Demostracions de Matemàtiques I

Grafs i àlgebra lineal

ⓒ F. M. Lasaca

Quadrimestre primavera 2016

1 Grafs

1. *Doneu la definició de la matriu d'incidència d'un graf.*

Sigui $G = (V, A)$ un graf amb $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

La *matriu d'incidència* és la matriu $M_I = M_I(G)$ de tipus $n \times m$ tal que, l'element b_{ij} de la fila i i columna j és:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ i } a_j \text{ són incidents} \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

2. *Enuncieu i demostreu el Lema de les encaixades.*

Sigui $G = (V, A)$ un graf, on $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ amb $n \geq 1$.

— *Enunciat*: $\displaystyle\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$

— *Demostració*.

- Si $m = 0 \implies \forall v \in V,\ g(v) = 0$. La fórmula és certa.
- Si $m \geq 1$, sigui $M_I(G) = (b_{ij})$ la matriu d'incidència de G de tipus $n \times m$, on

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ i } a_j \text{ són incidents} \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Corol·laris. A partir de la definició de $M_I(G)$, tenim:

a. Si fixem una fila k tal que $1 \leq k \leq n$, llavors $\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = g(v_k)$.

b. Si fixem una columna ℓ tal que $1 \leq \ell \leq m$, llavors $\sum_{\ell=1}^{m} b_{i\ell} = 2$.

Demostració:

$$\sum_{v \in V} g(v) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(v_i)}_{\text{suma graus}} \stackrel{a}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} \right)}_{\text{suma}\times\text{files}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right)}_{\text{suma}\times\text{columnes}} \stackrel{b}{=} \sum_{j=1}^{m} 2 = 2 \cdot m = 2|A| \qquad \square$$

3. *Siguin u i v vèrtexs diferents d'un graf G. Demostreu que si G conté un $u - v$ recorregut de longitud k, aleshores conté un $u - v$ camí de longitud com a molt k.*

Fem una demostració per inducció completa sobre $k \geq 1$.

Denotem $P(k)$ per "A G, hi ha un $u - v$ camí de longitud $\leq k$".

- *Cas base:* $k = 1$. Si hi ha un $u - v$ recorregut de longitud 1, això és una aresta; és a dir: un camí de longitud 1 $\implies$ es verifica $P(1)$.
- *Pas inductiu.*

  Fixem un graf G que té dos vèrtexs diferents $u, v \in V$ i suposem que hi ha un $u - v$ recorregut de longitud $k > 1$.

  - *Hipòtesis d'inducció.* Es verifica $P(\ell)$ per tot $\ell \in [1, k-1]$.
  - *Tesi.* Es verifica $P(k)$.
  - *Demostració.* Considerem el recorregut $u - v$:

  $$R\colon (u = u_0)\; u_1\; u_2\; \cdots\; u_{k-1}\; (u_k = v)$$

  Estudiem per casos:

  * Tots els vèrtexs de R són diferents $\implies$ R és un camí de longitud k $\implies$ $P(k)$ és cert.
  * Altrament: $\exists i, j$ amb $0 \leq i < j \leq k$ tal que $u_i = u_j$. Per tant, podem reescriure R així:

  $$R\colon (u = u_0)\; u_1\; \cdots\; u_i\; \underbrace{u_{i+1}\; \cdots\; u_{j-1}\; u_j}_{S}\; u_{j+1}\; \cdots\; u_{k-1}\; (u_k = v)$$

  Si eliminem S de R, tenim

  $$R'\colon (u = u_0)\; u_1\; \cdots\; u_i\; u_{j+1}\; u_{j+2}\; \cdots\; (u_k = v)$$

  R' és un $u - v$ recorregut (perquè $u_i \sim u_{j+1}$) i de longitud $\ell < k$, ja que, almenys, hem tret una aresta $\implies$ (per H.I.) hi ha un $u - v$ camí de longitud $\leq \ell < k$.

  Per tant, la proposició és certa. □

4. *Demostreu que si un graf connex té ordre n i mida m, aleshores $m \geq n - 1$.*

V. dem que, si G és un graf connex d'ordre ≥ 1, aleshores mida $G \geq$ ordre $G - 1$.

Ho fem per inducció sobre $n \geq 1$.

Definim $P(n) :=$ "si un graf connex té grau n, aleshores mida $G \geq$ ordre $G - 1$".

- *Cas base.* Si $n = 1$, llavors necessàriament $m = 0$. Per tant, es verifica $P(1)$.
- *Pas inductiu.* Suposem $P(n)$. Volem demostrar $P(n+1)$.

  Sigui G un graf d'ordre $n + 1$ i connex. Volem veure que mida $G \geq$ ordre $G - 1 = (n+1) - 1 = n$.

  Pot passar:

  - *Que tot vèrtex tingui grau ≥ 2.* Si $\forall v \in V, g(v) \geq 2$, llavors

  $$\text{mida}\, G = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} g(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (n+1) \geq n$$

- *Que hi hagi algun vèrtex $u \in V$ amb grau 1.*

  Considerem $G' = G - u$. Tenim:

  * ordre G' = ordre $G - 1 = (n+1) - 1 = n$.
  * mida G' = mida $G - g(u)$ = mida $G - 1 = n$.

  Sabem que G és connex. Volem demostrar que G' és connex. És a dir, per tot parell de vèrtexs diferents $x, y \in V - \{u\}$, $\exists x - y$ camí.

  Si el $x - y$ camí no passa per u, llavors és un camí a G'. Però, que passi per u és impossible, perquè $g(u) = 1$, i $x \neq y \neq u$. Per tant G' és connex.

  Per H.I., mida $G' \geq$ ordre $G' - 1$.

  $$\text{mida } G' \geq \text{ordre } G' - 1 \quad \overset{+1}{\Longrightarrow} \quad (\text{mida } G' + 1) \geq (\text{ordre } G' + 1) - 1$$

  Comparant ordres i mides de G i G', llavors mida $G \geq$ ordre $G - 1$. $\square$

5. *Doneu la definició de vèrtex de tall.*

Un vèrtex $v \in V$ de $G(V, A)$ és de tall $\iff$ $G - v$ té més components connexos que G.

6. *Enuncieu i demostreu la caracterització dels vèrtexs de tall.*

Sigui $G = (V, A)$ un graf **connex**.

$\boxed{u \text{ és vèrtex de tall} \iff \exists x, y \in V - \{u\} \text{ tal que tot } x - y \text{ camí passa per } u}$

$\boxed{\Rightarrow}$ u és un vèrtex de tall $\implies$ $G - u$ és no-connex $\implies$ $G - u$ té, almenys, dos c.c. Siguin x, y dos vèrtex de $G - u$ que són a c.c.s diferent $\implies$ a $G - u$ no hi ha $x - y$ camins, però a G sí, perquè G és connex (*hipò.*) $\implies$ $\forall x - y$ camí a G passa per u.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists x, y \in V - \{u\}$ tals que $\forall x - y$ camí a G passa per u $\implies$ a $G - u$ no hi ha un $x - y$ camí $\implies$ $G - u$ NO és connex $\wedge$ G connex $\implies$ u és un vèrtex de tall. $\square$

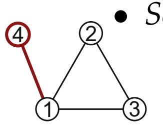
7. *Enuncieu els teoremes d'Ore i de Dirac sobre grafs hamiltonians. Per a cadascun d'ells, doneu un exemple que mostri que la condició del teorema no és necessària i un exemple que mostri que la desigualtat que apareix en la condició del teorema no es pot millorar.*

Teorema d'Ore. $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot $u, v \in V$ diferents i no adjacents es té $g(u) + g(v) \geq n$. Aleshores, G és un graf hamiltonià.

Teorema de Dirac. $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n/2$ per a tot $u \in V$. Aleshores, G és hamiltonià.

Veiem que:

- *No són necessàries.* Sigui T_3 hamiltonià d'ordre $n = 3$. *Ore falla*: $1 \nsim 3$, però $g(1) + g(3) = 1 + 1 = 2 \ngeq n = 3$. *Dirac falla*: $g(1) = 1 \ngeq n/2 = 3/2$. $\square$
- *Són les millors fites possibles.*



  - *Teorema d'Ore.* Sigui G d'ordre $n = 4$ de la figura. Veiem que $2 \nsim 4 \wedge g(2) + g(4) = 2 + 1 = 3 = n - 1$ i G no és hamiltonià: té el vèrtex de tall 1.

- *Teorema de Dirac*. Sigui $G \approx T_3$. Veiem que $g(1) = 1$, però $g(1) = 1 < n/2 = \frac{3}{2}$, però G no és hamiltonià perquè té el vèrtex de tall 2. $\square$

8. *Doneu la definició de senderó i de senderó eulerià.*

Senderó. Recorregut obert que no repeteix arestes.

Senderó eulerià. Senderó que passa per totes les arestes d'un graf.

9. *Demostreu que un graf connex conté un senderó eulerià si i només si té exactament dos vèrtexs de grau senar.*

Hipòtesi comuna: G graf connex.

$\boxed{G \text{ conté un senderó eulerià } \iff G \text{ té exactament dos vèrtexs de grau senar}}$

$\Rightarrow$ *Hipòtesi*: $\boxed{G \text{ conté un senderó eulerià}}$

G conté un senderó eulerià $S\colon x_0\ x_1\ \cdots\ x_m$, on $m = |A|$.

S passa per totes les arestes, no les repeteix i passa per tots els vèrtexs, ja que G és connex (*hipò.*).

- Si $x \in V - \{x_0, x_m\}$, aleshores: $g(x) = 2\,\#\{\text{vegades que } x \text{ apareix a } S\}$, parell.
- $g(x_0) = 1 + 2\,\#\{\text{vegades que } x_0 \text{ apareix a l'interior de } S\}$, senar.
- Anàlogament, $g(x_m)$ és senar.

Per tant, $\boxed{G \text{ té exactament 2 vèrtexs de grau senar}}$ (x_0 i x_m).

$\Leftarrow$ *Hipòtesi*: $\boxed{G \text{ té exactament dos vèrtexs de grau senar}}$. Diguem-ne: x i y.

Definim un nou graf per $G' = (V \cup \{z\}, A \cup \{zx, zy\})$, amb $z \notin V$.

Sabem que:

- G' és connex $\impliedby\ z \sim x\ \wedge\ G$ és connex.
- Tots els vèrtexs de G' tenen grau parell:

  $g_{G'}(z) = 2$

  $g_{G'}(x) = 1 + g_G(x) =$ (*hipò.*) $1 +$ senar $=$ parell

  $g_{G'}(y) =$ parell, anàlogament.

G' connex $\wedge$ tot vèrtex de G' té grau parell (*hipò.*) $\implies$ (*T. de caracterització de grafs eulerians*) G és un graf eulerià.

Trobem el circuit eulerià $S\colon z\ x\ x_1\ \cdots\ x_r\ y\ z$ a G', ja que passa per totes les arestes de G. Per tant, $x\ x_1\ \cdots\ x_r\ y$ passa per totes les arestes de G, amb $x \neq y \implies$ $\boxed{G \text{ conté el senderó eulerià } S}$. $\square$

10. *Doneu la definició d'arbre.*

Un *arbre* és un graf *connex* ($\forall u, v \in V,\ \exists u - v$ camí) i *acíclic* (no té cicles).

11. *Demostreu que un graf T és un arbre si i només si per a cada parell de vèrtexs u, v hi ha un únic $u - v$ camí a T.*

Graf $T = (V, A)$ arbre $\iff \forall u, v \in V$, hi ha un únic $u - v$ camí a T.

$\boxed{\Rightarrow}$ $u, v \in V$ vèrtexs qualsevol. T és un arbre $\implies$ T és connex $\implies$ $\exists u - v$ camí a T.

Aquest camí és únic perquè si n'existissin dos de diferents, aleshores existiria almenys un cicle al graf (*teorema*) i això és impossible perquè T és acíclic (arbre).

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall u, v \in V$, hi ha un únic $u - v$ camí a T $\implies$ $\boxed{T \text{ connex}}$.

Suposem que T té algun cicle $(u = u_0) \cdots (u_k = v)$ u entre els vèrtexs u i v $\implies$ hi ha dos $u - v$ camins diferents: $(u = u_0) \cdots (u_k = v)$ i l'aresta $u\ v$. Contradicció: (*hipo*: només hi ha un $u - v$ camí) $\implies$ $\boxed{T \text{ és acíclic}}$.

T connex $\wedge$ T acíclic $\implies$ T és un arbre. □

12. *Enunicieu el teorema de caracterització d'arbres.*

Sigui $T = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m. Són equivalents:

(a) T és un arbre.

(b) T és acíclic i $m = n - 1$.

(c) T és connex i $m = n - 1$.

(d) T és connex i tota aresta és pont.

(e) $\forall u, v \in V$, $\exists$ un únic $u - v$ camí a T.

(f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle.

13. *Demostreu que tot arbre d'ordre $n \geq 2$ té almenys dues fulles.*

Sigui $T = (V, A)$ l'arbre, d'ordre $n \geq 2$ i mida $m = n - 1$ (*arbre*). Sigui n_F el número de fulles (vèrtexs de V de grau 1).

Apliquem el *Lema de les Encaixades*. Siguin v vèrtexs de V:

$$2m = 2(n-1) = \overbrace{\sum_{g(v)=1} g(v)}^{n_F} + \sum_{g(v)\geq 2} g(v) \geq n_F + \sum_{g(v)\geq 2} 2 \geq n_F + 2(n - n_F)$$

Per tant,

$$2(n-1) \geq n_F + 2(n - n_F) \implies n_F \geq 2$$

□

2 Àlgebra lineal

1. *Doneu la definició de subespai vectorial.*

Sigui E un espai vectorial. $S \subseteq E$ és un subespai vectorial si es verifica:

(a) $S \neq \varnothing$

(b) $\forall u, v \in S, u + v \in S$.

(c) $\forall u \in S$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$.

2. *Siguin S i S' subespais vectorials d'un espai vectorial E. Demostreu que $S \cap S'$ és subespai vectorial de E i doneu un exemple que mostri que $S \cup S'$ no és necessàriament un subespai vectorial.*

— La intersecció és un SEV

Volem demostrar que $T = S \cap S'$ és un SEV. És a dir:

(a) $T \neq \varnothing$

S i S' són SEV's $\implies 0_E \in S$ i $0_E \in S' \implies 0_E \in T \implies T \neq \varnothing$.

(b) $\forall u, v \in T, u + v \in T$.

$$u, v \in T \implies \begin{cases} u, v \in S \\ u, v \in S' \end{cases} \quad S \text{ i } S' \text{ són SEV's} \implies \begin{cases} u + v \in S \\ u + v \in S' \end{cases} \implies u + v \in T.$$

(c) $\forall u \in T$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in T$. Fixem una $\lambda \in \mathbb{K}$ qualsevol.

$$u \in T \implies \begin{cases} u \in S \\ u \in S' \end{cases} \quad S \text{ i } S' \text{ són SEV's} \implies \begin{cases} \lambda u \in S \\ \lambda u \in S' \end{cases} \implies \lambda u \in T.$$

Per tant, $S \cap S'$ és un SEV. □

— La unió no necessàriament és un SEV

$S = \{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$, d'on $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \notin S \cup S'$ □

3. *Doneu la definició de combinació lineal i d'independència lineal.*

Siguin $u_1, \ldots, u_k \in E$; E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial; $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

— Combinació lineal. Una combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$$

— Independència lineal. Els vectors $u_1, \ldots, u_k$ són linealment independents $\iff$ l'única solució de l'equació

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$$

és $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

4. *Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'un espai vectorial E i suposeu que u_1 és combinació lineal de $u_2, \ldots, u_k$. Demostreu que $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle = \langle u_2, \ldots, u_k \rangle$.*

Ho demostrem per "double inclusió":

$\boxed{\supseteq}$ Veiem que $\langle u_2, \dots, u_k \rangle \subseteq \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$, ja que $\{u_2, \dots, u_k\} \subseteq \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$.

$\boxed{\subseteq}$ Hem de veure que $\forall x \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, $x \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$. Sigui $x \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

(I) Per hipòtesi, x és combinació lineal de $u_1, u_2, \dots, u_k \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$$

(II) Per hipòtesi, $u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle \implies \exists \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$u_1 = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \cdots + \lambda_k u_k$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1(\lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k) + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k \\ &= (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2) u_2 + (\alpha_1 \lambda_3 + \alpha_3) u_3 + \cdots + (\alpha_1 \lambda_k + \alpha_k) u_k \end{aligned}$$

Per tant, $x \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$. $\square$

5. *Demostreu que un conjunt de vectors és linealment dependent si i només si algun d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres.*

Sigui $S = \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq E$ un conjunt de vectors. E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial.

— HIPÒTESI. S és linealment dependent.

— TESI. $\exists u_i$ tal que u_i és combinació lineal de la resta de vectors.

$\boxed{\Rightarrow}$ S és linealment dependent. $\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tal que algun és $\neq 0$ i

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$$

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $\lambda_1 \neq 0$.

Com que $\lambda_1 \neq 0$, existeix λ_1^{-1}:

$$u_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} u_k$$

Per tant, $u_1 \in \langle u_2, u_3, \dots, u_k \rangle$. $\square$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists u_i$ tal que u_i és combinació lineal de la resta de vectors. Suposem que u_1 és, sense pèrdua de generalitat, combinació lineal de $u_2, \dots, u_k$.

Per tant, $\exists \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$u_1 = \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots + \alpha_k u_k \implies -u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots + \alpha_k u_k = 0_E$$

Això és una combinació lineal de $u_1, \dots, u_k$ que dóna 0_E i tal que l'escalar que multiplica el u_1 és $\neq 0$ (és -1). $\implies$ S és linealment dependent. $\square$

6. *Doneu la definició de base d'un espai vectorial.*

E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ és una base de E si:

(a) B és linealment independent.

(b) $E = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, \dots, b_n$ generen E.

7. *Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que tot vector de E es pot expressar de manera única com a combinació lineal dels elements de B.*

Sigui $u \in E$. B és una base de $E \implies E = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tals que

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

Ja hem demostrat que es pot expressar com a combinació lineal dels elements de B. Demostrem que aquesta expressió és única. Suposem que $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tals que

$$u = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$$

Restant les dues equacions, tenim:

$$(\alpha_1 - \lambda_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n - \lambda_n) b_n = 0_E$$

Però, com que B és una base i, $\forall i \ (\alpha_i - \lambda_i \in \mathbb{K})$, l'única solució d'aquesta equació és $\forall i \ (\alpha_i - \lambda_i = 0) \implies \forall i \ (\alpha_i = \lambda_i) \implies$ la combinació lineal és *única*. □

8. *Siguin E i F dos espais vectorials i $f\colon E \to F$ una aplicació.*

- *Digueu què ha de satisfer f per tal de ser una aplicació lineal.*

  S'han de satisfer dues condicions:

  (a) $\forall u, v \in E$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

  (b) $\forall u \in E$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

- *Demostreu que, si U és un subespai vectorial de E i f es una aplicació lineal, aleshores $f(U)$ és un subespai vectorial de F.*

  Cal veure:

  SEV1) $f(U) \neq \varnothing$

  U és un SEV $\implies 0_E \in U \implies f(0_E) = 0_F \in f(U) \implies f(U) \neq \varnothing$.

  SEV2) $\forall u, v \in f(U)$, $u + v \in f(U)$.

  $u, v \in f(U) \implies \exists x, y \in U$ tals que $f(x) = u$ i $f(y) = v$. Aplicant f lineal:

  $$u + v = f(x) + f(y) = f(x + y)$$

  Ara, com que U és un SEV $\implies x + y \in U \implies u + v \in f(U)$.

  SEV3) $\forall u \in f(U)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in f(U)$.

  $u \in f(U) \implies \exists x \in U$ tal que $f(x) = u$.

  $$\lambda u = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(U)$$

  Hem aplicat que f és lineal i que $\lambda x \in U$.

  Per tant, $f(U)$ és un SEV de F. □

- *Proveu que f està unívocament determinada per la imatge d'una base qualsevol $\{b_1, \dots, b_n\}$ de E.*

  Volem conèixer $f(u)$, per tot $u \in E$.

  Sigui $u \in E \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$. Com que f és una aplicació lineal, $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$. Aquest valor és únic, ja que les coordenades són úniques i coneixem $f(\{b_1, \dots, b_n\})$, és a dir, $f(b_1), \dots, f(b_n)$. $\square$

9. *Sigui $f\colon E \to F$ una aplicació lineal entre espais vectorials.*

- *Doneu la definició de la matriu de f en unes bases $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ i $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ de E i F, respectivament.*

  La matriu associada a f en les bases B i W és una matriu de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ que té, per columnes, les coordenades en la base W les imatges dels vectors de la base B, i és

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \cdots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

- *Escriviu i expliqueu la fórmula que relaciona les matrius de f en bases diferents de E, F.*

  Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal, B i B' matrius bases de E, i W i W' bases de F.

  Tenim:

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$
$$M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W} \cdot M_W^B(f) \cdot P_B^{B'}$$

$$\begin{tikzcd}
E_B \arrow[r, "f", "M_W^B(f)"'] & F_W \arrow[d, "I_F", "P_{W'}^{W}"'] \\
E_{B'} \arrow[u, "P_B^{B'}"', "I_E"] \arrow[r, "f", "M_{W'}^{B'}(f)"'] & F_{W'}
\end{tikzcd}$$

10. *Sigui $f\colon E \to F$ un endomorfisme d'un espai vectorial E.*

- *Definiu* valor propi *de f i* vector propi *de f de valor propi λ.*

  — VALOR PROPI. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de f si existeix algun $v \in E$, $v \neq 0_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.

  — VECTOR PROPI DE f DE VALOR PROPI λ: els vectors $v \in E$, $v \neq 0_E$ tals que $f(v) = \lambda v$.

- *Demostreu que $E_\lambda = \{u \in E\colon f(u) = \lambda u\}$ és un subespai vectorial de E.*

  Cal veure:

SEV1) $E_\lambda \neq \varnothing$. Cert, ja que, $\forall \lambda$, $f(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$.

SEV2) $\forall u, v \in E_\lambda \implies u + v \in E_\lambda$. Siguin u i v vectors qualssevol de E:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$$

Apliquem: f és lineal; u, v són VEPs de VAP λ; propietat dels escalars.

SEV3) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in E_\lambda \implies \alpha v \in E_\lambda$. Siguin λ, v qualssevol:

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \iff f(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \iff \alpha v \in E_\lambda$$

Apliquem: f és lineal; v és un VEP de VAP λ; producte d'escalars.

Per tant, E_λ és un SEV de E. $\square$