傅里叶变换的应用

陈柏均

2025 年 5 月 13 日

1 一元傅里叶变换的应用

1.1 方程的频率方法（常微分方程）

$$\mathcal{F}D^{\alpha} = (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}, \tag{1.1.1}$$

当一维时，

$$(f')^{\wedge}(\omega) = (i\omega)\hat{f}(\omega) \tag{1.1.2}$$

其中，$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$，$X = (x_1, \ldots, x_n)$，$X^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$

例题 1.1.1.

$$\int_0^{+\infty} g(w)\sin wx dw = f(x) \tag{1.1.3}$$

求积分方程(1.1.3)的解 $g(w)$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{e^{-x}}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

解 1.1.1. 方法一： *用正弦积分变换（略），见教材 P99 例 1.6*

方法二 假设 g 为奇函数，则：

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(w)e^{-iwx}dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(w)(-i)\sin wx dw \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} g(w)\sin wx dw, \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

由上可得

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\hat{g}(x) = f(x) \tag{1.1.6}$$

又 g 为奇函数，有 $\hat{g}(-w) = -\hat{g}(w)$，故方程变为：

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\hat{g}(t) = f(t) \tag{1.1.7}$$

最后解得 $g(w)$ 为奇函数，仍记为 f.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{-iwt}dw = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(w)\sin wt dw \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin wt \sin wt dw \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi}[\cos(1-t)w - \cos(1+t)w]dw \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin(1-t)\pi}{1-t} + \frac{\sin(1+t)\pi}{1+t}\right) \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \pi t}{1-t^2} = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi t}{1-t^2} \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

对(1.1.7)两边做傅里叶变换

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\hat{g}(t) = f(t) \tag{1.1.9}$$

利用做两次傅里叶变换是镜像对称变换的性质

$$\mathcal{F}^2\{f(t)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(-t) \tag{1.1.10}$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{-2i}\hat{g}(-t) = \hat{f}(t) \tag{1.1.11}$$

而且 g 为奇函数可知

$$g(-t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi t}{1-t^2} \tag{1.1.12}$$

$$g(t) = \frac{\sin \pi t}{1-t^2} \tag{1.1.13}$$

例题 1.1.2. 积分方程解

$$g(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-x)dx \tag{1.1.14}$$

h、f 已知，且 g、h、f 的傅里叶变换存在。

解 1.1.2. 由傅里叶变换的卷积公式:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f} \cdot \hat{g} \tag{1.1.15}$$

原方程可化为:

$$\hat{g}(w) = \hat{h}(w) + \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w) \cdot \sqrt{2\pi} \tag{1.1.16}$$

解得:

$$\hat{g}(w) = \frac{\hat{h}(w)}{1 - \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(w)} \tag{1.1.17}$$

因此:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}(w)}{1 - \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(w)} e^{iwt} dw \tag{1.1.18}$$

例题 1.1.3. 常微分非齐次线性积分方程:

$$y'' - y = -f \tag{1.1.19}$$

其中 f 为已知函数

解 1.1.3. 对两边取傅里叶变换:

$$(iw)^2 \hat{y}(w) - \hat{y}(w) = -\hat{f}(w) \tag{1.1.20}$$

解得:

$$\hat{y}(w) = \frac{\hat{f}(w)}{1 + w^2} \tag{1.1.21}$$

因此:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(w)}{1 + w^2} e^{iwx} dw \tag{1.1.22}$$

将 $\frac{\hat{f}(w)}{1+w^2}$ 视为 $\hat{f}(w)$ 与 $\frac{1}{1+w^2}$ 的乘积。

由卷积定理:

$$(f * h)(w) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \hat{h}(w), \quad \text{其中 } \hat{h}(w) = \frac{1}{1 + w^2}. \tag{1.1.23}$$

因此:

$$\hat{y}(w) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w), \quad \text{其中 } \hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 + w^2}. \tag{1.1.24}$$

所以:

$$y(t) = (f * g)(t), \quad \text{其中 } g(w) = \frac{1}{2} e^{-|t|}. \tag{1.1.25}$$

因此:

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|t-x|} dx. \tag{1.1.26}$$

例题 1.1.4. 求解积分方程：

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_0^t x(t)dt=h(t), \tag{1.1.27}$$

其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$, h 已知

解 1.1.4. 关键是通过傅里叶变换求解。设 $G'=g$，且 G 有傅里叶变换。

对两边取傅里叶变换：

$$(iw)\hat{G}(w)=\hat{g}(w)\Rightarrow\hat{G}(w)=\frac{\hat{g}(w)}{iw}. \tag{1.1.28}$$

利用此公式，原方程可变换为：

$$a(iw)\hat{x}(w)+b\hat{x}(w)+c\frac{\hat{x}(w)}{iw}=h(w) \tag{1.1.29}$$

解得：

$$\hat{x}(w)=\frac{h(w)}{iaw+b+\frac{c}{iw}}. \tag{1.1.30}$$

1.2 PDE 的傅里叶变换

1.2.1 一维波动方程初值问题

例题 1.2.1. 求解一维波动方程初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in\mathbb{R},t>0 & (1.2.1a)\\ u|_{t=0}=\varphi_0(x) & (1.2.1b)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x) & (1.2.1c)\end{cases}$$

解 1.2.1. 对二元函数 $u(x,t)$ 的 x 变量作傅里叶变换，记之为 $V(w,t)$。

则：

$$V(w,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-iwx}dx \tag{1.2.2}$$

于是：

$$\frac{\partial V}{\partial t}(w,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-iwx}dx=\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) \tag{1.2.3}$$

有以下 *6* 个公式

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(w,t)=\frac{\partial}{\partial t}V(w,t)\quad\text{(视 } w \text{ 为常数)} \tag{1.2.4}$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(w,t)=(iw)V(w,t) \tag{1.2.5}$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(w,t) \tag{1.2.6}$$

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w,t)=(iw)^2V(w,t) \tag{1.2.7}$$

$$\mathcal{F}_1\left(\sin x\right)(w)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right] \tag{1.2.8}$$

$$\mathcal{F}_1\left(\cos x\right)(w)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right] \tag{1.2.9}$$

$$\mathcal{F}_1(\cos x)(w)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right] \tag{1.2.10}$$

原方程在频率域可转化为常微分方程问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V}{dt^2}=-w^2V & (1.2.11a) \\ V|_{t=0}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right] & (1.2.11b) \\ \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{t=0}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot i\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right] & (1.2.11c) \end{cases}$$

通解如下：

$$V(w,t)=C_1\sin(wt)+C_2\cos(wt) \tag{1.2.12}$$

注记 1.2.1. 齐次方程特征方程为 $\lambda^2+w^2=0$，其解为 $\lambda=\pm iw$，对应的解为 $e^{\pm iwt}$，即 $\cos(wt)$ 和 $\sin(wt)$。

由(1.2.11b)

$$C_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right] \tag{1.2.13}$$

由(1.2.11c)

$$C_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right] \tag{1.2.14}$$

最后得

$$
\begin{aligned}
V(w,t) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\left[\delta(w+1)-\delta(w-1)\right]\sin(wt) \\
&\quad+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(w+1)+\delta(w-1)\right]\cos(wt) \\
&= \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\sin(wt)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(wt)\right)\delta(w+1) \\
&\quad+\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\sin(wt)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(wt)\right)\delta(w-1)
\end{aligned} \tag{1.2.15}
$$

做傅里叶逆变换，从频率域变回时间域

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}_1^{-1}(V(\cdot,t))(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\sin(wt)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(wt)\right]\delta(w+1)\right. \\
&\quad\left.+\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{w}\sin(wt)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(wt)\right]\delta(w-1)\right\}e^{iwx}dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{-1}\sin(-t)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(-t)\right]e^{-ix}\right. \\
&\quad\left.+\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{i}{1}\sin(t)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\right]e^{ix}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[-i\sin(t)+\cos(t)\right]e^{-ix}+\left[i\sin(t)+\cos(t)\right]e^{ix}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos(t)e^{-ix}+\cos(t)e^{ix}+i\sin(t)e^{ix}-i\sin(t)e^{-ix}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos(t)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+i\sin(t)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\cos(t)\cos(x)+2i\sin(t)\sin(x)\right\} \\
&= \cos(t-x)
\end{aligned} \tag{1.2.16}
$$

1.2.2 一维热传导方程

例题 1.2.2. 求解一维热传导方程初值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), x\in\mathbb{R}, t>0 & (1.2.17\text{a}) \\
u|_{t=0} = \varphi(x) & (1.2.17\text{b})
\end{cases}
$$

解 1.2.2. 令 $V(w,t)=\mathcal{F}_1(u(\cdot,t))(w)$. 则

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}_1 u(w,t))=\dfrac{\partial}{\partial t}V(w,t)=\dfrac{dV}{dt}(w,t) & (1.2.18a) \\ \mathcal{F}_1\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w)=(iw)^2V(w,t)=-w^2V(w,t) & (1.2.18b) \end{cases}$$

记

$$\begin{cases} \hat{f}_1(w,t)=\mathcal{F}_1 f(\cdot,t)(w) & (1.2.19a) \\ \hat{\varphi}(w)=(\mathcal{F}\varphi)(w) & (1.2.19b) \end{cases}$$

则原方程在频域表示为：

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt}=-a^2w^2V+\hat{f}_1(w,t) & (1.2.20a) \\ V|_{t=0}=\hat{\varphi}(w) & (1.2.20b) \end{cases}$$

方程(1.2.20a)为一阶非齐次常微分方程。由常数变异法，可得解如下：

$$V(w,t)=\hat{\varphi}(w)e^{-a^2w^2t}+\int_0^t \hat{f}_1(w,\tau)e^{-a^2w^2(t-\tau)}d\tau \tag{1.2.21}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2w^2t}\right)(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2t}} \tag{1.2.22}$$

其中，

$$\mathcal{F}\left(e^{-\beta x^2}\right)(w)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}}e^{-\dfrac{w^2}{4\beta}} \tag{1.2.23}$$

令 $\beta=a^2t$，则

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2w^2t}\right)(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi t}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2t}} \tag{1.2.24}$$

进一步地，

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2(w-k)^2t}\right)(y)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi(t-\tau)}}e^{-\dfrac{(y-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tag{1.2.25}$$

最终得解：

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\left(\varphi(x)*\frac{1}{a\sqrt{2\pi t}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2t}}\right)(x) \\ &+\int_0^t\left(f(x,\tau)*\frac{1}{a\sqrt{2\pi(t-\tau)}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)(x)d\tau \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

1.2.3 附

例题 1.2.3. 求解微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = Ay + f(x), x \in \mathbb{R} & (1.2.27a) \\ y(0) = C & (1.2.27b) \end{cases}$$

解 1.2.3. 齐次方程 $y' = Ay$。解得：

$$\frac{y'}{y} = A \implies (\ln y)' = A \implies \ln y = Ax + C_1 \implies y = e^{C_1}e^{Ax} \tag{1.2.28}$$

即 $y = Ce^{Ax}$。

令 $y = C(x)e^{Ax}$。代入原方程：

$$y' = C'(x)e^{Ax} + C(x)e^{Ax}A \tag{1.2.29}$$

代入 $y' = Ay + f(x)$：

$$C'(x)e^{Ax} + C(x)e^{Ax}A = AC(x)e^{Ax} + f(x) \tag{1.2.30}$$

解得：

$$C'(x) = f(x)e^{-Ax} \tag{1.2.31}$$

因此：

$$C(x) = \int f(x)e^{-Ax}dx \tag{1.2.32}$$

特解：

$$C(x) = \int_0^x f(x)e^{-Ax}dx + C \tag{1.2.33}$$

解为：

$$y = \int_0^x f(x)e^{-Ax}dx \cdot e^{Ax} + Ce^{Ax} \tag{1.2.34}$$

当 $y(0) = C$ 时，解得 $C = C$。

因此通解：

$$y(x) = Ce^{Ax} + \int_0^x f(x)e^{A(x-x)}dx \tag{1.2.35}$$

1.2.4 求解上半平面无源静电场内电势的边值问题

例题 1.2.4. 求解上半平面无源静电场内电势的边值问题（拉普拉斯方程）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x \in \mathbb{R}, y > 0 & (1.2.36a) \\ u|_{y=0} = f(x) & (1.2.36b) \end{cases}$$

解 1.2.4. 记 $V(w,y)=\mathcal{F}_1 u(x,y)(w)$。

将原方程化为：

$$\begin{cases} -w^2V(w,y)+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}V(w,y)=0 & (1.2.37a)\\ V(w,y)|_{y=0}=\hat{f}(w) & (1.2.37b)\\ \lim\limits_{y\to+\infty}V(w,y)=0 & (1.2.37c)\end{cases}$$

视 w 为常数，这是一个二阶常微分方程。特征方程为：

$$\lambda^2-w^2=0 \implies \lambda=\pm|w| \tag{1.2.38}$$

通解为：

$$V(w,y)=C_1e^{|w|y}+C_2e^{-|w|y} \tag{1.2.39}$$

由边界条件：

$$V(w,y)|_{y=0}=\hat{f}(w) \implies C_1+C_2=\hat{f}(w) \tag{1.2.40}$$

以及

$$\lim_{y\to+\infty}V(w,y)=0 \implies C_1=0 \tag{1.2.41}$$

因此：

$$V(w,y)=\hat{f}(w)e^{-|w|y} \tag{1.2.42}$$

利用傅里叶逆变换：

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w|y}\right)(x)=\sqrt{\frac{\pi}{y}}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{1.2.43}$$

上式子可由下式得出

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{1}{r}}\right) \implies \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{1+r^2\xi^2} \tag{1.2.44}$$

最终得解

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f*\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\right)(x)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{x^2+y^2}f(x-t)\,dt \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

上半平面 *Poisson* 积分核

$$P_y(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{y^2+x^2} \tag{1.2.46}$$

2 多元傅里叶变换及应用

2.1 多元傅里叶变换定义

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\vec{w}) &= \mathcal{F}f(w_1,\dots,w_m) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x_1,\dots,x_m) e^{-i(w_1x_1+\cdots+w_mx_m)} dx_1\cdots dx_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\vec{x}) e^{-i\vec{w}\cdot\vec{x}} d\vec{x}
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

2.2 逆公式

$$
f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(\vec{w}) e^{i\vec{w}\cdot\vec{x}} d\vec{w} \tag{2.2.1}
$$

2.3 偏傅里叶变换

$$
\mathcal{F}_j f(x_1,\dots,x_{j-1},w_j,x_{j+1},\dots,x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-iw_jx_j} dx_j \tag{2.3.1}
$$

当 $f(\vec{x}) = \prod_{j=1}^m g_j(x_j)$ 变量可分离时，则

$$
(\mathcal{F}f)(\vec{w}) = \prod_{j=1}^m \mathcal{F}_j g_j(w_j) \tag{2.3.2}
$$

例题 2.3.1. 求函数 $f(x) = ae^{-b^2|x|^2} = ae^{-b^2(x_1^2+x_2^2)}$ 的二维傅里叶变换 $\hat{f}(w_1,w_2)$。

解 2.3.1. 为了求解 $\hat{f}(w_1,w_2)$，我们首先应用二维傅里叶变换公式：

$$
\hat{f}(w_1,w_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b^2(x_1^2+x_2^2)} e^{-i(w_1x_1+w_2x_2)} dx_1dx_2 \tag{2.3.3}
$$

我们可以将积分拆分为两个独立的一维积分：

$$
\hat{f}(w_1,w_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b^2x_1^2} e^{-iw_1x_1} dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2x_2^2} e^{-iw_2x_2} dx_2\right) \tag{2.3.4}
$$

利用傅里叶变换的性质，对高斯函数 $e^{-\beta x^2}$ 的傅里叶变换公式为：

$$
\mathcal{F}(e^{-\beta x^2})(w) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{w^2}{4\beta}} \tag{2.3.5}
$$

将 $\beta = b^2$ 代入上式，得到每个一维积分的结果：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2 x_j^2} e^{-i w_j x_j} dx_j = \sqrt{\frac{\pi}{b^2}} e^{-\frac{w_j^2}{4b^2}} \quad (j = 1, 2) \tag{2.3.6}$$

因此，二维傅里叶变换的结果为：

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \frac{a}{4b^2} \exp\left(-\frac{w_1^2 + w_2^2}{4b^2}\right) \tag{2.3.7}$$

特别地，当 $a = 1$，$b = 1$ 时，结果简化为：

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{w_1^2 + w_2^2}{4}\right) \tag{2.3.8}$$

为算子的不动点。

例题 2.3.2. 求函数 $f(x) = e^{-x^T A x}$ 的傅里叶变换，其中 $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$，且 $A = B^T B$ 为正定矩阵。

解 2.3.2. 首先，我们将函数 $f(x)$ 表示为：

$$e^{-x^T A x} = e^{-x^T B^T B x} = e^{-(Bx)^T (Bx)} \tag{2.3.9}$$

接下来，计算傅里叶变换：

$$\hat{f}(w_1, \ldots, w_m) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(Bx)^T (Bx)} e^{-i w^T x} dx \tag{2.3.10}$$

令 $y = Bx$，则 $x = B^{-1} y$，且雅可比行列式 $|B^{-1}|$。代入上式得到：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-y^T y} e^{-i w^T B^{-T} y} \frac{1}{|B|} dy \tag{2.3.11}$$

利用傅里叶变换的性质：

$$\mathcal{F}(e^{-|x|^2})(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} e^{-\frac{w^T w}{4}} \tag{2.3.12}$$

因此，得到：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \frac{1}{|B|} e^{-\frac{(B^{-1} w)^T (B^{-1} w)}{4}} \tag{2.3.13}$$

进一步化简为：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \frac{1}{|B|} e^{-\frac{w^T B^{-T} B^{-1} w}{4}} \tag{2.3.14}$$

由于 $A = B^T B$，因此 $B^{-T} B^{-1} = A^{-1}$，于是：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \frac{1}{|B|} e^{-\frac{w^T A^{-1} w}{4}} \tag{2.3.15}$$

特别地，当 $B = I$ 时，结果变为：

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2})^m} e^{-\frac{w^T w}{4}} \tag{2.3.16}$$

2.4 性质

2.4.1 线性性

$$\mathcal{F}(f(x-\vec{a}))=e^{-i\vec{a}\cdot\vec{w}}(\mathcal{F}f)(\vec{w}) \tag{2.4.1}$$

即

$$FT_{\vec{a}}=M_{-\vec{a}}F. \tag{2.4.2}$$

2.4.2 调制性

$$FM_{\vec{b}}=T_{\vec{b}}F. \tag{2.4.3}$$

2.4.3 微分性质

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)=(iw_j)\cdot\mathcal{F}f \tag{2.4.4}$$

进一步地：

$$\frac{\partial}{\partial w_j}\mathcal{F}f=\mathcal{F}\left(-ix_jf\right) \tag{2.4.5}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial w_j}\hat{f}(\vec{w})=\mathcal{F}\left(-ix_jf(x)\right)(\vec{w}) \tag{2.4.6}$$

一般化令 $\vec{k}=(k_1,\ldots,k_m)$，$D=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$，则：

$$D^{\vec{k}}=\frac{\partial^{|\vec{k}|}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}} \tag{2.4.7}$$

其中 $|\vec{k}|=k_1+\cdots+k_m$。

于是有：

$$\mathcal{F}(D^{\vec{k}}f)(\vec{w})=\left(i(w_1,\ldots,w_m)^{\vec{k}}\right)(\mathcal{F}f)(\vec{w}) \tag{2.4.8}$$

当 P_m 为 m 元多项式时：

$$\mathcal{F}(P_m(D)f)(\vec{w})=P_m(i\vec{w})(\mathcal{F}f)(\vec{w}) \tag{2.4.9}$$

特别地：

$$D^{\vec{k}}\mathcal{F}f(\vec{w})=\mathcal{F}((-ix)^{\vec{k}}f)(\vec{w}) \tag{2.4.10}$$

即：

$$P_m(D)\mathcal{F}f(\vec{w})=\mathcal{F}(P_m(-ix)f)(\vec{w}) \tag{2.4.11}$$

2.4.4 卷积

$$\mathcal{F}(f * g)(w) = (\sqrt{2\pi})^m (\mathcal{F}f)(w)(\mathcal{F}g)(w) \tag{2.4.12}$$

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(w) = (\sqrt{2\pi})^{-m} \left((\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)\right)(w) \tag{2.4.13}$$

2.4.5 多维情况

对于多维情况，傅里叶变换具有如下性质：

$$\mathcal{F}\left(f_1 * f_2 * \cdots * f_n\right)(w) = (\sqrt{2\pi})^{m(n-1)} \prod_{j=1}^{n} (\mathcal{F}f_j)(w) \tag{2.4.14}$$

$$\mathcal{F}(\prod_{j=1}^{n} (f_j)(w)) = (\sqrt{2\pi})^{-m(n-1)} (\mathcal{F}f_1 * \mathcal{F}f_2 \cdots * \mathcal{F}f_n)(w) \tag{2.4.15}$$

2.4.6 缩放

$$\mathcal{F}(f(Ax))(w) = |A|^{-\frac{m}{2}} (\mathcal{F}f)(A^{-T}w) \tag{2.4.16}$$

3 多元傅里叶变换的应用

3.1 二维热传导方程的初值问题

例题 3.1.1. 二维热传导方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 & (3.1.1a) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) & (3.1.1b) \end{cases}$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$

解 3.1.1. 对三元函数 $u(x, y, t)$ 的 (x, y) 变量施加二维傅里叶变换。

记：

$$V(w_1, w_2, t) = \mathcal{F}u(\cdot, \cdot, t)(w_1, w_2) \tag{3.1.2}$$

由 $\frac{\partial}{\partial t}$ 与 $\mathcal{F}$ 的可交换性：

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(w_1, w_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{F}u\right)(w_1, w_2, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(w_1, w_2, t) \tag{3.1.3}$$

又：

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(w_1,w_2,t) = -w_1^2 V(w_1,w_2,t) \tag{3.1.4}$$

和：

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(w_1,w_2,t) = -w_2^2 V(w_1,w_2,t) \tag{3.1.5}$$

因此，傅里叶变换后的方程及其边界条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = -a^2(w_1^2+w_2^2)V & (3.1.6a) \\ V(w_1,w_2,0) = \mathcal{F}\varphi(w_1,w_2) & (3.1.6b) \end{cases}$$

常微分方程(3.1.6a)的通解为

$$V(w_1,w_2,t) = Ce^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)} \tag{3.1.7}$$

求常数 C，由初始条件 (3.1.6b) 可得：

$$C = \hat{\varphi}(w_1,w_2) \tag{3.1.8}$$

因此：

$$V(w_1,w_2,t) = \hat{\varphi}(w_1,w_2)e^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)} \tag{3.1.9}$$

利用二维傅里叶逆变换：

$$u(x,y,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\varphi}(w_1,w_2)e^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)}\right] \tag{3.1.10}$$

其中：

$$g(x,y,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a^2t(w_1^2+w_2^2)}\right) \tag{3.1.11}$$

利用分离变量法：

$$g(x,y,t) = \left(\frac{1}{2a^2\pi t}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}} \tag{3.1.12}$$

因此，解为：

$$(x,y,t) = \frac{1}{(2a^2\pi t)^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi(x-\xi,y-\eta)e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{4a^2t}}d\xi d\eta \tag{3.1.13}$$

注记 3.1.1. 向量形式：

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{(2a^2\pi t)^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi(\vec{x}-\vec{\xi})e^{-\frac{|\vec{\xi}|^2}{4a^2t}}d\vec{\xi} \tag{3.1.14}$$

3.2 n 微推广

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u, & x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n, t > 0 \\ u(\vec{x}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

解为：

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{x} - \vec{\xi}) e^{-\frac{|\vec{\xi}|^2}{4a^2 t}} d\vec{\xi} \tag{3.2.2}$$

这里：

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad d\vec{\xi} = d\xi_1 \cdots d\xi_n \tag{3.2.3}$$

例题 3.2.1. 特别地，三维热传导方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & (3.2.4a) \\ u|_{t=0} = e^{-(x^2+y^2+z^2)} & (3.2.4b) \end{cases}$$

解 3.2.1.

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta \tag{3.2.5}$$

注意到被积函数可分离，有：

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} g_1(x, t) g_2(y, t) g_3(z, t) \tag{3.2.6}$$

$g_1 = g_2 = g_3 = g$ 其中：

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{3.2.7}$$

进一步化简：

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(1 + \frac{1}{4a^2 t} \right) \xi^2 + 2x\xi - x^2 \right] d\xi \tag{3.2.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+Bx+C} dx \quad (a > 0) \tag{3.2.9}$$

计算过程：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+Bx+C} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2 - \frac{B}{a}x - \frac{C}{a}\right)} dx \tag{3.2.10}$$

配方：

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left[\left(x - \frac{B}{2a}\right)^2 - \frac{B^2}{4a^2} - \frac{C}{a}\right]} dx \tag{3.2.11}$$

化简：

$$= e^{\frac{B^2+4aC}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{B}{2a}\right)^2} dx \tag{3.2.12}$$

变量替换 $t = x - \frac{B}{2a}$：

$$= e^{\frac{B^2+4aC}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \tag{3.2.13}$$

结果：

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{B^2+4aC}{4a}} \tag{3.2.14}$$

特别地，令 $a = 1 + 4a^2 t$，$B = 2x$，$C = -x^2$：

代入得到：

$$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{B^2+4aC}{4a}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{1+4a^2 t}} e^{\frac{(2x)^2+4(1+4a^2 t)(-x^2)}{4(1+4a^2 t)}} \tag{3.2.15}$$

化简：

$$= \sqrt{\frac{\pi}{1+4a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2 t}} \tag{3.2.16}$$

$$g(x,t) = \frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+4a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4a^2 t}\right) \tag{3.2.17}$$

因此：

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} g(x,t) g(y,t) g(z,t) \tag{3.2.18}$$

注记 3.2.1. 使用傅里叶变换方法求解 PDE 的难点通常在于最后的逆变换步骤。