# 4. Derivabilidad[1]

Una función $f$ es *derivable* en un punto $a$ de su dominio si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

y es un número real. El número $f'(a)$ se denomina *derivada de $f$ en $a$*.
Si $f$ es derivable en $a$, entonces $f$ es continua en $a$. El recíproco no es cierto: hay funciones continuas en un punto no derivables en ese punto.
Geométricamente, la derivabilidad de $f$ en $a$ significa la existencia de la *recta tangente* a la gráfica de la función $f$ en el punto $(a, f(a))$; en este caso, la ecuación de la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Así pues, $f'(a)$ es la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $f$ en el punto $(a, f(a))$.
La función correspondiente a la tangente $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ es una función polinómica de primer grado que aproxima la función $f$ cerca del punto $a$.
Las siguientes propiedades expresan el comportamiento de la derivación respecto a las operaciones.

- Si $f$ y $g$ son derivables en $a$, entonces $f+g$ es derivable en $a$ y

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$

- Si $f$ y $g$ son derivables en $a$, entonces $fg$ es derivable en $a$ y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Si $f$ y $g$ son derivables en $a$ y $g(a) \neq 0$, entonces

$$(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g(a)^2.$$

- (**Regla de la cadena**) Si $f$ es derivable en $a$ y $g$ es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en $a$ y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Sea $f$ una función de dominio $D$ y sea $D'$ el conjunto de puntos de $D$ en los que la función $f$ es derivable. La función $f' \colon D' \to \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada punto $x \in D'$ el valor $f'(x)$ de la derivada de $f$ en $x$ se denomina *función derivada* o *derivada* de $f$. Si $f'$ es también una función derivable, su derivada se denota por $f''$ y se denomina *segunda derivada* de $f$. Recurrentemente, la *$n$-ésima derivada* de $f$, denotada $f^{(n)}$, es la derivada de la función $f^{(n-1)}$.

[1]Extracto del libro "Cálculo para Ingeniería informática", por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008

## Tabla de derivadas

Para facilitar consultas, incluimos una tabla con las derivadas de las funciones elementales. En ella, $f(x)$ es de la forma $f(x) = g(u(x))$ para ciertas funciones $u$ y $g$. Implícitamente, se suponen las condiciones de existencia y derivabilidad de las funciones involucradas.

| $f$ | $f'$ | | $f$ | $f'$ |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $(k \in \mathbb{R})$ | $\arccos u$ | $-u'/\sqrt{1-u^2}$ |
| $u^k$ | $ku^{k-1}u'$ | $(0 \neq k \in \mathbb{R})$ | $\arctan u$ | $u'/(1+u^2)$ |
| $\log_a u$ | $u'/(u \ln a)$ | $(a > 0)$ | $\operatorname{senh} u$ | $u' \cosh u$ |
| $a^u$ | $u'a^u \ln a$ | $(a > 0)$ | $\cosh u$ | $u' \operatorname{senh} u$ |
| $\operatorname{sen} u$ | $u' \cos u$ | | $\tanh u$ | $u' / \cosh^2 u$ |
| $\cos u$ | $-u' \operatorname{sen} u$ | | $\operatorname{arg\,senh} u$ | $u'/\sqrt{u^2+1}$ |
| $\tan u$ | $u' / \cos^2 u$ | | $\operatorname{arg\,cosh} u$ | $u'/\sqrt{u^2-1}$ |
| $\operatorname{arc\,sen} u$ | $u'/\sqrt{1-u^2}$ | | $\operatorname{arg\,tanh} u$ | $u'/(1-u^2)$ |

### Funciones potenciales-exponenciales

Las funciones del tipo $f(x) = u(x)^{v(x)}$, donde $u$ y $v$ son funciones, se denominan *potenciales-exponenciales*.
Para calcular la derivada de $f(x) = u(x)^{v(x)}$ se utiliza la llamada *derivación logarítmica*. Supongamos que $u$ y $v$ son funciones derivables y que $f(x) = u(x)^{v(x)}$ toma valores positivos. Tomando logaritmos, obtenemos $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$. Derivando ambos miembros de la igualdad, se obtiene

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

de donde

$$f'(x) = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x).$$

Una regla mnemotécnica para recordar la fórmula anterior consiste en derivar $f(x) = u(x)^{v(x)}$ primero como si $u(x)$ fuera constante, lo que da el primer sumando, y después como si $v(x)$ fuera constante, lo que da el segundo sumando.

## Monotonía

Sea $f$ una función e $I$ un intervalo (de cualquier tipo) contenido en el dominio de $f$.
La función $f$ es *creciente* (resp. *estrictamente creciente*) en $I$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$). La función $f$ es *decreciente* (resp. *estrictamente decreciente*) en $I$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). Se dice que la función $f$ es *monótona* en $I$ si es creciente o

decreciente en $I$, y *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $I$.
Si $f$ es derivable en $I$, la relación entre $f'$ y la monotonía de $f$ en $I$ se deduce del teorema del valor medio y es la siguiente:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces $f$ es estrictamente creciente en $I$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces $f$ es estrictamente decreciente en $I$.
- Si $f$ es creciente en $I$, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
- Si $f$ es decreciente en $I$, entonces $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

## Extremos relativos

Sea $f$ una función y $a$ un punto de su dominio. La función $f$ tiene un *máximo relativo* en $a$ si existe un entorno $U$ de $a$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in U$. La función $f$ tiene un *mínimo relativo* en $a$ si existe un entorno $U$ de $a$ tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in U$. Un *extremo relativo* es un máximo o un mínimo relativo.
Ciertas condiciones de derivabilidad sobre $f$ dan unas condiciones necesarias y otras suficientes de existencia de extremos relativos.

- Si $f$ tiene un extremo relativo en $a$ y existe $f'(a)$, entonces $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces $f$ tiene un mínimo relativo en $a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $f$ tiene un máximo relativo en $a$.
- Si $f'(a) = 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo $x$ con $a-\delta < x < a$ se cumple $f'(x) < 0$ y para todo $x$ con $a < x < a+\delta$ se cumple $f'(x) > 0$, entonces $f$ tiene un mínimo relativo en $a$.
- Si $f'(a) = 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo $x$ con $a-\delta < x < a$ se cumple $f'(x) > 0$ y para todo $x$ con $a < x < a+\delta$ se cumple $f'(x) < 0$, entonces $f$ tiene un máximo relativo en $a$.

## Teoremas del valor medio

Los teoremas de Rolle, de Cauchy y del valor medio que enunciamos a continuación están entre los resultados teóricos más importantes relativos a funciones derivables.
**Teorema de Rolle**. Si $f$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo $(a, b)$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Geométricamente, en las condiciones del teorema de Rolle, hay un punto de la curva $y = f(x)$ con tangente horizontal.
**Teorema de Cauchy**. Si $f$ y $g$ son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en el intervalo $(a, b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Si $g(x) = x$, obtenemos el teorema del valor medio.
**Teorema del valor medio**. Si $f$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo $(a, b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geométricamente, esto significa que la curva $y = f(x)$ contiene por lo menos un punto $(c, f(c))$ en el que la tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
La derivada de una función constante es cero. Para funciones definidas en un intervalo abierto, el recíproco también es cierto:
**Teorema fundamental**. Si $f$ es una función derivable en un intervalo abierto $(a, b)$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces la función $f$ es constante en $(a, b)$.

## La regla de L'Hôpital

Otra consecuencia del teorema del valor medio es la *Regla de L'Hôpital* para el cálculo de límites.
**Regla de L'Hôpital**. Sean $\triangle \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ y $f$ y $g$ funciones tales que $\lim\limits_{x\to\triangle} f(x) = \lim\limits_{x\to\triangle} g(x) \in \{0, +\infty, -\infty\}$. Si existe el límite $\lim\limits_{x\to\triangle} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe el límite $\lim\limits_{x\to\triangle} f(x)/g(x)$ y se cumple

$$\lim_{x\to\triangle} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\triangle} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse cuando una de las funciones tiende a $+\infty$ y la otra a $-\infty$. Por ejemplo, supongamos que $\lim\limits_{x\to\triangle} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\triangle} g(x) = +\infty$. Entonces,

$$\lim_{x\to\triangle} \frac{f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to\triangle} \frac{-f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to\triangle} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\triangle} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Convexidad

Sea $I$ un intervalo contenido en el dominio de una función $f$. La función $f$ es *convexa*[2] en $I$ si, para todo $a, x, b \in I$, con $a < x < b$, se cumple

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Análogamente, la función $f$ es *cóncava* en $I$ si, para todo $a, x, b \in I$, con $a < x < b$, se cumple

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2}$$

[2]En algunos libros, se denomina función *cóncava* a la que aquí definimos como *convexa* y viceversa. La definición que hemos adoptado se corresponde con sus generalizaciones en múltiples contextos matemáticos.

Las condiciones (1) y (2) pueden escribirse equivalentemente:

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

En ambas desigualdades, el término de la derecha corresponde a una función cuya gráfica es la recta que pasa por los dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así pues, geométricamente, la función $f$ es convexa o cóncava en $I$, según que la gráfica de la función en cada intervalo $[a, b] \subseteq I$ quede por debajo o por encima del segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
En el caso de funciones derivables, la convexidad o concavidad se relacionan con las derivadas como sigue.
Sea $f$ una función derivable en un intervalo $I$. Entonces:

- Si $f$ es convexa en $I$, se cumple $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ para todo $a, x \in I$, $x \neq a$.
- Si $f$ es cóncava en $I$, se cumple $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ para todo $a, x \in I$, $x \neq a$.

Geométricamente, las condiciones anteriores aseguran que si $f$ es convexa (resp. cóncava), la tangente en todo punto de la gráfica queda por debajo (resp. por encima) de la función.

El criterio más usual de convexidad o concavidad es el siguiente. Sea $f$ una función tal que existe $f''$ en un intervalo $I$.

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces $f$ es convexa en $I$.
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces $f$ es cóncava en $I$.

Sean $f$ una función y $a$ un punto de su dominio tal que existe un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ de $a$ contenido en el dominio de $f$. Si $f$ es convexa en $(a - \delta, a)$ y cóncava en $(a, a + \delta)$, o bien cóncava en $(a - \delta, a)$ y convexa en $(a, a + \delta)$, se dice que $a$ es un *punto de inflexión* de la función. Tenemos la condición necesaria siguiente:

- Si $a$ es un punto de inflexión de $f$ y en un entorno de $a$ existe $f''$ y es continua, entonces $f''(a) = 0$.

## Extremos absolutos en intervalos cerrados

Según el Teorema de Weierstrass, toda función continua $f$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo, es decir, existen al menos dos puntos $x_M$ y $x_m$ en $[a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b].$$

Los puntos $x_m$ y $x_M$ están entre los siguientes:

- Los extremos del intervalo, $x = a$ y $x = b$.
- Los puntos de $(a, b)$ en que $f$ no sea derivable.
- Los puntos de $(a, b)$ en que la derivada de $f$ es cero (los cuales se llaman *puntos críticos* de $f$).

## Resolución aproximada de ecuaciones

### El método de Newton-Raphson

Sea $f$ una función derivable definida en el intervalo $[a, b]$. Deseamos encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Empezamos con un valor inicial $x_0$ y definimos para cada número natural $n$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Geométricamente, $x_{n+1}$ es la abcisa del punto de intersección de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abcisas.
El valor inicial $x_0$ debe tomarse razonablemente cerca de la solución buscada. La derivada de $f$ no debe anularse durante el proceso iterativo. En estas condiciones, la sucesión $(x_n)$ converge hacia una solución de la ecuación. El método puede fallar si esta solución es múltiple.

### El método de la secante

Este método se basa en la fórmula de Newton-Raphson, pero evita el cálculo de la derivada usando la siguiente aproximación:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Sustituyendo en la fórmula de Newton-Raphson, obtenemos:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$