# 傅里叶级数收敛性

陈柏均

2025 年 4 月 8 日

# 目录

# 1 敛散性历史回顾

## 1.1 主要发展阶段

1. **Fourier 的发现（1807 年）**：首次提出 Fourier 级数理论，并认为其收敛性在物理问题中是自然成立的。

2. **Dirichlet 的贡献（1829 年）**：提出 Dirichlet 条件，证明了满足该条件的周期函数其 Fourier 级数逐点收敛。但当时普遍误认为所有连续函数的 Fourier 级数均收敛。

3. **Du Bois-Reymond 的反例（1873 年）**：构造了一个连续周期函数，其 Fourier 级数在某一点发散，这一结果颠覆了当时的认知。

4. **Kolmogorov 的工作（1926 年）**：证明存在 $L^1(\mathbb{T})$ 函数，其 Fourier 级数在每一点都发散。

5. **Carleson 的突破（1966 年）**：证明了 $L^2(\mathbb{T})$ 函数的 Fourier 级数几乎处处收敛：

$$S_n(f,x) \to f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{T}.$$

6. **Hunt 的推广（1967 年）**：将结果扩展至 $L^p(\mathbb{T})$ 空间（$p>1$），证明对任意 $f \in L^p(\mathbb{T})$，有：

$$S_n(f,x) \to f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{T}.$$

## 1.2 总结与意义

- Carleson 的证明极其复杂，但其结论（Carleson-Hunt 定理）奠定了现代 Fourier 分析的基石。
- 连续函数的 Fourier 级数收敛性问题并非完全解决，例如是否存在连续函数其 Fourier 级数在某个正测集上发散，仍是未解之谜。
- 这些成果深刻影响了调和分析、偏微分方程及信号处理等领域。

# 2 各种求和理论

## 2.1 Fejér 求和法（算术平均求和法）

定义 Fejér 和为：

$$G_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)C_k e^{ikx}$$

其积分形式可表示为：

$$G_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 dt$$

**定理 1** (Lebesgue). 若 $f \in L^1(\mathbb{T})$，则：

1. 若 $f$ 在 $x_0$ 处满足 *Lebesgue* 条件：

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)| dt = 0,$$

   则 $G_n(x_0) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

2. 在几乎处处意义下，$G_n(x) \to f(x)$ *a.e.* $x \in \mathbb{T}$.

**定理 2** ($L^p$ 收敛性). 若 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 且 $1 \leq p < \infty$，则：

$$\lim_{n \to \infty} \|f - G_n(f)\|_p = 0.$$

## 2.2 Abel 求和与 Poisson 核

定义 Abel-Poisson 和为：

$$F(r,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k r^{|k|} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x-t) dt,$$

其中 Poisson 核为：

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

- **解析性**：当 $r \to 1^-$ 时，$F(r,x)$ 在单位圆内解析，边界值与原函数相关。
- **收敛性**：若 $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(p \geq 1)$，则 $F(r,x) \to f(x)$ a.e. 当 $r \to 1^-$。

# 3 Fourier 级数逐点收敛

## 3.1 基本定义与部分和

设 $f \in L^1[-\pi,\pi]$ 为广义周期函数，其 Fourier 部分和为：

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

其中系数由积分表达式给出：

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku)\, du, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ku)\, du.$$

### 3.2 积分表示与 Dirichlet 核

部分和可重写为积分形式：

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos k(u-x)\,du.$$

进一步化简为：

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right)du.$$

利用三角恒等式：

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

可得 Dirichlet 核表示：

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cdot\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})(u-x)\right)}{2\sin\frac{u-x}{2}}\,du.$$

### 3.3 Dirichlet 核的性质

定义 Dirichlet 核：

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

则部分和可进一步简化为：

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(u-x)\,du.$$

### 3.4 收敛性分析

- **逐点收敛**：若 $f$ 在 $x$ 处满足 Dini 条件，即

  $$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt < \infty,$$

  则 $S_n(f,x)\to f(x)$ 当 $n\to\infty$。

- **均方收敛**：对 $f\in L^2[-\pi,\pi]$，有

  $$\lim_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_{L^2} = 0.$$

## 4 Fourier 级数的复数形式与 Dirichlet 核

### 4.1 复数形式部分和

周期函数 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 的 Fourier 部分和可表示为：

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)}du,$$

其中复数系数为：

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du.$$

### 4.2 Dirichlet 核的积分表示

通过几何级数求和公式，部分和可化简为卷积形式：

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(x-u)du = (f * D_n)(x),$$

其中 Dirichlet 核定义为：

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

### 4.3 Dirichlet 核的性质

- **归一性**：

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1.$$

- **对称性**：

$$D_n(-t) = D_n(t).$$

- **正交投影**：$S_n$ 是从 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $2n+1$ 维三角多项式空间的投影算子，即

$$S_n : L^2(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n, \quad \mathcal{T}_n = \mathrm{span}\{e^{ikx}\}_{k=-n}^{n}.$$

### 4.4 收敛性评注

Dirichlet 核的振荡特性导致：

- 对 $f \in L^1(\mathbb{T})$，$S_n(f,x)$ 的逐点收敛需额外条件（如 Dini 条件）。
- 对 $f \in L^2(\mathbb{T})$，部分和在 $L^2$ 范数下收敛：

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0.$$

## 5 fourier 级数的收敛性分析

### 5.1 基本假设与收敛目标

设 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 为周期函数，研究其 Fourier 部分和 $S_n(f,x)$ 在点 $x \in \mathbb{R}$ 处的收敛性。假设存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 使得当 $n \to \infty$ 时：

$$S_n(f,x) \to c.$$

## 5.2 偏差积分表达式

$$c = \int_{-\pi}^{\pi} c \cdot D_n(t)\,dt$$

这是因为 Dirichlet 核满足归一性：

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$$

其中 $D_n(t)$ 为 Dirichlet 核：

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

积分运算的线性性允许将偏差分解为：

$$\begin{aligned} S_n(f,x) - c &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} cD_n(t)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - c]\,D_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

## 5.3 积分分解与对称性

将积分分解为对称部分：

$$S_n(f,x) - c = \int_0^{\pi} (f(x-t) - c)\,D_n(t)\,dt + \int_{-\pi}^{0} (f(x-t) - c)\,D_n(t)\,dt.$$

利用 Dirichlet 核的偶函数性质 $D_n(-t) = D_n(t)$，可将第二项变量替换 $t \to -t$：

$$\int_{-\pi}^{0} (f(x-t) - c)\,D_n(t)\,dt = \int_0^{\pi} (f(x+t) - c)\,D_n(t)\,dt.$$

因此，总偏差可合并为：

$$S_n(f,x) - c = \int_0^{\pi} [f(x-t) + f(x+t) - 2c]\,D_n(t)\,dt.$$

## 5.4 收敛性条件

1. **Dini 条件**：若存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2c|}{t}\,dt < \infty,$$

则 $S_n(f,x) \to c$ 当 $n \to \infty$。

2. **Jordan 条件**：若 $f$ 在 $x$ 处有界变差，则 $c = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ 且收敛成立。

### 5.4.1 注记

- 当 $c = f(x)$ 时，收敛性要求 $f$ 在 $x$ 处满足某种正则性（如连续性或 Dini 条件）。
- 对 $f \in L^2(\mathbb{T})$，部分和在 $L^2$ 范数下收敛：

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0.$$

## 5.5 积分化简

设 $\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2c$，且 $\psi_x(-t) = \psi_x(t)$。假设 $\psi_x(t) \in L^1(0,\pi)$，则有：

$$\int_0^\pi \psi_x(t)\,dt = \int_0^\pi f(x+t)\,dt + \int_0^\pi f(x-t)\,dt - 2c\pi.$$

部分和 $S_n(f,x) - c$ 可表示为：

$$S_n(f,x) - c = \int_0^\pi \psi_x(t) D_n(t)\,dt,$$

其中 Dirichlet 核为：

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\frac{t}{2}}.$$

## 5.6 积分化简与 Riemann-Lebesgue 引理

将积分化简为：

$$S_n(f,x) - c = \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

进一步分解为：

$$= \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\sin(nt)\cos\frac{t}{2} + \cos(nt)\sin\frac{t}{2}}{2\pi \sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

化简后得到：

$$= \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\cos(nt)\,dt.$$

应用 Riemann-Lebesgue 引理，当 $n \to \infty$ 时：

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\cos\frac{t}{2} \cdot \frac{\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + o(1).$$

### 5.6.1 注记

对于 $\psi_x(t)\cos\frac{t}{2}$，不能直接应用 Riemann-Lebesgue 引理，因为 $\frac{t}{2}$ 在 0 点有奇异性，不属于 $L^1(0,\pi)$。

## 5.7 偏差积分表达式与 Dirichlet 核

设 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$，部分和 $S_n(f,x) - c$ 可表示为：

$$S_n(f,x) - c = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \psi_x(t) \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \psi_x(t) \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + o(1).$$

其中 $\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2c$。

### 5.8 应用 Riemann-Lebesgue 引理

对于第一项：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt=o(1),$$

因为 $\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\in L^1([\delta,\pi])$，应用 Riemann-Lebesgue 引理。

对于第二项：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

需要进一步分析。

### 5.9 归纳与结论

归纳：

$$S_n(f,x)\to c\quad(n\to\infty)\quad\Leftrightarrow\quad\int_0^{\delta}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin nt\,dt\to 0\quad(n\to\infty).$$

进一步分解：

$$\int_0^{\delta}\psi_x(t)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\frac{1}{t}\sin(nt)\,dt\to 0\quad(n\to\infty).$$

#### 5.9.1 注记

$f$ 在 $(0,\delta)$ 的取值有关，任意小邻域的取值决定收敛性。

# 6 Dini 判别法

## 6.1 Dini 条件

**定理 3** (Dini 判别法). *在 Dini 条件下，Fourier 部分和满足：*

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=C.$$

$f\in L^1(\mathbb{T})$，$C\in\mathbb{C}$ 为常数。偏差函数：

$$\psi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2C,$$

存在 $\delta>0$ 使得：

$$\int_0^{\delta}\frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt<\infty.$$

## 6.2 证明

利用 Dirichlet 核的对称性，部分和偏差可表示为：

$$S_n(f,x) - C = \int_0^\delta \psi_x(t) \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt + o(1).$$

将 Dirichlet 核拆分为主导项与余项：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \cdot \frac{t\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \sin(nt)\, dt + o(1)$$

从而偏差积分可近似为：

$$S_n(f,x) - C = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \cdot \frac{t\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \sin(nt)\, dt + o(1).$$

应用 Riemann-Lebesgue 引理由于 $\frac{\psi_x(t)}{t} \in L^1(0,\delta)$ 且 $\frac{t\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ 在 $(0,\delta)$ 上连续，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \cdot \frac{t\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(nt)\, dt \to 0 \quad (n\to\infty).$$

因此 $S_n(f,x) \to C$ 当 $n\to\infty$。

### 6.2.1 注记

- Dini 条件的物理意义：偏差函数 $\psi_x(t)$ 在 $t\to 0$ 时的衰减速度快于 $1/t$。
- 当 $C = f(x)$ 时，条件退化为经典 Dini 条件：

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\, dt < \infty.$$

## 6.3 推论 1：可微性条件下的收敛性

设 $f \in L(-\pi,\pi)$，若 $f$ 在 $x$ 处可微，则 $S_n(f,x) \to f(x)$ 当 $n\to\infty$。

证明在 Dini 定理中，令 $c = f(x)$。

定义：

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

则：

$$\frac{\psi_x(t)}{t} = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x)}{-t}.$$

进一步化简为：

$$= \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{t}.$$

当 $t\to 0$ 时：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi_x(t)}{t} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

因此，若：

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t}\, dt < \infty,$$

则 $S_n(f,x) \to f(x)$ 当 $n\to\infty$。

### 6.3.1 注记

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $t \in (0, \delta_1)$ 时：

$$\left| \frac{\psi_x(t)}{t} \right| < \varepsilon.$$

因此：

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} \, dt = \int_0^{\delta_1} \frac{|\psi_x(t)|}{t} \, dt + \int_{\delta_1}^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} \, dt.$$

估计每一项：

$$\leq \varepsilon \delta_1 + \int_{\delta_1}^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t} \, dt.$$

由于 $\frac{1}{t}$ 在 $(\delta_1, \delta)$ 上是连续的，积分收敛。

### 6.3.2 结论

因此：

$$S_n(f, x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

## 6.4 推论 2：Dirichlet 收敛定理

**定理 4** (Dirichlet 收敛定理). 设函数 $f$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足：

- 分段光滑
- 在 $[-\pi, \pi]$ 上除有限个第一类间断点外连续

则对任意 $x \in (-\pi, \pi)$，其 *Fourier* 级数部分和满足：

$$S_n(x) \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \to \infty).$$

### 6.4.1 收敛性证明

定义偏差积分：

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \sin(nt) \, dt = \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin(nt) \, dt + \int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin(nt) \, dt$$

其中定义辅助函数：

$$\varphi_1(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}, \quad t \in (0, \delta]$$
$$\varphi_2(t) = \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}, \quad t \in (0, \delta]$$

### 6.4.2 正则性分析

- 在 $t \to 0^+$ 时（分段光滑保证左右导数存在）

$$\varphi_1(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x^+)$$

$$\varphi_2(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} = -f'(x^-)$$

- $\varphi_1, \varphi_2$ 在 $[0, \delta]$ 上连续

应用 Riemann-Lebesgue 引理

$$\int_0^\delta \varphi_i(t) \sin(nt)\, dt = o(1) \quad (n \to \infty), \quad i = 1, 2$$

因此原积分满足：

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t} \sin(nt)\, dt = o(1) \quad (n \to \infty).$$

## 6.5 推论 3：Lipschitz 条件下的收敛性

设 $f \in L(-\pi, \pi)$，若 $f$ 在 $x$ 处满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $M > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1]$，使得：

$$|f(x+t) - f(x)| \le M|t|^\alpha \quad \alpha \in (0, 1].$$

则 $S_n(f, x) \to f(x)$ 当 $n \to \infty$。

证明, 应用 Dini 定理

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

则：

$$\left|\frac{\psi_x(t)}{t}\right| \le \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t) - f(x)}{t}\right| \le 2M|t|^{\alpha-1}.$$

因此，积分：

$$\int_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t}\, dt \le 2M \int_0^\delta |t|^{\alpha-1}\, dt < \infty.$$

### 6.5.1 结论

由 Dini 定理可知：

$$S_n(f, x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

## 6.6 处理 Dini 条件的积分转换

在处理 Dini 条件时，将积分：

$$\int_0^\delta \psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt$$

转换为：

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{2t}\sin nt\,dt$$

是基于以下分析, 定义函数 $g(t)$ 如下：

$$g(t)=\begin{cases}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}, & t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}\\ 0, & t=0\end{cases}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上连续。

### 6.6.1 极限分析

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\right).$$

展开 $\cot\frac{t}{2}$：

$$\cot\frac{t}{2}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

当 $t\to 0$ 时，利用等价无穷小：

$$\sin\frac{t}{2}\sim\frac{t}{2},\quad \cos\frac{t}{2}\sim 1-\frac{t^2}{8}.$$

因此：

$$\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{t^2}{8}}{\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t}\left(1-\frac{t^2}{8}\right)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{t^2}{8}\right).$$

所以：

$$\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\sim\frac{1}{t}\left(1-\frac{t^2}{8}\right)-\frac{1}{t}=-\frac{t}{8}.$$

当 $t\to 0$ 时：

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\right)=0.$$

### 6.6.2 结论

因此，$g(t)$ 在 $t=0$ 处连续，且：

$$\int_0^\delta \psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt=\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{2t}\sin nt\,dt.$$

#### 6.6.3 注记

这种推论可以构造很多条件，只需要保证存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t}\, dt < \infty$$

如 $f \in C^2[-\pi, \pi]$ 且满足 Hölder 条件：

$$|f(x+\epsilon) - f(x)| \le M \cdot \frac{1}{|\ln|x||^{\epsilon+1}} \quad (\epsilon > 0)$$

则

$$S_n(f, x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

即 Fourier 级数在点 $x$ 处收敛于 $f(x)$。

# 7 Jordan 判别法

**定理 5** (Jordan 判别法). 设 $f \in L^1[-\pi, \pi]$，且 $f$ 在点 $x$ 的某邻域 $U(x, r)$ 上有界变差，则其 *Fourier* 级数部分和满足：

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right].$$

## 7.1 证明思路

1. **积分估计引理**：对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，有

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \le 6.$$

*证明.* 分情况讨论：

- 当 $1 \le |a| \le b$ 时，由第二积分中值定理，存在 $\xi \in [a, b]$ 使得：

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt\right| = \frac{1}{|a|}\left|\int_a^\xi \sin t dt\right| \le \frac{2}{|a|} \le 2.$$

- 当 $0 \le a \le b \le 1$ 时：

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt\right| \le \int_a^b 1 dt = b - a \le 1.$$

- 综合两种情况可得：

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \le 3 \text{ （同号积分）}.$$

- 对于一般情况（$a < 0 < b$）：

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \le \int_0^{|a|} + \int_0^b \le 6.$$

□

### 7.1.1 应用说明

- 有界变差函数类包含分段单调函数，故 Jordan 判别法比 Dini 条件适用范围更广。
- 当 $f$ 在 $x$ 处连续时，收敛值为 $f(x)$；在跳跃间断点收敛于左右极限的平均值。

## 7.2 Jordan 判别法证明步骤

设 $f \in BV(x-r, x+r)$，则 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 存在（因有界变差函数在每点存在单侧极限）。令：

$$c = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right),$$

并定义偏差函数：

$$\psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0).$$

### 7.2.1 Jordan 分解定理应用

根据 Jordan 分解定理，存在单调递增函数 $h_1, h_2$ 使得：

$$\psi_x(t) = h_1(t) - h_2(t), \quad \text{且} \quad h_1(0+) = h_2(0+) = 0.$$

### 7.2.2 偏差积分分解

部分和偏差可表示为：

$$S_n(f,x) - c = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \psi_x(t) \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + o(1).$$

### 7.2.3 积分估计

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得：

$$\begin{aligned} S_n(f,x) - C &= S_n(f,x) - \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \psi_x(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt + o(1) \end{aligned}$$

根据积分第二中值定理，

$$\begin{aligned} |S_n(f,x) - C| &\le \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta h_1(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta h_2(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \epsilon \\ &= \left|\frac{1}{\pi}h_1(\delta)\int_{\xi_1}^\delta \frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}h_2(\delta)\int_{\xi_2}^\delta \frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| + \epsilon \\ &\le \left(\frac{6+6}{\pi}\right)\epsilon + \epsilon = \left(1 + \frac{12}{\pi}\right)\epsilon. \end{aligned}$$

### 7.2.4 积分第二中值定理

设 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

若 $g$ 在 $[a,b]$ 上递减且 $g(x) \geq 0$，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

若 $g$ 在 $[a,b]$ 上递增且 $g(x) \geq 0$，则存在 $\eta \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\eta^b f(x)\,dx.$$

### 7.2.5 一般情况

若 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $g$ 单调，则存在 $\xi, \eta \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\eta^b f(x)\,dx.$$

## 7.3 推论 1:Dirichlet 条件

**定理 6** (Dirichlet 条件)**.** *设函数 $f \in L^1[-\pi,\pi]$ 上满足：*

- *有限个极值点（分段单调）*
- *在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个第一类间断点外连续*

*则对任意 $x \in (-\pi,\pi)$，其 Fourier 级数部分和满足：*

$$S_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad (n\to\infty).$$

因为满足 Dirichlet 条件的函数是有界变差函数，故逐点收敛到左右极限的平均值。