

9. Polinomio de Taylor en varias variables¹

Derivadas de orden superior

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y supongamos que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ admite las n derivadas parciales en todos los puntos de U , es decir, que las funciones $D_i f: U \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas en U . Estas funciones pueden admitir, a su vez, derivadas parciales en \mathbf{a} , que se denominarán *derivadas parciales segundas* de f en \mathbf{a} y se denotan por

$$D_{ij}f(\mathbf{a}) = D_j(D_i f)(\mathbf{a}), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Si f está definida explícitamente $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$, se utilizan también las notaciones

$$f_{x_j x_i}(\mathbf{a}) = (f_{x_j})_{x_i}(\mathbf{a}), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

o, más tradicionalmente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\mathbf{a}) \quad \text{si } i \neq j; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\mathbf{a}).$$

De manera análoga, se definen las derivadas parciales terceras, cuartas, etc.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $k \geq 0$ un entero. La *clase* $\mathcal{C}^0(U) = \mathcal{C}(U)$ está formada por las funciones continuas en U ; para $k \geq 1$, la clase $\mathcal{C}^k(U)$ está formada por todas las funciones que tienen derivadas parciales hasta el orden k y estas derivadas parciales son continuas en U . La clase $\mathcal{C}^\infty(U)$ está formada por las funciones que pertenecen a $\mathcal{C}^k(U)$ para todo entero no negativo k , es decir, por las funciones que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Las expresiones f es *de clase* \mathcal{C}^k *en* U se utiliza con el significado de que f es de la clase $\mathcal{C}^k(U)$, y análogamente para \mathcal{C}^∞ . Frecuentemente, se alude a la *regularidad* de una función f como sinónimo de que f sea de clase \mathcal{C}^k para algún k .

Enunciamos el teorema de Schwarz en una versión que no es la más general pero suficiente para nuestros propósitos en este texto.

Teorema de Schwarz. Si f es una función de n variables de clase $\mathcal{C}^2(U)$, entonces, para todo $\mathbf{a} \in U$ y $1 \leq i < j \leq n$, se cumple $D_{ij}f(\mathbf{a}) = D_{ji}f(\mathbf{a})$.

Obsérvese que si, por ejemplo, $n \geq 3$ y f es una función de clase $\mathcal{C}^3(U)$, teniendo en cuenta que las derivadas terceras son derivadas segundas de las derivadas primeras, el teorema anterior implica que, para $1 \leq i < j < k \leq n$,

$$D_{ijk}f(\mathbf{a}) = D_{ikj}f(\mathbf{a}) = D_{jik}f(\mathbf{a}) = D_{jki}f(\mathbf{a}) = D_{kij}f(\mathbf{a}) = D_{kji}f(\mathbf{a}),$$

y, para $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$,

$$D_{iij}f(\mathbf{a}) = D_{iji}f(\mathbf{a}) = D_{jii}f(\mathbf{a}).$$

Pueden hacerse observaciones análogas para las derivadas cuartas si f es de la clase \mathcal{C}^4 , etc.

¹Extracto del libro “Cálculo para Ingeniería informática”, por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008

El polinomio de Taylor

Sea f una función real de n variables de la clase $\mathcal{C}^k(U)$ y sea $\mathbf{a} \in U$. Definimos el *polinomio de Taylor* de grado k de f en \mathbf{a} como el polinomio

$$\begin{aligned} P_k(f, \mathbf{a}, \mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \dots (x_{i_k} - a_{i_k}). \end{aligned}$$

Como en el caso de una variable, definimos el *resto k -ésimo de Taylor* por la igualdad $R_k(f, \mathbf{a}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - P_k(f, \mathbf{a}, \mathbf{x})$, y se tiene que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_k(f, \mathbf{a}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k} = 0,$$

lo que significa que la similitud entre la función y su polinomio de Taylor en \mathbf{a} es mejor cuanto más cerca de \mathbf{a} y cuanto mayor sea el grado.

Si f es de la clase $\mathcal{C}^{k+1}(U)$ y $\mathcal{B}_r(\mathbf{a})$ es una bola contenida en U , entonces, para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r(\mathbf{a})$ el resto k -ésimo puede expresarse en la forma

$$R_k(f, \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(\mathbf{c})(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{k+1}} - a_{i_{k+1}}),$$

donde \mathbf{c} es un punto del segmento de extremos \mathbf{a} y \mathbf{x} , es decir, $\mathbf{c} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{x}$ para cierto real $t \in (0, 1)$.

Tanto en la expresión del resto como en la del polinomio se ha de tener en cuenta que algunas de las derivadas que aparecen son iguales, debido al teorema de Schwarz.

Puesto que en este curso muchos de los problemas tratan sobre funciones de dos variables, escribimos el polinomio de Taylor de grado n en (a, b) y el resto enésimo para este caso, agrupando las derivadas que coinciden:

$$\begin{aligned} P_n(f, (a, b), (x, y)) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(a, b)(x - a)^{n-k}(y - b)^k. \\ R_n(f, (a, b), (x, y)) &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(a', b')(x - a)^{n+1-k}(y - b)^k. \end{aligned}$$

donde (a', b') es un punto del segmento de extremos (a, b) y (x, y) .