第二章：完备信息静态博弈

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

完备信息静态博弈

静态博弈 $=$ 同时行动博弈。三个基本元素:

- 参与人
- 行动集合
- 效用函数

完备信息静态博弈

静态博弈 = 同时行动博弈。三个基本元素:

- 参与人
- 行动集
- 效用函数

之后我们在介绍动态博弈和不完备信息时，会引入两个新元素：**策略**和**信息集**。

- 对于完备信息静态博弈，暂时不用引入这两个元素.

参与人

- **参与人**指的是博弈中的决策主体，它的目的是通过选择行动（或策略）以最大化自己的效用水平
- 经济博弈中的参与人：
  - 消费者，投资者，企业、国家或由若干国家组成的集团
- 数学符号：
  - 参与人构成集合 $N = \{1, \ldots, n\}$
  - 参与人1，参与人2,..., 参与人 n
- 例子：{张三，李四}

行动集

- 对于参与人 i, 用集合 A_i 表示其**行动集**
- 参与人 i 的某个**行动**记为 $a_i \in A_i$
- 例:

$$A_1 = A_2 = \{\text{石头}, \text{剪刀}, \text{布}\}$$

- 石头剪刀布博弈的 **结果** 表示为向量 $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$

效用函数

- 参与人 i 的效用函数 u_i: 博弈结果到实数的映射

$$u_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$$

- 例: 剪刀石头布博弈, 获胜时收益为 1, 失败收益为 -1, 平局为 0

效用函数

- 参与人 i 的效用函数 u_i: 博弈结果到实数的映射

$$u_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$$

- 例: 剪刀石头布博弈, 获胜时收益为 1, 失败收益为 -1, 平局为 0

博弈的基本特征: 参与人 1 的最终收益不仅取决于他自己的决策 a_1, 还取决于其他参与人的决策: $a_2, a_3, \ldots$

- 我们称这个现象为**策略性互动** (strategic interaction), 或参与人的收益存在"互相依赖"
- 这个概念很类似**外部性**

例: 囚徒困境

囚徒困境

- 囚徒困境是一个非常经典的 **完备信息同时行动博弈**
- 两位犯罪嫌疑人 (张三和李四) 被警方分离开, 单独审问
- 面对警方询问, 犯罪嫌疑人会选择**合作** (抵赖)或**背叛** (坦白)
  - 若两人都选择合作, 则两人均 "拘留7天"
  - 若张三选择合作, 而李四背叛. 则张三判刑 5 年,李四无罪释放
  - 若两人都选择背叛, 则两人均判刑 1 年

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 抵赖$\}$

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 抵赖$\}$
- 效用函数表示为如下"收益矩阵":

张三 \ 李四	坦白	抵赖
坦白	(1 年, 1 年)	(无罪, 5 年)
抵赖	(5 年, 无罪)	(7 天, 7天)

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 抵赖$\}$
- 效用函数表示为如下收益矩阵:

```
张三 \ 李四        坦白                抵赖
坦白           (-5, -5)            (0, -8)
抵赖           (-8,  0)            (-1, -1)
```

- 如果你是张三, 你的选择是？

严格劣势策略

- 若李四选则**坦白**, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $-5, -8$
- 若李四选则抵赖, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $0, -1$

严格劣势策略

- 若李四选则**坦白**, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $-5, -8$
- 若李四选则**抵赖**, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $0, -1$

结论: 张三应该选**坦白**, 不应该选**抵赖**.

- 因为无论李四的选择是什么, **坦白**的收益都大于**抵赖**的收益.
- **抵赖** 是张三的严格劣势策略
  - 注: 对于完备信息同时行动博弈, "策略"是"行动"的同义词
  - 我们一般不说劣势行动, 只说**劣势策略**

练习: 寻找严格劣势策略 (如果有的话)

1 \ 2	左	右
上	(1 , 0)	(-1, -3)
下	(-3, -1)	(0, 1)

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

练习答案

- 第一个博弈中, 双方参与人均不存在严格劣势策略
- 第二个博弈中, 参与人 1 存在严格劣势策略, 参与人 2 不存在.

这个练习的背景是另一个非常经典的博弈: 协调博弈 (coordination game). 有时也把它叫作约会博弈.

严格劣势策略: 定义

对于两人博弈, 若参与人 1 存在两个策略 $a_{\text{优}}$ 和 $a_{\text{劣}}$ 使得

$$u_1(a_{\text{优}}, a_2) > u_1(a_{\text{劣}}, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$$

我们称策略 $a_{\text{优}}$ **严格优于** $a_{\text{劣}}$, 并称 $a_{\text{劣}}$ 是参与人 1 的**严格劣势策略**.

严格劣势策略: 文字定义

1. 对于参与人 i, 若无论其他参与人选择何种策略, 策略 $a_{优}$ 带给参与人 i 的效用都严格大于策略 $a_{劣}$ 带来的效用, 则称$a_{优}$ **严格优于** $a_{劣}$.
2. 对于参与人 i, 策略 a_i 是参与人 i 的**严格劣势策略**当且仅当存在另外一个策略 a_i' 使得 a_i' 严格优于 a_i.

练习: 对于两人博弈, 若策略 a_2 是参与人2的严格劣势策略, 请描述对应的不等式关系.

练习: 对于两人博弈, 若策略 a_2 是参与人2的严格劣势策略, 请描述对应的不等式关系.

存在某个参与人2的策略 a_2', 使得下列的不等式对所有参与人1的策略a_1都成立:

$$u_2(a_1, a_2') > u_2(a_1, a_2) \quad \forall a_1 \in A_1$$

劣势策略: 定义 (暂时了解即可)

对于两人博弈, 若参与人 1 存在两个策略 $a_{\text{优}}$ 和 $a_{\text{劣}}$, 使得

1. $u_1(a_{\text{优}}, a_2) \geq u_1(a_{\text{劣}}, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$
2. 存在某个参与人2的策略 a_2' 使得不等式严格成立:
   $u_1(a_{\text{优}}, a_2') > u_1(a_{\text{劣}}, a_2')$

我们称策略 $a_{\text{优}}$ **优于** $a_{\text{劣}}$, 并称 $a_{\text{劣}}$ 是参与人 1 的**劣势策略**.

如果某个劣势策略 $a_{\text{劣}}$ 不是**严格劣势策略**, 称它为**不严格劣势策略**

劣势策略: 文字定义

定义1: 对于参与人 i, 若

1. 无论其他参与人选择何种策略, 策略 $a_{\text{优}}$ 带给参与人 i 的效用都大于或等于策略 $a_{\text{劣}}$ 带来的效用;
2. 存在某个其他参与人的策略组合, 使得策略 $a_{\text{优}}$ 带给参与人 i 的效用严格大于 $a_{\text{劣}}$ 带来的效用,

则称$a_{\text{优}}$ **优于** $a_{\text{劣}}$.

定义2: 对于参与人 i, 策略 a_i 是参与人 i 的**劣势策略**当且仅当存在另外一个策略 a_i' 使得 a_i' 优于 a_i.

剔除严格劣势策略

- 博弈论的研究目标之一, 是给出模型中参与人行为的**预测**.
- 一个基本预测: 理性参与人不会选择严格劣势策略.
  - 因此, 我们可以将所有的严格劣势策略从分析中剔除!
  - 对于囚徒博弈, 双方行为人都不选 抵赖. 因此, 最终的博弈结果一定是双方都选择坦白.

练习: 剔除严格劣势策略

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

练习: 剔除严格劣势策略

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

- 在原始博弈中, 参与人 2 不存在严格劣势策略.
- 剔除了参与人 1 的严格劣势策略 ("下") 之后呢?
  - **重复剔除严格劣策略**
  - 给定参与人 1 选 "上", 参与人 2 会选 "左".

以下仍然以两人博弈为例说明**重复剔除严格劣策略**:

0. 张三和李四的可选策略分别记为: $\{a_{11}, \ldots, a_{1m}\}, \{a_{21}, \ldots, a_{2n}\}$
1. 剔除张三和李四的严格劣策略, 记两人剩下的可选策略为: $\{a'_{11}, \ldots, a'_{1m'}\}, \{a'_{21}, \ldots, a'_{2n'}\}$.

   经过一轮剔除后, 李四剩余的策略变少. 这时, 给定李四的所有可能策略, 我们可以继续剔除张三剩余策略中的严格劣策略 (如有).
2. 剔除张三和李四的严格劣策略.
3. ...
4. 重复以上过程, 直至无法剔除更多的策略.

重复剔除严格劣策略: 练习

	C1	C2	C3
R1	4，3	5，1	6，2
R2	2，1	8，4	3，6
R3	3，0	9，6	2，8

练习1答案

先剔除C2， 再剔除R2,R3， 最后剔除C3

重复剔除严格劣策略: 练习2

	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

练习2答案

剩余策略: R1, C1和C3.

练习2答案

剩余策略: R1, C1和C3.

使用重复剔除严格劣策略, 无法给出博弈结果的唯一预测.

- 我们只知道张三会使用 R1
- 我们无法判断李四会用 C1 还是 C3.
- 存在两种可能的博弈结果: (R1,C1), (R1,C3)

问: 你觉得在真实博弈中, (R1,C1) 和 (R1,C3) 哪种结果更可能出现?

关于重复剔除严格劣策略的补充说明 (简单了解即可)

- 考虑张三和李四的两人博弈. 为了预测博弈结果, 我们首先剔除张三和李四的严格劣策略. 这个步骤成立的前提是什么?

关于重复剔除严格劣策略的补充说明 (简单了解即可)

- 考虑张三和李四的两人博弈. 为了预测博弈结果, 我们首先剔除张三和李四的严格劣策略. 这个步骤成立的前提是什么?
  张三是理性的; **李四是理性的**; 两人都懂得 contingent thinking.

关于重复剔除严格劣策略的补充说明 (简单了解即可)

- 考虑张三和李四的两人博弈. 为了预测博弈结果, 我们首先剔除张三和李四的严格劣策略. 这个步骤成立的前提是什么?
  张三是理性的; **李四是理性的**; 两人都懂得 contingent thinking.
- 经过第一轮剔除后, 为了更好地预测博弈结果, 我们又剔除了这个简化博弈中的严格劣策略. 第二轮剔除的成立依赖什么潜在假设?

关于重复剔除严格劣策略的补充说明 (简单了解即可)

- 考虑张三和李四的两人博弈. 为了预测博弈结果, 我们首先剔除张三和李四的严格劣策略. 这个步骤成立的前提是什么?
  张三是理性的; **李四是理性的**; 两人都懂得 contingent thinking.
- 经过第一轮剔除后, 为了更好地预测博弈结果, 我们又剔除了这个简化博弈中的严格劣策略. 第二轮剔除的成立依赖什么潜在假设?
  张三知道李四是理性的, 李四知道张三是理性的.

关于重复剔除严格劣策略的补充说明 (简单了解即可)

类似可得:

- 第三轮剔除的前提假设:
  张三知道李四知道**张三是理性**的, **李四知道**张三知道**李四是理性**的
- 第四轮剔除的前提假设:
  张三知道李四知道张三知道李四是理性的, ...
- ... 依此类推第五轮, 第六轮剔除的前提假设.

对于复杂博弈, 为了使用重复剔除严格劣策略的方法, 通常会假设"行为人是理性的"是所有参与人的**共同知识** (common knowledge).

小结

以下内容是你需要**掌握**的:

- 策略 a_i **严格优于**策略 a_i' 的数学定义 + 文字定义
- 策略 a_i 是**严格劣势策略**的数学定义 + 文字定义
- 策略 a_i **优于**策略 a_i' 的文字定义
- 使用**重复剔除严格劣策略**来预测博弈结果

重复剔除严格劣策略的应用:

商场选址, 中间选民定理

One model, Two situations

- 描述1: 张三和李四是两位**政客**, 他们考虑在竞选时应采取何种**政治立场**, 从而**吸引更多的选票**.
- 描述2: 张三和李四是两位**饭店老板**, 他们考虑应选择何处作为**店铺地址**, 从而**吸引更多的顾客**.

以上两个情景可以抽象为同一个博弈模型.

博弈描述

- **参与人**: 张三和李四
- **行动集**: $A_1 = A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 每个行动对应一个具体"位置":

```
__1__    __2__    __3__    __4__    __5__
```

- **效用函数**:
  - 消费者(或选民)均匀地分布在所有可能位置上
  - 消费者(或选民)会选择距离他最近的参与人; 若参与人选择同一位置, 则均分所有消费者(或选民)
  - 参与人的目标: 最大化他能吸引到的消费者(或选民)

收益矩阵

张三\李四	1	2	3	4	5
1	(2.5, 2.5)	(1 , 4)	(1.5, 3.5)	(2 , 3)	(2.5, 2.5)
2	(4 , 1)	(2.5, 2.5)	(2 , 3)	(2.5, 2.5)	(3 , 2)
3	(3.5, 1.5)	(3 , 2)	(2.5, 2.5)	(3 , 2)	(3.5, 1.5)
4	(3 , 2)	(2.5, 2.5)	(2 , 3)	(2.5, 2.5)	(4 , 1)
5	(2.5, 2.5)	(2 , 3)	(1.5, 3.5)	(1 , 4)	(2.5, 2.5)

重复剔除严格劣策略

0. 所有可能的行动

```
__1__    __2__    __3__    __4__    __5__
```

1. 第一轮剔除

```
         __2__    __3__    __4__
```

2. 第二轮剔除

```
                  __3__
```

重复剔除严格劣策略的预测结果:

- 张三和李四都会选择中点位置.
- 这个结果的成立不依赖于我们的两个简化假设:
  (1) 只有5个位置 (任意$N \geq 3$个位置) (2) 选民的分布是均匀的

政治经济学: **中间选民定理**

- 中间选民决定了当选政客的政治主张

企业选址: **小餐馆为何总是扎堆开在一起?**

推荐阅读

- 耶鲁大学公开课: 重复剔除与中间选民定理
- https://knowledgehive.github.io/Game-Theory/lecture_3.html