第二章：完备信息静态博弈

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

完备信息静态博弈

静态博弈 = 同时行动博弈。三个基本元素:

- 参与人
- 行动集合
- 效用函数

完备信息静态博弈

静态博弈 = 同时行动博弈。三个基本元素:

- 参与人
- 行动集
- 效用函数

之后我们在介绍动态博弈和不完备信息时，会引入两个新元素：**信息集**和**策略**。

- 对于完备信息静态博弈，暂时不用引入这两个元素

参与人

- **参与人**指的是博弈中的决策主体，它的目的是通过选择行动（或策略）以最大化自己的效用水平
- 经济博弈中的参与人：
  - 消费者，投资者，企业、国家或由若干国家组成的集团
- 数学符号：
  - 参与人构成集合 $N = \{1, ..., n\}$
  - 参与人1，参与人2,..., 参与人 n
- 例子：$N = \{张三，李四\}$

行动集

- 对于参与人 i, 用集合 A_i 表示其**行动集**
- 参与人 i 的某个**行动**记为 $a_i \in A_i$
- 例:

$$A_1 = A_2 = \{石头, 剪刀, 布\}$$

- 石头剪刀布博弈的 **结果** 表示为向量 $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$

效用函数

- 参与人 i 的效用函数 u_i: 博弈结果到实数的映射

$$u_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$$

- 例: 剪刀石头布博弈, 获胜时收益为 1, 失败收益为 -1, 平局为 0

效用函数

- 参与人 i 的效用函数 u_i: 博弈结果到实数的映射

$$u_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$$

- 例: 剪刀石头布博弈, 获胜时收益为 1, 失败收益为 -1, 平局为 0

博弈的基本特征: 参与人 1 的最终收益不仅取决于他自己的决策 a_1, 还取决于其他参与人的决策: $a_2, a_3, \ldots$

- 我们称这个现象为**策略性互动** (strategic interaction), 或参与人的收益存在"互相依赖"
- 这个概念很类似**外部性**

例: 囚徒困境

囚徒困境

- 囚徒困境是一个非常经典的 **完备信息同时行动博弈**
- 两位犯罪嫌疑人 (张三和李四) 被警方分离开, 单独审问
- 面对警方询问, 犯罪嫌疑人会选择**合作** (不坦白)或**背叛** (坦白)
  - 若两人都选择合作, 则两人均 "拘留7天"
  - 若张三选择合作, 而李四背叛. 则张三判刑 5 年,李四无罪释放
  - 若两人都选择背叛, 则两人均判刑 1 年

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 不坦白$\}$

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 不坦白$\}$
- 效用函数表示为如下"收益矩阵":

张三 \ 李四	坦白	不坦白
坦白	(1 年, 1 年)	(无罪, 5 年)
不坦白	(5 年, 无罪)	(7 天, 7天)

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 不坦白$\}$
- 效用函数表示为如下收益矩阵:

张三 \ 李四	坦白	不坦白
坦白	(-5, -5)	(0, -8)
不坦白	(-8, 0)	(-1, -1)

- 如果你是张三, 你的选择是？

严格劣势策略

- 若李四选则坦白, 张三选择坦白和不坦白的收益分别为: $-5, -8$
- 若李四选则不坦白, 张三选择坦白和不坦白的收益分别为: $0, -1$

严格劣势策略

- 若李四选则**坦白**, 张三选择坦白和不坦白的收益分别为: $-5, -8$
- 若李四选则不坦白, 张三选择坦白和不坦白的收益分别为: $0, -1$

结论: 张三应该选**坦白**, 不应该选不坦白.

- 因为无论李四的选择是什么, **坦白**的收益都大于不坦白的收益.
- 不坦白 是张三的 (严格) 劣势策略
  - 注: 对于完备信息同时行动博弈, "策略"是"行动"的同义词
  - 我们一般不说劣势行动, 只说**劣势策略**

练习: 寻找严格劣势策略 (如果有的话)

1 \ 2	左	右
上	(1 , 0)	(-1, -3)
下	(-3, -1)	(0, 1)

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

练习答案

- 第一个博弈中, 双方参与人均不存在严格劣势策略
- 第二个博弈中, 参与人1存在严格劣势策略, 参与人 2 不存在.

这个练习的背景是另一个非常经典的博弈: 协调博弈 (coordination game). 有时也把它叫作约会博弈.

严格劣势策略: 定义

对于两人博弈, 若参与人 1 存在两个策略 $a_{优}$ 和 $a_{劣}$, 使得

$$u_1(a_{优}, a_2) > u_1(a_{劣}, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$$

我们称策略 $a_{优}$ **严格优于** $a_{劣}$. 并称 $a_{劣}$ 是参与人 1 的**严格劣势策略**.

在具体博弈中, 理性的参与人永远不会选择严格劣势策略.

练习: 对于两人博弈, 若策略 a_2 是参与人2的严格劣势策略, 请描述对应的不等式关系.

练习: 对于两人博弈, 若策略 a_2 是参与人2的严格劣势策略, 请描述对应的不等式关系.

存在某个参与人2的策略 a_2', 使得下列的不等式对所有参与人1的策略a_1都成立:

$$u_2(a_1, a_2') > u_2(a_1, a_2) \quad \forall a_1 \in A_1$$

劣势策略 (暂时了解即可)

对于两人博弈, 若参与人 1 存在两个策略 $a_{优}$ 和 $a_{劣}$, 使得

1. $u_1(a_{优}, a_2) \geq u_1(a_{劣}, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$
2. 存在某个参与人2的策略 a_2' 使得不等式严格成立:
   $u_1(a_{优}, a_2') > u_1(a_{劣}, a_2')$

则称 $a_{劣}$ 是参与人 1 的劣势策略.

如果某个劣势策略 $a_{劣}$ 不是严格劣势策略, 称它为不严格劣势策略

剔除严格劣势策略

- 博弈论的研究目标之一, 是给出模型中参与人行为的**预测**.
- 一个基本预测: 理性参与人不会选择严格劣势策略.
  - 因此, 我们可以将所有的严格劣势策略从分析中剔除!
  - 对于囚徒博弈, 双方行为人都不选 不坦白. 因此, 最终的博弈结果一定是双方都选择坦白.

练习: 剔除严格劣势策略

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

练习: 剔除严格劣势策略

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

- 在原始博弈中, 参与人 2 不存在严格劣势策略.
- 剔除了参与人 1 的严格劣势策略 ("下") 之后呢?
  - **重复剔除严格劣策略**
  - 给定参与人 1 选 "上", 参与人 2 会选 "左".