UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Lilja

Algebra I
Övningar
2017-09-25

Övningar om mängders kardinalitet

Övning 1. Förklara varför följande mängder är uppräkneliga:

1. $\{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 10\}$,
2. $\left\{\frac{5}{2n} \colon n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$,
3. $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$,
4. mängden av lösningar till den Difoantiska ekvationen $5x + 3y = 1$.

Övning 2. Vilka av mängderna i föregående uppgift har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$?

Övning 3. Visa att relationen $=_c$ har samma egenskaper som en ekvivalensrelation, d.v.s. den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.[1]

Övning 4. Visa att $X \geq_c Y$ om och endast om det finns en surjektion från X till Y.

Övning 5. Låt L vara mängden av alla linjer i xy-planet som passerar igenom $(0, 0)$. Avgör om L är uppräknelig eller ej.

Övning 6. Låt X och Y vara uppräkneliga. Visa att även $X \cup Y$ är uppräknelig.

Övning 7. Låt X och Y vara uppräkneliga. Visa att även $X \times Y$ är uppräknelig.

Övning 8. Låt X_n vara uppräknelig för varje $n \in \mathbb{N}$. Visa att även $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ är uppräknelig.

Övning 9. Låt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ och $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ vara två ändliga mängder.

1. Ange ett krav på n och m som är ekvivalent med att det finns en injektion från A till B.
2. Ange ett krav på n och m som är ekvivalent med att det finns en surjektion från A till B.
3. Ange ett krav på n och m som är ekvivalent med att det finns en bijektion från A till B.

Övning 10. Låt A och B vara som i föregående övning. Beräkna i vart och ett av fallen hur många injektioner/surjektioner/bijektioner det finns.

OBS: att beräkna antalet surjektioner är mycket mer komplicerat än de övriga, så spendera inte för mycket tid med detta. Se facit för ledning.

[1] Tips: Kom ihåg att om f är en bijektion så är också f^{-1} en bijektion.

Övning 11.

1. Konstruera en bijektion mellan $[0,1]$ och $[3,8]$.
2. Konstruera en bijektion mellan $[0,1]$ och $[a,b]$ där a,b är reella tal som uppfyller $a < b$.
3. Konstruera en bijektion mellan $[a,b]$ och $[c,d]$ där a,b,c,d är reella tal som uppfyller $a < b$ och $c < d$.

Övning 12. Visa att $[0,1] =_c (0,1]$.[2]

Övning 13. Låt X vara mängden av alla oändliga talföljder av nollor och ettor, d.v.s. alla följder $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ där varje a_n är antingen 0 eller 1. Visa att X är en överuppräknelig mängd genom att använda Cantors diagonalmetod.

[2]Tips: Att konstruera en bijektion kan vara svårt. Försök isåfall att använda de satser som gåtts igenom.

Facit och ledningar

Övning 1.

1. Mängden är en delmängd av den uppräkneliga mängden $\mathbb{N}$.
2. Mängden är en delmängd av den uppräkneliga mängden $\mathbb{Q}$.
3. Mängden är en delmängd av den uppräkneliga mängden $\mathbb{N}$.
4. Det finns en bijektion mellan lösningsmängden och $\mathbb{Z}$ som ges av $n \mapsto (x_0 - bn, y_0 + an)$. Eftersom $\mathbb{Z}$ är uppräknelig är därför lösningsmängden också uppräknelig.

Övning 2. Mängderna från 1, 2 och 4.

Övning 3.
Reflexiv: Det finns alltid en enkel bijektion från en mängd till sig själv.
Symmetrisk: Hur beter sig inversen av en bijektion?
Transitiv: Hur beter sig sammansättningen av två bijektioner?

Övning 4. Om $X \geq_c Y$ finns en injektion från Y till X. Använd denna för att skapa en surjektion från X till Y. Glöm inte att definiera hur den avbildar elementen i X som inte träffas av injektionen. Om å andra sidan det finns en surjektion $f\colon X \to Y$ kan vi välja ut ett element[3] x ur varje urbild $f^{-1}(y) = \{x \in X\colon f(x) = y\}$. Använd detta för att skapa en injektion $Y \to X$.

Övning 5. Nej, mängden L är inte uppräknelig. Jämför med reella talen.

Övning 6. Jämför med hur vi visade att $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z}$: skicka vartannat naturligt tal på ett element i X och vartannat på ett element i Y.

Övning 7. Jämför med hur vi visade att $\mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$: skicka elementen på diagonaler.

Övning 8. Samma idé som i föregående uppgift.

Övning 9.

1. $n \leq m$
2. $n \geq m$
3. $n = m$

Övning 10.

1. $\binom{m}{n} n!$
2. Den här är en riktig kluring. Det man kan göra någorlunda enkelt är att hitta en rekursiv formel för antalet surjektioner.

   Om vi låter $f(n, m)$ vara antalet surjektioner från en mängd med n element till en mängd med m element. Vi vill räkna på hur många sätt vi kan skapa en surjektion $g\colon A \to B$. Vi börjar med att sätta $g(a_1) = b_j$ för något j. Här har vi m olika valmöjligheter.

[3] Detta är väldigt subtilt. Den intresserade kan läsa om urvalsaxiomet på t.ex. wikipedia.

Efter att ha valt $g(a_1)$ betraktar vi vad g gör med mängden $A \setminus \{a_1\}$. Här finns två alternativ: antingen har vi $g(a_k) \neq b_j$ för alla återstående $k \geq 2$ eller så har vi att det finns något a_k som också skickas på b_j, $g(a_k) = b_j$. I det första fallet ska vi skapa en surjektion från $A \setminus \{a_1\}$, som har $n-1$ element, till mängden $B \setminus \{b_j\}$, som har $m-1$ element. Antalet sådana surjektioner är därför $f(n-1, m-1)$. I det andra fallet ska vi skapa en surjektion från $A \setminus \{a_1\}$ till mängden B eftersom det ska finnas ytterliggare ett element som avbildas på samma b_j. Antalet sådana surjektioner är $f(n-1, m)$.

Sammanlagt får vi då rekursionsformeln $f(n,m) = m(f(n-1,m-1) + f(n-1,m))$. Det slutliga svaret är relaterat till de så kallade Stirlingtalen av andra slaget, se Wikipedia.

3. $n!$

Övning 11. 1. Till exempel $f(x) = 5x + 3$.

2. Till exempel $f(x) = (b-a)x + a$.

3. Till exempel $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$.

Övning 12. Konstruera en injektion $[0,1] \to (0,1]$ och en injektion $(0,1] \to [0,1]$. Använd sedan Schröder-Bernsteins sats.

Övning 13. Konstruera en följd b av nollor och ettor som omöjligt kan vara med i en uppräkning.