

Matrioshkas

Una solución:

Observemos que en una solución óptima tenemos una matrioska exterior y dentro la combinación con más muñecas que caben dentro de esta muñeca exterior.

Para poder derivar una recurrencia correcta tenemos que establecer un orden que nos permita garantizar que las muñecas que caben dentro de la muñeca i aparecen posteriormente. Para conseguir esta propiedad ordenamos por ~~el~~ valor decreciente de h_i y aplicamos w_i como criterio de desempate. (valor decreciente) con coste $O(n \log n)$.
Así ~~para~~ si la muñeca i cabe dentro de la muñeca j tenemos $j \leq i$ aún cuando puede haber muñecas con $k > j$ que no caben dentro de la muñeca i .

Utilizando esta propiedad y la estructura de suboptimalidad tenemos la siguiente recurrencia.

$N(i)$ = número máximo de muñecas que se pueden apilar dentro de la muñeca i , incluyendo muñeca i .

~~(esta es la)~~

$N(i) = 0$ si $\nexists j > i$ j no cabe dentro de i

$$N(i) = \max_{\substack{n \geq j > i \\ h_j < h_i \\ w_j < w_i}} \{ 1 + N(j) \} \quad (*)$$

La recurrencia se puede implementar con un recorrido en tabla con coste $O(n^2)$

Finalmente podemos obtener ~~el~~ el tamaño máximo posible calculando $\max_{1 \leq i \leq n} H[i]$ con coste $O(n)$

Para obtener la composición de una matryoshka con número máximo de muñecas añadimos los guñeteros necesarios para guardar la decisión tomada en (*).

El coste total del algoritmo es $O(n^2)$.