# 数学实验一

## 1. 一步迭代算法及其收敛性

### 1.1.用 Newton 迭代法计算函数 $f(x) = x^5 + x + 16$ 的正根，精度要求小数点后 10 位

- 设置初始猜测值、迭代终止条件、迭代次数上限：

```
x0 = 2;
tolerance = 1e-10;
maxIterations = 100;
```

- 用牛顿迭代法迭代，其迭代格式为 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$。

```
for i = 1:maxIterations
    % 计算函数和其导数
    fx = x0^5 + x0 - 16;
    fpx = 5 * x0^4 + 1;
    % 迭代
    x1 = x0 - fx / fpx;
    % 判断是否满足精度要求
    if abs(x1 - x0) < tolerance
        break;
    end
    % 更新迭代值
    x0 = x1;
end

if i == maxIterations
    disp('未能在指定的迭代步数内找到满足精度要求的解');
end
```

- 输出迭代次数与结果：

```
fprintf('使用 Newton 迭代法, 经过 %d 次迭代, 得到 f(x)正根为 %.10f\n', i, x1);
```

```
使用 Newton 迭代法, 经过 6 次迭代, 得到 f(x)正根为 1.7023656103
```

### 1.2.自己构造一种一步迭代格式，先讨论其收敛性，必要的话将其改造为收敛迭代格式，再用该迭代格式重新计算函数 $f(x) = x^5 + x + 16$ 的正根，精度要求小数点后 10 位，最后讨论改进算法以提高收敛速度/收敛阶。

- 构造迭代形式：$x_{k+1} = \sqrt[5]{16 - x_k}$。

- 收敛性讨论：$\phi(x)=\sqrt[5]{16-x}$，$\phi'(x)=\dfrac{\sqrt[5]{16-x}}{5(x-16)}$。

运行下列代码，可见 x0=2 时，$|\phi(2)|=0.0242<1$，所以该迭代格式收敛，且收敛阶为 1。

```
clear;
% 定义函数
f = @(x) x.^5 + x - 16;
phi=@(x)nthroot(16-x, 5);
phi_1= @(x) nthroot(16 - x, 5)/(5*(x - 16));%求导数
disp('phi(2)=');
```

```
phi(2)=
```

```
disp(phi_1(2));
```

```
   -0.0242
```

- 设计程序，得到正根：

```
% 设置精度要求、初始值、最大迭代次数
tolerance = 1e-10;
maxIterations = 100;
x1 = 2;
% 迭代
for i = 1:maxIterations
    x2 =phi(x1);
    % 检查是否满足精度要求
    if abs(x2 - x1) < tolerance
        break;
    end
    % 更新迭代值
    x1 = x2;
end
%检查是否迭代成功
if i == maxIterations
    disp('未能在指定的迭代步数内找到满足精度要求的解');
end
%输出
fprintf('使用自己构造的一步迭代格式，经过 %d 次迭代，得到 f(x)正根为 %.10f\n', i, x2);
```

```
使用自己构造的一步迭代格式，经过 7 次迭代，得到 f(x)正根为 1.7023656103
```

- 利用松弛改进算法$x_{k+1}=x_k+\dfrac{1}{(1-\phi'(x_k))(\phi(x_k)-x_k)}$以提高收敛阶和收敛速度，得到正根：

```
% 迭代
x1 = 2;
for i = 1:maxIterations
```

```
    x2 = x1+(1/(1-phi_1(x1)))*(phi(x1)-x1);
    % 检查是否满足精度要求
    if abs(x2 - x1) < tolerance
        break;
    end
    % 更新迭代值
    x1 = x2;
end
%检查是否迭代成功
if i == maxIterations
    disp('未能在指定的迭代步数内找到满足精度要求的解');
end
%输出
fprintf('使用经过松弛改进算法优化的一步迭代格式, 经过 %d 次迭代, 得到 f(x)正根为 %.10f\n', i, x2);
```

```
使用经过松弛改进算法优化的一步迭代格式, 经过 3 次迭代, 得到 f(x)正根为 1.7023656103
```

**1.3 用迭代法解决带响应时间及回声因素的“悬崖高度”模型，精度要求小数点后 4 位。**

设系数 k=0.05，记录时间 t=4s，响应时间 t0=0.1s，石块下落的时间为 t1，声音传回来的时间记为 t2，得到非线性方程组模型：

$$F_1(h,t_1,t_2)=h-\frac{g}{k^2}(kt_1+e^{-kt_1}-1)=0$$

$$F_1(h,t_1,t_2)=h-v_st_2=0$$

$$F_1(h,t_1,t_2)=t_0+t_1+t_2-t=0$$

定义 $x=(h,t_1,t_2)^T$，$F=(F_1,F_2,F_3)^T$，构造迭代格式 $x_{k+1}=x_k-F'(x_k)^{-1}F(x_k)$。

- 设置参数：

```
clear;
k = 0.05;
t = 4;
t0= 0.1;
g = 9.8;
vs= 343;
```

- 求雅各比矩阵表达式：

```
syms h t1 t2;
F = [h-((g/(k^2))*(k*t1+exp(-k*t1)-1)); h-vs*t2;t0+t1+t2-t];%非线性方程组矩阵
X = [h; t1;t2];
J = jacobian(F, X);
disp(J);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 196\,e^{-\frac{t_1}{20}} - 196 & 0 \\ 1 & 0 & -343 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 设置迭代初始值

```
x0=[50 1 1]';
F=[0 0 0]';
% 将 x0 分量用物理符号表示, 更容易纠错
h=x0(1);
t1=x0(2);
t2=x0(3);
% 初始化
F(1)=h-(g/(k*k))*(k*t1+exp(-k*t1)-1);
F(2)=h-vs*t2;
F(3)=t0+t1+t2-t;
```

- 设计迭代程序并输出结果：

```
% 设置迭代终止条件、迭代步次数上限
tolerance = [1e-2;1e-4;1e-4];
maxIterations = 100;
% 迭代
for i = 1:maxIterations
    h=x0(1);t1=x0(2);t2=x0(3);
    F = [h-(g/(k*k))*(k*t1+exp(-k*t1)-1); h-vs*t2; t0+t1+t2-t];
    J_F=[1, (98*exp((-t1/20)))/5 - 98/5, 0; 1, 0, -343; 0, 1, 1];
    % 更新 x1
    x1=x0-J_F\F;
    % 判断是否满足精度要求
    if (abs(x1(1) - x0(1)) < tolerance(1)) && (abs(x1(2) - x0(2)) < tolerance(2)) &&(abs(x1(3)
        break;
    end
    % 更新 x0
    x0 = x1;
end
%检查是否迭代成功
if i == maxIterations
    disp('未能在指定的迭代步数内找到满足精度要求的解');
end
%输出
fprintf('经过 %d 次迭代, 得到的悬崖高度 h 为 %.6f m\n', i, x1(1));
```

```
经过 6 次迭代, 得到的悬崖高度 h 为 63.611411 m
```

## 2. 层次分析法（注：这题**后面好像出了一点错**，仅供参考）

**2.1.用 MATLAB 编写程序，计算 n=3~50 时的 n 阶随机一致性指标，编制 FI 表格，并与 T.L.Saaty 的结果进行比较。**

```
clear;
```

- 设置参数与初始化：

```
n_values = 3:50;
ri_values = zeros(size(n_values));
```

- 对于每个 n 值，计算其 RI。（注：函数 getRI 见末尾附录）

```
for i = 1:length(n_values)
    n = n_values(i);
    RI= getRI(n);
    ri_values(i) = RI;
end
% 以表格形式输出
T = table(n_values', ri_values', 'VariableNames', {'n', 'RI'});
disp(T);
```

```
    n       RI   
    __    _______

     3    0.47197
     4    0.82428
     5    0.97216
     6      1.214
     7     1.2534
     8     1.3223
     9     1.3455
    10     1.4396
    11     1.4293
    12     1.4383
    13     1.4658
    14     1.4782
    15     1.4833
    16     1.4813
    17     1.5117
    18     1.5143
    19     1.5286
    20     1.5383
    21     1.5326
    22     1.5466
    23     1.5486
    24     1.5612
    25     1.5545
    26     1.5651
    27     1.5648
    28     1.5758
    29     1.5754
    30     1.5734
    31     1.5869
    32       1.58
    33     1.5913
    34     1.5856
    35     1.5857
    36     1.6001
```

```
37       1.592
38      1.5986
39      1.5944
40      1.6016
41      1.6053
42      1.6007
43      1.6052
44      1.6066
45      1.6021
46      1.6094
47      1.6077
48       1.611
49      1.6056
50      1.6084
```

- 与 T.L.Saaty 的结果进行比较，可发现 RI 系数与 T.L.Saaty 的结果接近，并呈现相同的变化趋势。

Saaty 给出了 $n=1,\cdots,11$ 的随机一致性指标 $RI$ 值，见表 3.6.

**表 3.6　随机一致性指标值**

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $RI$ | 0 | 0 | 0.58 | 0.90 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 | 1.51 |

```
ri_saaty=[0.58,0.90,1.12,1.24,1.32,1.41,1.45,1.49,1.51];
e=zeros(1,length(ri_saaty));
for i=1:length(ri_saaty)
    e(i)=abs((ri_values(i)-ri_saaty(i))/ri_saaty(i));
end
disp('n 从 3 到 11 时，RI 的相对误差为');
```

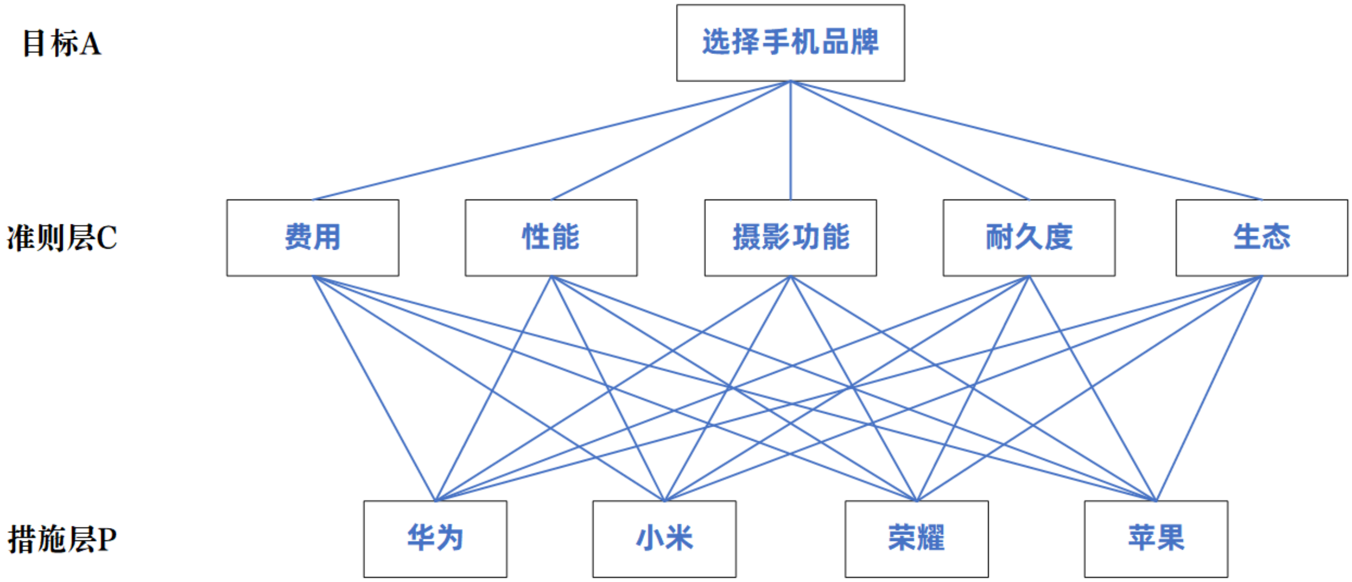
```
n 从 3 到 11 时，RI 的相对误差为
```

```
disp(e);
```

```
    0.1863    0.0841    0.1320    0.0210    0.0505    0.0622    0.0721    0.0338    0.0535
```

**2.2b 请用 AHP 方法，选择合适的评价指标，从华为、小米、荣耀、苹果四个品牌手机中给出你对你心仪的下一款手机做出评价排序。**

选择指标有费用、性能、摄影功能、耐久度、生态。示意图如下：




```
clear;
```

- 设置准则层权重矩阵：

```
A = [
    1       3       5       3       7;%费用
    1/3     1       2       1       5;%性能
    1/5     1/2     1       1/2     4;%摄影功能
    1/3     1       2       1       5;%耐久度
    1/7     1/5     1/4     1/5     1 %生态
    ];
```

- 进行一致性检验：

```
% 计算判定矩阵的特征值
eig_values = eig(A);
% 计算特征值的最大值
t = max(eig_values);
%计算相关参数
n=5;
CI = (t-n)/(n-1);
RI = [0 0 0.52 0.89 1.12 1.36 1.41 1.46 1.49 1.52 1.54 1.56 1.58 1.59];
CR = CI/RI(n);
if CR<0.10
    disp('此判断矩阵一致性可以接受！');
end
```

此判断矩阵一致性可以接受！

- 计算准则层权重向量：

```
% 计算并显示准则层权重向量
```

```
w = geomean(A);
disp('准则层权重向量为')
```

准则层权重向量为

```
disp(w);
```

```
    0.3165    0.7860    1.3797    0.7860    3.7070
```

- 设置措施层 P 矩阵：

```
VS = [
    3   5   5   5   4;%华为
    6   3   4   4   4;%小米
    4   3   3   4   3;%荣耀
    1   5   5   2   6 %苹果
    ];
```

- 计算并显示每个手机品牌对应准则层的加权平均值，结果依次对应华为、小米、荣耀、苹果：

```
% 计算每个手机品牌对应准则层的加权和
weighted_sum = VS * w';
% 计算每个手机品牌对应准则层的加权平均值
weighted_average = weighted_sum ./ sum(w);
% 显示每个手机品牌对应准则层的加权平均值
T = table(['华为';'小米';'荣耀';'苹果'], weighted_average, 'VariableNames', {'手机品牌', '对应准贝
disp(T);
```

| 手机品牌 | 对应准则层的加权平均值 |
|---|---|
| 华为 | 4.3778 |
| 小米 | 3.9781 |
| 荣耀 | 3.1581 |
| 苹果 | 5.0119 |

经过比较，我给出的排序为：**苹果、**华为、**小米、荣耀。**

## 附录：

- 计算一致性指标 RI 的函数：

```
function ri = getRI(n)
mmax=150;
k=0;
for h=1:mmax
    % 生成随机的 n 阶判定矩阵
    trigger = randi([1, 2], n, n);
    random_matrix = zeros(n, n);

    for i = 1:n
        for j = 1:n
```

```
            if trigger(i, j) == 1
                % 如果随机数小于等于 9，则选取 1-9 的自然数
                random_matrix(i, j) = randi([1, 9]);
            else
                % 否则选取 1-9 的倒数
                random_matrix(i, j) = 1 / randi([1, 9]);
            end
        end
    end

    random_matrix(logical(eye(n))) = 1; % 将对角线元素设置为 1

    for i=1:n
        for j=1:i
            random_matrix(i,j) = 1/random_matrix(j,i); % 确保对称性
        end
    end

    % 计算判定矩阵的特征值
    eig_values = eig(random_matrix);
    % 计算特征值的最大值
    lambda_max = max(eig_values);
    % 累加
    k=k+lambda_max;
end
 % 取平均值
k=k/mmax;
% 计算一致性指标 RI
ri = (k - n) / (n - 1);
end
```