纯策略纳什均衡: 下划线法

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

纳什均衡: 两人博弈情形

定义: 对于两人博弈, 若策略组合 (a_1^*, a_2^*) 满足如下要求:

- a_1^* 是对 a_2^* 的最优反应
- a_2^* 是对 a_1^* 的最优反应

则称(a_1^*, a_2^*)为 **纳什均衡.**

- 也就是说, 纳什均衡中每个参与人的策略都是针对其他参与人策略的最优反应.

纯策略与混合策略

- 严格来讲, 我们在上一页给出的, 是**纯策略**纳什均衡的定义.
- 和纯策略相对应的另一个概念是**混合策略**, 也叫**随机策略**.
  - 顾名思义, 在混合策略 (随机策略) 中, 参与人的行动是随机的.
  - 我们需要使用基本的概率论工具来讨论混合策略.
- 我不想太早引入概率的工具, 以免不擅长概率的同学对博弈论产生抵触心理.
- 第二章的最后一讲介绍混合策略以及对应的混合策略纳什均衡.
  - 这一讲里, 我们只讨论**纯策略**纳什均衡.

寻找纳什均衡: 下划线法

- 根据纳什均衡的定义, 找纳什均衡就是在找参与人可能的最优反应.
- 如果某个博弈结果中, 所有参与人的收益都有下划线, 那么导致这个结果的策略组合就是一个纳什均衡.

寻找纳什均衡: 下划线法

- 根据纳什均衡的定义, 找纳什均衡就是在找参与人可能的最优反应.
- 如果某个博弈结果中, 所有参与人的收益都有下划线, 那么导致这个结果的策略组合就是一个纳什均衡.

张三 \ 李四	坦白	抵赖
坦白	$(-1,-1)$	$(1,-3)$
抵赖	$(-3,1)$	$(0,0)$

寻找纳什均衡: 下划线法

- 根据纳什均衡的定义, 找纳什均衡就是在找参与人可能的最优反应.
- 如果某个博弈结果中, 所有参与人的收益都有下划线, 那么导致这个结果的策略组合就是一个纳什均衡.

张三 \ 李四	坦白	抵赖
坦白	$(-1, -1)$	$(1, -3)$
抵赖	$(-3, 1)$	$(0, 0)$

- (坦白, 坦白) 是纳什均衡.

寻找纳什均衡: 约会博弈

张三 \ 李四	网吧	商场
网吧	$(\underline{2}, \underline{1})$	$(0, 0)$
商场	$(0, 0)$	$(\underline{1}, \underline{2})$

寻找纳什均衡: 约会博弈

张三 \ 李四	网吧	商场
网吧	$(\underline{2}, \underline{1})$	$(0, 0)$
商场	$(0, 0)$	$(\underline{1}, \underline{2})$

- 存在两个(纯策略)纳什均衡: (网吧, 网吧), (商场, 商场)
- 这个博弈其实还存在另一个**混合策略纳什均衡**, 我们之后会介绍.

寻找纳什均衡: 石头剪刀布

张三 \ 李四	石头	剪刀	布
石头	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
剪刀	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
布	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

寻找纳什均衡: 石头剪刀布

张三 \ 李四	石头	剪刀	布
石头	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
剪刀	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
布	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

- 不存在**纯策略纳什均衡**
- 这个博弈存在**混合策略纳什均衡**, 我们之后会介绍.

理解纳什均衡

(a_1^*, a_2^*) 是纳什均衡意味着:

- 张三和李四都没有**单方面**偏离 (a_1^*, a_2^*) 的激励.
- 纳什均衡 $\neq$ 社会最优. 博弈中可能存在某个结果 (a_1', a_2'), 使得张三和李四的福利都高于均衡 (a_1^*, a_2^*) 对应的福利, 并且 (a_1', a_2') 不是纳什均衡.
    - 例: 囚徒困境

理解纳什均衡

(a_1^*, a_2^*) 是纳什均衡意味着:

- 张三和李四都没有**单方面**偏离 (a_1^*, a_2^*) 的激励.
- 纳什均衡 $\neq$ 社会最优. 博弈中可能存在某个结果 (a_1', a_2'), 使得张三和李四的福利都高于均衡 (a_1^*, a_2^*) 对应的福利, 并且 (a_1', a_2') 不是纳什均衡.
  - 例: 囚徒困境

"个人理性" v.s. "集体理性"

- 纳什均衡只考虑了行为人单方面偏离均衡的动机 (个人理性 ✅)
- 纳什均衡的结果不一定是社会最优的 (集体理性 ❌)

"看不见的手" 与 囚徒困境

亚当斯密:

- 个人在经济生活中只考虑自己利益，受“看不见的手”驱使，可以达到国家富裕的目的

约翰纳什:

- 如果个人在经济生活中只考虑自己利益, 可能只会两败俱伤, 而非合作共赢.

问: 导致这两种不同结果的原因是什么?

"看不见的手" 与 囚徒困境

- "看不见的手" (福利经济学第一定理) 的成立条件: 完全竞争市场, 无外部性
- 这两个前提条件在一般的博弈模型中都不满足:
  - 博弈的参与人一般是有限的 (如"两人博弈"), 完全竞争市场要求市场上同时存在很多的卖家和很多的买家
    - 反例: 卖方垄断, 买方垄断
    - 博弈论常用于研究**不完全**竞争市场
  - 博弈中, 参与人1的行动不仅仅影响参与人1 的效用, 还影响参与人2 的效用
    - 参与人 1 的行动对参与人 2 存在 "外部性"
    - 上面这句话不严谨, 因为外部性这个概念是针对市场机制定义的. 同学们领会其意思即可.

(纯策略)纳什均衡定义: 多人情形

- 记 $(a_1, ..., a_n)$ 为参与人的**策略组合**, 其中 a_i 为参与人 i 的策略.
- 纳什均衡是一组特殊的策略组合

$$(a_1^*, ..., a_n^*),$$

其中对任意参与人 $i \in N$, 其行动 a_i^* 都是对其他参与人行动

$$a_{-i}^* = (a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, a_n^*),$$

的**最优反应**.

问: 对于给出了收益矩阵的两人博弈, 你觉得找纳什均衡和重复剔除严格劣策略哪个更复杂?

问: 对于给出了收益矩阵的两人博弈, 你觉得找纳什均衡和重复剔除严格劣策略哪个更复杂?

- 重复剔除严格劣策略更复杂. (对比之前重复剔除法的 3×3 收益矩阵的练习题)

问: 对于给出了收益矩阵的两人博弈, 你觉得找纳什均衡和重复剔除严格劣策略哪个更复杂?

- 重复剔除严格劣策略更复杂. (对比之前重复剔除法的 3×3 收益矩阵的练习题)
- 但是, 等我们之后介绍了混合策略均衡, 你就会发现, 还是找纳什均衡更复杂. 因为我们不仅要考虑纯策略, 还要考虑混合策略.

一般情况下, 证明 (a_1, a_2) 不是纳什均衡比证明 (a_1, a_2) 是纳什均衡容易.

- 证明 (a_1, a_2) 不是纳什均衡, 只需下面两者之一即可:
  1. 存在某个张三策略 a_1' 使得 $u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1', a_2)$
  2. 存在某个李四策略 a_2' 使得 $u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1, a_2')$

一般情况下, 证明 (a_1, a_2) 不是纳什均衡比证明 (a_1, a_2) 是纳什均衡容易.

- 证明 (a_1, a_2) 不是纳什均衡, 只需下面两者之一即可:
  1. 存在某个张三策略 a_1' 使得 $u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1', a_2)$
  2. 存在某个李四策略 a_2' 使得 $u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1, a_2')$
- 证明 (a_1, a_2) 是纳什均衡, 你需要验证下列所有不等式都成立:

$$u_1(a_1, a_2) \geq u_1(a_1', a_2) \quad \forall a_1' \in A_1$$

$$u_2(a_1, a_2) \geq u_2(a_1, a_2') \quad \forall a_2' \in A_2$$

一般情况下, 证明 (a_1, a_2) 不是纳什均衡比证明 (a_1, a_2) 是纳什均衡容易.

- 证明 (a_1, a_2) 不是纳什均衡, 只需下面两者之一即可:
  1. 存在某个张三策略 a_1' 使得 $u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1', a_2)$
  2. 存在某个李四策略 a_2' 使得 $u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1, a_2')$
- 证明 (a_1, a_2) 是纳什均衡, 你需要验证下列所有不等式都成立:

$$u_1(a_1, a_2) \geq u_1(a_1', a_2) \quad \forall a_1' \in A_1$$

$$u_2(a_1, a_2) \geq u_2(a_1, a_2') \quad \forall a_2' \in A_2$$

下一讲中, 我们讨论无穷博弈中的纳什均衡, 到时会用到这个技巧.