# پروژه آمار و احتمال مهندسی

## بخش تئوری

گروه 4


زهرا آقاشی پور 401101173

کیمیا حجازی پور 401101592

بخش دوم

پرسش تشریحی ۱ (اثبات نامساوی مارکف)

$$P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$$

proof $\rightsquigarrow$ $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x f_X(x)\,dx$ (X is positive)

$$\rightsquigarrow \int_{0}^{\infty} x f_X(x)\,dx \geq \int_{a}^{\infty} a f_X(x)\,dx \quad (x \geq a)$$

$$\rightsquigarrow \quad = a \int_{a}^{\infty} f_X(x)\,dx = a P(X \geq a)$$

$$\Rightarrow a P[X \geq a] \leq E[X]$$

$$\Rightarrow P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$$

# پرسش تئوری ۲

۱) یافتن کران بالا برای اینکه فردا حداقل 85 درصد مردم در ایستگاه سید پیاده شوند:

$$\mathbb{E}[X] = 0.75 \quad Var[X] = 0.25$$

$$\text{(markove's inequality)}: \mathbb{P}[X \geqslant 0.85] \leqslant \frac{0.75}{0.85} = 0.88$$

۲) یافتن کران پایین برای اینکه فردا بین 65 تا 85 درصد مردم در ایستگاه سید پیاده شوند

$$P[0.65 < X < 0.85] = \underbrace{P[X < 0.85]}_{\underbrace{1 - P[X \geqslant 0.85]}_{\geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}[X]}{0.85}}} - \underbrace{P[X < 0.65]}_{\underbrace{1 - P[X \geqslant 0.65]}_{\geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}[X]}{0.65}}}$$

$$\Rightarrow P[0.65 < X < 0.85] \geqslant 1.154 - 0.882 = 0.272$$

۳) اگر میانگین درصدی از مردم n روزانه از قطار پیاده می‌شوند را $X_i$ بنامیم سپس

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$P[0.7 \leqslant \bar{X} \leqslant 0.8] \geqslant 0.9$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow \bar{X} = \frac{Y}{n} \rightarrow E[X_i] = 0.75$$

$$\Rightarrow E[Y] = 0.75 \times n \qquad Var[X_i] = 0.25$$

$$Var[Y] = 0.25 \times n$$

$$P[0.7 \leq \bar{X} \leq 0.8] = [0.7 - 0.75 \leq \frac{\sum X_i}{n} - \mu \leq 0.8 - 0.75]$$

$$= P\left[\left|\frac{\sum X_i}{n} - \mu\right| \leq 0.05\right] \geq 0.9$$

$$P\left[\left|\frac{\sum X_i}{n} - \mu\right| > 0.05\right] \leq \frac{(0.25)^2}{(0.05)^2 \times n} \text{ also } \leq 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(0.25)^2}\ 25}{\cancel{(0.05)^2} \times n} = 0.1 \qquad n = 250$$

$X \sim Poi(\lambda)$ پرسش تئوری ۳

$Z_n \sim Poi(n\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}[Z_n] = n\lambda \quad Var[Z_n] = n\lambda$ ①

$$P[Z_n \geq kn\lambda] \xrightarrow{markov} \leq \frac{\mathbb{E}[Z_n]}{kn\lambda} = \frac{n\lambda}{kn\lambda} = \boxed{\frac{1}{k}}$$

$k = 1.25 \quad n = 20 \quad \lambda = 1$ (Via CLT) ②

$$P[Z_n \geq kn\lambda] = P\left[\frac{Z_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \geq \frac{kn\lambda - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right]$$

$$= P\left[\frac{Z_n - 20}{2\sqrt{5}} \geq \frac{5}{2\sqrt{5}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx - \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} e^{-x^2/2} dx\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(erf(\infty) - erf\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) \simeq 0.04$$

پرسش تئوری ۴

$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i \rightarrow$ مستقل و هم توزیع $\quad \psi_{Z_n}(s) = (\psi_X(s))^n$ نشان دهنده ① 

$$\mathbb{E}[e^{sZ_n}] = \mathbb{E}[e^{s\sum X_i}] = \mathbb{E}[e^{s(X_1 + \cdots X_n)}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{sX_1} \times e^{sX_2} \times \cdots \times e^{sX_n}] \xrightarrow{\text{استقلال}}$$

$$\mathbb{E}[e^{sX_1}] \times \mathbb{E}[e^{sX_2}] \times \cdots \times \mathbb{E}[e^{sX_n}] \xrightarrow{\text{هم توزیع}} (\mathbb{E}[e^{sX}])^n$$

$$\psi_X(s) = \ln \mathbb{E}[e^{sX}]^n \quad \psi_{Z_n}(s) = \ln \mathbb{E}[e^{sZ_n}] \Rightarrow \psi_{Z_n} = n\psi_X$$

پرسش تئوری ۵

اگر $s \geq 0$, $\beta > E[X]$ ثابت باشد: $P[Z_n \geq \beta n] = P[e^{sZ_n} \geq e^{s\beta n}] \leq e^{-rn}$

$$\left( r = \sup_{s \geq 0} \{ s\beta - \psi_X(s) \} \right)$$

$$P[Z_n \geq \beta n] = P[e^{sZ_n} \geq e^{s\beta n}]$$

از دو طرف $e^s$ گرفتیم چون صعودی است
در مقدار P تفاوتی ایجاد نمی‌کند

$\xleftarrow{\text{chernoff}}$

$$P[e^{sZ_n} \geq e^{s\beta_n}] \leq \min e^{-s\beta n} M_X^n$$

$$\xrightarrow{\ln} -\beta n s + n \ln M_X = -n(\underbrace{\beta s - \ln M_X}_{\max})$$

$$\frac{\max}{\min}$$

$$\Rightarrow r = \max(\beta s - \underbrace{\ln M_X}_{\text{همان } \psi_X \text{ می‌باشد}})$$

$$\hookrightarrow r = \sup\{ s\beta - \psi_X(s) \}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & P[e^{sZ_n} \geq e^{s\beta n}] \leq e^{-rn} \\ & r = \sup\{ s\beta - \psi_X(s) \} \end{aligned}}$$

پرسش تکراری ۴،

$$\Psi_X(s) = ? \leftarrow X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad 1$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$\mathbb{E}[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad x = z\sigma + \mu$$

$$\Rightarrow e^{\mu s} \int e^{z\sigma s} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma\, dz$$

$$= e^{\mu s} \int e^{z\sigma s} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$= e^{\mu s} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\underbrace{\sigma z s - \frac{1}{2}z^2}} \quad \rightarrow -\frac{1}{2}(z-\sigma s)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2$$

$$= e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma s)^2} \quad \sim N(\sigma s, \sigma^2)}$$

1 گویا انتگرال pdf توزیع گوسی
با میانگین $\sigma s$ و واریانس $\sigma^2$ را
داریم می‌شود که برابر با می‌باشد.

$$= \boxed{\exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}}$$

$$\Psi_X(s) = \mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}$$

(2) $E[X]=0$ و $|X|<M$ نشان دهید $\psi_X(s) \le \frac{1}{2}M^2 s^2$

$$M_X(s)=E[e^{sX}] \le \underbrace{E[e^{s|X|}] \le}_{|X|<M} E[e^{sM}] \underbrace{=}_{X\sim N(0,\sigma^2)} e^{\frac{1}{2}M^2 s^2}$$

$$\boxed{\psi_X(s)=\ln M_X(s) \le \ln\left(e^{\frac{1}{2}M^2 s^2}\right) = \frac{1}{2}M^2 s^2}$$

(3) $\beta > E[X]$ $|X_i|<M$ مستقل و هم توزیع $X_i$ $Z_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$P[Z_n \ge \beta n] \le e^{-\frac{\beta^2}{2M^2}n}$ ← نشان دهید

$P[Z_n \ge \beta n] \le e^{-rn}$ ← طبق پرسش ۵ داریم

$$r=\sup_s\{s\beta-\psi_X(s)\} \le r=\sup_s\{s\beta-\frac{1}{2}M^2 s^2\}$$

$$\frac{d}{ds}\left(s\beta-\frac{1}{2}M^2 s^2\right)=\beta-M^2 s=0 \qquad \boxed{s=\frac{\beta}{M^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} r=\frac{\beta^2}{M^2}-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{M^2}=\boxed{\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{M^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P[Z_n \ge \beta n] \le e^{-\frac{1}{2}\frac{\beta^2 n}{M^2}}}$$

بخش سوم:

قدم زدن تصادفی

بررسی تئوری $\underline{V}$

$$Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

در هر ایستگاه سکه:
- شیر $p$ ← سوار ✓ ایستگاه بعد پیاده
- خط $1-p$ ← سوار ✗

$Z_n \rightarrow$ شماره ایستگاه بعد از $n$ مرحله پرتاب سکه.

① تابع جرم احتمال $Z_n$؟

$$Z_n \sim Bin(n, p)$$

$$P[Z_n = z] = \binom{n}{z} p^{z} (1-p)^{n-z}$$

* اگر در ایستگاه اول سوار شود.

$$P[Z_n = z] = \binom{n}{z-1} p^{z-1} (1-p)^{n-z+1}$$

② $E[X]$ , $Var[X]$ ؟

$X \sim Ber(p)$ $E[X] = p$ $Var[X] = p(1-p)$

③ چه حسی به $E[Z]$ دارید؟ این مولفه چه چیزی را توصیف می‌کند؟

$$E[Z_n] \overset{n \geq 1}{=} np \qquad E[Z_0] = 1 \Rightarrow E[Z_n] = 1 + np \quad n \geq 0$$

این مولفه نشان می‌دهد به طور میانگین جمشید چند ایستگاه را طی می‌کند و با قبلی دارد

$n$ به سمت بی‌نهایت این مولفه به $\infty$ میل پیدا می‌کند بنابراین تعداد ایستگاه زیادی را طی می‌کند.

## پرسش تئوری ۸

موزه ← ایستگاه ۳۰۰ام باید رد بشود ← بلیط می‌خرد

تاس و او هی ← به اندازه عدد جلوی رود ← بلیط می‌خرد

← تاس می‌اندازد ر . . . ــ

احتمال اینکه حداقل ۸۰ بلیط برای رد کردن ایستگاه ۳۰۰ام نیاز باشد؟

۱/۱۰ هر

$X_i \sim \text{Uniform}(1,10)$ $\quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{10+1}{2} = 5.5 \quad Var[X_i] = \frac{\sum (x_i - 5.5)^2}{10} = 8.25$

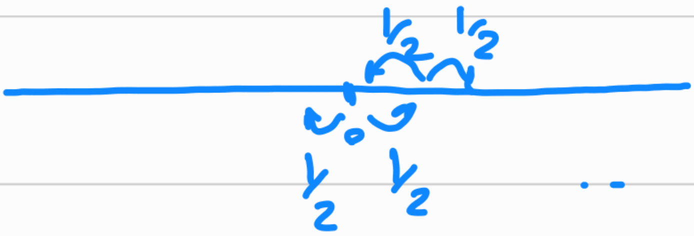
ها مستقل $X_i$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid n\right) \sim N(n \times 5.5,\ n \times 8.25)$$

به شرط استقلال

$$\mathbb{P} = \frac{\sum_{j=1}^{80} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 300 \mid n = j\right)}{\sum_{j=1}^{300} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 300 \mid n = j\right)} \quad \begin{array}{l} \to \sim N\left(\sum_{i=1}^{80} n \times 5.5,\ \sum_{i=1}^{80} n \times 8.25\right) \\ \to \sim N\left(\sum_{i=1}^{300} n \times 5.5,\ \sum_{i=1}^{300} n \times 8.25\right) \end{array}$$

$$= \frac{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\, dx}{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)}\, dx} \simeq \boxed{1}$$




پرسش تکراری 4

را شده مسافت جنبنده بعد از $n$ مرحله سه $Z_n$

رابطه بین

$$P_{Z_n}(z) = P[Z_n = z]$$

$$P_{Z_{n-1}}(z-1) = P[Z_{n-1} = z-1]$$

$$P_{Z_{n-1}}(z+1) = P[Z_{n-1} = z+1]$$

$$P_{Z_n}(z) = P_{Z_{n-1}}(z-1) \cdot \underbrace{P(Z_n = z \mid Z_{n-1} = z-1)}_{1/2} +$$

$$P_{Z_{n-1}}(z+1) \cdot \underbrace{P(Z_n = z \mid Z_{n-1} = z+1)}_{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Z_n}(z) = \frac{1}{2}\left[P_{Z_{n-1}}(z-1) + P_{Z_{n+1}}(z+1)\right]}$$

نشان دهید : ۲

$$P_{Z_n}(z) = P[Z_n = z] = \frac{n!}{\left(\frac{n-z}{2}\right)!\left(\frac{n+z}{2}\right)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

روش ۱

$$P_{Z_n}(z) = \frac{1}{2}\left[P_{Z_{n-1}}(z-1) + P_{Z_{n-1}}(z+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[P_{Z_{n-2}}(z-2) + 2P_{Z_{n-2}}(z) + P_{Z_{n-2}}(z+2)\right]$$

$$= \frac{1}{2^3}\left[P_{Z_{n-3}}(z-3) + 3P_{Z_{n-3}}(z-1) + 3P_{Z_{n-3}}(z+1) + P_{Z_{n-3}}(z+3)\right]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[P_{Z_{n-4}}(z-4) + 4P_{Z_{n-4}}(z-2) + 6P_{Z_{n-4}}(z) + 4P_{Z_{n-4}}(z+2) + P_{Z_{n-4}}(z+4)\right]$$

$$\vdots$$

$$= \boxed{\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{z+n}{2}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)\frac{n!}{\left(\frac{n-z}{2}\right)!\left(\frac{n+z}{2}\right)!}}$$

روش ۲

$$\begin{cases} n_{forward} - n_{backward} = z \\ n_{forward} + n_{backwark} = n \end{cases}$$

$$n_{forward} = \frac{1}{2}(n+z) \qquad n_{backward} = \frac{1}{2}(n-z)$$

$$Z_n \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Z_n}(z) = \frac{n!}{\left(\frac{n+z}{2}\right)!\left(\frac{n-z}{2}\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

۳ مشابه تست قبل قسمت ۱

$$\begin{cases} n_{forward} - n_{backward} = z \\ n_{forward} + n_{backward} = n \end{cases}$$

به جای $\frac{1}{2}$ ، $p$ قرار میدهیم .

$$n_{forward} = \frac{1}{2}(n+z) \qquad n_{backward} = \frac{1}{2}(n-z)$$

$$Z_n \sim Bin(n, p)$$

$$\Rightarrow P_{Z_n}(z) = \frac{n!}{\left(\frac{n+z}{2}\right)!\left(\frac{n-z}{2}\right)!} p^{\left(\frac{n+z}{2}\right)} (1-p)^{\left(\frac{n-z}{2}\right)}$$

| سحر بازی | جمشید | باغ وحش |
|---|---|---|
| $-1$ | $0$ | $2$ |

$$-1 \xleftarrow{1/2} 0 \xrightarrow{1/2} 1$$

پرسش تئوری چهار

**باغ وحش**

$0 \to 1 \to 2$ $\qquad \frac{1}{4}$

$0 \to 1 \leftarrow \to \to 2$ $\qquad \frac{1}{16}$

$0 \to 1 \leftarrow \to \leftarrow \to \to 2$ $\qquad \frac{1}{64}$

$\vdots$

$$P[\text{باغ وحش}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1-(1/4)^{\infty}}{1-1/4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}}$$

**سحر بازی**

$-1 \leftarrow 0$ $\qquad \frac{1}{2}$

$0 \to 1 \leftarrow \leftarrow -1$ $\qquad \frac{1}{8}$

$0 \to 1 \leftarrow \to \leftarrow \leftarrow -1$ $\qquad \frac{1}{32}$

$\vdots$

$$P[\text{سحر بازی}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(1/4)^{\infty}}{1-1/4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}}$$

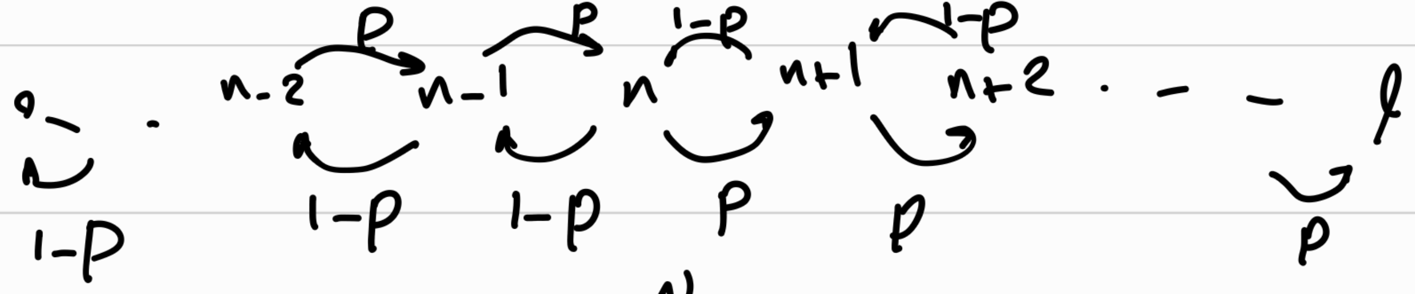
پرسش تئوری پنج

$$0 \;\cdots\; n-1 \xleftarrow{1-p} \underset{\text{جمشید}}{n} \xrightarrow{p} n+1 \;\cdots\; l$$

ایستگاه $l+1$

$0 \downarrow$ پیاده $\qquad l \downarrow$ پیاده

$P_n =$ احتمال اینکه $n$ سوار شه $l$ پیاده شه



اگر $n=l \longleftarrow P_n=1$ ، اگر $n=0 \longleftarrow P_n=0$

$$P_n = P(\text{رسیدن به } l \mid \text{در مرحله اول جلو رفته باشد})\, P(\text{در مرحله اول جلو رفته باشد})$$

$$+\; P(\text{رسیدن به } l \mid \text{در مرحله اول عقب رفته باشد})\, P(\text{در مرحله اول عقب رفته باشد})$$

$$\boxed{P_n = P_{n+1}\times p + P_{n-1}\times(1-p)}$$

if $p=\frac{1}{2} \Rightarrow P_n=\frac{1}{2}P_{n+1}+\frac{1}{2}P_{n-1}$

پاسخ به فرم $A+Bn$ باید باشد (طبق پرسش های قبل) سپس جایگذاری

$P_n=A+Bn \qquad P_0=A=0 \qquad P_l=A+Bl=1 \quad B=\frac{1}{l}$

$$\Rightarrow P_n=\frac{n}{l}$$

if $p\neq\frac{1}{2} \Rightarrow P_n=pP_{n+1}+(1-p)P_{n-1}$

پاسخ احتمالا باید به فرم $\lambda^n$ باشد سپس جایگذاری

$$P_n=\lambda^n=p\lambda^{n+1}+(1-p)\lambda^{n-1} \Rightarrow p\lambda^2-\lambda+(1-p)=0$$

$$\rightsquigarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p} \begin{cases} 1 \\ \frac{1-p}{p} \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_n = A + B\lambda^n = A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

$$P_0 = A + B = 0 \qquad P_\ell = A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^\ell = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^\ell - 1} \qquad B = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^\ell - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^\ell - 1} + \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^\ell - 1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}$$

$$t_n = p(t_{n+1} + 1) + (1-p)(t_{n-1} + 1)$$

با $p$ یک قدم جلو میریم

با $1-p$ یک قدم عقب میریم

$$= p\, t_{n+1} + (1-p)\, t_{n-1} + 1$$

* با دنباله را به شکل خواهیم خود.

$$\text{if } p = \tfrac{1}{2} \rightsquigarrow t_n = \frac{1}{2} t_{n+1} + \frac{1}{2} t_{n-1} + 1$$

اگر یادتون به فرم $n^2$ باید خواهیم داشت سه

$t_n = cn^2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} cn^2 = \frac{1}{2}c(n+1)^2 + \frac{1}{2}c(n-1)^2 + 1$

$\to c = -1 \quad t_n = -n^2.$

$t_n = \underbrace{A + Bn}_{\text{پاسخ همگن که از قبل داشتیم}} - n^2 \to t_0 = A = 0 \quad t_l = A + Bl - l^2 = 0$

$B = l \Rightarrow \boxed{t_n = ln - n^2}$

برای یافتن بیشینه مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم

$\to \frac{dt_n}{dn} = 0 \quad l - 2n = 0 \quad n = l/2$

اما $n$ گسسته است $\to n$
- $\to l/2 \quad l = 2k$ (زوج)
- $\to \frac{l+1}{2} \quad l = 2k-1$ (فرد)

if $p \neq \frac{1}{2}$ $\quad t_n = p\,t_{n+1} + (1-p)\,t_{n-1} + 1$ * با درجه ۰ به تناقض خواهیم خورد.

اگر پاسخ به فرم $n$ بگیریم

$t_n = cn$

جایگذاری $\quad cn = pc(n+1) + (1-p)c(n-1) + 1 \to c = \frac{1}{1-2p}$

$t_n = \frac{n}{1-p} \quad t_n = \underbrace{A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^n} + \frac{n}{1-2p}$

جواب همگن که از قبل داشتیم

$$t_0 = A+B = 0 \qquad t_l = A + \left(\frac{1-p}{p}\right)^l + \frac{l}{1-2p} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} A = \dfrac{\frac{l}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - 1} \\[2ex] B = -\dfrac{\frac{l}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = \frac{l/1-2p}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - 1} - \frac{\frac{l}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - 1} \times \left(\frac{1-p}{p}\right)^n + \frac{n}{1-2p}}$$

$$\frac{dt_n}{dn} = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{1-2p} - \frac{nl}{1-2p} \times \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - 1} = 0$$

با حل این معادله n را می‌توان به دست آورد!

$0 \;\cdots\; n-1 \xleftarrow{1-p} \overset{\text{صنید}}{n} \xrightarrow{p} n+1 \;\cdots\; \infty$

۱۲// پرسش تئوری

۱//

$$P_n = p P_{n+1} + (1-p) P_{n-1}$$

$P = \frac{1}{2} \rightsquigarrow P_n = A + Bn \longrightarrow P_0 = 1 = A$

$\hookrightarrow P_\infty = 0 = A + B(\infty) = 0$

$P_n = 1 \xrightarrow[D]{}$ حتماً از مبدا خارج خواهد شد.

$P \neq 1/2 \rightsquigarrow P_n = A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \longrightarrow P_0 = 1 = A + B$

$\hookrightarrow P_\infty = 0 = A + \left(\frac{1-p}{p}\right)^\infty B$

if $p > 1/2 \rightsquigarrow P_\infty = 0 = A$

$P_0 = 1 = B$

if $p < 1/2 \rightsquigarrow P_\infty = 0 = A + B(\infty) \Rightarrow B = 0 \quad A = 1$

$$\Rightarrow P_n = \begin{cases} 1 & p \leq 1/2 \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^n & p > 1/2 \end{cases}$$

$t_n = ?$ ۲/۱

$$t_n = p\,t_{n+1} + (1-p)\,t_{n-1} + 1$$

if $p = \frac{1}{2} \Rightarrow t_n = A + Bn - n^2$

$\to t_0 = 0 = A$

$\to t_\infty = B \lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} n^2$

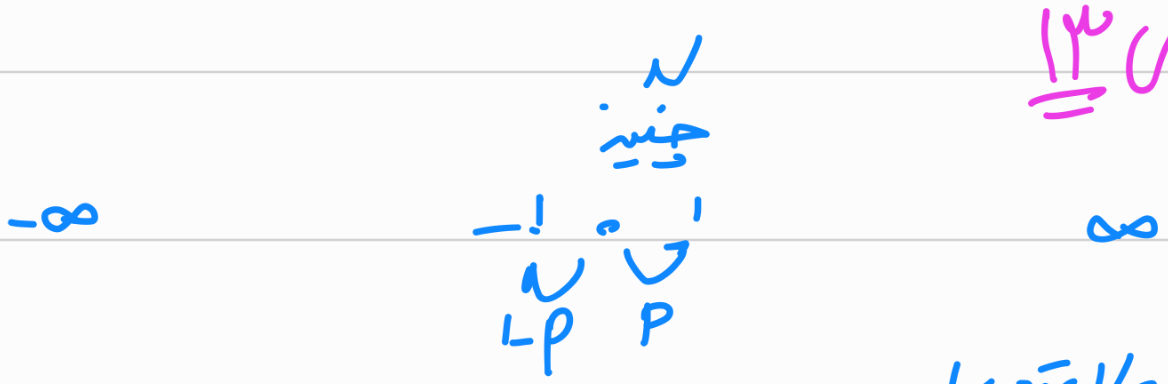
انتظار می‌رود درصد با صد گام به مبدا برسیم بنابراین $B \to \infty \Leftarrow t_n \to \infty$

if $p > \frac{1}{2} \Rightarrow t_n = A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^n + \frac{n}{1-2p}$ . $t_0 = A + B$

انتظار می‌رود درصد با صد گام به مبدا برسیم پس $A, B$ محدود

$t_n \to \infty$

# پرسش تکمیلی ۱۳




۱/ به جای اهمیت طول قدم‌ها

تنها جهت قدم‌ها اهمیت دارد. ← مدل توصیف‌شده به ریاضی ؟!

ایستگاه مقصد

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad X_i = \begin{cases} 1 & \text{forward} \\ -1 & \text{backward} \end{cases}$$

۲/ $P_k = \mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = k]$ $\quad P_1 = p + qP_2$

چرا این رابطه درست است ؟!

در اول حرکت جنبنده در ایستگاه صفر باشد ← $P_0 = 1$ به یک انتقال می

خواهیم داشت ←

$$P_1 = P\left(\text{ایستگاه } 1 \,\middle|\, \text{در مرحله قبل به جلو رفته}\right) P\left(\text{در مرحله قبل به جلو رفته}\right)$$

$$+ P\left(\text{ایستگاه } 1 \,\middle|\, \text{در مرحله قبل به عقب رفته}\right) P\left(\text{در مرحله قبل به عقب رفته}\right)$$

$$= p \times P_0 + (1-p) \times P_2 \quad p + qP_2 \ \blacksquare$$

۳) معادله مسئله ۲ برحسب $P$ به دست آورید و حل کنید. درباره ریشه‌ها بحث کنید

$$P_1 = p\times P_0 + q\times P_2 \overset{\text{داریم}}{\Longrightarrow} P_n = p\,P_{n-1} + (1-p)P_{n+1}$$

اگر پاسخ به فرم $z^n$ باشد داریم ←

$$z^n = p\times z^{n-1} + q\times z^{n+1} \qquad z = p + q z^2 \qquad P_1 = z$$

$$\Rightarrow\ z = \frac{1\pm\sqrt{1-4pq}}{2q} \begin{cases} \to 1 & \Rightarrow \text{if } P_1 > 1/2 \\ \to p/q & \Rightarrow \text{if } P_1 < 1/2 \end{cases}$$

شرط وجود ریشه‌ها

$*\quad 1-4p(1-p) \geq 0 \iff p(1-p) \leq 1/4 \Rightarrow$ ✓ همیشه درست.

۴) $P_k$ ؟

$$P_k = p\times P_{k-1} + (1-p)\times P_{k+1}$$

$P_k = P_1^k$

$P_0 = 1$

$P_{-k} = P_{-1}^k$

$$\to \text{if } P_1 \geq 1/2 \to P_k = \begin{cases} 1 & k\geq 0 \\ \left(\frac{q}{p}\right)^{-k} & k<0 \end{cases}$$

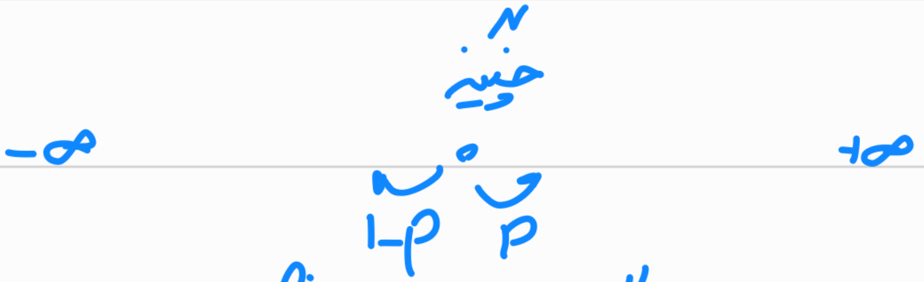
$$\to \text{if } P_1 < 1/2 \to P_k = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^{k} & k>0 \\ 1 & k<0 \end{cases}$$

۵) رفتار $P_k$ را در حالت‌های $p>\frac{1}{2}$ ، $p<\frac{1}{2}$ بررسی. $p=\frac{1}{2}$ چی؟!

در تست قبل به سوال پاسخ داده شد اما اگر $p$ دقیقاً $\frac{1}{2}$ باشد احتمال رسیدن به همه ایستگاه‌ها برابر ۱ می‌باشد

۶) $p=0.3$ سه احتمال $P_5$ ؟

$$P_5 = \left(\frac{0.3}{0.7}\right)^5 \simeq 0.014$$




## پرسش تئوری ۱۴

۱) $T_k$ مدت زمان لازم برای رسیدن از ایستگاه ۰ به k. نشان دهید $\mathbb{E}[T_k] = k\,\mathbb{E}[T_1]$

اگر فرض کنیم فاصله زمانی بین هر دو ایستگاه یکسان و برابر $T_1$ می باشد خواهیم داشت که

$$T_k - T_{k-1} = T_1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_k] = \underbrace{\mathbb{E}[T_{k-1}]}_{\underbrace{\mathbb{E}[T_{k-2}]}_{\mathbb{E}[T_{k-3}] + \mathbb{E}[T_1]} + \mathbb{E}[T_1]} + \mathbb{E}[T_1]$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_k] = k\,\mathbb{E}[T_1]$$

۲) $\mathbb{E}[T_1]$ را برحسب $p$, $q$ و $\mathbb{E}[T_2]$ بنویسید و معادله را حل کرده و $\mathbb{E}[T_1]$ را محاسبه کنید.

$$\mathbb{E}[T_1] = p\,\underbrace{\mathbb{E}[T_1 \mid T_0]}_{1} + q\,\underbrace{\mathbb{E}[T_1 \mid T_2]}_{\mathbb{E}[1+T_2] = 1 + \mathbb{E}[T_2]}$$

* هر ایستگاه مستقل از دیگری

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_1] = \overbrace{p+q}^{1} + q\,\mathbb{E}[T_2] = \boxed{1 + q\,\mathbb{E}[T_2]}$$

$\mathbb{E}[T_2] = 2\mathbb{E}[T_1]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[T_1] = 1 + 2q\mathbb{E}[T_1] \Rightarrow \mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{1-2q}$

$\mathbb{E}[T_k] = k\mathbb{E}[T_1] = \boxed{\frac{k}{1-2q}}$

? $\mathbb{E}[T_k]$

$\mathbb{E}[T_{50}] = \frac{50}{1-2(1-0.55)}$

? $= \mathbb{E}[T_{50}]$ , $p = 0.55$

$= 500$

## پرسش تکراری ۱۵

جمشید سوار تاکسی می‌خواهد شود. خیابان مثل محور اعداد حقیقی
جمشید در $Z_0=100$ سوار می‌شود. در هر ثانیه تاکسی به اندازه $X_i$ حرکت می‌کند

$X_i$ ها iid $\quad \mathbb{E}[X_i]=0 \quad Var[X_i]=1$

با چه احتمالی بعد از $n=10$ مرحله مکان جمشید بیشتر از $Z=105$ ؟

$$Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad P(Z_n > 105) = ?$$

$$P(Z_n > 105) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 5\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 10\times 0}{\sqrt{10\times 1}} > \frac{5-10\times 0}{\sqrt{10\times 1}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{\sqrt{10}} > \frac{5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = 0.06$$

پرسش تکوینی ۱۴

۷) نشان دهید که تابع چگالی احتمال مشترک $(X_i)_{i=1}^{n} = (X_1, \dots, X_n)$ با $(X_i)_{i=n}^{1} = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$ یکسان است؟

از آنجایی که $X_1, \dots, X_n$ ها مستقل اند داریم که

$$F_{X_i} = F_{X_1} \times F_{X_2} \times \dots \times F_{X_n}$$

$$\sum \int x_i f_{x_i} = \int f_{x_i} \sum x_i \Rightarrow$$ نابرابری مستقل از ترتیب می باشد

$$f_{(X_i)_{i=1}^{n}}\left((x_i)_{i=1}^{n}\right) = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

$$= f_{X_n}(x_n) \times f_{X_{n-1}}(x_{n-1}) \dots f_{X_1}(x_1)$$

$$= f_{(X_i)_{n}^{i=1}}\left((x_i)_{n}^{i=1}\right)$$

## پرسش تشریحی ۱۹

چنگیز پس از پیاده شدن از تاکسی سوار تاکسی دیگری می‌شود که آزادی عمل مشابهی دارد.

این تاکسی در هر گام در یک صفحه دو بعدی قدمی با اندازه r و با زاویه تصادفی بر می‌دارد.

$$X_i = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix} \qquad \theta \sim \text{Uniform}(0, 2\pi) \qquad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow$$

موقعیت چنگیز بعد از n گام

۱؟ $\mathbb{E}[Z_n]$

$$\mathbb{E}[Z_n] = \sum \mathbb{E}[X_i] = \sum \begin{bmatrix} r\mathbb{E}[\cos\theta] \\ r\mathbb{E}[\sin\theta] \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\cos\theta] = \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{d\theta}{2\pi} = 0 \qquad \mathbb{E}[\sin\theta] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_n] = 0$$

۲؟ $\mathbb{E}[\|Z_n\|^2]$

$$Z_n = r\begin{bmatrix} \sum \cos\theta_i \\ \sum \sin\theta_i \end{bmatrix} \Rightarrow \|Z_n\|^2 = r^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i\right)^2\right)$$

$$= r^2\left(n + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (\cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j)\right)$$

$$\mathbb{E}[\cos\theta_i \cos\theta_j] = \mathbb{E}[\cos\theta_i]\,\mathbb{E}[\cos\theta_j] = 0$$

also $E[\sin\theta_i \sin\theta_j] = 0$ اثبات

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\|Z\|^2] = nr^2$$

$\mathbb{E}[\|Z_n\|^4] = ؟$ ۳

$$\|Z_n\|^4 = r^4\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i\right)^4 + \left(\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\right)^4 + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\right)^2\right)$$

$$\mathbb{E}[\cos^3\theta_i\cos\theta_j] = \mathbb{E}[\sin^3\theta_i\sin\theta_j] = 0$$

$$\mathbb{E}[\cos^2\theta_i\cos^2\theta_j] = \mathbb{E}[\cos^2\theta_i]\mathbb{E}[\cos^2\theta_j] = \frac{1}{4}$$

$$* \ \mathbb{E}[\cos^2\theta_i] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left((1+\cos 2\theta)d\theta\right) = \frac{2\pi}{4\pi}$$

$$= \frac{1}{2} = \mathbb{E}[\sin^2\theta_i]$$

$$* \ \mathbb{E}[\cos^4\theta_i] = \mathbb{E}[\sin^4\theta_i] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 4\theta}{2} + 2\cos 2\theta\right) d\theta = 3/8$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\|z_n\|^4\right] = r^4\left[\left(n\left(\tfrac{3}{8}\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)6\right]\times 2\right.$$

$$+\ 2\times\left(n\left(\tfrac{1}{8}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\right) = \boxed{-\frac{3}{4}nr^4 + \frac{7}{4}n^2r^4}$$