12-ը հուլիսի 2006թ.

Խնդիր 1: Դիցուք I կետը ABC եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: P կետը եռանկյան ներսում ընտրված է այնպես, որ

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB:$$

Ապացուցեք, որ $AP \geq AI$: Հավասարության նշանը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ P-ն համընկնում է I-ի հետ:

Խնդիր 2: P կանոնավոր 2006-անկյուն բազմանկյան անկյունագիծը կոչվում է «լավ», եթե նրա ծայրակետերը բաժանում են P-ի եզրագիծը երկու մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է կենտ թվով կողմեր: P բազմանկյան կողմերը նույնպես համարվում են լավ:

Դիցուք P-ն 2003 անկյունագծերի միջոցով տրոհված է եռանկյունների: Այդ անկյունագծերից ոչ մի երկուսը P-ի ներսում չունեն ընդհանուր կետեր: Որքա՞ն առավելագույն թվով հավասարասրուն եռանկյուններ կարող է ունենալ այդպիսի տրոհումը, երբ այդ հավասարասրուն եռանկյուններից յուրաքանչյուրը ունի երկու լավ կողմեր:

Խնդիր 3: Գտնել ամենափոքր M իրական թիվը այնպիսին, որպեսզի

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

անհավասարությունը տեղի ունենա կամայական a, b, c իրական թվերի համար:

Աշխատանքային ժամանակը՝ 4ժ. 30րոպե:
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր:

13-ը հուլիսի 2006 թ.

Խնդիր 4: Գտնել բոլոր (x, y) ամբողջ թվերի զույգերը, որոնք բավարարում են

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

հավասարմանը:

Խնդիր 5: Դիցուք $P(x)$-ը $n(n>1)$ աստիճանի ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է, իսկ k-ն կամայական դրական ամբողջ թիվ է: Դիտարկվում է

$$Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$$

բազմանդամը: [Այստեղ P-ն կիրառված է k անգամ:] Ապացուցել, որ գոյություն ունի n-ից ոչ ավելի t ամբողջ թվեր այնպիսին, որ $Q(t)=t$:

Խնդիր 6: P ուռուցիկ բազմանկյան յուրաքանչյուր b կողմին համապատասխանության մեջ է դրված եռանկյունների մակերեսներից ամենամեծը: Այդ եռանկյունները գտնվում են P-ի ներսում և որոնց կողմերից մեկը համընկնում է b-ի հետ: Ապացուցել, որ մակերեսների գումարը, որոնք համապատասխանեցված են P-ի բոլոր կողմերին, փոքր չէ P բազմանկյան մակերեսի կրկնապատիկից:

Աշխատանքի տևողությունը՝ 4 ժ. 30 րոպե:
Յուրաքանչյուր խնդիր
գնահատվում է 7 միավոր: