7. Funciones de varias variables. Límites. Continuidad[1]

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^n$ se denominan *vectores* o *puntos*, dependiendo del contexto en que preferentemente se consideren. Recordemos que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones siguientes: si $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la *suma* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$, y el *producto* de λ por $\mathbf{u}$ es el vector $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. En este contexto, los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan *vectores* y los números reales, *escalares*. Si se quieren remarcar aspectos más geométricos, los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan *puntos* y sus componentes se suelen denominar *coordenadas*.
Dados un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, existe un único punto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ tal que $y_i - x_i = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, que es el punto de coordenadas $y_i = x_i + v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En estas condiciones, es natural utilizar las notaciones $\mathbf{y} = \mathbf{x}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{y}-\mathbf{x}$; el par ordenado $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se denomina el *representante* de $\mathbf{v}$ de *origen* $\mathbf{x}$ y de *extremo* $\mathbf{y}$.
El *producto escalar* de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es el número real

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

y tiene las siguientes propiedades: para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y todo escalar λ, se cumplen

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;
- $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$.

La *norma* o *módulo* de un vector $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ es el número real

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y para todo escalar λ, se cumplen

- $\|\mathbf{u}\| \geq 0$;
- $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{u}\|$;
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Un vector $\mathbf{v}$ es *unitario* si $\|\mathbf{v}\| = 1$.
Suponemos conocido el concepto de *ángulo* que forman dos vectores. Señalemos que, si α es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha.$$

[1]Extracto del libro "Cálculo para Ingeniería informática", por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008

Topología de $\mathbb{R}^n$

La *distancia* entre dos puntos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, denotada por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es la norma del vector $\mathbf{y} - \mathbf{x}$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Para cualesquiera puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, se cumplen las propiedades siguientes:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdad triangular).

Dados un punto $\mathbf{a}$ y un número real $r > 0$, se define la *bola* de *centro* $\mathbf{a}$ y *radio* r, denotada por $\mathcal{B}_r(\mathbf{a})$, como el conjunto de puntos cuya distancia a $\mathbf{a}$ es menor que r:

$$\mathcal{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}.$$

Para $n = 1$, este concepto coincide con el ya conocido de entorno de un punto, razón por la cual a veces se usa la palabra *entorno* de $\mathbf{a}$ como sinónimo de bola de centro $\mathbf{a}$; para $n = 2$, la bola de centro $\mathbf{a}$ y radio r es un círculo de centro $\mathbf{a}$ y radio r, excluida la circunferencia.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^n$ es un *punto frontera* de A si todo entorno de $\mathbf{a}$ contiene puntos de A y puntos que no son de A. La *frontera* de A es el conjunto formado por todos los puntos frontera de A, y se denota por $\mathcal{F}(A)$. Notemos que un punto frontera de A puede pertenecer o no al conjunto A, por lo que, en general, $\mathcal{F}(A)$ puede contener puntos de A y puntos que no son de A. Un conjunto A es *cerrado* si contiene todos los puntos de su frontera, es decir, si $\mathcal{F}(A) \subseteq A$; y un conjunto es *abierto* si no contiene ningún punto de su frontera, es decir, si $A \cap \mathcal{F}(A) = \emptyset$. (Subrayemos la obviedad de que abundan los conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.)

El conjunto $\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A)$ se denomina *adherencia* o *clausura* de A; ciertamente, un conjunto A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$. El conjunto $\overset{\circ}{A} = A \setminus \mathcal{F}(A)$ se denomina *interior* de A; vemos que A es abierto si, y sólo si, $A = \overset{\circ}{A}$. Los conjuntos abiertos pueden también caracterizarse por la siguiente propiedad: un conjunto A es abierto si, y sólo si, todo punto de A tiene un entorno contenido en A.

Un conjunto A está *acotado* si está contenido en alguna bola; equivalentemente, si está contenido en un producto de intervalos.

Si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, se dice que es *compacto*. El concepto de compacidad es de gran importancia en relación con la continuidad de funciones, como veremos más adelante.

Un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de un conjunto A si toda bola centrada en $\mathbf{a}$ contiene algún punto de A distinto de $\mathbf{a}$. Esto es equivalente a decir que toda bola centrada en $\mathbf{a}$ contiene infinitos puntos de A.

Funciones de varias variables: conceptos generales

Sean n y m números naturales. Una función de n variables reales es una aplicación $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ denominado *dominio* de f. Si $m = 1$, se dice que f es una *función real* o *escalar*. Si $m \geq 2$, se dice que f es una función *vectorial* (o también m-vectorial). La función f hace corresponder a cada elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ exactamente un elemento $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, el cual se denota por $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$; en este caso, se dice que $\mathbf{y}$ es *la imagen* de $\mathbf{x}$ y que $\mathbf{x}$ es *una antiimagen* u *original* de $\mathbf{y}$. El conjunto de imágenes se denota por $f(D)$ y se denomina el *recorrido* o la *imagen* de f.
Asociadas a una función vectorial $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, existen m funciones escalares $f_1, \ldots, f_m$ de dominio D definidas por la propiedad

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))\,,$$

es decir, $f_i(\mathbf{x})$ es la i-ésima coordenada de $f(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in D$. Las funciones f_i se denominan *coordenadas* de f, y suele utilizarse la notación $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. A menudo, el estudio de una función vectorial se reduce al estudio de sus funciones coordenadas, por lo cual, si no se dice lo contrario, siempre nos referiremos a funciones reales, es decir, al caso $m = 1$.
Como en el caso de una variable, habitualmente queda definida una función mediante una expresión que permite calcular la imagen que corresponde a cada elemento, pero sin explicitar el dominio. En este caso, se sobreentiende que el dominio es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ para los que la expresión dada tiene sentido, es decir, el conjunto de puntos para los que es posible calcular la imagen.
Sea f una función real de dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(\mathbf{x}))$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, se denomina *gráfica* de f. Como ya sabemos, para $n = 1$ la gráfica es habitualmente una curva de $\mathbb{R}^2$. Para $n = 2$, la gráfica es usualmente una superficie de $\mathbb{R}^3$. En relación con las gráficas, son de utilidad los denominados *conjuntos de nivel* de f. Sea $k \in \mathbb{R}$. El conjunto $C_k = \{\mathbf{x} \in D \;:\; f(\mathbf{x}) = k\}$ se denomina *conjunto de nivel* k de la función f. Para $n = 2$, se trata de curvas de $\mathbb{R}^2$ que reciben el nombre específico de *curvas de nivel* de f.
Los conceptos de inyectividad, operaciones con funciones y cotas superiores e inferiores son completamente análogos a los conceptos correspondientes para funciones de una variable.

Límites y continuidad

Sean f una función real de dominio D y $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de D.
El *límite* de f en $\mathbf{a}$ es el número real ℓ si, para cada entorno $\mathcal{B}_\epsilon(\ell)$ de ℓ, existe un entorno $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a})$ tal que todos los puntos $\mathbf{x} \in D \cap (\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\})$ tienen sus imágenes en $\mathcal{B}_\epsilon(\ell)$. Equivalentemente, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in D \;\text{ y }\; 0 < d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta \;\Rightarrow\; |f(\mathbf{x}) - \ell| < \epsilon.$$

El *límite* de f en $\mathbf{a}$, si existe, es único. La notación

$$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \ell$$

significa que el límite de f en $\mathbf{a}$ existe y que es ℓ.
El *límite* de f en $\mathbf{a}$ es $+\infty$, y se escribe $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = +\infty$, si, para cada $K > 0$, existe un entorno $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a})$ tal que todos los puntos $\mathbf{x} \in D \cap (\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\})$ cumplen $f(\mathbf{x}) > K$. Equivalentemente, si

$$\mathbf{x} \in D \;\text{ y }\; 0 < d(\mathbf{a},\mathbf{x}) < \delta \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x}) > K.$$

El *límite* de f en $\mathbf{a}$ es $-\infty$, y se escribe $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = -\infty$, si para cada $K < 0$ existe un entorno $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a})$ tal que todos los puntos $\mathbf{x} \in D \cap (\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\})$ cumplen $f(\mathbf{x}) < K$. Equivalentemente, si

$$\mathbf{x} \in D \;\text{ y }\; 0 < d(\mathbf{a},\mathbf{x}) < \delta \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x}) < K.$$

En las tres definiciones anteriores, la condición de que $\mathbf{a}$ sea un punto de acumulación de D es un requisito para que el conjunto $D \cap (\mathcal{B}_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\})$ no sea vacío, sea cual sea δ.
Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de $C \cap D$. El *límite de f en $\mathbf{a}$ según el subconjunto C* se define de manera análoga, sustituyendo D por $D \cap C$ en las definiciones anteriores. Un caso particular importante es el de los *límites direccionales*, para los cuales el subconjunto C es una recta que pasa por $\mathbf{a}$. Se deduce fácilmente que, si el límite de f en $\mathbf{a}$ es ℓ, entonces el límite de f en $\mathbf{a}$ según cualquier subconjunto C (tal que $\mathbf{a}$ sea un punto de acumulación de $C \cap D$) también es ℓ; análogamente, con $+\infty$ y $-\infty$. Esta propiedad se utiliza a menudo como técnica para demostrar que no existe el límite de una función f en un punto $\mathbf{a}$: basta calcular los límites de f en $\mathbf{a}$ según dos subconjuntos y comprobar que estos límites son distintos.
El comportamiento de los límites respecto a las operaciones y desigualdades es similar al del caso $n = 1$ (siempre que la similitud tenga sentido), pero el cálculo efectivo de límites puede ser considerablemente más complicado.
Una función f es *continua* en un punto $\mathbf{a}$ de su dominio D si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Como en el caso de una variable, esta condición equivale a las tres siguientes.

(i) existe $\ell = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ y es un número real; (ii) $\mathbf{a} \in D$; (iii) $\ell = f(\mathbf{a})$.

Si se cumple la condición (i), pero no la (ii) o la (iii), entonces se dice que f tiene una *discontinuidad evitable* en $\mathbf{a}$. En este caso, se puede definir una nueva función F por $F(\mathbf{a}) = \ell$ y $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. La función F difiere de f sólo en el punto $\mathbf{a}$, en el que F es continua y f no. Se dice entonces que F es la *prolongación por continuidad* de f en $\mathbf{a}$. Si f no es continua en $\mathbf{a}$ y la discontinuidad no es evitable, se dice que f tiene una *discontinuidad esencial* en $\mathbf{a}$.
La relación de la continuidad con las operaciones es la misma que la que se ha visto para el caso $n = 1$.
Una función f es *continua* en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si es continua en todo punto $\mathbf{a} \in A$.
El resultado más importante en cuanto a la continuidad en conjuntos es el siguiente teorema.
Teorema de Weierstrass. Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un compacto y $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ es una función continua en K, entonces $f(K)$ es un compacto de $\mathbb{R}^m$.

Como consecuencia, se obtiene el siguiente corolario.
Corolario. Si f es una función real continua definida en un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces existen $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en K tales que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ para todo $\mathbf{x} \in K$.
Menos formalmente, el corolario anterior asegura que una función definida en un compacto alcanza máximo y mínimo absolutos en dicho compacto.

Coordenadas polares

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ un punto de $\mathbb{R}^2$. Es fácil ver que la función (denominada cambio a *coordenadas polares centradas en* (a_1, a_2)) $p\colon [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $p(r, \alpha) = (a_1 + r\cos\alpha,\ a_2 + r\operatorname{sen}\alpha)$, es exhaustiva y continua en todo punto de su dominio. Esta función y sus propiedades se utilizan con frecuencia para calcular el límite de funciones de dos variables. Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función real, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$, y $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ un punto de acumulación de D. Para cualquier α, se cumple $p(0, \alpha) = \mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Si existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$, para cualquier α_0 fijado, tenemos la igualdad

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})) = \lim_{(r,\alpha)\to(0,\alpha_0)} (f(p(r,\alpha)) = \lim_{(r,\alpha)\to(0,\alpha_0)} f(a_1 + r\cos\alpha, a_2 + r\operatorname{sen}\alpha).$$

Recíprocamente, si para cada α_0 existe el límite de la derecha, entonces existe el de la izquierda y ambos coinciden. Por ejemplo, si $f(a_1 + r\cos\alpha,\, a_2 + r\operatorname{sen}\alpha) = h(r)g(\alpha)$ para ciertas funciones h y g, y la función $g(\alpha)$ está acotada y $\lim_{r\to 0} h(r) = 0$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$.