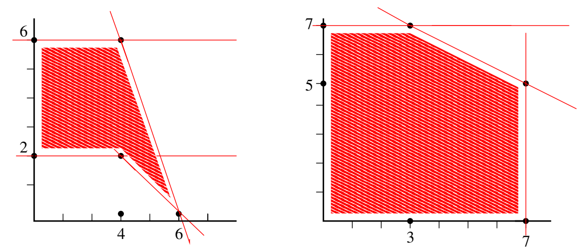
Cognoms, Nom Data

Exercici 3 (4 punts)

(a) (0.75 punts) Digueu i justifiqueu si per a cada regió de les figures (a) i (b) existeix un LP per al qual la regió és factible, o no pot existir tal LP. En cas que les regions puguin ser factibles per a un LP, doneu les restriccions determinades per la regió (Ajut: L'equació de la recta que passa per $(3,7),(7,5)$ és $x+2y=17$.)



(a) (b)

Solució La figura (a) no és convexa i per tant no es pot expressar el seu interior amb restriccins lineals. La figura (d) si que és convexa: Les res triccions són:

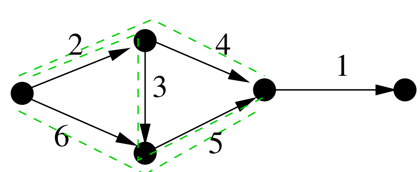
$$\begin{aligned}\text{subject to: } & x+2y \le 17\\ & y \le 7\\ & x \le 7\\ & x,y \ge 0.\end{aligned}$$

(b) (0.75 punts) Donat un graf no dirigit $G=(V,E)$, definim el seu *diàmetre* d com la màxima distància entre qualsevol parell de vèrtexs de G. Doneu un algorisme, el més eficient possible, que amb entrada un graf no dirigit qualsevol G amb n vèrtexs i m arestes, calculi el diàmetre de G.

Solució: Utilitzant l'algorisme de Bernard-Floyd-Warshall podem obtenir les distanciès entre qualsevol parell de punts. Després hem de calcular el màxim. El cost és $O(n^3)$ tant si és dens com si és espars.

(c) (0.75 punts) És cert que si a una xarxa de flux tots els arcs tenen capacitats amb valors diferents, el flux amb valor màxim és únic?

Solució: Fals. A la figura hi han 3 maneres diferents de definr un flux amb valor màxim.



(d) (0.75 punts) Sigui $G = (V, E, w)$ un graf dirigit amb $w : E \to \mathbb{Z}$ i tal que G no té cicles negatius. Donat dos vèrtexs s, t, volem calcular el camí $s \to t$ amb mínim pes i volem fer-ho **utilitzant Programació Lineal**. Per a cada $v \in V$ definim una variable d_v que representa la distància més curta de s fins a v. Com a l'algorisme de Bellman-Ford-Moore, $d_s = 0$. Doneu la formalització del problema com a equació lineal amb les restriccions corresponents.

Solució:

min d_t,
subject to:
$d_s = 0$
$d_v \leq d_u + w(u, v)$, per tot u t.q. $(u, v) \in \vec{E}$
$d_v \geq 0$, per tot $u \in V$

(e) (1 punt) Donat com a entrada un graf dirigit $G = (V, E, w)$ on $w : E \to \mathbb{Z}^+$, i un vèrtex inicial $s \in V$, volem trobar el camí **simple** de màxima distància entre s i la resta dels vèrtexs a G. Per a grafs generals, no es coneix una solució polinòmica per a aquest problema. Doneu un algorisme polinòmic per al cas particular que G sigui un DAG (graf dirigit sense cicles). Podeu obtenir un algorisme amb cost $O(n + m)$? (Recordeu que un camí simple és aquell que no repeteix cap vèrtex.)

Solució: donat els DAG $G = (V, E), w$, considerem el graf G amb pesos $w'(e) = -w(e)$ per a tota aresta $e \in E$ (per tant $w' : E \to \mathbb{Z}^-$). Aleshores com com que G, w no té cicles (positius) G, w' no tindrà cicles negatius, podem utilitzar BFMS per a trobar les distancies més curtes de s a tots els vèrtexs a G, w' i aquest seran també els camins màxims a G, w. El cost és mn. Però podem fer ho més ràpid: Construïm el l·layout"de l'ordre topològic del DAG i trobem les distancies més curtes a G, w' com hem fet a classe, aquestes distancies també seran les més llargues, i es pot fer en temps $O(n+m) = O(n)$.