

傅里叶变换学习大纲

1 傅里叶变换的推导

2 傅里叶变换的性质

2.1 有界线性算子

- $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$
- $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L^1}$

2.2 连续性

- $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}[f]$ 在 \mathbb{R} 上连续

2.3 三个经典性质

- 平移
- 调制
- 伸缩

2.4 微分性质

速降函数空间的应用

2.5 积分性质

2.6 乘积公式

3 卷积与卷积傅里叶变换的性质

- 定义: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$
- 性质: $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$

4 傅里叶逆变换的性质

- 定义: $\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega$
- 性质: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ 和 $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[g]] = g$

5 傅里叶变换从 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$

- 映射原因: 完备性和保能量性质
- 性质: 等距满射, 酉算子
- Parseval 定理: $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

6 傅里叶变换从 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- 速降函数空间的定义
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的稠密性
- $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- 经典例子: 高斯函数

7 广义函数的傅里叶变换

- 广义函数定义
- 例子: 狄拉克函数
- $\mathcal{F}[\delta](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

8 离散傅里叶变换及其改进快速傅立叶变换

- 离散傅里叶变换: $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}$
- 快速傅立叶变换: 计算复杂度 $O(N \log N)$