6. Integración[1]

La integral de Riemann

De antiguo, es sabido que el procedimiento para calcular las áreas de los polígonos (regulares o no, convexos o no) consiste básicamente en triangularlos. El problema del área fue, desde el inicio, cómo calcularla para superficies no poligonales. Desde el siglo XVII hasta el XIX, el concepto de área se daba por supuesto y el cálculo de integrales se veía como un método para calcular áreas. A principios del siglo XIX, Agustin Cauchy dio un vuelco a este punto de vista definiendo el área como la integral. El problema pasó a ser qué superficies tienen área, es decir, qué funciones son integrables. La identificación de la integral con el área no es del todo ajustada, en el sentido de que un área es en todo caso no negativa, mientras que la integral de una función puede ser negativa.

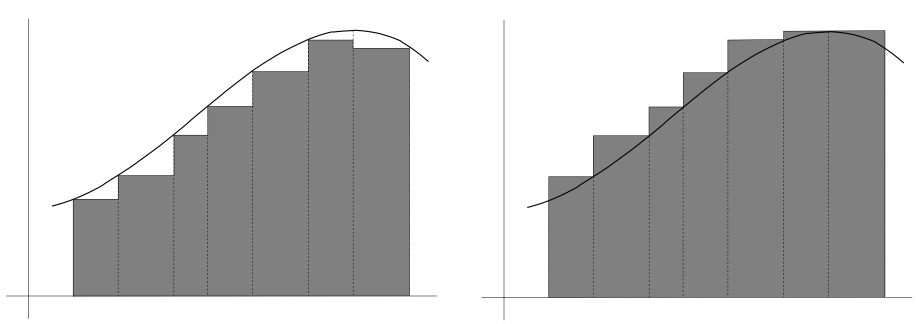
Aparte de los polígonos, una figura plana elemental con un lado curvo es la limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ (con $a < b$), y por la gráfica de una función $y = f(x)$. Las funciones que vamos a considerar inicialmente son las funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$, pero, como veremos, no todas las funciones acotadas en un intervalo son integrables.

Sean $a < b$ dos números reales y $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La discusión siguiente va encaminada a definir cuándo la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es un conjunto ordenado $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \le i \le n$) se denomina *i-ésimo subintervalo* de la partición. Puesto que la función f está acotada en $[a, b]$, también está acotada en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por lo que tiene ínfimo m_i y supremo M_i en dicho subintervalo. Definimos la *suma inferior* y la *suma superior* de f en $[a, b]$ respecto de la partición P por

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Si f es continua y positiva, la suma inferior corresponde a la suma de las áreas de n rectángulos que aproxima por defecto el área que se quiere definir; análogamente, la suma superior la aproxima por exceso (ver figura).



[1]Extracto del libro "Cálculo para Ingeniería informática", por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008

Puede demostrarse la siguiente propiedad: si f es una función acotada en $[a,b]$, y P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces,

$$s(f,P_1) \le S(f,P_2).$$

Ello implica que el conjunto $\{s(f,P)\ :\ P \text{ es una partición de } [a,b]\}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior. Por tanto, tiene supremo, que se denomina *integral inferior de f en* $[a,b]$ y se denota

$$\underline{\int_a^b} f.$$

Análogamente, el conjunto $\{S(f,P)\ :\ P \text{ es una partición de } [a,b]\ \}$ está acotado inferiormente por cualquier suma inferior. Por tanto, tiene ínfimo, que se denomina *integral superior de f en* $[a,b]$ y se denota

$$\overline{\int_a^b} f.$$

Una función acotada f definida en $[a,b]$ es *integrable Riemann* (o, simplemente, *integrable*) en $[a,b]$ si las integrales inferior y superior de f en $[a,b]$ coinciden. Este número común se denomina *integral de f en* $[a,b]$[2], y se denota por cualquiera de los dos símbolos

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

La definición de función integrable en un intervalo $[a,b]$ se extiende a los casos $b < a$ y $b = a$ como sigue. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces definimos

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Si a es un punto del dominio de f, entonces definimos

$$\int_a^a f = 0.$$

Funciones integrables

- Toda función acotada monótona en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$
- Toda función continua en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.
- Toda función acotada que tenga un número finito o numerable de discontinuidades en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.[3]

[2] La expresión *integral definida de $f(x)$ entre a y b* también se utiliza con frecuencia.

[3] En realidad, la propiedad más general de este tipo es la siguiente: una función f acotada en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, el conjunto D de puntos de discontinuidad de f tiene la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos $[a_o,b_0],[a_1,b_1],\ldots,[a_n,b_n],\ldots$ tal que la reunión de todos ellos contiene D y $\sum_{n=0}^{\infty}(b_i - a_i) < \varepsilon$.

Propiedades de la integral

- (Linealidad) Si f y g son integrables en $[a,b]$ y α, β son dos números reales arbitrarios, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a,b]$, y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \int_a^b \alpha f + \int_a^b \beta g.$$

- Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces fg es integrable en $[a,b]$ (sin embargo, no es cierto, en general, que la integral del producto sea igual al producto de las integrales).

- Si f y g son integrables en $[a,b]$ y f/g está definida en $[a,b]$ y es acotada, entonces f/g es integrable en $[a,b]$ (pero no es cierto, en general, que la integral del cociente sea igual al cociente de las integrales).

- Si f es integrable en $[a,b]$ y g es continua en un intervalo que contenga $f([a,b])$, entonces $g \circ f$ es integrable en $[a,b]$.

- (Monotonía) Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces,

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

  En particular, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

- Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ también lo es, y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

- (**Teorema de la media**) Si f es integrable en $[a,b]$, y m y M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de f en $[a,b]$, entonces existe $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b f = \mu(b-a).$$

  En el caso de que f sea continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a),$$

  y se dice que $f(c)$ es la *media* de f en $[a,b]$.

- (Aditividad respecto del intervalo) Si f es integrable en $[a,b]$, y $a \leq c \leq b$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

El teorema fundamental del cálculo

El cálculo de áreas, y por tanto la integración, es un problema de la ciencia que se ha estudiado desde muy antiguo; Arquímedes, por ejemplo, ya se ocupó del tema en el siglo III a.C. La derivación es relativamente moderna, pues se introduce con Leibniz y Newton en el siglo XVIII. El teorema fundamental del cálculo enlaza, de forma sorprendente, dos temas aparentemente lejanos como son la integración y el cálculo de derivadas.
Teorema fundamental del cálculo. Sea f una función integrable en $[a,b]$ y definamos la función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces,

i) F es continua en $[a,b]$.

ii) Si f es continua en $c \in (a,b)$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Si f y F son funciones definidas en un intervalo (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, se dice que F es una *primitiva* de f en (a,b). En el caso frecuente de que la función f sea continua, el teorema anterior adquiere la siguiente forma.
Corolario. Si f es una función continua en $[a,b]$ y definimos la función F en $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es continua en $[a,b]$ y es una primitiva de f en (a,b).
Obsérvese que la función F está definida mediante integración de la función f y que su derivada ($F'(x) = f(x)$) puede calcularse aun cuando no se sepa expresar F como combinación de funciones elementales.
Como consecuencia del teorema anterior, se deduce la llamada *regla de Barrow*, que permite, para una función f continua en $[a,b]$, calcular su integral en dicho intervalo a partir de una primitiva suya en (a,b).
Regla de Barrow. Si f es una función continua en $[a,b]$ y F es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Integración numérica

Cuando es difícil, demasiado laborioso o imposible calcular la integral de una función en un intervalo mediante la regla de Barrow, el recurso de los métodos numéricos se impone. Los métodos más elementales consisten en considerar particiones y sustituir la función por un polinomio en cada subintervalo. Después, el punto crucial es poder acotar el error cometido con este proceder.
Dos de los métodos más elementales son el método de los trapecios y el método de Simpson, que estudiamos a continuación.

El método de los trapecios

Sea f una función continua en $[a, b]$, y consideremos una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ con los puntos equiespaciados y, por tanto, con todos los subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$. El método de los trapecios consiste en aproximar la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ por la suma de las integrales de las rectas que pasan por $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Si se puede obtener una cota de la derivada segunda, entonces el error puede acotarse. Con precisión, el teorema es el siguiente.

Teorema (método de los trapecios). Sean f una función con derivada segunda continua en $[a, b]$, $h = (b - a)/n$ y $x_i = a + ih$ para $i = 0, \ldots, n$. Entonces, existe $\mu \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\mu).$$

Si $|f''(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$, el error que se comete con la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

es menor que

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M.$$

El método de Simpson

Sea f una función continua en $[a, b]$, y consideremos una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$, con n par y con los puntos equiespaciados y, por tanto, con todos los subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$. El método de Simpson consiste en aproximar la integral de f en cada intervalo de la forma $[x_i, x_{i+2}]$ mediante el polinomio de segundo grado que pasa por los tres puntos $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$.

Si se puede obtener una cota de la derivada cuarta, entonces el error puede acotarse. Con precisión, el teorema es el siguiente.

Teorema (método de Simpson). Sean f una función con derivada cuarta continua en $[a, b]$, $h = (b - a)/n$ con $n = 2m$ par y $x_i = a + ih$ para $i = 0, \ldots, n$. Entonces, existe $\mu \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\mu).$$

Si $|f^{(4)}(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el error cometido con la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right)$$

es menor que

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M.$$

Apéndice: cálculo de primitivas

Sea $f(x)$ una función definida en un dominio D. El problema que abordamos es determinar las funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in D$. Una tal función $F(x)$ se denomina una *primitiva* de $f(x)$ en D. La igualdad $F'(x) = f(x)$ puede verse como una ecuación en la que $f(x)$ es un dato y la función $F(x)$ la incógnita. Ciertamente, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en D, entonces, para toda constante K, la función $G(x) = F(x)+K$ también es una primitiva de $f(x)$ en D, pues, en efecto, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Como consecuencia del teorema del valor medio, dos primitivas de una función *en el mismo intervalo* difieren en una constante.

Si F es una primitiva de f, se escribe $\displaystyle\int f = F + K$ o $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + K$ y se entiende que el conjunto de primitivas de f en un cierto intervalo es el conjunto de funciones de la forma $x \mapsto F(x) + K$, con K constante. La expresión anterior también se lee *la integral (indefinida) de $f(x)$ es $F(x) + K$*.

De las propiedades de las derivadas se deduce que si α y β son números reales y f y g funciones con primitivas, entonces $\displaystyle\alpha\int f + \beta\int g = \int(\alpha f + \beta g)$.

Integrales inmediatas

Sea u una función derivable. Las reglas de derivación proporcionan las siguientes reglas de integración inmediata.

$$\int u^r u'\,dx = \frac{u^{r+1}}{r+1} + K \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + K$$

$$\int u' a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + K \quad (a > 0) \qquad \int u' e^u\,dx = e^u + K$$

$$\int u' \cos u\,dx = \operatorname{sen} u + K \qquad \int u' \operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + K$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen} u}\,dx = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + K \qquad \int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \tan u + K$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}\,dx = -\cot u + K \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + K$$

$$\int \frac{u'}{a^2 + u^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + K$$

Cambio de variable

Supongamos que se desea calcular una primitiva $F(x)$ de $f(x)$. Si componemos F con una nueva función g derivable e inyectiva, por la regla de la cadena, tenemos

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Por tanto,

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + K.$$

Si, para una función g adecuada, se sabe calcular $\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t))$, entonces, sustituyendo $g(t)$ por x se obtiene $F(x)$.

Integración por partes

La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones u y v es $(uv)' = u'v + uv'$. Tomando primitivas y pasando uno de los términos de la derecha a la izquierda, se obtiene

$$\int uv' = uv - \int vu',$$

que se denomina *fórmula de integración por partes*. Una notación más usual para esta fórmula es

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Integrales racionales

Recordemos que las funciones racionales son las de la forma $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con coeficientes reales. Aquí discutiremos la integración de este tipo de funciones.
Si $\deg P(x) > \deg Q(x)$, entonces, por el algoritmo de la división de polinomios, existen polinomios $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que $P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$ y $R(x) = 0$ o $\deg R(x) < \deg P(x)$. En este caso, tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Puesto que $C(x)$ es un polinomio, se sabe integrar. Si $R(x) = 0$, el problema está terminado. Si no, queda reducido a calcular la integral de una función racional $R(x)/Q(x)$ con el grado del numerador menor que el del denominador. En adelante nos restringiremos a este tipo de funciones.
Una función racional $P(x)/Q(x)$, con $\deg P(x) < \deg Q(x)$, admite una descomposición única en suma de $\deg Q(x)$ funciones racionales determinadas por la descomposición de $Q(x)$ en factores irreducibles mónicos, de acuerdo con los criterios siguientes:

- Para cada factor de $Q(x)$ de la forma $(x-a)^n$, aparece una suma de n sumandos de la forma
$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

- Para cada factor de $Q(x)$ de la forma $(x^2+bx+c)^n$, aparece una suma de n sumandos de la forma
$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

Los coeficientes numéricos de los numeradores se obtienen igualando $P(x)$ con el numerador de la función resultante al efectuar la suma de las fracciones de la descomposición. Como resultan dos polinomios iguales, la igualación de los coeficientes del mismo grado da un sistema de ecuaciones lineales cuya solución proporciona los valores de los coeficientes. Alternativamente, pueden darse tantos valores arbitrarios a x como coeficientes (pero conviene darlos de forma que el cálculo sea lo más simple posible) y obtener también un sistema de ecuaciones lineales

La integración de una función racional se reduce a la integración de las fracciones simples en que se descompone. Aparecen los tipos siguientes:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + K.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + K$, donde $n \geq 2$ es un natural.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$, con $b^2-4c<0$. En este caso, completando cuadrados tenemos $x^2+bx+c = (x-p)^2+q^2$ para ciertos reales p y q. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{1}{(x-p)^2+q^2}\,dx \\ &= \frac{1}{q}\int \frac{1}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1}\,dx \\ &= \arctan\frac{x-p}{q} + K.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$, con $b^2-4c<0$. En este caso, para ciertas constantes M y N se tiene $M(2x+b)+N = Ax+B$. Entonces

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = M\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + N\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx.$$

  La primera de estas integrales es inmediata

$$M\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = M\ln(x^2+bx+c),$$

  y la segunda es del tipo estudiado en el punto anterior.

El último tipo a considerar $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$, con $b^2-4c<0$ y $n \geq 2$, no lo trataremos aquí.

Integrales trigonométricas

Una *función racional* en $u_1, \dots, u_n$ es una función que se expresa a partir de constantes y de las variables $u_1, \dots, u_n$, y utilizando exclusivamente las operaciones suma, producto y cociente.
Consideremos una integral de la forma

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx,$$

donde R es una función racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Si la función R tiene ciertas propiedades, el uso de cambios de variable adecuados y de fórmulas trigonométricas permite calcular la primitiva. Explicitamos a continuación algunos cambios y fórmulas de utilidad.

- Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \cos x$ y entonces se tiene
$$dt = -\operatorname{sen} x\, dx, \quad \cos x = t, \quad \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}.$$
- Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \operatorname{sen} x$ y entonces se tiene
$$dt = \cos x\, dx, \quad \operatorname{sen} x = t, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}.$$
- Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \tan x$ y entonces se tiene
$$dt = (1+t^2)\, dx, \quad \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
- Si R no está en ninguno de los tres casos anteriores, se hace el cambio $t = \tan{(x/2)}$ y entonces se tiene
$$dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
- En alguno de estos casos, se puede reducir el grado de los polinomios involucrados en R utilizando las fórmulas
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$
- Las integrales de funciones trigonométricas del tipo
$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx, \quad \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx$$
se transforman en integrales inmediatas mediante las fórmulas de transformación de sumas en productos.
$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$
$$2 \cos A \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$
$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)$$

Integrales irracionales

En los casos siguientes, R representa una función racional. Algunos cambios de utilidad son los siguientes.

- Si $p_1/q_1, \ldots, p_k/q_k$ son fracciones irreducibles, las integrales del tipo

  $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx$$

  se transforman en integrales racionales mediante el cambio $t^n = (ax+b)/(cx+d)$ con $n = \operatorname{mcm}(q_1, \ldots, q_k)$.

- Para las integrales del tipo

  $$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx,$$

  se utiliza el cambio $x = a \operatorname{sen} t$.

- Para las integrales del tipo

  $$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx,$$

  se utiliza el cambio $x = a/\cos t$.

- Para las integrales del tipo

  $$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx,$$

  se utiliza el cambio $x = a \tan t$.

Primitivas no expresables como combinación de funciones elementales

La casi totalidad de funciones que hemos considerado y que aparecen en los problemas son combinación de funciones elementales.
En las páginas anteriores, hemos descrito algunos métodos de cálculo de primitivas. El hecho de que existan muchas y diversas técnicas, cada una adecuada a tipos específicos de funciones, podría dar la falsa impresión de que cualquier función integrable tiene una primitiva que se puede expresar como combinación de funciones elementales, lo cual no es cierto. La existencia de técnicas tan variadas es más bien un indicio de la dificultad de obtener métodos suficientemente generales.
Es remarcable que existan funciones continuas de apariencia simple que tienen primitiva, pero cuya primitiva no se puede expresar como combinación de funciones elementales. Algunos ejemplos son los siguientes:

$$\int e^{-x^2}\, dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\, dx, \quad \int x^x\, dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx, \quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x}.$$