2. Sucesiones[1]

Una *sucesión* (de números reales) es una aplicación $a\colon D \to \mathbb{R}$ cuyo dominio D es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. La imagen de un natural n del dominio se denota a_n (en lugar de $a(n)$, como es habitual en las aplicaciones) y se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. La sucesión a se denota también mediante (a_n). En lo sucesivo, la condición de que n pertenezca al dominio de una sucesión a cuando se describen propiedades de los términos a_n de la misma quedará sobreentendida (de modo análogo a que escribir $f(x)$ para una función f presupone que x pertenece al dominio de f).
La forma más usual de definir una sucesión (a_n) consiste en dar explícitamente la imagen de cada natural n del dominio (por ejemplo, $a_n = n^2 - 3$). Sin embargo, en ciertos contextos (por ejemplo, en el cálculo de la complejidad de los algoritmos), la forma natural en que aparecen las sucesiones es la *recurrente*, que consiste en dar los primeros términos $a_0, \dots, a_{k-1}$ y una relación que, para $n \geq k$, permita calcular a_n a partir de los k términos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$. Por ejemplo, una *progresión aritmética* es una sucesión en que cada término se obtiene del anterior sumando un número real fijo d denominado *diferencia*. En este caso, tenemos una sucesión definida mediante un primer término a_1 y la recurrencia $a_n = a_{n-1} + d$ para $n \geq 2$.

Cotas

Sea (a_n) una sucesión. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq k$ para todo n, se dice que k es una *cota superior* de (a_n) y que (a_n) está *acotada superiormente*; en ese caso, la menor de las cotas superiores se denomina *supremo* de (a_n). Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a_n$ para todo n, se dice que k es una *cota inferior* de (a_n) y que (a_n) está acotada inferiormente; en ese caso, la mayor de las cotas inferiores se denomina *ínfimo* de (a_n). Si (a_n) está acotada superior e inferiormente, se dice que (a_n) está *acotada*.

Límites

El *límite* de una sucesión (a_n) es

- el número real ℓ si para cada real $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que $|a_n - \ell| < \epsilon$ para todo $n \geq N$.
- $+\infty$ si para cada número real $M > 0$ existe un natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$.
- $-\infty$ si para cada número real $M < 0$ existe un natural N tal que $a_n < M$ para todo $n \geq N$.

Las notaciones

$$\lim_n a_n = \ell, \qquad \lim_n a_n = +\infty, \qquad \lim_n a_n = -\infty$$

[1]Extracto del libro "Cálculo para Ingeniería Informática", por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008.

indican, respectivamente, que el límite de (a_n) es el número real ℓ, $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. Si el límite de (a_n) es un número real ℓ, se dice que la sucesión es *convergente* y que *converge* hacia ℓ; si es $\pm\infty$, se dice que es *divergente*. Una sucesión que no es convergente ni divergente se denomina *oscilante*. Determinar el *carácter* de una sucesión es averiguar si es convergente, divergente u oscilante.
Una primera propiedad de las sucesiones convergentes es que son sucesiones acotadas. El recíproco no es cierto, como prueba, por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$, que es acotada pero no convergente.
Las tres definiciones de límite pueden englobarse en una. Sea $\square \in \{\ell, +\infty, -\infty\}$ y (a_n) una sucesión de dominio D. El límite de (a_n) es $\square$ si, para cada entorno U de $\square$, existe un entorno $(N, +\infty)$ de $+\infty$ tal que, si $n \in (N, +\infty) \cap D$, entonces $a_n \in U$.
La similitud de los límites de sucesiones con los de funciones en $+\infty$ se expresa en la siguiente propiedad.

- Sea $f(x)$ una función tal que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y definamos la sucesión (a_n) por $a_n = f(n)$. Entonces, la sucesión (a_n) tiene límite y $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Algunas propiedades involucran operaciones con dos límites. Si los dos límites son números reales, el significado de la operación es claro, pero si uno de ellos o los dos son $+\infty$ o $-\infty$, entonces debe entenderse lo siguiente (con las propiedades conmutativas de la suma y el producto sobreentendidas):

- $(+\infty) + \ell = +\infty$; $\quad (-\infty) + \ell = -\infty$.
  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty) \cdot \ell = +\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = -\infty$;
  si $\ell < 0$, $\quad (+\infty) \cdot \ell = -\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = +\infty$;
  $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $\quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$; $\quad (-\infty)(-\infty) = +\infty$;

- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty)^\ell = +\infty$;
  $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $\quad$ si $1 < \ell$, $\ell^{+\infty} = +\infty$; $\quad$ si $0 < \ell < 1$, $\ell^{+\infty} = 0$.

Los límites de sucesiones tienen las propiedades siguientes.

- Si una sucesión tiene límite, entonces este límite es único.

- Si existen $\lim\limits_n a_n$ y $\lim\limits_n b_n$, entonces $\lim\limits_n (a_n + b_n) = \lim\limits_n a_n + \lim\limits_n b_n$, con excepción del caso $+\infty + (-\infty)$.

- Si existen $\lim\limits_n a_n$ y $\lim\limits_n b_n$, entonces $\lim\limits_n (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_n a_n \cdot \lim\limits_n b_n$, con excepción de los casos $0 \cdot (\pm\infty)$.

- Si existen $\lim\limits_n a_n$ y $\lim\limits_n b_n = \ell \neq 0$, entonces $\lim\limits_n (a_n/b_n) = \dfrac{1}{\ell}\left(\lim\limits_n a_n\right)$.

- $\lim\limits_n |a_n| = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_n (1/a_n) = 0$.

- Si $\lim_n a_n = \square$ y $\lim_n b_n = \lozenge$, y la sucesión $c_n = a_n^{b_n}$ está definida, entonces $\lim_n c_n = \square^{\lozenge}$, excepto en los casos $1^{\pm\infty}$, 0^0 y $(+\infty)^0$.

Los casos en los que los límites de (a_n) y (b_n) son conocidos, pero ello no permite calcular directamente el límite de $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$, (a_n/b_n) o $(a_n^{b_n})$ se denominan casos de *indeterminación*, que suelen representarse por $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞, $0/0$, 1^∞, 0^0 y ∞^0. El cálculo de límites de sucesiones consiste, esencialmente, en estudiar métodos que permitan decidir, cuando se presenta una de estas indeterminaciones, si el límite existe y calcularlo.
Otras propiedades de los límites son las siguientes.

- Si el límite de una sucesión (a_n) es distinto de cero, entonces existe un término de la sucesión a partir del cual todos los restantes tienen el mismo signo que el límite.
- Si existe un natural N tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq N$, y $\lim_n a_n = \ell$, $\lim_n b_n = r$, $\lim_n c_n = s$, entonces $\ell \leq r \leq s$.
- Si existe un natural N tal que $b_n \leq a_n \leq c_n$ para todo $n \geq N$, y $\lim_n b_n = \ell = \lim_n c_n$, entonces $\lim_n a_n = \ell$.
- $\lim_n a_n = \ell \;\Rightarrow\; \lim_n |a_n| = |\ell|$; $\quad \lim_n |a_n| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_n a_n = 0$.
- Si $\lim_n a_n = 0$ y (b_n) es una sucesión acotada, entonces $\lim_n a_n b_n = 0$.
- Si $\lim_n a_n = +\infty$ y (b_n) es una sucesión acotada inferiormente, entonces $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$. Análogamente, si $\lim_n a_n = -\infty$ y (b_n) es una sucesión acotada superiormente, entonces $\lim_n (a_n + b_n) = -\infty$.
- Si $\lim_n a_n = \pm\infty$ y (b_n) tiene una cota inferior positiva, entonces $\lim_n a_n b_n = \pm\infty$.

Sucesiones monótonas

Una sucesión (a_n) es *creciente* si $a_m \leq a_n$ para todo $m < n$ y es *estrictamente creciente* si $a_m < a_n$ para todo $m < n$. Análogamente, (a_n) es *decreciente* si $a_n \leq a_m$ para todo $m < n$ y *estrictamente decreciente* si $a_n < a_m$ para todo $m < n$). Una sucesión *monótona* es una sucesión creciente o decreciente y una sucesión *estrictamente monótona* es una sucesión estrictamente creciente o estrictamente decreciente.
Se verifica el siguiente teorema.
Teorema de la convergencia monótona. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
De hecho, lo que ocurre es que, para las sucesiones acotadas y crecientes, el límite es el supremo, mientras que para las decrecientes el límite es el ínfimo.
Un ejemplo importante de sucesión monótona y acotada es

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

En muchos textos puede consultarse la demostración de que se trata de una sucesión estrictamente creciente y acotada entre 2 y 3. Su límite es un número irracional denominado número de Euler, denotado por e, y su valor aproximado es $2.71828183\ldots$
En relación con el límite anterior, también pueden demostrarse las propiedades siguientes

- Si (a_n) es una sucesión y $\lim_n |a_n| = +\infty$, entonces
$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$
- Si (a_n) y (b_n) son sucesiones tales que
$$\lim_n a_n = 1, \quad \lim_n |b_n| = +\infty, \quad \lim_n b_n(a_n - 1) = L,$$
entonces
$$\lim_n (a_n)^{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } L = -\infty, \\ e^L & \text{si } L \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{si } L = +\infty. \end{cases}$$

Criterios para el cálculo de límites

Criterio de Stolz. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones y (b_n) es estrictamente creciente y

$$\lim_n b_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \text{entonces} \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Criterio de la raíz. Si (a_n) es una sucesión tal que $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se cumple:

(i) si $L < 1$, entonces $\lim_n a_n = 0$;

(ii) si $L > 1$, entonces $\lim_n |a_n| = +\infty$.

Criterio del cociente. Sea (a_n) una sucesión tal que existe un natural N con la propiedad de que $a_n \neq 0$ para todo $n > N$. Supongamos que

$$\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

(i) Si $L < 1$, entonces $\lim_n a_n = 0$;

(ii) si $L > 1$, entonces $\lim_n |a_n| = +\infty$.

La semejanza entre los dos enunciados anteriores sugiere que hay alguna relación entre $\lim_n |a_n|/|a_{n-1}|$ y $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$. En efecto, así es:

- Sea (a_n) una sucesión tal que existe un natural N con la propiedad de que $a_n \neq 0$ para todo $n > N$. Si

$$\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \text{entonces} \quad \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Sin embargo, para una sucesión (a_n), puede ocurrir que la sucesión $(\sqrt[n]{|a_n|})$ tenga límite y la sucesión $(|a_n|/|a_{n-1}|)$ no lo tenga.

Subsucesiones

Una subsucesión de una sucesión (a_n) es una sucesión obtenida tomando infinitos términos de (a_n) manteniendo su posición relativa en la sucesión.
Por ejemplo, si en la sucesión $a_n = n^2 - 15$ tomamos sólo los términos de subíndice par, es decir, $D' = \{2k \in \mathbb{N} : k \neq 1\}$, obtenemos la subsucesión $a_{2k} = (2k)^2 - 15 = 4k^2 - 15$.
Usualmente, si (a_n) es una sucesión, una subsucesión se denota por (a_{n_k}). En el ejemplo anterior, $n_k = 2k$.

- Una sucesión es convergente y tiene límite ℓ si, y sólo si, todas sus subsucesiones son también convergentes y de límite ℓ.

Este resultado se utiliza a veces para demostrar que una sucesión no es convergente mediante la obtención de dos subsucesiones de límites diferentes.