博弈论: 作业一答案

1. 判断正误 (如果回答 “错”, 请构造一个反例)

1. 纳什均衡中, 行为人不可能选择下策. **错误.**

   下面这个博弈中, (下, 左) 是纳什均衡, 其中下是行为人 1 的下策.

1\2	左	右
上	(−1,-1)	(1,-3)
下	(−1,1)	(0,0)

2. 纳什均衡中, 行为人不可能选择严格下策. **正确.**
3. 纳什均衡中, 任何行为人单独改变策略, 其最终效用都会严格变小. **错误.**

   反例和第一问相同. 如果行为人 1 选择偏离均衡, 其效用不变.

2. 严格下策反复消去法

考虑如下两人博弈, 其中行为人 1 的可选行动为 {上, 中, 下}, 行为人 2 的可选行动为 {左, 中, 右}. 使用严格下策反复消去法预测博弈的结果.

1\2	左	中	右
上	4, 3	5, 1	6, 2
中	2, 1	8, 4	3, 6
下	3, 0	9, 6	2, 8

- 先消去行为人 2 的中，再消去行为人 1 的中和下, 最后再消去行为人 2 的右
- 均衡结果:（上, 左）

3. 纳什均衡

1. 找出囚徒困境中的所有纳什均衡 (纯策略和混合策略均衡).

1\2	坦白	抵赖
坦白	(0, 0)	(3, −1)
抵赖	(−1, 3)	(2, 2)

   - 存在唯一均衡: (坦白, 坦白)

2. 找出约会博弈 (或 “性别战博弈”, “协调博弈”)中的所有纳什均衡 (纯策略和混合策略均衡).

1\2	左	右
上	(2, 1)	(0, 0)
下	(0, 0)	(1, 2)

- 存在两个纯策略均衡: (上, 左), (下, 右)
- 存在一个混合策略均衡. 其中
  - 参与人 1 的混合策略: $(2/3, 1/3)$
  - 参与人 2 的混合策略: $(1/3, 2/3)$

3. 考虑 n 家寡头厂商同时确定产量的古诺模型. 每家厂商的生产成本为 $c = 0$, 市场总需求为 $p(Q) = p_0 - Q$, 其中 $p_0 > 0$ 为给定常数, Q为总产量. 已知这个博弈存在一个纯策略纳什均衡, 其中每家厂商的产量均为 q^*. 将 q^* 表示为 n 的函数, 并计算均衡时每家厂商的利润.

- 对厂商 i, 给定其它厂商产量均为 q^*, 它的利润函数为:

$$\pi(q) = p(Q)q = \big(p_0 - (n-1)q^* - q\big)q$$

  一阶条件为:

$$-q + \big(p_0 - (n-1)q^* - q\big) = 0 \Longrightarrow q(q^*) = \big(p_0 - (n-1)q^*\big)/2$$

  代入 $q(q^*) = q^*$:

$$\big(p_0 - (n-1)q^*\big)/2 = q^* \Longrightarrow q^* = \frac{p_0}{n+1}$$

- 均衡中的市场价格:

$$p^* = p_0 - nq^* = p_0 - \frac{np_0}{n+1} = \frac{p_0}{n+1}$$

- 厂商的均衡利润:

$$\frac{p_0}{n+1} \cdot q^* = \left(\frac{p_0}{n+1}\right)^2$$

4. 剪刀石头布博弈

本问题一共包含四个小问, 我们的最终目标是证明 “剪刀石头布博弈” 存在唯一的纳什均衡.

1. 写出 “剪刀石头布博弈” 的收益矩阵, 其中每个参与人的可选行动均为 {剪刀, 石头, 布}.

1\2	石头	剪刀	布
石头	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
剪刀	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
布	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

2. 用下划线法说明, 博弈不存在纯策略纳什均衡.

略.

3. 证明: 纳什均衡中, 参与人的混合策略不可能只包含两个行动. 也就是说, 均衡中参与人选择三个行动的概率均必须为正. (提示: 假设行为人 1 只在 “剪刀” 和 “布” 之间随机, 给出此时行为人 2 的最优反应, 然后说明行为人 1 有偏离均衡的激励.)

- 假设行为人 1 只在 “剪刀” 和 “布” 之间随机, 记其策略为 $(p, 1-p)$, 其中 $0 < p < 1$.
- 这时, 行为人 2 的最优反应是 “剪刀”.

- 给定行为人 2 的最优反应, 行为人 1 的策略会偏离到石头.
- 综上, 均衡中行为人 1 的策略不可能只包含两个行动.

4. 在上一问的基础上, 用无差异原则给出博弈的混合策略纳什均衡.

- 假设行为人 1 的混合策略为 $(p_1, q_1, 1-p_1-q_1)$.
- 假设行为人 2 的混合策略为 $(p_2, q_2, 1-p_2-q_2)$.
- 给定行为人 1 的策略, 行为人 2 对三个纯策略无差异:

$$(p_1, q_1, 1-p_1-q_1)\cdot(1,0,-1) = (p_1, q_1, 1-p_1-q_1)\cdot(0,-1,1) = (p_1, q_1, 1-p_1-q_1)\cdot(-1,1,0)$$

$$\Longrightarrow p_1 = q_1 = 1/3$$

- 同理, 给定行为人 2 的策略, 行为人 1 对三个纯策略无差异. 可推出

$$\Longrightarrow p_2 = q_2 = 1/3$$

- 博弈存在唯一纳什均衡, 双方参与人的策略均为 $(1/3, 1/3, 1/3)$.