Cognoms, Nom Data

Exercici 1 (2 punts) Digueu si les següents afirmacions són certes o no.

(a) (0.5 punts) El temps per tal de resoldre un problema de programació dinàmica sempre és $\Theta(k)$, on k és el nombre de subproblemes diferents del problema.

Sol. FALS. Hem vist molts problemes que requereixen cost no constant per subproblema.

(b) (0.5 punts) Donat un graf dirigit $G = (V, E)$ amb pesos sobre les arestes $w : E \to \mathbb{Z}^+$, l'algorisme de Dijkstra i l'algorisme de Bellman-Ford poden produir diferents arbres de camins mínims, malgrat que la mínima distancia entre dos vèrtexs qualsevol serà la mateixa.

Sol. CERT. Mirar les transparencies.

(c) (0.5 punts) Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit amb pesos sobre les arestes $w : E \to \mathbb{Z}^+$ i siguin $c, a \in V$. Aleshores el camí més curt de c a a no canvia quan incrementem en 1 el pes de totes els arcs.

Sol. FALS. Considereu un graf amb la aresta (c, a) amb pes 4 i un camí de longitud 3 de c a a amb totes les arestes amb pes 1 (total 3). A l'incrementar en 1, tenim el camí d'una aresta amb pes 5 i el de tres amb pes total 6.

(d) (0.5 punts) Si a una xarxa de flux $\mathcal{N}$ incrementeu la capacitat d'un arc en 1 unitat, sempre incrementarem el flux màxim en 1 unitat.

Solució: Fals, considereu la xarxa $s \to a \to t$ on cada aresta té capacitat=1. Incrementar la capacitat d'una de les dos arestes no incrementa el flux.

Exercici 2 (2.5 punts)

- (1.5 punts) Els estudiants de la FIB volen dissenyar una xarxa social (i.e. un graf dirigit $G = (V, E)$) per determinar el grau de simpatia entre tota la comunitat universitària a la UE. El graf es dissenya a partir de relacions personals; si a coneix b, $a, b \in V$ i $(a, b) \in E$. A més, a cada aresta (a, b) se li assigna un pes entre 0 i 10 que indica la simpatia de b en opinió de a (0 molta antipatia, 10 molta simpatia).

  Per tal que un estudiant a pugui tenir una idea del grau de simpatia d'un estudiant d que no coneix, simplement ha de trobar el valor del camí amb pes màxim $\mu(a, d)$ i el valor del camí amb pes mínim $\delta(a, b)$. Però hi ha un problema no sabem com trobar el valor del camí amb pes màxim. Per sort hi ha un estudiant de l'assignatura d'Algorísmia de la FIB té una l'idea: negar el valor dels pesos (i.e. si una aresta té pes 7, assignar-li el pes -7) i aplicar Bellman-Ford per a trobar el camí mínim, que serà el màxim sense negar. Penseu que l'algorisme del vostre col·lega és una bona solució?

  Solució: FALS (no). Quan el graf esdevingui un xic dens, hi poden apareixer cicles amb pes negatiu .

- (1 punt) Doneu un algoritme amb cost $O(|V|\,|E|)$ per determinar si un graf dirigit $G = (V, E)$ amb pesos sobre les arestes $w : E \to \mathbb{Z}$ té un cicle amb pes negatiu.

Solució: Bellman Ford (BF) nos permite obtener decidir si G tiene un ciclo negativo accesible desde el nodo seleccionado con coste $O(|V|\,|E|)$. En principio tendríamos que ejecutar BF $|V|$ veces. Para evitarlo construimos grafo G' añadiendo a G un vértice nuevo s y un arco (s, u) para cada $u \in V$. Como en s no entra ningún arco s no puede formar parte de ningún ciclo. Además cualquier ciclo en G es accesible desde s. Ejecutando BFen G' desde s podemos resolver el problema en el tiempo requerido.