

期望效用

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

张三是一名湖大学生. 他在上体育课时, 教练给了他如下两个选择:

1. 和教练玩石头剪刀布 (如果平局, 则再玩一局, 直到有人获胜为止):
 - 若张三赢了, 则不用参加训练
 - 若张三输了, 则不仅要参加训练, 还要额外跑 2 千米
2. 不和教练玩石头剪刀布, 直接训练.

张三是否应该和教练玩剪刀石头布?

(本问题由邱奥雅同学贡献)

- 张三的行动集: {玩石头剪刀布, 不玩石头剪刀布}. To play or not to play?
- 所有可能结果:
 1. "不参加训练",
 2. "参加训练",
 3. "参加训练 + 跑2千米"
- 效用:
 - 记不参加训练效用为 0.
 - 参加训练的效用为 $-x$, 其中 $x > 0$
 - 参加训练并跑 2 千米的效用为 $-x - y$, 其中 $-y$ 为 额外跑 2 千米的边际效用

- 行动 "不玩" 导致的结果是**确定的**
 - 结果一定是"参加训练".
 - $U(\text{不玩}) = -x$.
- 行动 "玩石头剪刀布" 导致的结果是**不确定的**:
 - 如果张三赢了 (概率 $1/2$), 结果为"不参加训练". 效用记为 0.
 - 如果张三输了 (概率 $1/2$), 结果为"参加训练并跑2千米." 效用为 $-x - y$.

$$U(\text{玩}) = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot (-x - y) = -(x + y)/2$$

- 张三的最优选择是"玩石头剪刀布"当且仅当:

$$U(\text{玩}) \geq U(\text{不玩})$$

$$\iff -(x + y)/2 \geq -x$$

$$\iff x \geq y$$

- 这个结果和我们的直觉一致.
 - 如果张三非常厌恶参加训练 (x 很大), 他会愿意"赌一把", 即使成功率只有 50%.
 - 如果张三觉得训练完后的额外两公里非常累 (y 很大), 张三不愿意"赌一把".

张三是否应该和教练玩 "石头剪刀布"?

是否和教练玩石头剪刀布, 取决于这个"交易"的成本与收益.

- 成本: 跑2千米的概率从 0 上升到 0.5, 成本为 $y/2$
- 收益: 参加训练的概率从 1 降低到 0.5, 收益为 $x/2$

如果收益大于成本 ($x/2 > y/2$), 张三应该进行这笔交易.

如果收益等于成本 ($x/2 = y/2$), 张三对这笔交易无差异.

混合策略与期望效用

- 当行为人使用混合策略时, 博弈的最终结果是**不确定的**.
- 因此, 行为人的最终效用也是不确定的.
- 行为人的期望效用 = 最终效用的**期望**

	结果1	结果2	结果3
最终效用	x	y	z
概率	p_1	p_2	p_3

$$\text{期望效用} = p_1 x + p_2 y + p_3 z$$

计算期望效用

张三\李四	网吧	商场
网吧	(2, 1)	(0, 0)
商场	(0, 0)	(1, 2)

假设李四的混合策略为 $(q, 1 - q)$, 其中 q 为"网吧"的概率

- 张三选择纯策略"网吧"的期望收益: $U_{\text{张三}}(\text{网吧}) = 2q$
- 张三选择纯策略"商场"的期望收益: $U_{\text{张三}}(\text{商场}) = 1 - q$
- 张三选择混合策略 $(p, 1 - p)$ 的期望收益 (其中 p 为"网吧"的概率):

$$p \cdot U(\text{网吧}) + (1 - p) \cdot U(\text{商场}) = p \cdot 2q + (1 - p)(1 - q)$$

用无差异原则计算混合策略均衡

- 记均衡时张三和李四的混合策略分别为 $(\bar{p}, 1 - \bar{p})$ 和 $(\bar{q}, 1 - \bar{q})$
- 给定李四的策略, 张三对"网吧"和"商场"无差异:

$$U_{\text{张三}}(\text{网吧}) = U_{\text{张三}}(\text{商场}) \implies 2\bar{q} = 1 - \bar{q} \implies \bar{q} = 1/3$$

- 给定张三的策略, 李四对"网吧"和"商场"无差异:

$$U_{\text{李四}}(\text{网吧}) = U_{\text{李四}}(\text{商场}) \implies \bar{p} = 2(1 - \bar{p}) \implies \bar{p} = 2/3$$

混合策略与严格劣策略

定义: 纯策略 s_1 是张三的**严格劣策略**, 若存在另一个策略 s'_1 使得下面的不等式对**所有李四的行动** $a_2 \in A_2$ 都成立:

$$U_1(s'_1, a_2) > U_1(s_1, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$$

注: 这里的 s'_1 可以是**混合策略**, U_1 为张三的期望效用函数.

混合策略与严格劣策略

定义: 纯策略 s_1 是张三的**严格劣策略**, 若存在另一个策略 s'_1 使得下面的不等式对**所有李四的行动** $a_2 \in A_2$ 都成立:

$$U_1(s_1, a_2) > U_1(s'_1, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$$

证明: "下" 是张三的严格劣策略.

张三\李四	L	R
上	3,1	0,2
中	0,2	3,3
下	1,3	1,1

比较张三的下面两个策略:

1. 纯策略 "下": $s_1 = (0, 0, 1)$
2. 混合策略: $s'_1 = (0.5, 0.5, 0)$

若李四选 L :

$$U_{\text{张三}}(s_1, L) = 1 \quad U_{\text{张三}}(s'_1, L) = 1.5$$

若李四选 R :

$$U_{\text{张三}}(s_1, R) = 1.5 \quad U_{\text{张三}}(s'_1, R) = 1$$