5. La Fórmula de Taylor[1]

Un recurso para estudiar el comportamiento de una función en un entorno de un punto es aproximarla mediante alguna otra función fácil de evaluar, particularmente por un polinomio. En este apartado, se asocia a cada función suficientemente regular un polinomio que la aproxima.
Sea f una función n veces derivable en el punto a. El *polinomio de Taylor de grado* n *para* f *en* a es el polinomio

$$P_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La diferencia $R_n(f,a,x) = f(x) - P_n(f,a,x)$ se denomina *resto* n*-ésimo de Taylor* de la función f en el punto a.
Para que exista la derivada n-ésima de f en a, la función $f^{(n-1)}$ debe existir en un entorno U de a. Por tanto, la condición de que exista $f^{(n)}(a)$ puede sustituirse por las condiciones de que f sea $n-1$ veces derivable en un entorno U de a y n veces derivable en a.
Notemos que $y = P_1(f,a,x)$ es la ecuación de la *recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.
Se cumplen las dos propiedades siguientes.

- El valor del polinomio $P_n(f,a,x)$ y el de todas sus derivadas hasta orden n en el punto a coinciden con los de la función f en este punto; es decir,

$$P_n^{(i)}(f,a,a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0,\dots,n.$$

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f(x) = P_n(f,a,x)$. Además, si por divisiones sucesivas por $x-a$ se obtienen los cocientes $q_i(x)$ y los restos $r_i(x)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)q_1(x) + r_0, \\ q_1(x) &= (x-a)q_2(x) + r_1, \\ q_2(x) &= (x-a)q_3(x) + r_2, \\ \cdots & \quad \cdots \\ q_{n-1} &= (x-a)q_n + r_{n-1}, \end{aligned}$$

se cumple que

$$f(a) = r_0, \quad f'(a) = r_1, \quad \dots \quad \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = r_{n-1}, \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = q_n.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{R_n(f,a,x)}{(x-a)^n} = 0.$

[1]Extracto del libro “Cálculo para Ingeniería informática”, por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008

El límite anterior puede interpretarse en el sentido de que la similitud entre $f(x)$ y $P_n(f,a,x)$ es más acusada cuanto mayor es el grado y cuanto más cerca esté x de a.
Una función f es un *infinitésimo* en el punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Sean f y g dos infinitésimos en a. El infinitésimo $f(x)$ es *de orden mayor* que el infinitésimo $g(x)$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Intuitivamente, esto significa que, cuando x tiende hacia a, la función $f(x)$ tiende a 0 mucho más rápidamente que $g(x)$; en cierto sentido, en las proximidades de a, la función $f(x)$ es despreciable frente a $g(x)$. La notación $o(g(x))$ representa una función de orden mayor que $g(x)$. En este capítulo, utilizaremos esencialmente la comparación con las funciones de la forma $x \mapsto (x-a)^n$ con n natural y, especialmente, en el caso $a = 0$. En ciertos contextos, no es importante precisar qué función $f(x)$ se está considerando, sino que únicamente importa que tenga la propiedad de que su cociente por $(x-a)^n$ tenga límite 0; esto es lo que se indica con la notación $o((x-a)^n)$.
Si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

y $0 \le r \le n$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^r f(x)}{(x-a)^{n+r}} = 0, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)/(x-a)^r}{(x-a)^{n-r}} = 0,$$

propiedades que pueden escribirse

$$(x-a)^r o((x-a)^n) = o((x-a)^{n+r}), \qquad \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^r} = o((x-a)^{n-r}).$$

Análogamente, puede probarse que

$$o((x-a)^r)\, o((x-a)^n) = o((x-a)^{n+r}).$$

Si una función f es n veces derivable en a, su resto n-ésimo de Taylor $R_n(f,a,x)$ es de orden mayor que $g(x) = (x-a)^n$, por lo que la función f puede escribirse $f(x) = P_n(f,a,x) + o((x-a)^n)$ o, más explícitamente,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

La fórmula anterior se conoce como *desarrollo de Taylor de grado n de la función f en en el punto a.*[2]
Describimos, a continuación, el comportamiento de los polinomios de Taylor respecto a las operaciones con funciones. Enunciamos los resultados en el punto 0. Los resultados correspondientes en un punto a se obtienen mediante el cambio de variable $x \mapsto t = x - a$.
Sean f y g dos funciones con derivadas n-ésimas en el punto 0 y sean $p = P_n(f,0,x)$ y $q = P_n(g,0,x)$ los correspondientes polinomios de Taylor de grado n. Entonces,

[2] En el caso particular $a = 0$, el desarrollo suele denominarse de *MacLaurin*, aunque en este texto nosotros no utilizaremos esta terminología.

- Si α y β son números reales, el polinomio de Taylor de grado n de $\alpha f + \beta g$ en el punto 0 es $\alpha p + \beta q$.
- El polinomio de Taylor de grado n de $f \cdot g$ en el punto 0 es el polinomio obtenido de pq suprimiendo los términos de grado $> n$.
- Si $g(0) \neq 0$, el polinomio de Taylor de grado n de f/g en el punto 0 es el cociente de la división de p por q según potencias de x crecientes hasta el grado n incluido.
- Si $f(0) = 0$, el polinomio de Taylor de grado n de $g \circ f$ en el punto 0 es el polinomio obtenido de $q \circ p$ suprimiendo los términos de grado $> n$.

A continuación, detallamos los desarrollos de Taylor de grado n en $a = 0$ de algunas funciones.

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = \dbinom{\alpha}{0} + \dbinom{\alpha}{1}x + \dbinom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$,

  donde α es un número real y, para todo entero $k \geq 0$,

  $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

- $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
- $\operatorname{arc\,sen} x = x + \dfrac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.
- $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
- $\operatorname{arg\,senh} x = x - \dfrac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

- $\arg\tanh x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

Puesto que el coseno de un ángulo es igual al seno del complementario, tenemos

$$\arccos(x) = \pi/2 - \operatorname{arc\,sen}(x),$$

lo que proporciona el desarrollo de la función $\arccos(x)$. La función $\arg\cosh x$ no está definida en 0, por lo que no admite desarrollo de Taylor en 0. Hemos omitido los desarrollos de $\tan x$ y $\tanh x$, que involucran los denominados *números de Bernoulli* que no consideraremos aquí.
En el cálculo de límites de funciones en un punto a, la sustitución de funciones $f(x)$ por sus expresiones de la forma $f(x) = P_n(f,a,x) + o((x-a)^n)$ y la aplicación de las propiedades mencionadas de $o((x-a)^n)$ ha resultado ser una buena técnica.

El teorema de Taylor

En el caso de que f sea una función $n+1$ veces derivable en un entorno de a, se dispone de la siguiente expresión del resto.
Teorema de Taylor. Sea f una función $n+1$ veces derivable en un entorno U de a. Entonces, para cada $x \in U \setminus \{a\}$ existe un punto c entre x y a tal que

$$R_n(f,a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

La expresión anterior se denomina *resto de Lagrange*.
En las condiciones del teorema de Taylor, tenemos

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

expresión que se denomina *fórmula de Taylor de grado n de la función f en el punto a.*
A continuación se dan las fórmulas de Taylor de grado n de algunas funciones en el punto 0. El valor c es intermedio entre 0 y x.

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + e^c\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n\dfrac{(1+c)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1}$.
- $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}x^n + \dfrac{\operatorname{sen}(c+(n+1)\pi/2)}{(n+1)!}x^{n+1}$.
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n!}x^n + \dfrac{\cos(c+(n+1)\pi/2)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

- $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dfrac{\cosh c}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ si $n = 2k$;

  $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dfrac{\operatorname{senh} c}{(2k+2)!}x^{2k+2}$ si $n = 2k+1$.

- $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \dfrac{\operatorname{senh} c}{(2k+2)!}x^{2k+2}$ si $n = 2k$;

  $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \dfrac{\cosh c}{(2k+2)!}x^{2k+2}$ si $n = 2k+1$.

Cota del error

La siguiente terminología será de utilidad. Sean I un intervalo (de cualquier tipo) y $n \geq 0$ un entero. La *clase* $\mathcal{C}^n(I)$ está formada por todas las funciones f cuyo dominio contiene I y tales que, en todo $x \in I$, existe la derivada n-ésima $f^{(n)}$ y esta derivada es continua. En particular, la clase $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$ está formada por todas las funciones continuas en I. Es claro, además, que si $n > m$, entonces $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^m(I)$. La *clase* $\mathcal{C}^\infty(I)$ está formada por las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes en I (equivalentemente, que pertenecen a $\mathcal{C}^n(I)$ para todo $n \geq 0$). Análogamente, si $a \in \mathbb{R}$, las clases $\mathcal{C}^n(a)$ y $\mathcal{C}^\infty(a)$ están formadas por las funciones que tienen derivada n-ésima continua en a y por las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes en el punto a, respectivamente.
Sea f una función $n+1$ veces derivable en un entorno U de a, y supongamos que la función $f^{(n+1)}$ está acotada por una constante K en el intervalo abierto de extremos a y $x \in U$. Entonces,

$$|f(x) - P_n(f,a,x)| = |R_n(f,x,a)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ello permite aproximar $f(x)$ por $P_n(f,a,x)$ en un entorno de a y acotar el error cometido con la aproximación. En particular, si I es el intervalo cerrado de extremos a y x (es decir, $[a,x]$ o $[x,a]$) y $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, entonces la función $f^{(n+1)}$ es continua en el intervalo cerrado I y, por tanto, tiene máximo absoluto en I, por lo que puede tomarse como K dicho máximo.

Estudio local de funciones

El polinomio de Taylor permite generalizar las condiciones suficientes para monotonía, extremos relativos y convexidad vistos anteriormente.
Respecto a la monotonía y los extremos relativos, tenemos las siguientes condiciones suficientes.
Sea f una función de clase $\mathcal{C}^n(a)$ tal que

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces, se tiene que

- n par y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a;

- n par y $f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ tiene un máximo relativo en a;
- n impar y $f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ es estrictamente creciente en un entorno de a.
- n impar y $f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ es estrictamente decreciente en un entorno a.

Respecto a la convexidad, tenemos las siguientes condiciones suficientes.
Sea f una función de clase $\mathcal{C}^n(a)$ tal que

$$f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces, se tiene que

- n par y $f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ es convexa en un entorno de a.
- n par y $f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ es cóncava en un a.
- n impar $\;\Rightarrow\; f$ tiene un punto de inflexión en a.