INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TLÁHUAC

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

NOMBRE: ROMERO MEDINA ALBERTO

DOCENTE: MARTINEZ VALDEZ JORGE

ASIGNATURA: CÁLCULO VECTORIAL

PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES

3S1

TEMA

Planos tangentes y rectas normales

FECHA

Es conveniente utilizar la representación más general $F(x,y,z)=0$
Una superficie S dada por $z=f(x,y)$, se puede convertir a la forma general definiendo F como

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

Puesto que $f(x,y)-z=0$ se puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$F(x,y,z)=0$ Ecuación alternativa de la superficie.

Ejemplo 1.
Dada la función
$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$$
describir la superficie de nivel dada por $F(x,y,z)=0$

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea F diferenciable en un Punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de la Superficie S dada por
$$F(x,y,z)=0 \text{ tal que } \nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se le llama plano tangente a S en P
2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se le llama recta normal a S en P.

Para hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0,y_0,z_0) sea (x,y,z) un punto arbitrario en el plano tangente. Entonces el vector

$$v=(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k$$

se encuentra en el plano tangente. Como $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0,y_0,z_0), debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente, y se tiene $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot v=0$, lo que demuestra el resultado enunciado en el teorma siguiente

TEOREMA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x,y,z)=0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

Ejemplo 2

Hallar una ecuación de un plano tangente al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $(1, -1, 4)$.

Solución Se comienza por expresar la ecuación de la superficie como

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$$

Después considerando

$$F(x,y,z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

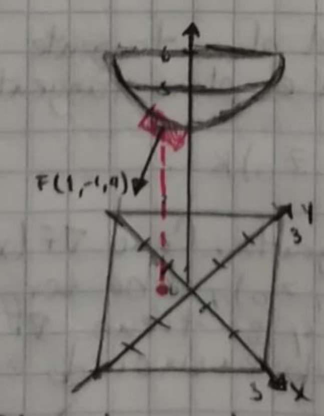
Se tiene

$F_x(x,y,z) = -4x$ $\quad F_y(x,y,z) = -4y$ $\quad$ y $\quad F_z(x,y,z) = 2z$

En el punto $(1,-1,4) = -4$ $\quad F_y(1,-1,4) = 4$ $\quad$ y $\quad F_z(1,-1,4) = 8$

Por lo tanto, una ecuación del plano tangente en $(1,-1,4)$ es

$$-4(x-1) + 4(y+1) + 8(z-4) = 0$$
$$-4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 = 0$$
$$-4x + 4y + 8z - 24 = 0$$
$$x - y - 2z + 6 = 0$$

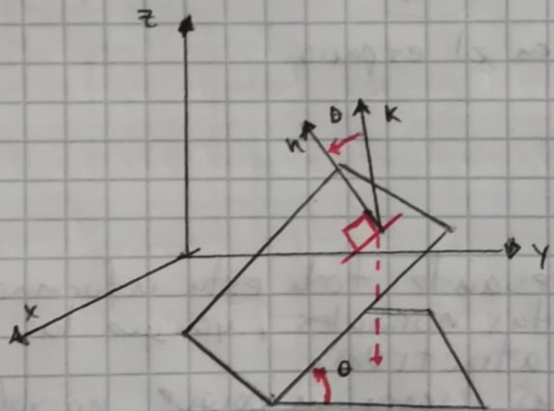


Plano tangente a la superficie

El ángulo de inclinación de un plano

El ángulo de inclinación de un plano se define como el ángulo $\theta\ (0 \le \theta \le \pi/2)$ entre el plano dado y el plano xy. (El ángulo de inclinación de un plano horizontal es por definición cero). Como el vector k es normal al plano xy, se puede utilizar la siguiente formula del coseno del ángulo entre dos planos, el ángulo de inclinación esta dado por

$$\cos\theta = \frac{|n \cdot k|}{\|n\|\|k\|} = \frac{|n \cdot k|}{\|n\|}$$



Esemplo 3. Hallar el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1 \quad \text{en el punto } (2,2,1)$$

Solución Si se hace

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$$

el gradiente de F en el punto (2, 2, 1) está dado por

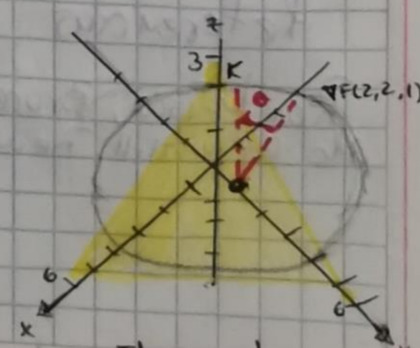
$$\nabla F(x,y,z) = \frac{x}{6} i + \frac{y}{6} j + \frac{2z}{3} k$$

$$\nabla F(2,2,1) = \frac{1}{3} i + \frac{1}{3} j + \frac{2}{3} k$$

Como $\nabla F(2,2,1)$ es normal al plano tangente y k es normal al plano xy, el angulo esta dado por

$$\cos\theta = \frac{|\nabla F(2,2,1) \cdot k|}{\|\nabla F(2,2,1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

lo cual implica $\theta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.3°$



Elipsoide

Comparación de los gradientes $\nabla f(x,y)$ y $\nabla F(x,y,z)$

Especificamente el teorema "El gradiente es normal a las curvas de nivel"
Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0).
Habiendo desarrollado rectas normales a superficies, ahora se puede extender el resultado a una función de tres variables

TEOREMA El gradiente normal a las superficies de nivel

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0)

$\nabla F(x,y,z)$ es un vector en el espacio

Conclusiones

Se me hace muy interesante toda esta información sobre las planos tangentes y rectas normales, ya que las gráficas se me hacen visualmente muy atractivas.
Todo este tipo de cosas tienen un porque, no solo es hacer cuentas y ya, por ejemplo este tipo de información la puedes aplicar al jugar billar ya que te haces preguntas como estas ¿Cuál de las bolas estacionarlas adquirira velocidad? o ¿Cual adquirira menor velocidad?.
En pocas palabras todo esto no es visible, ya que no estarás midiendo la velocidad y el ángulo para golpear la bola.
Pero aplicando todo esto de manera científica con el cálculo podrías mejorar las posibilidades de ganar lar rondas.
Pero bueno todo es importante simplemente sacandole provecho a tu conocimiento.

Referencias

Ron Larson, Bruce H. Edwards. (2010). CÁLCULO. Mexico, DF. Mc Graw Hill. Recuperado el 17 de Junio de 2021