بخش چهارم د

پرسش تکمیلی ۲ ج

$R = \{\exists\, n \in \mathbb{N} : Z_n = 0\}$

جنبید N.

$\xleftarrow{1/2} \; \bullet \; \xrightarrow{1/2}$

$\mathbb{P}[R] = ?$ $\quad \mathbb{E}[N] = ?$ تعداد دفعات بازگشت N

$\mathbb{P}[R] = p\underbrace{P_1}_{\text{احتمال رسیدن به مبدا از مکان 1}} + (1-p)P_{-1} \longrightarrow$ احتمال رسیدن به مبدا از مکان ۱-

که این مشابه پرسش تکمیلی ۲ می‌شود

$$P_n = \begin{cases} 1 & p \leq 1/2 \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^n & p > 1/2 \end{cases}$$ طبق ۲ خواهیم داشت

$p = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \mathbb{P}[R] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$

$\mathbb{E}[N]$ بی‌نهایت خواهد بود زیرا اگر رندوم واک می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد و امید ریاضی n در افزایش می‌یابد هرچه از مبدا دورتر می‌شویم. امید ریاضی n با احتمال ضعیف کمتری به نقطه خاصی میل می‌کند زیرا احتمال رسیدن به نقطه خاصی به صفر میل می‌کند

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(P[R]\right)^{n} \left(1-P[R]\right) = \infty$$ $\boxed{\text{واگرا و } \infty}$

طبق توضیحات پرسش شده ۸-۶-۳۴

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Z_{2n}=0]$$

طبق اثبات در سوال ۲۹ داریم

$$P[Z_{2n}=0] \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$$ پس وقتی $n \to \infty \Rightarrow E[N]$ واگرا می‌شود و به ∞ میل می‌کند

$$\Rightarrow E[N] = \infty$$

پرسش تشریحی ۴۱

$$P[X_i = x] = \begin{cases} 2/3 & x=1 \\ 1/3 & x=-1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$P[R] = ?$, $\mathbb{E}[N] = ?$

$$P[R] = \frac{2}{3} \times P_1 + \frac{1}{3} \times P_{-1} \xrightarrow[12]{\text{طبق}} P_1 = \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$\Rightarrow P[R] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{2/3}$$

فرض می‌کنیم از مبدا که شروع می‌کند

اما به مبدا دیگر بازنگشته

$N \to$ تعداد دفعات به مبدا

بنابراین خواهیم داشت

$$P[N=k] = P[R]^{k-1}(1-P[R]) \leftarrow \text{هندسی}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P[N=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P[R]^{k-1}(1-P[R]) =$$

$$(1-P[R]) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\, P[R]^{k-1}}_{\frac{d}{dP[R]}(P[R]^k)} = (1-P[R]) \frac{d}{dP[R]} \sum_{k=1}^{\infty} P[R]^k$$

$$= (1-P[R]) \times \frac{d}{dP[R]}\left(\frac{P[R]}{1-P[R]}\right)$$

$$= (1-P[R]) \times \frac{1}{(1-P[R])^2} = \frac{1}{1-P[R]} = \frac{1}{1-2/3} = \boxed{3}$$

پرسش تئوری ۲۲

ثابت کنید حرکت تصادفی جنگیز وفادار است اگر و فقط اگر به صورت تقریباً قطعی بسیار دفعه به مبدا باز گردد. برای اثبات این موضوع ثابت می‌کنیم

$$\mathbb{E}[N] = \infty$$

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathbb{P}[Z_{2n} = 0]$$

طبق اثبات در سوال ۲۹ داریم

$$\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$$

پس وقتی $n \to \infty \Rightarrow \mathbb{E}[N]$ واگرا می‌شود و به ∞ میل می‌کند

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N] = \infty$$

پرسش تکراری ۲۳

شماره ایستگاه جنینز بعد از n مرحله $\leftarrow Z_n$

A_x پیشامد زودتر رسیدن جنینز به ایستگاه $-1-x$ نسبت به ایستگاه $M-x$

$\cdots \xleftarrow{-\frac{1}{2}} \overset{\text{جنینز}}{\circ} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \cdots$

$$f : \{-1, 0, \dots, M-1, M\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \mathbb{P}[A_x] \qquad f(M) = 0 \qquad f(-1) = 1$$

شرط وضعیت یعنی $f(x) = \frac{1}{2} f(x+1) + \frac{1}{2} f(x-1)$

$\Leftarrow$ f مشخص است یعنی $f(x)$ چیست؟!

برای رسیدن به $f(x)$ باید در مرحله قبل در $f(x+1)$ و یا $f(x-1)$ باشیم و در هر کدام از اینجا با احتمال $\frac{1}{2}$ به $f(x)$ می‌رسیم زیرا که متقارن است. بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم که

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} f(x+1) + \frac{1}{2} f(x-1)}$$

معادله دیفرانسیل مشابه سوال ۱۱

$$\Rightarrow f(x) = A + Bx \longrightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow A - B = 1$$

$$f(M) = 0 \Rightarrow A + BM = 0, \quad A = -BM$$

$$\Rightarrow \quad -B(1+n)=1 \qquad B=\frac{-1}{1+n} \qquad A=\frac{n}{1+n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(n)=\frac{n}{1+n}-\frac{x}{1+n}}$$

پرسش تشریحی ۱۴

۱) با جایگذاری $f(0)=\frac{n}{1+n}$ به این عبارت می‌رسیم.

معنی یعنی باجی لاکپشت به ۱- می‌رسیم زودتر از n که با توجه به عبارت هرچه n بیشتر شود این احتمال هی بیشتر می‌شود.

۲ و ۳) احتمال اینکه حشره به ۱- برسد زودتر از n برابر $\frac{n}{n+1}$ است و احتمال اینکه هیچ وقت به ۱- نرسد برابر است با به هر n ای برسد قبل ۱- که این در بینهایت حالت برابر $\frac{1}{1+n}$ می‌باشد برای هر n درست حشره تقریباً قطعاً به ۱- می‌رسد. بنابراین

بنابه تقارن حشره به سمت تقریباً قطعاً به ۱ هم می‌رود پس از ۱ هم به سمت تقریباً قطعاً بنابراین حرکت حشره وفادار است!

ازدم می‌شود.

$$* \quad n\to\infty \qquad \frac{n}{n+1}=1 \qquad \frac{1}{1+n}=0 \; *$$

پرسش تشریحی ۲۶

با استفاده از صورت قوی قانون اعداد بزرگ نشان دهید اگر X_i ها مستقل و هم توزیع باشند و دارای امید ریاضی $\mathbb{E}[X_i] \neq 0$ باشند ← حرکت تصادفی متناهی بی‌وفاست

این قانون می‌گوید $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ به $\mathbb{E}[X_i]$ تقریباً حتماً میل می‌کند (وقتی $n \to \infty$)

اگر حرکت باوفا باشد $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ که با صورت قوی قانون اعداد بزرگ در تناقض است پس حرکت بی‌وفا می‌باشد.

پرسش تشریحی ۲۷

M_z ← تعداد دفعات عبور از نقطه z $\quad m(z) = \mathbb{E}[M_z]$

نشان دهید ← $m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[Z_n = z]$

اگر تعریف کنیم $M_z = \sum_{i=0}^{\infty} K_i$

$$K_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر در حرکت } i \text{ ام روی } z \text{ باشد} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_z] = \sum_{i=0}^{\infty} P[K_i = 1]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P[Z_i = z]$$

$m(z) = \mathbb{E}[M_z] = \sum_{n=0}^{\infty} p(Z_n = z)\,\underbrace{\mathbb{E}[M_z \mid Z_n = z]}$ راه دوم میشه

طبق پرسش تشریحی ۱۷ این برابر ۱ میشه باید

$$\Rightarrow \; m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(Z_n = z)$$

پرسش تشریحی ۲۷ با شهودسازی نشان دهید $m(z)$ در $z=0$ به مقدار

بی‌نهایت خود می‌رسد. طبق قسمت قبل داریم $m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(Z_n = z)$

$m(z)$ زمانی بی‌نهایت می‌شود که $p[Z_n = z]$ ها بی‌نهایت تکرار شوند و این اتفاق زمانی می‌افتد که به $z=0$ باید

زیرا در این حالت $p=1$ می‌شود (در قسمت‌های قبل اثبات کردیم احتمال بازگشت به مبدا در رندوم واک

یک بعدی متقارن همواره ۱ می‌باشد).

راه دوم میشه اگر در مرحله n ام در z باشیم گویا مسئله شیفت یافته و حال مسئله

بازگشت به مبدا است $M(z) = P_z M(0)$ که احتمال رسیدن از ۰ به z برای بار اول

از آنجاییکه برای z های غیر صفر این احتمال کوچکتر از ۱ است

و برای $z=0$ این احتمال ۱ است بنابراین $M(z)$ در $z=0$ بیشینه می‌شود.

پرسش تشریحی ۲۸

X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع ، $\mathbb{E}[X_i]=0$ ، $\exists B, |X_i| \le M$

۱/

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{E}[X_i]=0\\ |X_i| \le M\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[Z_n^2] \le nM^2$$

$$\xrightarrow[\text{inequality}]{\text{Markov's}} \mathbb{P}[|Z_n| > x] \le \frac{nM^2}{x^2} \quad \text{if we take } x = 2M\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[|Z_n| > 2M\sqrt{n}\right] \le \frac{nM^2}{4M^2 n} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[|Z_n| \le 2M\sqrt{n}\right] \ge 3/4 \ge 1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}\left[|Z_n| \le 2M\sqrt{n}\right] \ge 1/2}$$

۲/ با توجه به قسمت قبل نشان دهید

$$\sum_{z=-2M\sqrt{n}}^{2M\sqrt{n}} m(z) \ge n/2$$

طبق قسمت قبل ← $\sum_{z=-N(n)}^{N(n)} P[Z_n = z] \ge 1/2$

که بیانگر این است که $z \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $M(z) \longrightarrow \infty$ که نشان دهنده رفتار ریکارنت

حرکت است. اثبات با فرض خلف ←

$$m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[Z_n = z]$$ داریم $\underline{\underline{22}}$ طبق پرسش

بنابراین خواهیم داشت $\forall n,\ n \geq 0 \quad 2M\sqrt{n}$

$$\sum_{z=-N(n)}^{N(n)} m(z) \geq \sum_{z=-N(n)}^{N(n)} \sum_{k=0}^{n} P[Z_k = z] \geq \sum_{k=0}^{n} \sum_{z=-N(n)}^{N(n)} P[Z_k = z]$$

$-2M\sqrt{n}$

$$\underset{\text{طبق تست قبل}}{\geq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \Rightarrow \sum_{z=-N(n)}^{N(n)} m(z) \geq \frac{n}{2}$$

$$m(z) \leq m(0) \text{ if } \forall z \in \mathbb{Z} \quad m(z) < \infty$$ ۳

$$\Rightarrow \sum_{z=-N(n)}^{N(n)} m(z) \leq \sum_{z=-N(n)}^{N(n)} m(0)$$

$$\underset{\text{طبق تست قبل}}{\frac{n}{2} \leq} \Rightarrow \sum_{z=-N(n)}^{N(n)} m(0) \geq \frac{n}{2} \quad \times$$

$$\sum_{z=-2M\sqrt{n}}^{2M\sqrt{n}} m(0) = (4M\sqrt{n}+1)\,m(0) \ngeq \frac{n}{2}$$ زیرا

و این همواره بزرگتر از $\frac{n}{2}$ نیست! (به ازای همه n ها برقرار نیست)

بنابراین فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود! $\Leftarrow$ حرکت وهادار است

بخش پنجم

پرسش تکراری ۲۹

به کمک تقریب استرلینگ می‌توان نشان داد:

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

با استفاده از این نامساوی در مراحل زوج حرکت تصادفی حقیقی استدلال کنید که برای یک شبکه دو بعدی حرکت او وفادار و برای شبکه ۳ بعدی حرکت او بی‌وفاست.

تقریب استرلینگ: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $(2n)! \approx \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!\,n!} \xrightarrow[\text{استرلینگ}]{\text{تقریب}} \approx \frac{\sqrt{4\pi n} \times \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\pi (n)}}$$

با استفاده از این اثبات داریم

$$P[Z_{2n+1} = 0] = 0$$

$$P[Z_{2n} = 0] = 2^{-2n}\binom{2n}{n} \qquad \binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \longrightarrow P[Z_{2n} = 0] \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\mathbb{E}[N] = \sum P[Z_{2n}=0] \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \infty$$

• $$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}}\right)^{d} \leq P[Z_{2n}=0] \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^{d}$$

$$\mathbb{E}[N] = \begin{cases} <\infty & d \geq 3 \\ =\infty & d \leq 2 \end{cases}$$

برای n های فرد $P[Z_n=0]=0$ پس برای $d \leq 2$ ، $\sum_n P[Z_n=0]$ همگرا می شود و حرکت تصادفی وفادار می شود در حالیکه برای $d \geq 3$ این حرکت بی وفاست.

پرسش تئوری ۳۰

جابجایی چگشید در هر مرحله از مراحل قبل مستقل است و تابع چگالی احتمال جابجایی چگشید در هر مرحله به صورت زیر است

$$f_{X_n}(x_n)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x_n^T x_n}{2\sigma^2}\right)$$

چگشید از مبدا مختصات شروع می‌کند ← تابع چگالی احتمال مکان او در مرحله nام؟

$\Rightarrow f_{Z_n}(z_n)=\,?!$

$$Z_n = Z_{n-1} + X_n$$

$$\downarrow$$

$$Z_{n-2} + X_{n-1}$$

$$\downarrow$$

$$Z_{n-3} + X_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow Z_n = \sum_{i=0}^{n} X_n$$

از آنجایی که هر یک از X_i ها مستقل و گوسی هستند جمع گوسی‌ها نیز گوسی می‌شود.

$$Z_n \sim N(0, n\sigma^2)$$

$$\boxed{f_{Z_n}(z_n)=\frac{1}{(2n\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{-z_n^T z_n}{2n\sigma^2}\right)}$$

پرسش تکلیف ۳۱

بررسی توزیع مکان در n های بزرگ . به صورت متوسط در هر مرحله

جابجایی خیلی بزرگی در مقایسه با فاصله یا فاصله‌اش نسبت به مبدا ندارد ⇐

می‌توان $f_{Z_{n-1}}(z_n - x_n)$ را نسبت به بردار x_n بسط داد ← این بسط را تا مرتبه دوم

انجام دهید و عبارت به دست آمده برای $f_{Z_n}(z_n)$ را بنویسید .

(۱) رابطه
$$f_{Z_n}(z_n) = \int_{R^3} f_{X_n}(x_n) f_{Z_{n-1}}(z_n - x_n)\, dx_n$$

$$f_{Z_{n-1}}(z_n - x_n) = f_{Z_{n-1}}(z_n) + (x_n)^T \vec{\nabla} f_{Z_{n-1}}(z_n) + \frac{1}{2}(x_n)^T H_{Z_{n-1}}(z_n)(x_n)$$

$$f_{Z_n}(z_n) = \int_{\mathbb{R}^3} f_{X_n}(x_n) f_{Z_{n-1}}(z_n - x_n)\, dx_n = \underbrace{\int_{R^3} f_{X_n}(x_n) f_{Z_{n-1}}(z_n)\, dx_n}_{f_{Z_{n-1}}(z_n)} +$$

$$\underbrace{\cancel{\int_{R^3} f_{X_n}(x_n)(x_n)^T \vec{\nabla} f_{Z_{n-1}}(z_n)\, dx_n}}_{0} + \frac{1}{2}\int_{R^3} f_{X_n}(x_n)(x_n)^T H_{Z_{n-1}}(z_n)(x_n)\, dx_n$$

$$x_n^T H_{Z_{n-1}}(z_n)\, x_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ni}\left[H_{Z_{n-1}}(z_n)\right]_{ij} x_{nj}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{X_n}(x_n)\, x_n^T H_{z_{n-1}}(z_n)\, x_n\, dx_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left[H_{z_{n-1}}(z_n)\right]_{ij} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} f_{X_n}(x_n)\, x_{ni}\, x_{nj}\, dx_n}_{\sigma^2 \delta_{ij}}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left[H_{z_{n-1}}(z_n)\right]_{ij} \sigma^2 \delta_{ij} = \boxed{\sigma^2 \, \mathrm{trace}\left(H_{z_{n-1}}(z_n)\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{z_n}(z_n) = f_{z_{n-1}}(z_n) + \frac{\sigma^2}{2} \underbrace{\mathrm{trace}\left(H_{z_{n-1}}(z_n)\right)}}$$

$\nabla^2 f_{z_{n-1}}(z_n) \leftarrow$ می‌توان لاپلاسین نوشت

پرسش تکمیلی ۳۲

زمان هر مرحله δt با توجه به کوتاه بودن بودن این زمان و کوچک بودن واریانس بردار جابجایی

به یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌رسید (با فرض حرکت پیوسته‌تر برای زمان) تمامی مراحل ثابت را

جمع کردن و که باید جواب‌هایی با فرم روبه‌رو را داشته باشد $LHS = \alpha RHS$ — شامل مشتق‌های مکانی تابع چگالی احتمال موقعیت ذره

که شامل مشتق‌های زمانی تابع چگالی احتمال موقعیت ذره در زمان t $f_{z_t}(z_t)$ است.

مطابق پرسش قبل داریم

$$f_{z_n}(z_n) = f_{z_{n-1}}(z_n) + \frac{\alpha^2}{2}\operatorname{trace}\left(H_{z_{n-1}}(z_n)\right)$$

$$\rightarrow f_{z_t}(z_t) = \left[f_{z_t}(z_t) - \frac{\partial f_{z_t}}{\partial t}\delta t\right] + \frac{\alpha^2}{2}\operatorname{trace}\left(H_{z_t}(z_t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_{z_t}}{\partial t}\,\delta t = \frac{\alpha^2}{2}\operatorname{trace}\left(H_{z_t}(z_t)\right) \qquad \alpha^2 = s\,\delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_{z_t}}{\partial t} = \underbrace{\frac{s}{2}}_{\alpha}\,\underbrace{\operatorname{trace}\left(H_{z_t}(z_t)\right)}_{\nabla^2 f_{z_t}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial f_{z_t}}{\partial t} = \frac{s}{2}\nabla^2 f_{z_t}}$$

پرسش تشریحی ۳۳

از طرفین رابطه پرسش قبل فوریه بگیرید نسبت به مکان. معادله دیفرانسیل جدید

بدست آمده برحسب زمان است را حل کنید. در واقع ضریبه در صورت سوال باشد تابع مشخصه احتمال مکان

چگونه برحسب زمان؟!

$$k^T k$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(k) \triangleq \mathcal{F}^3\left[f_{z_t}(z_t)\right] \xrightarrow{d/dt} \frac{d\tilde{\mathcal{F}}(k)}{dt} = -\frac{s}{2}k^2\tilde{\mathcal{F}}(k)$$

$$\xrightarrow{\int} \tilde{\mathcal{F}}(k) = A e^{-\frac{s k^T k\, t}{2}} \longrightarrow \boxed{A=1}$$

$t=0 \to \tilde{\mathcal{F}}(k)=1$ ← زمانیکه می‌دانیم دقیقاً مکان را

$$f_{z_t}(z_t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{R^3} e^{-\frac{s k^T k\, t}{2}} e^{j k^T x}\, d^3k$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j k_x x} e^{-\frac{st}{2}k_x^2}\, dk_x$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j k_y y} e^{-\frac{st}{2}k_y^2}\, dk_y \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j k_z z} e^{-\frac{st}{2}k_z^2}\, dk_z$$

فوریه گوسی

$$\left[f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \alpha^2}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} \iff g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 \omega^2}{2}} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{Z_t}(z_t) = \left(\frac{1}{2\pi s t} \right)^{3/2} e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2st}}}$$

پرسش تمرین ۳۴

؟! $\cancel{Var[\|Z_t\|] / \mathbb{E}[\|Z_t\|] / f_{\|Z_t\|}(r)}$

به علت تجمعی – N

$$\boxed{f_{Z_t}(r) = \frac{4\pi r^2}{(2\pi st)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{2st}}}$$

$$\mathbb{E}\left[\|Z_t\|\right] = \int_0^\infty r \frac{4\pi r^2}{(2\pi st)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{2st}} dr$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi st)^{3/2}} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r^2}{2st}} dr \quad \left[\frac{r^2}{2st} = \lambda \quad d\lambda = \frac{r\,dr}{st}\right]$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}[\|Z_t\|] = \frac{4\pi}{(2\pi st)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\lambda} st \times 2st \lambda \, d\lambda$$

$$= \frac{4\pi \times 2(st)^2}{(2\pi st)^{3/2}} \underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda} d\lambda} \longrightarrow \Gamma(2) = 1$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{8st}{\pi}}}$$

$$\mathrm{Var}\left[\|Z_n\|\right] = \mathbb{E}\left[\|Z_n\|^2\right] - \mathbb{E}\left[\|Z_n\|\right]^2$$

$$\mathbb{E}\left[\|Z_n\|^2\right] = \int_0^\infty r^2 \times \frac{4\pi r^2}{(2\pi st)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{2st}}\, dr$$

$$\int_0^\infty \frac{4\pi r^2}{(2\pi st)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{2st}}\, dr = 1 \quad \leftarrow \text{داریم}$$

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2st}}\, dr = \frac{(2\pi st)^{3/2}}{4\pi} \qquad \left[\frac{1}{2st} = \alpha\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\alpha^{-\frac{3}{2}}\right)}_{\frac{3}{2}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\alpha^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty r^4 e^{-\alpha r^2}\, dr = 3st$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\left[\|Z_t\|\right] = 3st - \frac{1}{\pi}(8st) = \boxed{\frac{3\pi - 8}{\pi} st}$$

پرسش تشریحی ۳۵

نتیجه پرسش تشریحی ۳۳ را برحسب n به جای زمان بازنویسی کنید و [illegible] پرسش تشریحی ۳۲ را برحسب پارامترهای اولیه بنویسید.

نتیجه‌ی به دست آمده را با قضیه CLT مقایسه کنید.

$$f_{Z_t}(z_t) = \left(\frac{1}{2\pi s t}\right)^{3/2} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2st}}$$

$$s\,\delta t = \sigma^2 \xrightarrow{\times n} s\,\underbrace{n\,\delta t}_{t} = n\sigma^2$$

$$\Rightarrow st = n\sigma^2$$

$$\boxed{f_{Z_n}(z_n) = \left(\frac{1}{2\pi n \sigma^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{z_n^T z_n}{2n\sigma^2}}}$$

با قضیه حد مرکزی نیز به همین نتیجه می‌رسیم!

$$Z_n \sim (0, n\sigma^2)$$

پرسش شماره ۳۶

فرض کنید ما مکان اولیه حشره را نمی‌دانیم و تنها اطلاع ما از مکان اولیه او با
گاوسی زیر است :

$$f_{Z_0}(Z_0)=\frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{Z_0^T Z_0}{2\sigma_0^2}\right)$$

تابع گاوسی احتمال مکان حشره بر حسب زمان ؟!

$$Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad E[Z_n]=0$$

$Var[Z_n]=\sigma_0^2+n\sigma^2$ Z_0 از X_i ها مستقل است که Z_n گوسی است !

$$Z_n \sim N(0, \sigma_0^2+n\sigma^2)$$

$$f_{Z_n}=\left(\frac{1}{2\pi(\sigma_0^2+n\sigma^2)}\right)^{3/2} e^{-\frac{Z_n^T Z_n}{2(\sigma_0^2+n\sigma^2)}}$$

$$\Rightarrow f_{Z_t}=\left(\frac{1}{2\pi(\sigma_0^2+St)}\right)^{3/2} e^{-\frac{Z_t^T+Z_t}{2(\sigma_0^2+St)}}$$

پرسش تشریحی ۳۷

با فرض آنکه سفینه‌ی جنبنده در ابتدا در مبدا مختصات بوده $f_{Z_n}(z_n)$ را به صورت یک

انتگرال n بعدی به شامل $\tilde{f}^{(m)}_{X_m}(k)$ها می‌شود بنویسید.

به صورت بازگشتی می‌نویسیم ..

$$f_{Z_n}(z_n) = f^{(1)}_{X_n}(x_n) * f_{Z_{n-1}}(z_n - x_n) \quad (\text{pdf جمع متغیرها میشود کانولوشن})$$

$$\Rightarrow f_{Z_n}(z_n) = f^{(1)}_{X_1}(x_1) * f^{(2)}_{X_2}(x_2) * \cdots * f^{(n)}_{X_n}(x_n)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_{m=1}^{n} \tilde{f}^{(m)}_{X_m}(\vec{k})\right) = \boxed{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} f^{(m)}_{X_m}(\vec{k})\, d^3k}$$

پرسش تکوین ۳۸

در هر مرحله از حرکت واریانس جابه‌جایی افزایش می‌یابد.

$$f_{X_m}^{(m)}(x_m) = \frac{1}{(2\pi m^2 \sigma_0^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x_m^T x_m}{2m^2\sigma_0^2}\right)$$

با این فرض

$$f_{Z_n}(z_n) = ?! \quad Z_n \sim N\left(0, \sigma_0^2 \underbrace{\sum_{m=1}^{n} m^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\right)$$

توی ۲ N

$$Z_n \sim N\left(0, \sigma_0^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow f_{Z_n}(z_n) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_0^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^{3/2}} e^{\frac{-z_n^T z_n}{2\sigma_0^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}}$$