

纯策略纳什均衡: 无穷博弈情形  
(古诺模型 + 伯特兰模型)

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

## 导言

- 对于两人博弈且**行动集有限**的情形, 可以用"下划线法"来寻找纳什均衡.
- 在这一讲里, 我们用两个例子, 来说明**行动集无穷**时寻找纳什均衡的方法.
  - 例1: 古诺模型
  - 例2: 伯特兰模型
- 这两个模型是**产业组织 (Industrial Organization)** 中最常用的基本模型
  - 产业组织: "研究市场在不完全竞争条件下的企业行为和市场结构, 是微观经济学中的一个重要分支."
  - 博弈论是产业组织研究中最重要理论工具. 你可以通过这一讲的学习来"略微感受" 产业组织理论的研究套路.

## 最优反应函数

- 对于两人有限博弈, 我们可以
  1. 先用下划线标出每个参与者所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

## 最优反应函数

- 对于两人有限博弈, 我们可以
  1. 先用下划线标出每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
- 如果行为人的可能行动有无穷多个, 我们可以
  1. 先用最优反应函数来描述每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

## 最优反应函数

- 对于两人有限博弈, 我们可以
  1. 先用下划线标出每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
- 如果行为人的可能行动有无穷多个, 我们可以
  1. 先用最优反应函数来描述每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

注: 对于无穷多可能行动的情形, 我们一般要用微分来求解所有可能的最优反应

## 用微分求解最优反应函数

- 考虑两人博弈, 张三 (行为人 1) 的效用函数为  $u_1(a_1, a_2)$ .
  - 其中  $a_1$  是张三的行动,  $a_2$  是李四的行动
- 对于某个给定的  $a_2$ , 张三的最优反应等价于求解如下优化问题:

$$\max_{a_1} u_1(a_1, a_2)$$

## 用微分求解最优反应函数

- 考虑两人博弈, 张三 (行为人 1) 的效用函数为  $u(a_1, a_2)$ .
  - 其中  $a_1$  是张三的行动,  $a_2$  是李四的行动
- 对于某个给定的  $a_2$ , 张三的最优反应等价于求解如下优化问题:

$$\max_{a_1} u_1(a_1, a_2)$$

- 对于有限博弈, 这个优化问题的解可以"一眼看出" (下划线法)  
对于无穷博弈, 我们可以用微分来计算**最优反应函数**  $a_1^*(a_2)$ , 它由如下一阶条件决定:

$$\frac{\partial u_1(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0$$

# 古诺模型

## (寡头厂商同时定产博弈)



## Antoine Augustin Cournot

- 法国哲学家, 数学家, 经济学家古诺 (Cournot, 1801 — 1877)
- 古诺在 *Researches on Mathematical Principles of the Theory of Wealth* 一书中用数学模型分析了寡头市场
- 这本书出版于 1838 年, 远远早于纳什均衡的提出 (Nash, 1950).
- 但是, 用今天的眼光来看, 古诺提出的寡头市场模型中, 用到的主要工具恰恰就是纳什均衡.

## 古诺模型

- **参与人**: 张三钢铁厂和李四钢铁厂
- **行动**: 张三选择产量  $q_1 \in [0, \infty)$ , 李四选择产量  $q_2 \in [0, \infty)$
- **效用**: 张三和李四的效用为其最终利润.
  - 假设边际成本为零.
  - 钢铁的价格由需求曲线  $P(Q)$  决定, 其中  $Q = q_1 + q_2$  为钢铁总产量.
    - 令  $P(Q) = 1 - Q$ .
    - 由于价格不可能为负, 若  $Q > 1$ , 令  $P(Q) = 0$ .

## 最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

## 最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

- 求解张三的最优反应函数:** 给定  $q_2$ , 张三的最优反应  $q_1^*$  最大化张三的效用

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} \Big|_{q_1=q_1^*} = 0$$

## 最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

- 求解张三的最优反应函数:** 给定  $q_2$ , 张三的最优反应  $q_1^*$  最大化张三的效用

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} \Big|_{q_1=q_1^*} &= 0 \\ \implies 1 - q_1^* - q_2 - q_1^* &= 0 \end{aligned}$$

## 最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

- 求解张三的最优反应函数:** 给定  $q_2$ , 张三的最优反应  $q_1^*$  最大化张三的效用

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} \Big|_{q_1=q_1^*} = 0$$

$$\implies 1 - q_1^* - q_2 - q_1^* = 0$$

- 张三的最优反应函数:  $q_1^*(q_2) = (1 - q_2)/2$ 
  - 这个函数描述了给定李四的产量  $q_2$ , 张三的最优反应  $q_1^*$

## 纳什均衡

- 根据对称性, 李四的最优反应函数为

$$q_2^*(q_1) = (1 - q_1)/2$$

1. 先用**最优反应函数**来描述每个参与人所有可能的最优反应**(已完成)**
2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

## 纳什均衡

- 根据对称性, 李四的最优反应函数为

$$q_2^*(q_1) = (1 - q_1)/2$$

1. 先用**最优反应函数**来描述每个参与人所有可能的最优反应 (已完成)
2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
  - 纳什均衡是一组特殊的策略组合  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ , 使得
    1.  $\bar{q}_1$  是针对  $\bar{q}_2$  的最优反应
    2.  $\bar{q}_2$  是针对  $\bar{q}_1$  的最优反应



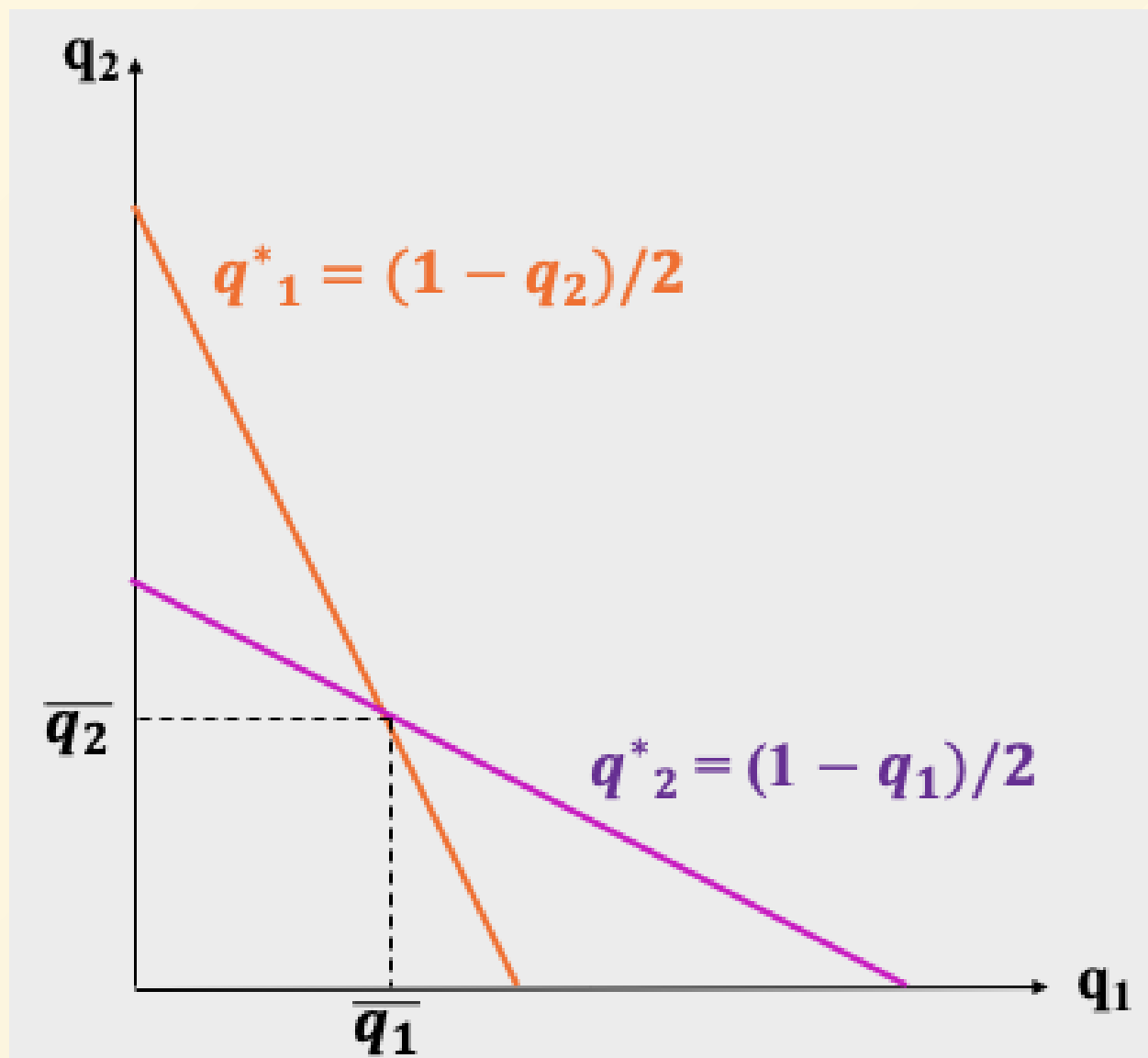
## 纳什均衡

- 根据对称性, 李四的最优反应函数为

$$q_2^*(q_1) = (1 - q_1)/2$$

1. 先用**最优反应函数**来描述每个参与人所有可能的最优反应 **(已完成)**
2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
  - 纳什均衡是一组特殊的策略组合  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ , 使得
    1.  $\bar{q}_1$  是针对  $\bar{q}_2$  的最优反应:  $q_1^*(\bar{q}_2) = \bar{q}_1$
    2.  $\bar{q}_2$  是针对  $\bar{q}_1$  的最优反应:  $q_2^*(\bar{q}_1) = \bar{q}_2$
  - 联立方程:

$$(1 - \bar{q}_1)/2 = \bar{q}_2, \quad (1 - \bar{q}_2)/2 = \bar{q}_1 \implies \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 1/3$$



纳什均衡: 图示

**练习 1:** 假设张三钢铁厂的初始计划产量为  $q_{10} \in (0, \frac{1}{2})$ .

- 给定张三的计划产量  $q_{10}$ , 李四的最优反应为

$$q_{20} = q_2^*(q_{10})$$

- 给定李四的计划产量  $q_{20}$ , 张三将产量调整到对应的最优反应:

$$q_{11} = q_1^*(q_{20})$$

- 给定张三新的计划产量  $q_{11}$ , 李四的最优反应变为

$$q_{21} = q_2^*(q_{11})$$

- 重复以上过程, 得到两组序列  $\{q_{10}, q_{11}, q_{12}, \dots\}$ ,  $\{q_{20}, q_{21}, q_{22}, \dots\}$

**证明:** 这两个序列

$$\{q_{10}, q_{11}, q_{12}, \dots\}$$

$$\{q_{20}, q_{21}, q_{22}, \dots\}$$

会分别收敛到对应的纳什均衡产量:  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ .

- 提示: 结合最优反应的函数图像, **画图说明**即可

**练习 2:** 此前在求解古诺模型的均衡产量  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$  时, 我们假设成本函数为零.

- 假设张三和李四的成本函数分别为  $C_1(q_1) = c_1 q_1$ ,  $C_2(q_2) = c_2 q_2$ , 其中  $c_1 > 0$  和  $c_2 > 0$  分别是张三和李四的单位成本.
- **问1:** 若  $c_2 > c_1$ , 你觉得均衡时哪家厂商的产量更高?
- **问2:** 求解这种情况下的纳什均衡, 并验证你上一问的猜想是否正确.

**练习 3:** 我们仍然假设成本函数为零, 但假设市场上有  $n \geq 2$  家企业.

1. 计算此时每家厂商的均衡产量  $\bar{q}$ , 把它表示为  $n$  的函数.
2. 计算均衡时每家厂商的利润  $\pi$ , 把它表示为  $n$  的函数.
3. 证明:  $\pi$  关于  $n$  递减; 并且, 随着  $n$  趋于无穷,  $\pi$  趋于零.

**注.** 第三小问的结论说明:

- 随着市场竞争加剧, 寡头厂商的利润会逐步下降.
- 当厂商的数量无穷多时 (即完全竞争市场情形), 厂商的定价等于其边际成本 (0), 均衡利润为零.

伯特兰模型  
(寡头厂商同时定价博弈)

## Joseph Louis François Bertrand

- 法国数学家, 物理学家, 经济学家伯特兰 (1822 — 1900)
- 伯特兰的父亲是医生和生物学家. 受到父亲的影响, 伯特兰九岁时就开始学习高等数学, 并且熟练掌握当时学界的通用语言(拉丁语).
- 伯特兰 11 岁时在巴黎综合理工旁听大学课程, 17 岁拿到了两个本科学位, 一个数学物理博士学位, 以及一个工程师资格证书.
- 作为学者, 伯特兰的主要贡献在微分几何, 数论, 热力学等领域.
- 今天伯特兰仍为学界所熟知, 主要是因为以他命名的两个悖论 (**伯特兰悖论**):
  - 一个悖论涉及初等概率论 ([李永乐视频链接](#))
  - 另一个悖论就是我们即将介绍的博弈论模型.



## 伯特兰模型 (寡头同时定价模型)

古诺 v.s. 伯特兰

- 古诺模型中, 厂商选择某个产量  $q$
- 伯特兰模型中, 厂商选择某个价格  $p$

## 伯特兰模型 (寡头同时定价模型)

古诺 v.s. 伯特兰

- 古诺模型中, 厂商选择某个产量  $q$ ; 伯特兰模型中, 厂商选择某个价格  $p$

伯特兰模型中, 张三和李四的效用函数通过如下方式计算:

- 需求函数为严格递减函数  $Q(p)$ , 其中市场价格  $p$  为  $p_1$  和  $p_2$  中的较小值:
  - $p = \min\{p_1, p_2\}$
- 若张三定价  $p_1$  高于李四定价  $p_2$ , 则张三垄断整个市场并获得垄断利润, 李四的利润为零.
- 若张三和李四定价相同, 则两人平分垄断利润.

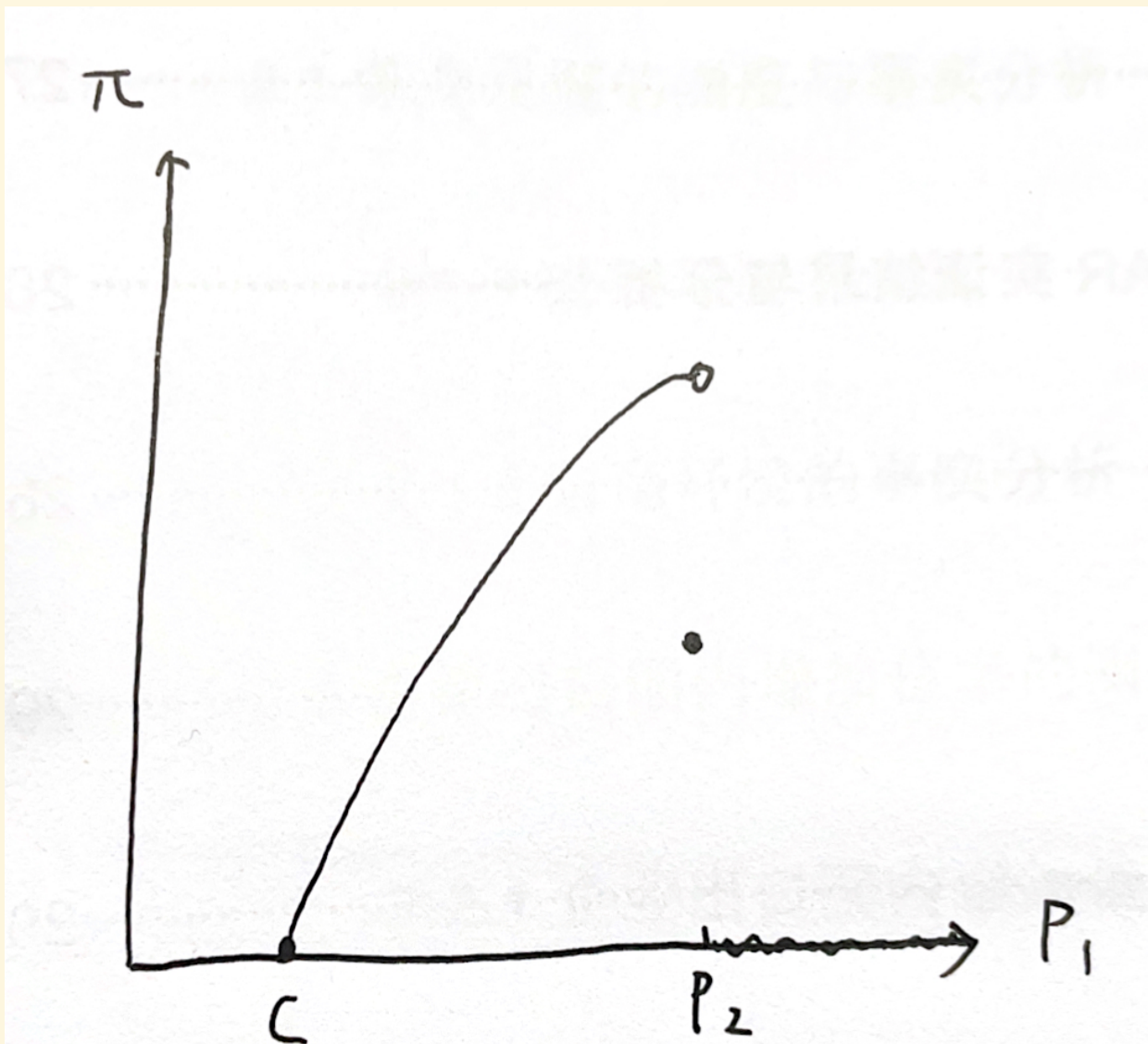
张三和李四的边际成本均为  $c > 0$ . 如何计算纳什均衡  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ ?

**问:** 能否套用之前古诺模型("同时定产模型")中的方法, 结合最优反应函数来计算伯特兰模型("同时定价模型")的纳什均衡?

**答:** 不能. 给定李四的定价  $p_2 > c$ , 张三的利润  $\pi(p_1)$  为:

$$\pi(p_1) = \begin{cases} (p_1 - c)Q(p_1) & \text{若 } p_1 \in [c, p_2) \\ (p_1 - c)Q(p_1)/2 & \text{若 } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{若 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

- 张三会比李四的定价  $p_2$  低一点, 但又只低一点点...
- 这时, 张三的最优反应函数不存在. 因为函数  $\pi(p_1)$  无最大值点.



**定理:** 伯特兰模型存在唯一的纯策略纳什均衡:  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (c, c)$ .

**证明思路:**

1. 证明  $(c, c)$  为纳什均衡.
2. 证明不存在其他纯策略纳什均衡.

**定理:** 伯特兰模型存在唯一的纯策略纳什均衡:  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (c, c)$ .



**证明思路:**

1. 证明  $(c, c)$  为纳什均衡. (按照纳什均衡的定义验证即可)
2. 证明不存在其他纯策略纳什均衡. (反证法)

假设  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$  为纳什均衡.

- 均衡中, 厂商不会亏本经营. 否则, 亏本经营的厂商可以提价到  $p = c$ , 从负利润变为零利润.
  - 结论1:  $\min\{\bar{p}_1, \bar{p}_2\} \geq c$ .
- 均衡中, 两家厂商的定价一定相同. 否则, 不妨令  $\bar{p}_1 > \bar{p}_2 \geq c$ . 此时厂商 2 可以将价格从  $\bar{p}_2$  提高到  $(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)/2$ , 并获得更高的利润.
  - 结论2:  $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p} \geq c$ .
- 均衡中, 一定有  $\bar{p} = c$ . 否则, 给定厂商 1 的定价  $\bar{p} > c$ , 存在某个充分小的正数  $\varepsilon > 0$ , 使得厂商 2 可以降价到  $\bar{p} - \varepsilon$ , 并获得更高的利润.
  - 结论3:  $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = c$  是唯一可能的纯策略纳什均衡.

## 伯特兰悖论

- 相比古诺模型, 伯特兰模型只做了一个"小改动": 从同时**定产**变为同时**定价**
- 但是, 不同于古诺模型, **伯特兰模型的预测和通常的经济学直觉相差非常大.**
- 古诺模型中, 寡头厂商的均衡利润始终为正, 并且均衡利润和厂商数量  $n$  负相关.
  - 这和经济学原理中的直觉相符 
- 伯特兰模型中, 即使只有两家厂商, 厂商的均衡利润也为零.
  - 严重违反了经济学原理中的直觉(以及人们的日常经验) 
  - 因此, 伯特兰模型的结果常常被称为"伯特兰悖论".



## 伯特兰悖论: 原因何在

是因为"同时定价"这个假设不符合实际么?

- 不是这个原因.
- 相比"同时定产", "同时定价"假设其实更符合现实.
  - 现实中绝大多数企业都是先制定价格, 然后根据潜在的市场需求, 来判断是进一步降价或提价.

## 伯特兰悖论: 原因何在

在产业组织的相关研究中, 伯特兰模型是最常用的基本模型之一 (即所谓的 *workhorse model*). 研究者们通常会加入如下额外假设:

- 厂商的产能有上限. 这时, 即使  $p_1 < p_2$ , 厂商 1 也无法获取垄断利润, 因为产能不足 (Bertrand-Edgeworth 模型)
- 厂商的价格不是公开透明的. 消费者必须付出一定的搜寻成本, 才能得知真实的价格. (Varian, 1980: A Model of Sales)
- 厂商的成本不是外生给定的, 而是和厂商本身的研发投入有关. 并且, 厂商的成本通常是自己的私人信息, 不为其它厂商所知.
- ...

这些额外假设避免了伯特兰悖论的出现.