

因为 $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$，$\mathcal{S}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密。对 $\forall\ f \in L^2(\mathbb{R})$ $\exists f_n \mathcal{S}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad (L^2(\mathbb{R}) \text{ 范数})$$

可定义 $\hat{f}$ 为 f_n 的傅里叶变换的极限, 且 $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$$

且 $\langle f_n, g_n\rangle = \langle \hat{f}_n, \hat{g}_n\rangle$，则 $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$，$f, g \in L^2(\mathbb{R})$，且 $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$（保能量）。

Chapter 10

Gauss 函数的 Fourier 变换

示例 23. 高斯函数的傅里叶变换

方法一：利用微分方程性质求解

(1) 已知 $g(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}, x \in \mathbb{R}$, 且 $g'(x) = -2xg(x), g' \in \mathcal{S}$。对 $g'(x) = -2xg(x)$ 两边作 $\mathcal{F}$ 变换，利用

$$\mathcal{F}D = \tilde{X}\mathcal{F}, \quad \tilde{X} : f \to itf(t)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{F}X, \quad X : f \to -itf(t)$$

对方程两边进行傅里叶变换得到:

$$(i\omega)\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}(-2tg(t))(\omega) = -2\mathcal{F}(tg(t))(\omega) = -2(i\hat{g}'(\omega)) = -2i\hat{g}'(\omega)$$

当 $\hat{g}(\omega) \neq 0$ 时，$\frac{\hat{g}'(\omega)}{\hat{g}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$。

$$(\ln \hat{g}(\omega))' = -\frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \ln \hat{g}(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + c_1$$

$$\hat{g}(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

利用 $\hat{g}(0)$ 来确定常数 C:

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i0\cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以 $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}, \omega \in \mathbb{R}$$

(2) 一般地，对于 $f(t) = e^{-\beta t^2}$，其中 $\beta > 0$。注意到 $e^{-\beta t^2} = e^{-(\sqrt{\beta}t)^2}$。这是一个伸缩变换。利用傅里叶变换的伸缩性质：若 $h(t) = f(at)$，则

$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$。令 $g(t) = e^{-t^2}$，我们已经知道 $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$。令 $a = \sqrt{\beta}$，则 $f(t) = g(\sqrt{\beta}t)$。

$$\mathcal{F}(e^{-\beta t^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{(\omega/\sqrt{\beta})^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时，$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$，即 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是傅里叶变换的不动点。

解法二：用复变围道积分算高斯函数的傅里叶变换 计算 $\mathcal{F}(e^{-x^2})(\omega)$：

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+i\omega x)}dx$$

通过配方法：

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{i\omega}{2})^2+(\frac{i\omega}{2})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{i\omega}{2})^2}dx$$

令 $z = x + \frac{i\omega}{2}$，则积分路径变为从 $-\infty + \frac{i\omega}{2}$ 到 $\infty + \frac{i\omega}{2}$ 的直线。

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty+\frac{i\omega}{2}}^{\infty+\frac{i\omega}{2}} e^{-z^2}dz$$

考虑函数 $f(z) = e^{-z^2}$，它在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上是全纯（解析）的。我们构造一个矩形围道 L，其顶点为 $-R, R, R+\frac{i\omega}{2}, -R+\frac{i\omega}{2}$。

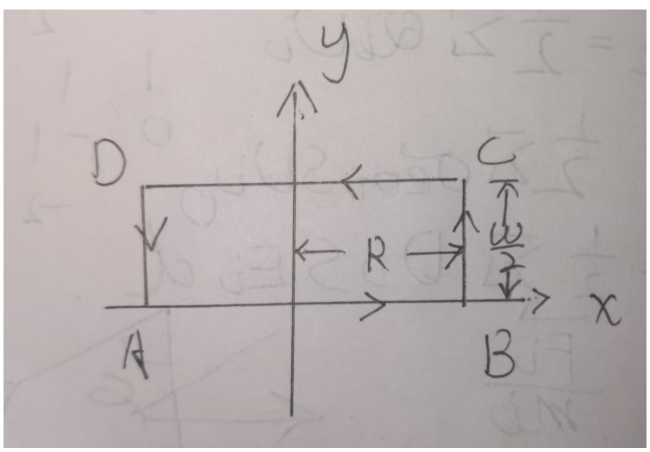


图 10.1: 积分路径

根据柯西积分定理，$\oint_L e^{-z^2}dz = 0$。即：

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int_{R}^{R+i\omega/2} e^{-z^2}dz + \int_{R+i\omega/2}^{-R+i\omega/2} e^{-z^2}dz + \int_{-R+i\omega/2}^{-R} e^{-z^2}dz = 0$$

(i) 第一项：当 $R \to \infty$ 时，$\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$。

(ii) 第二项（右侧竖直边）：令 $z = R + iy$，其中 y 从 0 到 $\omega/2$。

$$\left| \int_0^{\omega/2} e^{-(R+iy)^2} i dy \right| = \left| \int_0^{\omega/2} e^{-R^2+y^2-2iRy} i dy \right| \leq \int_0^{\omega/2} e^{-R^2+y^2} dy$$

当 $R \to \infty$ 时，e^{-R^2} 趋于 *0* 的速度远快于 e^{y^2} 的增长，故此项积分为 *0*。

(iii) 第四项（左侧竖直边）：同理，当 $R \to \infty$ 时，此项积分也为 *0*。

(iv) 于是，当 $R \to \infty$ 时，我们有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(x+i\omega/2)^2} dx = 0$$

$$\sqrt{\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\omega/2)^2} dx = 0$$

这表明 $\int_{-\infty+i\omega/2}^{\infty+i\omega/2} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$。

(v) 最终：

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Part IV

Lecture 10 DFT 和 FTT

Chapter 11

DFT

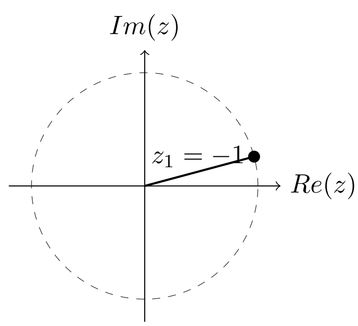
11.1 信号

$\{x_k : k = 0, \ldots, N-1\}$，记 $\omega_N = e^{+2\pi i/N}$，其中 $z^n = 1$

$$y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{-nk} \tag{11.1}$$

称 $\{y_0, \ldots, y_{N-1}\}$ 为 $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$ 的 DFT, 记

$$\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, \quad \mathcal{F}_N(x) = y$$



11.2 逆公式

Lemma 24.

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \omega_N^{nk}, \text{即} \mathcal{F}_N^{-1}(y) = x. \tag{11.2}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} y_n\omega_N^{nk} &= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} x_r\omega_N^{-rn}\right)\omega_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_r\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{n(k-r)} \qquad (11.3) \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_r\delta_{k,r} = x_k.\end{aligned}$$

定义 Kronecker-δ 函数：

$$\delta_{k,r} = \begin{cases}1, & k=r \\ 0, & k\neq r\end{cases} \qquad (11.4)$$

于是

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{n(k-r)} = \delta_{k,r} \qquad (11.5)$$

(i) 当 $k=r$ 时，显然成立。

(ii) 当 $k\neq r$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{n(k-r)} &= \frac{1}{N}\cdot\frac{1-\omega_N^{N(k-r)}}{1-\omega_N^{k-r}}\cdot\omega_N^{k-r} \\ &= \frac{1}{N}\cdot\frac{1-\omega_N^{N(k-r)}}{1-\omega_N^{k-r}} \qquad (11.6) \\ &= \frac{1}{N}\cdot\frac{1-(\omega_N^N)^{k-r}}{1-\omega_N^{k-r}} = 0(\omega_N^N=1)\end{aligned}$$

□

11.3 Fourier 矩阵

Definition 3. 定义矩阵 F_N

$$F_N = \left(\omega_N^{-nk}\right)_{n,k=0}^{N-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2}\end{bmatrix}$$

考虑变换：

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = F_N \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix},$$

11.3.1 性质

(i) F_N 是酉矩阵，$F_N^* F_N = N I_{N\times N}$

Proof. 第 j 行 $(\omega_N^{j\times 0}, \omega_N^{j\times 1}, \omega_N^{j\times 2}, \ldots, \omega_N^{j(N-1)}) \equiv J$ 第 k 行 $(\omega_N^{k\times 0}, \omega_N^{k\times 1}, \omega_N^{k\times 2}, \ldots, \omega_N^{k(N-1)}) \equiv K$

$$\begin{aligned} J^T\overline{K} &= \omega_N^{j\times 0}\overline{\omega_N^{k\times 0}} + \omega_N^{j\times 1}\overline{\omega_N^{k\times 1}} + \cdots + \omega_N^{j(N-1)}\overline{\omega_N^{k(N-1)}} \\ &= \omega_N^{(j-k)\times 0} + \omega_N^{(j-k)\times 1} + \cdots + \omega_N^{(j-k)(N-1)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \omega_N^{(j-k)m} = \frac{1-\omega_N^{(j-k)N}}{1-\omega_N^{j-k}} = 0(\omega_N^N = 1) \end{aligned} \tag{11.7}$$

□

(ii) 不同行正交

Proof. 同一行 (列) 的内积为 N。

$$\begin{aligned} J^T\overline{J} &= \omega_N^{j\times 0}\overline{\omega_N^{j\times 0}} + \omega_N^{j\times 1}\overline{\omega_N^{j\times 1}} + \cdots + \omega_N^{j(N-1)}\overline{\omega_N^{j(N-1)}} \\ &= 1 + \cdots + 1 = N. \end{aligned} \tag{11.8}$$

□

(iii) 不同列正交
由上同理可得

(iv) $F_N^{-1} = \frac{1}{N}F_N^* = \left(\omega_N^{n\times k}\right)$

11.4 二进制形式下的 Fourier 矩阵 ($N = 2^p$)

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^{-1\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{2}(x_0 + x_1\omega_2^{-0\times 1}) \\ y_1 = \dfrac{1}{2}(x_0 + x_1\omega_2^{-1\times 1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}F_2\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0+x_1) \\ \frac{1}{2}(x_0-x_1) \end{pmatrix} \tag{11.10}$$

表 11.1: 计算量

total cost	**矩阵计算**
乘法次数 (multiplications): 0 次 加法次数 (additions): 2 次	矩阵及计算: Add 2^1 multi 2^2

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1\times 1} & \omega_4^{-2\times 1} & \omega_4^{-3\times 1} \\ 1 & \omega_4^{-1\times 2} & \omega_4^{-2\times 2} & \omega_4^{-3\times 2} \\ 1 & \omega_4^{-1\times 3} & \omega_4^{-2\times 3} & \omega_4^{-3\times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

$$\omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i, \tag{11.12}$$

11.4.1 DFT 的计算量 (cost of computation)

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{-nk} \tag{11.13}$$

每个 y_k 需要 $(N-1)$ 个乘法，N 个加法。

总乘法次数：$(N-1)^2$

总加法次数：$N(N-1)$ 计算 y_k 时不需要乘法，故不是 N^2

用矩阵形式 $y = F_N x$ 理解时，乘法次数为 N^2；计算复杂度：$O(N^2)$!

Chapter 12

FFT

1965 年，Cooley 和 Tukey 提出 FFT 算法。(An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Mathematics of Computation 19(90): 297-301, Jan 1965. DOI: 10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1)

12.1 FFT $(N = 2^2 = 4)$

观察到数据量 N=2d 以及 $(\omega_{2^d})^2 = \omega_{\frac{2^d}{2}}$ 定义

$$F_4 : \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \to \{y_0, y_1, y_2, y_3\} \tag{12.1}$$

$$y_k = \frac{1}{4}\left(x_0\omega_4^{-0\times k} + x_1\omega_4^{-1\times k} + x_2\omega_4^{-2\times k} + x_3\omega_4^{-3\times k}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3 \tag{12.2}$$

奇偶重排 (rearrange) 可知:

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{4}(x_0 \cdot w_4^{-0\times k} + x_2 w_4^{-2\times k}) + \frac{1}{4}(x_1 w_4^{-1\times k} + x_3 w_4^{-3\times k}) \\ &= \frac{1}{4}(x_0 \cdot w_4^{-0\times k} + x_2 w_4^{-2\times k}) + \frac{1}{4} w_4^{-1\times k}(x_1 + x_3 w_4^{-2\times k}) \\ &= \frac{1}{4}(x_0 w_2^{-0\times k} + x_2 w_2^{-2\times k}) + \frac{1}{4} w_4^{-1\times k}(x_1 + x_3 w_2^{-2\times k}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x_0 + x_2 w_2^{-2\times k}}{2} + \frac{x_1 + x_3 w_2^{-2\times k}}{2} \cdot w_4^{-k}\right] \\ &\triangleq \frac{1}{2}[P_k + w_4^{-k} I_k] \end{aligned} \tag{12.3}$$

$$P_k = \frac{x_0 + x_2\omega_2^{-k}}{2}, \quad I_k = \frac{x_1 + x_3\omega_2^{-k}}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{12.4}$$

显然：

$$P_{k+2} = P_k, \quad k = 0, 1 \quad 和 \quad I_{k+2} = I_k, \quad k = 0, 1. \tag{12.5}$$

且

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = F_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

则：

$$\begin{cases} y_k = \dfrac{1}{2}\left(P_k + \omega_4^{-k} I_k\right), \quad k = 0, 1 \\ y_{k+2} = \dfrac{1}{2}\left(P_{k+2} + \omega_4^{-(k+2)} I_{k+2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(P_k - \omega_4^{-k} I_k\right), \quad k = 0, 1 \end{cases} \tag{12.7}$$

至此，$\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ 全部算出。

变量	**乘法次数**	**加法次数**	**备注**
$P_k\ (k = 0, 1)$	0 次	2 次	
$I_k\ (k = 0, 1)$	0 次	2 次	
$y_k\ (k = 0, 1)$	1 次	2 次	
$y_{k+2}\ (k = 0, 1)$	1 次	2 次	乘法计算量与 y_k 相同
优化的总计算量		**乘法 1 次**	**加法 8 次**
直接计算		**乘法 9 次**	**加法 12 次**

表 12.1: 计算量对比表

计算 $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ 过程中的计算量：乘法 1 次（表面上 2 次），加法 8 次
对比直接按公式计算的计算量：乘法 $(4-1)^2 = 9$，加法 $4 \times (4-1) = 12$ 次

12.2 $FFT(N = 2^3 = 8)$

$$F_8 : \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \to \{y_0, y_1, \ldots, y_7\} \tag{12.8}$$

12.2.1 递推公式

$$
\begin{aligned}
y_j &= \frac{1}{8}\left(x_0 + x_1\omega_8^{-1\times j} + x_2\omega_8^{-2\times j} + \cdots + x_6\omega_8^{-6\times j} + x_7\omega_8^{-7\times j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(x_0 + x_2\omega_8^{2\times j} + x_4\omega_8^{4\times j} + x_6\omega_8^{-6\times j}\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{4}\left(x_1\omega_8^{-\times j} + x_3\omega_8^{-3\times j} + x_5\omega_8^{-5\times j} + x_7\omega_8^{-7\times j}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(x_0 + x_2\omega_4^{-1\times j} + x_4\omega_4^{-2\times j} + x_6\omega_4^{-6\times j}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+x_1 + x_3\omega_4^{-1\times j} + x_5\omega_4^{-2\times j} + x_7\omega_4^{-3\times j}\right)\omega_8^{-j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(P_j^{(3)} + I_j^{(3)}\omega_8^{j}\right)
\end{aligned}
\tag{12.9}
$$

其中:

$$
P_j^{(3)} = \frac{1}{4}\left(x_0 + x_2\omega_4^{-2\times j} + x_4\omega_4^{-2\times j} + x_6\omega_4^{-3\times j}\right) \tag{12.10}
$$

$$
I_j^{(3)} = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_3\omega_4^{-1\times j} + x_5\omega_4^{-2\times j} + x_7\omega_4^{-3\times j}\right) \tag{12.11}
$$

可证:

$$
\begin{cases}
P_j^{(3)} = P_{j+4}^{(3)}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \\
I_j^{(3)} = I_{j+4}^{(3)}
\end{cases}
\tag{12.12}
$$

12.2.2 计算复杂度分析

第三层 (A)

已知$P_j^{(3)}, I_j^{(3)}(j = 0, 1, 2, 3)$, 计算$P_j^{(3)}(j = 0, 1, 2, 3)$ 的计算量

(i) 乘法 3 次 (当 $j = 0$ 时无乘法)

(ii) 加法 8 次

第二层 (B)

下面讨论$P_j^{(3)}$ 的计算量 $(j = 0, 1, 2, 3)$ 一方面

$$\begin{aligned}
P_j^{(3)} &= \frac{1}{4}(x_0, x_2, x_4, x_6) \cdot (1, w_4^{-j}, w_4^{-2j}, w_4^{-3j}) = \mathrm{DFT}(x_0, x_2, x_4, x_6) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(x_0 + x_4 w_4^{-2j}\right) + \frac{1}{2}\left(x_2 + x_6 w_4^{-j}\right) w_4^{-j}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{P_j^{(2)} + I_j^{(2)} w_4^{-j}\right\} \\
&\quad (\text{同样地有} I_j^{(3)} = P_j^{(2)} + I_j^{(2)} w_4^{-j} \quad I_j^{(2)} = I_{j+2}^{(2)} \quad j = 0, 1)
\end{aligned} \tag{12.13}$$

如果已知 $P_j^{(2)}, I_j^{(2)}, j = 0, 1, 2, 3$，计算 $P_j^{(3)}$ 需要 1 次乘法，4 次加法。
同样地

$$\begin{aligned}
I_j^{(3)} &= \frac{1}{4}(x_1, x_3, x_5, x_7) \cdot (1, w_4^{-j}, w_4^{-2j}, w_4^{-3j}) \quad (j = 0, 1, 2, 3) \\
&= DFT(x_1, x_3, x_5, x_7) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(x_1 + x_5 w_4^{-2j}\right) + \frac{1}{2}\left(x_3 + x_7 w_4^{-2j}\right) w_4^{-j}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{P_j^{(2)} + I_j^{(2)} w_4^{-j}\right\} \quad (j = 0, 1)
\end{aligned} \tag{12.14}$$

三层 (C)

计算 $P_j^{(2)}, I_j^{(2)}, P_j^{(2)}, I_j^{(2)}$ ($j = 0, 1$) 分别需要 0 次乘法，2 次加法。
归纳起来：(A)、(B)、(C) 三层共花费：乘法 $3 + 2 + 0 = 5$ 加法 $8 + 8 + 6 = 24$
直接计算时，乘法 $(9 - 1) = 12$ 次，加法 $8 \times 7 = 56$ 次

12.2.3 FFT ($N = 2^8$, general case)

12.2.4 定义和基本公式

Definition 4.

$$F_{2^q} : \mathbb{C}^{2^q} \to \mathbb{C}^{2^q} \tag{12.15}$$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{2^q-1}) \to (y_0, y_1, \ldots, y_{2^q-1}) \tag{12.16}$$

$$
\begin{aligned}
y_k &= \frac{1}{2^q}(x_0, x_1, \ldots, x_{2^q-1}) \cdot \left(1, w_{2^q}^{-k}, w_{2^q}^{-2k}, \ldots, w_{2^q}^{-(2^q-1)k}\right) \\
&= \frac{1}{2^q}\sum_{j=0}^{2^q-1} x_j \left(w_{2^q}\right)^{-jk}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^q-1 \\
&\overset{\text{奇偶求和}}{=} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{j=0}^{2^{q-1}-1} x_{2j}\left(w_{2^q}\right)^{-2jk} + \frac{1}{2^{q-1}}\left(w_{2^q}\right)^{-k}\sum_{j=0}^{2^{q-1}-1} x_{2j+1}\left(w_{2^q}\right)^{-2jk}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{j=0}^{2^{q-1}-1} x_{2j}\left(w_{2^{q-1}}\right)^{-jk} + \frac{1}{2^{q-1}}\left(w_{2^q}\right)^{-k}\sum_{j=0}^{2^{q-1}-1} x_{2j+1}\left(w_{2^{q-1}}\right)^{-jk}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(P_k^{(q-1)} + w_{2^q}^{-k} I_k^{(q-1)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 2^q-1
\end{aligned} \tag{12.17}
$$

其中:

$$
P_k^{(q-1)} = \frac{1}{2^{q-1}}\sum_{j=0}^{2^{q-1}-1} x_{2j}\left(w_{2^{q-1}}\right)^{-jk}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1 \tag{12.18}
$$

$$
I_k^{(q-1)} = \frac{1}{2^{q-1}}\sum_{j=0}^{2^{q-1}-1} x_{2j+1}\left(w_{2^{q-1}}\right)^{-jk}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1 \tag{12.19}
$$

利用 $\left(w_{2^q}\right)^{-(k+2^{q-1})} = -\left(w_{2^q}\right)^k$，得到:

$$
\begin{cases}
P_{k+2^{q-1}}^{(q-1)} = P_k^{(q-1)} \\
I_{k+2^{q-1}}^{(q-1)} = I_k^{(q-1)}
\end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1 \tag{12.20}
$$

因此有公式:

$$
\begin{cases}
y_k = \frac{1}{2}\left[P_k^{(q-1)} + \left(w_{2^q}\right)^{-k} I_k^{(q-1)}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1 \\
y_{k+2^{q-1}} = \frac{1}{2}\left[P_k^{(q-1)} - \left(w_{2^q}\right)^{-k} I_k^{(q-1)}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1
\end{cases} \tag{12.21}
$$

特别地:

$$
P_k^{(q-1)} = \mathrm{DFT}\left\{x_{2j}\right\}_{j=0}^{2^{q-1}-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1 \tag{12.22}
$$

$$
I_k^{(q-1)} = \mathrm{DFT}\left\{x_{2j+1}\right\}_{j=0}^{2^{q-1}-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-1}-1 \tag{12.23}
$$

故有：

$$\begin{cases} P_k^{(q-1)} = P_k^{(q-2)} + (w_{2^{q-1}})^{-k} I_k^{(q-2)} \\ I_k^{(q-1)} = P_k^{(q-2)} + (w_{2^{q-1}})^{-k} I_k^{(q-2)} \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q-2} - 1 \tag{12.24}$$

12.2.5 FFT 算法中乘法和加法次数的计算

记

(1) M_q：在 FFT 算法中乘法数（当数据长度为 $N = 2^q$ 时）

(2) A_q：在 FFT 算法中加法数。

已知

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = 1 \\ M_3 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 8 \\ A_3 = 24 \end{cases}$$

下面计算 M_q 与 A_q, 首先讨论 M_q 与 M_{q-1} 的关系以及 A_q 与 A_{q-1} 关系:

由 A_2 计算 $P_k^{(q-1)}$（DFT of even） 乘法 M_{q-1}	加法数 A_{q-1}
计算 $I_k^{(q-1)}$	加法数 A_{q-1}
乘法 M_{q-1} 由公式（乘以 $w_{2^q}^k$） 乘法数 $2^{q-1}-1$	加法数 2^q

则有：

$$\begin{cases} M_q = 2M_{q-1} + 2^{q-1} - 1 \\ M_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_q = 2A_{q-1} + 2^q \\ A_1 = 2 \end{cases}$$

Proof.

$$\begin{cases} A_q = 2A_{q-1} + 2^q \\ A_1 = 2 \end{cases} \tag{12.25}$$

由(12.25)式知 $A_{q-j} = 2A_{q-j-1} + 2^{q-j}$
则

$$2^j A_{q-j} = 2^{j+1} A_{q-j-1} + 2^q \tag{12.26}$$

令(12.26)中 $j = 0, 1, \ldots, q-2$，然后相加：

$$\begin{cases} A_q = 2A_{q-1} + 2^q \\ 2A_{q-1} = 2^2 A_{q-2} + 2^q \\ 2^2 A_{q-2} = 2^3 A_{q-3} + 2^q \\ \vdots \\ 2^{q-2} A_2 = 2^{q-1} A_1 + 2^q \end{cases} \tag{12.27}$$

由上可得

$$A_q = 2^{q-1} A_1 + (q-1)2^q \tag{12.28}$$

则

$$A_q = 2^q + (q-1)2^q = q2^q = N \log_2 N \tag{12.29}$$

因此加法计算量为 $N \log_2 N = O(N \log N)$

$$\begin{cases} M_q = 2M_{q-1} + 2^{q-1} - 1 \\ M_1 = 0 \end{cases} \tag{12.30}$$

由(12.30)式知

$$M_{q-j} = 2M_{q-j-1} + 2^{q-j-1} - 1, \quad j = 0, 1, \ldots, q-2 \tag{12.31}$$

则

$$2^j M_{q-j} = 2^{j+1} M_{q-j-1} + 2^{q-1} - 2^j \tag{12.32}$$

$$\begin{cases} M_q = 2M_{q-1} + 2^{q-1} - 1 \\ 2M_{q-1} = 2^2 M_{q-2} + 2^{q-1} - 2^1 \\ 2^2 M_{q-2} = 2^3 M_{q-3} + 2^{q-1} - 2^2 \\ \vdots \\ 2^{q-2} M_2 = 2^{q-1} M_1 + 2^{q-1} - 2^{q-2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_q &= 2^{q-1} M_1 + (q-1)2^{q-1} - \sum_{j=0}^{q-2} 2^j \\ &= (q-1)2^{q-1} - \frac{1 - 2^{q-1}}{1-2} \\ &= (q-1)2^{q-1} + 1 - 2^{q-1} \\ &= (q-2)2^{q-1} + 1 \\ &= \mathcal{O}(N \log_2 N) \end{aligned}$$

□

Part V

Lecture 11 一元 Fourier 变换应用

Chapter 13

微分方程的求解 (ordinary)

工具:

$$\mathcal{F}D^{\alpha} = (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}, \tag{13.1}$$

只有一个维度时:

$$(f')^{\wedge}(\omega) = (i\omega)\hat{f}(\omega)$$

$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$，$X = (x_1, \ldots, x_n)$，$X^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

示例 25.

$$\int_0^{+\infty} g(w) \sin wt dw = f(t) \tag{13.2}$$

求积分方程的解 $g(w)$ 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{\sin(t)}{t}, & 0 < t > \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases} \tag{13.3}$$

Proof. (i) 用正弦变换 (略) 见书本 P69 ξ1.6

(ii) 由于方程中仅仅用到了 (0,∞) 的的信息，于是 g 在实负半轴可以任意规定假设 g 为奇函数，则:

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w) e^{-iwt} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)(-i) \sin wt dw \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(w) \sin wt dw, \end{aligned} \tag{13.4}$$

原方程化为:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\hat{g}(t) = f(t) \tag{13.5}$$

又 g 为奇函数，有 $\hat{g}(-w) = -\hat{g}(w)$ 故 f 也做了相应的奇延拓，仍记为 f 于是:

$$
\begin{aligned}
f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{-iwt}dw = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(w)\sin wtdw \\
= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin wt\sin wtdw \\
= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}[\cos(1-t)w-\cos(1+t)w]dw \\
= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin(1-t)\pi t}{1-t}+\frac{\sin(1+t)\pi t}{1+t}\right) \\
= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin\pi t}{1-t}+\frac{\sin\pi t}{1+t}\right) \\
= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2\cdot\frac{\sin\pi t}{1-t^2} = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\pi t}{1-t^2}
\end{aligned}
$$

对 $\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\hat{g}(t) = f(t)$ 两边做傅里叶变换

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\widehat{\hat{g}(t)} = \hat{f(t)}$$

利用 $\mathcal{F}^2 = mirror$ 的性质

$$\mathcal{F}^2\{f(t)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(-t)$$

而且 g 为奇函数可知

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}g(-t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\pi t}{1-t^2}$$

$$g(t) = \frac{\sin\pi t}{1-t^2}$$

□

示例 26. 积分方程解

$$g(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-x)dx$$

h、f 已知，且 g、h、f 的傅里叶变换存在。

Proof. 由傅里叶变换的卷积公式：

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\cdot\hat{f}\cdot\hat{g}$$

原方程可化为：

$$\hat{g}(w) = \hat{h}(w) + \hat{f}(w)\cdot\hat{g}(w)\cdot\sqrt{2\pi}$$

解得:

$$\hat{g}(w) = \frac{\hat{h}(w)}{1 - \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(w)}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}(w)}{1 - \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(w)} e^{iwt} dw$$

□

示例 27. 常微分非齐次线性积分方程:

$$y'' - y = -f \tag{13.6}$$

其中 f 为已知函数

Proof. 对两边取 Fourier 变换:

$$(iw)^2 \hat{y}(w) - \hat{y}(w) = -\hat{f}(w) \tag{13.7}$$

解得:

$$\hat{y}(w) = \frac{\hat{f}(w)}{1 + w^2} \tag{13.8}$$

因此:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(w)}{1 + w^2} e^{iwt} dw \tag{13.9}$$

将 $\frac{\hat{f}(w)}{1+w^2}$ 视为 $\hat{f}(w)$ 与 $\frac{1}{1+w^2}$ 的乘积。由卷积定理:

$$(f * h)(w) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \hat{h}(w), \quad \text{其中}\, \hat{h}(w) = \frac{1}{1 + w^2}. \tag{13.10}$$

因此:

$$\hat{y}(w) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w), \quad \text{其中}\, \hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 + w^2}. \tag{13.11}$$

所以:

$$y(t) = (f * g)(t), \quad \text{其中}\, g(w) = \frac{1}{2} e^{-|t|}. \tag{13.12}$$

因此:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + w^2} e^{iwt} dw = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|t-x|} dx. \tag{13.13}$$

□

示例 28. 求解积分方程：

$$ax'(t) + bx(t) + c\int_0^t x(t)dt = h(t), \tag{13.14}$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$, h 已知

Proof. 关键是通过 $\mathcal{F}$ 变换求解。设 $G' = g$，且 G 有傅里叶变换。对两边取 $\mathcal{F}$:

$$(iw)\hat{G}(w) = \hat{g}(w) \Rightarrow \hat{G}(w) = \frac{\hat{g}(w)}{iw}.$$

利用此公式，原方程可变换为：

$$a(iw)\hat{x}(w) + b\hat{x}(w) + c\frac{\hat{x}(w)}{iw} = h(w)$$

解得：

$$\hat{x}(w) = \frac{h(w)}{iaw + b + \frac{c}{iw}}.$$

□

Chapter 14

The Solution of Partial Differential Equation by $\mathcal{F}$

14.1 一维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \cos(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin(x) \end{cases}$$

Proof. 对二元函数 $u(x,t)$ 的 x 变量作偏 $\mathcal{F}_1$，记之为 $V(w,t)$。则：

$$V(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx} dx$$

(I) 于是：

$$\frac{\partial V}{\partial t}(w,t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_1(u(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-iwx} dx = \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)$$

即微分和 $\mathcal{F}_1$ 能够换序

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}_1 u(x,t)) = \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)(w,t)$$

同样

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathcal{F}_1 u(x,t)) = \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)(w,t)$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(w,t)=\frac{\partial}{\partial t}V(w,t)\quad (\text{视 } w \text{ 为常数})$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(w,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}V(w,t)$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(w,t)=(iw)V(w,t)$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w,t)=(iw)^2V(w,t)$$

$$\mathcal{F}_1(\sin x)(w)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right]$$

$$\mathcal{F}_1(\cos x)(w)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right]$$

(II) 原方程在频率域可转化为常微分方程问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathbf{d}^2V}{\mathbf{d}t^2}=-w^2V\\[2ex] V|_{t=0}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right]\\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}t}|_{t=0}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot i\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right]\end{cases}$$

$$V(w,t)=C_1\sin(wt)+C_2\cos(wt)$$

齐次方程特征方程为 $\lambda^2+w^2=0$，其解为 $\lambda=\pm iw$，对应的解为 $e^{\pm iwt}$，即 $\cos(wt)$ 和 $\sin(wt)$。由第一个边界条件：

$$C_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right]$$

第二个边界条件：

$$C_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right]$$

最后得

$$\begin{aligned}V(w,t)&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right]\sin(wt)\\&\quad+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right]\cos(wt)\\&=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\sin(wt)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(wt)\right)\delta(w+1)\\&\quad+\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\sin(wt)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(wt)\right)\delta(w-1)\end{aligned}\tag{14.1}$$

做逆变换, 频率到时间

(III)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}_1^{-1}(V(\cdot,t))(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{i}{w} \sin(wt) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(wt) \right] \delta(w+1) \right. \\
&\quad \left. + \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{i}{w} \sin(wt) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(wt) \right] \delta(w-1) \right\} e^{iwx} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{i}{-1} \sin(-t) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(-t) \right] e^{-ix} \right. \\
&\quad \left. + \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{-i}{1} \sin(t) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \right] e^{ix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[-i\sin(t) + \cos(t) \right] e^{ix} + \left[i\sin(t) + \cos(t) \right] e^{-ix} \right\} \\
&= \cos(t-x)
\end{aligned}
$$

□

14.2 一维热传导问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\
u|_{t=0} = \varphi(x)
\end{cases}
$$

Proof. (1) 令 $V(w,t) = \mathcal{F}_1(u(\cdot,t))(w)$.

$$
\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}_1 u(w,t)) = \frac{\partial}{\partial t} V(w,t) \overset{note}{=} \frac{dV}{dt}(w,t)
$$

$$
\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w) = (iw)^2 V(w,t) = -w^2 V(w,t)
$$

记

$$
\hat{f}_1(w,t) = \mathcal{F}_1 f(\cdot,t)(w)
$$
$$
\hat{\varphi}(w) = (\mathcal{F}\varphi)(w)
$$

则原方程在频域表示为:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dV}{dt} = -a^2 w^2 V + \hat{f}_1(w,t) \\
V|_{t=0} = \hat{\varphi}(w)
\end{cases}
$$

一阶非齐次常微分方程可由常数变易法求解

$$
V(w,t) = \hat{\varphi}(w) e^{-a^2 w^2 t} + \int_0^t \hat{f}_1(w,\tau) e^{-a^2 w^2 (t-\tau)} d\tau
$$

(2) 逆变换：利用

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{(\cdot)^2}{\beta}}\right)(w)=\sqrt{\frac{\beta}{2}}e^{-\dfrac{\beta w^2}{4}}(\beta=\frac{1}{a^2t})$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2w^2t}\right)(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2t}}$$

做平移调制

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2(t-x)(\cdot)^2}\right)(y)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi(t-x)}}e^{-\dfrac{(y)^2}{4a^2(t-x)}}$$

得解：

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\left(\varphi(\cdot)*\frac{1}{a\sqrt{2\pi t}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2t}}\right)(x)\\&+\int_0^t\left(f(\cdot,x)*\frac{1}{a\sqrt{2\pi(t-x)}}e^{-\dfrac{(\cdot)^2}{4a^2(t-x)}}\right)(x)dx\end{aligned}\tag{14.2}$$

□

14.3 关于上半平面无源静电场电势的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,x\in\mathbb{R},y>0\\u|_{y=0}=f(x)\end{cases}$$

Proof. 记 $V(w,y)=\mathcal{F}_1u(x,y)(w)$。则原方程转化为

$$\begin{cases}-w^2V(w,y)+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}V(w,y)=0\\V(w,y)|_{y=0}=\hat{f}(w)\\\lim\limits_{y\to+\infty}V(w,y)=0\end{cases}$$

视 w 为常数，这是一个二阶常微分方程。特征方程为：

$$\lambda^2-w^2=0\implies\lambda=\pm|w|$$

通解为：

$$V(w,y)=C_1e^{|w|y}+C_2e^{-|w|y}$$

边值条件给出：

$$V(w,y)|_{y=0} = \hat{f}(w) \implies C_1 + C_2 = \hat{f}(w)$$

以及

$$\lim_{y\to+\infty} V(w,y) = 0 \implies C_1 = 0$$

因此：

$$V(w,y) = \hat{f}(w)e^{-|w|y}$$

利用 Fourier 逆变换：

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w|y}\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\frac{y}{x^2+y^2}$$

上式子可由下式得出

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{1}{r}}\right)(\xi) \rightleftarrows \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{1+r^2\xi^2}$$

最终得解

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f * \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(\cdot)^2+y^2}\right)(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{x^2+y^2}f(x-t)\,dt \end{aligned} \tag{14.3}$$

副产物：上半平面 Poisson 积分核

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{y^2+x^2} \tag{14.4}$$

$\square$

Part VI

Lecture 12 多元 Fourier 变换

Chapter 15

基本定义与性质

Definition 5.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\vec{\omega}) &= \mathcal{F}f(\omega_1, \ldots, \omega_m) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, x_m) e^{-i(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_m x_m)} dx_1 \cdots dx_m \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(\vec{x}) e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{x}} d\vec{x}\end{aligned}$$

15.1 一些工具

15.1.1 逆公式

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(\vec{\omega}) e^{i\vec{w}\cdot\vec{x}} d\vec{\omega}$$

15.1.2 偏傅里叶变换

$$\mathcal{F}_j f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \omega_j, x_{j+1}, \ldots, x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-i\omega_j x_j} dx_j$$

当 $f(\vec{x}) = \prod_{j=1}^m g_j(x_j)$ 变量可分离时，则得到张量对角积

$$(\mathcal{F}f)(\vec{\omega}) = \prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j g_j(\omega_j)$$

示例 29. 求函数 $f(x) = ae^{-b^2|x|^2} = ae^{-b^2(x_1^2+x_2^2)}$ 的二维傅里叶变换 $\hat{f}(w_1, w_2)$。

Proof. 应用二维傅里叶变换公式：

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b^2(x_1^2+x_2^2)} e^{-i(w_1x_1+w_2x_2)} dx_1 dx_2$$

$$\stackrel{fubini}{=} \hat{f}(w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-b^2 x_1^2} e^{-iw_1 x_1} dx_1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2 x_2^2} e^{-iw_2 x_2} dx_2 \right)$$

利用两者其一

$$\mathcal{F}(e^{-\beta(\cdot)^2})(w) = \sqrt{\frac{1}{2\beta}} e^{-\frac{w^2}{4\beta}}$$

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{\cdot^2}{\beta}})(w) = \sqrt{\frac{1}{2\beta}} e^{-\beta \frac{w^2}{4}}$$

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \frac{a}{4b^2} \exp\left(-\frac{w_1^2 + w_2^2}{4b^2} \right)$$

特别地，当 $a = 1$，$b = 1$ 时，结果简化为:

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{w_1^2 + w_2^2}{4} \right) \tag{15.1}$$

为算子的不动点。 □

示例 30. 求函数 $f(x) = e^{-x^T Ax}$ 的傅里叶变换，其中 $x = (x_1, \ldots, x_m)'$，且 $A = B^T B$ 为正定矩阵,B 可逆

Proof.

$$e^{-x^T Ax} = e^{-x^T B^T Bx} = e^{-(Bx)^T (Bx)}$$

$$\hat{f}(w_1, \ldots, w_m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(Bx)^T (Bx)} e^{-iw^T x} dx$$

令 $y = Bx$，则 $x = B^{-1}y$，且雅可比行列式 $|B^{-1}|$。代入上式得到:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-y^T y} e^{-i\omega^T B^{-1} y} \frac{1}{|B|} dy$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|y^2|} e^{-i(B^{-1^T}\omega)^T y} \frac{1}{|B|} dy$$

利用: $\mathcal{F}(e^{-|x|^2})(\omega_1, \omega_2, ...\omega_m) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} e^{-\frac{w^T w}{4}}$

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \frac{1}{|B|} e^{-\frac{(B^{-1}w)^T ((B^{-1})^T w)}{4}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \frac{1}{|B|} e^{-\frac{w^T B^{-1} (B^{-1})^T w}{4}}$$

$$A = B^T B \to (B^{-1})^T B^{-1} = A^{-1}$$

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \frac{1}{|B|} e^{-\frac{w^T A^{-1} w}{4}}$$

当 $B = I$ 时

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} e^{-\frac{w^T w}{4}}$$

□

15.2 性质

线性性，略

15.2.1 平移性

$$\mathcal{F}(f(x-\vec{a})) = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{\omega}}(\mathcal{F}f)(\vec{\omega}) \tag{15.2}$$

即

$$FT_{\vec{a}} = M_{-\vec{a}}F. \tag{15.3}$$

15.2.2 调制性

$$FM_{\vec{b}} = T_{\vec{b}}F. \tag{15.4}$$

15.2.3 微分性质

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (iw_j)\cdot\mathcal{F}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_j}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\left(-ix_j f\right)\left\{\textbf{即}\frac{\partial}{\partial w_j}\hat{f}(\vec{w}) = \mathcal{F}\left(-ix_j f(x)\right)(\vec{w})\right\}$$

一般化令 $k=(k_1,\dots,k_m)$，$D=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$，则：

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}}(\textbf{其中}|k| = k_1+\cdots+k_m)$$

则有：

$$\mathcal{F}(D^k f)(\vec{w}) = \left(i(w_1,\dots,w_m)^{(k_1,k_2,\dots k_m)}\right)(\mathcal{F}f)(\vec{w})$$

当 P_m 为 m 元多项式时：

$$\mathcal{F}(P_m(D)f)(\vec{w}) = P_m(i\vec{w})(\mathcal{F}f)(\vec{w})$$

请回忆多元微分学的多元 Taylor 公式，特别地：

$$D^k\mathcal{F}f(\vec{w}) = \mathcal{F}((-ix)^k f)(\vec{w})$$

即：

$$P_m(D)\mathcal{F}f(\vec{w}) = \mathcal{F}(P_m(-ix)f)(\vec{w})$$

15.2.4 卷积

$$\mathcal{F}(f*g)(w) = (\sqrt{2\pi})^m(\mathcal{F}f)(w)\cdot(\mathcal{F}g)(w)$$

$$\mathcal{F}(f\cdot g)(w) = (\sqrt{2\pi})^{-m}\left((\mathcal{F}f)*(\mathcal{F}g)\right)(w)$$

15.2.5 多维情况

对于多维情况，傅里叶变换具有如下性质：

$$\mathcal{F}\left(f_1 * f_2 * \cdots * f_n\right)(w) = (\sqrt{2\pi})^{m(n-1)} \prod_{j=1}^{n} (\mathcal{F} f_j)(w)$$

$$\mathcal{F}\{\prod_{j=1}^{n} (f_j)\}(w) = (\sqrt{2\pi})^{-m(n-1)} (\mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2 \cdots * \mathcal{F} f_n)(w)$$

15.2.6 缩放

$$\mathcal{F}\{f(A \cdot \vec{x})\}(w) = |A|^{-\frac{m}{2}} (\mathcal{F} f)(\{A^{-1})^T \cdot w^T\}^T)$$

简要证明：

Proof. 注意单位化和 $A \cdot \vec{x}$ 的含义

$$\mathcal{F}\{f(A \cdot \vec{x})\}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi |A|})^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(A \cdot \vec{x}) e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{x}} d\{A \cdot \vec{x}\}$$

$$\stackrel{\vec{y}=A \cdot \vec{x}}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi |A|})^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(\vec{y}) e^{-i\vec{\omega} \cdot A^{-1} \cdot \vec{y}} d\vec{y}$$

做转置问题得证 □

Chapter 16

多元 Fourier 变换应用

16.1 二维热传导方程的初值问题

考虑如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

其中 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$，$t > 0$

Proof. (I) ．“冻结”时间，对三元函数 $u(x,y,t)$ 关于 (x,y) 变量施加二维傅里叶变换。

$$V(w_1,w_2,t) = \mathcal{F}[u(\cdot,\cdot,t)](w_1,w_2)$$

由 $\frac{\partial}{\partial t}$ 与 $\mathcal{F}$ 的可交换性（即 $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}$），有:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(w_1,w_2,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}u)(w_1,w_2,t) = \frac{\partial}{\partial t}V(w_1,w_2,t)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w_1,w_2,t) = -w_1^2 V(w_1,w_2,t) \\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(w_1,w_2,t) = -w_2^2 V(w_1,w_2,t) \end{cases}$$

(II) ．则原初值问题转化为:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -a^2(w_1^2+w_2^2)V \\ V|_{t=0} = \hat{\varphi}(w_1,w_2) \end{cases}$$

(III) 常系数 ODE $\frac{dV}{dt} = -a^2(w_1^2+w_2^2)V$ 的通解为:

$$V(w_1,w_2,t) = Ce^{-a^2(w_1^2+w_2^2)t}$$

(IV) ．求 C，由初始条件 $V|_{t=0} = \hat{\varphi}$，可得 $C = \hat{\varphi}(w_1,w_2)$。

(V) . 所以 $V(w_1,w_2,t)=\hat{\varphi}(w_1,w_2)e^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)}$。利用二维卷积性质 $(\mathcal{F}(f*g)=(\mathcal{F}f)\cdot(\mathcal{F}g))$

$$u(x,y,t)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\cdot,\cdot)]*\mathcal{F}^{-1}[g(\cdot,\cdot,t)]$$

其中

$$g(x,y,t)=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)}\right)(x,y)$$

由于变量可分离:$e^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)}=e^{-a^2tw_1^2}\cdot e^{-a^2tw_2^2}$ 再利用一元 $\mathcal{F}$ 变换:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\beta^2}{4}}\right)(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\beta^2\xi^2}{4}}$$

可得:

$$g(x,y,t)=\left(\sqrt{\frac{1}{2a^2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2a^2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}\right)=\frac{1}{2a^2t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}$$

于是

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2a^2t}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi(x-z_1,y-z_2)e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}dz_1dz_2$$

向量记号:

$$u(\vec{x},t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi(\vec{x}-\vec{z})e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}d\vec{z}$$

$\square$

note: 考虑 n 维情况:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2u, & x_j\in\mathbb{R},j=1,2,\cdots,n,t>0\\ u(\vec{x},t)|_{t=0}=\varphi(\vec{x})\end{cases}$$

其解为 $u(\vec{x},t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\vec{x}-\vec{z})e^{-\frac{|\vec{z}|^2}{4a^2t}}d\vec{z}$ 这里 $\nabla^2u=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_j^2}$, $\vec{z}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $d\vec{z}=dz_1\cdots dz_n$。

16.2 三维热传导问题

考虑三维热传导方程初值问题:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\\ u|_{t=0}=e^{-(x^2+y^2+z^2)}\end{cases}$$

Proof. 由一般公式，

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x-z_1)^2-(y-z_2)^2-(z-z_3)^2}e^{-\frac{z_1^2+z_2^2+z_3^2}{4a^2t}}dz_1dz_2dz_3$$

注意到被积函数可分离，则

$u(x,y,z,t)=g_1(x,t)g_2(y,t)g_3(z,t)$，这里 $g_1=g_2=g_3=g$。

$$g(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-z_1)^2}e^{-\frac{z_1^2}{4a^2t}}dz_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(1+\frac{1}{4a^2t}\right)z_1^2+2xz_1-x^2\right]dz_1$$

计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha t^2+\beta t+C}dt(\alpha>0)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\left(t^2-\frac{\beta}{\alpha}t-\frac{C}{\alpha}\right)}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\left[\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{C}{\alpha}\right]}dt$$

$$=e^{\frac{\beta^2+4\alpha C}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}dt$$

$$=e^{\frac{\beta^2+4\alpha C}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}d(\sqrt{\alpha}s)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{\beta^2+4\alpha C}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{\beta^2+4\alpha C}{4\alpha}}\sqrt{\pi}$$

令 $\alpha=1+\frac{1}{4a^2t}$，$\beta=2x$，$C=-x^2$，则

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{\beta^2+4\alpha C}{4\alpha}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4a^2t}}}e^{\frac{4x^2+4\left(1+\frac{1}{4a^2t}\right)(-x^2)}{4\left(1+\frac{1}{4a^2t}\right)}}\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+4a^2t}}\sqrt{\pi}\exp\left\{\frac{4a^2t\left[4x^2-4x^2\left(1+\frac{1}{4a^2t}\right)\right]}{4\left(1+4a^2t\right)}\right\}$$

$$=\sqrt{\pi}\frac{2a\sqrt{\pi t}}{1+4a^2t}\exp\left\{\frac{-x^2}{(1+4a^2t)}\right\}$$

则

$$g(x,t)=\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+4a^2t}}exp\{-\frac{x^2}{1+4a^2t}\}$$

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}g(x,t)g(y,t)g(z,t)$$

□

总结归纳：$\mathcal{F}$ 求解微分方程的办法难点在于逆变换的可解性

Part VII

Lecture 15 Laplace 变换性质

Chapter 17

Laplace 变换的性质

17.1 线性性质 (Linearity Property)

对于有限 $N \in \mathbb{N}$ 和常数 $c_j \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{j=1}^{N} c_j f_j(x)\right\}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathcal{L}\{f_j(x)\}(z) \tag{17.1}$$

17.2 微分性质 (Differentiation Property)

若 $\mathcal{L}\{f(x)\}(z)$ 存在, 且 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可微, $\mathcal{L}\{f'(x)\}(z)$ 存在, 则

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(z) = z\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - f(0^+) \tag{17.2}$$

note 通常简记为 $f(0)$，指 $x \to 0^+$ 的极限值；此性质亦称“导数变乘子”.

Proof.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(x)\}(z) &= \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-zx}\,\mathrm{d}f(x) \quad (\text{分部积分法}) \\
&= \left[f(x)e^{-zx}\right]_{0^+}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}(e^{-zx}) \\
&= \left(\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-zx} - \lim_{x\to0^+} f(x)e^{-zx}\right) - \int_0^{+\infty} f(x)(-ze^{-zx})\,\mathrm{d}x \\
&= (0 - f(0^+)) + z\int_0^{+\infty} f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\
&= z\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - f(0^+)
\end{aligned}
$$

□

17.3 积分性质 (Integration Property)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}\{f(x)\}(z) \tag{17.3}$$

Proof.

记 $h(x) = \int_0^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. 则 $h'(x) = f(x)$ 且 $h(0^+) = 0$.

由微分性质 (17.2) 可知:

$$\mathcal{L}\{h'(x)\}(z) = z\mathcal{L}\{h(x)\}(z) - h(0^+)$$

代入 $h'(x) = f(x)$ 和 $h(0^+) = 0$:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = z\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}(z) - 0$$

整理得:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}\{f(x)\}(z)$$

□

17.4 位移性质 (z 域平移)

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\}(z) = (\mathcal{L}\{f(x)\})(z-a) \tag{17.4}$$

(其中 $(\mathcal{L}\{f(x)\})(z-a)$ 表示将 $F(z) = \mathcal{L}\{f(x)\}(z)$ 中的 z 替换为 $z-a$)

Proof.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{ax}f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)e^{-(z-a)x}\,\mathrm{d}x \\ &= (\mathcal{L}\{f(x)\})(z-a)\end{aligned}$$

□

17.5 延迟性质 (x 域平移)

设 $f(x)=0$ 对于 $x<0$. 对于 $b>0$:

$$\mathcal{L}\{f(x-b)\}(z) = e^{-bz}\mathcal{L}\{f(x)\}(z) \tag{17.5}$$

(其中 $x<0$ 时 $f(x)=0$.)

也可记作

$$\mathcal{L}\{g(x-b)u(x-b)\}(z) = G(z)e^{-bz}$$

其中 $u(x-b)$ 是单位阶跃函数。

Proof.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x-b)\}(z) &= \int_0^{+\infty} f(x-b)e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-b}^{+\infty} f(t)e^{-z(t+b)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-b}^{+\infty} f(t)e^{-zt}e^{-zb}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}e^{-zb}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-bz}\mathcal{L}\{f(t)\}(z)\end{aligned}$$

□

Chapter 18

利用 $\mathcal{L}$ 变换的基本性质求 Laplace 变换

示例 31. 求 $f(x) = \cos(kx)$ 的 *Laplace* 变换

解法一 (Solution 1):
前面已利用 $\mathcal{L}\{e^{kx}\}(z) = \frac{1}{z-k}$ 已计算出（通过欧拉公式）

$$\mathcal{L}\{\cos(kx)\}(z) = \frac{z}{z^2+k^2} \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$$

解法二 (Solution 2 using differentiation property):
已知 Laplace 变换的微分性质：

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(z) = z\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - f(0^+) \tag{18.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(x)\}(z) &= z\mathcal{L}\{f'(x)\}(z) - f'(0^+) \\ &= z(z\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - f(0^+)) - f'(0^+) \\ &= z^2\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - zf(0^+) - f'(0^+)\end{aligned} \tag{18.2}$$

令 $f(x) = \cos(kx)$. 则 $f'(x) = -k\sin(kx)$, $f''(x) = -k^2\cos(kx)$. 初始条件为：$f(0^+) = \cos(0) = 1$. $f'(0^+) = -k\sin(0) = 0$.

对于 $f''(x) = -k^2\cos(kx) = -k^2 f(x)$, 利用 $\mathcal{L}$ 变换的线性性质，有：

$$\mathcal{L}\{f''(x)\}(z) = \mathcal{L}\{-k^2 f(x)\}(z) = -k^2\mathcal{L}\{f(x)\}(z)$$

结合公式 (18.2)：

$$-k^2\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = z^2\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - zf(0^+) - f'(0^+)$$

代入初始条件 $f(0^+) = 1, f'(0^+) = 0$:

$$-k^2\mathcal{L}\{\cos(kx)\}(z) = z^2\mathcal{L}\{\cos(kx)\}(z) - z$$

移项整理:

$$z = (z^2 + k^2)\mathcal{L}\{\cos(kx)\}(z)$$

故

$$\mathcal{L}\{\cos(kx)\}(z) = \frac{z}{z^2 + k^2}$$

示例 32. 求 $f(x) = x^m$ 的 *Laplace* 变换, $m \in \mathbb{N}$

解法一 (Solution 1):
前面已证（例如通过 Gamma 函数或直接积分得到）当 $m > -1$ 时 (这里 m 是自然数，所以满足此条件):

$$\mathcal{L}\{x^m\}(z) = \frac{\Gamma(m+1)}{z^{m+1}} = \frac{m!}{z^{m+1}}$$

解法二 (Solution 2 using differentiation property generalization):
将二阶微分公式 $\mathcal{L}\{f''(x)\}(z) = z^2\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - zf(0^+) - f'(0^+)$ 推广为 n 阶微分公式:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}(z) = z^n\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} f^{(j)}(0^+) \tag{18.3}$$

当 $m \in \mathbb{N}$ 时，令 $f(x) = x^m$. 则 $f(0^+) = 0, f'(0^+) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(0^+) = 0$. 而 $f^{(m)}(x) = m!$.

取 $n = m$ (即求 m 阶导数的 Laplace 变换)，代入 (18.3):

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}(x)\}(z) = z^m\mathcal{L}\{f(x)\}(z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-1-j} f^{(j)}(0^+)$$

由于 $f^{(j)}(0^+) = 0$ for $j = 0, \ldots, m-1$, 上式右边的求和项为 0.

$$\mathcal{L}\{m!\}(z) = z^m\mathcal{L}\{x^m\}(z)$$

我们知道 $\mathcal{L}\{1\}(z) = \frac{1}{z}$. 因为 $m!$ 是常数，所以 $\mathcal{L}\{m!\}(z) = m!\mathcal{L}\{1\}(z) = m!\frac{1}{z}$. 因此:

$$m!\frac{1}{z} = z^m\mathcal{L}\{x^m\}(z)$$

故

$$\mathcal{L}\{x^m\}(z) = \frac{m!}{z^{m+1}}$$

示例 33. 已知 $\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = \frac{1}{(z^2+4z+13)^2}$, 求 $f(x)$

解 (Solution):
首先，对分母进行配方：
$$z^2+4z+13=(z^2+4z+4)+9=(z+2)^2+3^2$$
所以，
$$\mathcal{L}\{f(x)\}(z)=\frac{1}{((z+2)^2+3^2)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{((z+2)^2+3^2)}\cdot\frac{3}{((z+2)^2+3^2)}$$
因为
$$\mathcal{L}\{\sin(3x)\}(z)=\frac{3}{z^2+3^2}$$
利用 z 域平移性质 $\mathcal{L}\{e^{ax}g(x)\}(z)=G(z-a)$, 令 $a=-2$, $g(x)=\sin(3x)$, 则
$$\mathcal{L}\{e^{-2x}\sin(3x)\}(z)=\frac{3}{(z-(-2))^2+3^2}=\frac{3}{(z+2)^2+3^2}$$
令 $G_1(z)=\mathcal{L}\{e^{-2x}\sin(3x)\}(z)=\frac{3}{(z+2)^2+3^2}$. 则题目给出的变换可以写作：
$$\mathcal{L}\{f(x)\}(z)=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{(z+2)^2+3^2}\right)\left(\frac{3}{(z+2)^2+3^2}\right)=\frac{1}{9}G_1(z)\cdot G_1(z)$$
根据 Laplace 变换的卷积定理，时域卷积对应频域相乘：
$$\mathcal{L}\{g_1(x)*g_2(x)\}(z)=G_1(z)G_2(z)$$
这里 $g_1(x)=e^{-2x}\sin(3x)$. 故
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{9}\left((e^{-2x}\sin(3x))*(e^{-2x}\sin(3x))\right)\\&=\frac{1}{9}\int_0^x e^{-2\tau}\sin(3\tau)\cdot e^{-2(x-\tau)}\sin(3(x-\tau))\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{9}e^{-2x}\int_0^x\sin(3\tau)\sin(3x-3\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$
利用积化和差公式 $\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$:
$$\begin{aligned}\sin(3\tau)\sin(3x-3\tau)&=\frac{1}{2}[\cos(3\tau-(3x-3\tau))-\cos(3\tau+(3x-3\tau))]\\&=\frac{1}{2}[\cos(6\tau-3x)-\cos(3x)]\end{aligned}$$
所以积分部分为：
$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{1}{2}[\cos(6\tau-3x)-\cos(3x)]\,\mathrm{d}\tau&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\sin(6\tau-3x)-\tau\cos(3x)\right]_0^x\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}\sin(3x)-x\cos(3x)\right)-\left(\frac{1}{6}\sin(-3x)-0\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\sin(3x)-x\cos(3x)+\frac{1}{6}\sin(3x)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)-x\cos(3x)\right]\end{aligned}$$

代回 $f(x)$ 的表达式:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{9}e^{-2x} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x) - x\cos(3x)\right] \\
&= \frac{1}{18}e^{-2x}\left(\frac{\sin(3x)}{3} - x\cos(3x)\right) \\
&= \frac{1}{54}e^{-2x}(\sin(3x) - 3x\cos(3x))
\end{aligned}
$$

示例 34. $\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}e^{-az}$ *(*$z > 0$*), 求* $f(x)$

解 (Solution):
首先考虑没有延迟项的部分, 令 $G(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$. 我们知道:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(x)\}(z) &= \frac{1}{z^2+1} \\
\mathcal{L}\{\cos(x)\}(z) &= \frac{z}{z^2+1}
\end{aligned}
$$

$G(z)$ 可以看作是 $\mathcal{L}\{\cos(x)\}(z)$ 与 $\mathcal{L}\{\sin(x)\}(z)$ 的乘积。或者,注意到 $\frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{z^2+1}\right) = \frac{2z}{(z^2+1)^2}$. 以及 $-z\frac{dF(z)}{dz} \Leftrightarrow xf(x)$.

另一种思路,使用卷积:令 $H_1(z) = \frac{z}{z^2+1}$ 和 $H_2(z) = \frac{1}{z^2+1}$. 则 $h_1(x) = \cos(x)$ 和 $h_2(x) = \sin(x)$. $G(z) = H_1(z)H_2(z)$, 所以 $g(x) = h_1(x) * h_2(x)$.

$$
\begin{aligned}
g(x) = \cos(x) * \sin(x) &= \int_0^x \cos(\tau)\sin(x-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\text{利用积化和差公式} \sin A\cos B &= \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]: \\
\sin(x-\tau)\cos(\tau) &= \frac{1}{2}[\sin(x-\tau+\tau) + \sin(x-\tau-\tau)] \\
&= \frac{1}{2}[\sin(x) + \sin(x-2\tau)]
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^x \frac{1}{2}[\sin(x)+\sin(x-2\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\tau\sin(x) - \frac{1}{-2}\cos(x-2\tau)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2}\left[\tau\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x-2\tau)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x\sin(x)+\frac{1}{2}\cos(-x)\right) - \left(0+\frac{1}{2}\cos(x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x\sin(x)+\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right] \\
&= \frac{1}{2}x\sin(x)
\end{aligned}
$$

所以,$g(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)^2}\right\}(x) = \frac{1}{2}x\sin(x)$, 对于 $x \geq 0$. (也可记作 $\frac{1}{2}x\sin x\mathcal{X}_{(0,+\infty)}(x)$, $\mathcal{X}$ 是特征函数 $u(x)$).

题目给出的变换是 $\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = G(z)e^{-az}$. 根据 x 域平移（延迟）性质:

$$
\mathcal{L}\{g(x-a)u(x-a)\}(z) = G(z)e^{-az}
$$

其中 $u(x-a)$ 是单位阶跃函数。因此,

$$
f(x) = g(x-a)u(x-a) = \frac{1}{2}(x-a)\sin(x-a)u(x-a)
$$

Chapter 19

Laplace 变换与卷积

19.1 卷积的性质

(1) f, g 是因果信号 (causal signals) (即，当 $t < 0$ 时，$f(t) = 0, g(t) = 0$) 时，$f * g$ 的形式：

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

即，对于因果信号 f, g:

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{19.1}$$

$$= \int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{(利用卷积的交换律)} \tag{19.2}$$

(2) 卷积的导数 (Derivative of Convolution):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f * g)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

使用 Leibniz 积分法则:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f * g)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &= f(t)g(t-t)\cdot\frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t} - f(0)g(t-0)\cdot\frac{\mathrm{d}(0)}{\mathrm{d}t} + \int_{0}^{t} f(\tau)\frac{\partial}{\partial t}(g(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(t)g(0) + \int_{0}^{t} f(\tau)g'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(t)g(0) + (f * g')(t) \qquad (19.3)\end{aligned}$$

对称地，使用 $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*g)(t) &= f(t-t)g(t)\cdot\frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t} - f(t-0)g(0)\cdot\frac{\mathrm{d}(0)}{\mathrm{d}t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(f(t-\tau))g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(0)g(t) + \int_0^t f'(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(0)g(t) + (f'*g)(t) \qquad (19.4)\end{aligned}$$

(注：您的笔记中分别展示了这两种形式。)

(3) 卷积的积分 (Integration of Convolution): 考虑 $\int_0^t (f*g)(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$. (Using ' ' as the outer integration variable to avoid clash with 't' as upper limit)

$$\int_0^t (f*g)(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \left(\int_0^\sigma f(\tau)g(\sigma-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \mathrm{d}\sigma\left(\int_0^\sigma f(\tau)g(\sigma-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

通过交换积分次序

$$\int_0^t (f*g)(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \mathrm{d}\tau\left(\int_0^\tau f(\tau)g(\sigma-\tau)\,\mathrm{d}\sigma\right)$$

对于内层积分，令 $u=\sigma-\tau$, 则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}\sigma$. 当 $\sigma=\tau$, $u=0$. 当 $\sigma=t$, $u=t-\tau$.

$$\int_\tau^t g(\sigma-\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{t-\tau} g(u)\,\mathrm{d}u$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^t (f*g)(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^t f(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\tau \qquad (19.5)\\ &= \left(f*\left(\int_0^{\cdot} g(u)\,\mathrm{d}u\right)\right)(t)\end{aligned}$$

19.2 Laplace 变换的卷积定理

设 $f(t),g(t)$ 为因果信号 (causal signals)，$\mathcal{L}\{f(t)\}(z)$ 和 $\mathcal{L}\{g(t)\}(z)$ 存在，且 f,g 有适当的增长阶 (exponential order) (笔记中写的是“衰减性更强”，应指其绝对值被指数函数所界定，以确保 Laplace 变换收敛)。则 (卷积变乘积):

Theorem 35 (Laplace 变换的卷积定理)**.**

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(z) = \mathcal{L}\{f(t)\}(z)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(z) = F(z)G(z)$$

形式证明 *(Formal Proof).*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(z) &= \int_0^\infty (f*g)(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-zt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

交换积分次序。积分区域为 $0 \le \tau \le t$ 和 $0 \le t < \infty$. 交换后为 $0 \le \tau < \infty$ 和 $\tau \le t < \infty$. (与上一节中卷积积分的图类似，但外层积分到 ∞)

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(z) = \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_\tau^\infty g(t-\tau) e^{-zt} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau$$

对内层积分，令 $u = t - \tau$, 则 $t = u + \tau$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. 当 $t = \tau, u = 0$. 当 $t \to \infty, u \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\int_\tau^\infty g(t-\tau) e^{-zt} \, \mathrm{d}t &= \int_0^\infty g(u) e^{-z(u+\tau)} \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty g(u) e^{-zu} e^{-z\tau} \, \mathrm{d}u \\
&= e^{-z\tau} \int_0^\infty g(u) e^{-zu} \, \mathrm{d}u \\
&= e^{-z\tau} G(z)
\end{aligned}$$

代回外层积分：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(z) &= \int_0^\infty f(\tau) \left(e^{-z\tau} G(z) \right) \mathrm{d}\tau \\
&= G(z) \int_0^\infty f(\tau) e^{-z\tau} \, \mathrm{d}\tau \\
&= G(z) F(z) = F(z) G(z)
\end{aligned}$$

□

示例 36. $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \frac{1}{z^2(1+z^2)}$, 求 $f(t)$

解 (Solution):
令 $F_1(z) = \frac{1}{z^2}$ 和 $F_2(z) = \frac{1}{1+z^2}$. 已知：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\}(z) = \frac{1}{z^2} \quad &\Rightarrow \quad f_1(t) = t \\
\mathcal{L}\{\sin(t)\}(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad &\Rightarrow \quad f_2(t) = \sin(t)
\end{aligned}$$

根据卷积定理的逆定理，$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(z)F_2(z)\}(t) = (f_1 * f_2)(t)$. 这里 $f_1(t) = t \cdot u(t)$ 和 $f_2(t) = \sin(t) \cdot u(t)$ (视为因果信号，其中 $u(t)$ 是单位阶跃函数)。您的笔记中写的是 $f(t) = (t * \sin t \cdot \mathcal{X}_{(0,+\infty)})(t)$.

$$f(t) = (t * \sin t)(t) = \int_0^t \tau \sin(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

使用分部积分法 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$. 令 $u_p = \tau$, $\mathrm{d}v_p = \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Then $\mathrm{d}u_p = \mathrm{d}\tau$, $v_p = \cos(t-\tau)$ (注意 $\sin(A-B)$ 积分时符号变化，$\int \sin(C-x)dx = \cos(C-x)$).

$$
\begin{aligned}
f(t) &= [\tau\cos(t-\tau)]_0^t - \int_0^t \cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= (t\cos(0) - 0\cos(t)) - [-\sin(t-\tau)]_0^t \\
&= t - (-\sin(0) - (-\sin(t))) \\
&= t - (0 + \sin(t)) \\
&= t - \sin(t)
\end{aligned}
$$

所以 $f(t) = (t - \sin t)u(t)$.

示例 37. $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$，求 $f(t)$

解 (Solution):
令 $F_1(z) = \frac{z}{z^2+1}$ 和 $F_2(z) = \frac{z}{z^2+1}$. 已知:

$$
\mathcal{L}\{\cos(t)\}(z) = \frac{z}{z^2+1} \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = f_2(t) = \cos(t)
$$

根据卷积定理的逆定理: $f(t) = (\cos t * \cos t)(t)$. (假设 $\cos t$ 是因果信号 $\cos(t)u(t)$)

$$
f(t) = \int_0^t \cos(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
$$

利用积化和差公式 $\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$:

$$
\begin{aligned}
\cos(\tau)\cos(t-\tau) &= \frac{1}{2}[\cos(\tau-(t-\tau)) + \cos(\tau+(t-\tau))] \\
&= \frac{1}{2}[\cos(2\tau - t) + \cos(t)]
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(2\tau - t) + \cos(t)]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\tau - t) + \tau\cos(t)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\sin(t) + t\cos(t)\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(-t) + 0\cos(t)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(t) + t\cos(t) - \left(-\frac{1}{2}\sin(t)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(t) + t\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}[\sin(t) + t\cos(t)]
\end{aligned}
$$

所以 $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)u(t)$.

Note: 视 $\cos t$ 为因果信号 $\cos t \cdot \mathcal{X}_{(0,+\infty)}$. 则卷积公式为 $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

示例 38. 求 $f(t) = t\sin(kt)$ 的 *Laplace* 变换

解 (Solution):
回顾时域微分性质 $\mathcal{L}\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\}(z) = z\mathcal{L}\{f(t)\}(z) - f(0^+)$。对应的 z 域（频域）微分性质是 (当 $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ 时，对 z 求导):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(z)$$

推广形式为 (Higher-order frequency differentiation):

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}F(z) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(z) \tag{19.6}$$

或者写作 $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(z) = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n F(z)}{\mathrm{d}z^n}$.

对于本例，我们应用 $n=1$ 的情况：$\mathcal{L}\{t\sin(kt)\}(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(z)$. 已知 $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(z) = \frac{k}{z^2+k^2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\sin(kt)\}(z) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{k}{z^2+k^2}\right)\\ &= -k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2+k^2)^{-1} = -k(-1)(z^2+k^2)^{-2}(2z)\\ &= \frac{2kz}{(z^2+k^2)^2} \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)\end{aligned}$$

Note: $\mathcal{L}\{t\cos(kt)\}(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(z)$. 已知 $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\cos(kt)\}(z) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z^2+k^2}\right)\\ &= -\frac{(z^2+k^2)(1) - z(2z)}{(z^2+k^2)^2} = -\frac{z^2+k^2-2z^2}{(z^2+k^2)^2}\\ &= -\frac{k^2-z^2}{(z^2+k^2)^2} = \frac{z^2-k^2}{(z^2+k^2)^2} \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)\end{aligned}$$

示例 39. 频域积分性质证明及其应用

笔记中提到时域积分公式 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right\}(z) = \frac{F(z)}{z}$. 对应的频域积分公式是:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(z) = \int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s \tag{19.7}$$

(条件是 $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ 存在或 $\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\}$ 存在。)
证明思路 (Proof Idea):
利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G(z) = -\mathcal{L}\{tg(t)\}(z)$. 令 $g(t) = \frac{f(t)}{t}$. 设 $G(z) = \mathcal{L}\{g(t)\}(z) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(z)$. 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G(z) = -\mathcal{L}\left\{t\cdot\frac{f(t)}{t}\right\}(z) = -\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = -F(z)$. 两边从 z 到 ∞ 对变量 s 积分 (假设 $G(s)\to 0$ 当 $s\to\infty$):

$$\int_z^\infty \frac{\mathrm{d}G(s)}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_z^\infty (-F(s))\,\mathrm{d}s$$
$$[G(s)]_z^\infty = -\int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$$
$$G(\infty) - G(z) = -\int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$$

假设 $G(\infty) = \lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = 0$. 则 $-G(z) = -\int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$, 所以 $G(z) = \int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$. 即 $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(z) = \int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$.

应用 (Application): 计算 $f(t) = \frac{\sinh(t)}{t}$ 的 Laplace 变换。其中 $\sinh(t)$ 为双曲正弦函数, $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. 首先，求 $\mathcal{L}\{\sinh(t)\}(z)$, 记为 $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) = \mathcal{L}\{\sinh(t)\}(z) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^t\}(z) - \mathcal{L}\{e^{-t}\}(z)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(z+1)-(z-1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z^2-1} \end{aligned}$$

则 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh(t)}{t}\right\}(z) = \int_z^\infty H(s)\,\mathrm{d}s = \int_z^\infty \frac{1}{s^2-1}\,\mathrm{d}s$. 使用部分分式分解: $\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$.

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\left[\ln|s-1| - \ln|s+1|\right]_z^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right]_z^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{s\to\infty}\ln\left|\frac{1-1/s}{1+1/s}\right| - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|1| - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \end{aligned}$$

(收敛域 $\mathrm{Re}(z) > 1$)

注 (Note): 利用公式 $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(z) = \int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$ 可以计算一些特殊定积分。回顾 Laplace 变换的定义:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(z) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

所以,

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \int_z^\infty F(s)\,\mathrm{d}s$$

令 $z = 0$, 若左端 $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ 存在 (即积分收敛), 则有:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty F(s)\,\mathrm{d}s \tag{19.8}$$

以 $f(t) = \sin t$ 为例。则 $F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. 故

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}s \\
&= [\arctan(s)]_0^\infty = \lim_{s\to\infty} \arctan(s) - \arctan(0) \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

注: Dirichlet 积分 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 在数学分析中非常重要。笔记中提到了含参积分的方法, 例如考虑积分:

$$J(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\sin(bt) - \sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t \quad (p > 0, b > a > 0 \text{ or similar conditions})$$

这可以通过对 $\frac{\sin(xt)}{t}$ 关于 x 从 a 到 b 积分, 再与 e^{-pt} 相乘后对 t 积分得到。或者利用 $\frac{\sin(bt)-\sin(at)}{t} = \int_a^b \cos(yt)\,\mathrm{d}y$. 则

$$J(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_a^b \cos(yt)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}t$$

若 $\int_0^\infty e^{-pt} \cos(yt) dt$ 一致收敛, 积分可换序

$$= \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-pt} \cos(yt)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}y$$

已知 $\mathcal{L}\{\cos(yt)\}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cos(yt)\,\mathrm{d}t = \frac{p}{p^2+y^2}$. 所以

$$\begin{aligned}
J(p) &= \int_a^b \frac{p}{p^2+y^2}\,\mathrm{d}y = p \int_a^b \frac{1}{p^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= p\left[\frac{1}{p} \arctan\left(\frac{y}{p}\right)\right]_a^b = \arctan\left(\frac{b}{p}\right) - \arctan\left(\frac{a}{p}\right)
\end{aligned}$$

特别地，对于 $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$: 令 $p \to 0^+$ (在上述 $J(p)$ 的结果中，如果 $a=0, b=a_0>0$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a_0 x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to 0^+}\left(\arctan\left(\frac{a_0}{p}\right) - \arctan(0)\right)$$

如果 $a_0 > 0$, $\lim_{p\to 0^+}\arctan(a_0/p) = \arctan(+\infty) = \pi/2$. 如果 $a_0 < 0$, $\lim_{p\to 0^+}\arctan(a_0/p) = \arctan(-\infty) = -\pi/2$. 如果 $a_0 = 0$, 积分为 0. 所以 $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a)$, 其中 $\mathrm{sgn}(a)$ 是符号函数。

注: 根据傅里叶逆变换在 $t=0$ 处的值，或者利用 Parseval 定理，可以得到 $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$, 进而 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi/2$. 即傅立叶变换 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow \mathcal{X}_{(-1,1)}(\omega)$
利用则有 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

示例 40. 利用 z 域位移性质计算 $\mathcal{L}\{e^{at}t^m\}(z)$

解 (Solution):
已知 $\mathcal{L}\{t^m\}(z) = \frac{m!}{z^{m+1}}$ (或 $\frac{\Gamma(m+1)}{z^{m+1}}$ 对于非整数 $m > -1$)。利用 z 域位移性质 (Frequency Shifting Property): $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(z) = F(z-a)$, 其中 $F(z) = \mathcal{L}\{f(t)\}(z)$. 令 $f(t) = t^m$, 则 $F(z) = \frac{m!}{z^{m+1}}$. 故

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^m\}(z) = F(z-a) = \frac{m!}{(z-a)^{m+1}}$$

示例 41. 计算 $\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(kt)\}(z)$

解 (Solution):
已知 $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(z) = \frac{k}{z^2+k^2}$. 令 $f(t) = \sin(kt)$, 则 $F(z) = \frac{k}{z^2+k^2}$. 应用 z 域位移性质，可得

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(kt)\}(z) = F(z-(-a)) = F(z+a) = \frac{k}{(z+a)^2+k^2}$$

示例 42. 利用时域延迟性质计算 $\mathcal{L}\{f(t)\}(z)$，其中 $f(t) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}$ $(\tau > 0)$

解 (Solution):
令单位阶跃函数 $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (在 $t=0$ 处的值通常定义为 $1/2$ 或根据上下文而定，对于 Laplace 变换通常关注 $t > 0$ 的部分)。已知 $\mathcal{L}\{u(t)\}(z) = \frac{1}{z}$. 题目给出的函数 $f(t)$ 可以表示为 $u(t-\tau)$. 利用时域延迟性质 (Time Shifting

Property): $\mathcal{L}\{g(t-b)u(t-b)\}(z) = e^{-bz}G(z)$, 其中 $G(z) = \mathcal{L}\{g(t)\}(z)$ 且 $b > 0$. 在这里，令 $g(t) = u(t)$，则 $G(z) = \frac{1}{z}$。延迟 $b = \tau$. 所以

$$\mathcal{L}\{u(t-\tau)\}(z) = e^{-\tau z}\mathcal{L}\{u(t)\}(z) = e^{-\tau z}\frac{1}{z} = \frac{e^{-\tau z}}{z}$$

示例 43. *求 $f_1(t) = \cos(t-\tau)u(t-\tau)$ 和 $f_2(t) = \cos(t-\tau)$ 的 Laplace 变换 ($\tau > 0$)*

解 (Solution):
(1) 求 $\mathcal{L}\{f_1(t)\}(z)$ 其中 $f_1(t) = \cos(t-\tau)u(t-\tau)$. 令 $g(t) = \cos(t)u(t)$. 则 $\mathcal{L}\{g(t)\}(z) = G(z) = \frac{z}{z^2+1}$. $f_1(t)$ 是 $g(t)$ 延迟 τ 的结果，即 $f_1(t) = g(t-\tau)$. 根据时域延迟性质：

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\}(z) = \mathcal{L}\{g(t-\tau)\}(z) = e^{-\tau z}G(z) = e^{-\tau z}\frac{z}{z^2+1}$$

(2) 求 $\mathcal{L}\{f_2(t)\}(z)$ 其中 $f_2(t) = \cos(t-\tau)$. 注意 $f_2(t) = \cos(t-\tau)$ 对于所有 t 都定义，包括 $t < 0$ 时 $\cos(t-\tau)$ 通常不为零。如果直接应用单边 Laplace 变换的定义，且我们只关心 $t \geq 0$ 的部分，则需要看 $f_2(t)$ 在 $t < 0$ 时的值是否影响 $t \geq 0$ 的变换。然而，单边 Laplace 变换通常假设被积函数在 $t < 0$ 时为 0。如果 $f_2(t)$ 被理解为 $\cos(t-\tau)u(t)$ (即在 $t < 0$ 时截断为 0，但在 $0 < t < \tau$ 时不为 0)，则不能直接用延迟性质处理 $\cos(t)u(t)$ 的延迟。

$f_2(t) = \cos(t-\tau) = \cos t\cos\tau + \sin t\sin\tau$. 假设我们求的是 $\mathcal{L}\{\cos(t-\tau)u(t)\}(z)$：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_2(t)u(t)\}(z) &= \mathcal{L}\{(\cos t\cos\tau + \sin t\sin\tau)u(t)\}(z) \\
&= \cos\tau\mathcal{L}\{\cos t\cdot u(t)\}(z) + \sin\tau\mathcal{L}\{\sin t\cdot u(t)\}(z) \\
&= \cos\tau\frac{z}{z^2+1} + \sin\tau\frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{z\cos\tau + \sin\tau}{z^2+1}
\end{aligned}$$

注: $\mathcal{L}\{\cos(t-\tau)\}(z) = e^{-\tau z}\mathcal{L}\{\cos t\cdot u(t)\}(z) = e^{-\tau z}\frac{z}{z^2+1}$ 是错误的!!! 这是与傅立叶变换平移调制不同的地方!

示例 44 (阶梯函数的 Laplace 变换)**.** *设函数 $f(t)$ 定义为:*

$$f(t) = \begin{cases} A, & t \in [0,\tau) \\ 2A, & t \in (\tau, 2\tau] \\ 3A, & t \in (2\tau, 3\tau] \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

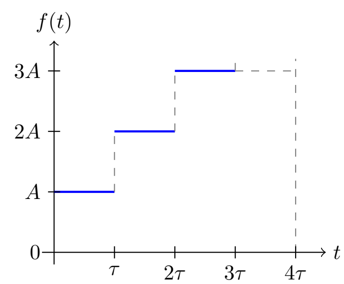


图 19.1: 阶梯函数 $f(t)$ 的图像

解 (Solution for Example 9):

$$f(t) = A\sum_{k=0}^{\infty} u(t-k\tau)$$

利用

$$\mathcal{L}\{u(t-k\tau)\}(z) = e^{-k\tau z}\frac{1}{z}$$

则

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \frac{A}{z}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau z}$$

由于 $Re(z) > 0$, 则

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \frac{A}{z(1-e^{-\tau z})}$$

示例 45. 半波正弦函数的 *Laplace* 变换 函数定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{2\pi}{T}x, & x \in (0, \frac{T}{2}) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{19.9}$$

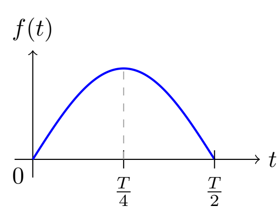


图 19.2: 单个正弦半波的图像

解 (Solution for Example 10):

$$sin\frac{2\pi}{T}t+\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)=\sin\frac{2\pi}{T}t\cdot\chi_{(0,\frac{T}{2})}$$

故 $f(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)u(t)+\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)u\left(t-\frac{T}{2}\right)$. (等价于 $f(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ for $t\in[0,T/2]$ and 0 otherwise。)

$$\mathcal{L}\left(\sin(\frac{2\pi}{T}t)\cdot u(t)\right)(s)=\mathcal{L}\left(\sin\frac{2\pi}{T}t\right)(s)=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$\text{利用延时性质知}\mathcal{L}\left(\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)(s)=e^{-\frac{T}{2}s}\cdot\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$\text{故}\mathcal{L}f(s)=\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

示例 46. f_T 为 T 周期函数。
其中 $f_Tx_{(0,\frac{T}{2})}$ 为例 *10* 中的半波正弦，$\sin\frac{2\pi}{T}tx_{(0,\frac{T}{2})}$。求 $\mathcal{L}f_T(s)$。

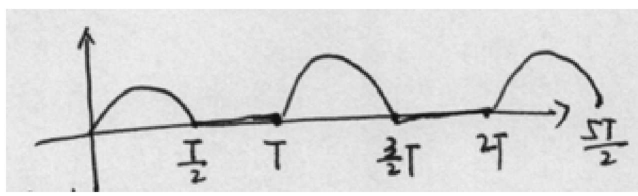


图 19.3:

解:
由上一个例题可知

$$\mathcal{L}\left(\sin\frac{2\pi}{T}t\cdot x_{(0,\frac{T}{2})}\right)(s)=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)$$

利用周期性:

$$\mathcal{L}f_T(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\cdot\mathcal{L}\left(\sin\frac{2\pi}{T}t\cdot x_{(0,\frac{T}{2})}\right)(s)$$
$$=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\cdot\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)$$

注：当 $\tilde{f}_T$ 为 $\frac{T}{2}$ 周期时，

$$\mathcal{L}\tilde{f}_T(s)=\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}\cdot\left[\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)\right]$$

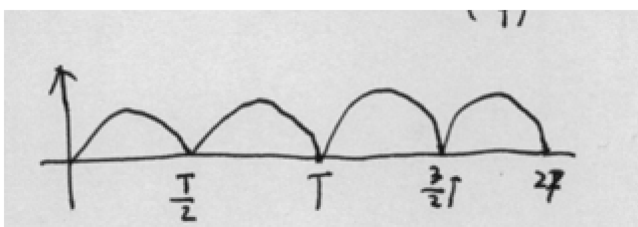


图 19.4:

Part VIII

Lecture 16 Laplace 变换的逆变换

Chapter 20

Laplace 变换的逆变换公式与计算

20.1 逆变换公式的找寻

记

$$F(z) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t, \quad z = \beta + i\omega,\ Re(z) > 0$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\chi_{(0,+\infty)}(t)\right]\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{20.1}$$

即

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\chi_{(0,+\infty)}(t)\right\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\beta + i\omega). \tag{20.2}$$

由逆公式知

$$f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\chi_{(0,+\infty)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

故

$$\begin{aligned} f(t)\chi_{(0,+\infty)}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\omega)\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{e}^{+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\omega)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{20.3}$$

令 $z = \beta + i\omega$. 则 $\mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}\omega$, 即 $\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}z}{i}$. 当 $\omega \to -\infty$, $z \to \beta - i\infty$. 当 $\omega \to +\infty$, $z \to \beta + i\infty$. 积分路径是在复平面上从 $\beta - i\infty$ 到 $\beta + i\infty$ 的一条垂直直线。代入可得 (称为 Bromwich 积分):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(z)e^{zt}\frac{\mathrm{d}z}{i} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z \quad (t > 0) \end{aligned} \tag{20.4}$$

这条积分路径通常记为 Br. β 必须大于 $F(z)$ 所有奇点的实部。

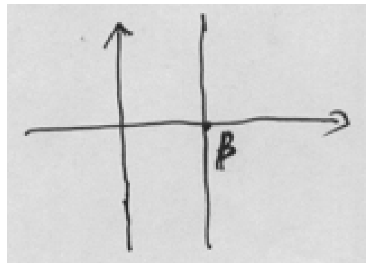


图 20.1:

20.2 利用留数定理计算逆变换

Theorem 47 (逆 Laplace 变换的留数计算法). 设 $F(z) = \mathcal{L}\{f(t)\}(z)$。如果 $F(z)$ 满足以下条件:

1. $F(z)$ 在复平面内除了有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 外处处解析。
2. 所有奇点 z_k 均位于某垂直直线 $Re(z) = \beta_0$ 的左侧 *(*即 $Re(z_k) < \beta_0$ *for all* k*)*。
3. $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$ *(*当 z 在适当的左半圆弧上, 例如 $Re(z) \leq \beta_0$ 的区域内*)*。

则对于 $t > 0$, 逆 *Laplace* 变换可以通过以下公式计算:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} Res\left[F(z)e^{zt}, z_k\right]$$

其中积分路径 $Re(z) = \beta$ 是一条位于所有奇点 z_k 右侧的垂直直线 *(*即 $\beta > \beta_0$*)*。

证明思路 (Proof Idea):

1) **构造闭合围线 (Constructing a closed contour $C = L_R + C_R$):**

   - L_R: 从 $\beta - iR$ 到 $\beta + iR$ 的直线段 (Bromwich 路径的一部分)。
   - C_R: 一个位于直线 L_R 左侧的半圆弧, 使得所有 $F(z)$ 的奇点 $z_1, \ldots, z_n$ 都被包含在由 L_R 和 C_R 组成的闭合围线 C 内部。

2) **选择足够大的 R (Choosing R large enough):** 选择 R 足够大, 使得所有奇点 $z_1, \ldots, z_n$ 都位于闭合围线 $C = L_R + C_R$ 的内部区域。根据柯西留数定理 (Cauchy's Residue Theorem):

$$\oint_C F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(z)e^{zt}, z_k\right] \tag{20.5}$$

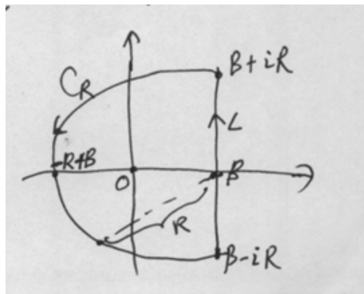


图 20.2:

即

$$\int_{\beta-iR}^{\beta+iR} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(z)e^{zt}, z_k\right] \quad (20.6)$$

3) **Jordan 引理的应用 (Application of Jordan's Lemma):**

我们需要证明当 $R\to\infty$ 时，$\int_{C_R} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z \to 0$. Jordan 引理的条件通常是:

i) $F(z)$ 在 $\mathrm{Re}(z)\le\beta$ (除去有限个奇点外) 解析。

ii) 当 z 位于 C_R 上（即 $|z-\alpha| = R'$ 或类似定义，且 $\mathrm{Re}(z)\le\beta$) 并且 $R'\to\infty$ 时，$F(z)\to 0$。

则对于 $t>0$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z = 0$$

4) **得到逆变换公式 (Obtaining the inverse transform formula):** 当 $R\to\infty$ 时，由于 $\int_{C_R} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z\to 0$ (对于 $t>0$)，我们得到:

$$\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(z)e^{zt}, z_k\right]$$

所以，对于 $t>0$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(z)e^{zt}, z_k\right] \quad (20.7)$$

求逆 $\Longrightarrow$ 转为求留数计算!

20.3 孤立奇点与留数计算基础

20.3.1 孤立奇点 (Isolated Singularities)

设 $a \in \mathbb{C}$ 是函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，指的是存在 $\delta > 0$，使得 $f(z)$ 在去心邻域 $U'(a, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \delta\}$ 内解析，但在点 a 本身无定义或不可导。

分类 (Classification):

1) **可去奇点 (Removable Singularity):** 如果 $\lim_{z \to a} f(z) = A$ 存在且为有限值 ($A \neq \infty$)。(可以通过补充定义 $f(a) = A$ 使函数在 a 点解析。)

2) **极点 (Pole):** 如果 $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. (此时 $f(z)$ 可以在 a 的邻域表示为 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $g(a) \neq 0$ 且有限, $m \in \mathbb{N}^+$ 为极点的阶。)

3) **本性奇点 (Essential Singularity):** 如果 $\lim_{z \to a} f(z)$ 不存在 (既不趋于有限值也不趋于 ∞)。(例如 $f(z) = e^{1/z}$ 在 $z = 0$ 处。)

20.3.2 Laurent 定理

Theorem 48 (Laurent 定理)**.** *设函数 $f(z)$ 在圆环域 $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ 内解析。则对于 D 内的任意一点 z，$f(z)$ 可以唯一地表示为 Laurent 级数:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-a)^{-k} \tag{20.8}$$

其中系数 c_k 由下式给出:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20.9}$$

积分围道 C 是圆环域 D 内任何一条环绕点 a 的简单闭合正向曲线 (例如 $|z - a| = \rho$, 其中 $r < \rho < R$)。级数的展开式是唯一的。

证明思路 (Proof Idea for Laurent's Theorem):

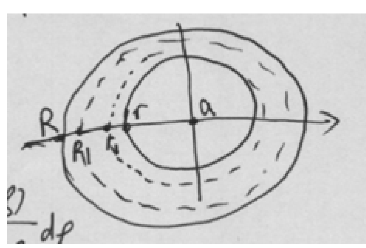


图 20.3:

1) 对于圆环域 $D: r < |z-a| < R$ 内的任意一点 z，取两个同心圆 $C_1: |\zeta-a| = R_1$ 和 $C_2: |\zeta-a| = r_1$ (逆时针为 C_1, 顺时针为 C_2 (或 C_1 和 $-C_2$ 都逆时针)), 使得 $r < r_1 < |z-a| < R_1 < R$。函数 $f(\zeta)$ 在由 C_1 和 C_2 界定的闭圆环域（除去 z 点的一个小邻域）内解析。根据柯西积分公式的推广（或柯西-古尔萨定理应用于多连通域）: 对于圆环域 $r_1 < |\zeta-a| < R_1$ 内的 z,
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta \tag{20.10}$$
(注意 C_1 和 C_2 均取逆时针方向，所以 C_2 项前有负号。)

2) **处理第一个积分 (对应级数的解析部分/正幂项):** 对于 $\zeta \in C_1$ (即 $|\zeta-a| = R_1$), 我们有 $|z-a| < R_1 = |\zeta-a|$. 所以 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$.
$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$
利用几何级数展开 $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (当 $|q| < 1$):
$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}$$
这个级数在 C_1 上一致收敛。逐项积分得到:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(\zeta)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}\right)\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right)(z-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k\end{aligned}$$
其中 $c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ for $k \geq 0$.

注: 可逐项积分是由于级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}$ 在 C_1 上关于参数 z 一致收敛. 又 $f(\zeta)$ 在 C_1 上有界, 则 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}$ 在 C_1 上一致收敛.

3) **处理第二个积分 (对应级数的主要部分/负幂项):** 对于 $\zeta \in C_2$ (即 $|\zeta-a| = r_1$), 我们有 $|\zeta-a| = r_1 < |z-a|$. 所以 $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$. 回顾:
$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

我们展开 $\frac{1}{z-\zeta}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-\zeta} &= \frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)} \\ &= \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} \\ &= \frac{1}{z-a}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^j \quad (\text{因为}\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^j}{(z-a)^{j+1}}\end{aligned}$$

这个级数在 C_2 上关于 ζ 一致收敛。逐项积分得到:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\zeta)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^j}{(z-a)^{j+1}}\right)\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\zeta)(\zeta-a)^j\,\mathrm{d}\zeta\right)(z-a)^{-(j+1)}\end{aligned}$$

令 $k'=j+1$. 当 $j=0, k'=1$; 当 $j\to\infty, k'\to\infty$. 再令 $c_{-k'}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\zeta)(\zeta-a)^{k'-1}\,\mathrm{d}\zeta$ for $k'\geq 1$. (这等价于 $c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ for $k=-k'\leq -1$) 则此部分可以写为:

$$\sum_{k'=1}^{\infty} c_{-k'}(z-a)^{-k'} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

注 (Note on uniform convergence): 可逐项积分是由于级数 $\sum\frac{1}{(\zeta-a)^{k+1}}(z-a)^k$ (对于第一个积分) 和 $\sum\frac{(\zeta-a)^j}{(z-a)^{j+1}}$ (对于第二个积分) 在各自的积分路径 C_1 和 C_2 上关于 ζ 一致收敛 (因为 z 是固定的, 且满足收敛半径条件), 并且 $f(\zeta)$ 有界。

4) **综合步骤 1, 2, 3 (Combining steps 1, 2, and 3):**

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}(z-a)^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k \tag{20.11}$$

其中系数 c_k (如前所述, 由于被积函数在圆环内解析) 可以用统一的积分路径 C $(r<|\zeta-a|=\rho<R)$ 表示:

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\quad \forall\rho\in(r,R),\ \text{与}z\ \text{无关}. \tag{20.12}$$

注: 展开式是唯一的。

5) **推论 (Corollary): Taylor 级数 (Taylor Series)**
如果 $f(z)$ 在圆盘 $|z-a|<R$ 内解析，则 Laurent 级数中所有负幂项的系数 c_k (对于 $k<0$) 均为零。即 $c_{-1}, c_{-2}, \dots$ 都等于零。

这是因为当 $k<0$ (例如 $k=-m$，$m\geq 1$), $c_k = c_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{m-1}\,\mathrm{d}\zeta$. 由于 $f(\zeta)(\zeta-a)^{m-1}$ 在 C 内部及边界上解析 (因为 f 在 $|z-a|<R$ 内解析，且 $m\geq 1$)，根据柯西-古尔萨定理，这个积分为零。此时，Laurent 级数退化为 Taylor 级数：

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

其中 $c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ (根据柯西高阶导数公式)

20.3.3 Laurent 级数与奇点分类

设 $a\in\mathbb{C}$ 是函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点。这意味着 $\exists\delta>0$，使得 $f(z)$ 在去心邻域 $U'(a,\delta)=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-a|<\delta\}$ 内解析。在此去心邻域内，$f(z)$ 有 Laurent 级数展开：

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

$C: |\zeta-a|=\rho$, $0<\rho<\delta$. 级数可以分为两部分：

- **解析部分 (Analytic Part) 或 Taylor 部分或正则部分:** $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$
- **主要部分 (Principal Part):** $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k = \sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z-a)^{-j}$

Theorem 49 (奇点与 Laurent 级数的关系)**.** *设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点。*

*1) a 是 $f(z)$ 的***可去奇点** $\iff$ *$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ for $0<|z-a|<\delta$. 即 $f(z)$ 在 a 点的 Laurent 级数的主要部分为零 (即 $c_k=0$ for all $k<0$)。*

Proof. 如果 a 是可去奇点，则 $\lim_{z\to a} f(z) = A$ (有限)。这意味着 $f(z)$ 在 a 的某个去心邻域 $U'(a,\delta_1)$ 内有界，即 $|f(z)|\leq M$ for $z\in U'(a,\delta_1)$.

对于 Laurent 级数的系数 c_{-k} ($k\geq 1$):

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)(\zeta-a)^{k-1}\,\mathrm{d}\zeta \quad (0<\rho<\delta_1)$$

$$|c_{-k}| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-k+1}}\, d\zeta\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{2\pi}\int_{|\zeta-a|=\rho}|\zeta-a|^{k-1}\,d\zeta \\
&= \frac{M}{2\pi}\rho^{k-1}\int_{|\zeta-a|=\rho}|\,d\zeta| \\
&= \frac{M}{2\pi}\rho^{k-1}\cdot 2\pi\rho = M\rho^{k}
\end{aligned}$$

由于上式对任意 $0<\rho<\delta_1$ 成立，令 $\rho\to 0^+$. 因为 $k\geq 1$, $\rho^k\to 0$. 所以 $c_{-k}=0$ for all $k\geq 1$. 因此，主要部分为零.

故 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$. 此时 $c_0=\lim_{z\to a}f(z)=A$. □

2) *a 是 $f(z)$ 的 m* **阶极点** *($m\in\mathbb{N}^+$) $\iff$ $f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}c_k(z-a)^k$. 即 $f(z)$ 在 a 点的 Laurent 级数的主要部分中，最低次幂为 $(z-a)^{-m}$ 且系数 $c_{-m}\neq 0$ (即 $c_k=0$ for $k<-m$, and $c_{-m}\neq 0$)。*

Proof. 如果 a 是 $f(z)$ 的极点，则 a 不可能是 $f(z)$ 的零点的聚点。

则 a 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点，且 $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$。

$\Rightarrow \lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=0$，即 $\frac{1}{f(z)}=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{b_k}{(z-a)^k}$。

设 $\phi(z)$ 在 $z=a$ 处解析，$\phi(a)=C_m\neq 0$。

故 $z=a$ 时，$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\phi(z)}$。

$\phi(z)^{-1}$ 在 $z=a$ 处解析 $\Rightarrow \frac{1}{\phi(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-a)^k$, 其中 $b_0=\frac{1}{\phi(a)}=\frac{1}{C_m}$。

则 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\phi(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-a)^k$。

即

$$f(z)=\frac{b_0}{(z-a)^m}+\frac{b_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+b_m+\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+m}(z-a)^k.$$

由 Laurent 级数展开式的唯一性知，f 的主要部分只有有限项。

反之，若 f 的主要部分只有有限项，则

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}\quad(m\geq 1),\quad \psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-a)^k,$$

其中 $b_0=\psi(a)\neq 0$。

则 $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$，即 a 为极点。 □

3) *a 是 $f(z)$ 的***本性奇点***$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k$*

, 即 $\iff$ $f(z)$ 在 a 点的 Laurent 级数的主要部分有无穷多项非零系数。

Proof. 如果 a 是本性奇点，则其 Laurent 级数中主要部分有无穷多项非零系数。这可以由排除法得到：它既不是可去奇点（主要部分不为零），也不是极点（主要部分不是有限项）。(根据 Picard 大定理，函数在本性奇点的任意小邻域内取到除至多一个值外的所有复数值。) □

20.3.4 留数的定义与计算

Definition 6 (留数 (Residue))**.** 设函数 $f(z)$ 在点 a 的去心邻域 $U'(a,\delta)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<\delta\}$ 内解析。称积分值

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

为函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的**留数** *(Residue)*，其中 ρ 是任何满足 $0<\rho<\delta$ 的实数。记作 $Res[f(z),a]$ 或 $Res_{z=a}f(z)$.

注:

- 由柯西积分定理 (Cauchy's Integral Theorem)，留数 $\mathrm{Res}_{z=a}f(z)$ 的值与积分半径 ρ 的选取无关 (只要 $0<\rho<\delta$，且路径不跨过其他奇点)。
- 如果 $f(z)$ 在点 a 处解析 (即 a 不是奇点，或者是可去奇点且已补充定义)，则根据柯西-古尔萨定理 (Cauchy-Goursat Theorem)，$\oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=0$，因此 $\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=0$.

Theorem 50 (留数与 Laurent 级数系数的关系)**.** 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点。则 $f(z)$ 在点 a 的留数等于其在该点 *Laurent* 级数展开式中 $(z-a)^{-1}$ 项的系数 c_{-1}。即

$$Res_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{20.13}$$

(其中 $C:|\zeta-a|=\rho,\ 0<\rho<\delta$)

Proof. $f(z)$ 在 a 的去心邻域内的 Laurent 级数展开为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k.$$

系数

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

当 $k=-1$ 时，这正是 $\mathrm{Res}_{z=a}f(z)$ 的定义

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-1+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

从 f 的 Laurent 级数也可计算得知:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=a}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k\,dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} c_{-1}\cdot\frac{1}{z-a}\,dz \\
&= c_{-1}.
\end{aligned}$$

第一个积分利用解析性（$(z-a)^k$ 解析)。
第二个积分利用 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{1}{(z-a)^k}\,dz = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(1)=0.$
第三个积分利用 $\int_{|z-a|=\rho}\frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i.$ □

孤立奇点的留数计算:

(i) **如果 a 是可去奇点:** 由 Laurent 级数特征, $c_{-1}=0$. 所以 $\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=0$.

(ii) **如果 a 是 m 阶极点 ($m\geq 1$):** $f(z)$ 的 Laurent 级数为

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots,$$

其中 $c_{-m}\neq 0$。
我们要求的是 c_{-1}。
考虑函数 $\phi(z)=(z-a)^m f(z)$。则 $\phi(z)$ 在 a 点解析，其 Taylor 展开为:

$$\phi(z)=(z-a)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+c_0(z-a)^m+\ldots$$

c_{-1} 是 $\phi(z)$ 在 a 点 Taylor 展开式中 $(z-a)^{m-1}$ 项的系数。
根据 Taylor 级数系数公式,

$$c_{-1}=\frac{\phi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

因此,

$$\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right].$$

特别地，当 $m=1$ (单极点) 时:

$$\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]$$

应用 (Application): 如果 $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, 其中 $g(a)\neq 0$, $h(a)=0$ 且 $h'(a)\neq 0$ (即 a 是 $h(z)$ 的一阶零点，从而 a 是 $f(z)$ 的一阶极点)。则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=a}f(z) &= \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} \\
&= \lim_{z\to a}g(z)\cdot\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)-h(a)} \quad (\text{因为}h(a)=0) \\
&= g(a)\cdot\frac{1}{h'(a)}=\frac{g(a)}{h'(a)}
\end{aligned}$$

(iii) **如果 a 是本性奇点:** 留数计算通常依赖于直接求出 Laurent 级数并找出 c_{-1} 项。一般没有简单的公式。

20.4 留数定理

Theorem 51 (留数定理 (Residue Theorem))**.** 设区域 Ω 是由有限条简单闭合曲线 $\partial\Omega$ 所围成的 (可能为多连通区域)。设函数 $f(z)$ 在 Ω 上除去有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\ldots,z_m\in\Omega$ 外处处解析，并且 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续。则

$$\oint_{\partial\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{j=1}^{m}Res[f(z),z_j]$$

其中积分沿 $\partial\Omega$ 的正向 (使得区域 Ω 始终在路径的左侧)。

证明 (Proof): (由柯西多连通域积分定理直接推论)
对每一个奇点 $z_j\in\Omega$, 构造一个小圆周 $C_j:|\zeta-z_j|=\delta_j$, 其中 $\delta_j>0$ 足够小，使得:

1. 每个闭圆盘 $\overline{U}(z_j,\delta_j)=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-z_j|\leq\delta_j\}$ 都包含在 Ω 内部，即 $\overline{U}(z_j,\delta_j)\subset\Omega$.
2. 这些小圆盘互不相交，即 $\overline{U}(z_j,\delta_j)\cap\overline{U}(z_k,\delta_k)=\emptyset$ 对于 $j\neq k$.

考虑区域 $\Omega'=\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{m}U(z_j,\delta_j)$ (即从 Ω 中挖去所有包含奇点的小开圆盘)。函数 $f(z)$ 在区域 Ω' 及其边界 $\partial\Omega'=\partial\Omega\cup(\bigcup_{j=1}^{m}(-C_j))$ 上解析 (这里 $-C_j$ 表示沿 C_j 的反方向积分，即顺时针)。根据柯西-古尔萨定理对于多连通区域 (或柯西积分定理的推广)，$f(z)$ 在 Ω' 的正向边界上的积分为零:

$$\oint_{\partial\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z+\sum_{j=1}^{m}\oint_{-C_j}f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

即

$$\oint_{\partial\Omega}f(z)\,\mathrm{d}z-\sum_{j=1}^{m}\oint_{C_j}f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

(因为 $\oint_{-C_j} = -\oint_{C_j}$, 且 C_j 都是逆时针正向。) 移项可得:

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \oint_{C_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

根据留数的定义，$\oint_{C_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_j]$. 所以，

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_j] = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z), z_j]$$

证毕。

附:一般的柯西定理 (Appendix: General Cauchy's Theorem / Cauchy-Goursat Theorem for Multiply Connected Domains)

Theorem 52 (柯西-古尔萨定理 (多连通域)). 若区域 Ω 是由有限条简单封闭曲线 $\partial\Omega$ 所围成的区域, $f(z)$ 在 Ω 上解析且在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 则积分 $\oint_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$。

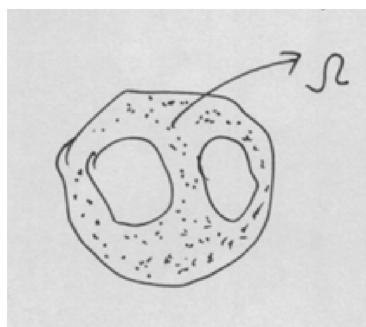


图 20.4:

20.5 示例：用留数求 Laplace 变换的逆变换

(根据留数定理, 若 $F(z)$ 满足一定条件, 则 $f(t) = \sum_k \mathrm{Res}[F(z)e^{zt}, z_k]$ for $t > 0$)

示例 53. 求 $F(z) = \frac{z}{z^2+1}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{ze^{zt}}{z^2+1}$. 奇点由 $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$. 这两个奇点都是 $H(z)$ (也是 $F(z)$) 的一阶极点。

(i) 计算在 $z = i$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\text{Res}[H(z), i] &= \lim_{z \to i} (z - i) \frac{ze^{zt}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \lim_{z \to i} \frac{ze^{zt}}{z + i} \\ &= \frac{ie^{it}}{i + i} = \frac{ie^{it}}{2i} = \frac{1}{2}e^{it}\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z = -i$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\text{Res}[H(z), -i] &= \lim_{z \to -i} (z - (-i)) \frac{ze^{zt}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \lim_{z \to -i} (z + i) \frac{ze^{zt}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \lim_{z \to -i} \frac{ze^{zt}}{z - i} \\ &= \frac{-ie^{-it}}{-i - i} = \frac{-ie^{-it}}{-2i} = \frac{1}{2}e^{-it}\end{aligned}$$

故，对于 $t > 0$:

$$\begin{aligned}f(t) &= \text{Res}[H(z), i] + \text{Res}[H(z), -i] \\ &= \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \\ &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos(t)\end{aligned}$$

所以 $f(t) = \cos(t)u(t)$.

示例 54. 求 $F(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{e^{zt}}{z(z-1)^2}$. 奇点为 $z = 0$ (一阶极点) 和 $z = 1$ (二阶极点)。

(i) 计算在 $z = 0$ 处的留数 (一阶极点):

$$\begin{aligned}\text{Res}[H(z), 0] &= \lim_{z \to 0} (z - 0) \frac{e^{zt}}{z(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{e^{zt}}{(z - 1)^2} \\ &= \frac{e^0}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z=1$ 处的留数 (二阶极点, $m=2$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[H(z),1] &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}z^{2-1}}\left[(z-1)^2\frac{e^{zt}}{z(z-1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{zt}}{z}\right] \\
&= \lim_{z\to1}\frac{z(te^{zt})-e^{zt}(1)}{z^2} \\
&= \frac{1(te^t)-e^t(1)}{1^2} = te^t - e^t
\end{aligned}$$

故，对于 $t>0$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathrm{Res}[H(z),0] + \mathrm{Res}[H(z),1] \\
&= 1 + (te^t - e^t) = 1 + te^t - e^t
\end{aligned}$$

所以 $f(t) = (1+te^t-e^t)u(t)$.

示例 55. 求 $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)(z+3)}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)(z+3)}$. 奇点为 $z=-1, z=2, z=-3$，均为一阶极点。

(i) 计算在 $z=-1$ 处的留数:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[H(z),-1] &= \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)(z+3)} \\
&= \lim_{z\to-1}\frac{e^{zt}}{(z-2)(z+3)} \\
&= \frac{e^{-t}}{(-1-2)(-1+3)} = \frac{e^{-t}}{(-3)(2)} = -\frac{1}{6}e^{-t}
\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z=2$ 处的留数:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[H(z),2] &= \lim_{z\to2}(z-2)\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)(z+3)} \\
&= \lim_{z\to2}\frac{e^{zt}}{(z+1)(z+3)} \\
&= \frac{e^{2t}}{(2+1)(2+3)} = \frac{e^{2t}}{(3)(5)} = \frac{1}{15}e^{2t}
\end{aligned}$$

(iii) 计算在 $z=-3$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z),-3] &= \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)(z+3)} \\ &= \lim_{z\to -3}\frac{e^{zt}}{(z+1)(z-2)} \\ &= \frac{e^{-3t}}{(-3+1)(-3-2)} = \frac{e^{-3t}}{(-2)(-5)} = \frac{1}{10}e^{-3t}\end{aligned}$$

故，对于 $t>0$:

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathrm{Res}[H(z),-1] + \mathrm{Res}[H(z),2] + \mathrm{Res}[H(z),-3] \\ &= -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{2t} + \frac{1}{10}e^{-3t}\end{aligned}$$

所以 $f(t) = \left(-\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{2t} + \frac{1}{10}e^{-3t}\right)u(t)$.

示例 56. 求 $F(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{e^{zt}}{z^2(z+1)}$. 奇点为 $z=0$ (二阶极点) 和 $z=-1$ (一阶极点)。
(i) 计算在 $z=0$ 处的留数 (二阶极点, $m=2$):

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z),0] &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}z^{2-1}}\left[z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z+1)}\right] \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{zt}}{z+1}\right] \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)(te^{zt}) - e^{zt}(1)}{(z+1)^2} \\ &= \frac{(0+1)(te^0) - e^0(1)}{(0+1)^2} = \frac{t-1}{1} = t-1\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z=-1$ 处的留数 (一阶极点):

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z),-1] &= \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{e^{zt}}{z^2(z+1)} \\ &= \lim_{z\to -1}\frac{e^{zt}}{z^2} \\ &= \frac{e^{-t}}{(-1)^2} = e^{-t}\end{aligned}$$

故，对于 $t>0$:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \operatorname{Res}[H(z),0]+\operatorname{Res}[H(z),-1] \\
&= (t-1)+e^{-t}
\end{aligned}
$$

所以 $f(t)=(t-1+e^{-t})u(t)$.

示例 57. 求 $F(z)=\ln\frac{z+1}{z-1}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution):
设 $F(z)=\ln(z+1)-\ln(z-1)$。

在 $z=-1$ 和 $z=1$ 处，是复杂的无穷多值分枝奇点，不宜直接用留数定理。我们考虑利用 Laplace 变换的性质。

已知：

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(z)=-\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}.$$

令 $G(z)=F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln\frac{z+1}{z-1}\right)$。

则：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln(z+1)-\ln(z-1)\right) \\
&= \frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1} \\
&= \frac{(z-1)-(z+1)}{(z+1)(z-1)} \\
&= \frac{-2}{z^2-1}.
\end{aligned}
$$

因此：

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(z)=-G(z)=\frac{2}{z^2-1}.$$

我们需要求：

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(z)\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{z^2-1}\right\}(t).$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{2}{z^2-1}e^{zt}\right)(t) &= \operatorname{Res}\left(-\frac{2}{z^2-1}e^{zt},z=1\right)+\operatorname{Res}\left(-\frac{2}{z^2-1}e^{zt},z=-1\right) \\
&= \lim_{z\to 1}\left(-\frac{2}{(z+1)(z-1)}e^{zt}\right)+\lim_{z\to -1}\left(-\frac{2}{(z+1)(z-1)}e^{zt}\right) \\
&= -e^{t}+e^{-t}
\end{aligned}
$$

由于：

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(z)=-G(z),$$

则：

$$tf(t) = -g(t) = -(e^{-t} - e^{t}) = e^{t} - e^{-t}.$$

所以，对于 $t \geq 0$：

$$f(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{t} = \frac{2\sinh t}{t}.$$

因此：

$$f(t) = \frac{2\sinh t}{t} \cdot u(t).$$

示例 58. 求 $F(z) = \frac{z}{(z^2-1)^2}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{ze^{zt}}{(z^2-1)^2} = \frac{ze^{zt}}{((z-1)(z+1))^2} = \frac{ze^{zt}}{(z-1)^2(z+1)^2}$. 奇点为 $z = 1$ (二阶极点) 和 $z = -1$ (二阶极点)。

(i) 计算在 $z = 1$ 处的留数 (二阶极点, $m = 2$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[H(z), 1] &= \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2 \frac{ze^{zt}}{(z-1)^2(z+1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{ze^{zt}}{(z+1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{[(1)e^{zt} + z(te^{zt})](z+1)^2 - ze^{zt}[2(z+1)(1)]}{(z+1)^4} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{[(1+zt)e^{zt}](z+1) - 2ze^{zt}}{(z+1)^3} \\
&= \frac{[(1+t)e^{t}](1+1) - 2(1)e^{t}}{(1+1)^3} = \frac{2(1+t)e^{t} - 2e^{t}}{8} \\
&= \frac{2e^{t} + 2te^{t} - 2e^{t}}{8} = \frac{2te^{t}}{8} = \frac{1}{4}te^{t}
\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z=-1$ 处的留数 (二阶极点, $m=2$):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}[H(z),-1] &= \lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z+1)^2\frac{ze^{zt}}{(z-1)^2(z+1)^2}\right]\\
&= \lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{ze^{zt}}{(z-1)^2}\right]\\
&= \lim_{z\to-1}\frac{[(1)e^{zt}+z(te^{zt})](z-1)^2-ze^{zt}[2(z-1)(1)]}{(z-1)^4}\\
&= \lim_{z\to-1}\frac{[(1+zt)e^{zt}](z-1)-2ze^{zt}}{(z-1)^3}\\
&= \frac{[(1-t)e^{-t}](-1-1)-2(-1)e^{-t}}{(-1-1)^3} = \frac{-2(1-t)e^{-t}+2e^{-t}}{-8}\\
&= \frac{-2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}}{-8} = \frac{2te^{-t}}{-8} = -\frac{1}{4}te^{-t}
\end{aligned}$$

故，对于 $t>0$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \operatorname{Res}[H(z),1]+\operatorname{Res}[H(z),-1]\\
&= \frac{1}{4}te^{t}-\frac{1}{4}te^{-t}\\
&= \frac{t}{4}(e^t-e^{-t}) = \frac{t}{4}(2\sinh t) = \frac{1}{2}t\sinh t
\end{aligned}$$

所以 $f(t)=\frac{1}{2}t\sinh t\cdot u(t)$.

另解:

$\int_z^{\infty}\frac{s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s$. 令 $u=s^2-1$, $\mathrm{d}u=2s\,\mathrm{d}s$.

$$\int_z^{\infty}\frac{s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s = \int_{z^2-1}^{\infty}\frac{1}{u^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_{z^2-1}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{1}{z^2-1}\right)\right) = \frac{1}{2(z^2-1)}$$

已知:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(z) = \int_z^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s.$$

若 $F(z)=\frac{z}{(z^2-1)^2}$，我们可以通过积分找到其对应的拉普拉斯逆变换:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_z^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s\right\}(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z^2-1)}\right)(t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z+1)}e^{zt}, z=1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}e^{zt}, z=-1\right)\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z+1)}e^{zt}+\lim_{z\to -1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}e^{zt}\\
&= \frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}\\
&= \frac{1}{2}\sinh t,\quad t>0.
\end{aligned}
$$

注：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2-1} &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\sinh t\cdot e^{-zt}\,\mathrm{d}t\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-2}{(z^2-1)^2}\right) &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{2}\sinh t\cdot e^{-zt}\right)\mathrm{d}t\\
\mathcal{L}\left(\frac{t}{2}\sinh t\right)(z) &= \frac{2}{(z^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

示例 59. 求 $F(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ 的逆变换 $f(t)$ *(*$a>0$*)*

解 (Solution using residues):
令 $H(z)=F(z)e^{zt}=\frac{z^2e^{zt}}{(z^2+a^2)^2}=\frac{z^2e^{zt}}{(z-ia)^2(z+ia)^2}$. 奇点为 $z=ia$ (二阶极点) 和 $z=-ia$ (二阶极点)。

(i) 计算在 $z = ia$ 处的留数 (二阶极点, $m = 2$):

$$R_1 = \mathrm{Res}[H(z), ia] = \lim_{z\to ia} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-ia)^2 \frac{z^2 e^{zt}}{(z-ia)^2(z+ia)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to ia} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2 e^{zt}}{(z+ia)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to ia} \frac{(2ze^{zt} + z^2te^{zt})(z+ia)^2 - z^2e^{zt}[2(z+ia)]}{(z+ia)^4}$$

$$= \lim_{z\to ia} \frac{(2z + z^2t)e^{zt}(z+ia) - 2z^2e^{zt}}{(z+ia)^3}$$

$$= \frac{(2ia + (ia)^2t)e^{iat}(ia+ia) - 2(ia)^2e^{iat}}{(ia+ia)^3}$$

$$= \frac{(2ia - a^2t)e^{iat}(2ia) - 2(-a^2)e^{iat}}{(2ia)^3}$$

$$= \frac{(-4a^2 - 2ia^3t)e^{iat} + 2a^2e^{iat}}{-8ia^3}$$

$$= \frac{(-2a^2 - 2ia^3t)e^{iat}}{-8ia^3} = \frac{-2a^2(1+iat)e^{iat}}{-8ia^3}$$

$$= \frac{(1+iat)e^{iat}}{4ia} = \frac{1}{4ia}e^{iat} + \frac{t}{4}e^{iat}$$

(ii) 计算在 $z = -ia$ 处的留数 (二阶极点, $m = 2$): $R_2 = \overline{R_1} = \frac{i}{4a}e^{-iat} + \frac{t}{4}e^{-iat}$. (直接计算过程如下):

$$R_2 = \lim_{z\to -ia} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2e^{zt}}{(z-ia)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -ia} \frac{(2z + z^2t)e^{zt}(z-ia) - 2z^2e^{zt}}{(z-ia)^3}$$

$$= \frac{(-2ia - a^2t)e^{-iat}(-2ia) - 2(-a^2)e^{-iat}}{(-2ia)^3}$$

$$= \frac{(4i^2a^2 + 2ia^3t)e^{-iat} + 2a^2e^{-iat}}{-8i^3a^3}$$

$$= \frac{(-2a^2 + 2ia^3t)e^{-iat}}{8ia^3} = \frac{2a^2(-1+iat)e^{-iat}}{8ia^3}$$

$$= \frac{(-1+iat)e^{-iat}}{4ia} = \frac{i}{4a}e^{-iat} + \frac{t}{4}e^{-iat}$$

故，对于 $t > 0$:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= R_1 + R_2 \\
&= \left(\frac{1}{4ia}e^{iat} + \frac{t}{4}e^{iat}\right) + \left(\frac{i}{4a}e^{-iat} + \frac{t}{4}e^{-iat}\right) \\
&= \frac{1}{4ia}(e^{iat} - e^{-iat}) + \frac{t}{4}(e^{iat} + e^{-iat}) \\
&= \frac{1}{4ia}(2i\sin(at)) + \frac{t}{4}(2\cos(at)) \\
&= \frac{1}{2a}\sin(at) + \frac{t}{2}\cos(at)
\end{aligned}
$$

所以 $f(t) = \frac{1}{2a}(\sin(at) + at\cos(at))u(t)$.

另解 (卷积法):
$F(z) = \frac{z}{z^2+a^2} \cdot \frac{z}{z^2+a^2}$. 令 $G(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$, $g(t) = \cos(at)u(t)$. $f(t) = (g * g)(t) = (\cos(at) * \cos(at))(t)$.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \cos(a\tau)\cos(a(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(2a\tau - at) + \cos(at)]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2a}\sin(2a\tau - at) + \tau\cos(at)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2a}\sin(at) + t\cos(at)\right) - \left(\frac{1}{2a}\sin(-at) + 0\cdot\cos(at)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sin(at) + t\cos(at)\right] \\
&= \frac{1}{2a}\sin(at) + \frac{t}{2}\cos(at)
\end{aligned}
$$

这与留数法结果一致。

示例 60. 求 $F(z) = \frac{e^{-\pi z}}{z(z+a)}$ 的逆变换 $f(t)$ *($\pi > 0$ constant, $a \neq 0$)*

解 (Solution):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{e^{-\pi z}e^{zt}}{z(z+a)} = \frac{e^{(t-\pi)z}}{z(z+a)}$. 奇点为 $z = 0$ (一阶极点) 和 $z = -a$ (一阶极点)。

(i) 计算在 $z=0$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z),0] &= \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^{(t-\pi)z}}{z(z+a)} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{e^{(t-\pi)z}}{z+a} = \frac{e^0}{0+a} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z=-a$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z),-a] &= \lim_{z\to -a}(z+a)\frac{e^{(t-\pi)z}}{z(z+a)} \\ &= \lim_{z\to -a}\frac{e^{(t-\pi)z}}{z} = \frac{e^{(t-\pi)(-a)}}{-a} = -\frac{1}{a}e^{-a(t-\pi)}\end{aligned}$$

故，对于 $t>0$:

$$f(t) = \mathrm{Res}[H(z),0] + \mathrm{Res}[H(z),-a] = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-a(t-\pi)}$$

考虑到 $e^{-\pi z}$ 因子表示时域延迟 π，所以逆变换的结果只在 $t>\pi$ 时有效。更准确地说，如果 $G(z)=\frac{1}{z(z+a)}$，则 $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(z)\}(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$. $F(z)=e^{-\pi z}G(z)$, 所以 $f(t)=g(t-\pi)u(t-\pi)$.

$$f(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-a(t-\pi)})u(t-\pi)$$

当 $t>\pi$, $f(t)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-a(t-\pi)}$. 这与留数法结果一致。(您的笔记中 $t>0$ 应该是指留数定理本身的应用条件，而实际 $f(t)$ 的非零区间取决于 $u(t-\pi)$。)

示例 61. 求 $F(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$ 的逆变换 $f(t)$

解 (Solution using residues):
令 $H(z)=F(z)e^{zt}=\frac{e^{zt}}{z(z^2+1)}$. 奇点为 $z=0$ (一阶极点) 和 $z=\pm i$ (均为一阶极点)。

(i) 计算在 $z=0$ 处的留数:

$$\mathrm{Res}[H(z),0] = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{zt}}{z^2+1} = \frac{e^0}{0+1} = 1$$

(ii) 计算在 $z=i$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z),i] &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{zt}}{z(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{e^{zt}}{z(z+i)} \\ &= \frac{e^{it}}{i(i+i)} = \frac{e^{it}}{i(2i)} = \frac{e^{it}}{-2} = -\frac{1}{2}e^{it}\end{aligned}$$

(iii) 计算在 $z=-i$ 处的留数:

$$\operatorname{Res}[H(z),-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{zt}}{z(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{e^{zt}}{z(z-i)}$$
$$=\frac{e^{-it}}{(-i)(-i-i)}=\frac{e^{-it}}{(-i)(-2i)}=\frac{e^{-it}}{-2}=-\frac{1}{2}e^{-it}$$

故，对于 $t>0$:

$$f(t)=\operatorname{Res}[H(z),0]+\operatorname{Res}[H(z),i]+\operatorname{Res}[H(z),-i]$$
$$=1-\frac{1}{2}e^{it}-\frac{1}{2}e^{-it}=1-\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$$
$$=1-\cos(t)$$

所以 $f(t)=(1-\cos t)u(t)$.

解 (有理分式分解):

$$F(z)=\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+1}-\frac{z}{(z^2+1)^2}$$

分别求各项的逆变换:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}(t)=u(t)$ (或 1 for $t>0$).
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+1}\right\}(t)=\cos(t)u(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)^2}\right\}(t)=\frac{t}{2}\sin(t)u(t)$.

故，对于 $t>0$:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}(t)-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+1}\right\}(t)-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)^2}\right\}(t)$$
$$=1-\cos(t)-\frac{t}{2}\sin(t)$$

所以 $f(t)=\left(1-\cos t-\frac{t}{2}\sin t\right)u(t)$.

示例 62 (求 $F(z)=\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$ 的逆变换 $f(t)$ $(a>0)$)**.**

解 (有理分式分解):

$$F(z)=\frac{z^2+a^2-2a^2}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{z^2+a^2}-\frac{2a^2}{(z^2+a^2)^2}.$$

对 $F(z)$ 有理分式分解，或者观察其结构。我们需要求这两项的逆变换。

1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{G_1(z)\right\}(t) &= \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z^2+a^2}, ia\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z^2+a^2}, -ia\right] \\
&= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{e^{zt}}{(z-ia)(z+ia)} + \lim_{z\to -ia}(z+ia)\frac{e^{zt}}{(z-ia)(z+ia)} \\
&= \lim_{z\to ia}\frac{e^{zt}}{z+ia} + \lim_{z\to -ia}\frac{e^{zt}}{z-ia} \\
&= \frac{e^{iat}}{ia+ia} + \frac{e^{-iat}}{-ia-ia} \\
&= \frac{e^{iat}}{2ia} + \frac{e^{-iat}}{-2ia} \\
&= \frac{1}{2ia}(e^{iat}-e^{-iat}) \\
&= \frac{1}{2ia}(2i\sin(at)) = \frac{1}{a}\sin(at) \quad (\text{for } t>0)
\end{aligned}$$

2. 对于 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right\}(t)$: 在奇点 $z=\pm ia$ 均为二阶极点。

   (a) 计算 $\operatorname{Res}[H_2(z), ia]$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=ia}[H_2(z)] &= \lim_{z\to ia}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-ia)^2\frac{e^{zt}}{(z-ia)^2(z+ia)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to ia}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{zt}}{(z+ia)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to ia}\frac{(te^{zt})(z+ia)^2 - e^{zt}\cdot 2(z+ia)(1)}{(z+ia)^4} \quad (\text{使用商的导数法则}) \\
&= \lim_{z\to ia}\frac{te^{zt}(z+ia)-2e^{zt}}{(z+ia)^3} \quad (\text{约去公因子} z+ia) \\
&= \frac{te^{iat}(ia+ia)-2e^{iat}}{(ia+ia)^3} = \frac{te^{iat}(2ia)-2e^{iat}}{(2ia)^3} \\
&= \frac{2iate^{iat}-2e^{iat}}{8i^3a^3} = \frac{2e^{iat}(iat-1)}{-8ia^3} \quad (\text{因为} i^3=-i) \\
&= \frac{iat-1}{-4ia^3}e^{iat} = \frac{1-iat}{4ia^3}e^{iat} \quad (\text{分子分母同乘}-1)
\end{aligned}$$

   (b) 计算 $\operatorname{Res}[H_2(z), -ia]$: 由于 $H_2(z)$ (对于实数 t, a) 的系数是实的,

$$\text{Res}_{z=-ia}[H_2(z)] = \overline{\text{Res}_{z=ia}[H_2(z)]}.$$

$$\text{Res}_{z=-ia}[H_2(z)] = \overline{\left(\frac{1-iat}{4ia^3}e^{iat}\right)} = \frac{1-(-ia)t}{-4ia^3}e^{-iat} \quad (\text{因为}\overline{ia}=-ia, \overline{i}=-i, \overline{e^{iat}}=e^{-iat})$$

$$= \frac{1+iat}{-4ia^3}e^{-iat}$$

(c) 留数之和:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{G_2(z)\right\}(t) &= \text{Res}_{z=ia}[H_2(z)] + \text{Res}_{z=-ia}[H_2(z)] \\
&= \frac{1-iat}{4ia^3}e^{iat} + \frac{1+iat}{-4ia^3}e^{-iat} \\
&= \frac{1}{4ia^3}\left[(1-iat)e^{iat} - (1+iat)e^{-iat}\right] \\
&= \frac{1}{4ia^3}\left[(e^{iat}-e^{-iat}) - iat(e^{iat}+e^{-iat})\right] \\
&= \frac{1}{4ia^3}\left[2i\sin(at) - iat(2\cos(at))\right] \\
&= \frac{2i}{4ia^3}(\sin(at) - at\cos(at)) \\
&= \frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at\cos(at)) \quad (\text{for } t>0)
\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right\}(t) = \frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at\cos(at))u(t)$.

因此,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2+a^2}\right\}(t) - 2a^2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{a}\sin(at) - 2a^2\left(\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at\cos(at))\right) \\
&= \frac{1}{a}\sin(at) - \frac{1}{a}(\sin(at) - at\cos(at)) \\
&= \frac{1}{a}\sin(at) - \frac{1}{a}\sin(at) + t\cos(at) \\
&= t\cos(at)
\end{aligned}$$

所以 $f(t) = t\cos(at)u(t)$ (for $t>0$).

示例 63. 求 $F(z) = \frac{z}{(z-4)(z-2)^2}$ 的逆变换 $f(t)$

解法一 (留数法):
令 $H(z) = F(z)e^{zt} = \frac{ze^{zt}}{(z-4)(z-2)^2}$. 奇点为 $z = 4$ (一阶极点) 和 $z = 2$ (二阶极点)。

(i) 计算在 $z = 4$ 处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z), 4] &= \lim_{z\to 4}(z-4)\frac{ze^{zt}}{(z-4)(z-2)^2} = \lim_{z\to 4}\frac{ze^{zt}}{(z-2)^2} \\ &= \frac{4e^{4t}}{(4-2)^2} = \frac{4e^{4t}}{2^2} = e^{4t}\end{aligned}$$

(ii) 计算在 $z = 2$ 处的留数 (二阶极点):

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[H(z), 2] &= \lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2\frac{ze^{zt}}{(z-4)(z-2)^2}\right] = \lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{ze^{zt}}{z-4}\right] \\ &= \lim_{z\to 2}\frac{(e^{zt}+zte^{zt})(z-4) - ze^{zt}(1)}{(z-4)^2} \\ &= \frac{(e^{2t}+2te^{2t})(2-4) - 2e^{2t}(1)}{(2-4)^2} = \frac{(e^{2t}+2te^{2t})(-2) - 2e^{2t}}{(-2)^2} \\ &= \frac{-2e^{2t} - 4te^{2t} - 2e^{2t}}{4} = \frac{-4e^{2t} - 4te^{2t}}{4} = -e^{2t} - te^{2t}\end{aligned}$$

故，对于 $t > 0$:

$$f(t) = \mathrm{Res}[H(z), 4] + \mathrm{Res}[H(z), 2] = e^{4t} - e^{2t} - te^{2t}$$

所以 $f(t) = (e^{4t} - (1+t)e^{2t})u(t)$.

解法二 (有理分式分解):

$$F(z) = \frac{z}{(z-4)(z-2)^2} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2}$$

计算系数 A, B, C：

通分后比较系数（或代入特定值）。将部分分式通分：

$$z = A(z-2)^2 + B(z-4)(z-2) + C(z-4)$$

代入已求得的 $A = 1, C = -1$:

$$z = 1(z-2)^2 + B(z-4)(z-2) - 1(z-4)$$

选择一个方便的 z 值（不为极点），例如令 $z=0$:

$$\begin{aligned}
0 &= 1(0-2)^2 + B(0-4)(0-2) - 1(0-4) \\
0 &= 1(-2)^2 + B(-4)(-2) - (-4) \\
0 &= 4 + 8B + 4 \\
0 &= 8 + 8B \\
8B &= -8 \\
B &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z-4}\right\}(t) &= e^{4t}u(t) \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\}(t) &= e^{2t}u(t) \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-2)^2}\right\}(t) &= te^{2t}u(t) \quad (\text{由}\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}, \text{此处}n=1, a=2)
\end{aligned}$$

故 $f(t) = (e^{4t} - e^{2t} - te^{2t})u(t) = (e^{4t} - (1+t)e^{2t})u(t)$ (for $t>0$).

解法三 (卷积法):
我们将 $F(z) = \frac{z}{(z-4)(z-2)^2}$ 分解为两个函数的乘积。一种可能的分解是 $F(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$。根据笔记，我们先对 $\frac{z}{(z-4)(z-2)}$ 进行部分分式分解:

$$\frac{z}{(z-4)(z-2)} = \frac{A'}{z-4} + \frac{B'}{z-2}$$

计算系数 A' 和 B':

$$\begin{aligned}
A' &= \lim_{z\to 4}(z-4)\frac{z}{(z-4)(z-2)} = \lim_{z\to 4}\frac{z}{z-2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \\
B' &= \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z}{(z-4)(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z}{z-4} = \frac{2}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1
\end{aligned}$$

所以，$\frac{z}{(z-4)(z-2)} = \frac{2}{z-4} - \frac{1}{z-2}$. 那么 $F(z)$ 可以写作:

$$F(z) = \left(\frac{2}{z-4} - \frac{1}{z-2}\right) \cdot \frac{1}{z-2}$$

令 $H_1(z) = \frac{2}{z-4} - \frac{1}{z-2}$ 和 $H_2(z) = \frac{1}{z-2}$. 它们的逆 Laplace 变换为:

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H_1(z)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{z-4}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\}(t) \\
&= (2e^{4t} - e^{2t})u(t) \\
h_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H_2(z)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\}(t) = e^{2t}u(t)
\end{aligned}$$

根据卷积定理，$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}(t) = (h_1 * h_2)(t)$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t (2e^{4\tau} - e^{2\tau})e^{2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \quad (\text{对于}0 \le \tau \le t) \\
&= \int_0^t (2e^{4\tau} - e^{2\tau})e^{2t}e^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= e^{2t}\int_0^t (2e^{4\tau}e^{-2\tau} - e^{2\tau}e^{-2\tau})\,\mathrm{d}\tau \\
&= e^{2t}\int_0^t (2e^{2\tau} - 1)\,\mathrm{d}\tau \\
&= e^{2t}\left[2\cdot\frac{1}{2}e^{2\tau} - \tau\right]_0^t \\
&= e^{2t}\left[e^{2\tau} - \tau\right]_0^t \\
&= e^{2t}\left[(e^{2t} - t) - (e^{2(0)} - 0)\right] \\
&= e^{2t}(e^{2t} - t - 1) \\
&= e^{4t} - te^{2t} - e^{2t} = e^{4t} - (1+t)e^{2t}
\end{aligned}$$

所以 $f(t) = (e^{4t} - (1+t)e^{2t})u(t)$ (for $t > 0$).

注: 书中利用 $z/z-4$ 的 Laplace 变换，用到了 s 函数，需小心!

解法四 (查表法 (Looking up tables)): (略)

Part IX

Appendix

APPENDIX

.1 附录 A Bessel 不等式的另一种证明

Proof. 考虑在 L^2 空间中，对于标准正交基 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和函数 f，我们有如下等式：

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\|_2^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right)$$

$$= (f, f) - \left(f, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, f \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right)$$

第二项：

$$\left(f, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{(f, e_k)} (f, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

第三项：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, f \right) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)(f, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

第四项

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right)$$

由于 e_k 是标准正交基底，因此交叉项消失，只剩下两边下标相同的项

$$= \sum_{k=1}^{n} ((f, e_k) e_k, (f, e_k) e_k) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) \overline{(f, e_k)} (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

最终得

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \geq 0$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2$$

综合以上结果，我们得到关键不等式：

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \geq 0$$

由此直接导出 Bessel 不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

当 $n \to \infty$ 时，级数仍然收敛：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 < +\infty$$

$\square$

.2 附录 B 完备赋范空间中级数收敛性的证明

本部分将证明在完备赋范空间中，傅里叶级数的部分和序列收敛于原函数。基本思路分为三步：

1. 证明部分和序列是 Cauchy 列
2. 利用空间完备性得到收敛性
3. 验证极限函数与原函数相等

Proof. 考虑标准正交基 $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$，其中 $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$（已标准化）。定义部分和：

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e_k \qquad c_k = (f, e_k)$$

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_2^2 = \left\|c_{n+1}e_{n+1} + \cdots + c_m e_m + c_{-m}e_{-m} + \cdots + c_{-(n+1)}e_{-(n+1)}\right\|_2^2$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left|c_{n+1}e_{n+1} + \cdots + c_m e_m + c_{-m}e_{-m} + \cdots + c_{-(n+1)}e_{-(n+1)}\right|^2 dx$$

中间项正交消掉

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |c_{n+1}e_{n+1}|^2 dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} |c_m e_m|^2 dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} |c_{-m}e_{-m}|^2 dx$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} |c_k|^2$$

由 Bessel 不等式

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty \quad f \in L_2$$

由 Cauchy 准则可知：

$$\sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=-m}^{-(n+1)} |c_k|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

故：

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_2^2 < \varepsilon$$

这表明 $\{S_n(f)\}$ 是 Cauchy 列。由于 L^2 空间完备，存在 $g \in L^2$ 使得：

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = g$$

最后验证 $g = f$，对任意基元素 e_j：

$$(g, e_j) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(f), e_j\right)$$

由内积的连续性，极限与内积可交换：

$$= \lim_{n\to\infty} (S_n(f), e_j) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} (f, e_k)e_k, e_j\right) = (f, e_j)$$

得：

$$(g, e_j) = (f, e_j) \Rightarrow (g - f, e_j) = 0 \Rightarrow g = f$$

故 f 在 L^2 空间下的傅里叶级数依 L2 范数的均方收敛，则必能按范数收敛。 $\square$

.3 常见的函数空间

此节简单介绍了 Lebesgue 空间 $L^p[a,b]$、连续可微空间 $C^n[a,b]$，光滑及紧支撑空间 $C^\infty[a,b]$、$C_c^\infty[a,b]$，速降函数空间 $\mathcal{S}[a,b]$，以及 Sobolev 空间 $W^{k,p}[a,b]$ 的定义与相互嵌入，还增加了测试函数空间的基本概念以供阅读

.3.1 L^p 空间与 L^∞ 空间

Definition 7. L^p 空间

对函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx$ 有限（$1\le p<\infty$），则称 f 属于 L^p 空间。其范数定义为：

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Definition 8. L^∞ 空间

称函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是**本质有界**的，若存在常数 $M\ge 0$，使得

$$|f(x)|\le M \quad \text{对几乎所有的} x\in\mathbb{R} \text{ 成立} (a.e.),$$

其本质确界范数定义为：

$$\|f\|_{L^\infty}:=\inf\big\{M\ge 0\,\big|\,|f(x)|\le M\ \ a.e.\big\}.$$

所有本质有界函数构成的集合记为 $L^\infty(\mathbb{R})$。

.3.2 $C^n(\Omega)$ 与 $C^\infty(\Omega)$ 光滑函数空间

Definition 9. $C^n(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$

令 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为开集，则

$$C^n(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}:f \text{ 具有连续的 } 0,1,\ldots,n \text{ 阶偏导数}\},$$

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^n(\Omega).$$

在有界域 Ω 上，任意连续函数必有界，从而

$$C^n(\Omega)\subset L^p(\Omega),\quad 1\le p\le\infty.$$

.3.3 解析函数 $C^\omega(\Omega)$

Definition 10. 解析函数 $C^\omega(\Omega)$

若 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上可微无穷次，且任取 $x_0\in\Omega$，函数 f 在 x_0 的泰勒级数收敛并与 f 一致，则称 f 为解析函数。

所有解析函数构成的集合记作 $C^\omega(\Omega)$，有包含关系：

$$C^\omega(\Omega) \subsetneq C^\infty(\Omega).$$

解析函数不允许有紧支撑，除 0 函数，是因为解析函数可以泰勒展开成多项式，最多有 n 个根，即零点最多可数个，我们可知可数集的测度是 0，所以他的支集为全体实数空间，不是紧的（有界闭集）。

在拓扑意义下，$C^\omega(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中并不稠密。紧支撑光滑函数 $C_c^\infty(\Omega)$ 的存在正是为了替代解析函数在分布论中的不足，因为解析函数不允许有紧支撑，而 C_c^∞ 中的 bump 函数是构造近似单位、分布作用的重要工具。

.3.4 紧支撑概念的引入

光滑函数空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 中的函数在无穷远处可能不衰减，导致其不属于 $L^p(\mathbb{R})$。为保证积分收敛性，引入紧支撑光滑函数空间：

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \text{ 为紧集} \right\},$$

显然满足 $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ 对任意 $1 \le p \le \infty$ 成立。

.3.5 $C_c^\infty(\Omega)$ 紧支撑光滑函数空间

Definition 11. $C_c^\infty(\Omega)$ 紧支撑光滑函数空间

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset K,\ K \subset\subset \Omega\},$$

即所有支持集紧于 Ω 的光滑函数。其在分布与弱解理论中用于构造逼近序列及光滑化操作。*Bump function*

.3.6 速降函数空间 $\mathcal{S}$

Definition 12. *Schwartz* 空间

Schwartz 空间（速降函数空间）是指在光滑函数上所有函数及其导数在无穷远处衰减得比任意多项式还快的光滑函数组成的集合：

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \right\}.$$

由定义可知速降函数空间 $\mathcal{S}$ 仅在测度无穷才存在。

Theorem 64. 求导运算和与多项式乘积运算封闭

Schwartz 空间在速降意义下定义，记作 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$。该空间是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。进一步地，若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，则有

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Theorem 65. $\mathcal{S}_c(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

由于紧支撑光滑函数在无穷远处恒为零，可得：

$$\mathcal{S}_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

.4 不同函数空间在测度有穷和无穷下的关系

.4.1 测度有限情形 ($\mu(X) < \infty$)

在有限测度空间中，若 $1 \leq p < q \leq \infty$，则

$$L^q(X) \subset L^p(X)$$

Proof. 当测度空间满足 $1 \leq p_1 \leq p_2 < +\infty$ 且 $m(E) < +\infty$ 时：

若函数 $x(t)$ 属于 $L^{p_2}(E)$，则

$$\left(\int_E |x(t)|^{p_2} \, dt \right)^{\frac{1}{p_2}} < +\infty$$

因此

$$\int_E |x(t)|^{p_2} \, dt < +\infty$$

设集合 $B = \{t \in E \mid |x(t)| \leq 1\}$，则

$$\int_E |x(t)|^{p_1} \, dt = \int_B |x(t)|^{p_1} \, dt + \int_{E \setminus B} |x(t)|^{p_1} \, dt$$

由于在 B 上 $|x(t)| \leq 1$，故 $|x(t)|^{p_1} \leq 1$，从而

$$\int_B |x(t)|^{p_1} \, dt \leq m(B)$$

在 $E \setminus B$ 上 $|x(t)| > 1$，由于 $p_1 \leq p_2$，故 $|x(t)|^{p_1} \leq |x(t)|^{p_2}$，因此

$$\int_{E \setminus B} |x(t)|^{p_1} \, dt \leq \int_{E \setminus B} |x(t)|^{p_2} \, dt$$

综合得：

$$\int_E |x(t)|^{p_1} \, dt \leq m(B) + \int_{E \setminus B} |x(t)|^{p_2} \, dt \leq m(E) + \int_E |x(t)|^{p_2} \, dt < +\infty$$

因此，在有限测度空间中，若 $x(t) \in L^{p_2}(E)$，则 $x(t) \in L^{p_1}(E)$。这表明 $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$，即 L^p 空间具有包含关系，且 L^1 是最大的。特别地，当测度有限时，$L^\infty(E) \subseteq L^1(E)$。

证明过程用到放缩测度是有限的，所以当测度无限时，即 L^p 空间不具有包含关系。

□

对于有界开域 Ω，还具有

$$C^n(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad C^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

且 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 下稠密。

.4.2 测度无穷情形 ($\mu(X) = \infty$)

空间包含关系可总结为:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$$

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathbb{R}^n)$$

在下文我们将讨论不同空间下的傅里叶变换，故如果空间有包含关系，那性质子空间就可以继承大空间的性质，就不再重复说明，子空间的性质我们只讨论子空间特有的性质。

稠密关系

$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密（$1 \leq p < \infty$）;

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中同样稠密（$1 \leq p < \infty$），但在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中不稠密;

$C^\infty(\mathbb{R})$ 中存在非 L^p 函数（例如常函数 $1 \notin L^p(\mathbb{R})$

参考文献

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[3] G. B. Folland, *Real Analysis*, Wiley, 1999.

[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

后记的代码