Задача: $y'' = y + 2\alpha \overset{+2}{+} \alpha x(1-x)$, $\alpha = 2 + 0{,}1N = 2 + 0{,}1 \cdot 11 = 3{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y'' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2$ с гран. условиями $\begin{cases} y'(0) = -3{,}1 \\ y(1) = e + \frac{1}{e} - 2 \end{cases}$

Решить методом стрельбы и методом прогонки.

$y(0) = 0{,}7$

Найдём точное решение y

$y'' = y$

$\lambda^2 = 1, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$

$y_{однород.} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

$y_* = 3{,}1x(x-1) - 2 \leftarrow$ угадал решение неоднородного уравнения

$y_*' = 3{,}1(2x-1)$

$y_*'' = 3{,}1 \cdot 2 = 6{,}2 \leftarrow$ левая часть

$\cancel{3{,}1x(x-1)} - 2 + \cancel{3{,}1x(1-x)} + 8{,}2 \leftarrow$ правая часть

$\downarrow$

$6{,}2$

$\Rightarrow y = y_{однород} + y_* = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + 3{,}1x(x-1) - 2$

$\underline{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + 3{,}1x(x-1) - 2,}$

Метод стрельбы.

Используем для решения задачи Коши метод Рунге-Кутта 4 порядка:

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_3,$

где $k_1 = hf(x_n, y_n),$

$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1),$

$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2),$

$k_4 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_3)$

Для начала приведем исх. краевую задачу к системе диф. ур-ий I п.

$y'' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2$

$\exists\ y' = z \Rightarrow z' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2$

$\begin{cases} y' = z \\ z' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2 \\ y(0) = 0{,}7 \\ z(0) = -3{,}1 \end{cases}$

Вместо задачи $\begin{cases} y'' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2 \\ y(0) = 0{,}7 \\ y(1) = e + \frac{1}{e} - 2 \end{cases}$

Рассм. задачу $\begin{cases} y'' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2 \\ y(0) = 0{,}7 \\ y'(0) = \mu \end{cases}$

μ-параметр

Соотв.
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2 \\ y(0) = 0{,}7 \\ z(0) = \mu \end{cases}$$

Выберем неком μ_0 и рассм. задачу

$$\begin{cases} y' = z \ (= f_1) \\ z' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2 \ (= f_2 = f) \\ y(0) = 0{,}7 \\ z(0) = \mu_0 \end{cases}$$

Решим эту задачу методом Рунге-Кутта 4 порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$$
$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}r_1 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{3}r_3 + \frac{1}{6}r_4$$

где
$$k_1 = h \cdot z_n$$
$$r_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h\left(z_n + \frac{1}{2}r_1\right)$$
$$r_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = h\left(z_n + \frac{1}{2}r_2\right)$$
$$r_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = h(z_n + r_3)$$
$$r_4 = f(x_n, y_n + k_3)$$

$\longrightarrow$ решение $y_n = y(\overset{b}{x_n}; \mu_0)$

Проверяем условие $|y_n - y(1)| < \varepsilon$

если выполняется $\to$ нашли решение

Если нет, то нужно выбирать след. $\mu = \mu_1$.

μ будем искать с помощью метода Ньютона

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{F(\mu_k)}{F'(\mu_k)}, \text{ где } F(\mu) = y(b, \mu) - y(1)$$

$$F(\mu_k) = y_n - y(1)$$
$$F'(\mu_k) - ?$$

Чтоб найти $F'(\mu_k)$ продиф. исх. ур-е по μ.

$$y'''_{xx\mu}(x,\mu) = f'_y y'_\mu + f'_{y'} \cdot y''_{x\mu}, \quad y'_\mu(a,\mu)=0$$

$$y''_{x,\mu}(a,\mu)=1$$

$$U(x,\mu) := y'_\mu(x,\mu)$$

$$\begin{cases} U''_{xx} = f'_y + f'_{y'} U'_x \\ U(a,\mu)=0 \\ U(a,\mu)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u \\ u(0)=0 \\ v(0)=1 \end{cases}$$

Решаем м. Рунге-Кутта 4 порядка:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{3}q_3 + \frac{1}{6}q_4$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{6}p_4$$

$$q_1 = h v_n \quad q_2 = h(v_n + \tfrac{1}{2}p_1) \quad q_3 = h(v_n + \tfrac{1}{2}p_2) \quad q_4 = h(v_n + p_3)$$

$$p_1 = h u_n \quad p_2 = h(u_n + \tfrac{1}{2}q_1) \quad p_3 = h(u_n + \tfrac{1}{2}q_2) \quad p_4 = h(u_n + q_3)$$

В результате получаем $F'(\mu_k) = y'_\mu(x,\mu)$

и т.д.

Метод прогонки. $\begin{cases} y'' = y + 3{,}1x(1-x) + 8{,}2, \\ y(0) = 0{,}7, \\ y(1) = e + \frac{1}{e} - 2 \end{cases}$ (1)

Зафикс. шаг h и будем искать решение в виде сеточной функции $\{y_k\}_{k=0}^{n}$, предполагая, что решение существует и единств. Воспользуемся аппроксимацией 2-ой производной: $y_k'' = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h} + O(h^2)$, пусть $y_i = y(x_i)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, где $N = \frac{1}{h}$. Подставим теперь y_k'' в (1) и получим

$$\begin{cases} y_0 = 0{,}7 \\ \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - y_k = 3{,}1x_k(1-x_k) + 8{,}2 \\ y_N = e + \frac{1}{e} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0{,}7 \\ y_{k-1} - (2+h^2)y_k + y_{k+1} = h^2(3{,}1x_k(1-x_k) + 8{,}2), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ y_N = e + \frac{1}{e} - 2 \end{cases}$$

Эта лин. однород. система имеет основную матрицу трехдиагональной структуры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & -(2+h^2) & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & -(2+h^2) & 1, \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & -(2+h^2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Она может быть решена методом прогонки, выполнено условие диагонал. преобладания, для первой и последней строк $|1| > 0$, для остальных строк, т.к. $h > 0$, то $|2+h^2| > 2$.

Результаты:

Метод прогонки оказался более быстро сходящимся, чем метод стрельбы (с исп. метода Рунге-Кутта 4п. и м. Ньютона)*

Метод прогонки очень хорошо подходит для краевых задач с лин. диф. ур-ем и подходит гораздо больше для таких задач, чем метод стрельбы.

Методы очень близки по быстроте сходимости в моем случае поскольку в методе стрельбы использовался довольно точный метод Р-К 4 порядка

* То, как я это проверял показано на одной из картинок.