

# 共形网格和 Mur 吸收边界条件在区域分解算法中的应用

潘嘉睿, 钟源, 李汪洋, 王岑仞, 田钰琛, 熊荃馨, 刘子源

东南大学 信息工程学院, 江苏省 南京 211100

**摘要:** 针对二维柱体散射问题, 该文提出采用共形网格划分计算区域, 并在截断边界处应用 Mur 吸收边界条件的区域分解算法; 该方法具有灵活性强、角点处计算精度高等优点; 平面波入射无限长理想导体表面的数值算例验证了共形网格和 Mur 吸收边界条件在区域分解算法中的准确性和有效性。

**关键词:** 二维柱体散射问题, Helmholtz 方程, 区域分解算法, 共形网格, Mur 吸收边界条件, 表面电流

## Application of Conformal Mesh and Mur Absorbing Boundary Conditions in the Domain Decomposition Algorithm

Pan Jiarui, Zhong Yuan, Li Wangyang, Wang Cenle, Tian Yuchen, Xiong Quanxin,  
Liu Ziyuan

School of Information Engineering, Southeast University, Nanjing 211100, Jiangsu, China

**Abstract:** For the two-dimensional cylindrical scattering problem, this paper proposes a domain decomposition algorithm that employs conformal mesh division for the computational region and applies Mur absorbing boundary conditions at the truncated boundary. This method exhibits advantages such as high flexibility and improved computational accuracy at corner points. Numerical examples of plane waves incident on the surface of an infinitely long perfect conductor validate the accuracy and effectiveness of conformal meshes and Mur absorbing boundary conditions in the domain decomposition algorithm.

**Keywords:** two-dimensional cylindrical scattering problem, Helmholtz equation, domain decomposition algorithm, conformal mesh, Mur absorbing boundary condition, surface current

### 1 引言

柱体电磁散射问题在电磁学领域中具有重要的应用价值, 尤其在雷达、通信、光学成像等技术中广泛涉及[1][2]。传统的求解方法, 如几何光学法(GO)和物理光学法(PO), 由于其计算效率高,

在处理高频、大尺寸物体时取得了显著的应用效果, 因此在工程实践中被广泛采用[3][4]。这些方法能快速估算雷达散射截面(RCS), 并对目标物体的电磁特性提供初步的定量分析。然而, 这些方法通常基于近似假设, 容易忽视物体的细节结构和低频效

应, 因此在一些复杂散射场景下可能存在较大的误差[5]。

近年来, 随着数值模拟技术的进步, 有限元法(FEM)和矩量法(MoM)等方法在电磁散射问题中得到了广泛应用[6][7]。FEM 可以处理复杂几何形状下的电磁场分布问题, 并能有效考虑非均匀材料和多层结构对散射的影响[8], 但求解大规模问题时, 网格数目的增加会导致系统矩阵阶数的急剧增加, 从而导致计算时间和内存需求的显著增长。MoM 则通过解决积分方程, 能够实现高精度的散射计算, 精确模拟不同物体的电磁散射特性, 避免传统近似法的误差, 适用于低频和细节丰富的散射问题[9]。然而, MoM 的计算需要求解一个  $N$  阶的满矩阵(其中  $N$  为剖分的节点数目), 其直接求解时的计算量为  $O(N^2)$ , 甚至在采用迭代算法时, 计算量仍可达到  $O(N)$ , 而内存消耗为  $O(N)$  量级。当问题的规模增大时, 矩阵方程的阶数也会迅速增长, 从而导致计算效率的显著下降, 限制了其在大规模问题中的应用。

区域分解算法[12]对这一问题进行了优化与创新。与传统的矩量法相比, 区域分解算法的最大优势在于其显著减少了计算时间和内存需求。区域分解算法通过将求解区域划分为多个子域, 将计算复杂度从  $O(N^2)$  降低为  $O(N)$ , 并且通过优化内存管理, 将内存消耗降低为  $O(N/m)$ , 其中  $m$  为子域的数量[13]。这使得我们能够在保证计算精度的同时, 大幅提高计算效率, 特别是在处理电磁散射问题时, 展现出明显的优势。

在具体实现中, 共形网格和 Mur 吸收边界条件发挥了关键作用。共形网格方法的网格节点与物体边界高度匹配, 能够精确地描述柱体的表面形态,

避免了传统方法中可能因网格离散不精确导致的误差。与其他网格方法相比, 共形网格能够更好地捕捉电磁场在物体边界上的变化, 提高了计算的准确性, 尤其是表面发生急剧变化的时候。对于柱体电磁散射问题, 尤其是无限长柱体的处理, Mur 条件能够极大地提高计算的稳定性和精度。通过引入 Mur 条件, 我们能够有效模拟柱体在自由空间中的散射特性, 避免了传统方法中可能出现的反射干扰问题。

本文基于上述研究, 针对二维柱体散射, 结合具体的 Helmholtz 方程求解问题, 展示共形网格和 Mur 边界条件在区域分解算法中的应用。先利用共形网格将原始计算区域划分成若干个子区域, 然后引入共形网格下的有限差分方程分别求解。其中, 利用 Mur 边界条件来模拟无限域, 并主要观察共形网格对数值解精度产生的影响。为了展示共形网格的优越性, 还进一步关注了共形网格对角点处计算精度的影响。

## 2 基本原理

区域分解算法(domain decomposition method, DDM)的基本思想是不直接求解原始问题本身, 而是把要求解的区域分成若干个相对独立的子区域, 然后分别在每个子区域上求解, 再通过迭代得到原来整个区域上的解。这样每次只需要处理一个子区域, 可以显著减少存储量。

### 2.1 共形网格剖分法

共形网格(Conformal Mesh)能有效减少由网格节点个数和由网格剖分造成的误差。共形网格的基本原理是要使生成的网格与模型的复杂几何特征紧密贴合, 在关键几何位置(如曲面、边界、尖角、拐点等)增加更多网格点, 用局部密集网格捕

捉这些复杂形状。从而在数值计算中准确表示几何特征，不需要额外的近似，降低离散化误差，并提高数值解的精度。如图 1 所示， $K$  为共形网格的层数， $N_{MoM}$  为一层网格的节点数。为了保证共形网格与几何拓扑结构的一致，我们将方形的角点处，近似为曲面，如图 2 所示，这样可以用更多的节点来表达关键几何位置（如曲面、边界、尖角、拐点等），提高计算精度。

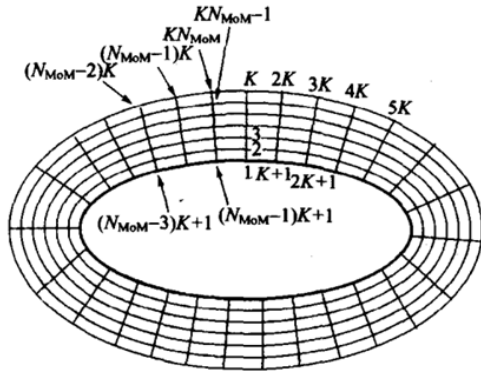


图 1 共形网格概念图

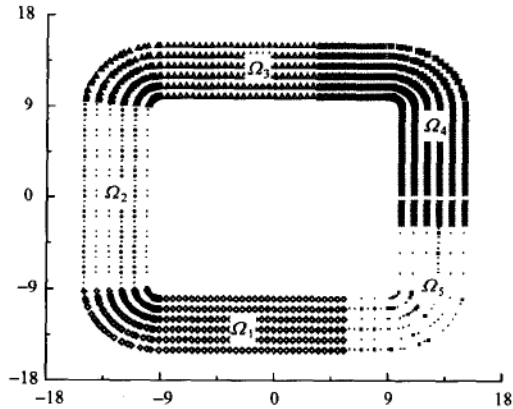


图 2 导体方柱外的共形网格

为了节省计算时间和内存，沿柱体表面产生的共形网格不能是无穷无尽的，必须被截断。此时，最外一层网格的边界就称为截断边界。截断边界条件是为了给边界上的点提供能反映被截去的外部空间影响的信息，也叫吸收边界条件，或者透射边界条件。由此，共形网格节点可分为截断边界节点、柱体表面节点和内节点三类。其中，柱体表面节点

即为最内层网格边界上的点，内节点位于两者之间。每种类型的节点对应着不同的有限差分方程，需要结合不同的边界条件和方法来分别计算求解。

## 2.2 数值求解方法

### 2.2.1 截断边界节点

截断边界条件决定了网格层数，也决定了未知量的个数，从而决定了差分类方法最终生成的有限差分方程组系数矩阵的规模。最常用的是 G. Mur 提出的吸收边界条件，即 Mur 吸收边界条件。如图 3 所示，Mur 条件可以使波动离开计算域的表现更接近于在无限域中的传播效果，在有限的计算域中尽可能减少波在边界上的反射。

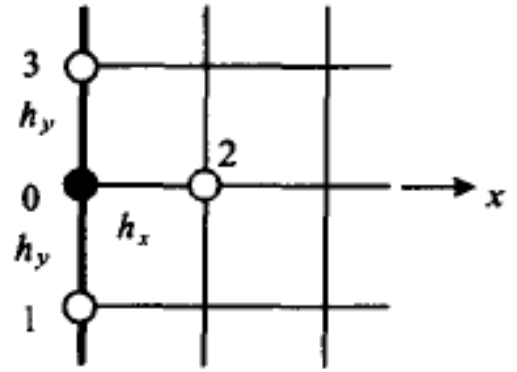


图 3 二阶 Mur 条件的非均匀差分格式

截断边界处的散射场满足如下 Helmholtz 方程，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_0^2 \phi = 0 \quad (1)$$

写成算子形式可得，

$$(D_x^2 + D_y^2 + k_0^2) \phi = 0 \quad (2)$$

其中， $\gamma = \sqrt{D_y^2 + k_0^2}$

则其方程可分解为两个一阶偏微分方程，即

$$(D_x - j\gamma) \phi = 0 \quad (3)$$

$$(D_x + j\gamma) \phi = 0 \quad (4)$$

其解分别是  $\phi = \exp(j\gamma x)$  和  $\phi = \exp(-j\gamma x)$ 。

前者对应沿  $-z$  方向传输的波，后者对应沿  $+z$  方向传输的波。若将  $(D_x - j\gamma) \phi = 0$  作为截断边界条

件，则可令截断边界上只有透射波而没有反射波，将柱体表面与截断边界之间有限区域的传播近似于在无限域中的传播。将  $\gamma = \sqrt{D_y^2 + k_0^2}$  展开成如下泰勒级数，

$$\gamma = \sqrt{D_y^2 + k_0^2} = k_0 \left( 1 + \frac{D_y^2}{2k_0^2} - \frac{D_y^4}{8k_0^4} + \dots \right) \quad (5)$$

由于本文针对的是二维柱体散射问题，故在此取二阶近似，得到二阶 Mur 吸收边界条件。再以差商近似偏导数，则可得到二阶 Mur 吸收边界条件对应的差分方程

$$\sum_{i=0}^3 c_i \phi_i = 0 \quad (6)$$

其中，

$$c_0 = -\frac{1}{k_0 h_x} - j \left( 1 - \frac{1}{k_0^2 h_y^2} \right) \quad (7)$$

$$c_1 = \frac{-j}{2k_0^2 h_y^2} = c_3 \quad (8)$$

$$c_2 = \frac{1}{k_0 h_x} \quad (9)$$

### 2.2.2 表面节点

理想导体的表面总场满足边界条件  $\phi^t = 0$ ，可直接代入通解，即

$$\bar{u}_k^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{mn}^{(i)} sh(\gamma_{mn} z) + B_{mn}^{(i)} ch(\gamma_{mn} z)] \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (10)$$

$$\gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2, \quad A_{mn}^{(i)} = A_{zmn} B_{xm} B_{yn}, \quad B_{mn}^{(i)} = B_{zmn} B_{xm} B_{yn}$$

得到第一层节点的简化差分方程为

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^5 c_i \phi_i^s = c_5 \phi_3^{inc} \quad (11)$$

### 2.2.3 内节点

如图 4 所示，在每个内节点处建立局部极坐标来拟合共形网格， $r_1$ 、 $r_2$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$  与节点全局坐标  $(x_i, y_i)$  关系对应如下：

$$r_1 = d_{15} d_{45} / (d_{17} - d_{45}) \quad (12)$$

$$r_2 = d_{15} d_{45} / (d_{16} - d_{25}) \quad (13)$$

$$\theta_1 = 2 \arcsin \left( \frac{d_{17} - d_{45}}{2d_{15}} \right) \quad (14)$$

$$\theta_2 = 2 \arcsin \left( \frac{d_{16} - d_{25}}{2d_{15}} \right) \quad (15)$$

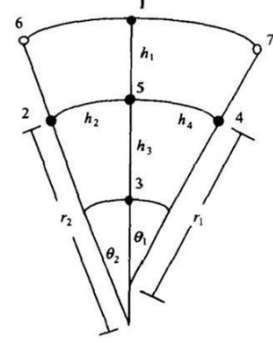


图 4 二阶局部极坐标拟合共形网格

其中， $d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  为节点 i

与节点 j 之间的距离。以  $h_i (i=1,2,3,4)$  表示节点 i

到节点 5 的弧长，则有  $h_1 = d_{15}$ ， $h_2 = r_2 \theta_2$ ， $h_3 =$

$d_{35}$ ， $h_4 = r_1 \theta_1$ 。

在五点差分网格的四个象限中以弧长中点法向为参考画四个环路，如图 5 所示，然后采用广义环路积分法导出关于节点 5 的有限差分方程。每个小共形环区域内的场均满足 Helmholtz 方程。

$$\nabla^2 \varphi^{(i)} + k_0^2 \varphi^{(i)} = 0 \quad (16)$$

在  $S_i$  上， $i=1, 2, 3, 4$

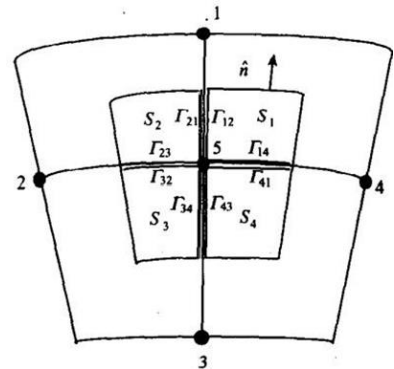


图 5 环路积分法的积分环路

对每个小区域对方程两边积分，再利用 Gauss 定理和中心差商和矩形积分公式进行近似，得到环路所围的面积表达式如下所示：

$$S_1 = h_1 \theta_1 (r_1 + h_1/4)/4 \quad (17)$$

$$S_2 = h_1\theta_2(r_2 + h_1/4)/4 \quad (18)$$

$$S_3 = h_3\theta_2(r_2 - h_3/4)/4 \quad (19)$$

$$S_4 = h_3\theta_1(r_1 - h_3/4)/4 \quad (20)$$

将这些相加并消去所有右端积分项，得到如下共形状网格的五点差分方程

$$\sum_{i=1}^3 c_i \phi_i^s = 0 \quad (21)$$

其中，

$$c_1 = (2r_1\theta_1 + 2r_2\theta_2 + h_1\theta_1 + h_1\theta_2)/h_1 \quad (22)$$

$$c_2 = 2(h_1 + h_3)/r_2\theta_2 \quad (23)$$

$$c_3 = (2r_1\theta_1 + 2r_2\theta_2 - h_3\theta_1 - h_3\theta_2)/h_3 \quad (24)$$

$$c_4 = 2(h_1 + h_3)/r_1\theta_1 \quad (25)$$

考虑到柱体表面节点上的场定义为总场，而其他节点上的场都定义为散射场，因此在柱体表面向外一层的节点上，将得到的五点差分方程改写为：

$$c_3 \phi_3^t + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^5 c_i \phi_i^s = c_s \phi_3^{inc} \quad (26)$$

### 2.3 求解表面电流

至此，我们已经得到了所有节点上的差分方程，内节点上的5点差分方程，和柱体表面边界条件得到的差分方程，以及根据 Mur 吸收边界条件得到的差分方程。将以上得到的三种差分方程联立，则可建立所有网格节点上场量的线性代数方程组

$$S\Phi = f \quad (27)$$

其中 S 为系数矩阵，每行非零元素个数不超过 5， $\Phi$  为未知量列向量，包括柱体表面节点上的总场值和其它节点上的散射场值。f 为列向量，由之前得到的差分方程的右端项构成。由此，可以先求出各个节点上的场，再由柱体表面的总场即可求出 TM 激励下的柱体表面电流。

其中， $TM^z$  激励下的表面电流密度公式为

$$J_e = \hat{n} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_r} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{k_0 h_v} \quad (28)$$

$TE^z$  激励下的公式为

$$J_e = \hat{n} \times \vec{H} = \frac{\Phi_1}{\eta} \quad (29)$$

## 3 数值算例

### 3.1 算例

为了验证本文算法的正确性，我们以一道典型的二维 Helmholtz 方程求解问题为例，展示共形网格和 Mur 吸收边界条件在区域分解算法中的应用。如图 6 所示，计算无限长的理想导体方柱的表面电流，以平面波入射。为了简化计算，我们考虑平面波为  $TM^z$  波，导体柱限定为  $20\lambda \times 20\lambda$ ，其中  $\lambda$  表示入射波的波长。

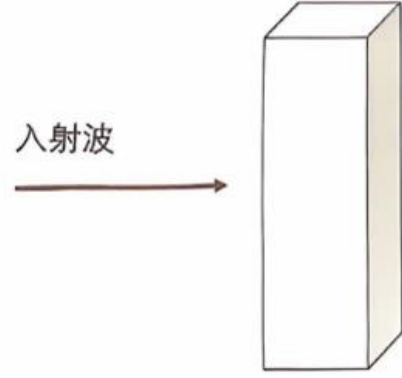


图 6 平面波入射无限长理想导体方柱

设柱体轴向为 z 方向，导体柱截面形状为方形，在 x-y 平面中表示。由于理想导体方柱为无限长，沿 z 方向无不连续性，入射波垂直于 z 方向入射时不会引起场分量在 z 方向上的变化，即  $\partial/\partial z = 0$ 。因为以 TM 入射波为例求解，用  $\phi(x,y)$  表示纵向场分量为：

$$\phi = E_z, TM^z \quad (30)$$

柱体外任一点处的总场可以分解为入射场和散射场之和，即  $\phi^t = \phi^{inc} + \phi^s$ 。理想导体的表面为总场，理想导体表面之外为散射场，理想导体内部无电场。三者都满足 Helmholtz 方程  $\nabla^2 \phi + k_0^2 \phi = 0$ ，其中  $\nabla^2$  为二维 Laplace 算子。

Laplace 算子 $\nabla^2$ 采用极坐标的形式，即

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \quad (31)$$

### 3.2 代码分析:

由此，我们将一个三维问题转换成一个关于 Helmholtz 方程的二维散射问题。

我们首先根据题目来划分共形网格，需要注意的是，由于柱体是方形的，无法直接形成共形网格，故在拐角处我们采用了圆角处理，使之能用共形网格进行建模，同时圆角较小，以逼近方形柱体的性质。其中的圆角处理代码逻辑如下：

```
% 设置圆角处理的起点和终点
err_min=49;
err_max=52;

for n_MoM=1:N_MoM
    if n_MoM>=err_min && n_MoM<=err_max
        % 遍历到相应点数则进行处理
        m = n_MoM-err_min;
        % 计算起点和终点处的极坐标
        [r, theta_min]=CartesianToPolar(X(k,err_min),Y(k,err_min));
        [rr, theta_max]=CartesianToPolar(X(k,err_max),Y(k,err_max));
        % 进行圆角处理
        theta_delta=(theta_max-theta_min)/(err_max-err_min);
        theta = theta_min + m*theta_delta;
        % 将各点处的极坐标转回直角坐标
        [X(k,n_MoM), Y(k,n_MoM)] = polarToCartesian(r, theta);
    end
end
```

其中，如此循环处理四次即可完成共形网格的设置，处理结果如下：

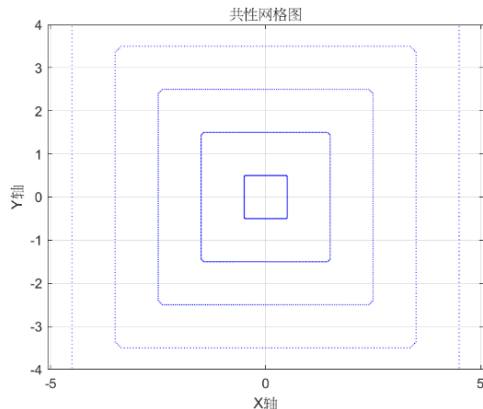


图7 方导体柱的共形网格划分图

可以看到其共形网格十分接近方形导体柱，保证了仿真结果的适用性。

根据第二部分提到的基本原理，我们分别在 MATLAB 中自定义了三种差分方程求解函数。代码框架如下：

```
% 理想导体表面
for j = 1:N_MoM
    phi_s(1,j)=-phi_inc(1,j);
end

% 内节点与截断边界
for i = 2:(K+1)
    for j = 1:(N_MoM)
        % 截断边界
        if i==(K+1)
            if j>=2 && j<=(N_MoM-1)
                % 截断边界的边界条件
                .....
            elseif j==1 % 第一个点，代码需特殊处理
                % 截断边界的边界条件
                .....
            else % 最后一个点，代码需特殊处理
                % 截断边界的边界条件
                .....
            end
        % 内点
        else
            if j>=2 && j<=(N_MoM-1)
                % 内点的差分方程
                .....
            elseif j==1 % 各层第一个点，代码需特殊处理
                % 内点的差分方程
                .....
            else % 各层最后一个点，代码需特殊处理
                % 内点的差分方程
                .....
            end
        end
    end
end
end
```

在 MATLAB 中迭代求解后得到结果后，分析可得——由于之前已将导体柱限定为  $20\lambda \times 20\lambda$ ，则柱体的每一面可用  $100 \lambda$  来表示。其中我们定义，

$50\lambda \sim 150\lambda$ 表示的是入射波打入的面， $250\lambda \sim 350\lambda$ 为其背面， $150\lambda \sim 250\lambda$ 和  $350\lambda \sim 50\lambda$ 分别表示另外两侧面。由于方柱是理想导体，不传播波，故理想的结果是表面电流仅存在于方柱的正面。图 7 符合预期的结果，即表面电流的计算结果集中在  $50\lambda \sim 150\lambda$ ， $250\lambda \sim 350\lambda$ 处表面电流为 0，其余两侧表面电流趋近于 0，故可初步证明我们算法的正确性。

在保证了算法的基本正确性后，我们进一步分析截断边界对数值解精度的影响。截断边界的影响其实指的是截断边界与理想导体表面的距离对数值精度的影响，即有限域范围对数值精度的影响。这个距离可用网格层数来表述：当网格之间间隔固定为  $1\lambda$ 时，网格层数设定越少，截断边界与理想导体的表面距离就越近；网格层数设定越多，截断边界与理想导体的表面距离就越远。由图 8 可发现， $K=16$ ，即 16 层网格的时候结果最精确。两侧面的电流在网格层数较少时误差较大，正面和背面的计算结果相对来说则相差不大。这说明，当网格层数过大或过小，都会存在一定的误差，故在采用共形网格划分和二阶 Mur 吸收边界条件计算柱体散射问题时，网格数取十几到二十层之间是最精确的。

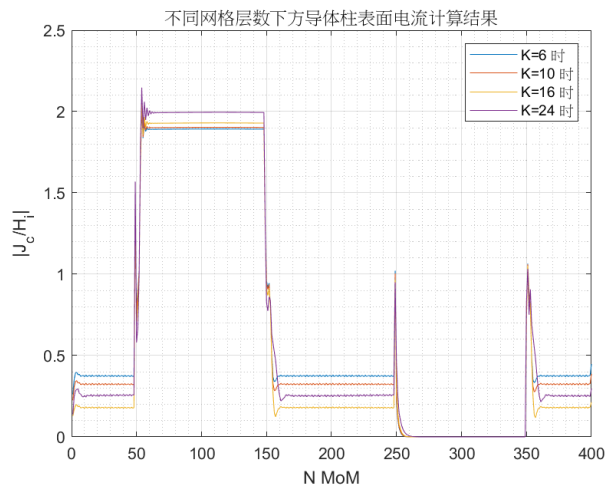


图 8 不同网格层数下方导体柱表面电流计算结果

接下来，我们观察共形网格的网格步长对数值解精度的影响。我们使截断边界和理想导体表面的距离固定不变，通过增加或减少网格层数来改变网格的步长。已知，网格数应取十几到二十层之间，于是如图 9 所示，将网格层数分别令为 11、12、14、16，观察可发现：此时，网格步长越小，计算结果越精确。

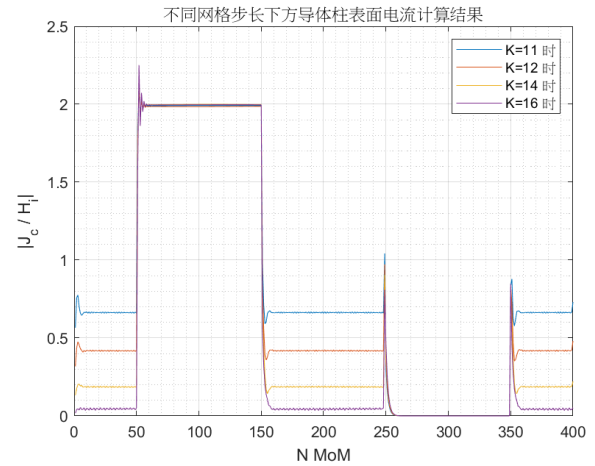


图 9 不同网格步长下方导体柱表面电流计算结果

最后，我们通过计算角点处的表面电流密度，来分析共形网格角点处的划分对计算精度的影响。由共形网格的特性可知，共形在关键几何位置（如曲面、边界、尖角、拐点等）可用更多网格点来表示，以此增加精度。我们分别将角点处剖分成 1、5、7 个节点，并将中心节点处表面电流的值看作是角点电流的值，分别如图 9 所示。

表 1 不同的角点网格划分下，角点电流的数值 ( $|J_c/H_1|$ )

	使用 1 个节点划分	使用 5 个节点划分	使用 7 个节点划分
角点 1	1.9783	1.9733	1.9635
角点 2	2.0729	2.0687	2.0580
角点 3	0.6018	0.5812	0.5271
角点 4	0.5273	0.5266	0.5248

其中，用节点 49~53、节点 149~153、节点 249~254 和节点 349~353 来表示角点，取节点 51、151、251 和 351 的值为角点处的表面电流，如图 10。通过比较发现，角点处用 5 个节点表示时，方柱背面的两个角点的值更接近 0，即角点处电流计算结果最精确。

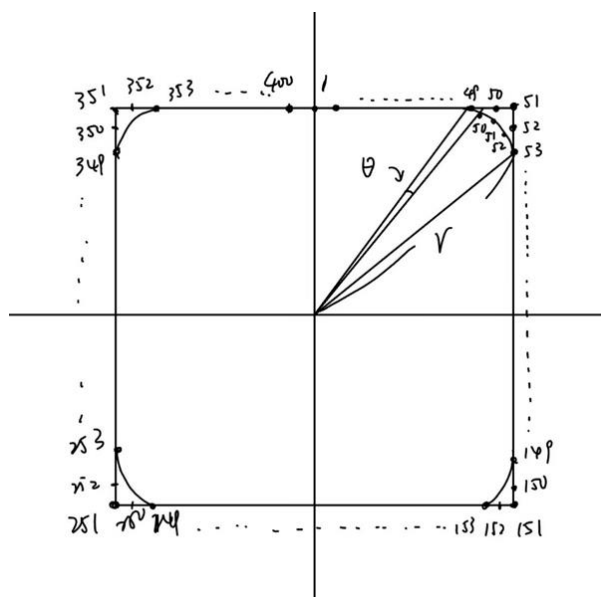


图 10 方柱角点处的划分

## 4 结论

本文针对二维柱体散射问题，提出采用了共形网格剖分计算区域，并在截断边界处应用 Mur 吸收边界条件的区域分解算法。区域分解算法的优势在于能把大问题分解为若干小问题，缩小了计算规模。针对不同子区域，区域分解算法可以“因地制宜”地选择与之相适应的最有效的算法。而且，对于离散问题，区域分解算法允许采用局部拟一致网格，而无须用整体一致的网格，各子域可以使用不同方法进行离散。我们引入能更贴合边界形状的共形网格来进行网格的划分，并用弧形来近似方柱的直角拐点。在三种不同类型的网格节点区域，分别建立三种不同的差分方程：内节点处采用局部极坐标拟合的“五点差分方程”；截断边界基于二阶 Mur 吸

收边界条件，建立了相对应的差分方程；柱体表面则根据设定的理想导体柱满足的边界条件，得到了相关的差分方程。

数值算例“求解无限长理想导体方柱的表面电流”则进一步证明我们该方法的有效性，并得出结论如下：在采用共形网格划分和二阶 Mur 吸收边界条件计算柱体散射问题时，网格数取十几到二十层之间是最精确的；网格步长在  $1\lambda$  左右时，得到的结果是最精确的；用 5 个节点划分方柱角点时，角点处的表面电流结果最精确。

尽管本文的数值算例表明方法在处理方柱及类似几何形状的问题中具有较高的精确度，但当几何边界更复杂、问题维度的增加，网格划分及差分方法的计算复杂度可能会显著增长。未来工作中，可进一步探索区域分解算法应用于三维问题的可能性，及关注其他类型边界条件的应用，并考虑引入迭代过程算法来提高区域分解算法的计算效率。



## 参考文献

- [1] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Wiley.
- [2] Balanis, C. A. (2012). *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley.
- [3] Hessel, A., & Jacob, R. (1995). "Application of Physical Optics to Radar Cross Section Prediction." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(6), 625-630.
- [4] Ma, Z., & Cumming, D. (2018). "Geometrical Optics for Electromagnetic Scattering Problems." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 32(7), 849-867.
- [5] Chi, P., & Lee, J. (2016). "A Survey on Electromagnetic Scattering Models for Complex Shapes." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 64(12), 4301-4311.
- [6] Jin, J.-M. (2014). *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley.
- [7] Nishikawa, T., & Kojima, M. (2008). "Electromagnetic Scattering Analysis Using the Method of Moments." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 56(4), 1214-1223.
- [8] Dziubanski, M., & Lee, S. (2010). "FEM for Electromagnetic Scattering from Complex Objects." *Journal of Computational Physics*, 229(9), 3396-3404.
- [9] Cheng, D., & Yu, Y. (2017). "Method of Moments for Electromagnetic Scattering by Complex Targets." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 65(3), 1094-1102.
- [10] Liu, W., & Tan, M. (2006). "Boundary Element Methods for Electromagnetic Scattering." *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(9), 3476-3482.
- [11] Felsen, L. B., & Marcuvitz, N. (2012). *Radiation and Scattering of Waves*. Dover Publications.
- [12] Go, L. H., & Chan, H. S. (2003). "Improvements in the Finite Difference Method for Electromagnetic Scattering." *Journal of Computational Physics*, 183(2), 560-578.
- [13] Kim, S., & Lee, J. (2009). "Computational Techniques for Electromagnetic Scattering Problems Using FDFD." *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 51(6), 1342-1355.
- [14] 洪伟, 孙连友, 尹雷, 许锋等著, 《电磁场边值问题的区域分解算法》(2005)
- [15] 吕志清, 安翔, 洪伟. 棱边元分区的区域分解算法及其在电磁问题中的应用 [J]. 电子与信息学报, 2007, (05):1232-1235