初探傅里叶变换

陈柏均

2025 年 4 月 14 日

1 *Fourier* 级数到 *Fourier* 变换的推导

傅里叶级数可以解决周期函数和非周期函数但定义域非全实数范围，那如果是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非周期函数我们又该如何解决？

假设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非周期函数。为得到 $Fourier$ 变换的具体形式，考虑 f 在区间 $[-l,l]$ 上的 $Fourier$ 级数展开：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{in\pi x/l},$$

其中系数

$$\alpha_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(y)e^{-in\pi y/l}dy.$$

将系数代入展开式得：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(y)e^{in\pi(y-x)/l}dy\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}f(y)e^{in\pi(y-x)/l}dy\frac{\pi}{l},\quad -l<y<l.\end{aligned}$$

1.1 极限过程推导

令 $t_n=\frac{n\pi}{l}$，$\Delta t_n=t_{n+1}-t_n=\frac{\pi}{l}$，并定义

$$F_l(t_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}f(y)e^{it_n(y-x)}dy,$$

则展开式可表示为：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(t_n)\Delta t_n, \quad -l < y < l.$$

当 $l \to \infty$ 时，上述求和为定积分：

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_l(t_n)\Delta t_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F_l(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

其中

$$F_l(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{it(y-x)}dy$$

最终得

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{it(y-x)}dy\right]dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ity}dy\right)e^{itx}dt$$

其中

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ity}dy$$

$\hat{f}(t)$ 或 $\mathcal{F}[f]$ 称为 f 的 *Fourier* 变换

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt$$

$\mathcal{F}^{-1}[f]$ 称为 *Fourier* 逆变换。

2 傅里叶变换的泛函与拓扑性质

2.1 傅里叶变换与逆变换是线性算子

傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$ 和逆变换 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ 都是线性算子。

加法性：

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$$

证明：

$$\mathcal{F}[f+g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(t)+g(t)\big)e^{-i\lambda t}dt$$

由积分的线性性可得：

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$$

齐次性（数乘不变性）：

$$\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f], \quad \text{其中} c \in \mathbb{C}$$

证明：

$$\mathcal{F}[cf] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} cf(t) e^{-i\lambda t} dt = c \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = c\mathcal{F}[f]$$

逆变换的线性性：类似地，傅里叶逆变换 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ 也满足：

$$\mathcal{F}^{-1}[f+g] = \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}[g], \quad \mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f]$$

证明方法与傅里叶变换完全相同，只需将积分核中的 $e^{-i\lambda t}$ 替换为 $e^{i\lambda t}$。

2.2 傅里叶变换是有界线性算子

傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$ 是有界线性算子。

对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$，有：

$$|\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

证明：

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\lambda t}| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

因此，若 $f \in L^1(\mathbb{R})$，则 $\mathcal{F}[f] \in L^\infty(\mathbb{R})$，且：

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} |\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 < +\infty$$

这表明傅里叶变换将 L^1 空间中的函数映射到 L^∞ 空间中的函数，且变换后的函数几乎处处有界。

2.3 傅里叶变换 $\mathcal{F}[f](\lambda)$ 的一致连续性

$$|F[f](\lambda + h) - F[f](\lambda)|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-it(\lambda+h)} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-it\lambda} dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-it\lambda} \cdot (e^{-ith} - 1) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-it\lambda}| \cdot |e^{-ith} - 1| dt$$

因为

$$|e^{-it\lambda}| = 1 \ |e^{-ith} - 1| \leq 2$$

所以

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot 2dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

应用勒贝格控制收敛定理，交换极限与积分：

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-ith} - 1| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \lim_{h \to 0} |e^{-ith} - 1| dt$$

证明. $\lim_{h \to 0} |e^{-ith} - 1| = 0$

$$e^{-ith} = \cos(ht) - i \sin(ht)$$

因此，$e^{-ith} - 1$ 可以表示为：

$$e^{-ith} - 1 = \cos(ht) - 1 - i \sin(ht)$$

$$|e^{-ith} - 1| = \sqrt{(\cos(ht) - 1)^2 + (\sin(ht))^2}$$

展开平方项：

$$(\cos(ht) - 1)^2 + (\sin(ht))^2 = \cos^2(ht) - 2\cos(ht) + 1 + \sin^2(ht)$$

$$= 1 - 2\cos(ht) + 1 = 2(1 - \cos(ht))$$

因此：

$$|e^{-ith} - 1| = \sqrt{2(1 - \cos(ht))}$$

利用三角恒等式 $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$：

$$|e^{-ith} - 1| = \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{ht}{2}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{ht}{2}\right)\right|$$

当 $h \to 0$ 时，$\frac{ht}{2} \to 0$，因此：

$$\left|\sin\left(\frac{ht}{2}\right)\right| \approx \left|\frac{ht}{2}\right|$$

因此：

$$|e^{-ith} - 1| \approx 2 \cdot \left|\frac{ht}{2}\right| = |ht|$$

当 $h \to 0$ 时，$|ht| \to 0$，因此：

$$\lim_{h\to 0} |e^{-ith} - 1| = 0$$

$\square$

所以

$$\lim_{h\to 0} |F[f](\lambda + h) - F[f](\lambda)| = 0$$

这表明傅里叶变换 $\mathcal{F}[f](\lambda)$ 是一致连续的。

3 傅里叶变换的性质（续）

3.1 平移性 (Translation Property)

$$\mathcal{F}\big[f(x-a)\big](\lambda) = e^{-i\lambda a} \cdot \mathcal{F}[f](\lambda)$$

证明.

$$\mathcal{F}\big[f(x-a)\big](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-i\lambda x} dx$$

令 $t = x - a$，则 $x = t + a$，$dx = dt$，代入得：

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t+a)} dt$$

$$= e^{-i\lambda a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = e^{-i\lambda a} \cdot \mathcal{F}[f](\lambda)$$

$\square$

3.2 调制性 (Modulation Property)

$$\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\lambda)=\mathcal{F}[f](\lambda-a)$$

证明.

$$\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iax}f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i(\lambda-a)x}dx=\mathcal{F}[f](\lambda-a)$$

□

3.3 伸缩性 (Scaling Property)

$$\mathcal{F}\big[f(bx)\big](\lambda)=\frac{1}{|b|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)$$

证明.

$$\mathcal{F}\big[f(bx)\big](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(bx)e^{-i\lambda x}dx$$

令 $u=bx$，则 $x=u/b$，$dx=du/|b|$（这里是因为变量替换，积分上下限会根据单调性改变，du 也会因为单调性改变，最后都是正的，所以加了绝对值），代入得：

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda\cdot\frac{u}{b}}\cdot\frac{du}{|b|}$$

$$=\frac{1}{|b|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\frac{\lambda}{b}u}du=\frac{1}{|b|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)$$

□

3.4 傅里叶变换综合练习, 好像说是会考

练习 3.1. 计算 $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w)$

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right](w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{x-b}{a}\right)e^{-iwx}dx$$

令 $u=\frac{x-b}{a}$，则 $x=au+b,\quad dx=|a|du$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-iw(au+b)}\cdot|a|du$$

$$= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-ibw} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(aw)u} du$$

$$= |a| e^{-ibw} \cdot \mathcal{F}[f](aw)$$

练习 3.2. 计算 $\mathcal{F}\left[f(ax-b)\right](w)$

$$\mathcal{F}\left[f(ax-b)\right](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax-b) e^{-iwx} dx$$

令 $u = ax - b$，则 $x = \frac{u+b}{a}$, $\quad dx = \frac{1}{|a|} du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iw\left(\frac{u+b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{|a|} du$$

$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{bw}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\frac{w}{a}u} du$$

$$= \frac{1}{|a|} e^{-i\frac{bw}{a}} \cdot \mathcal{F}[f]\left(\frac{w}{a}\right)$$

4 傅里叶变换的衰减性, 连续的 Riemann-Lebesgue 定理

在傅里叶级数的时候我们探讨的整数上的 Riemann-Lebesgue 定理，得出系数具有一定的衰减性。现在我们考虑连续下的 Riemann-Lebesgue 定理，得傅里叶变换具有一定的衰减性。

定理 4.1 (连续的 Riemann-Lebesgue 定理). *若 $f \in L^1(\mathbb{R})$，则*

$$\lim_{|w|\to\infty} \hat{f}(w) = 0$$

即 $\hat{f}(w) \to 0$ 当 $|w| \to \infty$。

证明. (1) 当 $f = \chi_{[a,b]}$ 时，直接计算其 *Fourier* 变换：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-iwt} dt$$

计算积分：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw}$$

整理得：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw}$$

取绝对值：

$$|\hat{f}(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{|w|} \to 0 \quad (|w| \to \infty)$$

因此，$\hat{f}(w) \to 0$ 当 $|w| \to \infty$。

(2) 当 f 是有限个特征函数 $\chi_{[a_i, b_i]}$ 的线性组合时，利用积分线性性和极限线性性，可知：

$$\hat{f}(w) \to 0 \quad (|w| \to \infty)$$

即紧支撑的分片常函数的 Fourier 变换趋于 0（当 $|w| \to \infty$ 时）。

(3) 对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个紧支撑的分片常函数 g，使得：

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

(4) 对于 $f \in L^1(\mathbb{R})$，分解其 *Fourier* 变换：

$$\hat{f}(w) = \hat{f}(w) - \hat{g}(w) + \hat{g}(w)$$

即：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) e^{-iwx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-iwx} dx$$

记为：

$$\hat{f}(w) = J_1(w) + J_2(w)$$

估计 $J_1(w)$ 的绝对值：

$$|J_1(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon$$

这里利用了 L^1 范数的性质，即：

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

估计 $J_2(w)$ 的绝对值：

由于 g 是紧支撑的分片常函数，根据第 (2) 部分的结论：

$$|J_2(w)| = o(1) \quad (|w| \to \infty)$$

综上所述

将 $J_1(w)$ 和 $J_2(w)$ 的估计结果结合起来：

$$|\hat{f}(w)| \leq |J_1(w)| + |J_2(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon + o(1)$$

由于 ε 是任意的，当 $|w| \to \infty$ 时，$o(1)$ 趋于 0，因此：

$$\hat{f}(w) \to 0 \quad (|w| \to \infty)$$

□